www.Mohandesyar.com

فصل ۷

مدارهای با القای متقابل (تزویج)

مقدمه

شهر مدارهای الکتریکی شباهت‌هایی با شهر خودمان دارد و به قول

شماها بین این شهرها یک دوگانی یا دوآلیتی برقرار است. بعضی عناصر مجردند، یعنی ولتاژشان به جریان خودشان بستگی دارد و جریانشان به ولتاژ خودشان مربوط است و کاری به بقیه عناصر ندارند؛ اما در همین شهر برخی از عناصر متأهل‌اند؛ یعنی ولتاژشان علاوه بر جریان خودشان به جریان عنصر دیگری نیز بستگی دارد. (و یا حتی به جریان عناصر دیگرا!) و همین‌طور درمورد جریانشان؛... به اینگونه عناصر، مدارهای با القای متقابل یا دارای تزویج می‌گویند و همان‌طور که در جامعه‌شناسی مهم است، در اینجا نیز نحوهٔ برخورد با این عناصر را باید خوب بلد باشیم تا به مشکل برنخوریم!

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

۷ـ۱ کلیات و روابط

مفهوم: اصل داستان این است:

پسر بچه‌ای سیزده ساله که به خاطر فقر نمی‌توانست در کلاس‌های مدار و الکترومغناطیس شرکت کند!! در یک آزمایشگاه کار می‌کرد. البته منظورم کار عملی نیست، او مستخدم بود؛ پادو بود. روزی مسئول آزمایشگاه سرش فریاد کشید که:

«آهای مایکل، اون آهن‌ربای قوی را بیاور» و مایکل که دوان‌دوان در راهروی بین میزهای آزمایشگاه می‌دوید تا آهن‌ربای قوی را به او برساند می‌گوید: «ناگهان برقی روی یکی از میزها در چشمانم ظاهر شد.»

این یک برق کوچک، او را به فکری بزرگ فرو برد. می‌گوید «آن شب به خاطر کشف این معما از استادم اجازه گرفتم تا به بهانهٔ تی کشیدن کف آزمایشگاه و نظافت اساسی، کمی دیرتر بروم.! او هم اجازه داد، اما هرچه آزمایش را تکرار کردم، هیچ چیزی نشد که نشد.»

اما آقا مایکل کوتاه نیامد مدت‌ها فکر کرد که فرق اتفاق آن شب با اتفاق آن روز در چه بوده است؟ تا اینکه بالاخره برقی در وجودش پیدا شد که: «آهان فهمیدم! آن روز با عجله و به دو حرکت کردم ولی آن شب به خاطر دقت در میزها آرام قدم برمی‌داشتم» او آزمایش را تکرار کرد و دوباره آن روشنایی در چشمانش دیده شد...

ما قانون:

$$E=-\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=-\frac{d\varphi}{dt} \qquad (۱ـ۷)$$

را از وجود مقدس[1] او داریم[2].

او در جوانی گفته بود: «به قانونی رسیدم که بعدها، دولت‌ها بر آن مالیات می‌بندند...»

و من امروز خوشحالم که ما هم از این قانون بی‌بهره نیستیم؛ حداقل اینکه دولتِ علمی ما حرف آقای فارادی را به جان خرید و فقط به خاطر آقا مایکل این بخش از قانون را در کشورمان جاری ساخت!

چه نتیجه‌ای از این داستان گرفتید؟

اینکه اگر جریان عبوری از یک سیم‌پیچ تغییر کند، آن‌گاه شار مغناطیسی گذرنده از آن هم عوض می‌شود و بنابراین در آن ولتاژی القا می‌شود. حال اگر شار گذرنده از سیم‌پیچ اولی روی دومی هم مؤثر باشد، تغییر جریان اولی، هم در خودش و هم در دومی ایجاد ولتاژ القایی می‌کند که به آن القای متقابل می‌گوییم.

۱ـ روی کلمه «مقدس» تأکید می‌کنم.

۲ـ البته علامت منفی از ذکاوت آقای لنز است.

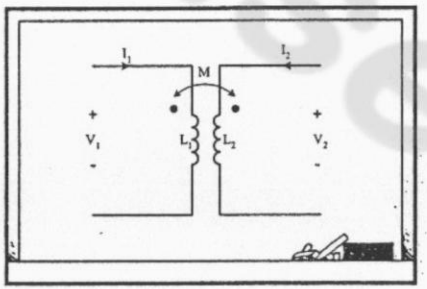
آفرین؛ هرچه داستان من برای گروه سنی «الف»! مفید بود، بیان علمی شما مخصوص گروه سنی «ی»! گفته شد.

البته جایش نیست ولی من حیفم می‌آید که نگویم؛ یک نتیجه دیگر از داستان آن است که «فرصت‌ها خیلی زود می‌آیند، برق‌ها خیلی کم در عقل و دل آدم جرقه می‌زنند، قدرشان را بدانید، چهاردستی ! سفت، آن‌ها را بچسبید، نکند که مثل ابرها، بیایند و بروند و...»

روابط: ببینید، تمام روابط عین قبل است منتهی در این‌جا به صورت:

ماتریسی

مثلاً در شکل (۷ـ۱) دقت کنید:



شکل (۷ـ۱) سلف‌های دارای القای متقابل (تزویج)

در حالت خطی[1]

$$\begin{cases}\varphi_1 = L_1 I_1 + M I_2 \\ \varphi_2 = M I_2 + L_2 I_2\end{cases} \qquad (۳ـ۷)$$

L_1 اندوکتانس خودی سلف اول و M ضریب القای متقابل بین آن‌هاست و در عبارت ماتریسی:

$$\varphi = L I \qquad (۴ـ۷)$$

۱ـ اگر غیرخطی بود، روابط به صورت مقابل می‌شد:

$$\begin{cases}\varphi_1 = f(I_1, I_2) \\ \varphi_2 = g(I_1, I_2)\end{cases} \qquad (۲ـ۷)$$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

که φ بردار شار سلف‌ها و L ماتریس اندوکتانس و I بردار جریان سلف‌هاست.

(۵ـ۷)
$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L_1 & M\\ M & L_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_1\\ I_2\end{pmatrix}$$

تمام روابط دیگر هم به همین سادگی هستند. اگر دوست دارید، خودتان بگویید:

مثلاً برای ولتاژ و جریان:

(۶ـ۷)
$$V=L\frac{dI}{dt}$$

این یعنی:

(۷ـ۷)
$$\begin{pmatrix}V_1\\ V_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L_1 & M\\ M & L_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{dI_1}{dt}\\ \frac{dI_2}{dt}\end{pmatrix}$$

و پس از بسط:

(۸ـ۷)
$$\begin{cases}V_1=L_1\frac{dI_1}{dt}+M\frac{dI_2}{dt}\\ V_2=M\frac{dI_1}{dt}+L_2\frac{dI_2}{dt}\end{cases}$$

و یا در حالت فازوری:

(۹ـ۷)
$$V=j\omega LI$$

و این یعنی:

(۱۰ـ۷)
$$\begin{pmatrix}V_1\\ V_2\end{pmatrix}=j\omega\begin{pmatrix}L_1 & M\\ M & L_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_1\\ I_2\end{pmatrix}$$

و پس از بسط:

(۱۱ـ۷)
$$\begin{cases}V_1=j\omega L_1I_1+j\omega MI_2\\ V_2=j\omega MI_1+j\omega L_2I_2\end{cases}$$

یعنی در اینجا هم باید عینک زد، فقط باید حواسمان باشد که یک سلف پنهان همیشه بین دو سلف دارای تزویج وجود دارد.اینجا باید چشم‌های ما خیلی باز باشد تا آن را ببینیم. (به قول استاد عجب جملهٔ زیبایی است؛ آن را چند بار بخوانید!)

خوب است. یادتان هست قبلاً در سلف مجرد ! می‌گفتیم که:

(۱۲ـ۷)
$$\varphi=LI$$

مثلاً:
$$\varphi=5I$$

و برای I برحسب φ داشتیم:
$$I=\frac{1}{5}\varphi$$

اما حالا چی؟

استاد ما این قدرها هم اوضاع ریاضی‌مان خراب نیست. خُب معلوم است دیگر، قصه اینجا ماتریسی است، یعنی:

(۱۳ـ۷)
$$I=L^{-1}\phi=\Gamma\phi$$

اولاً از جسارتی که به ساحت مقدستان شد معذورم، ثانیاً اسم این ماتریس وارون L را ماتریس رلوکتانس[1] می‌گذاریم.

(۱۴ـ۷)
$$\Gamma=L^{-1}=\frac{1}{L_1L_2-M^2}\begin{pmatrix}L_2 & -M\\ -M & L_1\end{pmatrix}$$

حالا اگر چند سلف (n تا) با هم درتزویج باشند، روابط چگونه می‌شود؟

باز هم معلوم است دیگر؛ مجدداً به صورت ماتریسی فقط مرتبهٔ ماتریس‌ها n × n می‌شود.

۱ـ قابل توجه دوستانی که برای فرزندانشان به دنبال اسم‌های جدید و عجیب هستند، رلوکتانس اسم بدی نیست؛ فقط اینکه دختر است یا پسر، نمی‌دانم !

www.Mohandesyar.com

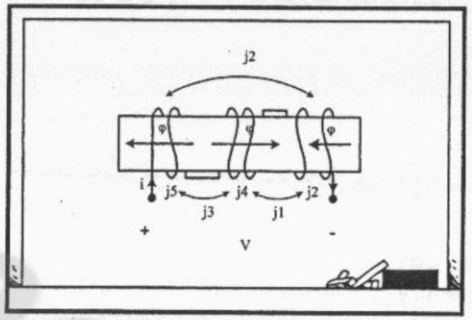
www.Mohandesyar.com

سؤال بعدی آن است که آیا این دو سلف تزویج روی هم اثر تقویتی دارند یا تضعیفی؟ به عبارت دیگر علامت M چیست؟

دو روش برای تشخیص این امر داریم: یکی **شست دست راست**! منظورم را می‌فهمید؟!

بله، یادش به خیر، یک درس فیزیک الکتریسیته داشتیم و یک شست دست راست!

مثلاً در شکل (۷ـ۲) به ترتیب از چپ به راست، جهت شار به کمک دست راست به سمت چپ ـ راست ـ چپ است، پس القای متقابل بین اولی و دومی و بین دومی و سومی منفی است (چراکه φ در آن‌ها خلاف جهت یکدیگر است) و بین اولی و سومی مثبت است.



شکل (۴ـ۲) سه سلف دارای تزویج با یکدیگر

چقدر جالب! حالا به جایی رسیده‌ایم که شما به بهانهٔ جواب دادن به سؤالات، یک تمرین خوب برای دوستانتان مطرح می‌کنید.

اصلاً چه ایرادی دارد، کم‌کم باید جای ما عوض شود و ...

۱ـ در مدار شکل (۷ـ۲) امپدانس معادل را بیابید. صبر کنید، قبل از حل مسئله مَن درسش را بگویم!

۷ـ۲ به هم بستن سلف‌های دارای تزویج

سلف‌های دارای تزویج، پس از اتصال به یکدیگر، در حکم یک **سلف تنها** می‌باشند و باید در نهایت مقدار L_{eq} را برای آن‌ها محاسبه کرد. (در حوزهٔ زمان گاهی هم می‌توان برای سادگی، به‌جای KVL از $K\varphi L$! بهره گرفت[1].)

حالا در شکل (۷ـ۲)، KVL می‌زنیم: (با توجه به علامت M)

$$V = \underbrace{j5i_1 - j3i_2 + j2i_3}_{\text{ولتاژ سلف چپی}} + \underbrace{j4i_2 - j3i_1 - ji_3}_{\text{ولتاژ سلف وسطی}} + \underbrace{j2i_3 + j2i_1 - ji_2}_{\text{ولتاژ سلف راستی}}$$

با توجه به سری بودن سلف‌ها و اینکه:

$$i = i_1 = i_2 = i_3$$

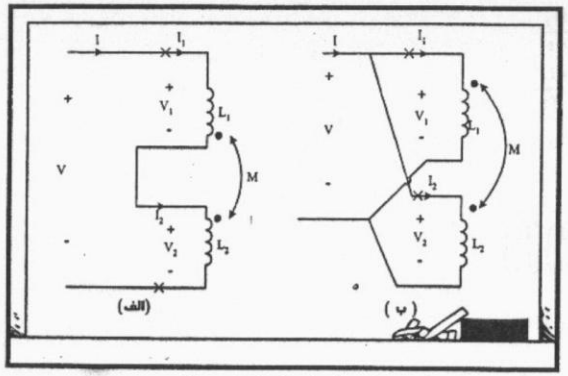
داریم:

$$V = j7i \rightarrow Z_{eq} = j7\,\Omega$$

بله، عرض می‌کردم، از علامت M می‌گفتم. راه دوم تشخیص علامت M **قرارداد نقطه** است، به این صورت که:

اگر هر دو جریان از سر نقطه وارد سلف شدند یا اینکه هر دو جریان از سر نقطه سلف را ترک کردند، $M > 0$ والا اگر یکی از جریان‌ها در سر نقطه وارد سلف و دیگری در سر نقطه سلف را ترک کرد، $M < 0$.

۲ـ در مدارهای شکل (۷ـ۳)، اندوکتانس معادل L_{eq} را بیابید.



شکل (۳ـ۲) مدارهای تمرین ۲

۱ـ یعنی اگر هنگام بحث بر سر حل یک مسئله زبانتان گرفت و به‌جای KVL گفتید $K\varphi L$، اصلاً به روی خودتان نیاورید، انگارنه‌انگار که اتفاقی رخ داده است؛ به حرفتان با همان $k\varphi L$ ادامه بدهید؛ همه چیز درست پیش خواهد رفت. (چراکه روابط حاکم بر V در یک مدار همان روابط حاکم بر φ است.)

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

از الف) شروع کنیم؛ با KVL و به عبارتی $K\varphi L$ داریم:

واضح است که $M<0$ چراکه I_1 در سر نقطه از سلف خارج شده و I_2 در سر نقطه وارد سلف می‌شود.

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2=\underbrace{L_1I_1-MI_2}_{\varphi_1}+\underbrace{L_2I_2-MI_1}_{\varphi_2}$$

و با توجه به برابری جریان‌ها:

$$\varphi=(L_1+L_2-2M)I$$

پس:

(۱۵ـ۷)
$$L_{eq}=L_1+L_2-2M$$

و برای شکل (ب) واضح است که $M>0$ ، حالا KCL می‌زنیم:

$$I=I_1+I_2=\underbrace{\Gamma_{11}\varphi_1+\Gamma_{12}\varphi_2}_{I_1}+\underbrace{\Gamma_{21}\varphi_1+\Gamma_{22}\varphi_2}_{I_2}$$

قصد جسارت ندارم! ولی فکر کنم دوستم اشتباه می‌کند، چرا که علامت Γ_{12} و M مخالف یکدیگر نه، زیرا:

(۱۶ـ۷)
$$\Gamma_{12}=\frac{-M}{\det L}$$

چون همواره $\det L>0$[1] پس M و Γ_{12} مختلف‌العلامه‌اند. یعنی در شکل (۷ـ۳ـ ب) $\Gamma_{12}<0$ است؛ پس رابطهٔ بالا را اصلاح می‌کنم و با توجه به آنکه $\varphi_2=\varphi_1=\varphi$ داریم:

$$I=\Gamma_{11}\varphi-\Gamma_{12}\varphi+\Gamma_{22}\varphi-\Gamma_{12}\varphi$$
$$I=(\Gamma_{11}+\Gamma_{22}-2\Gamma_{12})\varphi$$

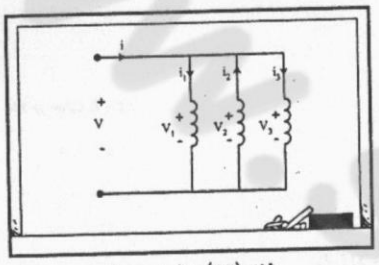
پس:

(۱۷ـ۷)
$$L_{eq}=\frac{1}{\Gamma_{11}+\Gamma_{22}-2\Gamma_{12}}$$

۱ـ شرط لازم برای ماتریس L که یک ماتریس معین مثبت است، آن است که $\det L\geq 0$

۳ـ اندوکتانس معادل را بیابید، به شرطی که ماتریس رلوکتانس این‌گونه باشد:

$$\Gamma=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&2&0\\2&0&1\end{pmatrix}$$



شکل (۴.۷) مدار تمرین ۳

با توجه به ماتریس رلوکتانس داریم:

$$\begin{pmatrix}i_1\\i_2\\i_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&2&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\\varphi_2\\\varphi_3\end{pmatrix}$$

و با توجه به برابری Vها و در نتیجه φها ، داریم:

$$i_1=2\varphi\ ,\ i_2=\varphi\ ,\ i_3=3\varphi$$

و به خاطر KCL :

$$i=i_1-i_2+i_3=2\varphi-\varphi+3\varphi=4\varphi$$
$$L_{eq}=0.25H$$

آفرین؛ پس یک‌بار دیگر یادآوری می‌کنم؛ شما تمام روابطی را که برای ولتاژ V (وی) دارید، برای شار φ (فی) دارید. یعنی فرض کنید زبانتان می‌گیرد و به‌جای V می‌گویید φ (یا به‌جای KVL ، $K\varphi L$ می‌زنید!)

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

۷ـ۳ انرژی در سلف‌های تزویج

اینجا هم رابطه‌ای داریم به صورت:

(۱۸ـ۷)
$$\varepsilon = \frac{1}{2} I' L I$$

که I' ترانهادهٔ بردار جریان است. مثلاً در حالت 2×2:

(۱۹ـ۷)
$$\varepsilon = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_1 & I_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

که اگر آن را بسط دهیم:

(۲۰ـ۷)
$$\varepsilon = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + \frac{1}{2}MI_1 I_2 + \frac{1}{2}MI_1 I_2$$

حالا هر جمله را توضیح می‌دهم:

$\frac{1}{2}L_1 I_1^2$: انرژی سلف اول در زمان مجردی (همیشه مثبت)

$\frac{1}{2}L_2 I_2^2$: انرژی سلف دوم در زمان مجردی (همیشه مثبت)

$\frac{1}{2}MI_1 I_2$: انرژی سلف اول فقط در اثر تزویج (مثبت یا منفی)

$\frac{1}{2}MI_1 I_2$: انرژی سلف دوم فقط در اثر تزویج (مثبت یا منفی)

توجه کنید با آنکه بعضی جملات ممکن است منفی باشند، ولی در مجموع:

(۲۱ـ۷)
$$\varepsilon \geq 0$$

۷ـ۴ تحلیل مدارهای شامل سلف‌های تزویج

فقط باید فرق آدم[1] مجرد و مزدوج را بدانید. وقتی از آدم مجرد حال ولتاژش را می‌پرسید، مثلاً می‌گوید:

(۲۲ـ۷)
$$V_{\text{خودش}} = j\omega L_{\text{خودش}} I_{\text{خودش}}$$

اما سلف دارای تزویج می‌گوید:[2]

(۲۳ـ۷)
$$V_{\text{خودش}} = j\omega L_{\text{خودش}} I_{\text{خودش}} + j\omega M_{\text{متقابل}} I_{\text{دیگری}}$$

پس روش‌ها عیناً همانند قبل است فقط یادتان باشد که در اینجا ولتاژ هر سلف تزویج ناشی از دو امر است، یکی جریان خودش و یکی جریان سلف (یا جریان سلف‌هایی) که با آن‌ها در تزویج است. همچنین جریان هر سلف تزویج هم به ولتاژ خودش مربوط است و هم به ولتاژ سلف‌هایی که با آن‌ها تزویج دارد. (این مفهوم را چندبار با خودتان تکرار کنید.)

۱ـ منظورم از آدم همان سلف است!

۲ـ اگر سلف‌های دارای تزویج جامعه، فرق روابط (۷ـ۲۲) و (۷ـ۲۳) را می‌فهمیدند محشر می‌شد.

www.sem-eng.com

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

۷ـ۳ انرژی در سلف‌های تزویج

اینجا هم رابطه‌ای داریم به صورت:

(۷ـ۱۸)
$$\varepsilon = \frac{1}{2} I' L I$$

که I' ترانهادهٔ بردار جریان است. مثلاً در حالت 2×2:

(۷ـ۱۹)
$$\varepsilon = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I_1 & I_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

که اگر آن را بسط دهیم:

(۷ـ۲۰)
$$\varepsilon = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + \frac{1}{2}MI_1 I_2 + \frac{1}{2}MI_1 I_2$$

حالا هر جمله را توضیح می‌دهم:

$\frac{1}{2}L_1 I_1^2$: انرژی سلف اول در زمان مجردی (همیشه مثبت)

$\frac{1}{2}L_2 I_2^2$: انرژی سلف دوم در زمان مجردی (همیشه مثبت)

$\frac{1}{2}MI_1 I_2$: انرژی سلف اول فقط در اثر تزویج (مثبت یا منفی)

$\frac{1}{2}MI_1 I_2$: انرژی سلف دوم فقط در اثر تزویج (مثبت یا منفی)

توجه کنید با آنکه بعضی جملات ممکن است منفی باشند، ولی در مجموع:

(۷ـ۲۱)
$$\varepsilon \geq 0$$

۷ـ۴ تحلیل مدارهای شامل سلف‌های تزویج

فقط باید فرق آدم[1] مجرد و مزدوج را بدانید. وقتی از آدم مجرد حال ولتاژش را می‌پرسید، مثلاً می‌گوید:

(۷ـ۲۲)
$$V_{\text{خودش}} = j\omega L_{\text{خودش}} I_{\text{خودش}}$$

اما سلف دارای تزویج می‌گوید:[2]

(۷ـ۲۳)
$$V_{\text{خودش}} = j\omega L_{\text{خودش}} I_{\text{خودش}} + j\omega M_{\text{متقابل}} I_{\text{دیگری}}$$

پس روش‌ها عیناً همانند قبل است فقط یادتان باشد که در اینجا ولتاژ هر سلف تزویج ناشی از دو امر است، یکی جریان خودش و یکی جریان سلف (یا جریان سلف‌هایی) که با آن‌ها در تزویج است. همچنین جریان هر سلف تزویج هم به ولتاژ خودش مربوط است و هم به ولتاژ سلف‌هایی که با آن‌ها تزویج دارد. (این مفهوم را چندبار با خودتان تکرار کنید.)

۱ـ منظورم از آدم همان سلف است!

۲ـ اگر سلف‌های دارای تزویج جامعه، فرق روابط (۷ـ۲۲) و (۷ـ۲۳) را می‌فهمیدند محشر می‌شد.

www.sem-eng.com

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

پس در حلقه‌های چپی و راستی KVL می‌زنیم، این‌جوری:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = j\,2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

و با حل آن به هر روشی که دوست دارید I_1 به دست می‌آید:

$$I_1 = -\frac{3}{10}j$$

از طرفی جریان مقاومتِ بالایی مدار برابر است با:

$$I_3 = \frac{1-0}{10} = \frac{1}{10}$$

پس:

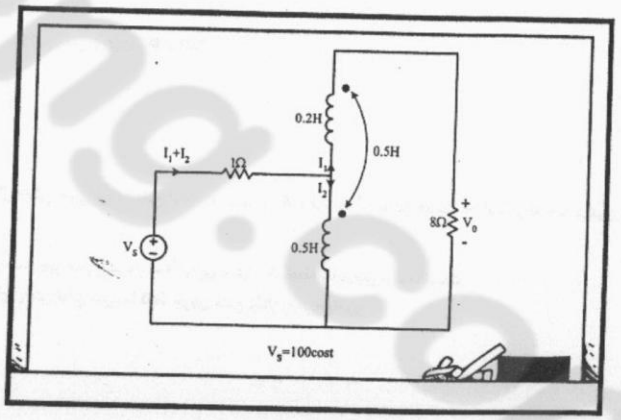
$$I = I_1 + I_3 = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}j$$

بنابراین:

$$S = \frac{1}{2} V \times I^* = \frac{1}{2} \times 1 \times \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10}j\right)$$

$$S = \frac{1}{20}(1 + j\,3)$$

۶ـ در مدار شکل (۸ـ۷) اندازهٔ فازور ولتاژ V_0 در دو سر مقاومت 8 اهمی چند ولت است؟



شکل (۸ـ۷) مدار تمرین ۶

روی شکل مدار جریان‌های I_1 و I_2 را لحاظ می‌کنیم[1] و پس از KCL بازی، در دو حلقهٔ مدار، KVL می‌زنیم:

$$\text{KVL}_{\text{حلقهٔ چپی}} \quad : \quad 100 = I_1 + I_2 + j\,0.5\,I_2 - j\,0.5\,I_1$$

$$\text{KVL}_{\text{حلقهٔ راستی}} \quad : \quad j\,0.2\,I_1 - j0.5I_2 + 8I_1 - j0.5I_2 + j0.5I_1 = 0$$

و با توجه به رابطهٔ گفته‌شده داریم:

$$(8 + j\,0.7)\,I_1 = j\,I_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = (0.7 - j8)I_1$$

و با قرار دادن در رابطهٔ KVL در حلقهٔ سمت چپ خواهیم داشت:

$$100 = (1 - j0.5)\,I_1 + (1 + j0.5)(0.7 - j8)I_1 = (5.7 - j\,8.15)\,I_1$$

و در نتیجه:

$$|I_1| = \frac{100}{\sqrt{5.7^2 + 8.15^2}} = 10\,\text{A}$$

پس:

$$|V_0| = 8|I_1| = 80\ \text{V}$$

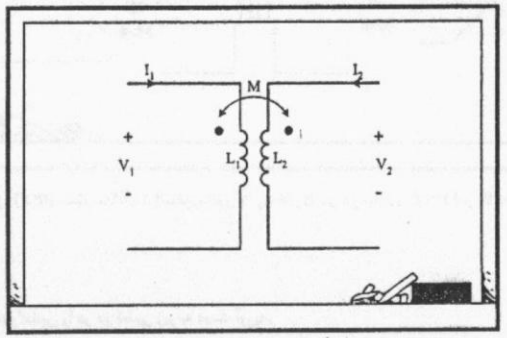
۱ـ I_1 و I_2 و $I_1 + I_2$ را روی شکل (۸ـ۷) ما اضافه کرده‌ایم، در ابتدا در شکل صورت مسئله نبوده است!

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

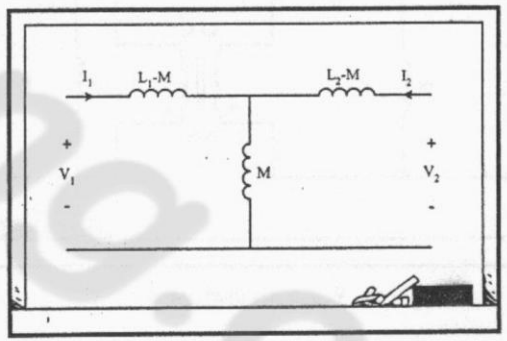
۵ـ۷ مدار معادل سلف‌های تزویج

سلف‌های دارای تزویج شکل (۷ـ۹) دارای مدار معادل‌هایی به صورت T و یا Π هستند:



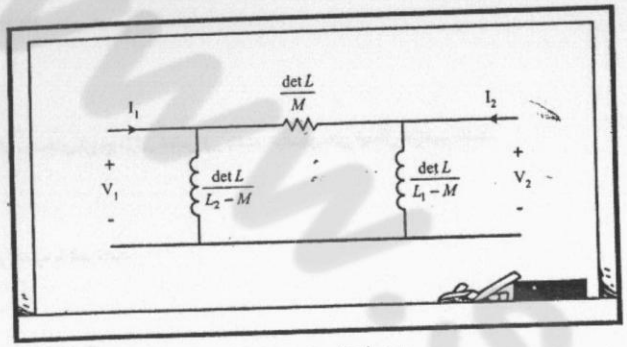
شکل (۹ـ۷) سلف‌های دارای تزویج

مدار معادل T :



شکل (۱۰ـ۷) مدار معادل T

و مدار معادل π :



شکل (۱۱ـ۷) مدار معادل Π

یک نکتهٔ خیلی جالب و با کاربرد در آینده ! :

در درس مرتبهٔ مدار (که ان‌شاءالله... به آن هم می‌رسیم) باید تعداد سلف‌ها و خازن‌ها را بشمریم؛ آنجا یادتان باشد که دو سلف تزویج هنگام شمارش در حکم سه سلف محسوب می‌شوند، آن هم به یکی از فرم‌های T و یا Π

تکرار می‌کنم؛ البته نه هر سه تا سلفی که هرجوری خواستند به هم متصل باشند، بلکه به صورت Π و یا T . الان که منظورتان را کاملاً نفهمیدم، امیدوارم به موقعش درک کنم!

فوق‌العاده است، آفرین، دوستانتان ارزش حرف شما را در بحث مرتبهٔ مدار قشنگ‌تر متوجه می‌شوند.

هم‌اکنون سراغ مطلبی می‌رویم که از دوران پیش‌دبستانی برق تا فوق‌دکترای برق با آن سروکار داشته و خواهیم داشت.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

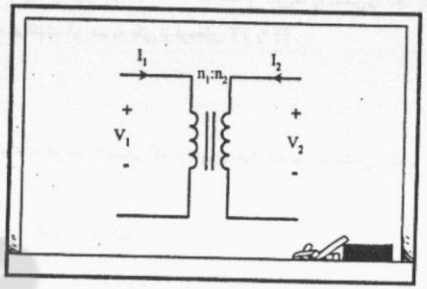
۷ـ۶ ترانسفورماتور

اگر سلف‌های تزویج دارای خواص زیر باشند، ترانسفورماتور ایده‌آل خواهیم داشت:

هیچ انرژی ذخیره یا تلف نشود.

هیچ شار نشتی نداشته باشیم.

خودالقای هر سیم‌پیچ بی‌نهایت باشد. (مقدار اهمی سیم‌پیچ‌ها صفر باشد.)



شکل (۱۴ـ۷) ترانسفورماتور ایده‌آل

روابط به این شرح است:

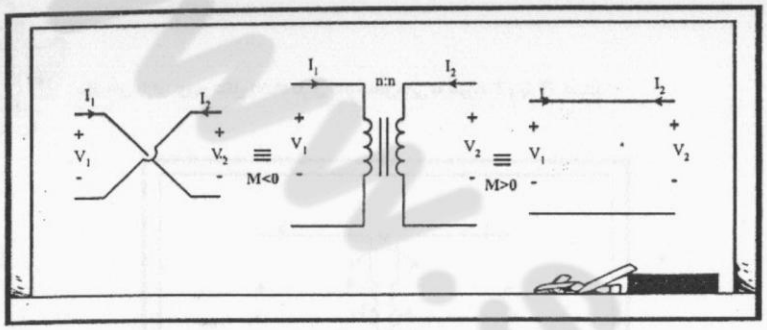
الف) اگر $M > 0$ باشد:

$$\begin{cases} \frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} \\ \frac{I_1}{I_2} = -\frac{n_2}{n_1} \end{cases} \qquad (۲۴ـ۷)$$

ب) و چنانچه $M < 0$ باشد:

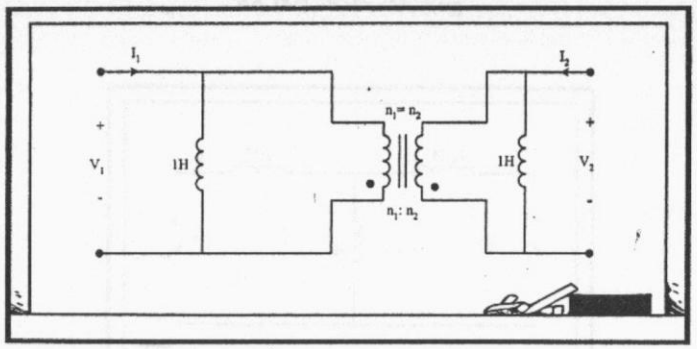
$$\begin{cases} \frac{V_1}{V_2} = -\frac{n_1}{n_2} \\ \frac{I_1}{I_2} = \frac{n_2}{n_1} \end{cases} \qquad (۲۵ـ۷)$$

در ترانس‌های با تعداد دورهای مساوی $(n_1 = n_2)$، ترانس را با مدارهای زیر معادل کنید؛ خیلی کار ساده می‌شود:



شکل (۱۳ـ۷) مدار معادل ترانسفورماتور با $n_1 = n_2$ در دو حالت $M > 0$ و $M < 0$

۷ـ ماتریس اندوکتانس را در دو قطبی زیر به دست آورید.

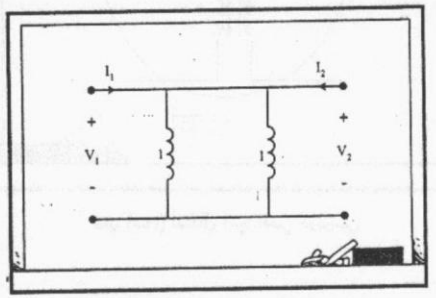


شکل (۱۴ـ۷) مدار تمرین ۷

www.Mohandesyar.com

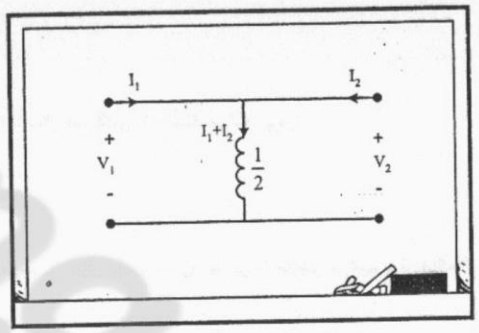
www.Mohandesyar.com

می‌دانم.این تست در کنکوز گرشد برق آمده است. شاید آنجا خیلی سخت بوده ولی با نکتهٔ شکل (۷ـ۱۳) کار خیلی ساده می‌شود:



شکل (۱۵ـ۷) حل مدار تمرین ۷

و به عبارت دیگر:



شکل (۱۶ـ۷) ساده شدهٔ مدار تمرین ۷

$$V_1 = V_2 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\text{ماتریس اندوکتانس}} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

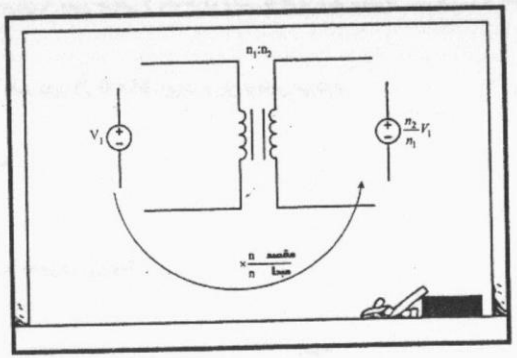
۲ تا تذکر ساده بدهم و رد شویم؛ اولاً اگر در ترانس علامت M معلوم نبود، آن را مثبت بگیرید. ثانیاً کل توانی که در هر لحظه به این دوقطبی (یعنی ترانسفورماتور) می‌دهیم، برابر صفر است.

حالا می‌خواهم راجع به مهم‌ترین بحث در ترانسفورماتور حرف بزنم، خوب خوب گوش کنید:

۷ـ۷ قضایای انتقال در ترانسفورماتور

من حرفی نمی‌زنم، فقط خواهش می‌کنم، چشمهایتان را خوب باز کنید و به شکل‌های (۷ـ۱۷) تا (۷ـ۲۰) خوب نگاه کنید:

۷ـ۷ـ۱ انتقال ولتاژ



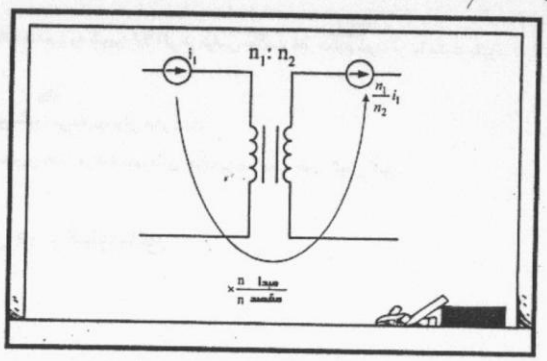
شکل (۱۷ـ۷) انتقال ولتاژ در ترانس (برای $M > 0$)

یعنی هرگاه ولتاژ یا منبع ولتاژی از یک طرف ترانس به طرف دیگر برود، در $\frac{n_{مبدا}}{n_{مقصد}}$ ضرب می‌شود. (به پلاریتهٔ ولتاژ و علامت M توجه می‌کنیم.) درصورتی‌که $M < 0$، پلاریتهٔ منبع سمت راستی برعکس می‌شود.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

۷ـ۷ـ۲ انتقال جریان



شکل (۱۸ـ۷) انتقال جریان در ترانس (برای $M > 0$)

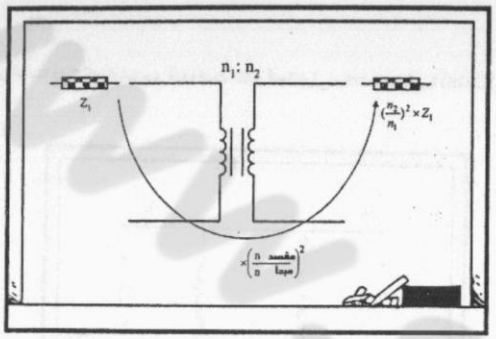
یعنی هرگاه جریان یا منبع جریانی از یک طرف ترانس به طرف دیگر برود، در $\frac{n_{مقصد}}{n_{مبدا}}$ ضرب می‌شود.

به جهت جریان و علامت M دقت کنید. اگر $M < 0$، جهت جریان برعکس می‌شود.

۷ـ۷ـ۳ انتقال امپدانس

فکر می‌کنید چه‌جوری می‌شود؟

معلوم است دیگر، از آنجا که $Z = \frac{V}{I}$، امپدانس در $\frac{n_{مقصد}}{n_{مبدا}}$ ضرب می‌شود.



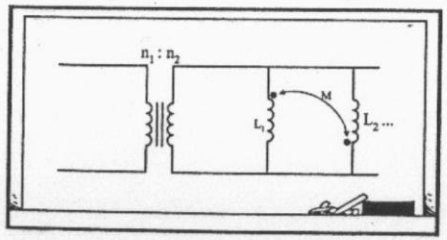
شکل (۱۹ـ۷) انتقال امپدانس درترانس

استاد، یک سؤال در سرم می‌پیچد، اجازه می‌دهید بپرسم؟

چرا که نه، اصلاً سؤال شما کلاس ما را قشنگ می‌کنه، بپرس!

مثِ حدس می‌زنم که سؤال دوستم را می‌دانم؛ پس با اجازه‌اش می‌گویم و آن اینکه اگر سلف‌های تزویج داشته باشیم،

ماجرای انتقال اون‌ها چه جوری می‌شود؟ یعنی مثلاً انتقال یافته شکل زیر چه شکلی می‌شود؟

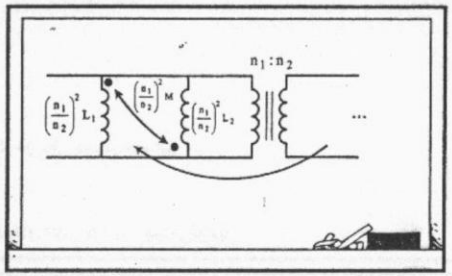


شکل (۲۰ـ۷) سلف تزویج قبل از انتقال در ترانسفورماتور

www.Mohandesyar.com

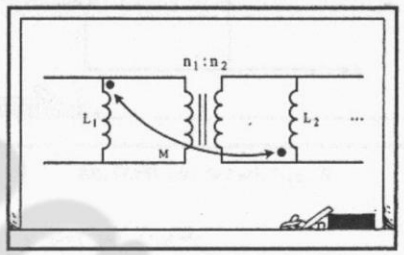
www.Mohandesyar.com

دوستم فکرم را درست خواند؛ اما نصفه؛ جواب سؤال دوستم روشن است؛ این مدار پس از انتقال به این شکل درمی‌آید:



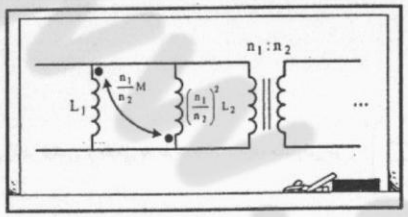
شکل (۴۱ـ۷) سلف تزویج بعد از انتقال در ترانسفورماتور

یعنی L_1 و L_2 و M هم مثل هر امپدانسی در $\left(\frac{n_{مقصد}}{n_{مبدا}}\right)^2$ ضرب می‌شود؛ این که عجیب نبود، سؤال من چیز دیگری است؛ من دوست دارم انتقال یافته شکل زیر را پیدا کنم. آخه این شکل در سؤال‌های کنکور ارشد خیلی دیده می‌شود و حل استاندارد آن خیلی طولانی می‌شود!



شکل (۴۲ـ۷) سلف تزویج دوطرفه قبل از انتقال در ترانسفورماتور

آفرین؛ روی نکتهٔ خوبی دست گذاشتی! انتقال یافته این شکل (مثلاً به سمت چپ ترانسفورماتور) به این شکل درمی‌آید:

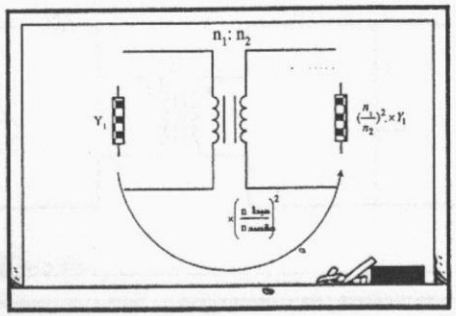


شکل (۴۳ـ۷) سلف تزویج دوطرفه که حالا یک‌طرفه شده (پس از انتقال در ترانسفورماتور)

یعنی L_1 در چیزی ضرب نمی‌شود (چون اصلاً انتقال نیافته) و L_2 مثل گذشته در $\left(\frac{n_{مقصد}}{n_{مبدا}}\right)^2$ ضرب می‌شود و ضریب القای متقابل M در این حالت (که یک پایش این طرف ترانس است و یک پای دیگرش طرف دیگر ترانس است)، در $\frac{n_{مقصد}}{n_{مبدا}}$ ضرب می‌شود و به قول دوستمون این تبدیل از اون تبدیلات پر کاربرد است و نکته‌ای طلایی است.

راستی این را هم بگویم که اگر در ترانس نقطه‌ها (●ها) به‌گونه‌ای باشند که $M_{ترانس} < 0$ باشد محل نقطه‌ها هنگام انتقال سلف‌های تزویج فرقی نمی‌کند ولی اگر $M_{ترانس} > 0$ باشد، محل نقطه‌های سلف‌های تزویج هنگام انتقال تغییر می‌کند، به عبارت بهتر علامت $M_{تزویج}$ قرینه می‌شود.

۴ـ۷ـ۷ انتقال ادمیتانس



شکل (۴۴ـ۷) انتقال ادمیتانس در ترانس

راستی دو رابطهٔ آخر برای $M > 0$ است یا $M < 0$؟

www.Mohandesyar.com

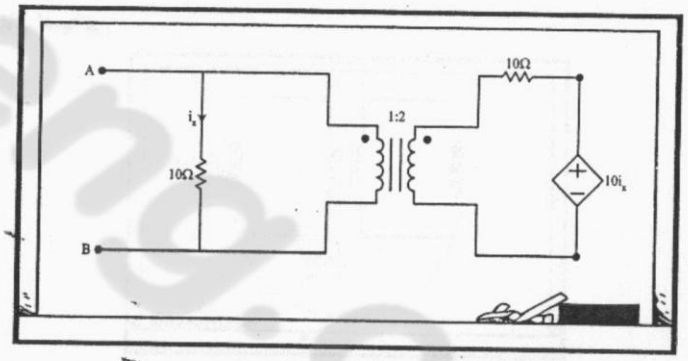
www.Mohandesyar.com

واضح است، در اینجا هیچ فرقی نمی‌کند، چه $M > 0$ و چه $M < 0$.

پس هرگاه امپدانس را در ترانس از طرفی به طرف دیگر بردید، مقدارش در $\left(\frac{n_{مقصد}}{n_{مبدا}}\right)^2$ ضرب می‌شود.

منظور از امپدانس، خودِ Z یا R یا L است، چراکه مقاومت و خودالقا متناسب با امپدانس هستند. هرگاه ادمیتانسی را از یک طرف ترانس به طرف دیگر ببریم در $\left(\frac{n_{مبدا}}{n_{مقصد}}\right)^2$ ضرب می‌شود. منظور از ادمیتانس، خودِ y یا g یا c است، چراکه رسانایی و ظرفیت خازن متناسب با ادمیتانس هستند.

۸ـ مقاومت معادل تونن دیده‌شده از دو سر AB ، چقدر است؟

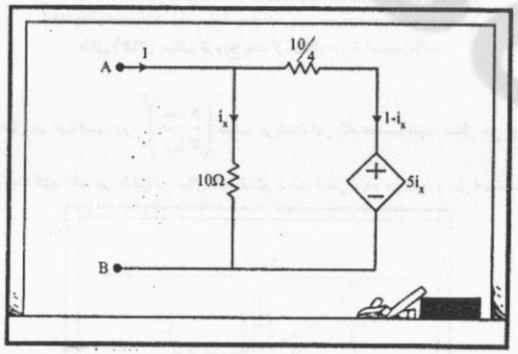


شکل (۴۵۷) مدار تمرین ۸

این مسئله کنکور ارشد در کتاب‌های رسمی و ... ! به روش‌های عادی و مرتبی حل شده است، اما من از شما یک راه حل عالی می‌خواهم!

حالا که بحث راه حل عالی شد، در خدمتیم!

کل مدارِ سمت راستِ ترانس را با قضایای انتقال به سمت چپ می‌آوریم:



شکل (۴۵۸) ساده شدهٔ مدار تمرین ۸

حالا یک مدار بسیار ساده داریم، $I_1 = 1$ می‌گیریم و V_{AB} را می‌یابیم:

$$\text{KVL در حلقهٔ راستی}: \frac{10}{4}(1-i_x)+5i_x-10i_x=0 \rightarrow i_x=\frac{1}{3}\,A$$

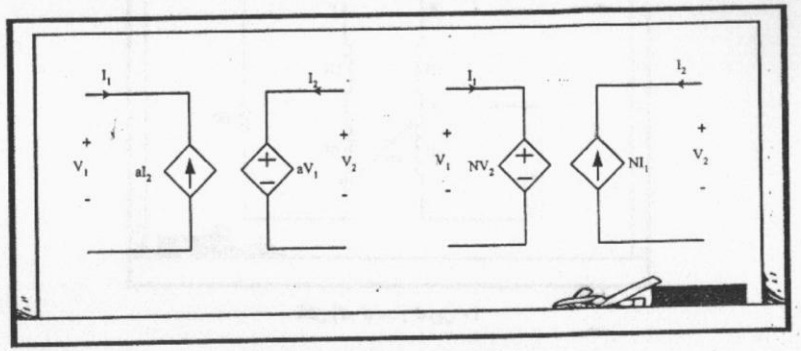
$$\text{KVL در حلقهٔ چپی}: V_{AB}=10\times\frac{1}{3}=\frac{10}{3}\,V \Rightarrow R_{eq}=\frac{V_{AB}}{1}=\frac{10}{3}\,\Omega$$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

۷ـ۸ مدار معادل ترانس

ترانسفورماتور شکل (۷ـ۱۲) را می‌توان به صورت‌های زیر مدل کرد:



شکل (۷ـ۲۷) مدار معادل‌های ترانس ایده‌آل

در این شکل‌ها:

$$N=\frac{n_1}{n_2}\ ,\quad a=\frac{n_2}{n_1}=\frac{1}{N} \qquad (۷ـ۲۶)$$

علت اینکه معادل هستند چیست؟

خُب از روز روشن‌تر است، چراکه روابط (۷ـ۲۶) را اقناع می‌کنند.

و این مدارهای معادل به چه دردی می‌خورند؟

من هم ؟

طبیعی است که ندانید، موضوع به آینده برمی‌گردد !!

در درس مدار ۲ پارامترهای دوقطبی، بحثی وجود دارد که مثلاً فلان دوقطبی کدام ماتریس را ندارد. مثلاً آنجا می‌گوییم ترانسفورماتور ماتریس‌های Z و Y را ندارد. یکی دوبار در کنکور شکل‌های (۷ـ۲۷) را داده بود و پرسیده بود که کدام ماتریس را ندارد؟... منظورم را فهمیدید که؟ (اگر هم نفهمیدید، صبر پیشه کنید!)

۷ـ۹ ضریب تزویج مغناطیسی K

نسبت شار مغناطیسی جاری‌شده یک سیم‌پیچ در سیم‌پیچ مقابل، به شار کل به‌وجودآمده را ضریب تزویج می‌گوییم که برابر است با:

$$K=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}\ ;\quad 0\le K\le 1 \qquad (۷ـ۲۷)$$

واضح است که:

الف) اگر دو سیم‌پیچ در فاصلهٔ خیلی زیادی از هم باشند، $\left.\begin{matrix}M\to 0\\ K\to 0\end{matrix}\right\}$

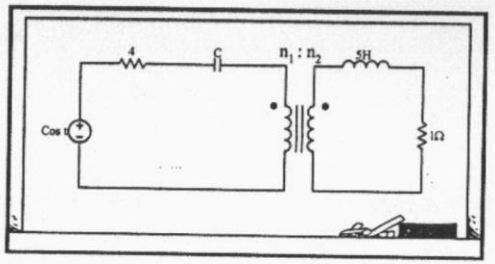
ب) اگر دو سیم‌پیچ در فاصلهٔ خیلی نزدیکی از هم باشند، $\left.\begin{matrix}M\to \infty\\ K\to 1\end{matrix}\right\}$

ج) در ترانس ایده‌آل $K=1$

www.Mohandesyar.com

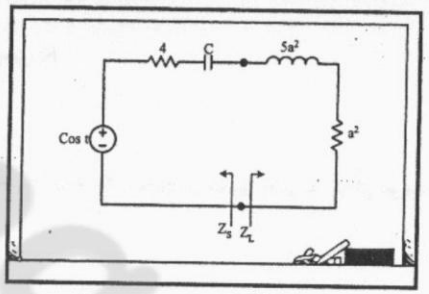
www.Mohandesyar.com

۹- $a=\frac{n_1}{n_2}$ و C را به‌گونه‌ای تعیین کنید که حداکثر توان به طرف دوم منتقل شود.



شکل (۲۸.۷) مدار تمرین ۹

اجزا را از راست به چپ منتقل می‌کنیم و سپس از قضیه مچینگ استفاده می‌کنیم:



شکل (۲۹.۷) انتقال‌یافته مدار تمرین ۹

$$Z_s = 4+\frac{1}{j c}=4-j\frac{1}{c}$$

$$Z_L = a^2+j5a^2$$

حالا باید:

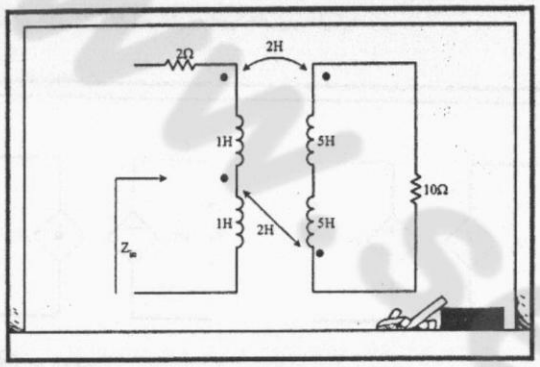
$$Z_L = Z_s^*$$

پس:

$$a^2=4 \Rightarrow a=2$$

$$5a^2=\frac{1}{c} \Rightarrow c=\frac{1}{20}F$$

۱۰- امپدانس ورودی Z_{in} را به دست آورید.



شکل (۳۰.۷) مدار تمرین ۱۰

این هم خیلی راحت است، باید نسبت $\frac{V_1}{I_1}$ را پیدا کنیم.

با KVL در حلقهٔ چپی داریم:

$$V_1 = 2I_1+SI_1+2\cancel{SI_2}+SI_1-2\cancel{SI_2}=2(s+1)I_1$$

پس خیلی ساده شد، (البته به برکت لطف طراح محترم!)

$$Z_{in}=\frac{V_1}{I_1}=2(s+1)$$

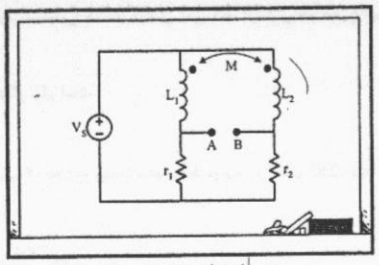
یعنی اگر I_2ها با هم نمی‌رفتند، آن‌گاه طراح نامهربان بود؟

تخیر، یک KVL در حلقه راستی مشکلات ما را حل می‌کرد و طراح را همچنان مهربان...

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

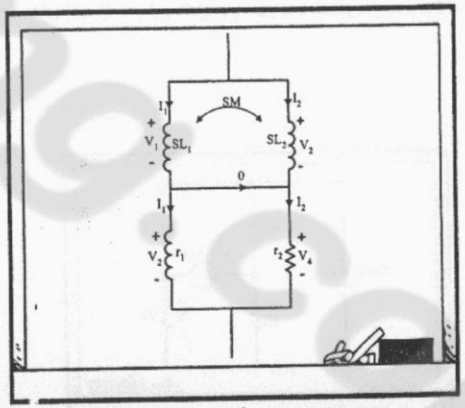
۱۱ـ مقدار M را چنان تعیین کنید که اگر دو سر A و B را اتصال کوتاه کنیم، جریانی از آن نگذرد.



شکل (۳۱ـ۷) مدار تمرین ۱۱

قبل از اینکه شما حل مسئله را بگویید، قصدم را از طرح تمرین ۱۱ بگویم. اگر در مسئله‌ای به شما گفته شد فلان چیز، چگونه باشد تا فلان شرط برقرار شود، شما در شروع حل مسئله، آن حکم را فرض بگیرید که درست است و حال با فرض درستی، آن مسئله را حل کنید. البته شاید این مطلب را قبلاً هم از من شنیده باشید.

پس دو سر AB را اتصال کوتاه می‌کنیم و جریان آن را صفر می‌کنیم:



شکل (۳۲ـ۷) نگاهی تازه برای حل تمرین ۱۱

چون AB اتصال کوتاه شد، پس:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow SL_1 I_1 + SMI_2 = SL_2 I_2 + SMI_1$$
$$V_3 = V_4 \Rightarrow r_1 I_1 = r_2 I_2$$

و با تقسیم این دو رابطه:

$$\frac{L_1 - M}{r_1} = \frac{L_2 - M}{r_2}$$

و نهایتاً:

$$M = \frac{r_1 L_2 - r_2 L_1}{r_1 - r_2}$$

۷ـ۱۰ مقدار متوسط و مقدار مؤثر

هرگاه $y(t)$ یک تابع متناوب با دورهٔ T باشد، مقدار متوسط آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

(۲۸ـ۷)

$$y_{av} = y_{dc} = \frac{1}{T}\int_T y(t)\,.\,dt = \frac{1}{T}$$ (مساحت $y(t)$ در یک دوره)

و مقدار مؤثر این‌گونه خواهد بود:

(۲۹ـ۷)

$$y_{rms} = y_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_T y^2(t)\,.\,dt}$$

ببخشید، می‌توانم ببرسم شما حواستان کجاست؟ چه می‌گویید؟

ببخشید، داشتم مراحل یافتن مؤثر را مرور می‌کردم.

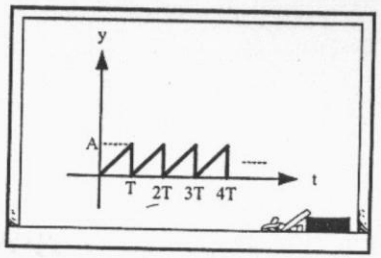
به توان 2 رساندن — متوسط گرفتن — جذر گرفتن.

خوب بلند بگویید، همه استفاده کنند.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

۱۲ـ در موج دندان اره‌ای شکل (۷ـ۳۳) مقدار متوسط و مؤثر را پیدا کنید.



شکل (۷ـ۳۳) موج دندان اره‌ای

این که خیلی ساده است:

$$y_{av} = \frac{1}{T} \times \frac{A T}{2} = \frac{A}{2} \qquad (۷ـ۳۰)$$

$$y_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \frac{A^2}{T^2} t^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\frac{A^2}{T^2}\frac{T^3}{3}} = \frac{A}{\sqrt{3}} \qquad (۷ـ۳۱)$$

نکتهٔ جالب آنکه مقدار مؤثر و متوسط، مستقل از مقدار T یا دوره تناوب یا فرکانس موج است.

و حالا یک نکته دیگر؛ در حالت خاص برای $y(t)$ به شکل رابطه زیر:

$$y(t) = A_0 + a_1 \cos \ldots + a_2 \cos \ldots + b_1 \sin \ldots + b_2 \sin \ldots + \ldots \qquad (۷ـ۳۲)$$

داریم:

$$y_{av} = A_0 \qquad (۷ـ۳۳)$$

$$y_{rms} = \sqrt{A_0^2 + \frac{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + \cdots}{2}} \qquad (۷ـ۳۴)$$

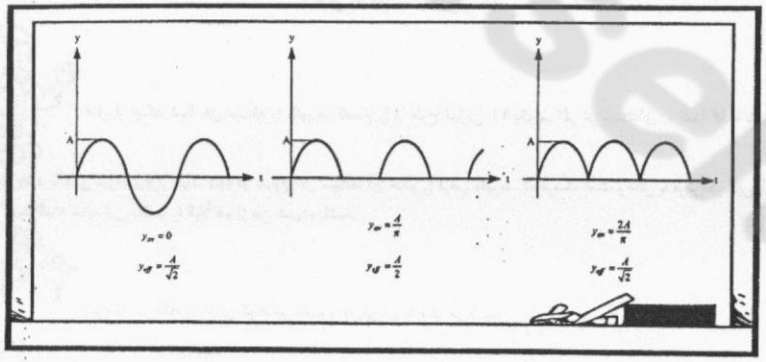
البته فراموش نکنین که رابطه (۷ـ۳۴) فقط وقتی درسته که سینوس‌ها یا کسینوس‌ها دارای فرکانس‌های متفاوت باشند، در غیر این صورت به کمک مثلثات دبیرستانی باید حاصل جمع فرکانس‌های یکسان را بیابیم و...

بد نیست، این‌ها را هم به خاطر بسپارید، شاید روزی به کار آمد!

و سرانجام نگاهی به مقدار متوسط و مؤثر شکل موج سینوسی و نیم‌موج و تمام موج می‌کنیم؛ خالی از لطف، نیست؛...

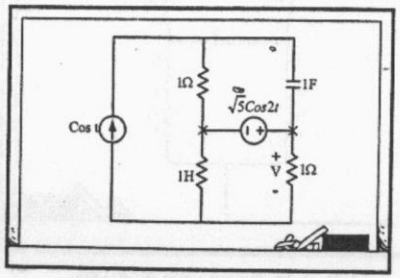
جالبه که مقدار مؤثر سینوسی با تمام موجش یکی شد، درستش هم همین است؛ چراکه اگر دو تابع دارای قدرمطلق‌های یکسانی باشند، مقدار مؤثرشان با یکدیگر برابر است.

من هم یه چیزی بگم که بحث‌رو ببندم! تمام روابط موجود در حالت DC ، عیناً در حالت AC نیز صادقند، به شرطی که به جای ولتاژ و جریان، مقادیر مؤثرشان را بگذاریم.



شکل (۷ـ۳۴) چند نوع شکل موج معروف با مقادیر متوسط و مؤثرشان

۱۳ـ مقدار مؤثر $V(t)$ را بیابید.

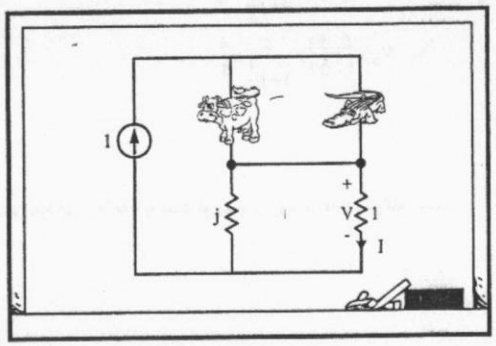


شکل (۷ـ۳۵) مدار تمرین ۱۳

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

اینجا باید دو عینکه[1] ! عمل کنیم! ابتدا با منبع جریان:



شکل (۳۶ـ۷) حل مدار تمرین ۱۳ با منبع جریان

با توجه به شکل با تقسیم جریان داریم:

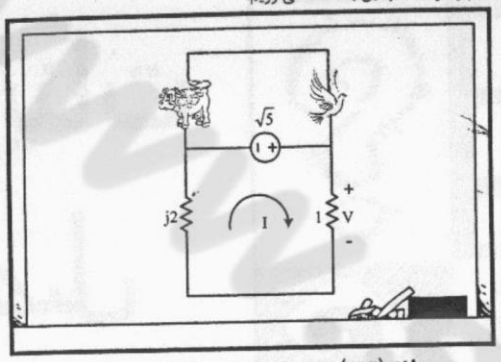
$$V = 1 \times I = \frac{j}{j+1} \times 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle 45^\circ$$

یعنی:

$$V(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t + 45^\circ)$$

۱ ـ و به عبارت شیک‌تر از فضیه جمع آثار بهره بگیریم.

و سپس با منبع ولتاژ از یک تقسیم ولتاژ ساده چنین به دست می‌آوریم:



شکل (۳۷ـ۷) بخشی از مدار تمرین ۱۳ با منبع ولتاژ

روشن است که:

$$V = I = \frac{\sqrt{5}}{1+j2} = 1 \angle -\tan^{-1} 2$$

یعنی:

$$V = 1\cos(2t - \tan^{-1} 2)$$

با توجه به دامنه‌های V در فرکانس‌های 1 و 2 و رابطهٔ (۷ـ۳۴) داریم:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}+1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ببخشید استاد؛ نقش این شخصیت‌های محترم یعنی

و

و

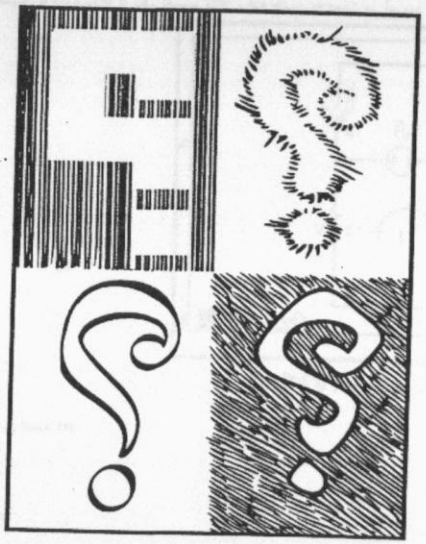
در حل این مسئله چیست؟

پس از کمی دقت در شکل مدار مشاهده می‌شود که در شکل (۷ـ۳۶) به خاطر سری بودن تکه‌های مدار با منبع جریان مقدار آن دو المان بالایی اهمیت ندارند و همین‌طور در شکل (۷ـ۳۷) به خاطر موازی بودن تکه‌های مدار با منبع ولتاژ باز هم مقدار آن دو المان بالایی قابل جایگزینی با انواع حیوانات پستاندار یا خزنده است. این نوع نگاه در حل مسایل آن‌قدر به آدم انرژی می‌دهد که نگو و نپرس!

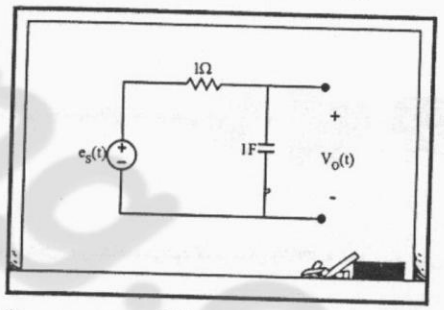
www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

تمرینات فصل هفتم



۱ـ در مدار شکل زیر، برای ورودی $e_s(t)=4\left(\cos\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\cos\frac{3t}{2}+\frac{1}{5}\cos\frac{5t}{2}\right)$ مقدار مؤثر ولتاژ خروجی $V_o(t)$ کدام است؟



۱) 1.83 ۲) 2.12 ۳) 2.59 ۴) 3.27

در هر فرکانسی V_o متفاوت است، پس باید در هر سه فرکانس موجود در ورودی V_o را به دست آوریم.

$$\nearrow\ V_o=\left(j\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{1+j\frac{1}{2}}\times 4$$

$$V_o(j\omega)=\frac{\frac{1}{j\omega}}{\frac{1}{j\omega}+1}E_s=\frac{1}{1+j\omega}E_s \rightarrow V_o=\left(j\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{1+j\frac{3}{2}}\times\frac{-4}{3}$$

$$\searrow\ V_o=\left(j\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{1+j\frac{5}{2}}\times\frac{4}{5}$$

و کافی است اندازهٔ این V_o ها را به دست آوریم چون زاویه در rms تأثیرگذار نیست.

$$\left|V_o\left(j\frac{1}{2}\right)\right|^2=\frac{1}{1+\frac{1}{4}}\times(4)^2$$

$$\Rightarrow\left|V_o\left(j\frac{3}{2}\right)\right|^2=\frac{1}{1+\frac{9}{4}}\times\left(\frac{-4}{3}\right)^2$$

$$\left|V_o\left(j\frac{5}{2}\right)\right|^2=\frac{1}{1+\frac{25}{4}}\times\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

و حالا از فرمول rms برای توابع سینوسی استفاده می‌کنیم:

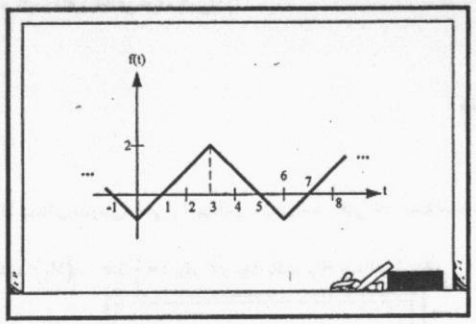
$$Vo\,rms=\sqrt{\frac{|V_{o1}|^2}{2}+\frac{|V_{o2}|^2}{2}+\frac{|V_{o3}|^2}{2}}=2.59$$

پس گزینه ۳ درست است.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

۲ـ مقدار مؤثر شکل موج زیر چقدر است؟



۱) 1 ۲) 2 ۳) $\sqrt{\frac{5}{6}}$ ۴) $\sqrt{\frac{7}{6}}$

تابع متناوب است ، پس می‌توانیم از فرمول rms برای توابع متناوب استفاده کنیم که کافی است تابع را در دورهٔ تناوبش بنویسیم:

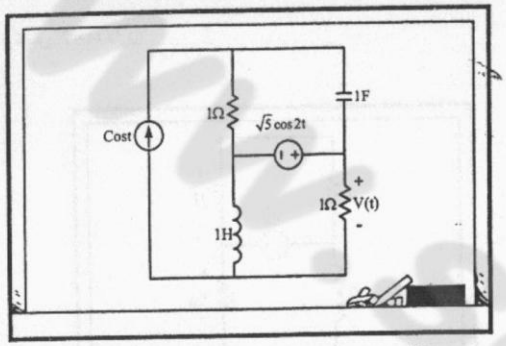
$$f(t)=\begin{cases} t-1 & 0<t<3 \\ -t+5 & 3<t<6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{rms}=\frac{1}{6}\left(\int_0^3 (t-1)^2\,dt+\int_3^6 (5-t)^2\,dt\right)=1$$

می‌توانیم پس از به دست آوردن انتگرال در فاصلهٔ 0 تا 3 به دلیل تشابه دو برابرش کنیم که سریع‌تر به جواب برسیم.

پس گزینه ۱ درست است.

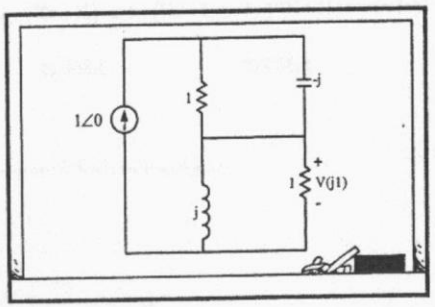
۳ـ مدار مقابل در حالت دایمی سینوسی است. مقدار مؤثر $V(t)$ را تعیین کنید.



۱) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ۴) $\sqrt{\frac{7}{20}}$

در هر فرکانس باید مدار را به حوزهٔ فازور ببریم و $|V(j\omega)|$ را محاسبه کنیم.

در فرکانس $\omega=1$:



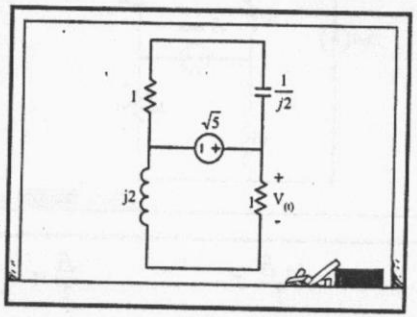
پل وتسون است، پس از شاخه وسط جریانی نمی‌گذرد و از تقسیم جریان، $V(j1)$ راحت به دست می‌آید:

$$V(j1)=\frac{1+j}{1+j+1-j}\times 1=\frac{1+j}{2}\Rightarrow |V(j1)|^2=\frac{1}{2}$$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

و در فرکانس $\omega = 2$ داریم:



$$V(j2)=\frac{1}{1+j2}\times\sqrt{5} \Rightarrow |V(j2)|^2=1 \Rightarrow V_{rms}=\sqrt{\frac{|V_{o1}|^2}{2}+\frac{|V_{o2}|^2}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

پس گزینه ۲ درست است.

۴ـ مقدار مؤثر سیگنال $f(t)=2\cos(2t+30^\circ)+3\cos(t+45^\circ)+4\cos(2t+60^\circ)$ کدام است؟ (مهندسی برق ۷۸)

۱) 4.628 ۲) 3.808 ۳) 5.385 ۴) 6.544

باز تابع سینوسیه و از فرمول سینوسی‌ها می‌رویم.

ولی باید دقت کنیم که جمله اول و سوم هر دو فرکانس 2 دارند و باید آن‌ها را با هم جمع کنیم و اندازهٔ حاصل را به دست آوریم و در فرمول قرار دهیم، چون این فرمول برای کسینوس‌ها یا سینوس‌ها با فرکانس‌های متمایز صادق است.

$$F(j2)=2\angle 30+4\angle 60=2\cos 30+j2\sin 30+4\cos 60+j4\sin 60$$

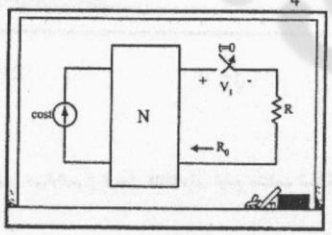
$$=\left(2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+4\times\frac{1}{2}\right)+j\left(2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3.73+j4.46=5.81\angle 50$$

اشتباه بدی کردم! الان باید آن حرف را می‌زدم.

$$f_{rms}=\sqrt{\frac{(5.81)^2}{2}+\frac{3^2}{2}}=4.624$$

پس گزینه ۱ درست است.

۵ـ در مدار زیر N شبکه‌ای مقاومتی، خطی و تغییرناپذیر با زمان است. وقتی کلید بسته است ماکزیمم توان در مقاومت R برابر $\frac{1}{6}$ وات است. اگر ولتاژ دو سر کلید (V_1) در $t=\frac{\pi}{4}$Sec برابر $\sqrt{2}$ ولت باشد، R_0 چند اهم است؟



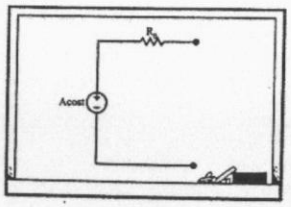
۱) 3 ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) 6 ۴) $\frac{3}{2}$

زمانی که $R=R_0$ است ماکزیمم توان به دست می‌آید:

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\frac{|V|^2}{R_0}$$

چون $t=\frac{\pi}{4}>0$ است، کلید در این لحظه باز است و ولتاژ کلید همان ولتاژ دو سر شبکه N است.

و چون شبکه مقاومتی است، معادل تونن دارد:



www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

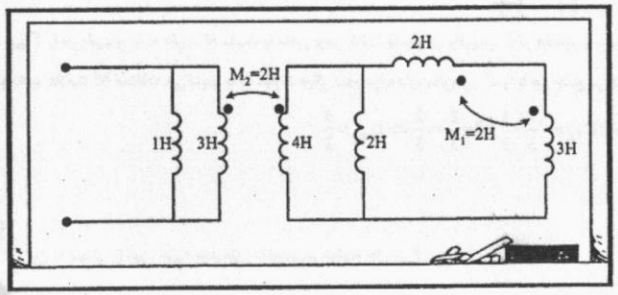
$$A\times\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\Rightarrow A=2$$

پس در حالت ماکزیمم بودن توان که $R=R_0$ است، ولتاژ دو سر R، یک ولت است.

$$\Rightarrow\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\frac{(1)^2}{R_0}\Rightarrow R_0=3\Omega$$

پس گزینه ۱ درست است.

۶ـ اندوکتانس دیده‌شده در سرهای A و B در مدار شکل زیر چند هانری است؟ (مهندسی برق ۷۶)

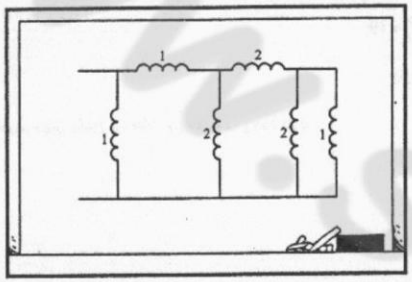


۱) $\frac{22}{5}$ ۲) $\frac{15}{22}$ ۳) $\frac{94}{21}$ ۴) $\frac{94}{115}$

اگر از سمت راست شروع به ساده کردن کنیم، از فرمول L_{eq} اندوکتانس‌های سری داریم:

$$L_{eq}=L_1+L_2\pm2M=2+3-2\times2=1$$

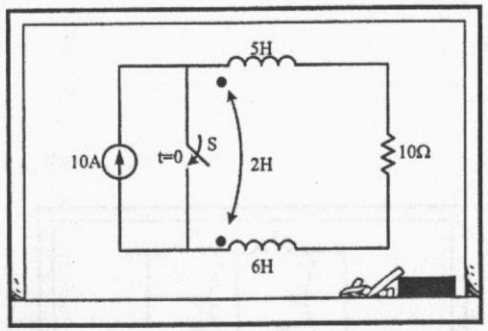
و برای اتصال دو قسمت از معادل T استفاده کنیم:



$$L_{eq}=\left\{\left[(2\parallel1)+2\right]\parallel2+1\right\}\parallel1=\frac{15}{22}\,H$$

پس گزینه ۲ درست است.

۷ـ در مدار شکل زیر کلید S باز است و مدار به حالت دایمی رسیده است. در $t=0$ کلید S را می‌بندیم، پس از چه مدت‌زمانی، نصف انرژی ذخیره‌شده در لحظه $t=0$ در مقاومت 10 اهمی تلف می‌شود؟



۱) 0.732 s ۲) 0.520 s ۳) 0.243 s ۴) 0.619 s

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

باز هم برای به دست آوردن اندوکتانس معادل از فرمول L_{eq} برای اندوکتانس‌های سری استفاده می‌کنیم :

$$L_{eq}=5+6-2\times2=7H\ ,\ i_L(0)=10$$

$$W(0)=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}7\times(10)^2=350$$

بعد از بسته شدن کلید، ورودی که نداریم ، پس پاسخ در حالت ورودی صفر وجود دارد:

$$i(t)=I_0\,e^{-\frac{R}{L}t}=10e^{-\frac{10}{7}t}$$

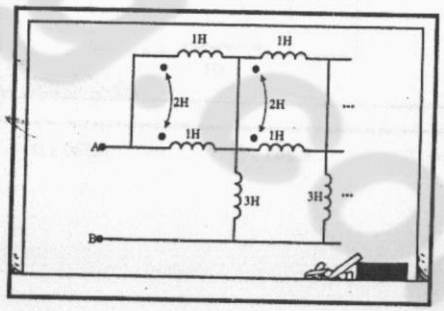
پس توان و از آنجا انرژی را راحت می‌توانیم به دست آوریم ولی تحلیل راحت‌تری هم می‌توان داشت که اگر نصف انرژی اولیهٔ سلف‌ها در مقاومت تلف شده پس نصف دیگر در سلف‌ها باقی مانده و داریم:

$$\frac{W_t}{W_0}=\frac{\frac{1}{2}Li^2(t)}{\frac{1}{2}LI_0^2}=\frac{I_0^2e^{-2\frac{10}{7}t}}{I_0^2}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ t=\frac{7}{20}\text{Ln}2=0.243\text{Sec}$$

پس گزینه ۳ درست است.

۸ـ سلف معادل از دو سر AB چقدر است؟



۱) 1 ۲) 3 ۳) 2 ۴) 4

اولین نمونه L_{eq} ، برای اندوکتانس‌های موازی را بگذارید من حل کنم، ماتریس L را بنویسیم:

$$L=\begin{bmatrix}L_1 & M\\ M & L_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

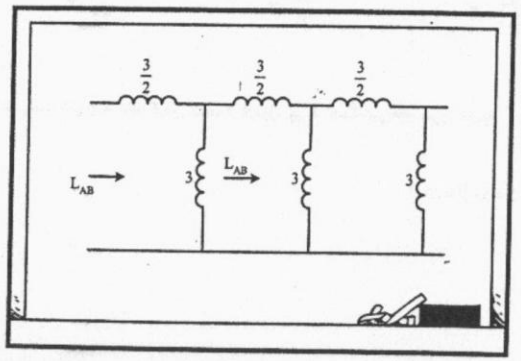
و از آنجا ماتریس Γ را بیابیم:

$$\Gamma=L^{-1}=\frac{\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}}{1-4}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3}\end{bmatrix}$$

از روی این ماتریس، Γ_{eq} را می‌یابیم و توجه داریم که مثبت یا منفی بودن M را یک‌بار در ماتریس L اثر داده‌ایم و برای یافتن Γ_{eq} همواره از فرمول زیر بدون توجه به علامت M استفاده می‌کنیم، یا به عبارت دیگر تمام درایه‌های ماتریس Γ را با هم جمع می‌کنیم:

$$\Gamma_{eq}=\Gamma_{11}+\Gamma_{22}+2\Gamma_{12}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\Rightarrow L_{eq}=\frac{3}{2}$$

از این به بعدش را هم ، شبیه مدارهای مقاومتی بی‌نهایته حل می‌کنیم:



$$\Rightarrow L_{AB}=\frac{3}{2}+3\ \Big\|\ L_{AB}=\frac{3}{2}+\frac{3L_{AB}}{3+L_{AB}}$$

$$\Rightarrow L_{AB}^2-\frac{3}{2}L_{AB}-\frac{9}{2}=0\Rightarrow L_{AB}=3$$

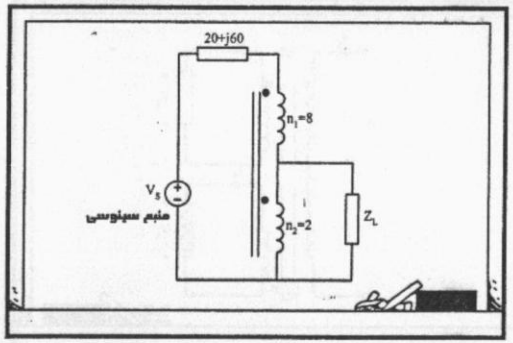
www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

البته قبل از حل معادلهٔ درجهٔ دوم هم مشخص بود که عدد 3 در معادلهٔ ابتدایی به‌جای $\overline{AB}$ صدق می‌کند.

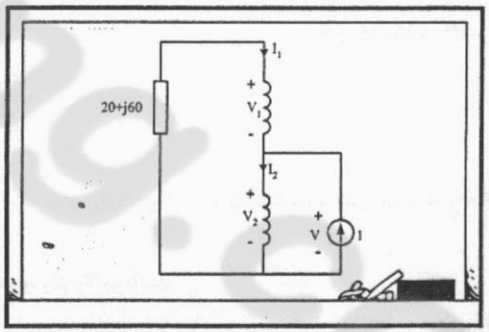
پس گزینه ۲ درست است.

۹ـ در شکل زیر امپدانس Z_L برای انتقال حداکثر توان، چند اهم باید باشد؟ (مهندسی برق ۸۱)



۱) $1.25-j3.75$ ۲) $0.8-j2.4$ ۳) $1.25+j3.75$ ۴) $0.8+j2.4$

مثل مدارهای مقاومتی به‌جای Z_L می‌توانیم یک منبع جریان 1A قرار دهیم و ولتاژ دو سر آن را بیابیم و قبل از آن منبع را هم صفر می‌کنیم.



$$V_t = V_2 = -V_1 - I_1(20+j60)$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow V_1 = 4V_2$$

ولی با I_1 چی‌کار کنیم؟!

دو معادله داریم، یکی نسبت I_1 به I_2 است و دیگری را هم از KCL به دست می‌آوریم:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{-n_2}{n_1} = \frac{-2}{8} = \frac{-1}{4}$$

$$I_1 + 1 = I_2 \Rightarrow I_1 = I_2 - 1 = -4I_1 - 1 \Rightarrow I_1 = \frac{-1}{5}$$

$$\Rightarrow V_1 = V_2 = -V_1 - I_1(20+j6) = -4V_2 + \frac{1}{5}(20+j60)$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{1}{25}(20+j60) = 0.8+j2.4$$

و برای انتقال حداکثر توان داریم:

$$Z_L = Z_{in}^* = 0.8-j2.4$$

همین امپدانس معادل را از راه انتقال امپدانس طرفین ترانسفورماتور هم می‌توانستید به دست آورید، که خیلی سریع‌تر به جواب می‌رسید:

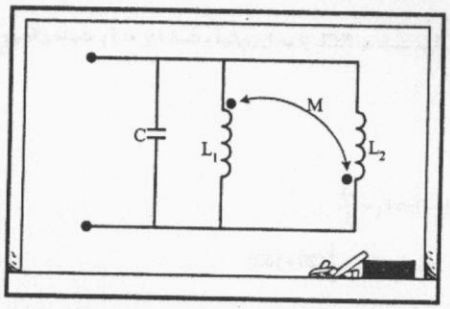
$$Z_{in} = \left(\frac{n_{\text{ثانویه}}}{n_{\text{اولیه}}}\right)^2 (20+j6) = \left(\frac{2}{10}\right)^2 (20+j6) = 0.8+j2.4$$

پس گزینه ۴ درست است.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

۱۰ـ فرکانس تشدید ω مدار شکل زیر چند رادیان بر ثانیه است؟ (مهندسی برق ۸۱)



$L_1=\frac{3}{5}H, L_2=\frac{2}{5}H, |M|=\frac{1}{5}H, C=\frac{1}{7}F$

۱) 7 ۲) $\sqrt{21}$ ۳) 1.6 ۴) $\frac{5}{\sqrt{21}}$

L_{eq} را از روش L_{eq} برای اندوکتانس‌های موازی می‌یابیم:

$$L=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{1}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}\rightarrow\Gamma=\frac{\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}}{\frac{6}{25}-\frac{1}{25}}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

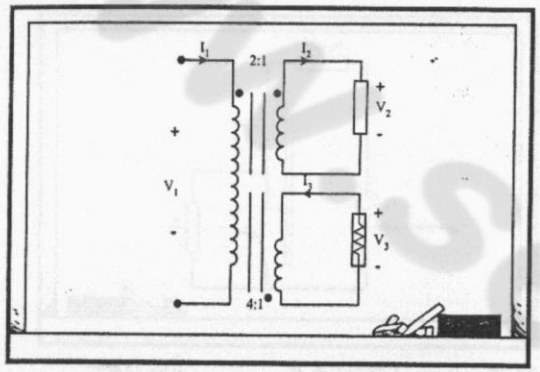
$$\Rightarrow \Gamma_{eq}=2+3+2=7\Rightarrow L_{eq}=\frac{1}{7}H$$

و برای فرکانس تشدید LC موازی داریم:

$$\Rightarrow \omega_r=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}}}=7\ \frac{rad}{Sec}$$

پس گزینه ۱ درست است.

۱۱ـ در مدار شکل زیر جریان $I_2=20\sqrt{2}\angle -45^\circ$ و جریان $I_3=24\angle 0$ است. زاویه اختلاف فاز بین ولتاژ V_1 و جریان I_1 برابر کدام است؟ (مهندسی برق ۷۵)



۱) 22.5° ۲) 32° ۳) 33.6° ۴) 45°

چون I_2 و I_3 را داریم، می‌توانیم با انتقالشان I_1 را بیابیم. برای انتقال جریان هم ضربدر $\frac{n_{مبدا}}{n_{مقصد}}$ می‌کزدیم، پس:

$$I_1=\frac{1}{2}I_2+\frac{1}{4}I_3=10\sqrt{2}\angle -45^\circ+6\angle 0=16-j10$$

ولی V_1 را از کجا پیدا کنیم؟

قبول دارید که به دلیل وجود مقاومت، I_3 و V_3 هم‌فازند و به دلیل وجود رابطهٔ $\frac{V_3}{V_1}=\frac{1}{4}$، V_3 نیز با V_1 هم‌فاز است.

پس I_3 و V_1 هم‌فاز خواهند بود و فاز V_1 هم 0 است.

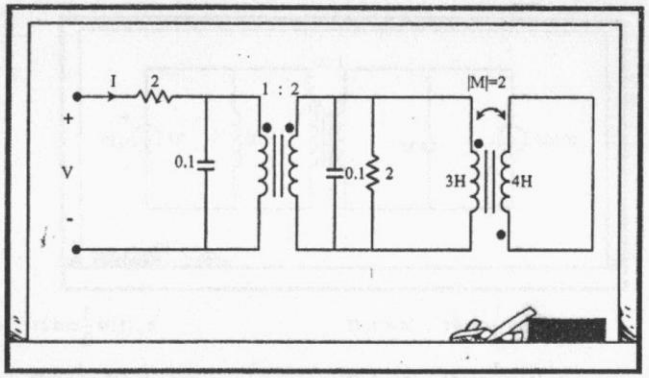
$$\angle V_1-\angle I_1=0-\tan^{-1}\frac{-10}{16}=32^\circ$$

پس گزینه ۲ درست است.

www.Mohandesyar.com

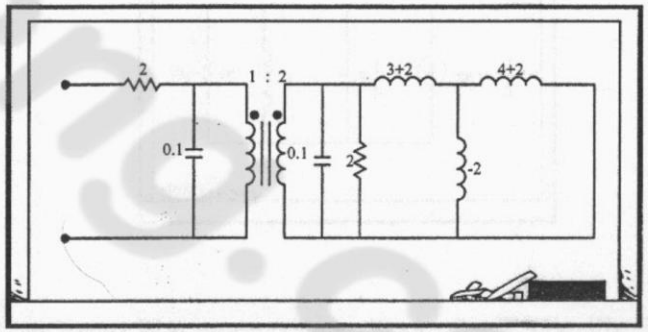
www.Mohandesyar.com

۱۲ـ فرکانس تشدید یک‌قطبی زیر بر حسب Rad/sec برابر است با:



۱) 2 ۲) 1 ۳) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ۴) $2\sqrt{\frac{2}{3}}$

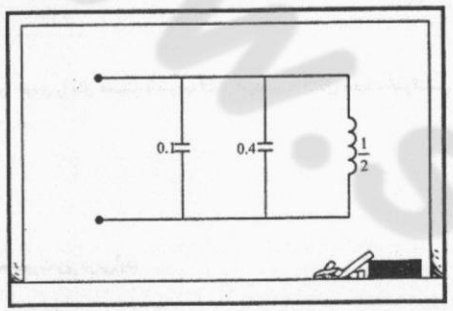
ابتدا از معادل T برای ساده کردن استفاده می‌کنیم و سپس قسمت سمت راست را به سمت چپ منتقل می‌کنیم.



و حالا برای انتقال باید امپدانس‌ها را ضربدر $\frac{1}{4}$ کنیم.

پس Lها ضربدر $\frac{1}{4}$ و Cها ضربدر ۴ می‌شوند و مقاومت‌های سری یا موازی‌شده با کل مدار در مقدار فرکانس تشدید بی‌اثرند.

پس:

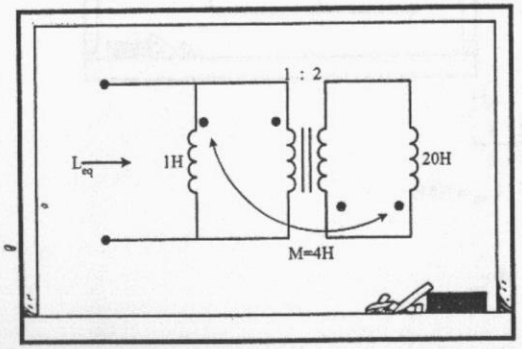


$0.4F \| 0.1F = 0.5F$

$$\Rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.5\times 0.5}} = 2\ \frac{rad}{Sec}$$

پس گزینه ۱ درست است.

۱۳ـ اندوکتانس معادل مدار مقابل را به دست آورید.



۱) -1 H ۲) 0.5 H ۳) 1 H ۴) 2.5 H

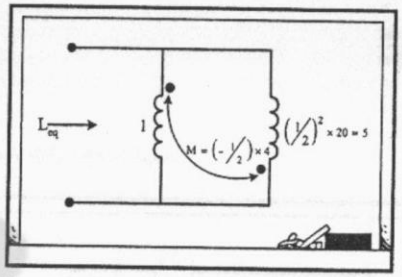
www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

در این مدار هم می‌توانیم از انتقال دادن طرفین استفاده کنیم؟

بله، اندوکتانس خودی را مثل همیشه با ضریب انتقال امپدانس‌ها انتقال دهید و اندوکتانس متقابل M را، با ضریب انتقال ولتاژها.

پس مدار به صورت زیر درمی‌آید:

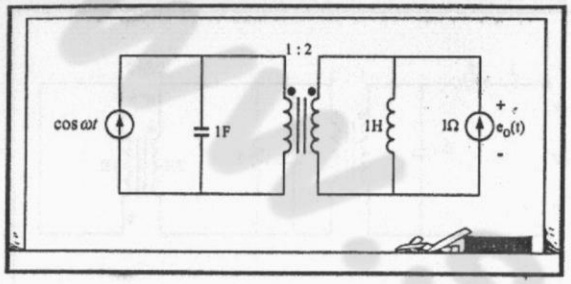


$$L=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma=\frac{\begin{bmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}}{5-4}$$

$$\Gamma_{eq}=5+1-2\times 2=2 \Rightarrow L_{eq}=0.5H$$

پس گزینه ۲ درست است.

۱۴ـ در مدار شکل زیر به ازای چه فرکانسی ولتاژ حالت دایمی $e_o(t)$ ماکزیمم است، و در این فرکانس $e_o(t)$ چقدر است؟



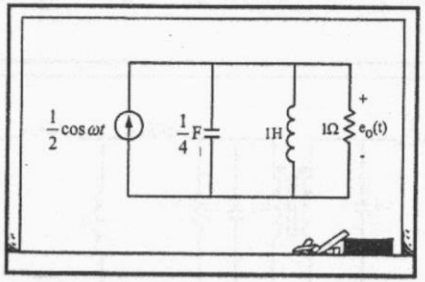
۱) $e_o(t)=\frac{1}{2}\cos 2t \ , \ \omega=2$

۲) $e_o(t)=\frac{1}{2}\cos 4t \ , \ \omega=4$

۳) $e_o(t)=\frac{1}{4}\cos 2t \ , \ \omega=2$

۴) $e_o(t)=\frac{1}{4}\cos 4t \ , \ \omega=4$

به نظرم اگر طرف چپ مدار را منتقل کنیم بهتر است که $e_o(t)$ هم عوض نشود.



زمانی که تشدید در LC موازی روی دهد، مدار باز می‌شود و کل جریان از مقاومت 1Ω می‌گذرد و $e_o(t)$ ماکزیمم خواهد بود. پس:

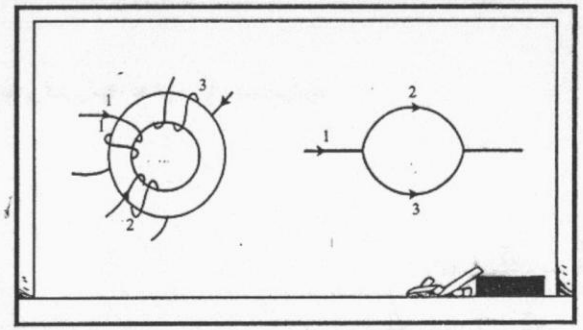
$$\omega_r=\frac{1}{\sqrt{LC}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}\times 1}}=2\frac{rad}{Sec} \Rightarrow e_o(t)=\frac{1}{2}\cos 2t$$

پس گزینه ۱ درست است.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

۱۵ـ در شکل زیر مقدار ضریب خودالقای هر کدام از سلف‌ها 2 H و قدرمطلق ضریب القای متقابل 1H است. اگر سیم‌پیچ‌ها را به صورت زیر به هم ببندیم ضریب القای خالص مدار چند هانری است؟ (مهندسی برق ۶۹)



۱) $\frac{8}{6}$ ۲) $\frac{11}{6}$ ۳) $\frac{13}{6}$ ۴) هیچکدام

با توجه به جهت جریان‌ها می‌توان علامت ضرایب القایی متقابل را تشخیص داد و ماتریس L را نوشت:

$$L=\begin{bmatrix}2 & +1 & -1\\ +1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

و از روی ماتریس L می‌توان ماتریس φ را پیدا کرد:

$$\varphi_1=2i_1+i_2-i_3$$
$$\varphi_2=i_1+2i_2-i_3$$
$$\varphi_3=-i_1-i_2+2i_3$$

اگر φ کل را بر حسب i کل که همان i_1 است بیابیم، L معادل به دست می‌آید. از نحوه به هم بسته شدن سیم‌پیچ‌ها داریم:

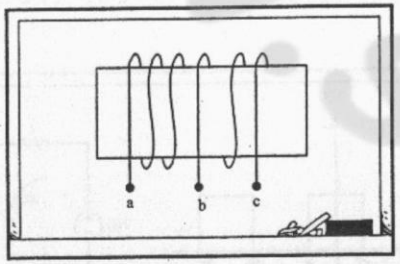
$$i_1=i_2+i_3$$
$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2\ ,\ \varphi_2=\varphi_3$$

با استفاده از این روابط و ماتریس φ نوشته‌شده بعد از چند جایگزینی، φ کل یافت می‌شود:

$$\varphi=\frac{11}{6}i_1=\frac{11}{6}i \Rightarrow L_{eq}=\frac{11}{6}H$$

پس گزینه ۲ درست است.

۱۶ـ در سلف‌های تزویج‌شده شکل مقابل اندوکتانس خودالقایی ac برابر L_1، اندوکتانس خود القایی bc برابر L_2، اندوکتانس خودالقایی ab برابر L'_1، اندوکتانس متقابل بین ac و bc برابر M، اندوکتانس متقابل بین ab و bc برابر M' است. کدام‌یک از روابط زیر صادق است؟ (مهندسی برق ۷۶)



۱) $L_1=L'_1+2M+L_2, M=L_2+M'$
۲) $L_1=L'_1+M+L_2, M=L_1+M'$
۳) $L_1=L'_1+2M+L_2, M=L_1+M'$
۴) $L_1=L'_1+2M'+L_2, M=L_2+M'$

سلف‌ها که سری هستند و جریان همگی یکسان.

پس خیلی راحت ولتاژ یا شار تمام سلف‌ها را می‌توانیم به دست آوریم، برای هر کدام از سلف‌ها هر جا اسمشان به نام اندوکتانس خودی یا متقابل آمده است را می‌نویسیم:

$$V_{ab}=(L'_1+M')\frac{di}{dt}$$
$$V_{bc}=(L_2+M+M')\frac{di}{dt}$$
$$V_{ac}=(L_1+M)\frac{di}{dt}$$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

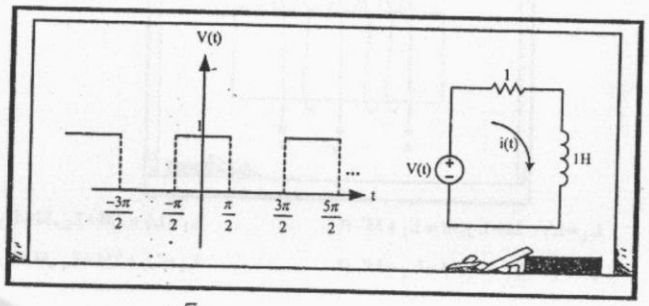
و از روی شکل هم مشخصه که $V_{ac}=V_{ab}+V_{bc}$، پس:

$$L_1+M=L_1'+M'+L_2+M+M' \Rightarrow L_1=L_1'+2M'+L_2$$

پس گزینه ۴ درست است.

۱۷ـ در مدار شکل زیر ورودی $V(t)$ و پاسخ مدار $i(t)$ است. معادله بزرگ‌ترین مؤلفه ac در پاسخ برابر است با:

(مهندسی برق ۷۶)



۱) $\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\cos(t-45^\circ)$

۲) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sin(t-45^\circ)$

۳) $\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sin(t+45^\circ)$

۴) $\frac{2}{\pi}\sin(t-45^\circ)$

برای به دست آوردن مؤلفه‌های ac باید از سری فوریه استفاده کنیم.

جالبه، اجازه بدید من ادامه بدم. چون تابع زوج است فقط a_n دارد و $b_n=0$ است، پس داریم:

$$T=2L=2\pi$$

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L V(t)\cos\frac{n\pi}{L}t\ dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\times\cos nt\ dt=\frac{2}{\pi}\ \frac{\sin nt}{n}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{2}$$

و ماکزیمم مؤلفه a_n به ازای $n=1$ به دست می‌آید:

$$a_1=\frac{2}{\pi}$$

و حالا بزرگ‌ترین مؤلفه ac خروجی را به دست می‌آوریم:

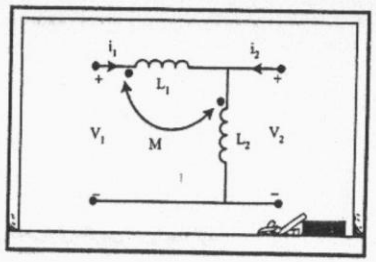
$$\omega=\frac{2\pi}{T}=1$$

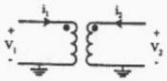
$$I(j1)=\frac{V(j1)}{1+j}=\frac{\frac{2}{\pi}}{\sqrt{2}\angle 45^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\angle -45^\circ$$

$$\Rightarrow \text{بزرگ‌ترین مؤلفه خروجی}=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cos(t-45)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sin(t+45)$$

پس گزینه ۳ درست است.

۱۸ ـ مدار شکل زیر را در نظر بگیرید که در آن $L_1=2H$، $L_2=3H$ و $|M|=1H$.



اگر مدار مذکور معادل سلف‌های تزویج شده‌ای به‌صورت  باشد ضریب تزویج سلف‌ها (k) در شکل اخیر تقریباً برابر است با:

(مهندسی برق ۸۳)

۱) 0.23 ۲) 0.4 ۳) 0.52 ۴) 0.87

برای به‌دست آوردن k، به L_1، L_2 و M احتیاج داریم، پس باید با KφL زدن φ_1 و φ_2 را پیدا کنیم.

$$\varphi_1=2i_1+1i_2+3i_2+1i_1$$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

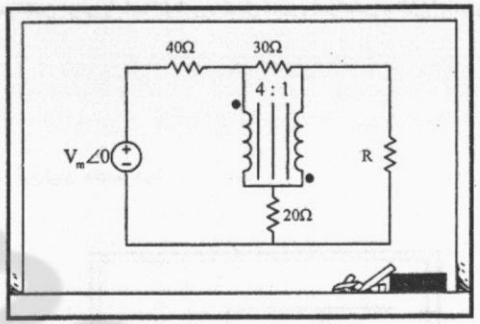
جریانی که از L_2 در این مدار می‌گذرد که i_2 نیست، i_1 و i_2 مجموعاً از L_2 می‌گذرند و برای شار سلف‌های تزویج همیشه می‌گوییم اندوکتانس خودی در جریان خودش بعلاوهٔ اندوکتانس متقابل در جریان آن یکی منظف:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= 2i_1 + 1(i_1+i_2) + 3(i_1+i_2) + 1i_1 = 7i_1 + 4i_2\\ \varphi_2 &= 3(i_1+i_2) + 1i_1 = 4i_1 + 3i_2\end{aligned}\right\} \Rightarrow L_{1t}=7\,,\ M_t=4\,,\ L_{2t}=3$$

حالا در فرمول k جایگزین کنیم:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{4}{\sqrt{3\times 7}} = 0.87$$

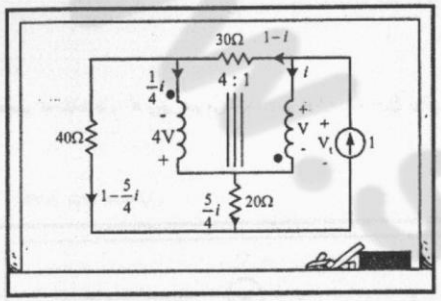
۱۹ ـ در مدار زیر مقاومت R را چقدر انتخاب کنیم تا بیشترین توان به آن منتقل شود؟ (مهندسی برق ۸۳)



۱) 12.54Ω ۲) 15.76Ω ۳) 18.28Ω ۴) 21.34Ω

برای بدست آوردن مقاومت از دو سر R فکر می‌کنم باید از I_t و V_t استفاده کنیم و طرفین ترانس را نمی‌توانیم انتقال دهیم. پس منبع ولتاژ را اتصال کوتاه می‌کنیم و به جای R منبع جریان یک آمپر قرار دهیم.

حالا یک ولتاژ و جریان فرضی یک سر ترانس در نظر بگیریم و شروع کنیم به KCL بازی و KVL زدن:



$$KVL: V+4V=30(1-i) \Rightarrow V=6-6i$$

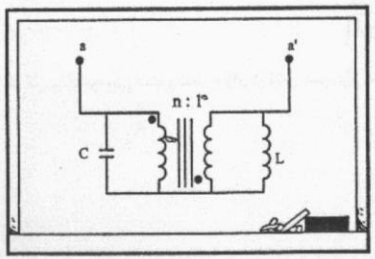
$$KVL: V+20\left(\frac{5}{4}i\right)=30(1-i)+40\left(1-\frac{5}{4}i\right) \xrightarrow{V=6-6i} i=\frac{64}{99}A$$

$$\Rightarrow V_t = V+20\left(\frac{5}{4}i\right)=6-6i+25i=6+19\left(\frac{64}{99}\right)=18.28V$$

$$R=R_{in}=V_t=18.28\Omega$$

بنابراین گزینه ۳ درست است.

۲۰ـ مدار زیر از سری‌های aa' با چه فرکانسی به تشدید درخواهد آمد؟ (سلف، خازن و ترانسفورماتور همه ایده‌آل فرض می‌شوند.) (مهندسی برق ۸۴)



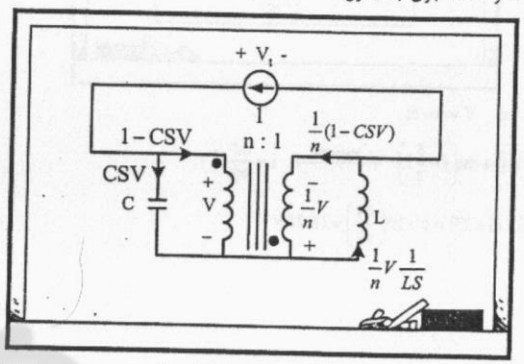
۱) $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ ۲) $\frac{n}{\sqrt{LC}}$ ۳) $\frac{1}{n\sqrt{LC}}$ ۴) فرکانس تشدید ندارد.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

نمی‌توانیم طرفین ترانس را انتقال دهیم و بعد امپدانس معادل را بدست آوریم؟

اگر انتقال دهیم که نقاط a و a' روی هم می‌افتند!! پس دوباره باید سراغ روش I_t و V_t برویم، این دفعه در حوزه لاپلاس یا فازور و باز هم KCL و KVL بازی جلسه اول:

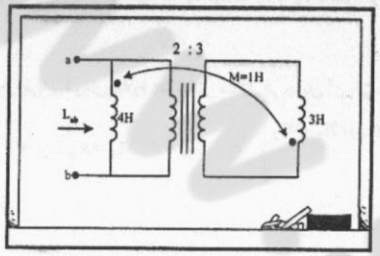


$$KCL: 1+\frac{1}{n}(1-CSV)-\frac{1}{n}\frac{V}{LS}=0 \Rightarrow V=\frac{(1+n)LS}{1+LCS^2}$$

$$\Rightarrow Z_{in}=V_t=V+\frac{1}{n}V=\frac{(1+n)^2LS}{n\left(1+LCS^2\right)}$$

اگر به‌جای S ، $j\omega$ قرار دهیم می‌بینیم که کل Z_{in} موهومی است و فقط به ازای فرکانس صفر، برابر صفر می‌شود، پس مدار فرکانس تشدید ندارد.

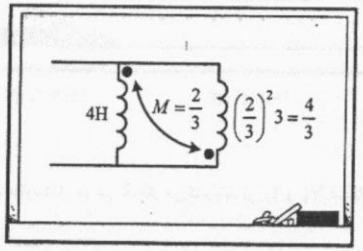
۲۱ ـ در مدار شکل زیر سلف معادل دیده شده از دو سر a و b $\left(L_{ab}\right)$ چند هانری است؟



۱) $\frac{11}{15}$ ۲) $\frac{9}{24}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{5}$

قرار بود اندوکتانس خودی را مانند امپدانس‌ها انتقال دهیم و اندوکتانس متقابل را مانند ولتاژها.

پس مدار این‌طوری ساده می‌شود:



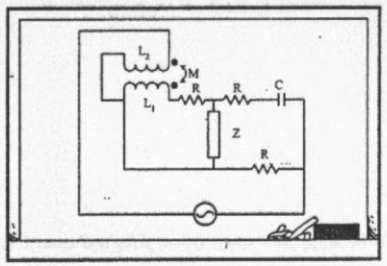
$$L=\begin{bmatrix}4 & -\frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3}\end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma=\frac{\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & 4\end{bmatrix}}{\frac{16}{3}-\frac{4}{9}}$$

$$\Rightarrow \Gamma_{ab}=\frac{9}{44}\left(\frac{4}{3}+4+2\left(\frac{2}{3}\right)\right)=\frac{15}{11} \Rightarrow L_{ab}=\frac{1}{\Gamma_{ab}}=\frac{11}{15}H$$

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

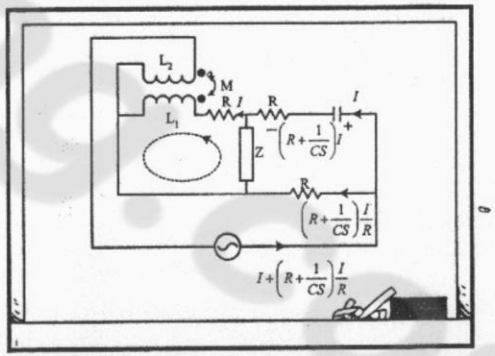
۲۲ ـ در مدار شکل زیر جریان حالت دایمی عبوری از بار Z برابر با صفر است. مقدار ضریب اندوکتانس متقابل M چقدر است؟ (مهندسی برق ۸۵)



۱) R^2C ۲) $\frac{L_1+L_2}{2}$ ۳) $\frac{L_1L_2}{R^2C}$ ۴) $\frac{L_2R^2C}{L_1}$

مثل مقاومت‌ها برای Z هم اگر جریانش صفر باشد، ولتاژش هم صفر می‌شود.

بله، حالا یک جریان فرضی در نظر می‌گیریم و شروع می‌کنیم با آن KCL و KVL بازی کردن:

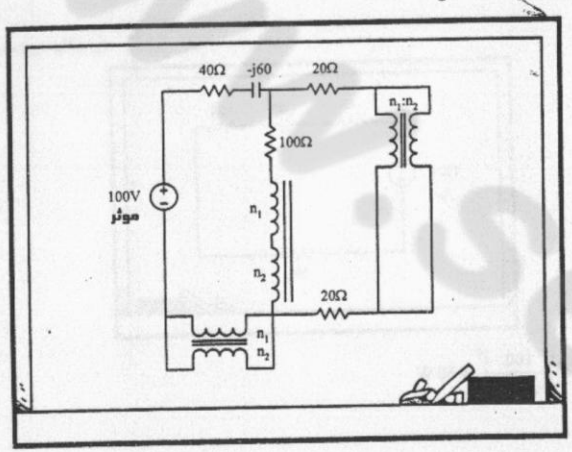


$$KVL: RI+L_1SI-MS\left(I+\left(R+\frac{1}{CS}\right)\frac{I}{R}\right)=0 \Rightarrow M=\frac{(R+L_1S)RC}{(2RCS+1)}$$

و چون جریان حالت دایمی Z برابر صفر بوده است، باید به‌جای S، صفر قرار دهیم و داریم:

$$M=R^2C$$

۲۳ ـ در مدار مقابل نسبت $\frac{n_1}{n_2}=5$ می‌باشد. مقدار توان مصرفی مدار چقدر خواهد شد؟ (مهندسی برق ۸۷)



۱) 40W ۲) 80W ۳) $40\sqrt{2}$ W ۴) $80\sqrt{2}$ W

در دو تا از ترانسفورماتورها سرهای اول و دوم موازی شده‌اند، یعنی:

$$V_1=V_2$$

و از طرف دیگه داریم:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{n_1}{n_2}=5$$

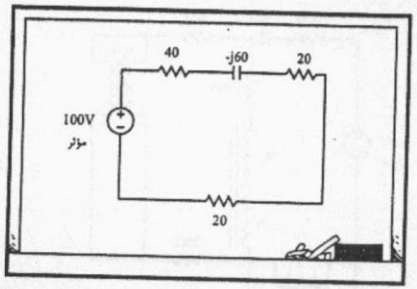
و اگر بخواهیم همزمان هر دو رابطه $V_1=V_2$ و $V_1=5V_2$ برقرار باشد، باید $V_1=V_2=0$ باشد.

www.Mohandesyar.com

www.Mohandesyar.com

پس زمانی‌که سرهای اول و دوم ترانس با هم سری می‌شوند؛ $I_1 = I_2$ و از طرفی $I_1 = -\frac{1}{5}I_2$ در نتیجه $I_1 = I_2 = 0$

است. پس مدار به‌صورت زیر خواهد بود:



$$p = R|I|^2 = (40+20+20)\left|\frac{100}{80-j60}\right|^2 = 80\,W$$

منابع

۱. نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها، ارنست کوه، چارلز دسور، ترجمه دکتر پرویز جبه‌دار مارالانی، انتشارات دانشگاه تهران، چاپ سوم، ۱۳۸۰

2.L.O.Chua, C.A.Desoer and E.S.Kuh, Linear and Nonlinear Circuits, McGraw Hill, 1987.

3.W.H.Hayt and J.E.Kemmerly, Engineering Circuit Analysis, 5th Edition, McGraw Hill, 1993.

4.J.W:Nilsson, Electric Circuits, 4th Edition, Addision Wesley, 1993.

5.R.A.Rohrer, Circuit Theory, An Introduction to State Variable Approach, McGraw Hill, 1970.

www.sem-eng.com

www.Mohandesyar.com