بسمه تعالی

# جزوه

فیزیک پایه۱

# دانشگاه

علم و صنعت

# استاد

دکتر عقدائی

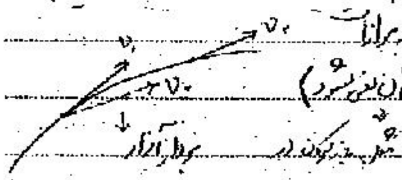
Subject:

Year. 200   Month.   Day.

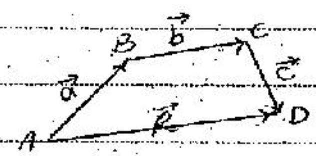
بردارها

انواع کمیت‌ها:
- اسکالر، عددی، نرده‌ای مثل: ثانیه، دما، طول، کیلوگرم، متر، لیتر، ولت ...
- برداری، جهت‌دار مثل: جابجایی، سرعت، نیرو، میدان الکتریکی، شتاب و ...

انواع بردارها:
1. بردار آزاد: مثل شتاب (چون با توجه به جهت آن می‌توانیم آن را در هر نقطه‌ای منتقل کنیم)
2. بردار لغزان: می‌توانیم نقطه اثر را در امتداد خودش تغییر دهیم (در راستای آن لغزش)
3. بردار بسته: مبدأ آن نقطه ثابت است.




جمع دو یا چند بردار





$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$\vec{R} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

$\vec{R} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

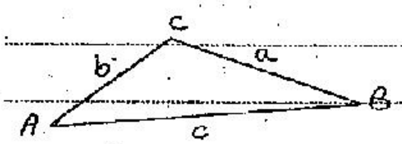
$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

$R^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta$

* برای اینکه بدانیم کمیت فرضی $A$ برداری است یا نه باید:

$A_1 + A_2 = A_2 + A_1$

• جریان کمیت برداری نیست.




• قضیه کسینوس‌ها:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C$

• قضیه سینوس‌ها

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

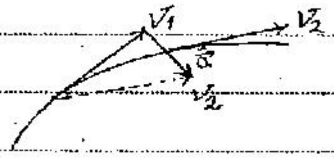
PILAVARAN

PAGE:

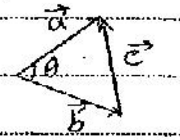
Subject:

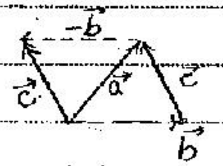
Year. 200  Month.  Day.

## تفاضل دو بردار



$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{t_2 - t_1}$$





$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$$

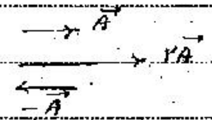
$$\vec{a} = \vec{c} + \vec{b}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

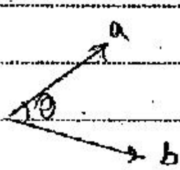
## ضرب یک عدد در بردار

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{A} \times n = n\vec{A}$$



## ضرب عددی دو بردار



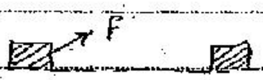
$$\vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta$$

$\cos\theta = \cos(-\theta)$ زوج

$\theta > 90 \Rightarrow a \cdot b < 0$

$\theta < 90 \Rightarrow a \cdot b > 0$

$\theta = 90 \Rightarrow a \cdot b = 0$



$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}$$

کار $W = \vec{F} \cdot \vec{x}$

توان $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

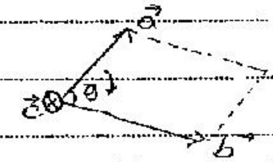
## ضرب برداری دو بردار

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

$$C = |\vec{c}| = ab\sin\theta$$

* اندازه‌ی بردار $\vec{c}$ برابر است با سطح متوازی‌الاضلاعی که بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود * راستای $\vec{c}$ عمود بر صفحه است

* جهت بردار $\vec{c}$ از قانون دست راست یا پیچ خطاس مشخص می‌شود



$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Subject:

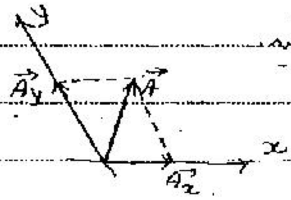
Year. 200 Month. Day.

## مؤلفه‌ی یک بردار بر راستایی

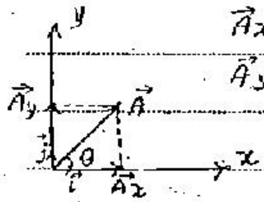
$\vec{A} = \hat{u} \cdot A$

$\vec{A}$ بردار یکه $\qquad \hat{u} = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

$\vec{A}$ را در محورهای x و y تجزیه کنید



برای رسم مؤلفه‌های یک بردار از انتهای بردار به موازات محورها رسم کنید



$\vec{A}_x = \vec{A} \cos\theta$

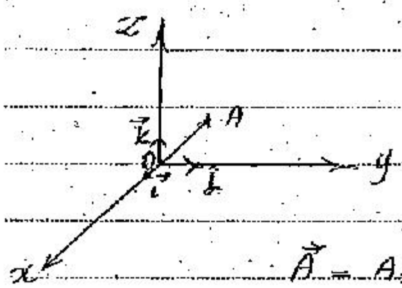
$\vec{A}_y = \vec{A} \sin\theta$

$$\begin{cases} \vec{A}_x = A\cos\theta\,\vec{i} \\ \vec{A}_y = A\sin\theta\,\vec{j} \end{cases}$$

$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$

$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A\cos\theta\,\vec{i} + A\sin\theta\,\vec{j}$

$|\vec{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$



از صفحه‌ی xoz یک خط موازی رسم می‌کنیم در راستای A را در y قطع می‌کند مؤلفه‌ی $\vec{A}_y$ به دست می‌آید و به همین ترتیب برای $\vec{A}_x, \vec{A}_z$

$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$

اندازه‌ی A $\qquad A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$

جمع و تفریق دو بردار

$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$

$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$

$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(a_x+b_x)^2 + (a_y+b_y)^2 + (a_z+b_z)^2}$

[illegible] $\quad i \cdot i = j \cdot j = 1$

$i \cdot k = j \cdot k = 0$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \cdot (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x (\cancel{i \cdot i}) + a_y b_y (\cancel{j \cdot j}) + a_z b_z (\cancel{k \cdot k})$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Subject:

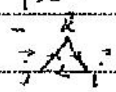
Year. 200 Month. Day.

از طرفی $\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{ab}$

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x^2+a_y^2+a_z^2)(b_x^2+b_y^2+b_z^2)}}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$

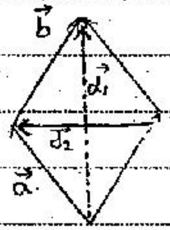
$\vec{k}\times\vec{k} = 0$




$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$

$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_z b_y - a_y b_z)\vec{i} - (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_y b_x - a_x b_y)\vec{k}$$




مثال: با استفاده از ضرب برداری نشان دهید قطرهای لوزی بر هم عمودند

$\vec{d_1} = \vec{a} + \vec{b}$ دو بردار وقتی بر هم عمودند که ضرب

$\vec{d_2} = \vec{a} - \vec{b}$ داخلی آن‌ها صفر شود.

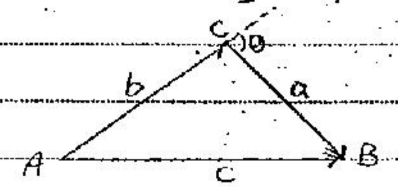
$\vec{d_1}\cdot\vec{d_2} = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$= \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} - \vec{b}\cdot\vec{b}$

$= a^2 - \cancel{\vec{a}\cdot\vec{b}} + \cancel{\vec{a}\cdot\vec{b}} - b^2$ $\quad d_1 , d_2$ بر هم عمودند.

اضلاع لوزی با هم برابرند $\Rightarrow \vec{d_1}\cdot d_2 = a^2 - a^2 = 0$

تمرین: با استفاده از خواص بردارها دستور کسینوس‌ها را در یک مثلث دلخواه ثابت کنید




قضیه کسینوس‌ها:

$\vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$

$\vec{c}\cdot\vec{c} = (\vec{b}+\vec{a})\cdot(\vec{b}+\vec{a})$

$c^2 = b^2 + a^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos(\underbrace{\pi - C}_{\theta}) = -ab\cos C$

$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

تمرین: $\quad \vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$

$\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$

PILAVARAN

PAGE:

Subject:

Year. 200 Month. Day.

تفسیر هندسی:

مساحت مثلث $\qquad |\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin C = 2S_{ABC}$

$$|\vec{a}\times\vec{c}| = ac\sin B = 2S_{ABC}$$

$$|\vec{b}\times\vec{c}| = bc\sin A = 2S_{ABC}$$

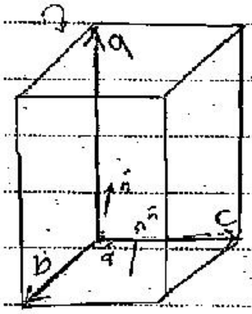
$$\rightarrow \frac{bc\sin A}{abc} = \frac{ab\sin C}{abc} = \frac{ac\sin B}{abc}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b}$$

معکوس می کنیم

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

مثال: ثابت کنید حجم متوازی السطوح از ... به دست می آید $\qquad V = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ حاصل ضرب مختلط



$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{a}\cdot(bc\sin\alpha\,\hat{n})$$

$$= \vec{a}\cdot\hat{n}\,(S)$$

$$= hS$$

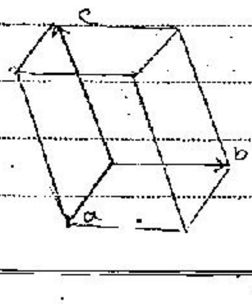
$\vec{a}\cdot\hat{n}$ اندازه تصویر a در راستای n ارتفاع را نشان می دهد

بنابراین حجم متوازی السطوح برابر است با ضرب مختلط سه بردار c, b, a

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

مثال: حجم متوازی السطوحی که روی سه بردار a و b و c ساخته می شود برابر است با ضرب مختلط بردارهای a, b, c و زاویه بین بردارها α و β و γ می باشد. (در حالتی که هیچ کدام از بردارها بر هم عمود نیستند)



$$V = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Subject:

Year.200 Month. Day.

$$V^2 = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_xa_x + a_ya_y + a_za_z & a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z & a_xc_x + \dots \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow V^2 = \begin{vmatrix} a\cdot a & a\cdot b & a\cdot c \\ b\cdot a & b\cdot b & b\cdot c \\ c\cdot a & c\cdot b & c\cdot c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab\cos\gamma & ac\cos\beta \\ ab\cos\gamma & b^2 & bc\cos\alpha \\ ac\cos\beta & bc\cos\alpha & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow V^2 = a^2b^2c^2\left(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right)$$

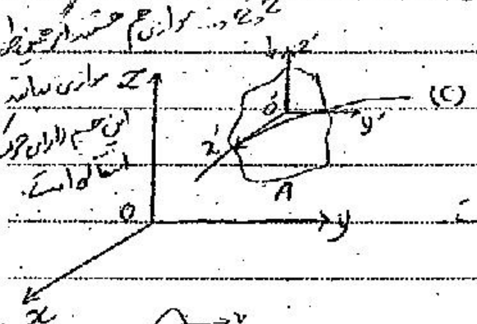
$$\Rightarrow V = abc\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

## سینماتیک

انواع حرکت:

حرکت انتقالی: اجزای جسم موازات هم حرکت می کنند.

$z, z'$ ... موازی هم هستند اگر $z$ موازی باشد این جسم دارای حرکت انتقالی است.



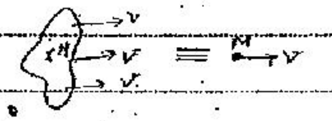
ذره: هر جسمی که دارای حرکت انتقالی است.

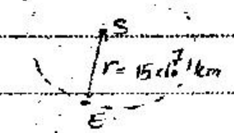
(صرف نظر از ابعاد آن)

اگر ابعاد جسمی در مقایسه با ابعاد مسیرش ناچیز باشد آن هم ذره است

مثل (خورشید و زمین)

حکم یک ذره را دارد.





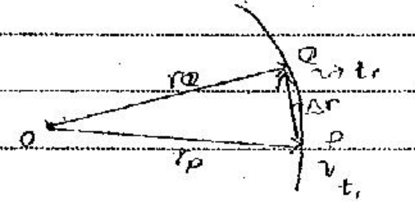
$r = 15\times10^{7}\ km \qquad R_E = 6400\ km$

$$\frac{2R_E}{r} = \frac{2\times6400}{15\times10^{7}} < 10^{-6}$$

ذرات نیز در حد عبارت اتم ها ... را ذره می گوییم

## بردار مکان

برداری که از مبدا مختصات (دلخواه) به مکان ذره وصل می کنیم



$\Delta r = r_Q - r_P$

PILAVARAN

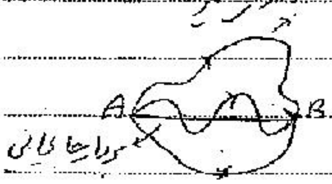
PAGE:

Subject:

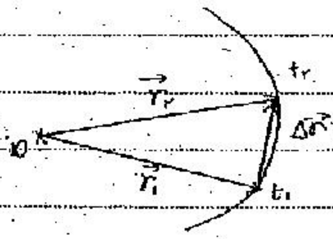
Year. 200 Month. Day.

بردار جابجایی :

پاره خطی است که نقطه‌ی آغاز و پایان را بهم وصل می‌کند



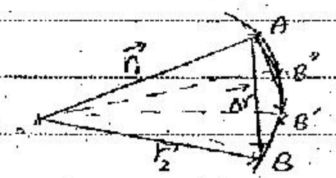

سرعت متوسط :



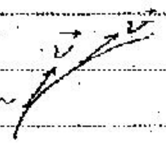

لحظه $t_1$ $\quad \vec{r}_1$

لحظه $t_2$ $\quad \vec{r}_2$

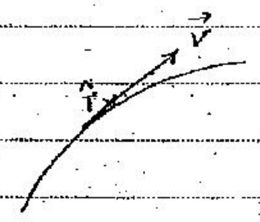
$$\vec{V}_{av} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} \quad \text{یا} \quad \vec{V}_{av} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$




$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad \text{یا} \quad \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$




بردار سرعت لحظه‌ای مماس بر مسیر است .




$$\vec{V} = V.\hat{T}$$

بردار یکه

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

بردار سرعت و شتاب را بدست آورید

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \qquad x = x(t) \ , \ y = y(t) \ , \ z = z(t)$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$V_x = \frac{dx}{dt} \qquad V_y = \frac{dy}{dt} \qquad V_z = \frac{dz}{dt} \qquad \text{یا} \quad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt}$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$a_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv_z}{dt}$$

معادلات حرکت روی خط راست با شتاب ثابت

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$V_x = \frac{dx}{dt}$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$O$ — $A$ — $B$ — $C$ — $D$

$\vec{r} = x\hat{i}$ $\qquad$ $x =$ جابجایی (مکان)

$a_x =$ ثابت

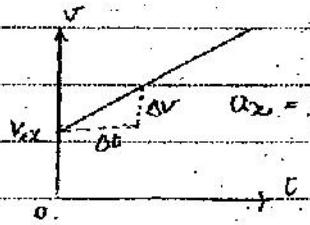
تا آخرین ترتیب

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} \Rightarrow dV_x = a_x dt$$

$$\int_{V_{0x}}^{V_x} dV_x = a_x \int_0^t dt$$

$$V_x - V_{0x} = a_x t$$

$$V_x = a_x t + V_{0x}$$




$$a_x = \frac{\Delta V_x}{\Delta t} = \frac{dV_x}{dt} > 0$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = a_x t + V_{0x}$$

$$\frac{dx}{dt} = V_{0x} + a_x t$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t V_{0x}\, dt + \int_0^t a_x t\, dt$$

$$a_x \int_0^t t\, dt = a_x\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

PILAVARAN

PAGE:

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$\Rightarrow \quad x - x_0 = t v_{0x} + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$x - x_0 = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \Rightarrow \underset{\sim\sim\sim}{x = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 + x_0}$$

$x$ به عنوان تابعی از $t$

$x_0$ ...

$x - x_0$ جابجایی و نه الزاماً مسافت طی شده

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x} \Rightarrow a_x = v_x \cdot \frac{dv_x}{dx}$$

$$\int_{x_0}^{x} a_x \, dx = \int_{v_{0x}}^{v_x} v_x \, dv_x = \frac{v_x^2}{2} = \frac{v_x^2}{2} - \frac{v_{0x}^2}{2}$$

$$a_x (x - x_0) = \frac{1}{2} (v^2 - v_0^2)$$

$$\underset{\sim\sim\sim}{v^2 - v_0^2 = 2a_x (x - x_0)}$$

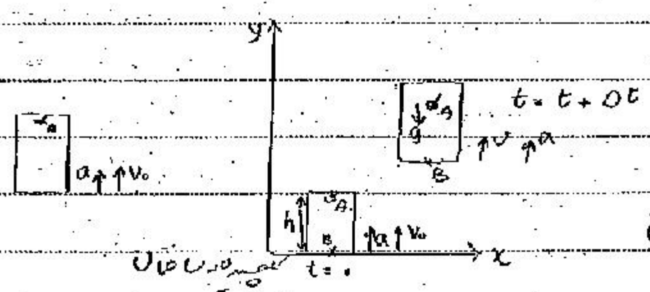
حرکت سقوط آزاد

$a = g$ با تعیین مبدأ و جهت، تمام معادلات بالا (شتاب ثابت) را می‌توان برای حرکت سقوط آزاد هم نوشت.

مثال: آسانسوری با شتاب $a$ در حال بالا رفتن است در لحظه‌ای که سرعت آن $v_0$ است پیچ و مهره‌ای شل شده و آزادانه سقوط می‌کند.

زمان برخورد پیچ با کف آسانسور

جابجایی و مسافت طی شده توسط پیچ




شتاب پیچ $a_A = -g$

$$v_A = -gt + v_0$$

معادله حرکت پیچ (از دید ناظر ساکن زمین) $y_A = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + h$

کف آسانسور

$$y_B = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

معادله حرکت کف آسانسور

PILAVARAN

PAGE:

LearnElement.ir

Subject:

Year. 200 Month. Day.

رسیدن A به B : $y_A = y_B$

$$\cancel{v_0 t} - \frac{1}{2}gt^2 + h = \cancel{v_0 t} + \frac{1}{2}at^2$$

$$h = \frac{1}{2}(a+g)t^2 \Rightarrow \underset{\text{زمان برخورد}}{t} = \sqrt{\frac{2h}{a+g}}$$

حل $g = 9.8\ m/s^2$

$a = 1.2\ m/s^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2(2.2)}{11}} = \sqrt{\frac{4.4}{11}} = \sqrt{0.4} = 0.63\ s$

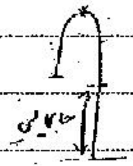
$h = 2.2\ m$

$v_0 = 2\ m/s$

جابجایی جسم $\underbrace{y_A - h}_{\text{جابجایی}} = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 2(0.63) - \frac{1}{2}(9.8)(0.4)$

$= 1.26 - 1.96 = -0.7\ (m)$

مسافت طی شده توسط جسم



$v_A = -gt + v_0$

$0 = -10t + 2 \Rightarrow t = 1/5$

$y_A = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{2}{5} - 5(\frac{1}{25}) = \frac{1}{5}\ (m)$

$\frac{1}{5} \times 2 + 2.2\ m = \frac{2}{5} + \frac{11}{5} = \frac{13}{5}$

## حرکت روی خط راست با شتاب متغیر

شتاب تابع زمان است $a = a(t)$

$a = a(v)$

$a = a(x)$

مثال: شتاب حرکت ذره‌ای که روی محور $x$ حرکت می‌کند با تابع بیان شده است. سرعت و موقعیت ذره را به صورت تابعی از زمان بدست آورید.

$\begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \\ v = v_0 \end{cases}$ $a = a_0 e^{-kt}$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dt \cdot \frac{dv}{dt} = a_0 e^{-kt} \cdot dt$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = a_0 \int_0^t e^{-kt} dt$$

PILAVARAN

PAGE:

$$v - v_0 = -\frac{a_0}{k} \Big| e^{-kt} \Big|_0^t$$

$$v = v_0 - \frac{a_0}{k}(e^{-kt} - 1) \rightsquigarrow v = v_0 + \frac{a_0}{k}(1 - e^{-kt})$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{a_0}{k}(1 - e^{-kt})$$

$$\frac{dv}{dt} = a_0 e^{-kt}$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t \left(v_0 + \frac{a_0}{k}(1 - e^{-kt})\right) dt$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a_0 e^{-kt} dt$$

$$x = v_0 t + \frac{a_0}{k}\left(t + \frac{1}{k} e^{-kt}\right)\Big|_0^t$$

$$v - v_0 = -\frac{a_0}{k} e^{-kt}$$

$$-ke^{-kt}$$

$$x = v_0 t + \frac{a_0}{k}\left(t + \frac{1}{k} e^{-kt} - \frac{1}{k}\right)$$

این فرمول از نظر بعد درست است:

بعد $k$، $T^{-1}$

$e^{-kt}$ بعد ندارد

چون توان‌های یک عبارت نمی‌تواند دارای بعد باشد باید بی‌بعد باشد $e^{-kt}$ پس باید $-kt$ فاقد بعد باشد

چون بعد $t$، $T$ است پس بعد $k$ باید $T^{-1}$ باشد

$$x = \left(v_0 + \frac{a_0}{k}\right)t - a_0(1 - e^{-kt})$$

مثال: قایقی با سرعت ثابت $v_0$ در حرکت است. ناگهان موتور آن خاموش می‌شود. اگر شتاب حرکت کند شونده‌ی قایق پس از خاموش شدن موتور بصورت ... باشد

الف) سرعت قایق بصورت تابعی از زمان

ب) موقعیت $x$ بصورت تابعی از زمان

ج) سرعت قایق بصورت تابعی از مکان

د) زمان و مکان ایستادن قایق

$$a = -kv$$

$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dt \cdot \frac{dv}{dt} = -kv \cdot dt$$

$$\frac{dv}{v} = -k\frac{v}{v} dt$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = \int_0^t -k\,dt$$

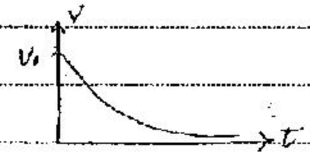
$$\log v \Big|_{v_0}^{v} = -kt \rightsquigarrow \log v - \log v_0 = -kt$$

$$\log \frac{v}{v_0} = -kt$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$\ln\frac{v}{v_0} = -kt \Rightarrow e^{-kt} = \frac{v}{v_0} \Rightarrow v = v_0 e^{-kt}$$




$$v = v_0 e^{-kt}$$

ب) $$v = v_0 e^{-kt}$$

$$dt \cdot \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt}\, dt$$

$$\int_0^x dx = \int_0^t v_0 e^{-kt}\, dt$$

$$x - 0 = v_0 \int_0^t e^{-kt}\, dt$$

$$x = v_0 \left(1 - \frac{e^{-kt}}{-k}\right)$$

$$x = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

ج) $$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v$$

$$\Rightarrow a = v\frac{dv}{dx} \Rightarrow v\frac{dv}{dx} = -kv$$

$$a = -kv$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^x -k\, dx$$

$$v - v_0 = -kx$$

$$\boxed{v = -kx + v_0}$$

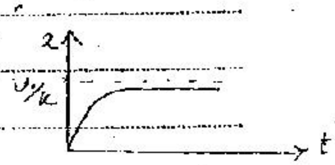
د) $$v = v_0 e^{-kt}$$

[illegible]

حالت ایست $\Rightarrow 0 = v_0 e^{-kt} \Rightarrow t = \infty$

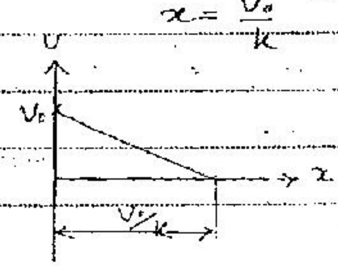
$$x = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) \Rightarrow x = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-\infty}\right)$$

$$x = \frac{v_0}{k}$$




ایست $v = v_0 - kx$

ایست $0 = v_0 - kx \Rightarrow x = \frac{v_0}{k}$.




PILAVARAN

PAGE:

مثال: در مسأله فوق اگر شتاب حرکت قایق پس از خاموش شدن موتور متناسب با مجذور سرعت لحظه‌ای باشد مسأله را از نو حل کنید.

$$a = -kv^2$$

$$a = -kv^2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -kv^2 \Rightarrow dv = -kv^2 dt$$

$$dt = \frac{dv}{-kv^2} \Rightarrow \int_0^t dt = \int_{v_0}^{v} -\frac{1}{k} v^{-2} dv$$

$$\Rightarrow t = -\frac{1}{k}(-v^{-1})\Big|_{v_0}^{v}$$

$$\Rightarrow -kt = -v^{-1}\Big|_{v_0}^{v} \Rightarrow -kt = -\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0} \Rightarrow \frac{1}{v} = kt + \frac{1}{v_0} \Rightarrow v = \frac{v_0}{v_0 kt + 1}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{v_0 kt + 1} \Rightarrow \int_0^x dx = \int \frac{v_0}{v_0 kt + 1} dt \Rightarrow x = \int \frac{1}{kt + \frac{1}{v_0}} dt$$

تغییر متغیر

$$kt + \frac{1}{v_0} = u \Rightarrow du = k\,dt, \quad dt = \frac{du}{k} \Bigg\} \Rightarrow x = \int \frac{1}{\underbrace{kt + \frac{1}{v_0}}_{u}} \underbrace{dt}_{\frac{du}{k}} = \int \frac{du}{ku} = \frac{1}{k} \ln u$$

$$x = \frac{1}{k} \ln\left(kt + \frac{1}{v_0}\right)\Big|_0^t = \frac{1}{k}\left(\ln\left(kt + \frac{1}{v_0}\right) - \ln\frac{1}{v_0}\right) = \frac{1}{k} \ln(ktv_0 + 1) \Rightarrow e^{kx} = ktv_0 + 1$$

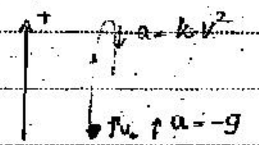
ج) $\frac{dv}{dx} \cdot v = -kv^2 \Rightarrow dv = -kv\,dx \Rightarrow \int dx = \int \frac{dv}{-kv} \Rightarrow x = -\frac{1}{k} \ln\frac{v}{v_0}$

مثال: جسمی با سرعت اولیه $V_0$ به بالا پرتاب می‌شود اگر شتاب حاصل از مقاومت هوا متناسب با مجذور سرعت لحظه‌ای باشد و $g$ ثابت فرض شود (نقطه پرتاب مبدأ فرض شود و جهت مثبت به بالا)

سرعت حدی $V_T^2 = \frac{g}{k}$

الف) جسم تا چه ارتفاعی بالا می‌رود

ب) در بازگشت به نقطه پرتاب چه سرعتی دارد؟




$$R = kmv^2$$

سرعت حدی $\Rightarrow \Sigma F = 0 \Rightarrow -mg - kmv^2 = 0 \Rightarrow v^2 = \frac{g}{k}$ الف)

$$\Sigma F = ma \Rightarrow -mg - kmv^2 = ma \Rightarrow -g - kv^2 = a$$

$$\frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -g - kv^2$$

$$\frac{dv}{dx} \cdot v = -g - kv^2$$

$$\Rightarrow g + kv^2 = -v\frac{dv}{dx} \Rightarrow \frac{v\,dv}{g + kv^2} = -dx$$

$$\int_{v_0}^{0} \frac{v\,dv}{\frac{g}{k} + v^2} = -k\int_0^H dx$$

انتگرال $\Rightarrow \frac{g}{k} + v^2 = u \Rightarrow v\,dv = \frac{du}{2}$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{2u} = \frac{\ln u}{2} = \frac{\ln}{2}\left(v^2 + \frac{g}{k}\right)$$

Subject: سرعت در لحظه برگشت $v^2 = \dfrac{V_0^2\, V_T^2}{V_T^2 + V_0^2} \rightarrow V = \dfrac{V_0 V_T}{(V_T^2 + V_0^2)^{1/2}}$

Year. 200 Month. Day.

رفت $\displaystyle\int_{V_0}^{0} \frac{v\,dv}{\frac{g}{k} + v^2} = -k\int_0^H dx \rightarrow \ln \frac{g}{g + kV_0^2} = -2kH$ ①

$\sum F_i = ma \rightarrow -mg + kmv^2 = ma \rightarrow -g + kv^2 = v\dfrac{dv}{dx}$

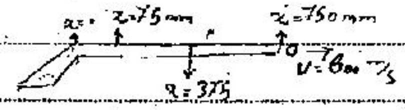
برگشت $\displaystyle\int_0^{V} \frac{v\,dv}{kv^2 - g} = \int_H^0 dx \rightarrow \ln \frac{-kv^2 + g}{g} = -2kH$ ②

$① = ② \Rightarrow \dfrac{g}{g + kV_0^2} = \dfrac{-kv^2 + g}{g}$

$V_T^2 = \dfrac{g}{k}$ $\rightarrow 1 - \left(\dfrac{V}{V_T}\right)^2 = \dfrac{1}{1 + \left(\frac{V_0}{V_T}\right)^2} = \dfrac{V_T^2}{V_T^2 + V_0^2} \rightarrow \left(\dfrac{V}{V_T}\right)^2 = \dfrac{1 - V_T^2}{V_T^2 + V_0^2}$ ↑ از $V_T^2$ فاکتور بگیرید

مثال: شتاب ذره در داخل لوله‌ی تفنگ با رابطه‌ی $a = \dfrac{k}{x}$ تغییر می‌کند. اگر ذره از حالت سکون از $x = 7.5\ mm$ به حرکت درآید با سرعت $600\ m/s$ از دهانه‌ی تفنگ خارج می‌شود ($x = 750 mm$). شتاب و سرعت ذره را در $x = 375\ mm$ بیابید.

$\begin{cases} x = 7.5\ mm \\ V = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 750\ mm \\ V = 600\ m/s \end{cases}$ $\begin{cases} x = 375\ mm \\ V = ? \\ a = ? \end{cases}$




$a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt} \rightarrow \begin{cases} a = v\dfrac{dv}{dx} \\ a = \dfrac{k}{x} \end{cases}$

$\Rightarrow v\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{k}{x}$

$\displaystyle\int_{V_0}^{V} v\,dv = \int_{x_0}^{x} k\frac{dx}{x} \rightarrow \frac{1}{2}v^2\Big|_{V_0}^{V} = k\underbrace{\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x}}_{\log x|_{x_0}^{x}}$

$\rightarrow v^2 - v_0^2 = 2k\log\dfrac{x}{x_0}$

$(600)^2 - 0 = 2k\log\dfrac{750}{7.5} \Rightarrow 36\times10^4 = 2k\log 100$ $\quad a = \dfrac{k}{x}$

$k = \dfrac{36\times10^4}{2\log 100} = 3.91\times10^4\ \dfrac{m^2}{s^2}$ $\quad k = ax$, $k = LT^{-2}L$, $k = L^2 T^{-2}$

$a = \dfrac{k}{x} = \dfrac{3.91\times10^4\ m^2/s^2}{0.375} = 1.04\times10^5\ m/s^2$

سرعت $v_2^2 - v_1^2 = 2k\log\dfrac{x_2}{x_1}$

$(600)^2 - v_1^2 = 2\times3.91\times10^4 \cdot \log\dfrac{750}{375}$

$36\times10^4 - v_1^2 = 2\times3.91\times10^4 \cdot \underbrace{\log 2}_{0.693} \rightarrow V_1 = 553\ m/s$

PILAVARAN

PAGE:

Subject: ۱۳۸۵

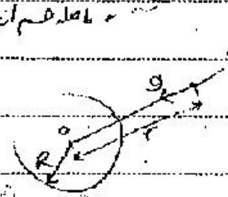
Year. 2006 Month. Day.

مثال: از سطح زمین جسمی را حداقل با چه سرعت اولیه‌ای به بالا پرتاب کنیم تا الف) به اندازه شعاع زمین از سطح زمین بالا رود ب) دیگر به زمین برنگردد.

$$g = \frac{GM_e}{R_e^2}$$ با اعلام اثر زمین

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$a = v\frac{dv}{dr}$$




از طرفی $g = -\frac{GM_e}{r^2}$ $\Rightarrow v\frac{dv}{dr} = -\frac{GM}{r^2}$

$$\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = GM\int_{r_1}^{r_2} -\frac{dr}{r^2} \quad \frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = GM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$V_2^2 - V_1^2 = 2GM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

الف، از سطح زمین: $V_1 = V_0$, $r_1 = R_e$, $r_2 = 2R_e$, $V_2 = 0$

$$\Rightarrow 0 - V_0^2 = 2GM\left(\frac{1}{2R_e} - \frac{1}{R_e}\right)$$

$$V_0^2 = 2GM\left(\frac{1}{2R_e}\right)$$

$$V^2 = \cancel{2}\frac{GM}{\cancel{2}R_e}$$

$$\rightarrow V_0^2 = \frac{g_0 R_e^{\cancel{2}}}{\cancel{R_e}} = g_0 R_e \Rightarrow V_0 = \sqrt{g_0 R_e}$$

ب) $V_1 = V_0$, $r_1 = R_e$, $r_2 = \infty$, $V_2 = 0$

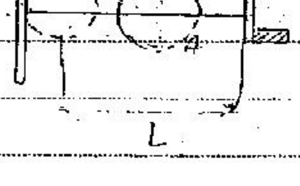
$$0 - V_0^2 = 2GM\left(\frac{1}{R_e} - \cancel{\frac{1}{\infty}}\right) \Rightarrow V_0^2 = \frac{2GM}{R_e} = 2g_0R_e$$

$$V_0 = \sqrt{2g_0R_e}$$

$$V_{0\,min} = \sqrt{2g_0R_e} = \sqrt{2\times 9.8\times 64\times 10^5}$$

$$\simeq \sqrt{2\times 10\times 64\times 10^5} \simeq 11.2\ km/s$$

مثال: مطابق شکل گوی فولادی A به قطر D بر میله افقی که به قطب یک آهنربا منتهی می‌شود می‌لغزد و شتاب گوی از رابطه $a = \frac{k}{(L-x)^2}$ تبعیت می‌کند که در آن k اندازه ثابت میدان مغناطیسی است. اگر در $x=0$ گوی از حالت سکون رها شود با چه سرعتی با قطب آهنربا برخورد می‌کند؟




$$a = \frac{k}{(L-x)^2}$$

$$v\frac{dv}{dx} = \frac{k}{(L-x)^2} \Rightarrow \int_{v_0}^{v} v\,dv = \int \frac{k}{(L-x)^2}dx$$

Subject:

Year.200 Month. Day.

$$\int_0^v v\,dv = \int_{D/2}^{L-D/2} k\frac{dx}{(L-x)^2} \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = k(L-x)^{-1}\Big|_{D/2}^{L-D/2}$$

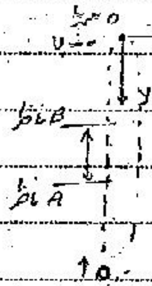
$(v_0=0)$ چون

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = k\left(\frac{1}{D/2} - \frac{1}{L-D/2}\right)$$

$$v^2 = 2k\left(\frac{2}{D} - \frac{2}{2L-D}\right) = 2k\,\frac{4(L-D)}{D(2L-D)}$$

سرعت لحظه برخورد اجسام: $v = \sqrt{\dfrac{8k(L-D)}{D(2L-D)}}$

مثال: جسمی به بالا پرتاب می‌کنیم.



برای نقطه A

$T_A =$ زمانی که توپ دو بار از نقطه A می‌گذرد

$T_B =$ زمانی که توپ دو بار از نقطه B می‌گذرد

برای نقطه B

اگر $AB = H \Rightarrow g = ?$

$$OA = \frac{1}{2}g\left(\frac{T_A}{2}\right)^2$$

$$OB = \frac{1}{2}g\left(\frac{T_B}{2}\right)^2$$

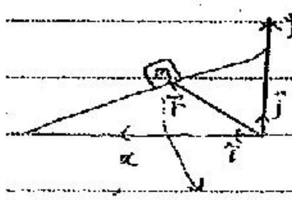
$$OA - OB = \frac{1}{2}g\left(\frac{T_A^2}{4} - \frac{T_B^2}{4}\right)$$

$$H = \frac{1}{8}g\left(T_A^2 - T_B^2\right)$$

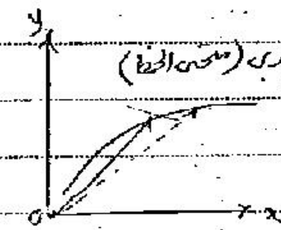
$$g = \frac{8H}{T_A^2 - T_B^2}$$

## حرکت دو بعدی (منحنی الخط)

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$



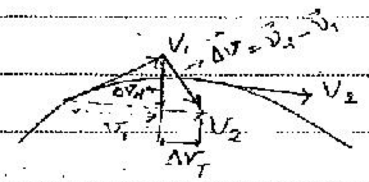
این یک حرکت یک بعدی است
چون جسم (m) همیشه روی خط
راست حرکت می‌کند



حرکت دو بعدی (منحنی الخط)

اگر جسم روی خط راست
حرکت کند حرکت یک بعدی

## شتاب مماسی و شتاب عمودی یا نرمال




اندازه و راستای بردار سرعت تغییر کرده

$\Delta V_N$ تفاضل در بردار به دلیل تغییر راستا

$\Delta V_T$ تفاضل در بردار به دلیل تغییر اندازه

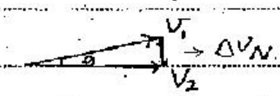
$$\Delta \vec V = \Delta \vec V_N + \Delta \vec V_T$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec v_N}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec v_T}{\Delta t}$$

$$\vec a = \vec a_N + \vec a_T$$

نرمال یا شعاعی — شتاب مماسی ناشی از اندازه بردار سرعت.

وقتی $\Delta t \to 0$ میل می‌کند




$\theta \to 0 \Rightarrow \Delta V_N \perp \vec V_1, \vec V_2$

شتاب مماسی $a_T$ ناشی از تغییر اندازه سرعت. و شتاب نرمال $a_N$ ناشی از تغییر راستای سرعت

## محاسبه شتاب مماسی و نرمال

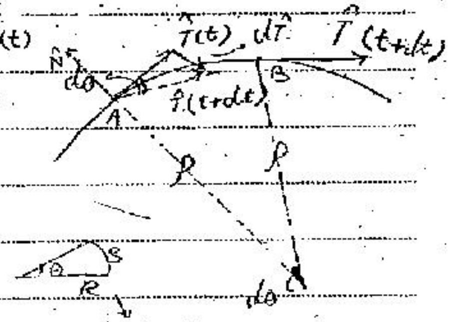
$\vec V = v \hat T$ مشتق بگیریم

$$\frac{d\vec v}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat T + \frac{d\hat T}{dt} v$$

اندازه شتاب — می‌دانیم که شتاب مماسی است.

$$\frac{d\hat T}{dt} = ?$$

$$d\hat T = \hat T(t+dt) - \hat T(t)$$




$$\Rightarrow |d\vec T| = \underbrace{|\hat T|}_{=1} d\theta$$

$$|d_T| = d\theta \Rightarrow d\vec T = d\theta \cdot \hat N$$

$S = R\theta$

$$\frac{d\vec T}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat N$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\theta}{ds}\cdot\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{V} \qquad \frac{d\theta}{ds}=\frac{d\theta}{\rho\, d\theta}=\frac{1}{\rho}$$ خمیدگی

$\rho =$ شعاع خمیدگی

$\overset{\frown}{AB}=ds$

$$\frac{d\hat{T}}{dt}=-\frac{V}{\rho}\hat{N} \qquad \frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{dV}{dt}\hat{T}-\frac{V^2}{\rho}\hat{N}$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{a}$$

$$\frac{dV}{dt}=a_T \qquad -\frac{V^2}{\rho}=a_N$$

تغییر سرعت
شعاع خمیدگی مسیر است.

مثال: شعاع خمیدگی مسیر حرکت را برحسب بردار سرعت و شتاب بدست آورید

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{dV}{dt}\hat{T}-\frac{V^2}{\rho}\hat{N}$$

$\times\vec{V}$

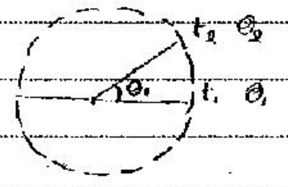
$$\vec{V}\times\vec{a}=\frac{dV}{dt}(\hat{T}\times\vec{V})-\frac{V^2}{\rho}(\hat{N}\times\vec{V})$$

$$\vec{a}\times\vec{V}=\frac{dV}{dt}(\hat{T}\times V\hat{T})-\frac{V^3}{\rho}(\hat{N}\times\hat{T})$$

$$\vec{a}\times\vec{V}=0+\frac{V^3}{\rho}(\hat{T}\times\hat{N}) \Rightarrow \vec{a}\times\vec{V}=\frac{V^3}{\rho}\hat{b}$$ بردار عمود بر دو بردار است.

$$\Rightarrow |\vec{a}\times\vec{V}|=\frac{V^3}{\rho} \Rightarrow \frac{1}{\rho}=\frac{|\vec{a}\times\vec{V}|}{V^3}$$ از نظر بعد: $\frac{(LT^{-2})(LT^{-1})}{L^3T^{-3}}=\frac{1}{L}$ بعد $\rho$

## حرکت دایره‌ای یکنواخت



سرعت زاویه‌ای $\overline{\omega}=\frac{\theta_2-\theta_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{d\theta}{dt}\rightarrow\frac{rad}{s}$$

$T=\frac{1}{\nu}$ بسامد
زمان تناوب

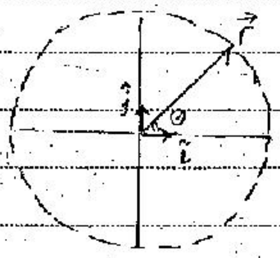
Subject:

Year.200 Month. Day.

شتاب متوسط زاویه‌ای $\bar{\alpha} = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta \omega}{\Delta t}$ $\mathrm{rad}/s^2$

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad \mathrm{rad}/s^2$$

در حرکت دایره‌ای یکنواخت $\alpha = 0$ است.




مختصات دوبعدی

$$\vec{r} = r\sin\theta\,\hat{j} + r\cos\theta\,\hat{i}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta\,\hat{j} + r\frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta)\,\hat{i}$$

$\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$

$$\vec{v} = -r\omega\sin\theta\,\hat{i} + r\omega\cos\theta\,\hat{j}$$

$v^2 = \sqrt{v_i^2 + v_j^2}$ $\qquad v^2 = r^2\omega^2\sin^2\theta + r^2\omega^2\cos^2\theta$

$$\boxed{v = r\omega}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -r\omega^2\cos\omega t\,\hat{i} - r\omega^2\sin\omega t\,\hat{j}$$

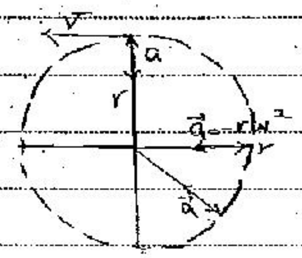
به سمت مرکز چون حرکت دایره‌ای یکنواخت ... است.

$$\vec{a} = -\omega^2(r\cos\omega t\,\hat{i} + r\sin\omega t\,\hat{j})$$

$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$$

$a = \omega^2 r$ , $a_N = \dfrac{v^2}{r}$, $a_N = \dfrac{v^2}{\rho}$ $\qquad$ شتاب مماسی صفر است.

$a_T = \dfrac{dv}{dt}$




$|\vec{r}| =$ ثابت

(ثابت)

$v = r\omega \Rightarrow a_T = r\dfrac{d\omega}{dt}$

$\rightarrow a_T = r\alpha = 0$

حرکت دایره‌ای یکنواخت $\alpha = 0$

$$\vec{r}\cdot\vec{r} = r^2$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{r} + \vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr^2}{dt}$$

چون $r^2$ ثابت است مشتق آن صفر

$$2\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

PILAVARAN

PAGE:

$$2\vec{r}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \vec{r}\perp\vec{v}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{v}=v^2 \rightarrow \text{ثابت}$$

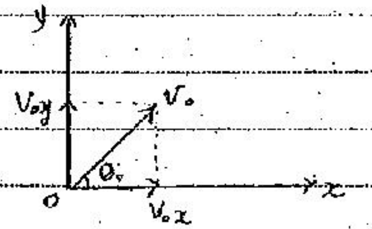
حرکت دایره‌ای یکنواخت

$$\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}=0$$

$$2\vec{v}\frac{d\vec{v}}{dt}=0 \rightsquigarrow 2\vec{v}\cdot\vec{a}=0 \rightsquigarrow \vec{v}\perp\vec{a}$$

## حرکت پرتابه

از نقطه O جسمی با سرعت اولیه $V_0$ که زاویه $\theta$ نسبت به افق پرتاب می‌کنیم معادلات حرکت، سرعت




$$V_{0x}=V_0\cos\theta_0$$
$$V_{0y}=V_0\sin\theta_0$$

در راستای x:

$$a_x=0$$

چون نیرویی نداریم

$$V_x=\text{ثابت}$$
$$V_x=V_0\cos\theta_0$$
$$\frac{dx}{dt}=V_0\cos\theta_0 \rightsquigarrow \int_0^x dx=\int_{0}^{t}V_0\cos\theta_0\,dt$$
$$\rightsquigarrow x=V_0 t\cos\theta_0$$

در راستای y: $a_y=-g$

$$\frac{dv_y}{dt}=-g \rightsquigarrow \int_{V_{0y}}^{V_y}dv_y=-g\int_0^t dt$$
$$V_y-V_{0y}=-gt$$
$$V_y=-gt+V_0\sin\theta_0$$

Subject:

Year. 200  Month.  Day.

$$V_y = -gt + V_0 \sin\theta$$

$$\frac{dy}{dt} = -gt + V_0 \sin\theta_0 \rightsquigarrow \int_0^y dy = \int -gt + V_0 \sin\theta_0 \, dt$$

$$\rightarrow y = V_0 t \sin\theta_0 - \tfrac{1}{2} g t^2$$

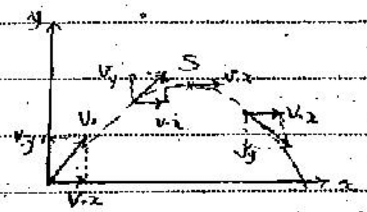
$$\begin{cases} V_x = V_0 \cos\theta_0 \\ x = V_0 t \cos\theta_0 \\ V_y = V_0 \sin\theta_0 - gt \\ y = V_0 t \sin\theta_0 - \tfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

معادله مسیر: $x = V_0 t \cos\theta_0 \rightsquigarrow t = \dfrac{x}{V_0 \cos\theta_0}$

$$y = V_0 \left(\frac{x}{V_0 \cos\theta_0}\right) \sin\theta_0 - \frac{1}{2} g \left(\frac{x^2}{V_0^2 \cos^2\theta_0}\right)$$

$$y = x \tan\theta_0 - g \frac{x^2}{2 V_0^2 \cos^2\theta_0}$$

معادله سهمی $y = Ax - Bx^2$




$V_y = 0$  در نقطه S

$$0 = V_0 \sin\theta_0 - gt \rightsquigarrow V_0 \sin\theta_0 = gt$$

زمان رسیدن به اوج $t = \dfrac{V_0 \sin\theta_0}{g}$

در نقطه S $\rightsquigarrow$ $x = V_0 \left(\dfrac{V_0 \sin\theta_0}{g}\right) \cos\theta_0$

[illegible] $x = \dfrac{V_0^2 \sin 2\theta_0}{2g}$

$$y = V_0 \left(\frac{V_0 \sin\theta_0}{g}\right) \sin\theta_0 - \frac{1}{2} g \left(\frac{V_0 \sin\theta_0}{g}\right)^2$$

ارتفاع اوج $y = \dfrac{V_0^2 \sin^2\theta}{2g}$

$$y = v_0 t \sin\theta_0 - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$\Rightarrow y = 0$

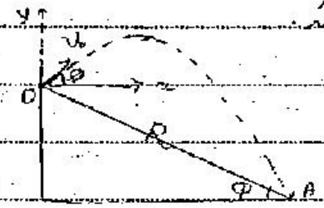
$t = 0$

زمان رفت و برگشت $t = \dfrac{2v_0 \sin\theta_0}{g}$ زمان رفت و زمان برگشت با هم برابرند (صرف‌نظر از مقاومت هوا)

برد پرتابه $R = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$

$\theta_0 = 45 \Rightarrow R = R_{Max} = \dfrac{v_0^2}{g}$

مثال: از بالای تپه‌ای به زاویه‌ی شیب $\varphi$ پرتابه‌ای را با سرعت اولیه $v$ با زاویه $\theta$ نسبت به افق پرتاب می‌کنیم. $\theta$ را چنان تعیین کنید که برد پرتابه در امتداد تپه بیشینه باشد.




$$x = v_0 t \cos\theta$$

$$y = v_0 t \sin\theta - \tfrac{1}{2} g t^2$$

معادله مسیر پرتابه: $y = x \tan\theta - \dfrac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta}$

$A \begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = -R\sin\varphi \end{cases}$ از بالا به پایین

مختصات نقطه A را در معادله مسیر پرتابه قرار می‌دهیم

$$-R\sin\varphi = R\cos\varphi\tan\theta - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta} R^2\cos^2\varphi$$

$$R(\cos\varphi\tan\varphi + \sin\varphi) - \frac{g\cos^2\varphi}{2v_0^2\cos^2\theta} R^2 = 0$$

جواب بدیهی $R = 0$ نقطه پرتاب

$$R = \frac{2(\cos\varphi\tan\theta + \sin\varphi) v_0^2 \cos^2\theta}{g\cos^2\varphi}$$

مشتق می‌گیریم

شرط بیشینه بودن R $\dfrac{dR}{d\theta} = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{\left(2(\cos\varphi(1+\tan^2\theta)) v_0^2\cos^2\theta - 2v_0^2 \sin\theta\cos\theta\right) g\cos^2\varphi - 0 \times \dots}{g^2\cos^4\varphi}$ صورت

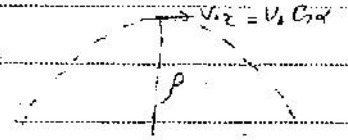
پس $2\cos\varphi\, v_0^2\cos^2\theta(1+\tan^2\theta) \cdot \cancel{g\cos^2\varphi} = 2v_0^2\sin\theta\cos\theta \cdot \cancel{g\cos^2\varphi}$

$$\cos\varphi\cos\theta(1+\tan^2\theta) = \sin\theta$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال: شعاع انحنای مسیر یک پرتابه را در نقطه اوج بدست آورید.




$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\vec v \times \vec a|}{v^3} = \frac{|v_0 \cos\theta_0 x \cdot g|}{v^3}$$

$$\rightarrow \rho\, |v_0 \cos\theta_0 \cdot g| = v_{0x}^3 \rightarrow \rho\, v_{0x}\, g = v_{0x}^{3}$$

$$\rho g = v_{0x}^2 \rightarrow \rho = \frac{v_{0x}^2}{g}$$

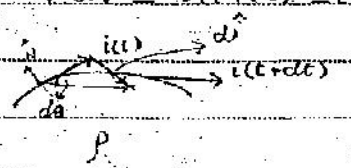
مثال: بردار مکان ذره‌ای در دستگاه مختصات متعامد عبارت است $\vec r = x\hat i + y\hat j + z\hat k$ که در آن $x$ و $y$ و $z$ خود توابعی از زمان هستند. شتاب مماسی، شتاب نرمال، شعاع انحنای مسیر را که $x$ و $y$ و $z$ مشتقات آن را بدست آورید.

$$\frac{d\vec r}{dt} = \dot x \hat i + \dot y \hat j + \dot z \hat k$$

$$\vec v = v_x \hat i + v_y \hat j + v_z \hat k \qquad \vec v_x = v_x \hat i \Rightarrow \frac{d\vec v}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat i + \frac{d\hat i}{dt} v_x$$

$$\Rightarrow \vec a_x = a_{T_x} \hat i + \frac{d\hat i}{dt} v_x$$

$$d\hat i = \hat i(t+dt) - \hat i(t)$$




$$|d\hat i| = |\hat i(t)|\, d\theta \Rightarrow d\vec{\hat i} = d\theta \cdot \hat N$$

$$\frac{d\hat i}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat N = \frac{v_x}{\rho}\hat N$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \underbrace{\frac{d\theta}{ds}}_{\rho\, d\theta} \cdot \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v_x} = \frac{v_x}{\rho}$$

$$\vec a_x = a_{T_x}\hat i - \frac{v_x^2}{\rho}\hat N$$

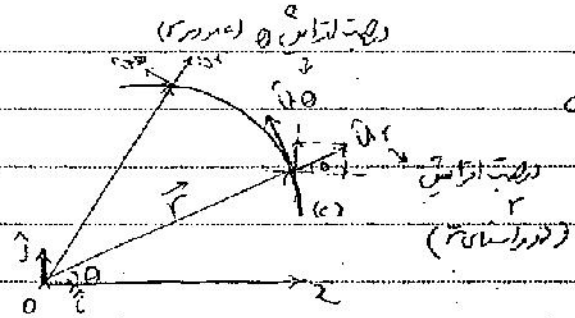
? چون برای $y, z$

$$\vec a = \underbrace{a_{T_x}\hat i + a_{T_y}\hat j + a_{T_z}\hat k}_{\vec a_T} - \underbrace{\left(\frac{v_x^2}{\rho} + \frac{v_y^2}{\rho} + \frac{v_z^2}{\rho}\right)\cdot \hat N}_{\vec a_N}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

سرعت و شتاب در مختصات قطبی




$$\hat{u}_{r_x} = |\hat{u}|\cos\theta\,\hat{i} = \cos\theta\,\hat{i}$$

$$\hat{u}_{r_y} = |\hat{u}|\sin\theta\,\hat{j} = \sin\theta\,\hat{j} \Rightarrow \hat{u}_r = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$$

به ترتیب $\hat{u}_\theta = \cos\theta\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{i}$

$$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \dot{\hat{u}}_r = -\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{i} + \dot{\theta}\cos\theta\,\hat{j}$$

$$\dot{\hat{u}}_r = \dot{\theta}(-\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j})$$

$$\dot{\hat{u}}_r = \dot{\theta}\,\hat{u}_\theta$$

$$\dot{\hat{u}}_\theta = -\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{i} - \dot{\theta}\sin\theta\,\hat{j}$$

$$\dot{\hat{u}}_\theta = -\dot{\theta}(\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j})$$

$$\dot{\hat{u}}_\theta = \dot{\theta}\,\hat{u}_r$$

$$\vec{r} = r\hat{u}_r \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\hat{u}}_r \qquad (\dot{r}\dot{\theta} + \dot{\theta}\dot{r})\hat{u}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{u}_\theta$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta$$

$$v_r = \dot{r}\ ,\ v_\theta = r\dot{\theta} \Rightarrow V = \sqrt{V_r^2 + V_\theta^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\hat{u}_r + \dot{r}\dot{\hat{u}}_r + \left(\dot{r}\dot{\theta}\hat{u}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\hat{u}}_\theta\right)$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{u}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\hat{u}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{u}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\hat{u}_r)$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{u}_\theta$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \quad \rightsquigarrow a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

حرکت دایره‌ای یکنواخت (با مقدار ثابت)

$r =$ ثابت است (radius) شعاع دایره

$\dot{r} = 0 \quad , \quad \ddot{r} = 0$

$\dot{\theta} = \omega \quad , \quad \ddot{\theta} = \dot{\omega} = \alpha = 0$

شتاب زاویه‌ای

$V_r = 0$

$V_\theta = r\dot{\theta} = r\omega$

$a_r = 0 - r\omega^2$

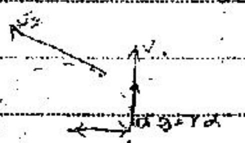
$a_\theta = 0 + 0 = 0$ شتاب زاویه‌ای صفر است.

حرکت دایره‌ای غیر یکنواخت

$r$ ثابت $\quad \dot{r} = 0$

$\dot{\theta} = \omega \quad \begin{cases} V_r = 0 \\ V_\theta = r\omega \end{cases} \quad \begin{cases} a_r = r\omega^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} = r\alpha \end{cases}$ شتاب مماسی

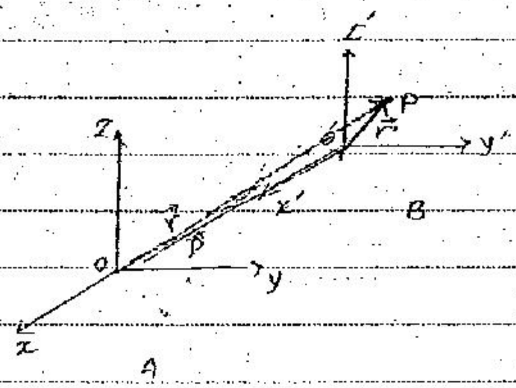
$\ddot{\theta} \neq 0$




بررسی حرکت دستگاه نسبی

دستگاه A ثابت است ولی دستگاه B نسبت به

A در حال خود حرکت کند.




$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{\rho}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}$$

$$V_{P/A} = \vec{V}_{P/B} + \vec{V}_{B/A}$$

مشتق گیریم : $\frac{d}{dt}(\vec{V}_{P/A}) = \frac{d}{dt}(\vec{V}_{P/B}) + \frac{d}{dt}(\vec{V}_{B/A})$

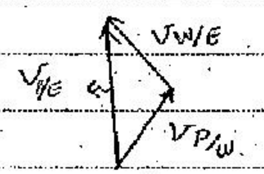
شتاب نسبی حرکت دو بعدی $\vec{a}_{P/A} = \vec{a}_{P/B} + a_{B/A}$

اگر B با سرعت ثابت نسبت به A حرکت انتقالی داشته باشد

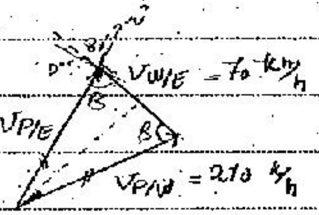
$\vec{a}_{B/A} = 0$

$\Rightarrow \vec{a}_{P/A} = \vec{a}_{P/B}$

مثال: فرض کنید هواپیمای (P) در هوا حرکت می‌کند و باد (W) هم می‌وزد




$\vec{V}_{P/E} = \vec{V}_{P/W} + \vec{V}_{W/E}$




چنانچه وزش باد سرعت هواپیما تغییر نمی‌کند

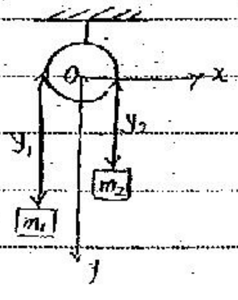
$V_{P/E}$ نیز همان $210\ km/h$ است

$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1/2 \times 70}{210} = 1/6$

$\theta/2 = \sin^{-1}(1/6) \Rightarrow \theta = 18.4$

$180 - 18.4 = 161.6 \rightarrow B = 81 \Rightarrow V_{P/E} \simeq V_{P/W}$

حرکت وابسته




$y_1 + y_2 + \pi R =$ ثابت

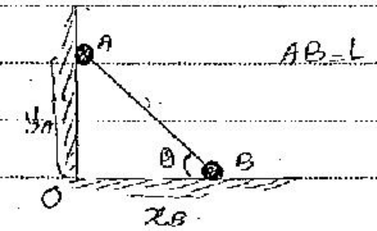
$y_1 + y_2 =$ ثابت

$\dot{y}_1 + \dot{y}_2 = 0$ $\qquad$ $\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = 0$

$V_1 + V_2 = 0 \Rightarrow \boxed{V_1 = -V_2}$ $\qquad$ $a_1 + a_2 = 0$

$\boxed{a_1 = -a_2}$

مثال: سرعت B و A را بیابید




$$x_B^2 + y_A^2 = L^2 \quad \text{ثابت}$$

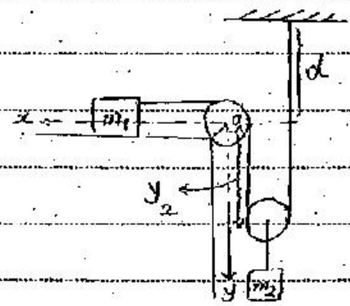
$$2x_B\dot{x}_B + 2y_A\dot{y}_A = 0$$

$$x_B v_B + y_A v_A = 0$$

$$\frac{v_B}{v_A} = -\frac{y_A}{x_B} \Rightarrow \frac{v_B}{v_A} = -\tan\theta$$

$$v_B = -v_A \tan\theta$$

مثال: رابطه شتاب را بیابید

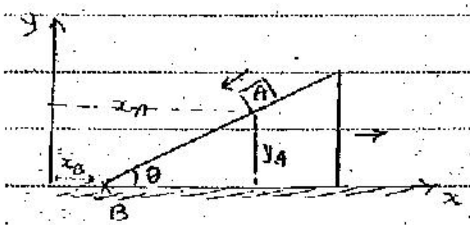



$$x_1 + 2y_2 + d = \text{ثابت}$$

$$\dot{x}_1 + 2\dot{y}_2 = 0$$

$$\ddot{x}_1 + 2\ddot{y}_2 = 0 \Rightarrow a_1 = -2a_2$$

مثال: رابطه شتاب را بدست آورید




$$\tan\theta = \frac{y_A}{x_A - x_B}$$

$$y_A = \tan\theta\,(x_A - x_B)$$

$$\dot{y}_A = \tan\theta\,(\dot{x}_A - \dot{x}_B)$$

$$\ddot{y}_A = \tan\theta\,(\ddot{x}_A - \ddot{x}_B)$$

$$a_{Ay} = \tan\theta\,(a_{Ax} - a_{Bx})$$

Subject:

Year. 200   Month.   Day.

مثال: اولاً ثابت کنید در حرکت منحنی الخط شعاع انحنای مسیر حرکت ذره از رابطه $\rho = \dfrac{V^3}{|\vec{a} \times \vec{V}|}$ بدست می‌آید.

مثال: اگر بردار موقعیت ذره‌ای بصورت زیر باشد شتاب مماسی، نرمال و شعاع انحنای مسیر را بدست آورید.

$$\vec{r} = b(t + \sin t)\,\hat{i} + b(1 - \cos t)\,\hat{j}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = b(1+\cos t)\,\hat{i} + b(\sin t)\,\hat{j} \quad \Rightarrow \quad V_x = b(1+\cos t)\,\hat{i}$$

$$V_y = b \sin t \,\hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{T} - \frac{v^2}{\rho}\hat{N} \qquad |V| = \sqrt{b^2(1+\cos t)^2 + b^2 \sin^2 t}$$

باید اندازه v را بدست آوریم

$$|V| = b\sqrt{1 + \cos^2 t + 2\cos t + \sin^2 t}$$

$$|V| = b\sqrt{2}\,.\sqrt{1+\cos t}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt}\hat{T} = b\sqrt{2}\,.\,\frac{-\sin t}{2\sqrt{1+\cos t}}\,\hat{T} = -\frac{b\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sin t}{\sqrt{1+\cos t}}\,\hat{T}$$

راه دوم: $\dfrac{dv_x}{dt} = a_x = -b \sin t\,\hat{i} \quad , \quad \dfrac{dv_y}{dt} = a_y = -b\cos t\,\hat{j}$

$$|\vec{a}| = b$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} \quad \Rightarrow \quad b^2 = a_T^2 + a_N^2 \quad \Rightarrow \quad a_N^2 = b^2 - a_T^2$$

با نسبت با بالا مقایسه کنیم $\Rightarrow \quad |\vec{a}_N| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\, b\sqrt{1+\cos t} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_N = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\, b\sqrt{1+\cos t}\;\hat{N}$

$$a_N = \frac{V^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{2b(1+\cos t)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\, b(\sqrt{1+\cos t})} = b\,2\sqrt{2}\,.\sqrt{1+\cos t}$$

راه سوم: $|a \times V| = b^2(\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t) = b^2(1+\cos t)$

مؤلفه‌های بردارهای V و a را در هم ضرب برداری می‌کنیم

$$\vec{a}_N = -\frac{V^2}{\rho}\hat{N} \quad , \quad |a \times V| = \frac{V^3}{\rho}$$

$$\Rightarrow \rho = \cdots \qquad \vec{a}_N = -\frac{V^2}{\rho}\hat{N}$$

PILAVARAN

PAGE:

مثال. ذره‌ای بر منحنی به معادله زیر حرکت می‌کند. بردارهای سرعت و شتاب ذره را به صورت تابعی از زمان بدست آورید (و اندازه‌ی آن‌ها)

$$y = R(1 - \cos\omega t)$$
$$x = R(\omega t - \sin\omega t)$$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = R(\omega - \omega\cos\omega t)$$
$$\vec{V}_x = R\omega(1 - \cos\omega t)$$

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = R(\omega \sin\omega t)$$
$$\vec{V}_y = R\omega \sin\omega t$$

$$\left.\begin{aligned} a_x &= R\omega^2 \sin\omega t \\ a_y &= R\omega^2 \cos\omega t \end{aligned}\right\} \Rightarrow |a| = R\omega^2$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{R^2\omega^2(2 - 2\cos\omega t)} = R\omega\sqrt{2 - 2\cos\omega t}$$

نشان دهید زاویه‌ی بین بردار سرعت و شتاب برابر است با: $\theta = \frac{1}{2}\omega t$

$$\underset{a_x V_x + a_y V_y}{a \cdot V} = |a||V|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{R^2\omega^3 \sin\omega t(1 - \cos\omega t) + R^2\omega^3 \sin\omega t \cos\omega t}{R^2\omega^3\sqrt{2 - 2\cos\omega t}}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{\cancel{R^2}\cancel{\omega^3} \sin\omega t}{\cancel{R^2}\omega^2\underbrace{\sqrt{2 - 2\cos\omega t}}_{2(2\sin^2\frac{\omega t}{2})}} = \frac{\overset{2\sin\frac{\omega t}{2}\cos\frac{\omega t}{2}}{\sin\omega t}}{2\sin\frac{\omega t}{2}} = \cos\frac{\omega t}{2}$$

$$\cos\theta = \cos\frac{\omega t}{2} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}\omega t$$

مثال. ذره‌ای روی مسیر زیر حرکت می‌کند. مؤلفه‌های سرعت و شتاب ذره را به صورت تابعی از t به دست آورید. زاویه‌ی بین $\vec{a}$ و $\vec{V}$ را بدست آورده و نشان دهید مقدار آن ثابت است

$$r = be^{kt} \qquad b, k, c = \text{ثابت‌اند}$$
$$\theta = ct$$

داریم $\vec{V} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} = bke^{kt}\,\hat{r} + bce^{kt}\,\hat{\theta} = be^{kt}(k\hat{r} + c\hat{\theta})$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = be^{kt}\left((k^2 - c^2)\hat{r} + 2kc\,\hat{\theta}\right)$$