$\rightarrow y_2 = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ عمومی $y = c_1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$

$\frac{84}{2ج347}$ اگر $y_1 = x$ جواب $x^2 y'' - x(x+2) y' + (x+2) y = 0$ باشد، جواب عمومی را بیابید؟

$P(x) = \frac{-x(x+2)}{x^2} = -\frac{x+2}{x} = -(1 + 2/x)$

$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} = \frac{e^{\int (1+2/x)dx}}{x^2} = \frac{e^{x+2\ln x}}{x^2} = e^x$

$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = e^x \xrightarrow{\int} y_2/y_1 = \int e^x dx = e^x \rightarrow y_2 = x e^x$

عمومی $y = c_1 x + c_2 x e^x$

فصل چهارم

حل معادله به کمک سری

تعریف: نقطه x_0 را برای معادله $y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$ نقطه عادی می‌نامیم هرگاه $P(x)$ و $q(x)$ در x_0 تحلیلی باشند (پیوسته و مشتق‌پذیر تا هر مرتبه باشند)

قضیه: اگر x_0 برای معادله $y'' + P(x)y' + q(x)y = 0$ عادی باشد جواب معادله به شکل سری توانی حول x_0 یعنی $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ موجود است

نکته: اگر شعاع همگرایی سری تیلور P و q حول x_0 به ترتیب R_p و R_q باشند و R شعاع همگرایی جواب باشد آنگاه $R \geq \underbrace{\min(R_p, R_q)}$

حداقل (کران پایین) شعاع همگرایی

نکته: در توابع کسری برای یافتن شعاع همگرایی سری تیلور حول x_0، کلیه ریشه‌های مخرج (حقیقی و غیرحقیقی) را بدست آورده و فاصله x_0 تا آنها را می‌یابیم کمترین فاصله بدست آمده با شعاع همگرایی سری تیلور مساوی است

$\frac{1}{2\text{ج}\ 358}$ شعاع همگرایی بسط تابع $\frac{1}{(z-1)(z-3)}$ حول $z = \frac{3}{2}$ را بیابید

ریشه مخرج : $z = 1, 3$

$\frac{3}{2}$ فاصله ریشه‌ها تا $= \frac{1}{2}$ و $\frac{3}{2}$ $\longrightarrow$ شعاع همگرایی $= \frac{1}{2}$

$\frac{25}{2\text{ج}\ 314}$ کران پایین شعاع همگرایی پاسخ معادله زیر حول $-\frac{1}{2}$ را بیابید.

$(1+x^2)y'' + 4x^2 y = 0 \qquad P(x) = 0 \ , \ q(x) = \frac{4x^2}{1+x^2}$

$R_p = +\infty$ (کران پایین) حداقل $= \min(R_p, R_q) = \frac{\sqrt{5}}{2}$

R_q : محاسبه ، ریشه مخرج $x^2 + 1 = 0 \to x = \pm i$ فاصله از $-\frac{1}{2}$: $\pm i$ $= |\pm i - (-\frac{1}{2})|$

$= |\frac{1}{2} \pm i| = \sqrt{\frac{1}{4} + i^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \to R_q = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\frac{۴}{۳۲۹}$ اگر $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ جواب معادله $y''-xy'=0$ باشد آنگاه:

رابطه بازگشتی $a_{n+2}=\frac{na_n}{(n+1)(n+2)}$

همواره برای یافتن (رابطه بازگشتی) جواب باید y را در معادله جایگذاری کنیم

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^{n-1} \quad , \quad y''=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله}} \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n=0$$

$$\xrightarrow[\text{توان}]{\text{یکی کردن}} \sum_{n=-2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n=0$$

ضریب x^n: $(n+1)(n+2)a_{n+2}-na_n=0 \quad n\geq 0$

$$\rightarrow a_{n+2}=\frac{na_n}{(n+1)(n+2)}$$

$\frac{۲۵}{۳۵۸}$ ضریب x^3 در سری مک لورن پاسخ معادله زیر؟

$$y''+(\sin x)y'+e^x y=0 \qquad y(0)=1 \ , \ y'(0)=1$$

$x=0$ حول $\rightarrow y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad$ ضریب $x^3=a_3$

$$\xrightarrow[\text{معادله}]{\text{مشتق}} y'''+(\cos x)y'+\sin x\, y''+e^x y+e^x y'=0$$

$$\xrightarrow{x=0} y'''(0)+y'(0)+0+y(0)+y'(0)=0 \rightarrow y'''(0)=-3 \rightarrow a_3=\frac{y'''(0)}{3!}=-\frac{1}{2}$$

نکته: اگر $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ آنگاه $a_n=\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}$ خصوصاً:

$$a_0=y(x_0) \ , \ a_1=y'(x_0)$$

حل معادله حول نقطه غیرعادی

تعریف: برای معادله $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ نقطه x_0 را غیرعادی (تکین، ایزوله، منفرد) می‌نامیم هرگاه P یا q در x_0 غیرتحلیلی باشند و چنانچه $(x-x_0)P(x)$ و $(x-x_0)^2q(x)$ در x_0 تحلیلی باشند x_0 را غیرعادی منظم و در غیر اینصورت غیرعادی نامنظم می‌نامیم.

تذکر: اگر x_0 نقطه غیرعادی باشد و هر دو حد زیر موجود باشند آنگاه x_0 غیرعادی منظم است و در غیر اینصورت نامنظم می‌باشد.

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)P(x) \quad , \quad \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2q(x)$$

۷۲ / ۴.۸ ج ۲ — نوع نقاط تکین معادله زیر را تعیین کنید

$$x^2(x-2)^3y''-x(x-2)y'+y=0$$

$$P(x)=-\frac{x(x-2)}{x^2(x-2)^3}=-\frac{1}{x(x-2)^2} \qquad q(x)=\frac{1}{x^2(x-2)^3}$$

$\rightarrow x=0$ و ۲ تکین

$x=0$: $\begin{cases}\lim_{x\to 0} xP(x)=-\frac{1}{4}\\ \lim_{x\to 0} x^2q(x)=-\frac{1}{8}\end{cases}$ $\longrightarrow$ $x=0$ تکین منظم

$x=2$: $\begin{cases}\lim_{x\to 2}(x-2)P(x)=\infty\\ \lim_{x\to 2}(x-2)^2q(x)=\infty\end{cases}$ $\longrightarrow$ $x=2$ تکین نامنظم

تفصیل: اگر x_0 برای معادله $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ نقطه تکین منظم باشد آنگاه

$$p_0=\lim(x-x_0)P(x) \quad , \quad q_0=\lim(x-x_0)^2q(x)$$

$\longrightarrow r(r-1)+p_0r+q_0=0$ (معادله مشخصه، شاخص، اندیسی)

$\longrightarrow r=r_1, r_2$

ریشه‌های آن

حالت اول: $r_1 \neq r_2$ و $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$ دو جواب مستقل عبارتند از:

$$y_1 = (x-x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

$$y_2 = (x-x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

سری توانی تعمیم یافته (سری فروبنیوس)

حالت دوم: $r_1 = r_2$ دو جواب مستقل

$$y_1 = (x-x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

← سری فروبنیوس

$$y_2 = y_1 \ln(x-x_0) + (x-x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

خط لگاریتمی

حالت سوم: $r_1 \neq r_2$ و $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$ دو جواب مستقل عبارتند از:

$$y_1 = (x-x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

$$y_2 = \alpha y_1 \ln(x-x_0) + (x-x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$$

$\frac{۵۲}{۲ج۴۴۵}$ ریشه‌ها معادله شاخص، معادله زیر حول $x_0=0$ را بیابید.

$$4x^2 y'' + (2x^4 - 5x) y' + (3x^2 + 2) y = 0$$

$$P(x) = \frac{2x^4 - 5x}{4x^2}, \quad q(x) = \frac{3x^2+2}{4x^2} \qquad P_0 = \lim x P(x) = -\frac{5}{4}$$

$$q_0 = \lim_{x \to 0} x^2 q(x) = \frac{1}{2} \longrightarrow r(r-1) - \frac{5}{4} r + \frac{1}{2} = 0 \longrightarrow r^2 - \frac{9}{4} r + \frac{1}{2} = 0$$

$$\longrightarrow r = 2, \frac{1}{4}$$

$\frac{۹}{۲ج-۳۱}$ اگر $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ جواب معادله زیر باشد r را بیابید

$$(x^2-x)y''-xy'+y=0$$

در واقع r ریشه معادله مشخصه حول $x=0$ می‌باشد

$$p(x)=-\frac{x}{x^2-x}=+\frac{1}{1-x} \qquad q(x)=\frac{1}{x^2-x}$$

$$p_0=\lim_{x\to 0} x\,p(x)=0 \qquad q_0=\lim_{x\to 0} x^2 q(x)=0$$

$$\to r(r-1)+0\,r+0=0 \to r(r-1)=0 \to r=0,1$$

$\frac{۳۴}{۳۳۷}$ جواب‌های مستقل معادله زیر:

$$3x(2+3x)y''-4y'+4y=0$$

$$y_1=x^{5/3}\sum a_n x^n \quad , \quad y_2=\sum b_n x^n$$

حول $x=0$

$$p(x)=-\frac{4}{3x(2+3x)} \to p_0=\lim_{x\to 0} x\,p(x)=-2/3$$

$$q(x)=\frac{4}{3x(2+3x)} \to q_0=\lim_{x\to 0} x^2 q(x)=0$$

$$\to r(r-1)-2/3\,r+0=0 \to r(r-5/3)=0$$

$$\to r=0\ ,\ 5/3 \xrightarrow{\text{حالت اول}} y=x^r\sum a_n x^n$$

$\frac{۲۷}{۳۰۹}$ دو جواب مستقل معادله زیر را بیابید

$$x^2y''+3xy'+(1+x)y=0$$

حول $x=0$

$$p(x)=3/x \to p_0=3 \qquad q(x)=\frac{1+x}{x^2} \to q_0=1$$

$$\to r(r-1)+3r+1=0 \to r^2+2r+1=0$$

$\to r=-1$ ریشه مضاعف　حالت دوم　$y_1=x^{-1}\sum a_n x^n$

$$y_2=y_1\ln x+x^{-1}\sum b_n x^n$$

۳۰/۳۱. جواب معادله $x^2y''-xy'+(1-x)y=0$ به فرم سری فروبنیوس عبارت است

۱) $x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$ ۲) $x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$

۳) $x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$ ۴) $x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

حول $x=0$

$$\left.\begin{array}{l} p(x)=-\frac{1}{x}\to p_0=-1 \\ q(x)=\frac{1-x}{x^2}\to q_0=1\end{array}\right\}\to r(r-1)-r+1=0$$

$$\to r^2-2r+1=0\to r=1,1\to y=x^1\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}\to y'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^n$$

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)a_nx^{n-1}\xrightarrow{\text{در معادله}}\sum_{n=0}n(n+1)a_nx^{n+1}$$

$$-\sum_{n=0}(n+1)a_nx^{n+1}+\sum_{n=0}a_nx^{n+1}-\sum_{n=0}a_nx^{n+2}=0 \quad n\to n-1$$

$$-\sum_{n=1}a_{n-1}x^{n+1}$$

$n\geq 1$

ضریب x^{n+1} $\to (n(n+1)-(n+1)+1)a_n-a_{n-1}=0\to a_n=\frac{1}{n^2}a_{n-1}$ رابطه بازگشتی

n^2

برای حل رابطه بازگشتی $n=1,2,\dots$ جایگذاری و a_n را حدس می‌زنیم

$$n=1\to a_1=\frac{1}{1^2}a_0 \qquad n=2\to a_2=\frac{1}{2^2}a_1=\frac{1}{(1\times 2)^2}a_0$$

$$\to a_n=\frac{1}{(n!)^2}a_0 \quad n\geq 0 \quad ,\quad y=x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$$

$a_0=1$ گزینه ۱

معادله بسل

تعریف: اگر $p \geq 0$ معادله بسل مرتبه p عبارت است از:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - p^2) y = 0$$

۱) نقطه $x=0$ برای معادله بسل نقطه تکین منظم است و $r_1 = p$ و $r_2 = -p$ ریشه‌های معادله مشخصه آن هستند

۲) جواب متناظر ریشه بزرگتر یعنی $r_1 = p$ فروبنیوس است و لذا $y = x^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ خواهد بود و رابطه بازگشتی a_n عبارت است از

$$a_n = -\frac{1}{n(n+2p)} a_{n-2} \quad , \quad n \geq 2$$

و با محاسبه جواب بسل عبارت است

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$ تابع بسل مرتبه p نوع اول

۳) جواب عمومی معادله بسل عبارت است از:

الف: اگر $p \neq 0, 1, 2, \ldots$

$$y = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x)$$

ب: اگر $p = 0, 1, 2, \ldots$

$$y = c_1 J_p(x) + c_2 Y_p(x)$$ (تابع بسل مرتبه p نوع دوم لگاریتمی)

۴) مشتق و انتگرال توابع بسل

الف) $\frac{d}{dx}(x^P J_p(x)) = x^P J_{p-1}(x)$

ب) $\frac{d}{dx}(x^{-P} J_p(x)) = -x^{-P} J_{p+1}(x)$

ج) $\int x^P J_{p-1}(x)\,dx = x^P J_p(x) + c$

د) $\int x^{-P} J_{p+1}(x)\,dx = -x^{-P} J_p(x) + c$

$\frac{۴۲}{۳۲.}$ $\int x^4 J_1(x)\,dx = ?$

$\int x^4 J_1\,dx = \int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{(x^2 J_1\,dx)}_{dv} = x^2(x^2 J_2) - 2\int x^3 J_2\,dx$

$= x^4 J_2 - 2x^3 J_3 + c$

$du = 2x\,dx$ ، $v = \int x^2 J_1\,dx \xrightarrow{P=2} x^2 J_2$

۵) معادلات قابل تبدیل به بسل

برخی معادلات با تغییر متغیر به معادله بسل تبدیل می‌شود ولذا با توجه به (۳) جواب عمومی آن بدست می‌آید

مثال: بررسی کنید معادله $y'' + (e^x - m^2)y = 0$ ، $m \geq 0$ با تغییر متغیر $z = 2e^{\frac{x}{2}}$ به چه معادله‌ای تبدیل می‌شود؟ ابتدا باید y' و y'' را برحسب مشتق نسبت به z بنویسیم که این کار با قاعده مشتق زنجیره‌ای انجام می‌شود

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = e^{x/2}\frac{dy}{dz}$

$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{\frac{x}{2}}\frac{dy}{dz}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\frac{dy}{dz} + e^{x/2}\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\cdot\frac{dz}{dx}$ $\left(e^{x/2}\right)$

$= \frac{1}{2}e^{x/2}\frac{dy}{dz} + e^x\frac{d^2y}{dz^2} \xrightarrow{\text{در معادله}} e^x\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{2}e^{x/2}\frac{dy}{dz} + (e^x - m^2)y = 0$

$$\xrightarrow[e^x = z^2/4]{e^{x/2} = z/2} \frac{1}{4} z^2 y'' + \frac{1}{4} z y' + \left(\frac{z^2}{4} - m^2\right) y = 0$$

$$\xrightarrow[\text{ضرب در } 4]{} z^2 y'' + z y' + (z^2 - 4m^2) y = 0$$

توجه کنید که معادله بالا بسل مرتبه $P = 2m$ برحسب متغیر مستقل z است

مرتبه بسل	تغییر متغیر	معادله دیفرانسیل
۱) P	$z = \lambda x$	$x^2 y'' + x y' + (\lambda^2 x^2 - P^2) y = 0$
۲) P	$z = x^2$	$x^2 y'' + x y' + 4(x^4 - P^2) y = 0$
۳) P	$z = \sqrt{x}$	$4x^2 y'' + 4x y' + (x - P^2) y = 0$
۴) $2m$	$z = 2e^{x/2}$	$y'' + (e^x - m^2) y = 0$

۹۹ — ۲ج۲۰۸ جواب عمومی معادله زیر را بیابید $x^2 y'' + x y' + (4x^2 - 1) y = 0$

۱) $z = 2x \longrightarrow$ به بسل مرتبه $P = 1$ تبدیل می‌شود

$$\longrightarrow y = c_1 J_1(\underset{2x}{z}) + c_2 Y_1(\underset{2x}{z})$$

۴۵ — ۳۲۳ $9x^2 y'' + 9x y' + 4(9x^4 - 1) y = 0$ کدام گزینه جواب است

بسل مرتبه $P = 1/3$ تبدیل می‌شود $x^2 y'' + x y' + 4(x^4 - 1/9) y = 0$ (۲) $z = x^2 \longrightarrow$

$$\longrightarrow J_{1/3}(z) = J_{1/3}(x^2)$$

۳ — ۲ج۱۵ جواب عمومی معادله زیر را بیابید $4x^2 y'' + 4x y' + (x - \nu^2) y = 0$

(۳) : $z = \sqrt{x} \longrightarrow$ بسل مرتبه $P = \nu$ تبدیل می‌شود

$$y = c_1 J_\nu(\underset{\sqrt{x}}{z}) + c_2 Y_\nu(\underset{\sqrt{x}}{z})$$

۴۷/۳۴۳ کدام یک از توابع زیر جواب $y''+(e^{x}-\frac{9}{4})y=0$ ؟

$(3/2)^2$

$(4)\rightarrow z=2e^{x/2}\rightarrow p=2m=3$ بسل مرتبه ۳ تبدیل می‌شود

$\rightarrow J_3(z)=J_3(2e^{x/2})$

معادله لژاندر

تعریف: فرض کنید $\lambda\geq 0$، معادله زیر لژاندر می‌گوئیم

$$(x^2-1)y''+2xy'-\lambda(\lambda+1)y=0$$

۱) این معادله همواره حول $x=0$ حل می‌شود که نقطه عادی است و جواب آن به صورت سری توانی $y=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ می‌باشد

۲) رابطه بازگشتی عبارت است از $a_{k+2}=\frac{(k-\lambda)(k+\lambda+1)}{(k+1)(k+2)}a_k$

۳) اگر $\lambda\in\mathbb{N}$ و $\lambda=0$ آنگاه یکی از جوابهای معادله به صورت چندجمله‌ای است و چنانچه آن را طوری در نظر بگیریم که به ازای $x=1$ مقدار آن یک شود به آن چندجمله‌ای لژاندر می‌گوئیم و با نماد $P_n(x)$ نمایش می‌دهیم.

۴) $P_n(1)=1$ و $P_n(-1)=(-1)^n$

۵) $P_n(x)$ برای n زوج تابعی زوج و برای n فرد تابعی فرد است

۶) ثابت می‌شود

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & ; m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1} & , m = n \end{cases}$$

۷) فرمول رودریگز

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$$

$$P_0(x) = 1 \quad \text{و} \quad P_1(x) = x \quad \text{و} \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1/2$$

$\frac{10}{ج\,196}$

$$\int_{-1}^{1} (x^3 + ax + b) P_2(x)\,dx = ?$$

استدلال

$$= \int_{-1}^{1} \underbrace{\overset{\text{فرد}}{x^3} \overset{\text{زوج}}{P_2(x)}}_{\text{فرد}}\,dx + a\int_{-1}^{1} \underbrace{\overset{\text{فرد}}{x} \overset{\text{زوج}}{P_2(x)}}_{\text{فرد}}\,dx + b\int_{-1}^{1} P_2(x)\,dx$$

$$= b\int_{-1}^{1} P_0(x) P_2(x)\,dx = 0$$

صفر (زیرا $m=2$ و $n=0$)..

نتیجه: $\int_{-1}^{1} P_n(x)\,dx = 0$ و $n \neq 0$

مثال: مطلوبست $\int_{-1}^{1} (P_3(x) + P_6(x))^2 dx$ از تعامد صفر می‌شود

$$= \int_{-1}^{1} \underbrace{P_3^2(x)\,dx}_{m=n=3} + \int_{-1}^{1} \underbrace{P_6^2(x)\,dx}_{m=n=6} + 2\int_{-1}^{1} \underbrace{P_3(x) P_6(x)\,dx}_{\text{صفر}}$$

$$= \frac{2}{7} + \frac{2}{13} = ?$$

فصل پنجم (تبدیل لاپلاس)

تعریف: فرض کنید $f(t)$ برای $t \geq 0$ تعریف شده باشد، تبدیل لاپلاس $f(t)$ عبارت است از: $F(s) = L(f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$

و چنانچه $L(f(t)) = F(s)$ آنگاه $\underbrace{f(t) = L^{-1}(F(s))}_{\text{لاپلاس معکوس}}$

مثال: تبدیل لاپلاس $f(t) = 1$ را بیابید

$$L(1) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_0^{+\infty} \overset{s>0}{=} -\frac{1}{s}(\underbrace{e^{-\infty}}_{\text{صفر}} - e^{0}) = \frac{1}{s}$$

$$\longrightarrow L(1) = \frac{1}{s}$$

تبدیل لاپلاس معروف

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
$f(t)$	e^{at}	t^n	t^p	$\sin at$	$\cos at$	$\sinh at$	$\cosh at$
$F(s) = L(s)$	$\frac{1}{s-a}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
	$s>a$	$s>0$	$s>0$	$s>0$	$s>0$	$s>\lvert a\rvert$	$s>\lvert a\rvert$

تابع گاما: $\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^p\, dt$ شرط همگرایی $p > -1$

۱) $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$ رابطه بازگشتی

۲) $\Gamma(n+1) = n!$ ، $n \in \mathbb{N}$

۳) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

مثال: $L\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = L(t^{-1/2}) \underset{p=-1/2}{\overset{(3)}{=}} \frac{\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$

$$L^{-1}\left(\frac{s+2}{s^4}\right) = L^{-1}\left(\frac{s}{s^4} + \frac{2}{s^4}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right) + 2L^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} t^2 + \frac{2}{6} t^3 \qquad L(t^2) = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3} \qquad L(t^3) = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}$$

$$L^{-1}\left(\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right) \qquad s^2-2s-3=(s-3)(s+1)$$ ۱۳/۲۷۶

$$F(s)=\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)}=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+1}=\frac{4}{s-3}+\frac{-1}{s+1}$$

$$A=\lim_{s\to 3}(s-3)F(s)=4 \qquad B=\lim_{s\to -1}(s+1)F(s)=-1$$

$$L^{-1}(F(s))=L^{-1}\left(\frac{4}{s-3}-\frac{1}{s+1}\right)=4e^{3t}-e^{t}$$

$$F(s)=\frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$$ لاپلاس معکوس ۶/۲ ج ۲۵۸

$$F(s)=\frac{1}{(s-1)(s^2+1)}=\frac{A}{s-1}+\frac{Bs+C}{s^2+1}$$

$$A=\lim_{s\to 1}(s-1)F(s)=\frac{1}{2} \qquad \lim_{s\to\infty} s\times F(s)=\lim_{s\to\infty} s\times\cdots \to 0=A+B$$

$$B=-\frac{1}{2} \qquad s=0 \xrightarrow{\text{در عبارت}} -1=-\frac{1}{2}+C \to C=-\frac{1}{2}$$

$$L^{-1}(F(s))=\frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{s+1}{s^2+1}\right)=\frac{1}{2}(e^{t}-\cos t-\sin t)$$

$$\frac{s+1}{s^2+1}=\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}$$

نکته : دوطرف را در s ضرب کرده و $s\to\infty$ (مراجعه شود به ریاضی عمومی)

مثال :
$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)(s^2+9)}\right)=\frac{1}{8}L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+9}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(\sin t-\frac{1}{3}\sin 3t\right)$$

مثال : مطلوبست $\int_0^{+\infty} e^{-4t}\sin t\,dt$

$$F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin t\,dt=L(\sin t)=\frac{1}{s^2+1}$$

$$\text{جواب}=F(4)=\frac{1}{4^2+1}=\frac{1}{17}$$

مطلوبست $\int_0^{+\infty} e^{-3t}\sin^2 2t\,dt$ $\quad \frac{۱۷}{۳۷۵}$

$F(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st}\sin^2 2t\,dt = L(\sin^2 2t) \qquad \frac{1-\cos 4t}{2}$

$=\frac{1}{2} L(1-\cos 4t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+16}\right)=\frac{8}{s(s^2+16)}$

$\xrightarrow{s=3}$ جواب $=F(3)=\frac{8}{3(9+16)}=\frac{8}{75}$

$f(w)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos wt}{a^2+t^2}\,dt \quad (a,w>0)$ $\quad \frac{۲۰-۵}{۳۷۲}$

تبدیل لاپلاس $f(w)$ را بدست می‌آوریم $\quad L(f(t))=\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$

$L(f(w))=\int_0^{+\infty} e^{-sw} f(w)\,dw=\int_0^{+\infty} e^{-sw}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\cos tw}{t^2+a^2}\,dt\right)dw$

$=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-sw}\cos wt}{t^2+a^2}=\int_0^{\infty}\frac{1}{t^2+a^2}\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-sw}\cos wt\,dw}_{\frac{s}{s^2+t^2}}\,dt$

$=s\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+a^2}\cdot\frac{1}{t^2+s^2}\,dt = s\int_0^{+\infty}\frac{1}{s^2-a^2}\left(\frac{1}{t^2+a^2}-\frac{1}{t^2+s^2}\right)$

$=\frac{s}{s^2-a^2}\left(\frac{1}{a}tg^{-1}\frac{t}{a}-\frac{1}{s}tg^{-1}\frac{t}{s}\right)\Big]_0^{+\infty}$

$=\frac{s}{(s-a)(s+a)}\cdot\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{s}\right)=\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{s+a}$

$L(f(w))=\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{s+a}\longrightarrow f(w)=\frac{\pi}{2a}L^{-1}\left(\frac{1}{s+a}\right)=\frac{\pi}{2a}e^{-aw}$

قاعده اول انتقال: فرض کنید $L(f(t))=F(s)$

1) $L(e^{at}f(t))=F(s-a)=L(f(t))\big|_{s\to s-a}$

$L^{-1}(F(s-a))=e^{at}f(t)=e^{at}L^{-1}(F(s))\big|_{s\to s+a}$

$L(x^3e^{4x})=L(x^3)\big|_{s\to s-4}=\left(\frac{6}{s^4}=\frac{3!}{s^4}\right)\Big|_{s\to s-4}$ $\quad \frac{۸}{۴۲۰.۴۳۰}$

جواب $=\frac{6}{(s-4)^4}$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s-5)^3}\right) = e^{5t} L^{-1}\frac{1}{s^3} = \frac{1}{2}t^2 e^{5t}$$ ۲۰ / ۳۷۵

$$\frac{1}{2}t^2$$

$$L(t^2) = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3}$$

$$L^{-1}\left(\frac{s-1}{(s+2)^{3/2}}\right) = e^{-2t} L^{-1}\frac{s-3}{s^{3/2}} = e^{-2t} L^{-1}\left(\frac{1}{s^{1/2}} - \frac{3}{s^{3/2}}\right)$$ ۲۴ / ۴۵۰

$P = -\frac{1}{2}$, $P = \frac{1}{2}$

$s \to s-2$

$$= e^{-2t}\left(\frac{t^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} - \frac{3t^{1/2}}{\Gamma(3/2)}\right) \quad \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi},\ \Gamma(3/2)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(3/2) = \Gamma(1/2+1) = \frac{1}{2}\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$L^{-1}\frac{s+4}{s^2+4s+8} = L^{-1}\frac{s+4}{(s+2)^2+4} = e^{-2t}L^{-1}\frac{s+2}{s^2+4}$$ ۸۳ / ۲ج.۳۶۷

$$= e^{-2t}L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4}\right) = e^{-2t}(\cos 2t + \sin 2t)$$

تابع $F(s) = \frac{2}{s^3+2s^2+2s}$ تبدیل لاپلاس چه تابعی است ۱۰ / ۲ج.۳۵۸

$$F(s) = \frac{2}{s(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+2} = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2+2s+2}$$

$$A = \lim_{s\to 0} sF(s) = 1$$

ضریب s^2 در دو طرف $\to$ $0 = A + B \to B = -1$

$s = -1 \xrightarrow{\text{در عبارت}} -2 = -A + (-B + C) \to C = -2$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2+2s+2}\right) = 1 - e^{-t}L^{-1}\frac{s+1}{s^2+1} \quad \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}$$

$s \to s-1$, $(s+1)^2+1$

$$= 1 - e^{-t}(\cos t + \sin t)$$

تبدیل لاپلاس از مشتق یک تابع

۱) $L(f'(t)) = sL(f(t)) - f(0^+)$

۲) $L(f''(t)) = s^2 L(f) - sf(0^+) - f'(0^+)$

۳) $L(f^{(n)}(t)) = s^n L(f) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$

تبدیل لاپلاس پاسخ معادله زیر را — $\frac{۲۳}{۲ج۴۳۱}$

$y'' + 4y = 2\sin 3t$ و $y(0) = y'(0) = 0$

$\xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{تبدیل لاپلاس}} L(y'') + 4L(y) = 2L(\sin 3t)$

$\longrightarrow (s^2 L(y) - s\times 0 - 0) + 4L(y) = \frac{6}{s^2+9}$

$\longrightarrow (s^2+4)L(y) = \frac{6}{s^2+9} \longrightarrow L(y) = \frac{6}{(s^2+4)(s^2+9)}$

مثال: جواب معادله زیر را بیابید

$y'' + 4y' + 4y = te^{-2t}$

$y(0) = 0$ و $y'(0) = 6$

$\xrightarrow{\text{لاپلاس}} (s^2 L(y) - 0 - 6) + 4(sL(y) - 0) + 4L(y) = L(t)\big|_{s \to s+2}$

$\longrightarrow (s^2+4s+4)L(y) = 6 + \frac{1}{(s+2)^2} \longrightarrow L(y) = \frac{6}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)^4}$; $s \to s-2$

$\xrightarrow{L^{-1}} y = 6e^{-2t} L^{-1}\cancel{\frac{1}{s^2}}^{\,t} + e^{-2t} L^{-1}\cancel{\frac{1}{s^4}}^{\,\frac{1}{6}t^3}$; $s \to s-2$

$= e^{-2t}(6t + \frac{1}{6}t^3)$

$\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ — $J_0(t)$ و تبدیل لاپلاس $\frac{d}{dx}(x^{-n}J_n(x)) = -x^{-n}J_{n+1}(x)$ — $\frac{۲۳}{۳۷۸}$

می‌باشد، تبدیل لاپلاس $J_1(x)$ را بیابید

$n=0 \longrightarrow \frac{d}{dx}(x^0 J_0) = -x^0 J_1 \longrightarrow J_0'(x) = -J_1(x)$

$\longrightarrow J_1(x) = -J_0'(x)$ $\quad L(J_1) = L(-J_0') = -L(J_0') = -(sL(J_0) - J_0(0))$

$$J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$\rightarrow J_0(0)=1$$

$$L(J_1)=-(s\underbrace{L(J_0)}_{\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}}-\underbrace{J_0(0)}_{1})=-\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}+1$$

$n=0$ و $n\in\mathbb{N}$: $L^{-1}\dfrac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$ مطلوبست $\dfrac{12}{\text{۳ج۴۰}}$

۱) $e^t\dfrac{d^n}{dt^n}(e^t t^n)$ ۲) $e^t\dfrac{d^n}{dt^n}(e^{-t}t^n)$

۳) $\dfrac{e^t}{n!}\dfrac{d^n}{dt^n}(e^{-t}t^n)$ ۴) $\dfrac{e^{-t}}{n!}\dfrac{d^n}{dt^n}(e^{-t}t^n)$

روش اول : $n=0$ $L^{-1}\dfrac{(s-1)^0}{s^1}=L^{-1}\left(\dfrac{1}{s}\right)=1\longrightarrow$ ۲ یا ۳

توجه کنید که $L(t^n)=\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ پس باید $n!$ حذف گردد و لذا در گزینه صحیح باید $n!$ در مخرج موجود باشد پس (۳) درست است

روش دوم : $\dfrac{(s-1)^n}{s^{n+1}}\longrightarrow\dfrac{s^n}{(s+1)^{n+1}}\longrightarrow\dfrac{1}{(s+1)^{n+1}}$

$$f(t)=L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^{n+1}}\right)=e^{-t}L^{-1}\frac{1}{s^{n+1}}=\frac{1}{n!}t^ne^{-t}$$

$$L(f^{(n)})=s^nL(f)-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

چون $t=0$ ریشه با تکرار n برای f است پس $f(0)=0, \dots, f^{(n-1)}(0)=0$

$$\rightarrow L(f^{(n)}(t))=s^nL(f)=\frac{s^n}{(s+1)^{n+1}}$$

$$L^{-1}\left(\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}\right)=e^tL^{-1}\frac{s^n}{(s+1)^{n+1}}=\frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^ne^{-t})$$

قضایای تبدیل لاپلاس:

فرض کنید $L(f(t)) = F(s)$ آنگاه:

۱) $\lim_{s \to +\infty} F(s) = 0$

۲) $\lim_{s \to +\infty} sF(s) = f(0)$ مقدار ابتدایی

۳) $\lim_{s \to +\infty} s^2F(s) - sf(0) = f'(0)$

۴) $\lim_{s \to 0^+} sF(s) = f(+\infty)$ مقدار نهایی

۳۷۹/۹ اگر $L(f(t)) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ مطلوبست $f(0), f'(0), \lim_{t \to +\infty} f(t)$

$$(2) \longrightarrow f(0) = \lim_{s \to +\infty} sF(s) = \lim_{s \to +\infty} \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = 1$$

$$(3) \longrightarrow f'(0) = \lim (s^2F(s) - sf(0)) = \lim_{s \to +\infty} \left(\frac{s^2}{\sqrt{s^2+1}} - s\right)$$

$$= \lim_{s \to +\infty} \frac{s(s - \sqrt{s^2+1})}{\cancel{\sqrt{s^2+1}}\ s} = \lim_{s \to +\infty} (s - \sqrt{s^2+1}) = \lim_{s \to +\infty} \frac{\cancel{s^2} - (\cancel{s^2}+1)}{s + \sqrt{s^2+1}} = 0$$

$$(4) \longrightarrow f(+\infty) = \lim sF(s) = \lim_{s \to 0^+} \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = 0$$

تبدیل لاپلاس از انتگرال یک تابع

فرض کنید $L(f(t)) = F(s)$ آنگاه:

1) $L\left(\int_0^t f(u)\,du\right) = \frac{1}{s} L(f) = \frac{1}{s} F(s)$

$\int_0^t \longleftrightarrow 1/s$

2) $L^{-1}\left(\frac{1}{s} F(s)\right) = \int_0^t L^{-1}(F(s))\,dt$

مثال:

$L\left(\int_0^t \sinh 2u\,du\right) = 1/s\, L(\sinh 2u)$

$= \frac{1}{s} \cdot \frac{2}{s^2-4} = \frac{2}{s(s^2-4)}$

$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right) = \int_0^t L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) dt = -\cos t \Big|_0^t = -\cos t + 1$ $\frac{۴۴}{۳۹۱}$

$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt$ تبدیل لاپلاس f را بیابید $\frac{۳۶}{۲ج ۳۹۱}$

$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}} e^{-x}$

$L(f') = \frac{1}{\sqrt{\pi}} L\left(\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} L\left(\frac{1}{\cancel{x^{1/2}}}\right)\Big|_{s \to s+1}$ $x^{-1/2}$

$\frac{(3)}{p=-1/2} \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\overset{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/2)}}{s^{1/2}}\Big|_{s \to s+1} = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{s+1}} = L(f') = sL(f) - \underbrace{f(0)}_{صفر}$

$\longrightarrow L(f) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\sqrt{s+1}} = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}$

مشتق از تبدیل لاپلاس

فرض کنید $F(s)=L(f(t))$ آنگاه:

1) $L(t f(t)) = -F'(s) = -\frac{d}{ds} L(f(t))$

(*) $t \longleftrightarrow -\frac{d}{ds}$

۲) $L(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s)$

*۳) $L^{-1}(F(s)) = -\frac{1}{t} L^{-1}(F'(s))$ کاربرد در محاسبه L^{-1} از آرک تانژانت و کتانژانت و لگاریتم

$L(t\sin bt) = -\frac{d}{ds}\underbrace{(\sin bt)}_{\frac{b}{s^2+b^2}} = -\frac{-2bs}{(s^2+b^2)^2} = \frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$ $\frac{۳۰}{۳۸۶}$

$\int_0^{+\infty} t e^{-2t}\cos t\,dt$ $\frac{۳۱}{۲۶۱\ ج ۲}$

$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t\cos t\,dt = L(t\cos t) = -\frac{d}{ds} L(\cos t) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$

$\xrightarrow{s=2}$ جواب $= F(t) = \frac{4-1}{(4+1)^2} = \frac{3}{25}$

$L^{-1}(\text{Arccot}\,\frac{s}{\omega})$ $\frac{۳۶}{۳۸۷}$

$\omega>0$ $F'(s) = \frac{-\frac{1}{\omega}}{1+(\frac{s}{\omega})^2} = -\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

جواب $= -\frac{1}{t} L^{-1}(F') = -\frac{1}{t} L^{-1}\left(-\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{1}{t}\sin \omega t$

$L^{-1}(\underbrace{Ln(1+\frac{\omega^2}{s^2})}_{F(s)})$ $F(s) = Ln\frac{s^2+\omega^2}{s^2} = Ln(s^2+\omega^2) - 2Ln s$ $\frac{۳۷}{۳۸۷}$

$\longrightarrow F'(s) = \frac{2s}{s^2+\omega^2} - 2Ln s$

جواب $= -\frac{1}{t} L^{-1}(F') = -\frac{1}{t} L^{-1}\left(\frac{2s}{s^2+\omega^2} - \frac{2}{s}\right) = -\frac{2\cos\omega t - 2}{t}$

$\frac{۳۰}{۲ج۴.۳}$ مطلوبست

$L^{-1}(\underbrace{\sqrt{s+1}-\sqrt{s}}_{F(s)})$ $\quad F'(s)=\frac{1}{۲\sqrt{s+1}}-\frac{1}{۲\sqrt{s}}$

$L^{-1}(F)=-\frac{1}{t}L^{-1}(F')=-\frac{1}{۲t}\left(L^{-1}\frac{1}{\sqrt{s+1}}-L^{-1}\frac{1}{\sqrt{s}}\right)$ $\quad p=-\frac{1}{۲}$

$=-\frac{1}{۲t}\left(e^{-t}L^{-1}\frac{1}{\sqrt{s}}-\frac{t^{-1/۲}}{\Gamma(1/۲)}\right)=-\frac{1}{۲t}\left(\frac{t^{-1/۲}e^{-t}}{\sqrt{\pi}}-\frac{t^{-1/۲}}{\sqrt{\pi}}\right)$

$\frac{۳۶}{۲ج۱۹}$ مطلوبست لاپلاس معکوس

$F(s)=s\,tg^{-1}\frac{1}{s}-1$

$f(t)=L^{-1}(\underbrace{tg^{-1}\frac{1}{s}}_{Gs})$ $\quad G'(s)=\frac{-1/s^۲}{1+(\frac{1}{s})^۲}=-\frac{1}{s^۲+1}$

$\rightarrow f(t)=-\frac{1}{t}L^{-1}(G')=-\frac{1}{t}L^{-1}\left(-\frac{1}{s^۲+1}\right)=\frac{1}{t}\sin t$

$\rightarrow f(t)=\frac{\sin t}{t}$ و $f(0^+)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}=1$

$\rightarrow s\,tg^{-1}\frac{1}{s}-1=sL(f)-f(0^+)=L(f'(t))$

$\rightarrow L^{-1}(s\,tg^{-1}\frac{1}{s}-1)=f'(t)=\frac{t\cos t-\sin t}{t^۲}$

$\frac{1}{۲ج۳.۹}$ تبدیل لاپلاس پاسخ معادله زیر را $Y(s)=Y$ می‌نامیم Y در کدام گزینه صدق می‌کند $y(0)=0$ و $y'(0)=1$

$(1-t^۲)y''-۲ty'+۲y=0$

$L(y)=Y(s)=Y$ $\quad$ جواب د $s^۲Y''-۲sY'+(s^۲+۲)Y=1$

با اعمال لاپلاس بر دو طرف داریم $*L(y'')-L(t^۲y'')-۲L(ty')+۲L(y)=0$

$L(y'')=s^۲Y-s\times 0-1=s^۲Y-1$ $\quad L(ty')=-\frac{d}{ds}L(y')=-\frac{d}{ds}(sY-0)$

$=-(Y+sY')$ $\quad L(t^۲y'')=+\frac{d^۲}{ds^۲}L(y'')=(s^۲Y-1)''=(۲sY+s^۲Y')'$

$=۲Y+۴sY'+s^۲Y''\xrightarrow{(*)}(s^۲Y-1)+(-s^۲Y''-۴sY'-۲Y)+(۲Y+۲sY')+۲Y=0$

تذکر: چنانچه در یک معادله دیفرانسیل خطی که در آن ضرایب y و y' و ... چندجمله‌ای بر حسب t هستند تبدیل لاپلاس را اعمال کنیم، در فضای لاپلاس به یک معادله دیفرانسیل می‌رسیم که مرتبه آن معادله برابر است با بیشترین درجه چندجمله‌ای

۱۳/۳۸۴ تبدیل لاپلاس پاسخ معادله زیر را بیابید

$$t^2y'' + ty' + t^2y = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0$$

تقسیم بر t

$$\longrightarrow ty'' + y' + ty = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0 \qquad L(y) = Y$$

$$\xrightarrow[\text{لاپلاس}]{\text{اعمال}} -\frac{d}{ds}\underbrace{L(y'')}_{s^2Y - s - 0} + L(y') - \frac{d}{ds}L(y) = 0$$

$$\longrightarrow -(2sY + s^2Y' - 1) + (sY - 1) - Y' = 0$$

$$\longrightarrow -(s^2+1)Y' - sY = 0 \quad \text{خطی مرتبه اول} \quad \longrightarrow Y' + \frac{s}{s^2+1}Y = 0$$

$$\mu(s) = e^{\int \frac{s}{s^2+1}ds} = e^{\frac{1}{2}\ln(s^2+1)} \longrightarrow \mu(s) = \sqrt{s^2+1}$$

$$\longrightarrow Y = \frac{c}{\mu(s)} \longrightarrow Y = \frac{c}{\sqrt{s^2+1}}$$

$$y(0) = \lim_{s\to+\infty} sY = \lim_{s\to+\infty} \frac{cs}{\sqrt{s^2+1}} = c \longrightarrow c = 1 \longrightarrow Y = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

تذکر: معادله داده شده در این مثال معادله بسل $p=0$ است و می‌دانیم $J_0(t)$ و $Y_0(t)$ پاسخ آن می‌باشند

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n} \longrightarrow J_0(0) = 1 \ , \ J_0'(0) = 0 \ \text{شرایط اولیه}$$

$$\longleftarrow L(J_0(t)) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \longrightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right) = J_0(t)$$

۱۰ / ۲ج۴م — تبدیل لاپلاس پاسخ را بیابید

$t y'' + (1-t) y' + n y = 0$

$y(0) = a \;,\; y'(0) = b \qquad L(y) = Y$

$-\dfrac{d}{ds}(s^2 Y - as - b) + (sY - a) + \dfrac{d}{ds}(sY - a) + nY = 0$

$\to (-2sY - s^2 Y' + a) + sY - a + Y + sY' + nY = 0$

$\to -(s-1)sY' + (-s + n + 1)Y = 0$ خطی مرتبه اول

$\to Y' + \dfrac{s-n-1}{s(s-1)} Y = 0 \qquad \dfrac{s-n-1}{s(s-1)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s-1} \qquad A = n+1 , B = -n$

$\mu(s) = e^{\int \left(\frac{n+1}{s} - \frac{n}{s-1}\right) ds} = e^{Ln \frac{s^{n+1}}{(s-1)^n}} = e^{(n+1)Ln s - n Ln(s-1)}$

$\to \mu(s) = \dfrac{s^{n+1}}{(s-1)^n} \to Y = \dfrac{c}{\mu(s)} \to Y = c \cdot \dfrac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$

$y(0) = \lim_{s \to +\infty} sY = \lim_{s \to +\infty} \dfrac{c(s-1)^n}{s^n} = c$ حال c را حساب می‌کنیم

$\to c = a$

$$Y = a \cdot \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$$

انتگرال از تبدیل لاپلاس

$L(f(t)) = F(s)$

۱) $L\left(\dfrac{f(t)}{t}\right) = \int_s^{+\infty} L(f)\, ds$

$\dfrac{1}{t} \longleftrightarrow \int_s^{+\infty}$

۲) $\int_0^{+\infty} \dfrac{f(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} L(f)\, ds$

$$L\left(\frac{\sin at}{t}\right)=\int_s^{+\infty}\underbrace{L(\sin at)}_{\frac{a}{s^2+a^2}}\,ds=tg^{-1}\frac{s}{a}\Big|_s^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-tg^{-1}\frac{s}{a}=\cot^{-1}s/a=tg^{-1}a/s$$ ۴۶/۳۹۲

$$1)\ tg^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$$

$$2)\ tg^{-1}x=\cot^{-1}\frac{1}{x}\ ,\ x>0$$

$f(t)$	$J_0(t)$ (۸)	$\frac{\sin at}{t}$ (۹)
$F(s)=L(s)$	1 $s>0$	$tg^{-1}a/s$ $s>0$

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx\qquad a,b>0$$ ۵۰/۳۹۴

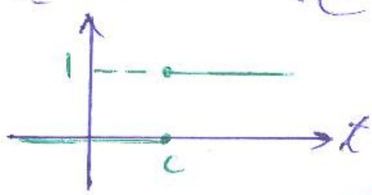
$$=\int_0^{+\infty}L(e^{-ax}-e^{-bx})\,ds=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}\right)ds$$

$$=\underbrace{\cancel{(\ln(s+a)-\ln(s+b))}}_{\ln\frac{s+a}{s+b}}\Big|_0^{+\infty}=\underbrace{\ln 1}_{0}-\ln\frac{a}{b}=\ln\frac{b}{a}$$

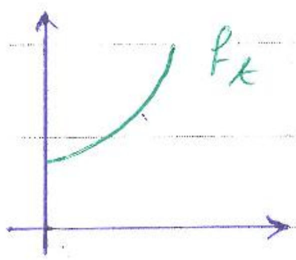
قاعده دوم انتقال

تابع پله واحد (هوی سایده)

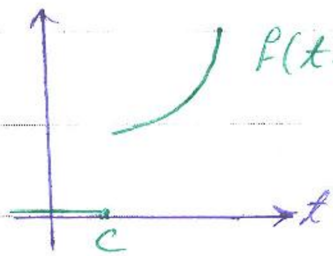
$$H(t-c)=U_c(t)=\begin{cases}0 & t<c\\ 1 & t>c\end{cases}\qquad (c>0)$$



f_t



$f(t-c)$



تذکر: $U_0(t)=H(t)=1$

$$U_c(t)\,f(t-c)=\begin{cases}0 & t<c\\ f(t-c) & t>c\end{cases}$$

۱) $L(u_c(t)\,f(t-c)) = e^{-cs}\,L(f(t))$

*۲) $L(u_c(t)\,f(t)) = e^{-cs}\,\underbrace{L(f(t+c))}_{t \to t+c}$

۳) $L(u_c(t)) = \dfrac{e^{-cs}}{s}$

*۴) $L^{-1}(e^{-cs}F(s)) = u_c(t)\,L^{-1}(F(s))\Big|_{t \to t-c}$

مثال: مطلوبست:

$$L(u_{\frac{\pi}{2}}(t)\,\overset{f(t)}{\sin t}) = e^{-\frac{\pi}{2}s}\,L(\overset{\cos t}{\sin(t+\pi/2)}) \qquad c=\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{s}{s^2+1}\,e^{-\pi/2\, s}$$

مثال: تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0<t<2 \\ t-1 & 2<t<5 \\ t & t>5 \end{cases}$$

t صعود می‌کند

اول — دوم — اول

$$f(t) = 1 + ((t-1)-1)u_2(t) + (t-(t-1))u_5(t)$$

سوم — دوم

$$f(t) = 1 + (t-2)u_2(t) + u_5(t)$$

$$\to L(f) = \frac{1}{s} + e^{-2s}L((t+2)-2) + e^{-5s}\cdot\frac{1}{s} \to$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-5s}}{s}$$

$\frac{۵}{۲ج۴۳۲}$ تبدیل لاپلاس بیابید

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < \pi/6 \\ \sin x & x \geq \pi/6 \end{cases}$$

$$f(x) = 0 + (\sin x - 0)\,u_{\pi/4}(x) = u_{\pi/4}(x)\sin x$$

$$\rightarrow L(f) = e^{-\pi/4 s} L(\sin(x + \pi/4)) = e^{-\pi/4 s}\, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + 1/2 \cos x$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\rightarrow L(f) = e^{-\pi/4 s}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+1}\right)$$

$\frac{1}{\text{۲ج.۶۹}}$ تبدیل لاپلاس پاسخ معادله زیر را بیابید

$$y'' + 4y = \begin{cases} 1 & 0 \le t < \pi \\ 0 & t \ge \pi \end{cases} \quad f(t)$$

$y(0) = 0$ و $y'(0) = 1$

$$f(t) = 1 + (0-1)u_\pi(t) = 1 - u_\pi(t)$$

از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$(s^2L(y) - s\times 0 - 1) + 4L(y) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s}}{s}$$

$$\rightarrow (s^2+4)L(y) = 1 + \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s}}{s}$$

$$\rightarrow L(y) = \frac{1}{s^2+4} + \frac{1}{s(s^2+4)} - \frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+4)}$$

$\frac{\text{۳ل}}{\text{۲ج.۴۴۳}}$

$$L^{-1}\left(\frac{1-e^{-2s}}{s^2}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s^2}\right) = t - u_2(t)L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)\Big|_{t\to t-2}$$

$$= t - u_2(t)(t-2) \quad \begin{cases} t & 0<t<2 \\ 2 & t>2 \end{cases}$$

۶۳ / ۴.۳

$L^{-1}\left(\frac{e^{-\pi s}}{s(s^2+1)}\right) = u_\pi(t)\, L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right)\Big|_{t \to t-\pi}$

$= u_\pi(t)\,(1-\cos(t-\pi))$

$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)}\right) = \int_0^t \underbrace{L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)}_{\sin t} dt = -\cos t\Big|_0^t = 1-\cos t$

تابع ضربه (دلتا دیراک)

$t_0 > 0$

$\delta(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t \neq t_0 \\ \text{نامعین} & t = t_0 \end{cases}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\,dt = 1$

۱) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, g(t)\, dt = g(t_0)$

*۲) $L(\delta(t-t_0) f(t)) = e^{-st_0} f(t_0)$

۳) $L(\delta(t-t_0)) = e^{-st_0}$

۶۶ / ۴.۵

$L(\underbrace{\delta(t-1)}_{t_0=1} \underbrace{\cos t}_{f(t)}) = e^{-st_0} f(t_0) = e^{-s}\cos 1$

۶۸ / ۴.۵

جواب معادله زیر را با شرایط ابتدا $y(0)=0$ و $y'(0)=1$: $y''+y = \delta(t-\pi)\cos t$

برای یافتن جواب معادله دیفرانسیل که طرف دوم آن تابع چندضابطه ای، پله، ضربه باشد از تبدیل لاپلاس استفاده می شود، بر معادله تبدیل لاپلاس را اعمال می کنیم

$(s^2 L(y) - 0 - 1) + L(y) = e^{-\pi s} \underbrace{\cos \pi}_{-1}$

$$\xrightarrow{L^{-1}} y = \sin t - u_\pi(t)\, \underbrace{L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)}_{\sin t}\Big|_{t\to t-\pi}$$

$$\to y = \sin t - u_\pi(t)\sin(t-\pi) = \sin t + u_\pi(t)\sin t$$

تبدیل لاپلاس تغییر مقیاس

فرض کنید $L(f(t)) = F(s)$ و $k \neq 0$ آنگاه:

$$1)\ L(f(kt)) = \frac{1}{k} F\left(\frac{s}{k}\right) = \frac{1}{k} L(f(t))\Big|_{s\to s/k}$$

$$2)\ L^{-1}(F(ks)) = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right) = \frac{1}{k} L^{-1}(F(s))\Big|_{t\to t/k}$$

مثال: اگر $a \neq 0$ مطلوبست

$$L(J_0(at)) = \frac{1}{a} L(J_0(t))\Big|_{s\to \frac{1}{a}s} = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\Big|_{s\to \frac{s}{a}}$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{(s/a)^2+1}} \overset{a>0}{=} \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}} \qquad a<0 \to \text{جواب} = -\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$$

۱۸/۳۹۵ اگر $L(f(t)) = F(s)$ لاپلاس معکوس $F(as+b)$، $b, a \neq 0$

$$G(s) = F(s+b) \quad : \quad L^{-1}(G(s)) = L^{-1}(F(s+b)) = e^{-bt} L^{-1}(F(s))$$

$$L^{-1}(G(s)) = e^{-bt} f(t) \qquad L^{-1}(F(as+b)) = \frac{1}{a} L^{-1}(G(s))\Big|_{t\to t/a}$$

$$= \frac{1}{a} e^{-\frac{bt}{a}} f(t/a)$$

تبدیل لاپلاس تابع متناوب

تعریف: تابع $f(t)$ را متناوب با دوره تناوب $T>0$ می نامیم هرگاه:

$$f(t+T)=f(t)$$

قضیه: اگر $f(t)$ متناوب با دوره تناوب T باشد آنگاه:

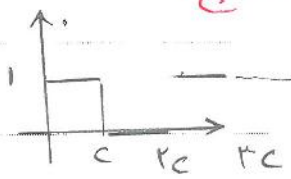
$$L(f(t)) = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt}{1-e^{-sT}}$$

برای محاسبه انتگرال بالا، تبدیل لاپلاس تابعی را بیابید که در $[0, T]$ برابر $f(t)$ و در خارج آن بازه صفر باشد (با استفاده از تابع پله محاسبه لاپلاس انجام می شود.)

اگر $c>0$ تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید؟ ۴۰ / ۲ج۲۰

$$f(t)=\begin{cases} 1 & 0\leq t<c \\ 0 & c\leq t<2c \end{cases} \quad \text{و} \quad f(t+2c)=f(t)$$

تابع متناوب با دوره تناوب $T=2c$.



$$\begin{cases} 1 & 0\leq t<c \\ 0 & c\leq t<2c \\ 0 & t>2c \end{cases}$$

$$\text{تابع} = 1+(0-1)u_c(t)+(0-0)u_{2c}(t) = 1-u_c(t)$$

$$\rightarrow \text{صورت کسر} = L(1-u_c(t)) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-cs}}{s} = \frac{1}{s}(1-e^{-cs})$$

$$L(f(t)) = \frac{\frac{1}{s}(1-e^{-cs})}{1-e^{-2cs}} = \frac{1}{s(1+e^{-cs})}$$

برای $a>0$ تبدیل لاپلاس $f(t)=at-[at]$ را بیابید. ۴۱ / ۴۵۷

می دانیم f متناوب با دوره تناوب $T=\frac{1}{a}$ می باشد.

$$\begin{cases} f(t) & 0\leq t<1/a \\ 0 & t>1/a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} at & 0<t<1/a \\ 0 & t>1/a \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{تابع} = at+(0-at)u_{1/a}(t) = at - at\,u_{1/a}(t)$$

تبدیل لاپلاس $= \frac{a}{s^2} - e^{-\frac{1}{a}s} L(a(t+\frac{1}{a})) = \frac{a}{s^2} - e^{-\frac{s}{a}}(\frac{a}{s^2}+\frac{1}{s})$

$\longrightarrow L(f) = \frac{\frac{1}{s^2}(a - ae^{-\frac{s}{a}} - se^{-\frac{s}{a}})}{1-e^{-\frac{s}{a}}}$

انتگرال کانولوشن (پیچش، تلفیق)

تعریف: برای توابع $f(t)$ و $g(t)$ کانولوشن عبارت است از:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-u)\,g(u)\,du$$

ویژگیها:

1) $f*g = g*f$ (جابجایی)

2) $f*(g*h) = (f*g)*h$ (شرکت پذیری)

3) $L(f*g) = L(f)\,L(g)$ $\quad F(s) = L(f)\,,\ G(s) = L(g)$

4) $L^{-1}(F(s)G(s)) = L^{-1}(F(s)) * L^{-1}(G(s))$

مثال: مطلوبست حاصل $\underset{\alpha}{\sin t} * \underset{\beta}{\sin t}$

$$\underset{f(t)}{\sin t} * \underset{g(t)}{\sin t} = \int_0^t \sin(t-u)\sin u\,du = \frac{1}{2}\int_0^t (\cos(t-2u) - \cos t)\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\sin(t-2u) - u\cos t\right)\Big|_0^t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin t - t\cos t + \frac{1}{2}\sin t\right)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) \qquad = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$$

$\frac{۷۹}{۴۰۹}$ مطلوبست حاصل کانولوشن رو‌برو: $f(t) = \underbrace{1*1*\cdots*1}_{n} = ?$

یک ایده مناسب برای محاسبه کانولوشن آن است که ابتدا با توجه به (۳) لاپلاس بگیریم و سپس با L^{-1} پاسخ را بدست آوریم

$L(f) = L(1)\,L(1)\cdots L(1)$

$$= \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s}\cdots\frac{1}{s} = \frac{1}{s^n} \longrightarrow f(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^n}\right) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید $\frac{۵۳}{۲ج ۴۴۶}$

$$f(x)=e^{-x}\int_0^x e^{t}\cos^2 t\,dt=\int_0^x \underbrace{e^{t-x}}_{f(x-t)}\underbrace{\cos^2 t}_{g(t)}\,dt=e^{-x}*\cos^2 x$$

$$\to L(f(x))=L(e^{-x})\,L(\cos^2 x)=\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4}\right)$$

$$=\frac{s^2+2}{s(s^2+4)(s+1)}$$

مطلوبست $\frac{۷۰}{۴۰۹}$

$$h(t)=\int_0^t J_0(u)J_0(t-u)\,du=J_0(t)*J_0(t)$$

$$\to L(h(t))=L(J_0(t))\,L(J_0(t))=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}=\frac{1}{s^2+1}$$

$$\to h(t)=L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)=\sin t$$

$\frac{۶۱}{۲ج ۴۴۶}$

$$\int_0^x \overbrace{(x-t)^3}^{f(x-t)}\,\overbrace{t^4}^{g(t)}\,dt=h(x)$$

$$h(x)=x^3*x^4\longrightarrow L(h(x))=L(x^3)\,L(x^4)=\frac{3!}{s^4}\cdot\frac{4!}{s^5}=\frac{3!\times 4!}{s^9}$$

$$\to h(x)=L^{-1}\left(\frac{6\times 24}{s^9}\right)=\frac{6\times 24}{8!}\,t^8$$

$\frac{۷۴}{۴۱۰}$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+1)^2}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)*L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$=\sin t*\sin t\ \overset{\text{مثال}}{=}\ \frac{1}{2}(\sin t-t\cos t)$$

جواب معادله $\left\{\begin{array}{l} y''+4y=f(t) \\ y(0)=3,\ y'(0)=-1\end{array}\right.$ را بیابید $\frac{۳}{۲ج ۲۵۷}$

از معادله تبدیل لاپلاس می‌گیریم

$$(s^2L(y)-3s+1)+4L(y)=\overset{F(s)}{\cancel{L(f)}}\longrightarrow(s^2+4)L(y)=3s-1+F(s)$$

$$\to L(y)=\frac{3s}{s^2+4}-\frac{1}{s^2+4}+\frac{F(s)}{s^2+4}\xrightarrow{L^{-1}}y=3\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t$$

$$+L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)*L^{-1}(F(s))$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) * L^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2}\sin 2t * f(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2(t-x) f(x)\,dx$$

$$\rightarrow y = 3\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2(t-x) f(x)\,dx$$

$\frac{77}{413}$ – تابع $f(t)$ که در معادله زیر صدق می‌کند را بیابید

معادله انتگرال $f(t) = t^2 + \underbrace{\int_0^t \sin(t-u) f(u)\,du}_{\sin t * f(t)}$

$$\rightarrow f(t) = t^2 + \sin t * f(t)$$

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس}} L(f) = \frac{2}{s^3} + \frac{L(f)}{s^2+1} \rightarrow \left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) L(f) = \frac{2}{s^3}$$

$$\rightarrow \frac{s^2}{s^2+1} L(f) = \frac{2}{s^3} \rightarrow L(f) = \frac{2(s^2+1)}{s^5} = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5}$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} f(t) = t^2 + \frac{2}{4!} t^4 = t^2 + \frac{1}{12} t^4$$

$\frac{79}{414}$ جواب را بیابید

$$y'(t) + \underbrace{\int_0^t y(u)\cos(t-u)\,du}_{\cos t * y(t)} = \cos t \qquad y(0) = 0$$

$$\rightarrow y' + \cos t * y = \cos t \xrightarrow{L} (sL(y) - 0) + \frac{s}{s^2+1} L(y) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$\rightarrow \underbrace{\left(s + \frac{s}{s^2+1}\right)}_{\frac{s(s^2+2)}{s^2+1}} L(y) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$\rightarrow L(y) = \frac{1}{s^2+2} \rightarrow y = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\underbrace{2}_{(\sqrt{2})^2}}\right)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}\, t)$$

فصل ششم

دستگاه معادله دیفرانسیل

تابع مجهول : x و y

مستقل t

$$\begin{cases} x' + y'' = t \\ x'' + x - y' = \sin t \end{cases}$$ مرتبه ۲ ، دستگاه خطی ضرایب ثابت

روش های حل دستگاه

۱) روش حذفی اگر با اعمال جبری یا مشتق یا انتگرال بر روی معادلات دستگاه بتوانیم مجهولی را حذف کنیم بر حسب مجهول دیگر به یک معادله دیفرانسیل می رسیم و آن را حل می کنیم

$\frac{۲۰}{۱۹۷ \text{ ج } ۲}$ پاسخ y در دستگاه زیر را بیابید

$$\begin{cases} z' + y' = 0 \\ y'' + z + y = 0 \end{cases}$$ و $y(0) = 0$ و $y'(0) = 0$ و $z(0) = 1$

√۱) $-\frac{x^2}{2}$　　۲) $\frac{x^2}{2}$　　۳) $1 - \frac{x^2}{2}$　　۴) $1 + \frac{x^2}{2}$

$$\begin{cases} z' + y' = 0 \\ y''' + z' + y' = 0 \end{cases} \Rightarrow y''' = 0 \xrightarrow{\int} y'' = a \xrightarrow{\int} y' = ax + bx + c$$

$$\xrightarrow{\int} y = \frac{a}{2}x^2 + bx + c \xrightarrow{y(0)=0} c = 0 \qquad \xrightarrow{y'(0)=0} b = 0$$

$$y''(0) + z(0) + y(0) = 0 \longrightarrow y''(0) = -1 \longrightarrow a = -1$$

$$\longrightarrow y = -\frac{1}{2}x^2$$

۲) روش عملگر معکوس : فقط برای حل دستگاه های ضرایب ثابت از این روش استفاده می شود و در آن دستگاه را با نماد عملگر $D = \frac{d}{dt}$ و $D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$ می نویسیم که آن را با روش کرامر حل می کنیم

۵ / ٤٧ک

جواب عمومی را بیابید

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=5x+4y \\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=x+2y \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} Dx=5x+4y \\ Dy=x+2y \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (D-5)x-4y=0 \\ -x+(D-2)y=0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{کرامر}} y=\frac{\begin{vmatrix} D-5 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-5 & -4 \\ -1 & D-2 \end{vmatrix}}=\frac{0}{D^2-7D+6} \longrightarrow (D^2-7D+6)y=0$$

معادله دیفرانسیل مرتبه ۲ و همگن

$$\xrightarrow{\text{مشخصه}} r^2-7r+6=0 \longrightarrow r=1,6 \longrightarrow y(t)=c_1e^{t}+c_2e^{6t}$$

حال x را محاسبه مجهول دوم از معادله‌ای که آن مجهول را مستقیماً محاسبه می‌کند، استفاده می‌کنیم

$$\text{معادله دوم} \longrightarrow x=y'-2y=(c_1e^{t}+6c_2e^{6t})-(2c_1e^{t}+2c_2e^{6t})$$

$$\longrightarrow x=-c_1e^{t}+4c_2e^{6t}$$

نکته: تعداد کل اعداد ثابت در جواب عمومی دستگاه ضرایب ثابت برابر درجه دترمینان ضرایب در روش عملگر می‌باشد.

۲۹ / ۲ج ۴.۳

یک انتگرال خصوصی برای x در دستگاه زیر بیابید.

جواب

$$\begin{cases} 2x''+y''+5x+3y=-8\sin 3t \\ x''+y''+7x+5y=8\sin 3t \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{عملگر}} \begin{cases} (2D^2+5)x+(D^2+3)y=-8\sin 3t \\ (D^2+7)x+(D^2+5)y=8\sin t \end{cases}$$

$$x \xrightarrow{\text{کرامر}} x=\frac{\begin{vmatrix} -8\sin 3t & D^2+3 \\ 8\sin 3t & D^2+5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2D^2+5 & D^2+3 \\ D^2+7 & D^2+5 \end{vmatrix}}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & D^2+3 \\ 1 & D^2+5 \end{vmatrix}(8\sin 3t)}{D^4+5D^2+4}=\frac{-2(D^2+4)(8\sin 3t)}{\underbrace{D^4+5D^2+4}_{(D^2+1)(D^2+4)}}=-\frac{16\sin 3t}{D^2+1}$$

$$\to x_p(t) = \frac{1}{D^2+1}(-16\underbrace{\sin 3t}_{3i}) = \frac{1}{(3i)^2+1}(-16\sin 3t)$$

$$\to x_p(t) = 2\sin 3t$$

۳) روش تبدیل لاپلاس: چنانچه برای دستگاه خطی که شرایط اولیه آن در $t=0$ داده شده است، تبدیل لاپلاس را اعمال کنیم با حل دستگاه حاصل و محاسبه L^{-1} تا مجهول بدست می‌آید

مثال: y را در دستگاه زیر بیابید

$$\begin{cases} z' + y' = 0 \\ y'' + z + y = 0 \end{cases} \qquad y(0)=0 \ \text{و}\ y'(0)=0 \ \text{و}\ z(0)=1$$

$$L(y) = Y \ , \ L(z) = Z$$

$$\xrightarrow[\text{لاپلاس}]{\text{اعمال تبدیل}} \begin{cases} (sZ-1)+(sY-0)=0 \\ (s^2Y - s\times 0 - 0) + Z + Y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\times -s} \begin{cases} sY + sZ = 1 \\ (s^2+1)Y + Z = 0 \end{cases}$$

$$sY + (-s^3 - s)Y = 1$$

$$\to Y = -\frac{1}{s^3} \xrightarrow{L^{-1}} y = -L^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right) = -\frac{1}{2}x^2$$

$\frac{26}{2\text{ج}4.2}$ $\phi_1(x)$ را از دستگاه زیر بدست آورید

$$\begin{cases} \phi_1(x) = e^{2x} + \int_0^x \phi_2(t)\,dt \\ \phi_2(x) = 1 - \int_0^x \underbrace{e^{2(x-t)}}_{f(x-t)} \underbrace{\phi_1(t)}_{g(t)}\,dt \end{cases}$$

$$L(\phi_1) = L_1$$

$$L(\phi_2) = L_2$$

$$\xrightarrow{\text{لاپلاس}} \begin{cases} L_1 = \dfrac{1}{s-2} + \dfrac{1}{s} L_2 \\ L_2 = \dfrac{1}{s} - \dfrac{L_1}{s-2} \end{cases} \xrightarrow{s\times} \begin{cases} L_1 - \frac{1}{s} L_2 = \dfrac{1}{s-2} \\ \dfrac{1}{s-2} L_1 + L_2 = \frac{1}{s} \end{cases}$$

$$\left(s + \frac{1}{s-2}\right) L_1 = \frac{s}{s-2} + \frac{1}{s} \longrightarrow \frac{s^2-2s+1}{s-2} L_1 = \frac{s^2+s-2}{s(s-2)}$$

$$\longrightarrow L_1 = \frac{(s-1)(s+2)}{s(s-1)^2} = \frac{s+2}{s(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} = \frac{-2}{s} + \frac{3}{s-1}$$

$$\xrightarrow{L^{-1}} \phi_1(x) = -2 + 3e^{x}$$

نکته ۱: در دستگاه

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + g_1(t) \\ y' = a_2 x + b_2 y + g_2(x) \quad y(0) = y_0 \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{دستگاه} \longleftrightarrow \vec{X}' = A\vec{X} + \vec{g}(t) \qquad \vec{X}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow L(\vec{X}) = (sI - A)^{-1}(\vec{X}(0) + \vec{G}(s)) \qquad L(\vec{g}(t)) = \vec{G}(s)$$

جواب دستگاه زیر را بیابید　　۱۰ / ۲ج۳۹۰

$$X' = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}^{A} X, \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad sI = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s-1 & 5 \\ -1 & s+3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+2s+2} \begin{pmatrix} s+3 & -5 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix}$$

$$L(\vec{X}) = (sI - A)^{-1} X(0) = \frac{1}{(s+1)^2+1} \begin{pmatrix} s+3 & -5 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+1)^2+1} \begin{pmatrix} s-2 \\ s \end{pmatrix}$$

$$\vec{X} = L^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{s-2}{(s+1)^2+1} \\ \dfrac{s}{(s+1)^2+1} \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t - 3\sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$