معادلات دیفرانسیل

سرفصل	صفحه
فصل اول : مقدمات	۲-۱
فصل دوم : معادلات مرتبه اول	۲۱-۳
فصل سوم : معادلات مرتبه دوم و بالاتر	۵۰-۲۲
فصل چهارم : حل معادله به کمک سری	۶۱-۵۱
فصل پنجم : تبدیل لاپلاس	۸۲-۶۲
فصل ششم : دستگاه معادله دیفرانسیل	۸۶-۸۳

معادلات دیفرانسیل

فصل اول

مقدمات

تعریف: هر رابطه بین یک تابع مجهول و متغیر مستقل و مشتقات تابع را معادله دیفرانسیل می‌نامیم

نمونه هایی از معادله دیفرانسیل

۱) $xy'' + y' - y = 0$ مرتبه ۲ (خطی) همگن

۲) $y'' + y = \sin x$ مرتبه ۲ (خطی) غیرهمگن

۳) $y' + y^2 = e^x$ مرتبه ۱ (غیرخطی)

بیشترین شماره مشتق می‌شود مرتبه معادله

هر معادله دیفرانسیل یکی از دو حالت زیر است

۱) معادله خطی که به شکل زیر می‌باشد

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = f(x)$$

۲) معادله غیرخطی: معادله‌ای که به شکل بالا نباشد

در صورتی که طرف دوم معادله خطی صفر باشد آن معادله همگن گفته می‌شود

تعریف: تابعی که در یک معادله دیفرانسیل صدق کند را جواب آن معادله می‌گویند

مانند $y = \sin x$ جواب $y'' + y = 0$ می‌باشد

تعریف: جوابی از معادله که به تعداد مرتبه آن عدد ثابت یا پارامتر دارد را جواب عمومی می‌نامند

شرط اولیه: شرایطی روی y و مشتقات آن هستند که همگی در یک نقطه مطرح می‌شوند

تشکیل معادله

برای یافتن معادله دیفرانسیل خانواده منحنی $Q(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0$ کافی است نسبت به x، n بار مشتق گرفته و c_1 تا c_n را بین آنها حذف نمائیم.

نکته: اگر $y = c_1 f(x) + c_2 g(x)$ آنگاه معادله دیفرانسیل عبارت است از

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & y \\ f'(x) & g'(x) & y' \\ f''(x) & g''(x) & y'' \end{vmatrix}$$

۱۰/۱۷ معادله دیفرانسیل $y = cx^2 + d$ را بیابید.

پارامترها دو تا، مرتبه ۲

روش اول y' و y'' را تشکیل می‌دهیم

$$\begin{cases} y = cx^2 + d \\ y' = 2cx \\ y'' = 2c \end{cases} \longrightarrow y' = \frac{y''}{2} \times 2 \times x = y''x \longrightarrow y''x - y' = 0$$

روش دوم $f(x) = x^2$ $g(x) = 1$

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 & y \\ 0 & 2x & y' \\ 0 & 2 & y'' \end{vmatrix} = 2xy'' - 2y' = 0$$

فصل دوم

معادلات مرتبه اول

$$\begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

معادله تفکیک پذیر

هر معادله به صورت $y' = f(x)\, g(y)$ تفکیک پذیر می باشد

برای حل $y' = \frac{dy}{dx}$ پس: $dy/dx = f(x)g(y)$

برای رسیدن به جواب از دو طرف انتگرال می گیریم $dy/g(y) = f(x)\,dx$

۲۴/۳۶

$$\frac{dy}{dx} = \sec y \cdot tg x \qquad dy/\sec y = tg x\, dx$$

$$\sin y = -\ln \cos x + c$$

$$\ln \sec x$$

۳۷۴ / ۲ج، ۴۴۸

جوابی از معادله $y' = \dfrac{1}{(1+y)+x^2+yx^2}$ که از مبدا می گذرد را بیابید

$$y' = \frac{1}{(1+y)(1+x^2)}$$

جواب عمومی

$$\frac{dx}{1+x^2} = dy(1+y) \xrightarrow{\int} y + \tfrac{1}{2}y^2 = tg^{-1}x + c$$

$$\xrightarrow[x=0,\,y=0]{\text{اعمال شرط اولیه}} 0+0 = tg^{-1}0 + c \rightarrow c=0 \rightarrow y + \tfrac{1}{2}y^2 = tg^{-1}x$$

نکته: هر معادله $y' = f(ax+by+c)$ با تغییر تابع $u = ax+by+c$ به تفکیک پذیر (برحسب تابع u و متغیر x) تبدیل می شود

۴۱۳/۳۸

$$y' = 1 + \frac{1}{\sin(x-y+1)} = 1 + \frac{1}{\sin u} \qquad u = x-y+1$$

مشتق

$$\rightarrow u' = 1 - y' \rightarrow y' = 1 - u' \qquad \cancel{1} - u' = \cancel{1} + \frac{1}{\sin u} \qquad -\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sin u}$$

$$-\sin u\, du = dx \xrightarrow{\int} \cos u = x + c$$

$$\cos(x-y+1) = x+c$$

$\frac{۵}{۲۶.۴۳۹}$ ۱ (عمران ۹۱)

$y' = 81x^2 + 18xy + y^2$

جواب عمومی معادله فوق را بیابید

$y' = (9x+y)^2 \quad u = 9x+y$

$u' = 9 + y' \quad y' = u' - 9 \quad u' - 9 = u^2 \quad \frac{du}{dx} = u^2 + 9$

$\xrightarrow{\int} \quad \frac{1}{3} tg^{-1} \frac{u}{3} = x + c \quad \frac{1}{3} tg^{-1} \frac{(9x+y)}{3} = x + c$

معادله خطی $a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x)$

برای حل این معادله مراحل ذیل را طی می‌کنیم

مرحله ۱: دو طرف را بر $a_1(x)$ تقسیم می‌کنیم

$y' + \underbrace{\frac{a_0}{a_1}(x)}_{P(x)} y = \underbrace{\frac{f(x)}{a_1(x)}}_{q(x)} \quad y' + P(x) y = q(x)$

مرحله ۲: $\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$ را در دو طرف معادله ضرب می‌کنیم

$\mu(x) y' + \mu(x) P(x) = \mu(x) q(x)$

مرحله ۳: از دو طرف انتگرال می‌گیریم

$y = \frac{1}{\mu(x)} \left(\int (\mu(x) q(x) dx + c) \right)$

$\frac{۱۹}{۴۱}$ ۲

$xy' - y = x^2 \cos x \longrightarrow$ خطی

$y' - \frac{y}{x} = \underbrace{x \cos x}_{q(x)} \quad y' + \underbrace{\left(-\frac{1}{x}\right)}_{P(x)} y = x \cos x$

$\mu(x) = e^{\int P(x) dx} = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1}$

$y = \frac{1}{\frac{1}{x}} \left(\int \frac{1}{x} (x \cos x) dx = x \sin x + c \right)$ جواب عمومی

نکته: $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\,tg^{-1}\frac{u}{a}$

نکته: $e^{\int \frac{a}{x}dx} = x^a$

$\frac{۱}{۲}$ ج ۱۹۵ ۷۱: جواب معادله $y' = \frac{2y+x}{x}$ وقتی $x \to 0$ چقدر است

$y' - \underbrace{\frac{2}{x}}_{p} y = \underbrace{1}_{q}$　　$\mu(x) = e^{\int -2/x\, dx} = x^{-2}$

$y = \frac{1}{x^{-2}}\left(\int x^{-2}dx\right) + c$

$y = x^2(-x^{-1}+c) = x + cx^2 = 0$

نکته: $\int x^k dx = \frac{1}{k+1} x^{k+1}$

نکته: اگر در معادله $\overbrace{a_1(x)y' + a_0(x)y}^{\text{مشتق}} = f(x)$ داشته باشیم

$a_1'(x) = a_0(x)$ و $(a_1(x)y)' = f(x)$ معادله را از دو طرف انتگرال می‌گیریم

$\frac{۲۱}{۴۲}$ ۸　$xy' + y = \sin x$　　$(yx)' = \sin x$　　$yx = -\cos x + c$

$y = \frac{-\cos x + c}{x}$

در موارد ذیل معادله را می‌توان به خطی تبدیل نمود

۱) هر معادله به شکل زیر با تغییر تابع $z = f(y)$ به معادله خطی برحسب تابع z و مستقل x تبدیل می‌گردد

$y' \overbrace{f'(y) + p(x) f(y)}^{\text{مشتق}} = q(x)$

۲) هر معادله به فرم زیر با فرض آنکه x تابع و y مستقل باشد به معادله خطی تبدیل می‌گردد کافی است $y' = \frac{1}{x'}$ را جایگذاری نمائید

$y' = \frac{c(y)}{a(y)x + b(y)}$

$dy/dx = y' = 1/x' = dx/dy$

$\frac{۱.۹}{۲ج.۱۲۴}$ جواب عمومی معادله را پیدا کنید

$2xe^{2y}y' = 3x^4 + e^{2y}$

$e^{2y} = z \qquad z' = 2y'e^{2y}$

$xz' = 3x^4 + z \qquad z' - \frac{1}{x}z = 3x^3 \qquad \mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = x^{-1}$

$z = \frac{1}{x^{-1}}\int x^{-1}\, 3x^3 dx = x(x^3 + c) \qquad e^{2y} = x^4 + cx$

$y = \frac{1}{2}Ln(x^4 + cx) = Ln\sqrt{x^4 + cx}$

$\frac{۱.۱۴}{۲ج.۴.۱}$ (برق ۹۰، ریاضی ۹۱)

$y' - x\sin 2y = xe^{-x^2}\cos^2 y$

$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } \cos^2 y} (\sec^2 y)y' - 2x\,tg\,y = xe^{-x^2} \qquad z = tg\,y \xrightarrow{\text{مشتق}} z' = y'\sec^2 y$

$z' - 2xz = xe^{-x^2} \qquad \mu(x) = e^{\int -2x dx} = e^{-x^2}$

$z = \frac{1}{e^{-x^2}}\int xe^{-2x^2}dx = e^{x^2}(-\frac{1}{4}e^{-2x^2} + c) \qquad tg\,y = -\frac{1}{4}e^{-x^2} + ce^{x^2}$

مثال ۸: جواب عمومی $y' = \frac{1}{x + e^{2y}}$ را بیابید.

$x' = x + e^{2y} \qquad \frac{1}{x'} = \frac{1}{x + e^{2y}} \rightarrow x' - x = e^{2y}$

$\mu(y) = e^{\int -dy} = e^{-y} \qquad x = \frac{1}{e^{-y}}\int e^{-y}e^{2y}dy = e^y(e^y + c)$

$x = e^{2y} + ce^y$

$\frac{۲۴}{۲ج.۱۸}$ ۱۳

$4y^3y' + y = 2xy' \qquad y(1) = 1$

$4y^3y' - 2xy' = -y \qquad y' = \frac{y}{2x - 4y^3} \qquad \frac{1}{x'} = \frac{-y}{2x - 4y^3}$

$x' - \frac{2x}{y} = -4y^2 \qquad \mu(y) = e^{\int -\frac{2}{y}dy} = y^{-2}$

$x = \frac{1}{y^{-2}}\int \frac{1}{y^{-2}} \times -4y^2 dy = y^2(-4y + c)$

$x = y^2(-4y + c) \qquad 1 = 1(-4 + c) \rightarrow c = 5$

$x = y^2(-4y + 5) \qquad y^2 = \frac{x}{-4y + 5}$

معادله برنولی $y' + P(x)y = q(x)y^n \quad n \neq 0,1$

برای حل این معادله دو طرف را بر y^n تقسیم می‌کنیم

$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = q(x)$

حال با تغییر تابع $z = y^{1-n}$ داریم: $z' = (1-n)y'y^{-n}$

$\frac{z'}{1-n} + P(x)z = q(x)$

که معادله خطی می‌باشد

نکته: هر معادله برنولی $y' + P(x)y = q(x)y^n$ با تغییر تابع $z = y^{1-n}$ به خطی $\frac{z'}{1-n} + P(x)z = q(x)$ تبدیل می‌شود

۳۸/۴۸ ۱۳ کدام تغییر تابع معادله $y' + P(x)y = y^4 q(x)$ را خطی می‌کند

$z = y^{1-4} = y^{-3}$

$y' = y\,tgx - y^2\sec x \qquad y'/y^2 = y\,tgx - y^2 \sec x$ ۱۴ ۳ج ۳۹۱

$y'y^{-2} = y^{-1}tgx - \sec x \qquad z = y^{1-2} = y^{-1} \qquad z' = -y'y^{-2}$

$-z' = z\,tgx - \sec x \qquad z' + z\,tgx = \sec x \qquad \mu(x) = e^{\int tgx\,dx} = \sec x$

$z = \frac{1}{\sec}\int \sec^2 x\,dx = \cos x(tgx + c) \qquad y^{-1} = \sin x + c\cos x$

$xy' + y = x^4y^3 \qquad xy^{-3}y' + y^{-2} = x^4 \qquad z = y^{-2}$ ۱۵ ۴۰/۴۸

$z' = -2y^{-3}y' \qquad x\frac{z'}{-2} + z = x^4 \qquad z' - \frac{2}{x}z = -2x^3$

$\mu(x) = e^{\int -2/x\,dx} = x^{-2}$

$z = \frac{1}{x^{-2}}\int x^{-2} \cdot -2x^3\,dx = x^2(-x^2 + c$

$y^{-2} = -x^4 + cx^2$

معادله همگن

تعریف: اگر $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha} f(x, y)$ می‌گوئیم تابع f همگن از درجه α است

تعریف: $f(x, y)$ همگن از درجه $\alpha = 0$ باشد یعنی $f(\lambda x, \lambda y) = \cancel{\lambda^{\alpha}} f(x, y)$ معادله دیفرانسیل $y' = f(x, y)$ را معادله همگن می‌نامیم

روش حل: هر معادله همگن با تغییر تابع $u = y/x$ به یک معادله تفکیک پذیر (برحسب x و u) تبدیل می‌شود.

نکته: هرگاه درجه صورت و درجه مخرج با هم برابر شد معادله همگن می‌شود

۴۷/۵۳ ۱۶)

$$y' = \frac{2x^3 + y^3}{xy^2} \qquad f(x, y) = \frac{2x^3 + y^3}{xy^2}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{2\lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3}{\lambda x \lambda^2 y^2} = \frac{\cancel{\lambda^3}(2x^3 + y^3)}{\cancel{\lambda^3}(xy^2)} = f(x, y)$$

همگن از درجه $\alpha = 0$

$$u = y/x \rightarrow y = xu \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = u + xu' = \frac{2x^3 + x^3u^3}{x^3u^2} = \frac{2 + u^3}{u^2}$$

$$x\,du/dx = \frac{2 + u^3}{u^2} - u = 2/u^2 \qquad u^2 du = 2\,dx/x$$

$$\xrightarrow{\int} 1/3\, u^3 = 2\ln x + c \qquad 1/3\, y^3/x^3 = 2\ln x + c$$

۹۴/۱۰۳ ۱۷) مطلوبست جواب عمومی $y' - y/x = \cos^2 y/x$ همگن

$$u = y/x \rightarrow y = xu \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = u + xu' \qquad \cancel{u} + xu' - \cancel{u} = \cos^2 u$$

$$xu' = \cos^2 u \qquad x\,du/dx = \cos^2 u \qquad dx/x = \sec^2 u\,du$$

$$\tan u = \ln x + c \qquad tg\, y/x = \ln x + c$$

۱۸ ۴۹/۵۴

$$(x+2y)dx+(2x+y)dy=0$$

$$y'=-\frac{x+2y}{2x+y} \qquad u+xu'=-\frac{x+2ux}{2x+ux}=\frac{1+2u}{2+u}$$

$$x\,du/dx=-\left(\frac{1+2u}{2+u}+u\right) \qquad x\,du/dx=-\left(\frac{u^2+4u+1}{2+u}\right)$$

$$\frac{2+u}{u^2+4u+1}du=-dx/x \xrightarrow{\int} \tfrac{1}{2}\ln(u^2+4u+1)=-\ln x+c$$

$$\ln(y^2/x^2+4y/x+1)=2\ln x+2c$$

$$\ln\frac{y^2+4xy+x^2}{x^2}+\ln x^2=2c \qquad \ln y^2+4xy+x^2=2c$$

$$y^2+4xy+x^2=e^{2c}=k$$

نکته : $y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$

الف) اگر $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\neq 0$ از حل دستگاه $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ نقطه $x=\alpha$, $y=\beta$

را بدست می‌آوریم. قرار می‌دهیم $\begin{cases} X=x-\alpha \\ Y=y-\beta \end{cases}$ تا معادله $\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{aX+bY}{a'X+b'Y}\right)$

حاصل گردد که معادله‌ای همگن است

ب) اگر $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=0$ با تغییر تابع $u=ax+by$ معادله تفکیک پذیر

(برحسب x و u) می‌نویسیم.

۱۹ ۵۲/۵۵

با تغییر متغیر معادله $y'=\frac{x+y-2}{3x+2y-5}$ به معادله همگن تبدیل می‌شود

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ 3x+2y-5=0 \end{cases} \qquad x=1 \to \alpha \ , \ y=1 \to \beta$$

$$\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y-1 \end{cases} \qquad dY/dX=\frac{X+Y}{3X+2Y}$$

۲۰ $\frac{۵۳}{۵۵}$ جواب عمومی $y' = \frac{x-y}{2x-2y+1}$ را بیابید

$u = x - y \xrightarrow{\text{مشتق}} u' = 1 - y' \rightarrow y' = 1 - u' \rightarrow 1 - u' = \frac{u}{2u+1}$

$u' = 1 - \frac{u}{2u+1} = \frac{u+1}{2u+1} = \frac{du}{dx} \rightarrow du\left(\frac{2u+1}{u+1}\right) = dx$

$\rightarrow \left(2 - \frac{1}{u+1}\right) du = dx \xrightarrow{\int} 2u - \ln(u+1) = x + c$

$2(x-y) - \ln(x-y+1) = x + c$ جواب عمومی

معادله کامل

تعریف: معادله $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ را معادله کامل می‌نامیم هرگاه: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

تذکر: معادله $y' = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ کامل است هرگاه: $\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}$

روش حل: اگر معادله $M\,dx + N\,dy = 0$ کامل باشد آنگاه تابع $\varphi = \varphi(x,y)$ موجود است که $\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = M \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = N \end{cases}$ آنگاه $\varphi(x,y) = c$ جواب عمومی خواهد بود

۲۱ مثال: جواب عمومی معادله $(y+2x)\,dx + (x+y^2)\,dy = 0$ را بدست آورید

$\frac{\partial M}{\partial y} = M_y = 1 \ , \ \frac{\partial N}{\partial x} = N_x = 1$ پس معادله کامل است

بنابراین $\varphi = \varphi(x,y)$ موجود است که:

$\begin{cases} \partial\varphi / \partial x = M = y + 2x \quad (1) \xrightarrow{\int} \varphi = \varphi(x,y) = xy + x^2 + f(y) \\ \partial\varphi / \partial x = N = x + y^2 \quad (2) \end{cases}$

برای محاسبه $f(y)$ با توجه به رابطه (۲) مشتق φ را نسبت به y محاسبه می‌کنیم و با N مساوی قرار می‌دهیم

$$x+y^2 \stackrel{?}{=} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x+0+f'(y) \longrightarrow f'(y)=y^2$$

$$\to f(y)=\int y^2 dy = \frac{1}{3}y^3 + \cancel{C}$$

$$\varphi(x,y)=xy+x^2+\frac{1}{3}y^3 \longrightarrow xy+x^2+\frac{1}{3}y^3=c$$ جواب عمومی

نکته: جواب عمومی معادله کامل $M\,dx+N\,dy=0$ عبارت است از

۱) $\int M dx + \int N^* dy = C$ (N^* جملاتی از N که x ندارد (که مشتق آن نسبت به x صفر نشود))

۲) $\int N dy + \int M^* dx = C$ (M^* جملاتی از M که y ندارد (که مشتق آن نسبت به y صفر نشود))

۲۲۲۱ / ۲ج۴۳۱ با فرض کامل بودن معادله زیر $2a+b$ را بیابید

$$(ax^b\sin^2 y-\sin y)dx+(x^3\sin y\cos y - x\cos y)dy=0$$

$$M_y=2ax^b\sin y\cos y-\cos y \qquad N_x=3x^2\sin y\cos y-\cos y$$

$$M_y=N_x \xrightarrow[\text{معادله کامل}]{} 2a=3 \ , \ b=2 \longrightarrow 2a+b=5$$

۲۲۵ / ۲ج۲۱۵ مطلوبست جواب عمومی

$$(2x^3+3y)dx+(3x+y-1)dy=0$$

$$M_y=3 \quad N_x=3 \longrightarrow$$ معادله کامل $\quad N^* = y-1$

$$\int M dx+\int N^* dy=\frac{1}{2}x^4+3yx+\frac{1}{2}y^2-y=c$$

۲۶۱ / ۲ج۳۱۰ جواب عمومی؟

$$\cos(x+y)dx = x\sin(x+y)dx + x\sin(x+y)dy$$

$$\to (\cos(x+y)-x\sin(x+y))dx - x\sin(x+y)=0$$

$$N_y=\sin(x+y)-x\cos(x+y)=N_x$$ کامل است

$M^*=0 \rightarrow \int N\,dy + \int \cancel{M^*}\,dx = c$　$x\cos(x+y)=c$ جواب عمومی

۲۵ ۵ / ۲ج۲۵۲ در جواب معادله $y' = \frac{2xy}{y^2-x^2}$ و $y(4)=0$ به ازای $y=1$ مقدار x چقدر است

$M_y = 2x$ و $N_x = -2x \rightarrow$ کامل است

$dy/dx = \frac{2xy}{y^2-x^2}$　　$2xy\,dx = (y^2-x^2)\,dy$

$2xy\,dx - (y^2-x^2)\,dy$　　$N^* = -y^2 \rightarrow \int M\,dx + \int N^*\,dy = c$

$\rightarrow x^2y - \frac{1}{3}y^3 = c$　　جواب عمومی

$y(4)=0 \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow c=0$　$x^2y - \frac{1}{3}y^3 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3}$　$x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

فاکتور (عامل) انتگرال

تعریف: به تابع $\mu = \mu(x,y)$ فاکتور (عامل) انتگرال معادله $Mdx+Ndy=0$ می‌گوییم هرگاه این معادله با ضرب در μ به معادله کامل تبدیل گردد

۲۶ ۴۳ / ۲ج۲۰۱ اگر $x^\alpha y^\beta$ عامل انتگرال معادله زیر باشد آنگاه α و β را بیابید.

$y\,dx + x(x^2y-1)\,dy = 0$

باید $x^\alpha y^\beta$ را در معادله ضرب کرده و شرط کامل بودن را بنویسیم

$x^\alpha y^{\beta+1}\,dx + (x^{\alpha+3}y^{\beta+1} - x^{\alpha+1}y^\beta)\,dy = 0$

$M_y = (\beta+1)x^\alpha y^\beta$　　$N_x = (\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+1} - (\alpha+1)x^\alpha y^\beta$

$M_y = N_x \rightarrow \begin{cases} \beta+1 = -(\alpha+1) \\ \alpha+3=0 \end{cases}$　$\begin{cases} \alpha=-3 \\ \beta=1 \end{cases}$

نکته: هر معادله به صورت زیر دارای عامل $x^{\alpha}y^{\beta}$ است

$$y(Ax^a y^b + Bx^c y^d)dx + x(A'x^a y^b + B'x^c y^d)dy = 0$$

محاسبه عامل انتگرال

برای یافتن عامل انتگرال معادله $Mdx + Ndy = 0$ فرض می‌کنیم $\mu = \mu(x, y)$ عامل انتگرال باشد. آن را در معادله ضرب و شرط کامل بودن را می‌نویسیم

$$\mu M dx + \mu N dy = 0 \longrightarrow \partial/\partial y\,(\mu M) = \partial/\partial x\,(\mu N)$$

$$\rightarrow \mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x \rightarrow (M_y - N_y)\mu = N\mu_x - M\mu_y$$

فرض کنید می‌دانیم عامل انتگرال فقط تابع $Z = Z(x, y)$ می‌باشد یعنی $\mu = \mu(z)$ آنگاه:

$$(M_y - N_x)\mu = NZ_x\mu' - MZ_y\mu' = (NZ_x - MZ_y)\mu'$$

$$\longrightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{NZ_x - MZ_y} \qquad \mu(z) = e^{\int k(z)dz}$$

$k(z)$: فقط تابع z است

نکته: اگر عامل انتگرال $Mdx + Ndy = 0$ فقط تابع Z باشد آنگاه

$\dfrac{M_y - N_x}{MZ_x - NZ_y}$ فقط تابع Z است

$$\mu(z) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{MZ_x - NZ_y}}$$

۲۷ ~~۴۴~~ / ۴۲ مطلوب است عامل انتگرال $(y + xy^2)dx - xdy = 0$

۱) y^2 ۲) y ۳) $1/y^2$ ✓ ۴) $1/y$

همه گزینه‌ها تابعی از y هستند پس $Z = y$

$$\frac{M_y - N_x}{MZ_x - MZ_y} = \frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{1 + 2xy + 1}{-(y + xy^2)} = \frac{2(1 + xy)}{-y(1 + xy)} = -2/y$$

$$\mu = e^{\int -2/y\, dy} = y^{-2}$$

$y(x+y)\,dx + (x+2y-1)\,dy = 0$ مطلوبست عامل انتگرال ۲۸۸۱ / ۲ج،۳۶۲

۱) e^{y} ۲) e^{-y} ۳) e^{x} ✓ ۴) e^{-x}

$$\frac{M_y - N_x}{N z_x - M z_y} = \frac{x+2y-1}{N}$$

توجه کنید که عبارت بالا با ضریب dy یعنی N ساده می‌شود یعنی $z = x$

($z_x = 1$، $z_y = 0$ (صفر))

$$= \frac{x+2y-1}{x+2y-1} = 1 \rightarrow \mu(x) = e^{\int dx} = e^{x}$$

$y\,dx - (x^2+y^2+x)\,dy = 0$ مطلوبست عامل انتگرال ۲۹۱۷ / ۲ج،۳۵۹

۱) x^2+y^2 ۲) $(x^2+y^2)^2$ ۳) $\frac{1}{x^2+y^2}$ ۴) $\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$

$z = x^2+y^2$

$$\frac{M_y - N_x}{N z_x - M z_y} = \frac{1+2x+1}{-2x(x^2+y^2+x) - 2y^2} = \frac{2(1+x)}{-2xz - 2x^2 - 2y^2}$$

($z_x = 2x$، $z_y = 2y$)

$$= \frac{2(1+x)}{-2z(x+1)} = -\frac{1}{z} \rightarrow \mu = e^{\int -\frac{1}{z} dz} = z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x^2+y^2}$$

تذکر: برای حل معادله غیرکامل $M\,dx + N\,dy = 0$ داریم

۱) چنانچه $\frac{M_y - N_x}{N}$ (ضریب dy) تابعی از x باشد آنگاه $z = x$

۲) چنانچه $\frac{M_y - N_x}{-M}$ (ضریب dx) تابعی از y باشد آنگاه $z = y$

$y(0)=1$, $(e^{x+y} + y e^{y})\,dx + (x e^{y} - 1)\,dy = 0$ جواب ۳۰۵۵ / ۲ج،۴۴۶

۱) $e^{x} + xy + e^{-y} = e+1$ ✓ ۲) $e^{x} + e^{-y} - 1 = 1 + xy$

۳) $e^{x} + xy + e^{-y} - 1 = e+1$ ۴) $xy = e - e^{x} - e^{y}$

$M_y - N_x = e^{x+y} + e^y + ye^y - e^y = e^{x+y} + ye^y = M$

$z = y \Rightarrow \frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{M}{-M} = -1 \longrightarrow \mu = e^{\int -dy} = e^{-y}$

$\xrightarrow{e^{-y} \times \text{معادله}} (e^x + y)dx + (x - e^{-y})dy = 0$ کامل

$N^* = -e^{-y} \longrightarrow \int M dx + \int N^* dy = c \longrightarrow e^x + xy + e^{-y} = c$ حالت عمومی

$\xrightarrow[y=-1]{x=0} 1 + 0 + e = c$

۳۱۸/۱۹۶ ج ۲ اگر جوابی از معادله $\underbrace{(x^3 - y)}_{M} dx + \underbrace{(x + x^2 y)}_{N} dy = 0$ که از نقطه $(1,1)$ عبور می‌کند را در نظر بگیریم، به ازای $x = 2$ مقدار y چقدر است؟

$M_y - N_x = -1 - (1 + 2xy) = -2 - 2xy = -2(1 + xy)$

$z = x \longrightarrow \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-2(1+xy)}{x(1+xy)} = -\frac{2}{x} \longrightarrow \mu = e^{\int -2/x \, dx} = x^{-2}$

$\xrightarrow{x^{-2} \times \text{معادله}} \underbrace{(x - x^{-2} y)}_{M} dx + \underbrace{(x^{-1} + y)}_{N} dy = 0 \qquad N^* = y \rightarrow \int M dx + \int N_0^* dy = c$

$\longrightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}y + \frac{1}{2}y^2 = c \xrightarrow[y=1]{x=1} c = 2 \longrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y}{x} + \frac{1}{2}y^2 = 2$

$\xrightarrow{x=2} 2 + \frac{y}{2} + \frac{1}{2}y^2 = 2 \longrightarrow \frac{1}{2}y(1+y) = 0 \longrightarrow y = 0, -1$

نکته: هر معادله خطی $q(x)y' + g(x)y = f(x)$ دارای عامل انتگرال $\mu(x) = \frac{1}{a_1 x} e^{\int \frac{a_0}{a_1} dx}$ می‌باشد.

خصوصاً عامل انتگرال $y' + P(x)y = q(x)$ برابر $e^{\int P(x)dx}$ است.

۴۷/۴۳ عامل انتگرال $xy' - 2y = x^3$

$\mu(x) = \frac{1}{x} e^{\int -2/x \, dx}$

$= \frac{1}{x} \cdot x^{-2} = x^{-3}$

حل معادله با تشکیل دیفرانسیل کامل

اگر $\varphi = \varphi(x,y)$ دیفرانسیل کل (کامل) عبارت است از

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy$$

۱) $d(xy) = ydx + xdy$

۲) $d(y/x) = \dfrac{xdy - ydx}{x^2}$

۳) $d(x/y) = \dfrac{ydx - xdy}{y^2}$

با دیدن سمت راست هر یک از عبارات بالا فرمول دیفرانسیل سمت چپ را جایگزین و با ایجاد دیفرانسیل کامل سؤال را حل می‌کنیم.

$\frac{\text{۲۰ - الف ۳۳}}{\text{۶۵}}$ جواب عمومی این معادله را بیابید: $xy^2dy + y^3dx = ydx - xdy$

$$y^2(xdy + ydx) = y^2 d(xy) = ydx - xdy$$

$$\rightarrow d(x,y) = \frac{ydx - xdy}{y^2} = d(x/y) \rightarrow d(x,y) = d(x/y)$$

$$\xrightarrow{\int} xy = x/y + c$$ جواب عمومی

$\frac{\text{۲۰ - ب ۳۴}}{\text{۶۵}}$

$$(x + x^2y)dy + (xy^2 - y)dx = 0$$

$$\rightarrow xy\underbrace{(xdy + ydx)}_{d(xy)} + \underbrace{(xdy - ydx)}_{-d(x/y)} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } y^2} x/y\, d(xy) + \frac{xdy - ydx}{y^2} = 0 \rightarrow x/y\, d(xy) = d(x/y)$$

$$\xrightarrow[v = x/y]{u = xy} vdu = dv \rightarrow du = dv/v \xrightarrow{\int} u = \ln v + c$$

$$\rightarrow xy = \ln x/y + c$$

۲۰ ۳۵
۲ج ۴۰۱

$$x(\overbrace{y\,dx+x\,dy}^{d(xy)})=(1+x^2y^2)\ln x\,dx$$ جواب عمومی

$$\xrightarrow{u=xy} x\,du=(1+u^2)\ln x\,dx \rightarrow \frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{x}\ln x\,dx$$

$$\xrightarrow{\int} tg^{-1}u=\frac{1}{2}(\ln x)^2+c \rightarrow tg^{-1}(xy)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+c$$

معادله درجه دوم برحسب y'

هر معادله به شکل $A(x,y)y'^2+B(x,y)y'+C(x,y)=0$ یک معادله درجه دوم برحسب y' است. برای حل این معادله ابتدا y' را حساب می کنیم

$$y'=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

دو معادله دیفرانسیل را حل می کنیم

جواب عمومی آنها عبارتند از $\phi_1(x,y,c_1)=0$ و $\phi_2(x,y,c_2)=0$

و جواب عمومی معادله اول عبارت است از:

$$\phi_1(x,y,c_1)\cdot\phi_2(x,y,c_2)=0$$

۳۶
۸۵
۷۳

جواب عمومی معادله را بیابید $xyy'^2+(x^2+y^2)y'+xy=0$

معادله برحسب y' درجه دوم است

$$y'=\frac{-(x^2+y^2)\pm\sqrt{(x^2+y^2)^2-4(xy)^2}}{2xy}=\frac{-x^2-y^2\pm(x^2-y^2)}{2xy}$$

$$=\begin{cases} -\frac{y}{x} \rightarrow y'=-\frac{y}{x} \rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x} \quad dxy=0 \rightarrow xy-c_1=0 \\ -\frac{x}{y} \rightarrow y'=-\frac{x}{y} \rightarrow y\,dy=-x\,dx \rightarrow y^2+x^2-c_2=0 \end{cases}$$

جواب عمومی $\rightarrow (xy-c_1)(y^2+x^2-c_2)=0$

معادلات حل شده برحسب x یا y

۱) $y=f(x,y')$: $y=xy'^2+e^{y'}$

۲) $x=g(y,y')$: $x=y'^3+y^2y'$

روش حل: قرار دهید $p=y'$ و از آنچه حاصل می‌شود d/dx بگیرید

۲۷ جواب عمومی $y=3y'^2-2y'^3$ را بیابید. ۷۹

گزینه ۲ $\begin{cases} x=6p-3p^2+c \\ y=3p^2-2p^3 \end{cases}$

$y'=p \rightarrow y=3p^2-2p^3$

باید x را نیز برحسب p بدست می‌آوریم پس $\frac{d}{dx}$ می‌گیریم:

$y'_p=(6p-6p^2)\frac{dp}{dx} \rightarrow p\,dx=(6p-6p^2)dp \xrightarrow{\int} x=6p-3p^2+c$

$\begin{cases} x=6p-3p^2+c \\ y=3p^2-2p^3 \end{cases}$ جواب عمومی

مثال ۳۸: جواب عمومی $x=y'^3+\ln y'$ را بیابید.

$y'=p \rightarrow x=p^3+\ln p$

$\xrightarrow{d/dx} 1=(3p^2+1/p)\frac{dp}{dx}$　　$dx=(3p^2+1/p)dp$

$dy/dx=p \rightarrow dx=1/p\,dy$　　$1/p\,dy=(3p^2+1/p)dp$

$dy=(3p^3+1)dp \xrightarrow{\int} y=3/4\,p^4+p+c$

$\begin{cases} x=p^3+\ln p \\ y=3/4\,p^4+p+c \end{cases}$ جواب عمومی پارامتری

تعریف پوش: منحنی یا منحنی‌ که بر هم اعضای یک خانواده منحنی $\phi(x,y,c)=0$ مماس باشند را پوش آنها می‌نامیم.

روش محاسبه پوش

کافی است از معادله خانواده منحنی نسبت به c مشتق بگیرید و ثابت c را حذف کنید

مثال ۳۹: پوش $y=cx+\frac{1}{c^2}$ را بدست آورید

$$\begin{cases} y=cx+\frac{1}{c^2} \\ 0=x-\frac{2}{c^3} \end{cases} \quad \begin{cases} y=\frac{3}{c^2} \\ x=\frac{2}{c^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^3=\frac{27}{c^6} \\ x^2=\frac{4}{c^6} \end{cases} \Rightarrow \frac{y^3}{x^2}=\frac{27}{4}$$

$4y^3=27x^2$ پوش

معادلات کلرو $y=xy'+g(y')$

برای حل این معادلات $p=y'$ بگیرید و از طرفین $\frac{d}{dx}$ بگیرید.

مثال ۴۰: جواب $y=xy'+\frac{1}{y'^2}$ را بیابید

$$y'=p \rightarrow y=xp+\frac{1}{p^2} \quad (*) \quad \xrightarrow{d/dx} \; \underbrace{y'}_{p} = p+\left(x-\frac{2}{p^3}\right)p'$$

$$\rightarrow \left(x-\frac{2}{p^3}\right)\frac{dp}{dx}=0 \quad \text{حالت اول} \quad \frac{dp}{dx}=0 \rightarrow p=c \quad \text{ثابت}$$

$$\xrightarrow{*} y=cx+\frac{1}{c^2}$$ جواب معادلات کلرو همواره خط می‌باشد

حالت دوم $x-\frac{2}{p^3}=0 \xrightarrow{*} \begin{cases} y=\frac{3}{p^2} \\ x=\frac{2}{p^3} \end{cases} \xrightarrow{\text{حذف } p} 4y^3=27x^2$ جواب تکین / ازدوله / غیرعادی

نکته: در معادلات کلرو $y=xy'+g(y')$

الف: با جایگذاری $y'=c$ جواب عمومی بدست می‌آید

ب: پوش جواب عمومی، جواب ازدوله (ویژه) است.

۸۰ — جواب غیرعادی (ویژه) $y = xy' - \frac{1}{4} y'^2$ را بیابید. ۴۱/۷۰

$y' = c \quad \begin{cases} y = cx - \frac{1}{4}c^2 \\ 0 = x - \frac{1}{2}c \rightarrow c = 2x \end{cases}$

جواب از نوع ویژه $y = 2x^2 - \frac{1}{4}(2x)^2 \Rightarrow y = x^2$ در معادله اول

۲۴ — جواب عمومی $x^2y'^2 - 2xyy' + y^2 - e^{2y'} = 0$ ۴۲/۲ج۴،۲

جواب عمومی $(xy' - y)^2 - e^{2y'} = 0 \quad (xy' - y)^2 = e^{2y'}$

$\rightarrow xy' - y = \pm e^{y'} \rightarrow y = xy' \pm e^{y'}$ (کلرو)

$\begin{cases} y = c_1x + e^{c_1} \rightarrow y - c_1x - e^{c_1} = 0 \\ y = c_2x - e^{c_2} \rightarrow y - c_2x + e^{c_2} = 0 \end{cases}$

جواب عمومی $(y - c_1x - e^{c_1})(y - c_2 + e^{c_2}) = 0$

مسیر متعامد (قائم)

تعریف: مسیر متعامد خانواده منحنی $\phi(x, y, c) = 0$ منحنی هایی هستند که را بر اعضای ϕ عمود باشد.

روش محاسبه:

۱) معادله دیفرانسیل ϕ را می یابیم.

۲) y' را به $-\frac{1}{y'}$ تبدیل می کنیم (تا معادله ψ بدست آید)

۳) معادله دیفرانسیل مرحله ۲ را حل می کنیم

نکته: اگر معادله منحنی در قطبی داده شود در مرحله دو باید $\frac{r'}{r}$ را به $-\frac{r}{r'}$ تبدیل می کنیم

$\frac{۸۶}{۷۶}$ ۴۳ مسیرهای قائم $x^2y=c$

$\xrightarrow{\text{مشتق به } x}$ $2xy+x^2y'=0$ (معادله دیفرانسیل)

$y' \to -1/y' \Rightarrow 2xy-\frac{x^2}{y'}=0$ مسیر متعامد

$\to 2xyy'=x^2 \to 2y\,dy=x\,dx$

$\xrightarrow{\int} y^2=\frac{1}{2}x^2+k$

$\frac{۱۵۴}{۱۱۷}$ ۴۴ مسیرهای قائم $y=cx^2$

$\begin{cases} y=cx^2 \\ y'=2cx \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم}} y/y'=x/2$

$y' \to -\frac{1}{y'} \to -yy'=x/2$ (مسیر متعامد)

$-y\,dy=x/2\,dx \xrightarrow{\int} -1/2\,y^2=1/2\cdot1/2\,x^2+k$

$\frac{۴۶}{۳۰۱ \text{ ج}۲}$ ۴۵ مسیر متعامد $x^2-y^2=cx$

$2x-2yy'=c \to x^2-y^2=x(2x-2yy')$

$\to -x^2-y^2=-2xyy' \quad y'\to -1/y' \to -x^2-y^2=\frac{2xy}{y'}$

$dy/dx=y'=\frac{2xy}{-x^2-y^2}$ مسیر متعامد $\to 2xy\,dx+(x^2+y^2)dy=0$ کامل است

$N^*=y^2 \to \int M\,dx+\int N^*dy=c_1 \to x^2y+1/3\,y^3=c_1$

$\frac{۸۹}{۷۷}$ ۴۶ مسیر متعامد $r=c(\sin\theta-\cos\theta)$

$r'=c(\cos\theta+\sin\theta)$ تقسیم می‌کنیم $\to \frac{r}{r'}=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$

$\to -r'/r \to -\frac{r'}{r}=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta} \to dr/r=\frac{-\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta$

$\xrightarrow{\int} \ln r=\ln(\cos\theta+\sin\theta)+k \xrightarrow{\exp} r=e^k(\cos\theta+\sin\theta)$

فصل سوم
معادله مرتبه n

$y'' = F(x, y, y')$

* جواب عمومی شامل c_1 و c_2 است

* شرط اولیه: $y(x_0) = y_0$ و $y'(x_0) = y_1$

۱) معادلات فاقد y $\quad y'' = F(x, y')$

برای حل $z = y'$ تا به معادله $z' = F(x, z)$ تبدیل شود که مرتبه اول است.

۴۷۱۴
۲ج.۳۵۸

$y'' + (\tan x) y' = \cos^2 x$

فاقد y $\to y' = z \xrightarrow{\text{در معادله}} z' + (\tan x) z = \cos^2 x$

$\mu(x) = e^{\int \tan x \, dx} = e^{\ln(\sec x)} = \sec x$

$\to z = \frac{1}{\sec x}\int \cos x \, dx \qquad z = \cos x(\sin x + c_1)$

$z = \frac{1}{2}\sin 2x + c_1 \cos x \xrightarrow{\int} y = -\frac{1}{4}\cos 2x + c_1 \sin x + c_2$

۴۸۳
۲ج.۳۰۹
جواب معادله $y'y'' = 2$ و $y(0) = 1$ و $y'(0) = 2$ در $x = 3$ چقدر است

فاقد y $\to y' = z \xrightarrow{\text{در معادله}} z\frac{dz}{dx} = 2 \to z\,dz = 2\,dx$

$\xrightarrow{\int} \frac{1}{2} z^2 = 2x + c_1 \to \frac{1}{2} y'^2 = 2x + c_1$

$\xrightarrow{y'(0)=2} \frac{1}{2} \times 4 = 0 + c_1 \qquad c_1 = 2 \to y'^2 = 4(x+1)$

$\xrightarrow{\sqrt{\ }} y' = 2\sqrt{x+1} = 2(x+1)^{1/2} \xrightarrow{\int} \frac{4}{3}(x+1)^{3/2} + c_2$

$\xrightarrow{y(0)=1} 1 = \frac{4}{3} + c_2 \to c_2 = -\frac{1}{3} \to y = \frac{4}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{1}{3}$

$\xrightarrow{x=3} y = \frac{4}{3}\overset{8}{(4)^{3/2}} - \frac{1}{3} = \frac{31}{3}$

۲) معادله فاقد x $\quad y'' = g(y, y')$

برای حل قرار می‌دهیم $z = y'$ و y را متغیر مستقل می‌گیریم پس:

$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \cancel{\frac{dy}{dx}}\ y' = z \rightarrow y'' = z\frac{dz}{dy}$

و با جایگذاری به معادله $z\frac{dz}{dy} = g(y, z)$ می‌رسیم که مرتبه اول است

$\frac{۴۹۹}{۱۵۷}$ جواب عمومی $\quad y'' + y'^3 e^{2y} = 0$

فاقد x $\begin{cases} y' = z \\ y \text{ مستقل} \end{cases} \rightarrow y'' = z\frac{dz}{dy} \xrightarrow{\text{در معادله}} z\frac{dz}{dy} + z^3 e^{2y} = 0$

$\rightarrow z\frac{dz}{dy} = -z^3 e^{2y} \rightarrow \frac{dz}{z^2} = -e^{2y}dy \xrightarrow{\int dy} \frac{1}{z} = \frac{1}{2}e^{2y} + c_1$ (تفکیک‌پذیر)

$y' = \frac{1}{\frac{1}{2}e^{2y} + c}$

$\rightarrow (\frac{1}{2}e^{2y} + c_1)dy = dx \xrightarrow{\int} \frac{1}{4}e^{2y} + c_1 y = x + c_2$

$\frac{۵۰۱۲}{۲ج۲۵۷}$ جواب عمومی $\quad yy'' + 2y'^2 = 0$

فاقد x $\begin{cases} y' = z \\ y \text{ مستقل} \end{cases} \rightarrow y'' = z\frac{dz}{dy}$

$\xrightarrow{\text{در معادله}} yz\frac{dz}{dy} + 2z^2 = 0 \rightarrow yz\frac{dz}{dy} = -2z^2 \rightarrow \frac{dz}{z} = -2\frac{dy}{y}$ (تفکیک‌پذیر)

$\xrightarrow{\int} \ln z = -2\ln y + k \xrightarrow{exp} z = c_1 y^{-2},\ y' = c_1 y^{-2}$ ($\ln y^{-2}$)

$\rightarrow dy/dx = c_1 y^{-2} \rightarrow y^2 dy = c_1 dx \xrightarrow{\int} \frac{1}{3}y^3 = c_1 x + c_2$ جواب عمومی

فضاهای معادلات دیفرانسیل

تعریف: توابع y_1 و ... و y_k را مستقل خطی می‌نامیم هرگاه از رابطهٔ: $c_1y_1+c_2y_2+\dots+c_ky_k=0$ نتیجه شود که $c_k=0$ و ... و $c_1=0$ و در غیر اینصورت آنها را وابسته خطی می‌نامیم.

مثال: بررسی کنید $\sin x$ و $\cos x$ مستقل هستند یا وابسته؟

$$c_1\sin x+c_2\cos x=0 \qquad \begin{cases} x=0 & 0+c_2=0 \\ x=\pi/2 & c_1+0=0 \end{cases} \to c_1=0 \text{ و } c_2=0$$

پس تابع مستقل خطی اند

تعریف: اگر y_1 و ... و y_k تابع باشند، رونسکین آنها عبارت است از

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_k \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_k' \\ y_1^{(k-1)} & y_2^{(k-1)} & \cdots & y_k^{(k-1)} \end{vmatrix}$$

قضیه: اگر رونسکین y_1 و ... و y_k در نقطه‌ای ناصفر باشد آنگاه توابع مستقل خطی می‌باشند.

مثال: بررسی کنید توابع 1 و x و $\sin x$ مستقل هستند یا وابسته؟

$$W=\begin{vmatrix} 1 & x & \sin x \\ 0 & 1 & \cos x \\ 0 & 0 & -\sin x \end{vmatrix}=-\sin x \qquad W(\pi/2)=-1\neq 0$$

مستقل خطی اند

تذکر: اگر به ازای هر x رونسکین صفر باشد نمی‌توان نتیجه گرفت توابع مستقل یا وابسته هستند.

مثال ۵۲: توابع $y_1 = x^3$ و $y_2 = |x^3|$ مفروض اند

الف: رونسکین را بیابید ب: مستقل اند یا وابسته؟

الف:

$$y_2 = \begin{cases} x^3 ; & x \geq 0 \\ -x^3 ; & x < 0 \end{cases} \rightarrow y_2' = \begin{cases} 3x^2 & x \geq 0 \\ -3x^2 & x < 0 \end{cases} = 3x|x|$$

$$W = \begin{vmatrix} x^3 & |x^3| \\ 3x^2 & 3x|x| \end{vmatrix} = 3x^4|x| - 3x^2|x^3| = 0$$

ب: با تعریف بررسی می‌کنیم

$$c_1 x^3 + c_2 |x^3| = 0 \xrightarrow[x=-1]{x=1} \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 = 0 , c_2 = 0$$

پس y_1 و y_2 مستقل خطی اند

$L(y)$

* معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n و همگن $y^{(n)} + P_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + P_0(x) y = 0$

مفروض است که در آن P_0 و ... و P_{n-1} پیوسته اند

۱) اگر y_1 و y_2 جواب $L(y)=0$ باشند آنگاه $y_1 + y_2$ نیز جواب $L(y)=0$ است

۲) ثابت می‌شود توابع مستقل خطی y_1 و ... و y_n موجودند که در معادله

$L(y)=0$ صدق کند پس $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ جواب عمومی است و

$\{y_1, \dots, y_n\}$ مجموعه اساسی (پایه) جواب گفته می‌شود

۳) اگر y_1 و ... و y_n جوابهای معادله $L(y)=0$ باشند آنگاه:

$$W(x) = W(x_0) \, e^{-\int_{x_0}^{x} P_{n-1}(x) \, dx}$$

(قضیه آبل)

* معادله خطی مرتبه n ، $L(y)=f(x)$ مفروض است

۱) اگر y_1 جواب $L(y)=0$ و y_2 جواب $L(y)=f(x)$ باشد آنگاه y_1+y_2 جواب $L(y)=f(x)$ می باشد

۲) اگر y_1 و y_2 دو جواب $L(y)=f(x)$ باشد آنگاه ، y_1-y_2 جواب $L(y)=0$ است

۵۴ — ۲ج ۳۹۹

اگر y_1 و y_2 دو جواب مستقل معادله $y''+\frac{2}{x}y'+e^x y=0$ باشد که $w(1)=2$ رونسکین را در $x=5$ بیابید

$$w(x)=w(1)e^{-\int_1^x \frac{2}{x}dx}=2e^{-2\ln x\Big|_1^x}=2e^{-2\ln x}=2e^{\ln x^{-2}}$$

$$w(x)=\frac{2}{x^2}=\frac{2}{25}=0/08$$

معادله دیفرانسیل خطی و ضرایب ثابت (همگن)

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_0y=0 \quad , \quad a_k\in R$$

جواب این معادله $y=e^{rx}$ می باشد که r با حل معادله مشخصه زیر حاصل می گردد

$$r^n+a_{n-1}r^{n-1}+\dots+a_0=0$$

توجه کنید که در عمل با جایگذاری r^k به جای $y^{(k)}$ معادله مشخصه حاصل می گردد.

با توجه به وضع ریشه های این معادله داریم

حالت اول : $r=r_1\in R$ که تکرار آن k باشد جوابهای مستقل خطی عبارتند از

$$\underbrace{e^{r_1x}, xe^{r_1x}, \dots, x^{k-1}e^{r_1x}}_{k \text{ تا}}$$

حالت دوم: $r=\alpha \pm i\beta$ که تکرار آن k باشد: $i=\sqrt{-1}$

$$e^{\alpha x}\cos\beta x , \dots , x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x , \dots , x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

تعداد $2k$ جواب مستقل خطی بدست می‌آید

تذکر: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ (اویلر)

تذکر: عملگر D را با روابط زیر تعریف می‌کنیم

$$D=\frac{d}{dx} , D^2=\frac{d^2}{dx^2} , \dots , D^k=\frac{d^k}{dx^k}$$

معادله * عبارت است از:

$$D^n y+a_{n-1}D^{n-1}y+\dots+a_0 y=0$$

$$\underbrace{(D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\dots+a_0)}_{\text{معادله مشخصه}}y=0$$

بنابراین با $r \leftarrow D$ معادله مشخصه بدست می‌آید.

$\frac{۴۲}{۱۷.}$ ۵۴ جواب کلی $y'''-y'=0$

معادله مشخصه: $r^3-r=0 \rightarrow r(r^2-1)=0 \rightarrow r=0 , 1 , -1$

پایه جواب $\{e^{0x}, e^{x}, e^{-x}\}$

جواب عمومی $y=c_1+c_2e^{x}+c_3e^{-x}$

یا $y=c_1+a_2\sinh x+a_3\cosh x$

نکته: اگر λ و $-\lambda$ $(\lambda\neq 0)$ جواب معادله مشخصه باشند پایه جواب عبارت است از:

$$\{e^{\lambda x}, e^{-\lambda x}\} \text{ یا } \{\cosh(\lambda x), \sinh(\lambda x)\}$$

۵۵ $\frac{۶۴}{۱۰۷}$ جواب عمومی $y^{(3)}-3y''+3y'-y=0$

معادله مشخصه: $r^3-3r^2+3r-1=0 \rightarrow (r-1)^3=0 \rightarrow r=1,1,1$

$y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x$

۵۶ $\frac{۲۷}{۱۷۱}$ جواب عمومی $y''+4y'+5y=0$

معادله مشخصه: $r^2+4r+5=0 \quad r=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\frac{-4\pm 2i}{2}$

$\rightarrow r=-2\pm i \begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=1\end{cases}$

$y=c_1e^{-2x}\sin x+c_2e^{-2x}\cos x$

۵۷ $\frac{۲۰۹}{۱۶۶}$ جواب عمومی $y^{(4)}+2y''+y=0$

$r^4+2r^2+1=0 \rightarrow (r^2+1)^2=0 \quad r^2+1=0 \rightarrow r^2=-1 \rightarrow r=\pm\sqrt{-1}$

$r=\mp i$ ریشه‌ها: $r=\pm i , \pm i \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=1\end{cases}$

$y=c_1\sin x+c_2\cos x+c_3x\sin x+c_4x\cos x$

۵۸ $\frac{۲۹}{۱۷۱}$ جواب عمومی $(D+2)^2(D^2+2D+5)y=0$

$D\rightarrow r \quad (r+2)^2(r^2+2r+5)=0 \rightarrow r=-2,-2,-1\pm 2i \begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=2\end{cases}$

$y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}+c_3e^{-x}\sin 2x+c_4e^{-x}\cos 2x$

۵۹ مثال: جواب معادله $y''-4y'+4y=0$ را با شرایط اولیه $y(0)=0$ و $y'(0)=2$ بدست آورید.

ابتدا جواب عمومی را بدست می‌آوریم:

$r^2-4r+4=0 \rightarrow (r-2)^2=0 \rightarrow r=2,2 \quad y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$

حال شرایط اولیه را اعمال می‌کنیم

$\begin{cases}0=y(0)=c_1\\ 2=y'(0)=2c_1+c_2\end{cases} \rightarrow c_1=0 , c_2=2$

جواب خاص (خصوصی) $y=2xe^{2x}$

۹۱
۳۳
۱۷۲

به ازای چه مقدار α پاسخ معادله زیر وقتی $+\infty \leftarrow t$، به صفر میل می‌کند؟

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt} - 2y = 0 \\ y(0) = \alpha \ , \ y'(0) = 2 \end{cases}$$

جواب عمومی عبارت است از:

$$r^2 - r - 2 = 0 \to (r+1)(r-2) = 0 \to r = -1 , 2$$

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$$

توجه کنید که به ازای هر c_1 وقتی $t \to +\infty$ داریم $c_1 e^{-t} \to 0$ اما $e^{2t} \to +\infty$

پس شرط لازم و کافی برای آنکه $y \to 0$ آن است که $c_2 = 0$ پس $y = c_1 e^{-t}$

$$\text{اعمال شرط} \begin{cases} \alpha = y(0) = c_1 \\ 2 = y'(0) = -c_1 \end{cases} \to \cancel{c_1}^{-2} = \alpha \to \alpha = -2$$

۹۱
۳۱
۱۷۲

y_1 و y_2 دو جواب $y'' - 2y' + y = R(x)$ هستند به طوری که

$y_1(0) = y_2(0)$ و $y_1'(0) = y_2'(0) + 1$ کدام گزینه درست است

از نکات جلسه قبل $\varphi(x) = y_1 - y_2$ معادله همگن متناظر یعنی $y'' - 2y' + y = 0$ می‌باشد

$$\text{شرایط} \to \varphi(0) = 0 \quad \text{و} \quad \varphi'(0) = 1$$

$$\text{معادله مشخصه}: r^2 - 2r + 1 = 0 \to r = 1 , 1$$

$$\varphi(x) = y = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

$$\text{اعمال شرط} \to \begin{cases} 0 = \varphi(0) = c_1 \\ 1 = \varphi'(0) = c_1 + c_2 \end{cases} \to c_1 = 0 \quad \text{و} \quad c_2 = 1$$

$$y_1 - y_2 = \varphi(x) = x e^x$$

۶۲۸ / ۱۲۴ ج۲ معادله دیفرانسیلی را بیابید که e^{x} و e^{2x} پایه جواب آن باشند

معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ ضرایب ثابت

معادله مشخصه

$e^{x}, e^{2x} \to r=1, 2 \to (r-1)(r-2)=0 \to r^2-3r+2=0$

معادله دیفرانسیل $\to y''-3y'+2=0$

۶۳۵ / ۱۷۳ معادله دیفرانسیلی را بیابید که e^{2x}، xe^{2x} و e^{0x} دار جوابهای مستقل آن باشند

ریشه‌ها: $r=0, 0, 2, 2 \to r^2(r-2)^2=0 \quad r^4-4r^3+4r^2=0$

$\to y^{(4)}-4y'''+4y''=0$

۶۳۶ / ۱۷۳ معادله دیفرانسیل $y=e^{-x}(a\cos x+b\sin x)$ را بیابید

ریشه‌های r معادله مشخصه   پایه $\{e^{-x}\cos x, e^{-x}\sin x\}$

$r=\alpha\pm i\beta \to r=-1\pm i \to r+1=\pm i \xrightarrow{\text{توان ۲}} r^2+2r+1=i^2$

معادله دیفرانسیل $y''+2y'+2y=0 \to r^2+2r+2=0$

معادلات خطی (ضرایب ثابت) غیرهمگن

در معادله خطی $L(y)=f(x)$ چنانچه تابعی جواب باشد آن را جواب خصوصی نامیده و با y_p نمایش می‌دهیم

در معادله ضرایب ثابت با هر یک از روشهای زیر می‌توان جواب خصوصی را محاسبه نمود

۱- روش ضرایب نامعین (حدس)

۲- روش عملگر معکوس

۳- روش تغییر پارامتر (روش لاگرانژ)

۱- روش ضرایب نامعین (حدس)

این روش فقط برای یافتن جواب خصوصی معادلات ضرایب ثابت استفاده می‌شود که تابع طرف دوم نمایی، چند جمله‌ای، سینوس، کسینوس یا ضرب و جمع آنها باشد. (تابع طرف دوم باید جواب یک معادله ضرایب ثابت همگن باشد)

در معادله $L(y) = f(x)$ برای جواب خصوصی دو حالت داریم:

حالت اول: $f(x) = A_m(x)\, e^{ax}$

($A_m(x)$ چند جمله‌ای درجه m است) جواب خصوصی عبارت است از

$$y_p = x^s B_m(x)\, e^{ax}$$

s = مرتبه تکرار a در معادله مشخصه همگن

$B_m(x)$: چند جمله‌ای از درجه m با ضرایب نامعین

مثال ۴۵: جواب خصوصی معادله زیر در روش ضرایب نامعین را بنویسید (ضرایب را محاسبه نکنید)

$$y'' - 6y' + 9y = x^2 e^{3x} + e^{-x}$$

مشخصه: $r^2 - 6r + 9 = 0 \rightarrow r = 3, 3$

$$y_p = x^2(ax^2 + bx + c)\, e^{3x} + \cancel{x^0}\, d\, e^{-x}$$

۴۶: جواب خصوصی معادله زیر را بیابید (۲ج ۳۰۹)

$$y'' - 2y' + y = x \cosh x = \frac{x}{2} e^{x} + \frac{x}{2} e^{-x}$$

همه گزینه ها دارای ضریب نامعین بودند ← روش حدس

$$r^2 - 2r + 1 = 0 \rightarrow (r-1)^2 = 0 \rightarrow r = 1, 1$$

$$y_p = x^2(ax + b)\, e^{x} + \cancel{x^0}(cx + d)\, e^{-x}$$

۶۷ ۷۵ / ۳ ج ۳۱۹

جواب خصوصی $y'' - y' = 2x e^{0x}$ را بیابید

1) $-x(x+2)$	2) $x(x+2)$

3) $x(x-2)$	4) $x(2x+1)$

ابتدا حدس جواب را در روش ضرایب نامعین می‌نویسیم

مشخصه: $r^2 - r = 0 \rightarrow r = 0, 1$

$y_p = x^1(ax+b)e^{0x} \rightarrow y_p = x(ax+b) = ax^2 + bx$

$y_p' = 2ax + b$ و $y_p'' = 2a$	با جایگذاری در معادله ضرایب را محاسبه می‌کنیم

$\xrightarrow{\text{در معادله}} 2a - (2ax+b) = 2x \rightarrow \begin{cases} -2a = 2 \\ 2a - b = 0 \end{cases} \rightarrow a = -1, b = -2$

$\rightarrow y_p = x(ax+b) = -x(x+2)$

$$f(x) = \begin{cases} e^{\alpha x} A_m(x) \sin \beta x \\ \\ e^{\alpha x} A_m(x) \cos \beta x \end{cases}$$	حالت دوم

حدس جواب خصوصی عبارت است از:

$y_p = x^s e^{\alpha x}\left(\underbrace{B_m(x)}\sin\beta x + \underbrace{C_m(x)}\cos\beta x\right)$

چندجمله‌ای درجه m با ضرایب نامعین

$s =$ مرتبه تکرار $r = \alpha \pm i\beta$ در مشخصه معادله

مثال ۶: حدس جواب خصوصی معادله زیر را بنویسید (ضرایب را محاسبه نکنید)

$y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\underset{-1 \mp 2i}{\sin 2x} + \underset{\pm 2i}{\cos 2x}$	$r^2 + 2r + 5 = 0 \rightarrow r = -1 \pm i$

$y_p = x^1 e^{-x}(a_1 \sin 2x + a_2 \cos 2x) + \cancel{x}^{\,0}(a_3 \sin 2x + a_4 \cos 2x)$

۶۹|۸۶
۲ج.۳۲.

شکل جواب خصوصی معادله زیر را بیابید

$$y'' + 4y = x \sin 2x$$

همه‌گیرش ضریب نامعین بود ← روش ضرایب نامعین

$$r^2 + 4 = 0 \rightarrow r^2 = -4 \rightarrow r = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$$

$$y_p = x^1\left((ax+b)\sin 2x + (cx+d)\cos 2x\right)$$

۲ـ روش تغییر پارامتر (لاگرانژ)

در معادله خطی

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

به فرض آنکه y_1 و y_2 دو جواب مستقل همگن متناظر باشند جواب خصوصی عبارت است از

$$y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$$

$$c_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W(x)}dx \quad , \quad c_2 = \int \frac{y_1 f(x)}{W(x)}dx$$

$$W(x) = W(y_1, y_2)$$

مثال: جواب خصوصی $y'' + y = \sec x$ را بیابید

$$y'' + y = 0 \rightarrow r^2 + 1 = 0 \quad r = \pm i \begin{cases}\alpha = 0\\ \beta = 1\end{cases}$$ ، همگن

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$$

$$y_p = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$$

$$c_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W(x)}dx = -\int \frac{\cos x \cdot \sec x}{-1}dx = x$$

$$C_2(x)=\int \frac{y_1 f(x)}{W(x)}dx=\int \frac{\sin x \cdot \sec x}{-1}dx=-\int \operatorname{tg} x\,dx=\ln(\cos x)$$

$$y_p=x\sin x+(\cos x)\ln(\cos x)$$

۵۲ / ۱۸۸ اگر جواب همگن متناظر معادله زیر x و e^x باشد جواب خصوصی را بیابید

$$(1-x)y''+xy'-y=2(x-1)^2e^{-x}$$

$$f(x)=\frac{2(x-1)^2e^{-x}}{1-x}=2(1-x)e^{-x}$$

$$W=\begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix}=(x-1)e^x$$

$$y_p=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2$$

$$C_1(x)=-\int \frac{y_2 f(x)}{W(x)}dx=-\int \frac{e^x\cdot 2(1-x)e^{-x}}{(x-1)e^x}dx$$

$$=\int 2e^{-x}dx=-2e^{-x}$$

$$C_2(x)=\int \frac{y_1 f(x)}{W(x)}dx=\int \frac{x\cdot 2(1-x)e^{-x}}{(x-1)e^x}dx=\int \underbrace{-2x}_{u}\,\underbrace{e^{-2x}dx}_{dv}$$

$$=xe^{-2x}-\int e^{-2x}dx=xe^{-2x}+\tfrac12 e^{-2x}$$

$$du=-2dx,\quad v=-\tfrac12 e^{-2x}\qquad y_p=-2xe^{-x}+xe^{-x}+\tfrac12 e^{-x}$$

$$y_p=(-x+\tfrac12)e^{-x}$$

۳- روش عملگر معکوس

این روش برای یافتن جواب خصوصی معادله ضرایب ثابت قابل استفاده است

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0 y=f(x)$$

ابتدا معادله را به صورت عملگری می‌نویسیم:

$$(\underbrace{D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_0}_{\text{معادله مشخصه}\ P(D)})y=f(x)$$

$$\to P(D)y=f(x)$$

$$y_p=\frac{1}{P(D)}f(x)$$

تذکر: $\frac{1}{D}$ به مفهوم یک بار انتگرال گرفتن است یعنی $\frac{1}{D}f(x)=\int f(x)\,dx$

با توجه به $f(x)$ حالات زیر را داریم

حالت اول: $f(x)=e^{ax}$ و $P(a)\neq 0$: $\frac{1}{P(D)}e^{ax}=\frac{1}{P(a)}e^{ax}$

چنانچه $P(a)=0$ و a ریشه تکرار k در مشخصه هم باشد آنگاه:

$$\frac{1}{P(D)}e^{ax}=\frac{x^k}{P^{(k)}(a)\neq 0}e^{ax}$$

نکته: اگر a ریشه تکرار k باشد آنگاه k اولین مرتبه مشتق ناصفر $P(D)$ در a می‌باشد یعنی: $P(a)=0$ و $P'(a)=0$ و ... و $P^{(k-1)}(a)=0$ و $P^{(k)}(a)\neq 0$

نکته: فرض کنید $P(D)=(D-a)^k q(D)$ که $q(a)\neq 0$

الف: a ریشه تکرار k است

ب: $P^{(k)}(a)=k!\,q(a)$

۶/۲ج-۳۹۹ $y''' - 2y'' + 3y' - 2y = 2e^x$ جواب خصوصی

$$y_p = \frac{1}{\underbrace{D^3 - 2D^2 + 3D - 2}_{P(D)}} 2e^x = \frac{x^1}{2} 2e^x \to y_p = xe^x$$

$$P(1) = 0 \qquad P'(D) = 3D^2 - 4D + 3 \to P'(1) = 2 \neq 0 \to k = 1$$

۷/۲ج۳۵۷ $y'' - 2y' + y = 3e^x$ جواب خصوصی

$$y_p = \frac{1}{\underbrace{D^2 - 2D + 1}_{P(D)}} (3e^x) = \frac{x^2}{2}(3e^x) = \frac{3}{2}x^2e^x$$

روش اول

$$P(1) = 0 \to P'(D) = 2D - 2 \to P'(1) = 0 \to P''(D) = 2 \to P''(D) = 2 \neq 0 \to k = 2$$

روش دوم: $y_p = \frac{1}{(D-1)^2}(3e^x) \underset{k=2}{=} \frac{x^2}{2!}(3e^x) = \frac{3}{2}x^2e^x$

مثال: جواب خصوصی $(D+1)^3(D-2)^2 y = e^{-x} + 4e^{2x}$

$$y_p = \frac{1}{(D+1)^3(D-2)^2} e^{-x} + \frac{1}{(D+1)^3(D-2)^2} 4e^{2x}$$

$$= \frac{x^3}{3!(-1-2)^2} e^{-x} + \frac{x^2}{(2+1)^3 2!} 4e^{2x}$$

حالت دوم: اگر $f(x) = \sin\beta x$ یا $f(x) = \cos\beta x$

روش اول: با توجه به رابطه $e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$ برای محاسبه $y_p = \frac{1}{P(D)} f(x)$

ابتدا $Z_p = \frac{1}{P(D)} e^{i\beta x}$ را محاسبه می‌کنیم و داریم:

$$y_p = \begin{cases} Re(Z_p) ; f(x) = \cos\beta x \\ Im(Z_p) ; f(x) = \sin\beta x \end{cases}$$

روش دوم: چنانچه $P(i\beta)\neq 0$ برای محاسبه $\frac{1}{P(D)}f(x)$ کافی است در توان‌های زوج ـ بجای D قرار می‌دهیم $i\beta$ و حاصل را ساده کنیم ($e^{i\beta x}$ را جایگذاری نمی‌کنیم و I_m و Re محاسبه نمی‌شود)

مثال: جواب خصوصی را بیابید

۱) $y^{(4)}+2y''+5y=\sin x$

$$y_p=\frac{1}{D^4+2D^2+5}\sin x=\frac{1}{i^4+2i^2+5}\sin x=\frac{1}{4}\sin x$$

۲) $y''+4y=3\cos 2x$

$$y_p=\frac{1}{D^2+4}3\cos 2x=Re(z_p)=\frac{3}{4}x\sin 2x$$

$$z_p=\underbrace{\frac{1}{D^2+4}}_{P(D)}3e^{2ix}=\frac{x}{4i}3e^{2ix}=\frac{3x}{4i}(\cos 2x+i\sin 2x)$$

$$=\frac{3x}{4}(-i\cos 2x+\sin 2x)$$

$P(2i)=(2i)^2+4=-4+4=0,\quad P'(D)=2D\to P'(2i)=4i\neq 0\to k=1$

۳) $y''-3y'-4y=2\sin x$

$$y_p=\frac{1}{D^2-3D-4}2\sin x=\frac{1}{i^2-3D-4}2\sin x=\frac{1}{-5-3D}2\sin x$$

مزدوج مخرج

$$\frac{-5+3D}{25-9D^2}2\sin x=\frac{-5+3D}{34}(2\sin x)$$

$$=\frac{1}{17}(-5\sin x+3\cos x)$$

۴) $y''' + 3y'' + y = \cos 2x$

$$y_p = \frac{1}{\underset{D^2\cdot D}{D^3} + 3D^2 + 1}\cos \underset{i}{2x} = \frac{1}{(2i)^2 D + 3(2i)^2 + 1}\cos 2x$$

$$= \frac{1}{-11-4D}\cos 2x = \frac{-11+4D}{121-16D^2}\cos 2x = \frac{-11+4D}{185}\cos 2x$$

$$= \frac{1}{185}(-11\cos 2x - 8\sin 2x)$$

حالت سوم: $f(x) = e^{ax}g(x)$

$$\frac{1}{P(D)}e^{ax}g(x) = e^{ax}\frac{1}{P(D+a)}g(x)$$

$$D \to D+a$$

مثال: جواب خصوصی را بیابید

۱) $y'' - 6y' + 9y = x^2 e^{3x}$

$$y_p = \frac{1}{\underset{(D-3)^2}{D^2-6D+9}}x^2e^{3x} = e^{3x}\frac{1}{D^2}x^2 = e^{3x}\frac{1}{D}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = \frac{1}{12}x^4e^{3x}$$

۲) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sin 3x$

$$y_p = \frac{1}{D^2+2D+5}e^{-x}\sin 3x = e^{-x}\frac{1}{(D-1)^2+2(D-1)+5}\sin 3x$$

$$y_p = e^{-x}\frac{1}{D^2+4}\sin \underset{3i}{3x} = e^{-x}\frac{1}{\underset{-9}{(3i)^2}+4}\sin 3x = -\frac{1}{5}e^{-x}\sin 3x$$

حالت چهارم: $f(x) = x\,g(x)$

$$\frac{1}{P(D)}x\,g(x) = x\frac{1}{P(D)}g(x) - \frac{P'(D)}{P^2(D)}g(x)$$

مثال: جواب خصوصی $y''+2y'+y=x\cos x$ را بیابید.

$$y_P=\frac{1}{D^2+2D+1}x\cos x=x\frac{1}{D^2+2D+1}\cos x-\frac{2D+2}{(D^2+2D+1)^2}\cos x \qquad 4D^2=-4$$

$$=\frac{x}{2}\sin x+\tfrac{1}{4}(2D+2)\cos x=\frac{x}{2}\sin x+\tfrac{1}{4}(-2\sin x+2\cos x)$$

حالت پنجم: $F(x)=A_m(x)$ (درجه m)

برای محاسبه $\frac{1}{P(D)}A_m(x)$ ابتدا $P(D)$ را برحسب توانهای صعودی می‌نویسیم و سپس یک را بر $P(D)$ تقسیم می‌کنیم: خارج قسمت را تا رسیدن به D^m ادامه می‌دهیم و سپس بجای $\frac{1}{P(D)}$ خارج قسمت را می‌نویسیم.

مثال: جواب خصوصی معادله زیر را با روش عملگر بیابید.

$$y''+2y'+2y=2x+5$$

$$y_P=\frac{1}{D^2+2D+2}(2x+5)=\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}D\right)(2x+5)$$

$$=x+\tfrac{5}{2}-1=x+\tfrac{3}{2}$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 2+2D+D^2 \\ \hline -1-D-\frac{D^2}{2} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}D+\cdots \\ -D-\frac{D^2}{2} & \end{array}$$

معادله خطی و غیرهمگن (جواب عمومی)

معادله خطی $L(y)=f(x)$ مفروض است برای یافتن جواب عمومی کافی است جواب عمومی همگن متناظر یعنی y_h را با جواب خصوصی یعنی y_p جمع کنیم یعنی

$$y_{\text{عمومی}} = y_h + y_p$$

۴ / ۲ج۱۹۵ — جواب عمومی $y''-4y'+3y=2\cos x$ (عمران ۸۶)

۱) $c_1e^{-x}+c_2e^{-3x}+\cos x$ ۲) $c_1e^{x}+c_2e^{3x}+2\cos x$

۳) $c_1e^{x}+c_2e^{3x}+3\cos x$ ۴) $c_1e^{x}+c_2e^{3x}+\cos x-2\sin x$

کافی است فقط y_p را محاسبه کنیم

$$y_p=\frac{1}{D^2-4D+3}(2\cos x)=\frac{1}{-1-4D+3}(2\cos x)=\frac{1}{1-2D}(1\cos x)$$

$$=\frac{1+2D}{\underbrace{1-4D^2}_{4\times 1}}(\underbrace{1\cos x}_{1})=(1+2D)(2\cos x)=2\cos x-4\sin x \quad (3)$$

حال جواب عمومی همگن را می‌یابیم $r^2-4r+3=0 \rightarrow r=1,3$

$\rightarrow y_h=c_1e^{x}+c_2e^{3x}$ جواب عمومی $y=y_h+y_p$ (۳)

۱ / ۲ج۲۵۷ — جواب عمومی $y'''-4y'=e^{-2x}$ (عمران ۸۷)

همگن $\rightarrow r^3-4r=0 \rightarrow r(r^2-4)=0 \rightarrow r=0, 2, -2$

$y_h=c_1+c_2e^{2x}+c_3e^{-2x}$

برای جواب خصوصی از عملگر داریم

$$y_p=\frac{1}{D^3-4D}e^{-2x}=\frac{x^1}{8}e^{-2x}$$

$k=1$ ، $\text{مشتق}=3D^2-4=8\neq 0$

y ؛ جواب عمومی $y=y_h+y_p=\dots$

۵۱ / ۲ج ۱۲۹ — جواب عمومی $y''-2y'+y=xe^{x}$

همگن: $r^2-2r+1=0 \to (r-1)^2=0 \to r=1,1 \to y_h=c_1e^{x}+c_2xe^{x}$

جواب خصوصی را با روش عملگر محاسبه می‌کنیم

$$y_p=\frac{1}{(D-1)^2}xe^{x}=e^{x}\frac{1}{D^2}x=e^{x}\frac{1}{D}\left(\frac{1}{D}x\right)=\frac{x^3}{6}e^{x}$$

$$\to y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}+\frac{x^3}{6}e^{x}$$

نکته: اگر در e^{ax}، a تنها ریشه معادله باشد آنگاه از روش عملگر جهت بدست آوردن جواب خصوصی استفاده می‌کنیم

۶۰ / ۱۹۲ — جواب عمومی $y''-4y'+4y=\frac{e^{2x}}{x}$

همگن: $r^2-4r+4=0 \to (r-2)^2=0 \to r=2,2$

$$y_h=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$$

برای جواب خصوصی از روش عملگر داریم

$$y_p=\frac{1}{(D-2)^2}\left(\frac{e^{2x}}{x}\right)=e^{2x}\frac{1}{D^2}\left(\frac{1}{x}\right)=e^{2x}\cdot\frac{1}{D}\left(\frac{1}{D}x^{-1}\right)$$

$$=e^{2x}\int \ln x\,dx=e^{2x}\left(x\ln x-\int dx\right)=e^{2x}(x\ln x-x)$$

$$=e^{2x}x\ln x-xe^{2x}$$ جواب عمومی: $y=y_h+y_p=\dots$

نکته: جواب خصوصی منحصر به فرد نیست در واقع اجازه داریم y_p محاسبه شده را با قسمتی از y_h که به جای c_1 و c_2 عدد گذاشته باشیم جمع کنیم و آن را جواب خصوصی بنامیم مثلاً در سوال قبل:

$$y_p=xe^{2x}\ln x-xe^{2x}$$

$$y_p=xe^{2x}\ln x \qquad (c_1=0,\ c_2=1)$$

$$y_p=xe^{2x}\ln x-e^{2x} \qquad (c_1=-1,\ c_2=1)$$

۱۶ / ۲ج۱۹۷

در معادله $\begin{cases} y''+4y=4\cos 2x \\ y(0)=1 ,\ y'(0)=0 \end{cases}$ به ازای $x=\frac{\pi}{4}$ مقدار y را بیابید.

ابتدا جواب عمومی غیرهمگن را می‌یابیم

همگن ، $r^2+4=0 \rightarrow r^2=-4 \rightarrow r=\pm 2i \qquad \alpha=0 ,\ \beta=2$

$$y_h=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x$$

جواب خصوصی را با عملگر می‌یابیم

$$y_p=\frac{1}{D^2+4}(4\cos 2x)$$

$$z_p=\frac{1}{D^2+4}(4e^{2ix})=\frac{x}{4i}4e^{2ix}=\frac{x}{i}(\cos 2x+i\sin 2x)$$

$k=1$ ، مشتق $=2D=4i\neq 0$

$$=x(\tfrac{1}{i}\cos 2x+\sin 2x)$$

$$\rightarrow y_p=Re(z_p)=x\sin 2x$$

جواب عمومی $y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x+x\sin 2x$

حال شرط اولیه را اعمال می‌کنیم

$$\begin{cases} 1=y(0)=c_2 \\ 0=y'(0)=2c_1 \end{cases} \rightarrow c_2=1 ,\ c_1=0$$

$\rightarrow y=\cos 2x+x\sin 2x$ جواب خاص

$$x=\pi/4 \rightarrow y(\pi/4)=\cos\pi/2+\pi/4\sin\pi/2=\pi/4$$

۶۴ / ۱۹۵

بین ثابت‌های α و β چه رابطه‌ای برقرار باشد تا جواب $\begin{cases} y''-y=\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t \\ y(0)=0 ,\ y'(0)=0 \end{cases}$ ، $\omega\neq 0$ پس از گذشت زمان طولانی به سمت $t\rightarrow+\infty$ جواب تناوبی میل کند؟

ابتدا جواب عمومی را می‌یابیم

همگن ، $r^2-1=0 \rightarrow r=\pm 1$

$$y_h=c_1e^{t}+c_2e^{-t}$$

$$y_p = \frac{1}{\underset{(iw)^2}{D^2}-1}\alpha \cos wt + \frac{1}{D^2-1}\beta \sin wt = -\frac{1}{w^2+1}\cos wt - \frac{\beta}{w^2+1}\sin wt$$

$$\rightarrow y_{\text{عمومی}} = c_1e^t + c_2e^{-t} - \frac{\alpha}{w^2+1}\cos wt - \frac{\beta}{w^2+1}\sin wt$$

چون $\sin wt$ و $\cos wt$ کراندار هستند ولی $c_1e^t + c_2e^{-t}$ وقتی $t \to +\infty$ میل کند

کرانند اما $c_2e^{-t} \to 0$ و $e^t \to +\infty$

پس الزاماً c_1 باید صفر شود و لذا: $y = c_2e^{-t} - \frac{\alpha}{w^2+1}\cos wt - \frac{\beta}{w^2+1}\sin wt$

حال شرط را اعمال می‌کنیم:

$$\begin{cases} 0 = y(0) = c_2 - \frac{\alpha}{w^2+1} \\ 0 = y'(0) = -c_2 - \frac{\beta w}{w^2+1} \end{cases}$$

$$-\frac{\alpha + \beta w}{w^2+1} = 0 \qquad \alpha + \beta w = 0$$

معادله کوشی اویلر

$$x^2y'' + axy' + by = 0 \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$$

هر معادله که به صورت ترکیب خطی $x^k y^{(k)}$ باشد کوشی اویلر نامیده می‌شود.

جواب این معادله x^r $(x>0)$ است

برای یافتن r باید معادله مشخصه را تشکیل دهیم. کافی است به جای $x^k y^{(k)}$ قرار دهیم

$r(r-1)\ldots(r-k+1)$ و توجه کنید که عبارت بالا ضریب مشتق kام x^r است

با توجه به وضع r دو حالت داریم:

الف: $r = r_1 \in \mathbb{R}$ که k بار تکرار شود: $\underbrace{x^{r_1}, x^{r_1}(\ln x), \ldots, x^{r_1}(\ln x)^{k-1}}_{k}$

ب: $\beta \neq 0$ و $r = \alpha \pm i\beta$ دو جواب مستقل عبارتند از:

$$x^\alpha \sin(\beta \ln x) , x^\alpha \cos(\beta \ln x)$$

تذکر ۱: چنانچه ریشه تکراری باشد، به ازای هر بار تکرار جواب را در $\ln x$ و $(\ln x)^2$ و ... ضرب می‌کنیم

تذکر ۲: چنانچه متناظر با یک ریشه از معادله کوشی اویلر جواب ضرایب ثابت را بنویسیم و $x \leftarrow \ln x$ پاسخ کوشی اویلر بدست می‌آید

تذکر ۳: چنانچه در جواب‌ها به جای x قرار دهیم $|x|$ جواب برای $x \neq 0$ معتبر است

۶۸/۲.۱ جواب عمومی $x^2y'' + xy' - 4y = 0$ را بدست آورید

کوشی اویلر $\xrightarrow{\text{مشخصه}}$ $r(r-1) + r - 4 = 0 \to r^2 - 4 = 0 \to r = 2, -2$

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^{-2}$$

۶۹/۲.۱: جواب عمومی معادله $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$ به ازای x های مثبت بدست آورید

مشخصه $\to r(r-1) + 5r + 4 = 0 \to r^2 + 4r + 4 = 0$

$\to (r+2)^2 = 0 \to r = -2, -2 \qquad y = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-2} \ln x$

۷۴/۲.۲: جواب عمومی همگن متناظر معادله روبرو را بیابید $x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$

$x^2y'' - 3xy' + 5y = 0 \qquad$ مشخصه: $r(r-1) - 3r + 5 = 0 \quad r^2 - 4r + 5 = 0$

$\to r = 2 \pm i \left\langle \begin{array}{l} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{array} \right.$

$$y = c_1 x^2 \sin(\ln x) + c_2 x^2 \cos(\ln x)$$

۱۱/۲ج۲۴۳: مطلوبست جواب عمومی $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$

$r(r-1)(r-2) - 3r(r-1) + \underbrace{6r - 6}_{6(r-1)} = 0 \to (r-1)(\underbrace{r^2 - 2r - 3r + 6}_{r^2 - 5r + 6}) = 0$

$\to r = 1, 2, 3$

$$y = c_1 x^1 + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

۷۶ / ۲.۲ — معادله دیفرانسیلی بیابید که $y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$ جواب عمومی باشد

$\{x^2, x^2 \ln x\}$ پایه جواب $\rightarrow r = 2, 2$

$\rightarrow (r-2)^2 = 0 \quad r^2 - 4r + 4 = 0 \quad \underbrace{(r^2 - r)}_{r(r-1)} - 3r + 4 = 0$

$\rightarrow x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$

۴۱ / ۴.۳ ج۲ — x و $\frac{1}{x}$ دو جواب مستقل خطی یک معادله مرتبه ۲ خطی می‌باشند که ضریب مشتق دوم در آن برابر یک است ضریب مشتق اول چقدر است

$\{x, x^{-1}\} \rightarrow r = 1, -1$

$\rightarrow (r+1)(r-1) = 0 \quad r^2 - 1 = 0 \rightarrow (r^2 - r) + r - 1 = 0$

$\rightarrow x^2 y'' + xy' - y = 0 \longrightarrow y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0$

ضریب مشتق اول $= \frac{1}{x}$

۹۲ / ۳۸.۰ ج۲ — تحت چه شرایطی هر جواب دلخواه غیر صفر معادله $x^2 y'' + \alpha x y' + y = 0$ نوسانی و در بی‌نهایت ~~میرا~~ باشد؟ در x به صفر میل نماید

معادله مشخصه $r(r-1) + \alpha r + 1 = 0$

$\rightarrow r^2 + (\alpha - 1) r + 1 = 0 \longrightarrow r = r_1, r_2$ نوسانی بودن $\rightarrow$ r_1 و r_2 غیر حقیقی

$\rightarrow \Delta < 0 \quad \Delta = (\alpha-1)^2 - 4 < 0 \rightarrow (\alpha - 1)^2 < 4 \rightarrow |\alpha - 1| < 2$

$\rightarrow -1 < \alpha < 3$ نوسانی بودن

در معادله درجه ۲ میرا بودن $\begin{cases} r_1 + r_2 < 0 \\ r_1 r_2 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -(\alpha - 1) < 0 \\ 1 > 0 \end{cases} \rightarrow \alpha > 1$ میرا بودن در بی‌نهایت

نوسانی + میرا $\xrightarrow{\text{اشتراک}} 1 < \alpha < 3$

* نوسانی بودن یک تابع ، این مفهوم است که تابع دائماً صعود و نزول است و در بین جوابها (کوشی اویلر، ضرایب ثابت) این اتفاق رخ می‌دهد که همه جوابها شامل سینوس و کسینوس باشند و لذا

شرط لازم و کافی برای آنکه در معادله ضرایب ثابت و کوشی اویلر همه جوابها نوسانی باشد آن است که همه ریشه‌ها غیرحقیقی باشند

* میرا بودن در بی‌نهایت یعنی به صفر میل کردن در معادله کوشی اویلر و ضرایب ثابت فقط وقتی رخ می‌دهد که قسمت حقیقی همه ریشه‌ها منفی باشد

در معادله درجه ۲

$$\begin{cases} r_1+r_2<0 & -\frac{b}{a}<0 \\ r_1r_2>0 & \frac{c}{a}>0 \end{cases}$$

نکته : هر معادله به شکل $(ax+b)^2y''+\alpha(ax+b)y'+\beta y=0 \quad a\neq 0$ را می‌توان به کوشی اویلر تبدیل کرد. ابتدا a را فاکتور می‌گیریم

$$a^2\left(x+\frac{b}{a}\right)^2y''+a\alpha\left(x+\frac{b}{a}\right)y'+\beta y=0$$

که با تغییر متغیر مستقل $u=x+\frac{b}{a}$ به کوشی اویلر زیر تبدیل می‌شود

$$a^2u^2y''_u+a\alpha uy'_u+\beta y=0$$

$\frac{125}{211}$ مطلوبست جواب عمومی $(2x-1)^2y''+3(2x-1)y'-2y=0$

$$4(x-1/2)^2y''+6(x-\tfrac{1}{2})y'-2y=0 \qquad u=x-1/2$$

$$u=x-1/2 \longrightarrow 4u^2y''+6uy'-2y=0 \quad \text{کوشی اویلر}$$

$$\xrightarrow{\text{مشخصه}} 4r(r-1)+6r-2=0 \rightarrow 4r^2+2r-2=0 \rightarrow r=-1, 1/2$$

$$\longrightarrow y=c_1u^{-1}+c_2u^{1/2}=c_1(x-1/2)^{-1}+c_2(x-1/2)^{1/2}$$

سوال: تعیین کنید معادله $x^2y''+axy'+by=0$ با تغییر متغیر $x=e^t$ به چه معادله‌ای تبدیل می‌شود؟

باید مشتقات نسبت به x را برحسب مشتق نسبت به t بنویسیم. (قاعده مشتق زنجیره‌ای)

$x=e^t \to t=\ln x$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\,\frac{dy}{dt}$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}\xrightarrow{\text{در معادله}}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+a\frac{dy}{dt}+by=0$$

$\to y''_t+(a-1)y'_t+by=0$ ضرایب ثابت

کوشی اویلر: $r(r-1)+ar+b=0$

ضرایب ثابت: $r^2+(a-1)r+b=0$

نکته: هر معادله کوشی اویلر در ۳ مرحله ضرایب ثابت می‌شود

۱) تغییر متغیر $x=e^t$ یا $t=\ln x$ را در نظر می‌گیریم

۲) معادله مشخصه کوشی اویلر را می‌نویسیم

۳) معادله ضرایب ثابتی می‌نویسیم (برحسب مستقل t) که معادله (۲) برای آن معادله مشخصه باشد

* از روش بالا برای یافتن جواب خصوصی کوشی اویلر غیرهمگن استفاده می‌کنیم و می‌دانیم

$y=\underbrace{y_h}_{\text{عمومی همگن}}+\underbrace{y_p}_{\text{خصوصی}}$: جواب عمومی غیرهمگن

مثال: جواب خصوصی معادله زیر را بیابید

$$x^3y''' + xy' + 4y = x$$

باید معادله را به ضرایب ثابت تبدیل کنیم $x = e^t$ و $t = \ln x$

مشخصه کوشی اویلر: $r(r-1)(r-2) + r + 4 = 0$

$$\rightarrow r^3 - 3r^2 + 3r + 4 = 0 \rightarrow y''' - 3y'' + 3y' + 4y = e^t$$

$$\xrightarrow{\text{عملگر}} y = \frac{1}{D^3 - 3D^2 + 3D + 4} e^t = \frac{1}{1 - 3 + 3 + 4} e^t = \frac{1}{5} e^t$$

$$\rightarrow y_p = \frac{1}{5} x$$

$\frac{88}{10}$ جواب عمومی $x^2y'' + xy' + 4y = \sin(\ln x)$

معادله همگن: $r(r-1) + r + 4 = 0 \rightarrow r^2 + 4 = 0$

$$\rightarrow r = \pm 2i < \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{matrix} \qquad y_h = c_1 \sin(2\ln x) + c_2 \cos(2\ln x)$$

برای یافتن y_p معادله را به ضرایب ثابت تبدیل می‌کنیم

$x = e^t$ یا $t = \ln x$ $\quad y'' + 4y = \sin t \rightarrow y_p = \frac{1}{D^2 + 4} \sin t$

$$= \frac{1}{i^2 + 4} \sin t = \frac{1}{3} \sin t \rightarrow y_p = \frac{1}{3} \sin(\ln x)$$

جواب عمومی: $y = y_h + y_p = \ldots$

روش کاهش مرتبه

اگر در معادله خطی و مرتبه n، $L(y) = F(x)$ تابع y_1 به عنوان جواب همگن متناظر مشخص باشد یعنی $L(y_1) = 0$ قرار دهید $y = y_1 z$ تا به معادله خطی مرتبه n برحسب تابع z برسیم که ضریب z در آن صفر می‌باشد، سپس قرار می‌دهیم $u = z'$ تا به معادله خطی از مرتبه $(n-1)$ برحسب تابع u برسیم

$\frac{۹۰}{۲۱۴}$ $y_1 = e^x$ جواب $xy'' - (x+2)y' + 2y = 0$ می‌باشد جواب دیگر این معادله با حل کدام معادله بدست می‌آید؟

$$x\frac{d^2}{dx^2}(e^{-x}y) + (x-2)\frac{d}{dx}(e^{-x}y) = 0$$

هرگاه در معادله یکی از جوابها را دادند و معادله قابل حل نبود باید از کاهش مرحله استفاده کنیم

$y = y_1 z \to y = e^x z$

مشتق $\to y' = e^x(z + z')$

مشتق دوم $\to y'' = e^x(z + 2z' + z'')$

در معادله $\to xe^x(z'' + 2z' + z) - e^x(x+2)(z+z') + 2e^x z = 0$

$\to xz'' + (x-2)z' = 0 \xrightarrow[z = e^{-x}y]{y = e^x z} x(e^{-x}y)'' + (x-2)(e^{-x}y)' = 0$

نکته: اگر در معادله مرتبه ۲ و همگن $y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$ جواب y_1 داده شده جواب دوم (y_2) عبارت است از:

باید ضریب y'' یک باشد.

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}$$

$\frac{۲۴}{۲۱۲}$ اگر $y_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ برای $x>0$ جواب معادله $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ باشد جواب عمومی را بیابید

ابتدا باید جواب دوم را بیابیم

$P(x) = \frac{1}{x}$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} = \frac{x^{-1}}{\frac{\sin^2 x}{x}} = \frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x$$

$$\xrightarrow{\int} \frac{y_2}{y_1} = \int \csc^2 x\,dx = -\cot x = -\frac{\cos x}{\sin x} \xrightarrow[y_1]{\text{ضرب در}} y_2 = -\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$