Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|a||v|} \qquad \vec{a}\cdot\vec{v} = (be^{kt})^2 \; M(k,c)$$

$$|a||v| = (be^{kt})^2 \; N(k,c)$$

$$|a| = be^{kt}\sqrt{(k^2-c^2)^2+(2kc)^2}$$

$$|v| = be^{kt}\sqrt{k^2+c^2}$$

$$\cos\theta = \frac{(be^{kt})^2}{(be^{kt})^2}\;\frac{M(k,c)}{N(k,c)}$$

دینامیک:

قانون اول نیوتن: هر جسم اگر بر آن نیرویی وارد نشود حالت سکون یا حرکت یکنواخت خود را ادامه می‌دهد.

قانون دوم نیوتن: اگر به جسم (ذره‌ای) نیرو وارد شود دارای شتاب می‌شود.

جرم لختی

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \text{مقدار ثابت} = m \;\rightarrow\; \vec{F} = m\vec{a} \qquad \Sigma\vec{F}_x = m\vec{a}_x$$

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \qquad \Sigma\vec{F}_y = m\vec{a}_y$$

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} \qquad \Sigma\vec{F}_z = m\vec{a}_z$$

$$N = 1kg.m/s^2$$

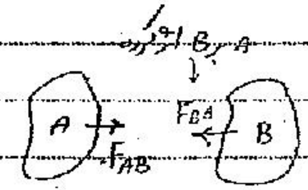
قانون هوک: $F_x = -kx$ برای هم‌برابر کردن نیرو، x را در برابر می‌کنیم

x: افزایش طول فنر

قانون دوم شامل قانون اول هم می‌شود یعنی اگر $F=0$ باشد چون $m\neq 0$ است پس $a=0$ است.

قانون نیوتن در چهارچوب لخت قرار گرفته است.

قانون سوم نیوتن: نیرو برهم‌کنش دو جسم است

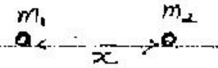


$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

اگر نتوانستیم برای نیرویی عکس‌العمل پیدا کنیم آن شبه‌نیرو است.

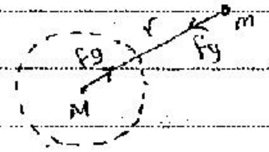
Subject:

Year. 200 Month. Day.



$$F = G\frac{m_1 m_2}{x^2} \qquad G = 6.67\times10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2}$$

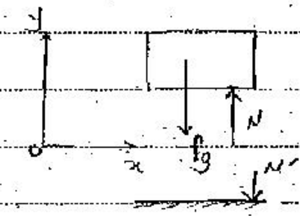
جرم جاذبه‌ای



$$f_g = \frac{Mm}{r^2}G$$

طبق آزمایشات جرم جاذبه‌ای و لختی یکی هستند.

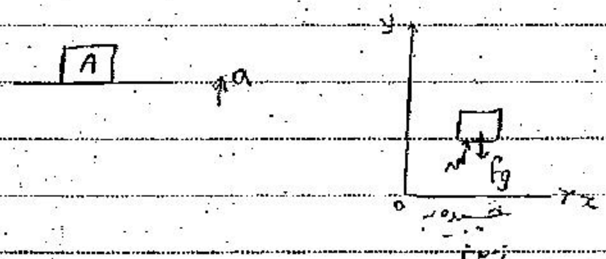
مثال: جسمی روی سطح قرار دارد آن را تجزیه و تحلیل کنید.



$$\Sigma f_y = N - f_g = 0$$
$$N = f_g = mg$$

وزن جسم: وزن نیرویی است که جسمی دارد و می‌توانیم آن را شتاب‌دار نداریم

مثال: شکل زیر را تجزیه و تحلیل کنید.



$$\Sigma f_y = N - f_g = ma_y$$
$$N = f_g + ma_y$$
$$N = m(g + a_y)$$

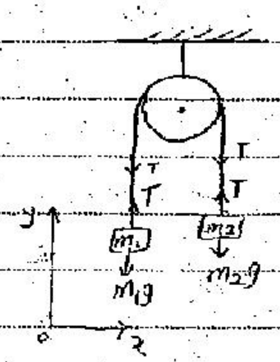
اگر $a_y > 0$ باشد آنگاه $N > mg$

اگر $a < 0$ باشد آنگاه $N < mg$

اگر $a = -g$ باشد آنگاه $N = 0$

کشش: نیرویی که به نخ پاره شده باید وارد کرد تا حالت حرکت تغییر نکند

نخ ایده‌آل نخی است که در اثر کشش طولش ثابت بماند.



m_1 حرکت: $T - m_1 g = m_1 a_1$

m_2 حرکت: $T - m_2 g = m_2 a_2$

$a_1 + a_2 = 0$ به دلیل اینکه طول نخ ثابت است

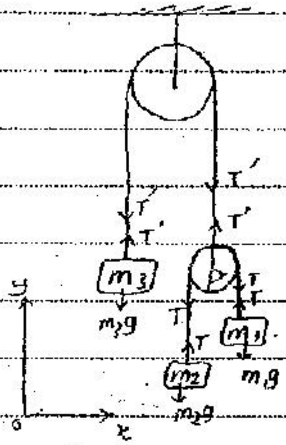
$$T - m_1 g = -m_1 a_2$$
$$-T + m_2 g = m_2 a_2$$
$$g(m_2 - m_1) = -(m_2 + m_1)a_2$$

$$a_2 = \frac{g(m_2 - m_1)}{-(m_2 + m_1)}$$

آیا $m_1+m_2=m_3$ شرط لازم $a_3=0$ است؟ $m_1=m_2$؟

مثال: کشش ریسمان‌ها را بیابید

وزن قرقره ، جرم قرقره

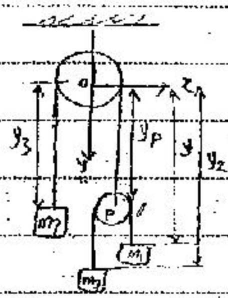


$$P \text{ قرقره}: \quad T' - 2T - W_p = m_p a_p$$

در این مثال $m_p \simeq 0$

$$T' - 2T = 0 \Rightarrow \boxed{T' = 2T}$$

$$\begin{cases} T - m_1 g = m_1 a_1 \\ T - m_2 g = m_2 a_2 \\ T' - m_3 g = m_3 a_3 \\ T' = 2T \\ a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} T - m_1 g = -2m_1 a_3 - m_1 a_2 \\ T - m_2 g = m_2 a_2 \quad (\times -2) \\ 2T - m_3 g = m_3 a_3 \end{cases}$$

$$(\mathrm{I})\ 2m_2 g - m_3 g = -2m_2 a_2 + m_3 a_3$$

$$\begin{cases} T - m_1 g = -2m_1 a_3 - m_1 a_2 \\ -T + m_2 g = -m_2 a_2 \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\ m_2 g - m_1 g = -2m_1 a_3 - m_1 a_2 - m_2 a_2$$

$$(y_1 - y_p) + (y_2 - y_p) = Cost \qquad y_3 + y_p = Cost$$

$$y_1 + y_2 - 2y_p = Cost \qquad \dot{y}_3 + \dot{y}_p = 0$$

$$\ddot{y}_3 + \ddot{y}_p = 0$$

$$\dot{y}_1 + \dot{y}_2 - 2\dot{y}_p = 0 \qquad \ddot{y}_3 = -\ddot{y}_p$$

$$\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 - 2\underbrace{\ddot{y}_p}_{-\ddot{y}_3} = 0 \Rightarrow a_1 + a_2 + 2a_3 = 0$$

$$\begin{cases} 2m_2 g - m_3 g = -2m_2 a_2 + m_3 a_3 \quad (\times 2m_1) \\ m_2 g - m_1 g = -2m_1 a_3 - m_1 a_2 - m_2 a_2 \quad (\times m_3) \end{cases}$$

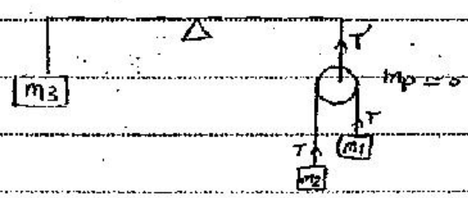
$$4m_1 m_2 g - 3m_1 m_3 g + m_2 m_3 g = -4m_1 m_2 a_2 - a_2 m_3 (m_1 + m_2)$$

$$4m_1 m_2 g - 3m_1 m_3 g + m_2 m_3 g = a_2(-4m_1 m_2 - m_1 m_3 - m_2 m_3) \Rightarrow a_2 = \frac{g(4m_1 m_2 - 3m_1 m_3 + m_2 m_3)}{-4m_1 m_2 - m_1 m_3 - m_2 m_3}$$

$$\mathrm{I} \Rightarrow 2m_2 g - m_3 g - 2m_2\left(\frac{g(4m_1 m_2 - 3m_1 m_3 + m_2 m_3)}{-4m_1 m_2 - m_1 m_3 - m_2 m_3}\right) = m_3 a_3$$

$a_3 =$

مثال:

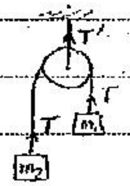


$m_1 + m_2 = m_3$

$m_1 \neq m_2$

$m_p \simeq 0$

m_1, m_2 زمانی نامتعادل نیست که $m_1 = m_2$ باشد

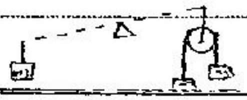


$$\Rightarrow T' = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$$

$$T' = T'_{max} \Leftarrow m_1 = m_2$$

که در این صورت $a = 0$

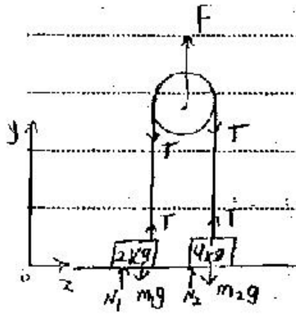
پس T' الان کمتر از T'_{max} است یعنی تعادل اهرم بهم می‌خورد و ترازو به سمت راست می‌رود



Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال: مسئله را در حالت‌های زیر حل کنید



حالت اول $F - 2T = m_p a_p \simeq 0$ $F = 30N$

$F = 2T$ $F = 50N$

$T = F/2$ حل کنید $F = 100N$

$g = 9.8\ m/s^2$ $T = 15N$

هیچکدام حرکت نمی‌کنند

حالت دوم $T = F/2 = 25$

$T - m_1 g = m_1 a_1$

$25 - 2 \times 9.8 = 2a_1 \Rightarrow a_1 = 2.7\ m/s^2 \uparrow$

$a_2 = 0$

$N_2 = ...$

حالت سوم $T = F/2 = 50$

$T - m_1 g = m_1 a_1$

$50 - 2 \times 9.8 = 2a_1$

$\boxed{a_1 = 15.2}$

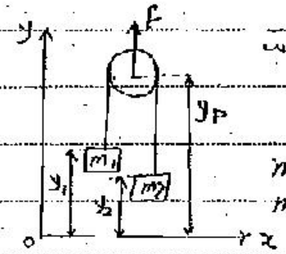
$T - m_2 g = m_2 a_2$

$50 - 4 \times 9.8 = 4a_2$

$\boxed{a_2 = 2.7}\ m/s^2$

در حالت ۳ که $F = 100N$ است شتاب قرقره را نسبت به زمین و شتاب جرم‌ها را نسبت به قرقره بدست آورید

دستگاه مختصات را نمی‌توانیم روی قرقره اختیار کنیم چون قرقره دارای شتاب است



طول نخ ثابت است ← $(y_p - y_1) + (y_p - y_2) = Const$

$2y_p - y_1 - y_2 = Const$

$m_1 = 2kg$ $2\dot{y}_p - \dot{y}_1 - \dot{y}_2 = 0$

$m_2 = 4kg$ $2\ddot{y}_p - \ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 = 0$

از راه دینامیک حل نمی‌شود از سینماتیک حل کردیم

$2a_p - a_1 - a_2 = 0$

دینامیک: $F - 2T = m_p a_p \simeq 0$

$$a_p = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{15.2 + 2.7}{2} = 8.95 \simeq 9\ m/s^2$$

$$a_{m_1/E} = a_{m_1/P} + a_{P/E}$$

$a_1 = a_1' + a_p \Rightarrow 15.2 = a_1' + 8.95$

$a_1' = 6.25\ m/s^2 \uparrow$

$a_2 = a_2' + a_p \Rightarrow 2.7 = a_2' + 8.95$

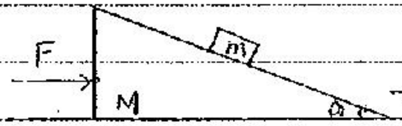
$a_2' = -6.25 \downarrow$

شتاب‌های نسبی با هم برابر است

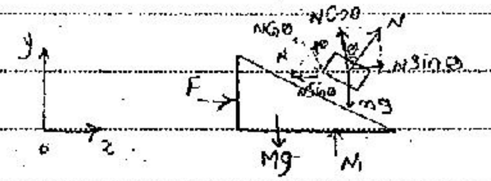
PILAVARAN

PAGE:

کاربردهای قوانین نیوتن:



مثال: این گوه با چه شتابی حرکت کند تا جسم m روی گوه ساکن باقی بماند



حرکت m
$$\begin{cases} \sum F_x = N\sin\theta = ma_x \\ \sum F_y = N\cos\theta - mg = ma_y \end{cases}$$

حرکت M
$$\begin{cases} \sum F_x = F - N\sin\theta = Ma \\ \sum F_y = N_1 - N\cos\theta - Mg = 0 \end{cases}$$

$$a_y = 0$$

که $a_x = a$ چون می‌خواهیم جسم m حرکت نکند (یعنی شتابش با شتاب گوه برابر باشه)

$$N\sin\theta = ma$$

$$N\cos\theta - mg = 0$$

$$\tan\theta = \frac{a}{g} \Rightarrow a = g\tan\theta$$

محاسبه F:

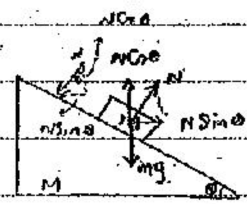
$$\begin{cases} F - N\sin\theta = Ma \\ N\sin\theta = ma \end{cases}$$

$$F = (m+M)\,g\tan\theta$$

چون m نسبت به M شتاب ندارد می‌توان هر دو را با هم یک جسم واحد در نظر گرفت.

اگر گوه را به حال خود رها کنیم چه اتفاقی می‌افتد.

در اینجا معادلات با $F = 0$ است.

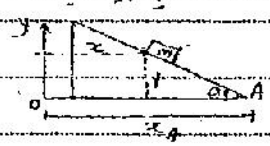


$$\begin{cases} N\sin\theta = ma_x \\ N\cos\theta - mg = ma_y \\ -N\sin\theta = Ma \\ a_y = \tan\theta\,(a - a_x) \end{cases}$$

← ۴ مجهول داریم و ۳ معادله، یک معادله کم داریم که باید از قید مسئله استفاده کنیم.

چون جسم m شتابی در y ندارد پس $a_y = 0$ ←

$$a = a_x$$



$$\tan\theta = \frac{y}{x_A - x}$$

$$y = \tan\theta\,(x_A - x)$$

$$\ddot{y} = \tan\theta\,(\ddot{x}_A - \ddot{x})$$

$$a_y = \tan\theta\,(a - a_x)$$

$$N\sin\theta = ma$$

$$-N\sin\theta = Ma$$

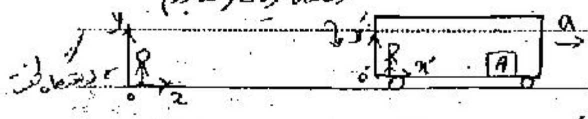
$$2N\sin\theta = (m - M)\,a$$

$$a = \frac{2N\sin\theta}{m - M}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

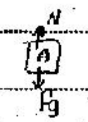
شبه نیروی لخت



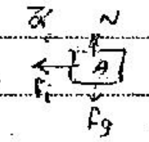
دستگاه غیرلخت (شتابدار)

دستگاه لخت

A از دید ناظر (دستگاه لخت) ساکن است و در آن با شتاب a حرکت می‌کند

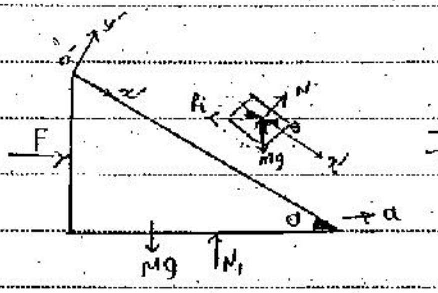


از دید ناظر (در دستگاه شتابدار) A با شتاب a' در جهت a حرکت می‌کند.



$\vec{F_i} = -m\vec{a} \Rightarrow |F_i| = m|\vec{a}|$ که بردار F_i در خلاف جهت بردار a است.

مسئله را از طریق شبه نیروی لخت حل کنید



در دستگاه m ساکن است: $f_i + N + mg = 0$

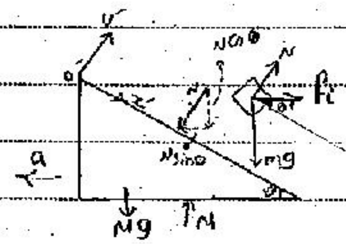
$$\begin{cases} \sum f_{x'} = mg\sin\theta - f_i\cos\theta = 0 \\ \sum f_{y'} = N - mg\cos\theta - f_i\sin\theta = 0 \end{cases}$$

$$mg\sin\theta - ma\cos\theta = 0$$

$$a = g\tan\theta$$

$$F = (m+M)a = (m+M)g\tan\theta$$

مسئله را با حالت خودش حل کنیم :



(جسم M حرکت می‌کند)

حرکت m از ناظر چسبیده به گوه

$$\begin{cases} \sum f_{x'} = f_i\cos\theta + mg\sin\theta = ma'_x \\ \sum f_{y'} = N - mg\cos\theta + f_i\sin\theta = ma'_y = 0 \end{cases}$$

در راستای y حرکتی نداریم ($a'_y = 0$)

از دید ناظر بیرونی گوه با شتاب a حرکت می‌کند.

حرکت گوه از دید ناظر لخت

$$\begin{cases} \sum f_x = -N\sin\theta = -Ma \\ \sum f_y = N_1 - Mg - N\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$N\sin\theta = Ma = \ldots$

$N\sin\theta - f_i = 0$

ادامه

Subject:

Year. 200 Month. Day.

شتاب m در راستای سطح شیب دار از: $ma\cos\theta + mg\sin\theta = ma'_x \Rightarrow a'_x = a\cos\theta + g\sin\theta$

در راستا عمود بر گوه:

$$\xrightarrow{\times\sin\theta}\begin{cases} N = mg\cos\theta - ma\sin\theta \\ N\sin\theta = Ma \end{cases} \Rightarrow Ma = mg\sin\theta\cos\theta - ma\sin^2\theta$$

شتاب بین زمین و گوه: $a = \dfrac{mg\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}$

مثال: از سطح زمین گلوله‌ای را با سرعت اولیه V_0 به بالا پرتاب می‌کنیم اگر شتاب حرکت گلوله در امتداد y در سطح زمین از رابطه زیر بدست می‌آید

$$a = \frac{g_0}{(1+\frac{y}{R})^2}$$

سرعت گلوله به صورت تابعی از y را بدست آورید

$$\vec{a} = \frac{-g_0}{(1+\frac{y}{R})^2}\hat{r} \qquad a = \frac{dv}{dy}\cdot\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v} \Rightarrow v\frac{dv}{dy} = \frac{-g_0}{(1+\frac{y}{R})^2}$$

$$\Rightarrow \int v\,dv = \int\frac{-g_0}{(1+\frac{y}{R})^2}dy \Rightarrow \int -v\,dv = \int\frac{g_0R^2}{(y+R)^2}dy$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}V_0^2 - \tfrac{1}{2}V^2 = g_0R^2\int_0^y\frac{dy}{(y+R)^2}$$

$$\tfrac{1}{2}V_0^2 - \tfrac{1}{2}V^2 = g_0R^2\left(\frac{1}{y+R}\right)\Big|_0^y$$

$$V^2 = 2g_0R^2\left(\frac{1}{y+R} - \frac{1}{R}\right) + V_0^2$$

اگر g ثابت فرض شود ارتفاع بیشینه را بدست آورید

ارتفاع: $v = 0 \Rightarrow V_0^2 = 2g_0R^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{y+R}\right)$

$$2g_0R - V_0^2 = \frac{2g_0R^2}{y+R} \Rightarrow y_{max} = \frac{RV_0^2}{2g_0R - V_0^2}$$

مثال: مکان ذره‌ای در مختصات قطبی با رابطه‌ی زیر داده شده، r برحسب m، t برحسب s، θ برحسب رادیان. سرعت و شتاب ذره در لحظه $t=1s$ بدست آورید. نام بردارهای سرعت و شتاب را بیابید.

$$r = t^3 - 2t^2 \qquad \theta = t^3 - 4t$$

Subject:

Year. 200   Month.   Day.

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta})^2\,\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\hat{\theta}$$

$$\vec{V} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\begin{cases} r = t^3 - 2t^2 \\ \theta = t^3 - 4t \end{cases} \Rightarrow \vec{V} = (3t^2 - 4t)\,\hat{r} + (t^3 - 2t^2)(3t^2 - 4)\,\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = \left(6t - 4 - (t^3 - 2t^2)(3t^2 - 4)^2\right)\hat{r} + \left(2(3t^2 - 4t)(3t^2 - 4) + (t^3 - 2t^2)\,6t\right)\hat{\theta}$$

به جای t عدد 1 را می‌گذاریم

مثال: از ارتفاع زیاد جسمی بدون سرعت اولیه رها می‌شود اگر نیروی مقاومت هوا ثابت فرض نشود با سرعت لحظه‌ای V متناسب باشد. الف) سرعت ذره به صورت تابعی از زمان ب) پس از چه مدت جسم به سرعت حدی می‌رسد؟
ج) پس از چه مدتی سرعت جسم به ۹۹٪ سرعت حدی می‌رسد؟ در این مدت جسم چه مسافتی را طی کرده است؟

$\downarrow +$ R, mg

$$R = -k\vec{V} \qquad * \int \frac{1}{x \pm a}\,dx = \ln|x \pm a|$$

$$\vec{F} = m\vec{g} - k\vec{V}$$

$$m\frac{dV}{dt} = -kV + mg \Rightarrow -dt = \frac{m\,dV}{kV - mg}$$

$$-dt = \frac{m}{k}\left(\frac{dV}{V - \frac{mg}{k}}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^t -dt = \int_0^V \frac{m}{k}\left(\frac{dV}{V - \frac{mg}{k}}\right) \Rightarrow -t = \frac{m}{k}\ln\left|V - \frac{mg}{k}\right|\Big|_0^V$$

$$\Rightarrow -t = m/k\,\ln\left|\frac{V - mg/k}{-mg/k}\right| = m/k\,\ln\left|1 - \frac{V}{mg/k}\right|$$

+ مثبت است این عبارت پس
خودش انتگرال طبیعی میشه

$$\frac{V}{mg/k} < 1$$

$$-t = m/k\,\ln\left(1 - \frac{V}{V_T}\right) \qquad \sum F = 0 \rightarrow -kV + mg = 0$$

$$V = V_T = \frac{mg}{k}$$

$$e^{-\frac{k}{m}t} = 1 - \frac{V}{V_T} \Rightarrow \frac{V}{V_T} = \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \qquad V < V_T \Rightarrow V < \frac{mg}{k}$$

$$V = V_T\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \qquad \frac{V}{mg/k} < 1$$

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-\frac{k}{m}t} \rightarrow 0 \Rightarrow V \rightarrow V_T$$

$$V=\frac{99}{100}V_T \Rightarrow \frac{99}{100}V_T=V_T(1-e^{-\frac{k}{m}t}) \Rightarrow e^{-\frac{k}{m}t}=\frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow -\frac{k}{m}t=Ln\frac{1}{100}=-4.6$$

$$t_1=\frac{m}{k}4.6$$

$$V=\frac{dy}{dt}=(1-e^{-\frac{k}{m}t})V_T \Rightarrow \int_H^y dy=V_T\int_0^t(1-e^{-\frac{k}{m}t})\,dt$$

$$\Delta y=V_T\left(t+\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right)\Big|_0^t$$

$$\Delta y=V_T\left(t+\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}-\frac{m}{k}\right)$$

$$t=t_1=\frac{m}{k}Ln\frac{1}{100} \qquad \Delta y=V_T\left(-Ln\frac{1}{100}\,\frac{m}{k}+\frac{m}{k}e^{-Ln\frac{1}{100}}-\frac{m}{k}\right)$$

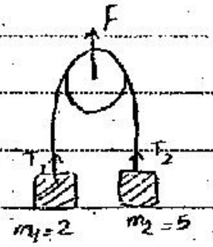
$$\Delta y=\frac{m}{k}V_T(4.6+100-1)$$

$$\Delta y=103.6\,\frac{m}{k}V_T$$

مثال: اگر سرعت ذره‌ای به جرم 4kg در لحظات مختلف مطابق زیر باشد برآیند نیروهای وارد بر آن را تعیین کنید

$t=0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

$V=2 \quad 5 \quad 8 \quad 11 \quad 14 \Rightarrow V=3t+2 \Rightarrow a=3$



مثال: شتاب وزنه‌ها را حساب کنید اگر $F=35\,N$

$F=70\,N$

$F=140\,N$

$$\begin{cases} m_1g-T_1=m_1a_1 \\ m_2g-T_2=m_2a_2 \\ F=T_1+T_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1(g+a_1)=T_1 \\ m_2(g+a_2)=T_2 \end{cases} \Rightarrow F=T_1+T_2$$

$$F=m_1(g+a_1)+m_2(g+a_2)$$

$$\Rightarrow F-7g=2a_1+5a_2$$

اگر $F=35\,N \therefore F<7g$ یا $F=7g$

هیچ‌یک از دو جسم بلند نمی‌شوند (هیچ‌کدام از روی زمین بلند نمی‌شوند)

Subject:

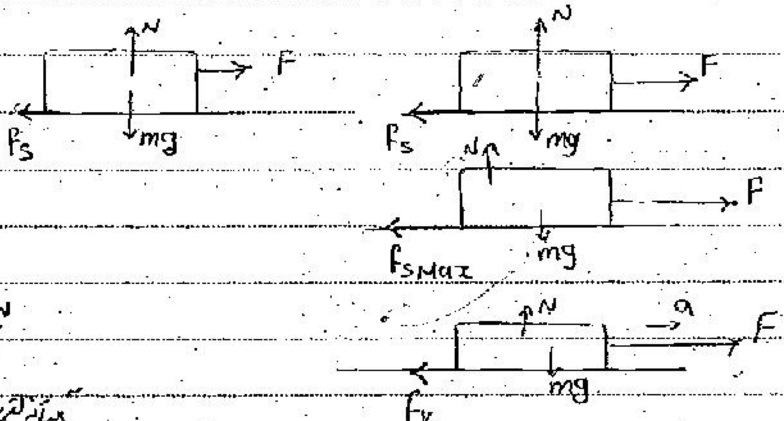
Year. 200 Month. Day.

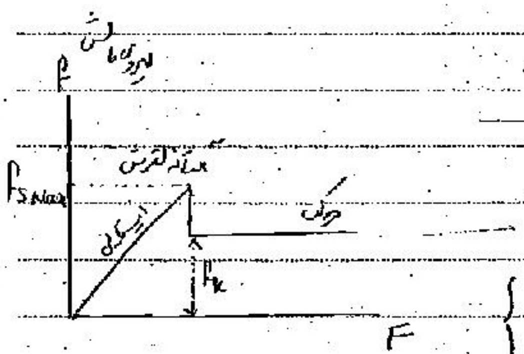
$F = 140\,N \Rightarrow 70 = (2a_1 + 5a_2)$

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \\ m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20 - T_1 = 2a_1 \\ 50 - T_2 = 5a_2 \\ T_1 + T_2 = 140 \Rightarrow T_2 = 140 - T_1 \end{cases}$$

$70 + 2a_1 = 5a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{70 + 2a_1}{5} \Rightarrow a_1, a_2 \ldots$

حالت ۱





$$\begin{cases} f_s \le \mu_s N \\ f_{sMax} = \mu_s . N \end{cases} \qquad f_k = \mu_k . N$$

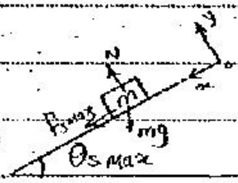
نیروی اصطکاک جنبشی

ضریب اصطکاک ایستایی

ثابت عددی / بستگی به جنس سطوح دارد

$\mu_s > \mu_k$

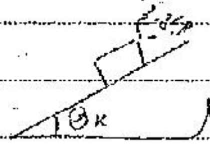
نیروی اصطکاک به مساحت سطح تماس وابسته نیست بلکه به N بستگی دارد $\mu_s . N$



$\sum F_x = mg\sin\theta_s - f_{s\,Max} = 0$ آستانه حرکت

$\sum F_y = N - mg\cos\theta_s = 0$

$mg\sin\theta_s - \mu_s mg\cos\theta_s = 0 \Rightarrow \mu_s = \tan\theta_s$



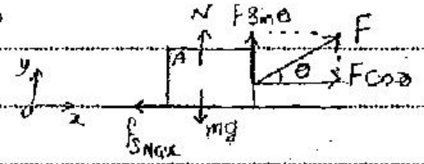
$\mu_k = \tan\theta_k$

θ_k را اگر از θ_s کمتر کنیم، فرض می‌کنیم

حرکت کند، حرکت یکنواخت است

در شکل مقابل θ را چنان تعیین کنید که برای به حرکت درآوردن جسم A کمترین نیرو لازم باشد

ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و تکیه‌گاه $= \mu_s$



$\sum F_y = 0$

$N + F\sin\theta - mg = 0$

$N = mg - F\sin\theta$

$\sum F_x = 0$ در آستانه حرکت (تعادل دارد)

$F\cos\theta - f_{sMax} = 0$

$F\cos\theta - \mu_s(mg - F\sin\theta) = 0$

$F = \dfrac{\mu_s mg}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta}$

برای اینکه A ماکزیمم باشد باید مشتق آن صفر باشد

$A = \cos\theta + \mu_s \sin\theta$

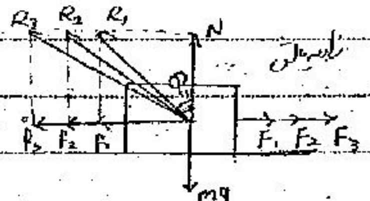
$\dfrac{dA}{d\theta} = -\sin\theta + \mu_s\cos\theta = 0$

$\mu_s \cos\theta = \sin\theta$

$\mu_s = \tan\theta$

$\theta = \tan^{-1}\mu_s$

برای اینکه F مینیمم باشد باید مخرج آن ماکزیمم باشد.



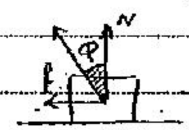
زاویه اصطکاک

زاویه φ زاویه بین واکنش تکیه‌گاه و عمود است

زاویه φ با اصطکاک و واکنش تکیه‌گاه رابطه مستقیم است

مثلثی مابین واکنش تکیه‌گاه و نیروی اصطکاک می‌گویند

زاویه‌ای که واکنش تکیه‌گاه با خط قائم خود می‌سازد را زاویه اصطکاک می‌گوییم

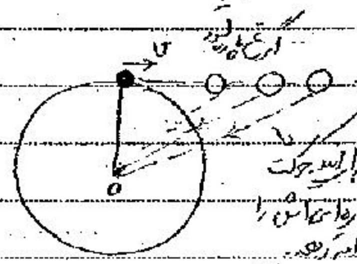


$\tan\varphi = \dfrac{f}{N}$

$\tan\varphi_k = \dfrac{\mu_k N}{N} = \mu_k$ (در حین حرکت)

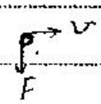
$\tan\varphi_s = \dfrac{f_{sMax}}{N} = \mu_s$

دینامیک حرکت دایره‌ای



$F = ma \qquad a = \dfrac{v^2}{r}$

$F = m\dfrac{v^2}{r}$

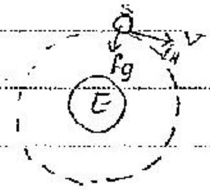


برای اینکه در یک حرکت دایره‌ای داشته باشیم باید یک نیرویی عمود بر آن وارد کنیم

یا F باید به شکلی باشد که مؤلفه‌ای آن عمود بر v باشد.

Subject:

Year.200 Month. Day.



چون f_g در راستای شعاعی است اما سرعت آن افقی است (H) پس این ماهواره همواره در
حال سقوط آزاد است و شتاب آن شتاب ثقل است.

یک ماهواره مخابراتی را در چه ارتفاعی از سطح زمین در مدار قرار دهیم تا ناظر زمینی آن را ساکن ببیند

$$f_g = m\frac{v^2}{r} = mr\omega^2$$

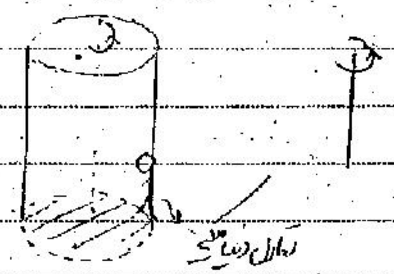
$$\frac{GmM}{r^2} = mr\omega^2 \Rightarrow r^3 = \frac{GM}{\omega^2} \Rightarrow r^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2}$$

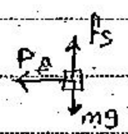
$$r^3 = \frac{g_0 R_E^2}{4\pi^2} \cdot T^2$$

$$r^3 = \frac{9.8 \times (6.4\times 10^6)^2}{4\pi^2}(86400)^2 \simeq (73)^{1/3} \times 10^7 \, m$$

$$\simeq 4.2 \times 10^7 \simeq 42000 \, km$$

(ارتفاع از زمین) $h = 42000 - R_E =$





$$\begin{cases} P = ma = m\frac{v^2}{r} = mr\omega^2 \\ mg - f_{sMax} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{sMax} = \mu_s P \\ P = mr\omega^2 \end{cases}$$

$$mg - \mu_s P = 0$$

(هر چیزهایی که روی کره زمین هستند تعادل نسبی دارند زیرا چون خود کره زمین در حال دوران است)

هر چه شعاع دوران بیشتر باشد راحت تر می توان به تعادل رسید.

$$\omega^2 = \frac{g}{\mu_s r} \Rightarrow \omega_{min} = \sqrt{g/\mu_s \cdot r}$$

اگر ω زیاد شود به تبع آن فشار بیشتری وارد می شود.

PILAVARAN

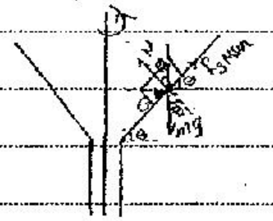
PAGE:

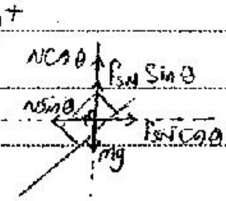
Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال. جسم کوچکی روی سطح داخلی قیف قرار می‌دهیم. قیف را حول محور قائم به دوران درمی‌آوریم. حدود ω را چنان تعیین کنید که جسم نسبت به سطح قیف ساکن بماند.

ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و قیف $= \mu_s$





$\omega_{Min} \ldots\ldots \omega_{Max}$

$$\sum F_{\perp} = N\sin\theta - f_{sMax}\cos\theta = mr\omega^2$$

عمود بر راستای شعاع در

$$\sum F_{\parallel} = N\cos\theta + f_{sMax}\sin\theta - mg = 0$$

موازی محور دوران

$$\Rightarrow \begin{cases} N\sin\theta - \mu_s N\cos\theta = mr\omega_{min}^2 \\ N\cos\theta + \mu_s N\sin\theta = mg \end{cases}$$

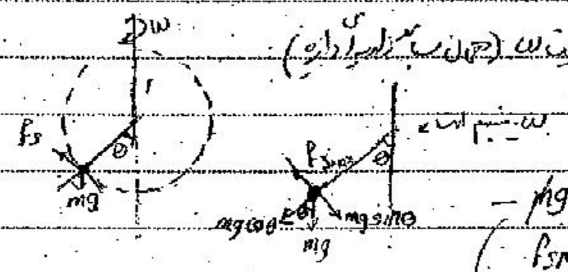
$$\frac{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta} = \frac{r}{g}\omega_{min}^2$$

$$\omega_{min} = \left(\frac{\tan\theta - \mu_s}{1 + \mu_s\tan\theta} \times \frac{g}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_{Max} = \left(\frac{\tan\theta + \mu_s}{1 - \mu_s\tan\theta} \times \frac{g}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$$ در ω_{Max} نیرو رو به بالا، اصطکاک رو به پایین است چون میل به بالا رفتن می‌شود

مثال: حداقل ω چقدر باشد تا زاویه θ حفظ شود؟

برای اینکه θ حفظ شود باید جسم m یک حرکت دایره‌ای با سرعت ω (حول محور قائم) داشته باشد.



$$-mg\cos\theta = mr\omega^2$$

$$f_{sMax} = mg\sin\theta \Rightarrow \mu_s\, mg\cos\theta = mg\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\mu_s}\sin\theta$$

$$g\cos\theta = r\omega^2$$

$$g\cdot\frac{1}{\mu_s \cdot r}\cdot\sin\theta = \omega_{min}^2 \Rightarrow \omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{\mu_s \cdot r}\sin\theta}$$

PILAVARAN

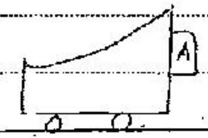
PAGE:

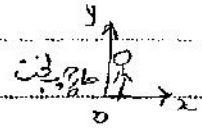
Subject:

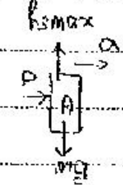
Year. 200 Month. Day.

مثال: در شکل مقابل ارابه با چه شتابی حرکت کند که جسم A روی بدنه‌ی ارابه به پایین نلغزد

ضریب اصطکاک ایستایی بین ارابه و جسم μ_s







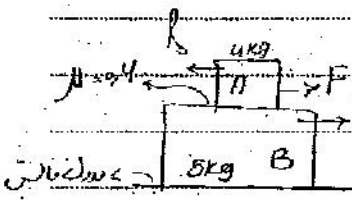
$\sum f_x = P = ma$

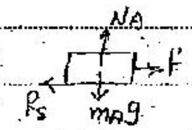
$\sum f_y = f_{s\max} - mg = 0 \quad$ و $\quad f_{s\max} = \mu_s P$

$$\left.\begin{aligned} P &= ma \\ \mu_s P &= mg \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\mu_s} = \frac{a}{g} \quad \text{و} \quad a = \frac{g}{\mu_s}$$

$a \geq \frac{g}{\mu_s}$ اگر شتاب ارابه کمتر باشد جسم پایین می‌لغزد

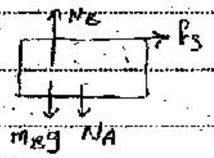
مثال: در مسئله‌ی زیر به ازای F مقادیر زیر را حساب کنید. حرکت را بدست آورید.





$F = 20 , 28.8 , 40$

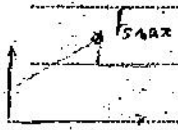
$g = 10$



در آستانه لغزش A روی B نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه خواهد بود

$f_{s\max} = \mu_s N_A = \mu_s m_A g$

$= 0.4 \times 4 \times 10 = 16\ N$



$\sum F_x = f_{s\max} = m_B a_B$

$16 = 5 \times a_B \Rightarrow a_B = \frac{16}{5} = 3.2\ m/s^2$

چون دو جسم با هم حرکت می‌کنند پس

$\sum F_x = F - f_{s\max} = m_A a_A \qquad a_B = a_A = 3.2\ m/s^2$

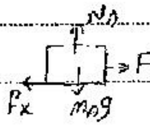
$F - 16 = 4 \times 3.2$

ماکسیمم نیرویی می‌تواند وارد کرد تا دو جسم با هم حرکت کنند $F = 28.8\ N$

حالت ۱: $20 < 28.8$ پس دو جسم با هم حرکت می‌کنند و $a = \frac{20}{4+5} = 2.2\ m/s^2$, $f_s = 11\ N$

حالت ۲: $28.8 = 28.8$ دو جسم با هم حرکت می‌کنند ولی A , $f_s = 16$
در آستانه لغزش روی B است.

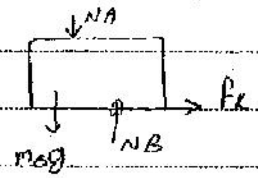
حالت ۳: $40 > 28.8$ A روی B می‌لغزد و هر کدام شتاب جداگانه‌ای دارند.



$f_k = \mu_k N = 0.4 \times 4 \times 10$
$= 16\ N$

$F - f_k = m_A a_A$

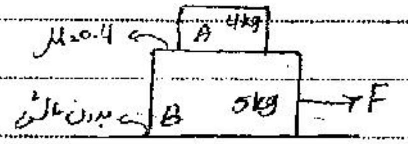
$40-16 = 4a_A \Rightarrow a_A = 6\ m/s^2$

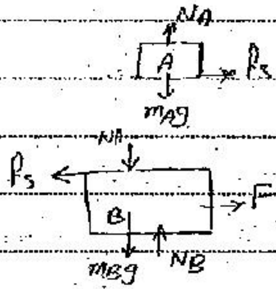


$f_k = m_B a_B$

$a_B = \frac{16}{5} = 3.2\ m/s^2$

در مسئله فوق اگر نیروی F به جسم B اثر کند مسئله را از نو حل کنید.
حداکثر نیرویی که می توان به جسم B اثر داد تا دو جسم با هم حرکت کنند.





در آستانه لغزش بین دو جسم:

$f_{s\,max} = \mu_s N$

$= 0.4 \times 4 \times 10 = 16\ N$

$f_{s\,max} = m_A a_A$

$16 = 4a_A \Rightarrow a_A = 4\ m/s^2$

$a_A = a_B = 4\ m/s^2$ چون دو جسم با هم حرکت می کنند

$F - f_{s\,max} = m_B a_B$

$F - 16 = 5 \times 4 \Rightarrow F = 36\ N$ حداکثر نیروی لازم

حالت اول، $F = 20N$ $\quad 20 < 36$ دو جسم با هم حرکت می کنند و شتاب یکسان دارند $\rightarrow a = \frac{20}{4+5} = 2.2\ m/s^2$

حالت دوم، $F = 28.8\ N$ $\quad 28.8 < 36$ $\rightarrow a = \frac{28.8}{4+5} = 3.2\ m/s^2$

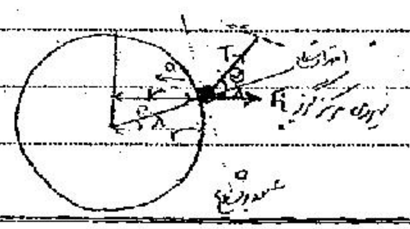
حالت سوم، $F = 40\ N$ $\quad 40 > 36$ هر یک از دو جسم شتاب های مختلفی دارند زیرا نمی توان آن ها را یک جسم فرض کرد.

حالت سوم: $f_k = m_A a_A$

$16 = 4a_A \Rightarrow a_A = 4\ m/s^2$

$F - F_k = m_B a_B \Rightarrow 40 - 16 = 5a_B \Rightarrow a_B = 4.8\ m/s^2$

مثال: به اثر دوران زمین خط شاقول با شعاع زمین زاویه ای که می سازد را در عرض جغرافیایی λ حساب کنید.



$\vec{T} + \vec{F_i} + m\vec{g} = 0$ از دید ناظر همراه زمین

$$\sum F_x = T\cos\theta - mg_0 + F_i\cos\lambda = 0$$
$$\sum F_y = T\sin\theta - F_i\sin\lambda = 0 \Rightarrow \tan\theta = \frac{F_i\sin\lambda}{mg_0 - F_i\cos\lambda}$$

$$F_i = mr\omega^2 = mR\cos\lambda\,\omega^2 \qquad \tan\theta = \frac{mR\omega^2\sin\lambda\cos\lambda}{mg_0 - mR\omega^2\cos^2\lambda}$$

$$\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}R\omega^2\sin 2\lambda}{g - R\omega^2\cos^2\lambda} \Rightarrow \theta \simeq \frac{\frac{1}{2}R\omega^2\sin 2\lambda}{g}$$

$$R\omega^2 = 6.4\times10^6\cdot\left(\frac{2\pi}{86400}\right)^2 \simeq 3\times10^{-2}$$

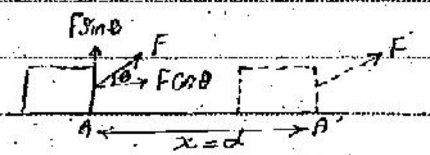
اگر $\lambda = 45^\circ \Rightarrow \theta \to \theta_{max}$

$$\theta_{Max} = \frac{R\omega^2}{2g} \Rightarrow \theta_{Max} = \frac{6400\times10^3\left(\frac{2\pi}{86400}\right)^2}{2\times9.8}$$

$$\simeq 0.1^\circ$$

کار انرژی

تعریف کار

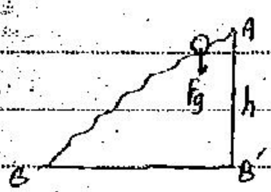


$$W = F_x \cdot d = F\cos\theta \cdot d$$

مقدار جابجایی × تصویر نیرو در راستای جابجایی = کار

$$W = Fd\cos\theta$$

تصویر جابجایی بر نیرو × نیرو = کار



$$W = F_g \times AB' = F_g h = mgh$$

$\theta < 90 \quad W > 0$

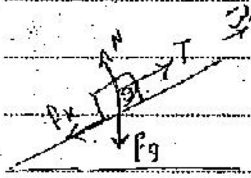
$\theta > 90 \quad W < 0$

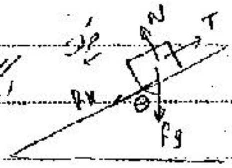
$\theta = 90 \quad W = 0$

بالا

اگر آرام بکشیم

پایین





$W_T < 0$

$W_{Fg} > 0$

$W_N = 0$

$W_{Fg} < 0 \quad W_T > 0$

$W_N = 0$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

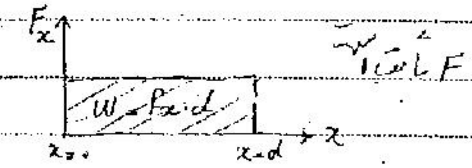
اگر نیرو ثابت باشد ← $\vec{W} = \vec{F} \cdot \vec{d}$

ضرب عددی

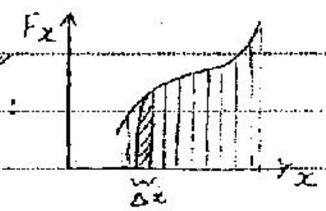
واحد کار = واحد نیرو × واحد جابجایی

$1N.m = 1N \times 1m \rightarrow 1N.m = 1J$

F ثابت است



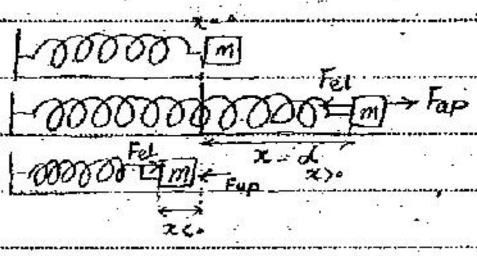
اگر F ثابت نباشد:



$\Delta W = F_x \cdot \Delta x$

$W = \sum_{i=1}^{N} F_x \Delta x_i \xrightarrow{N\to\infty} W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx =$ سطح زیر منحنی نیرو بر حسب جابجایی

کار نیروی فنر



$F_{el} = -kx$

k ← ضریب سختی فنر

x ← تغییر طول فنر نسبت به حالت آزاد فنر

$k = -\frac{F_{el}}{x} \quad N/m$

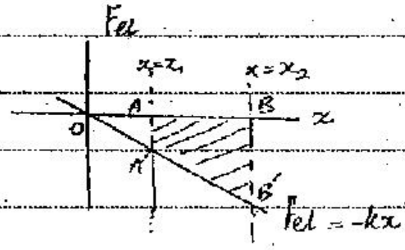
$k = 100\, N/m$ اگر جسم فنر را 1m بکشیم 100 نیوتن نیرو لازم است.

$$W_{el} = \int_{x_1}^{x_2} F_{el}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} -kx\, dx = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

کار نیروی کشسانی فنر ③ $W_{el} = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$

$x_1 = 0 \quad x_2 = x$

$W_{el} = -\frac{1}{2}kx^2$



$S_{ABA'B'} = S_{OBB'} - S_{OAA'}$

$= \frac{OB \times BB'}{2} - \frac{OA \times AA'}{2}$

$W = S_{ABB'A'}$

$= \frac{x_2 \times kx_2}{2} - \frac{x_1 \times kx_1}{2}$

$= \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$

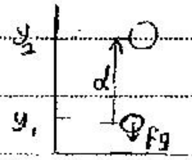
Subject:

Year.200 Month. Day.

کار نیروی گرانش

g ثابت فرض شود

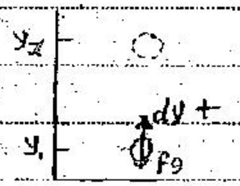
زمین و g را ثابت فرض می‌کنیم که جابجایی زیاد نباشد که موجب تغییر g شود.



$W = -F_g \cdot d = -mg(y_2 - y_1)$

$y_2 < y_1 \rightarrow W > 0$

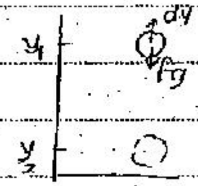
$y_1 < y_2 \rightarrow W < 0$



$W = \int_{y_1}^{y_2} F_g\, dy = -mg \int_{y_1}^{y_2} dy = -mg(y_2 - y_1) < 0$

$y_2 > y_1$

dx, dz, dy را در راستای مثبت باشد

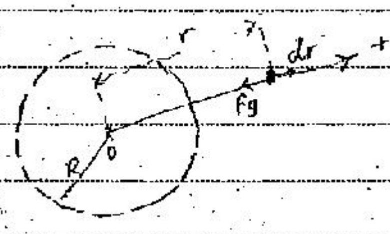


$W = \int_{y_1}^{y_2} F_g\, dy = -mg \int_{y_1}^{y_2} dy$

$= -mg(y_2 - y_1) > 0$

$y_1 > y_2$

جسم را به فاصله r از مرکز زمین در نظر بگیریم و بخواهیم وقتی در جهت r زمین جابجا شود کار را بیابیم.



$W = \int_1^2 \vec{F_g} \cdot \vec{dr} = \int_{r_1}^{r_2} -\frac{GmM}{r^2}\, dr$

$W = GmM \int_{r_1}^{r_2} -\frac{dr}{r^2}$

$W = GmM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$

$r_2 > r_1 \rightarrow W < 0$

$r_1 < r_2 \rightarrow W > 0$

فرض $r_1 = r, \quad r_2 = r + \Delta r$

جابجایی زیاد باشد $\Delta r \ll r \rightarrow W = GmM\left(\frac{1}{r+\Delta r} - \frac{1}{r}\right)$

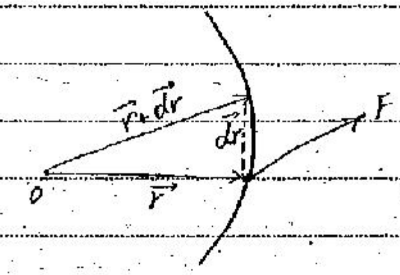
$W = GmM\left(\frac{r - r - \Delta r}{r(r+\Delta r)}\right)$

$$W = GmM\left(\frac{-\Delta r}{r(r+\Delta r)}\right) \quad \text{پس} \quad W = -\frac{GmM}{r^2}(\Delta r)$$

$$r(r+\Delta r) = r^2\left(1+\frac{\Delta r}{r}\right) \simeq r^2 \qquad W = -F_g(\Delta r)$$

$$W = -mg\,(y_2 - y_1)$$

محاسبه کار در حالت کلی



$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_s\, ds$$

$$W = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$W = \int_1^2 (F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k})(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y\,dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z\,dz$$

توان: آهنگ انجام کار

توان متوسط $\bar{P} = \dfrac{\Delta W}{\Delta t} \qquad j/s = W$ (وات)

توان لحظه‌ای $P = \dfrac{dW}{dt} = \dfrac{F\cdot dr}{dt} = \vec{F}\cdot\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$ پس $P = \vec{F}\cdot\vec{V}$

$1\,HP = 550 \quad = 746$ wat
(اسب بخار)

$1\,cv = 75\,kgf\ m/s \simeq 736$ wat
(کیلوگرم نیرو)

$1\,kwh = 1\,kw \times 1h$
$= 10^3\, j/s \times 3600\,s = 36\times 10^5\, j = 3600\, kj$

قضیه کار و انرژی

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{F}\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot dr$$

$$\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 m\, d\vec{v}\cdot\vec{v}$$

$$W = \frac{1}{2}(mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2)$$

$$W = K_2 - K_1$$

کار کل = تغییرات انرژی جنبشی $\Leftarrow$ $W = \Delta K$

$$\vec{V}\cdot\vec{V} = V^2 \Rightarrow \vec{V}d\vec{V} + \vec{V}\cdot d\vec{V} = 2VdV$$

$$2\vec{V}\cdot d\vec{V} = 2VdV$$

$$\int \vec{V}\cdot d\vec{V} = \int VdV \Rightarrow \int \vec{V}\cdot d\vec{V} = \frac{1}{2}V^2 + C$$

مثال: ذره‌ای تحت نیروی زیر مسیر دایره‌ای را در صفحه xoy طی می‌کند. اگر مرکز دایره در مبدأ مختصات واقع بوده و شعاع دایره 3 واحد فرض شود، کار نیروی $\vec{F}$ را در یک دور کامل در جهت مثلثاتی به دست آورید. ج: $W = 18\pi$

$$\vec{F} = (2x - y + z)\hat{i} + (x + y + z^2)\hat{j} + (3x - 2y)\hat{k}$$

$r = 3$

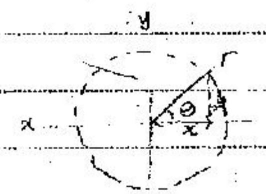
$z = 0 \Rightarrow \vec{F} = (2x - y)\hat{i} + (x + y)\hat{j} + (3x - 2y)\hat{k}$

چون در صفحه xoy دایره را طی می‌کند

$z =$ ثابت $\Rightarrow dz = 0$

$$W = \int F_x dx + \int F_y dy + \int F_z dz$$

$$W = \int_1^2 (2x - y)dx + \int_1^2 (x + y)dy$$



$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$dx = -r\sin\theta\, d\theta$ $\quad$ $dy = r\cos\theta\, d\theta$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

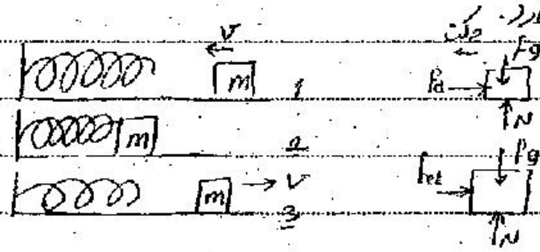
$$W=\int_0^{2\pi}(2r\cos\theta - r\sin\theta)(-r\sin\theta\, d\theta)+\int_0^{2\pi}(r\cos\theta , r\sin\theta)\, r\cos\theta\, d\theta$$

$$W=\int_0^{2\pi} -r^2(\sin 2\theta + \underbrace{\sin^2\theta}_{\frac{1-\cos 2\theta}{2}})\,d\theta+\int_0^{2\pi} r^2(\underbrace{\cos^2\theta}_{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}+\tfrac{1}{2}\sin 2\theta)\,d\theta$$

$r=3 \rightarrow W = 18\pi$

پتانسیل انرژی

- کار نیروی پایستار به مسیر حرکت بستگی ندارد.



$W_{1\to 2} = -\frac{1}{2}kx^2$

$W_{2\to 3} = +\frac{1}{2}kx^2$

$W_{کل} = -\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 0$

اصطکاک نیروی ناپایستار است.

$W_{کل} = \Delta K$

کار نیروی اصطکاک منفی است و موجب سیستم به صورت اتلاف انرژی شده است.

$\Delta K = 0 \Rightarrow K_1 = K_2$

پایستگی انرژی $U_1 + K_1 = U_2 + K_2$

$(K_2 - K_1) + (U_2 - U_1) = 0$

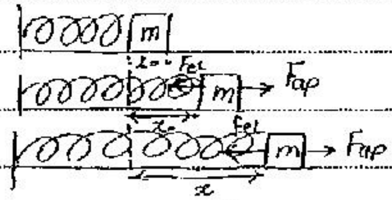
$\Delta K + \Delta U = 0$ اگر به صورت انرژی جنبشی کم شود

انرژی پتانسیل زیاد می‌شود تا حفظ شود یا بالعکس

انرژی پتانسیل نوعی از انرژی مکانیکی است که به مسیر حرکت بستگی ندارد بلکه به وضعیت جسم بستگی دارد.

$$\begin{cases}\Delta U + \Delta K = 0 & \text{مخصوص نیروهای پایستار}\\ W = \Delta K & \text{(برای همه نوع کار) کار کل}\end{cases} \Rightarrow \underbrace{\Delta U}_{\text{تغییر انرژی پتانسیل}} = -\underbrace{W}_{\text{کار نیروی پایستار}}$$

محاسبه انرژی پتانسیل یک فنر



$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F_{el}\, dx$$

$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} -kx\, dx$$

$$U(x) - U(x_0) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$$

قرارداد: اگر $\begin{cases} x_0 = 0 \\ U(x_0) = 0 \end{cases}$ انتخاب

در این صورت $U(x) - 0 = \frac{1}{2}kx^2$

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

اگر فنری را به اندازه‌ی x کشیده یا فشرده کنیم افزایش انرژی پتانسیل فرقی نمی‌کند (در هر دو حالت مثل هم است)

انرژی پتانسیل گرانشی

$$\Delta U = -W$$

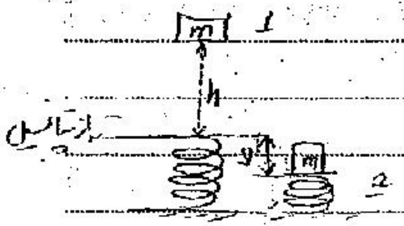
$$U_2 - U_1 = -(-mg(y_2 - y_1))$$

$$U_2 - U_1 = mg(y_2 - y_1)$$

قرارداد (در ابتدا) $\begin{cases} U_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ y_2 = h \end{cases}$

در این صورت $U_2 = mgy_2 = mgh$

مثال: در شکل زیر از جسم m رها شده حداکثر تراکم فنر را بیابید.



$$(U_{el} + U_g + k)_1 = (U_{el} + U_g + k)_2$$

$$0 + mgh + 0 = \frac{1}{2}ky^2 - mgy + \frac{1}{2}mv^2$$

$$ky^2 - 2mgy + mv^2 - 2mgh = 0$$

اگر $y = y_{Max} \to v = 0$

$$ky_{Max}^2 - 2mgy_{Max} - 2mgh = 0$$

$$y_{Max} = \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2kmgh}}{k}$$

Subject:

Year. 200   Month.   Day.

$$y_{Max} = \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k}}$$

سرعت ماکسیمم را هم بدست آورید.

mg

ky ← نیروی فنر

$$F_{net} = mg - ky$$

هم جهت حرکت می‌کند (هر چه y بیشتر باشد ky هم بیشتر است)

در حال تعادل سرعت ماکسیمم است ← $mg - ky = 0$

$$y = \frac{mg}{k}$$

می‌توانیم از معادله انرژی جسم v را بدست آوریم

$$ky^2 - 2mgy + mv^2 - 2mgh = 0 \longrightarrow v^2 = -\frac{k}{m}y^2 + 2g(y+h)$$

مشتق بگیریم : $$2v\frac{dv}{dt} = -\frac{2k}{m}y\frac{dy}{dt} + 2g\frac{dy}{dt}$$

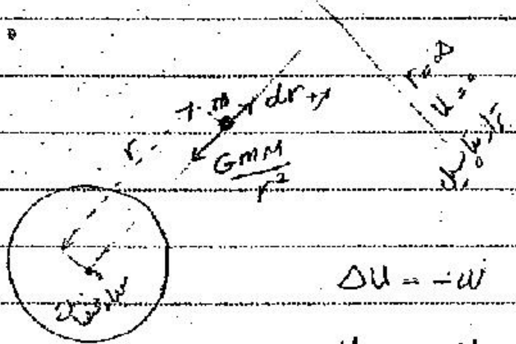
$$2\frac{dv}{dt} = -\frac{2k}{m}y + 2g$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}y + g = 0 \Rightarrow y = \frac{mg}{k}$$

به ازای $y = \frac{mg}{k}$ سرعت به بیشینه خود می‌رسد

$$v^2_{Max} = -\frac{k}{m}\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + 2g\left(\frac{mg}{k} + h\right)$$

زمان ماکسیمم در چه لحظه‌ای است؟



مثال: پتانسیل گرانشی جسم m را بیابید.

$$\Delta U = -W$$

$$U(r_0) - U(r) = \int_r^{r_0} \vec{F_g} \cdot \vec{dr}$$

$$U(r_0) - U(r) = -\int_r^{r_0} -\frac{GMm}{r^2} \cdot dr$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$U(r_0) - U(r) = -GmM \left| \frac{1}{r} \right|_r^{r_0}$$

$$U(r_0) - U(r) = -\frac{GmM}{r_0} + \frac{GmM}{r}$$

کاری که گرانش انجام می‌دهد تا از این نقطه به بی‌نهایت ببریم

قرارداد $\begin{cases} r_0 = \infty \\ U(r_0) = 0 \end{cases}$

$$U(r) = -\frac{GmM}{r}$$ (جرم m را) $r \geq R_e$

$$U_2 - U_1 = -\frac{GmM}{r_2} - \left(-\frac{GmM}{r_1}\right)$$

مبدا = مرکز زمین

انرژی پتانسیل = مقدار کار تا پتانسیل صفر است

$$U_2 - U_1 = GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$ اگر $r_2 = r + \Delta r$

$$U_2 - U_1 = GmM\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)$$ $r_1 = r$, $\Delta r \ll r$

$$U_2 - U_1 = \frac{GmM}{r^2}(r_2 - r_1)$$ $r_1 r_2 = r(r + \Delta r) = r^2\left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)$

$\Delta r \ll r \quad \simeq r^2$

$$U_2 - U_1 = mg(r_2 - r_1) \rightarrow r_2 - r_1 = y_2 - y_1$$

$$U_2 - U_1 = mg(y_2 - y_1)$$

مثال: جسمی به جرم m را از نقطه‌ای به فاصله r از مرکز زمین به بی‌نهایت ببریم. کار نیروی گرانش را در این جابه‌جایی بدست آورید و آن را با پتانسیل گرانشی جرم m در نقطه آغاز مقایسه کنید.

$$U(r) = G\frac{mM}{r} \qquad W = \int_1^2 \vec{F_g} \cdot d\vec{r}$$

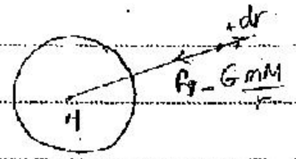
$$W = -\int_r^{\infty} \frac{GmM}{r^2}\, d\vec{r} \Rightarrow W = GmM\left[\frac{1}{r}\right]_r^{\infty}$$

$$W = GmM\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r}\right)$$

پتانسیل گرانشی جرم m در یک نقطه از میدان گرانشی برابر است با کاری که نیروی گرانشی روی جرم m انجام می‌دهد تا m از نقطه مورد نظر به بی‌نهایت برده شود.

$$W = -\frac{GmM}{r}$$

$$U(r) = -G\frac{mM}{r}$$



پتانسیل گرانشی جرم m در یک نقطه از میدان گرانشی برابر است با کاری که ما انجام می‌دهیم تا جرم m در شرایط تعادل از بی‌نهایت به نقطه مورد نظر آورده شود.

$$\Delta U = W$$

$$U_{(x)} - U_{(x_0)} = -W$$

از مشتق بگیریم $\quad dU_{(x)} - d\,U_{(x_0)} = -dW \;\Rightarrow\; dU_{(x)} = -F_x\,dx$

ثابت

$$* \; F_x = -\frac{dU_{(x)}}{dx} \; *$$

$$U_{el} = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad F_x = -\frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right)$$

$$F_x = -kx$$

$$U_r = -\frac{GmM}{r}$$

$$F_r = \frac{d}{dx}\left(\frac{GmM}{r}\right) \;\Rightarrow\; F_r = -\frac{GmM}{r^2}$$

هرگاه پتانسیل را داشته باشیم $U=U_{(x,y,z)}$ با استفاده از این می‌توان

$$F_{(x)} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$F = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U$$

مثال: نیروی پایستار است. (کار انجام شده را از نقطه $A(1,1,1)$ تا $B(2,2,2)$ بدست آورید)

$$U = \frac{2x^2}{y} + \frac{y^2}{2xz} + x^2y^2z^2$$

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{4x}{y} + \frac{y^2}{2zx^2} - 2y^2z^2x$$

کافیست U را در مختصات نقاط B و A قرار دهیم و آنها را از هم کم کنیم

$$F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = +2x^2\frac{1}{y^2} - \frac{y}{xz} - 2x^2z^2y$$

$$F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{y^2}{2xz^2} - 2x^2y^2z$$

$$\vec{F} = \left(\frac{-uz}{y} + \frac{y^2}{2x^2z} - 2xy^2z^2\right)\hat{i} + \left(\frac{2x^2}{y^2} - \frac{y}{xz} - 2x^2yz^2\right)\hat{j} + \left(\frac{y^2}{2xz^2} - 2x^2y^2z\right)\hat{k}$$

$$\Delta U = -W \Rightarrow W = -(U_B - U_A) \qquad A(1,1,1)$$

$$W = U_A - U_B \qquad B(2,2,2)$$

مثال؛ نشان دهید نیروی F پایستار است.

$$F = (y^2z^3 - 6xz^2)\hat{i} + 2xyz^3\hat{j} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\hat{k}$$

1. آیا می‌توان برای آن یک تابع پتانسیل بدست آورد

چون تابع پتانسیل مختص نیروهای پایستار است.

2. نشان دهید کار نیرو در مسیر دلخواه به مسیر بستگی ندارد

$$F_x = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u = -\int F_x\,dx \Rightarrow u = -\int (y^2z^3 - 6xz^2)\,dx$$

$$u = -y^2z^3x + 3x^2z^2 + C_1(y,z) \quad ①$$

$$F_y = -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow u = -\int F_y\,dy \Rightarrow u = -\int 2xyz^3\,dy$$

$$u = xy^2z^3 + C_2(x,z) \quad ②$$

$$F_z = -\frac{\partial u}{\partial z} \Rightarrow u = -\int (3xy^2z^2 - 6x^2z)\,dz$$

$$u = -xy^2z^3 + 3x^2z^2 + C_3(x,y) \quad ③$$

$$\text{فرض}\begin{cases} C_2(x,z) = 3x^2z^2 + C \\ C_1(y,z) = C_3(x,y) = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_① = -y^2z^3x + 3x^2z^2 + C \\ u_② = -xy^2z^3 + 3x^2z^2 + C \\ u_③ = -xy^2z^3 + 3x^2z^2 + C \end{cases}$$

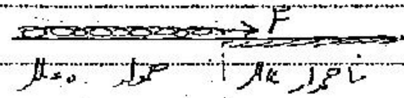
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}_{-F_y}\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{-F(x)}\Big) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}(F_y) = -\frac{\partial}{\partial y}(F_x)$$

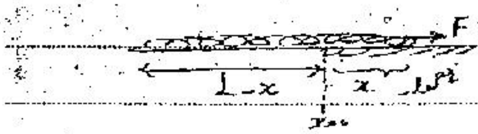
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial z}}_{-F_z}\Big) = \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial}{\partial x}(F_z) = -\frac{\partial}{\partial z}(F_x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big) = \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(F_z) = -\frac{\partial}{\partial z}(F_y)$$

$$\text{curl}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0$$

مثال: زنجیر همگنی به جرم واحد طول λ روی سطح افقی شامل یک بخش هموار (بدون اصطکاک) و یک بخش ناهموار به ضریب اصطکاک μ_k قرار دارد. یک سر این زنجیر با نیروی ثابت F کشیده می‌شود. اگر در آغاز تمام زنجیر روی سطح هموار ($x=0$) در حالت سکون باشد، در لحظه‌ای که تمام طول زنجیر روی سطح ناهموار منتقل می‌شود ($x=L$) سرعت زنجیر چقدر است؟





$$F - \mu_k g \lambda x = m\frac{dv}{dt}$$

$$F - \mu_k g \lambda x = \lambda L v \frac{dv}{dx}$$

$$\int_0^x (F - \mu_k g \lambda x)\,dx = \lambda L \int_0^v v\,dv$$

$$Fx - \frac{1}{2}\mu_k g \lambda x^2 \Big|_0^x = \frac{1}{2}\lambda L v^2$$

$$2Fx - \mu_k g \lambda x^2 = \lambda L v^2$$

$$v = \left(\frac{2Fx}{L\lambda} - \frac{\mu_k g x^2}{L}\right)^{1/2}$$

$$x = L \quad \rightarrow \quad v = \left(\frac{2F}{\lambda} - \mu_k g L\right)^{1/2}$$

سرعت حد:

تعریف: نیرویی که R تابعی از سرعت است.

$$\vec{mg} + \vec{R} = m\vec{a}$$

برای $\vec{R} = -k\vec{v}$ تابع سرعت $\qquad mg - kv = m\frac{dv}{dt}$

جهت $R = -kV$

اندازه $|R| = kV$

kV آنقدر زیاد می‌شود تا با mg برابر شود و

سرانجام $V = V_T$ برآیند نیروهای مؤثر بر جسم صفر شده و حرکت یکنواخت می‌شود (یعنی $a=0$) سرعت این حرکت را سرعت نهایی یا حد گویند.

Subject:

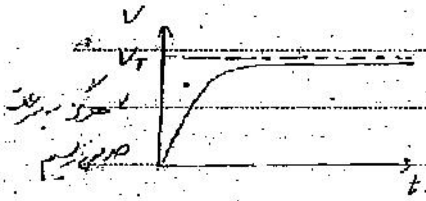
Year. 200 Month. Day.

$mg - kv_T = 0 \Rightarrow v_T = \frac{mg}{k}$

$\underbrace{mg}_{kv_T} - kv = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow kv_T - kv = m\frac{dv}{dt}$ [illegible]

$\Downarrow \quad \frac{dv}{v_T - v} = \frac{k}{m}dt$

$$\int_0^v \frac{-dv}{v_T - v} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt$$



$\log(v_T - v)\Big|_0^v = -\frac{k}{m}t$

$\log\frac{v_T - v}{v_T} = -\frac{k}{m}t \Rightarrow \frac{v_T - v}{v_T} = e^{-\frac{k}{m}t}$

$\Rightarrow 1 - \frac{v}{v_T} = e^{-\frac{k}{m}t} \Rightarrow v = v_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

$t = ?$

$v = v_T \Rightarrow v_T = v_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \Rightarrow t = \infty$

پس از چه مدت $v = 0.99v_T$ ؟

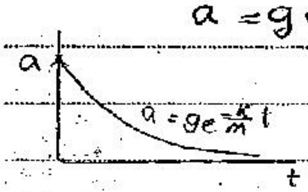
[illegible] $\frac{dv}{dt} = v_T(0 + \frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t})$

$0.99\cancel{v_T} = \cancel{v_T}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

$\frac{1}{100} = e^{-\frac{k}{m}t}$

$a = ge^{-\frac{k}{m}t}$

$\log 1 - \log 100 = -\frac{k}{m}t \Rightarrow t = \frac{\log 100}{k/m}$



$\frac{dy}{dt} = v_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

$dy = v_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t})dt \Rightarrow \int_0^y dy = v_T\int_0^t (1 - e^{-\frac{k}{m}t})dt$

[illegible] y [illegible]

$y = v_T(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t})\Big|_0^t$

$y = v_T(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t} - 0 - \frac{m}{k})$

$y = v_T(t + \frac{m}{k}(e^{-\frac{k}{m}t} - 1))$

$y = v_T(t + \frac{m}{k}(e^{-\frac{k}{m}t} - 1))$

$a = \frac{dv}{dt}$

$t = \infty \rightarrow y = \infty$

$t = 0 \rightarrow y = 0$

PILAVARAN

PAGE:

Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال. نشان دهید نیروی زیر پایستار است. (آنرا در دستگاه قطبی بیابید)

$\vec{F} = -2kx\hat{i} - 2ky\hat{j}$

$$F \text{ پایستار است } \Leftarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = 0 \qquad \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial z} = 0 \qquad \dfrac{\partial F_z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

پتانسیل

$$F_x = -\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \int F_x\,dx = -u$$

$$u = -\int -2kx\,dx \Rightarrow u = kx^2 + C_1(y,z) \quad ①$$

$$F_y = -\frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow \int F_y\,dy = -u \Rightarrow u = -\int -2ky\,dy$$

$$\Rightarrow u = ky^2 + C_2(x,z) \quad ②$$

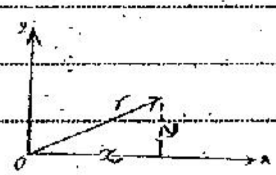
$$\begin{cases} ① \; u = kx^2 + C_1(y,z) \\ ② \; u = ky^2 + C_2(x,z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = kx^2 + ky^2 + C \\ u = kx^2 + ky^2 + C \end{cases} \Rightarrow \text{نیرو پایستار است}$$

$$C_1(y,z) = ky^2 + C$$

$$C_2(x,z) = kx^2 + C$$

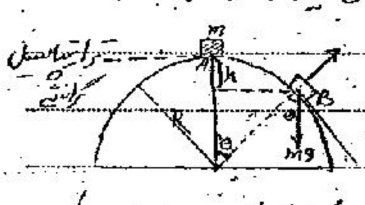
در دستگاه قطبی

$$u = k(x^2 + y^2) + C$$



$$u = kr^2 + C$$

مثال. فرض کنید مکعب کوچکی در بالای یک نیمکره قرار دارد. هرگاه آن را رها کنیم در کدام نقطه مکعب سطح کره را ترک می‌کند؟



$$\sum F_t = mg\sin\theta = ma_t \Rightarrow a_t = g\sin\theta$$

$$\sum F_r = mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{R}$$

در لحظه‌ای که m سطح کره را ترک کند : $N = 0$ $\qquad mg\cos\theta = \dfrac{mv^2}{R} \Rightarrow v^2 = gR\cos\theta \quad ①$

$h = R - R\cos\theta$

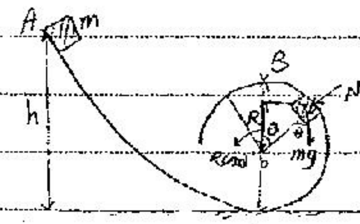
$$(U + k)_A = (U + k)_B$$

$$0 + 0 = -mgh + \tfrac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = 2gh \Rightarrow v^2 = 2g(R - R\cos\theta) \quad ②$$

$$\frac{①}{②} \text{ تقسیم } \begin{cases} v^2 = gR\cos\theta \\ v^2 = 2g(R - R\cos\theta) \end{cases} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$$

$$\theta = \operatorname{ArcCos} \tfrac{2}{3}$$



مثال: جرم m کی حلقه را ترک می‌کند

$$\Sigma F_r = mg\cos\theta + N = \frac{mv^2}{R}$$

در لحظه‌ای که m حلقه را ترک می‌کند $N=0$ و ⇐ $v^2 = gR\cos\theta$ (1)

پایستگی انرژی: $mgh + 0 = mg(R + R\cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2$

$$v^2 = 2gh - 2gR(1+\cos\theta) \quad (2)$$

$$\begin{cases} (1) & v^2 = gR\cos\theta \\ (2) & v^2 = 2gh - 2gR(1+\cos\theta) \end{cases} \Rightarrow gR\cos\theta = 2gh - 2gR(1+\cos\theta)$$

$$3gR\cos\theta = 2h - 2R$$

$$\cos\theta = \frac{2(h-R)}{3R}$$

حداقل h چقدر باشد تا جسم بتواند حلقه را دور بزند؟ یعنی باید از نقطه B عبور کند یعنی θ صفر باشد

$$\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{2(h-R)}{3R} \Rightarrow 1 = \frac{2h-2R}{3R} \Rightarrow 3R = 2h - 2R$$

$$5R = 2h \Rightarrow h \geq \frac{5}{2}R$$

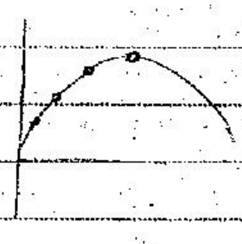
$$h = \frac{5}{2}R$$

اگر $h=2R$ باشد چه اتفاقی می‌افتد؟ مسلماً به نقطه اوج نمی‌رسد
(بدون سرعت اولیه از $h=2R$ رها شود کجا حلقه را ترک می‌کند)

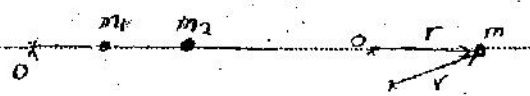
$h = 2R$

$\cos\theta = \frac{2(2R-R)}{3R}$ ⇐ $\cos\theta = \frac{2}{3}$

مرکز جرم



مثل این است که جرم در مرکز آن نقطه اثر کند.
یک نقطه‌ای ویژه در جسم که مسیر منحنی طی می‌کند.
بقیه نقاط جسم حرکت پیچیده‌ای دارند.



گشتاور اول جرم:

گشتاور اول جرم $= m.\vec{r}$
حاصلضرب بردار مکان در جرم جسم