Subject:

Year. 200 Month. Day.

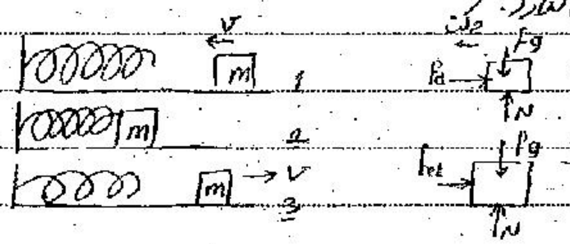
$$W=\int_0^{2\pi}(2r\cos\theta - r\sin\theta)(-r\sin\theta\, d\theta)+\int_0^{2\pi}(r\cos\theta , r\sin\theta)\, r\cos\theta\, d\theta$$

$$W=\int_0^{2\pi} -r^2(\sin 2\theta+\overbrace{\sin^2\theta}^{\frac{1-\cos 2\theta}{2}})\,d\theta+\int_0^{2\pi} r^2(\overbrace{\cos^2\theta}^{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}+\tfrac{1}{2}\sin 2\theta)\,d\theta$$

$r=3 \rightarrow W=18\pi$

پتانسیل انرژی

- کار نیروی پایستار به مسیر حرکت بستگی ندارد.



$W_{1\to 2}=-\frac{1}{2}kx^2$

$W_{2\to 3}=+\frac{1}{2}kx^2$

$W_{کل}=-\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}kx^2=0$

اصطکاک نیروی ناپایستار است. $\qquad W_{کل}=\Delta K$

کار نیروی اصطکاک منفی است و [illegible] $\qquad \Delta K=0 \Rightarrow K_1=K_2$

اتلاف انرژی شده است.

پایستگی انرژی $\quad U_1+K_1=U_2+K_2$

$(K_2-K_1)+(U_2-U_1)=0$

$\Delta K+\Delta U=0$ $\qquad$ اگر به صورت انرژی جنبشی کم شود

انرژی پتانسیل زیاد می‌شود تا حاصل صفر شود یا بالعکس

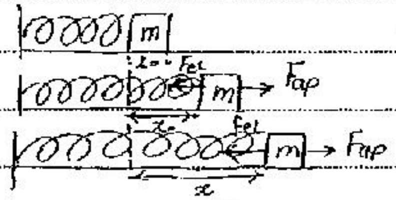
انرژی پتانسیل نوعی از انرژی است که به مسیر حرکت بستگی ندارد بلکه به وضعیت جسم بستگی دارد.

$$\begin{cases}\Delta U+\Delta K=0 & \text{مخصوص نیروهای پایستار}\\ W=\Delta K & \text{(برای همه نیروها) در همه}\end{cases}\Rightarrow \underbrace{\Delta U}_{\text{تغییر انرژی پتانسیل}}=-\underbrace{W}_{\text{کار نیروی پایستار}}$$

محاسبه انرژی پتانسیل یک فنر:

Subject:

Year. 200   Month.   Day.



$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F_{el}\,dx$$

$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} -kx\,dx$$

$$U(x) - U(x_0) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$$

قرارداد: $\begin{cases} x_0 = 0 \\ U(x_0) = 0 \end{cases}$ (انتخاب)

$U(x) - 0 = \frac{1}{2}kx^2$ (انرژی الاستیک)

$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$

اگر فنر را به اندازه‌ی x بکشیم یا فشرده کنیم افزایش انرژی پتانسیل فرقی نمی‌کند (در هر دو حالت مثل هم است)

انرژی پتانسیل گرانشی

$$\Delta U = -W$$

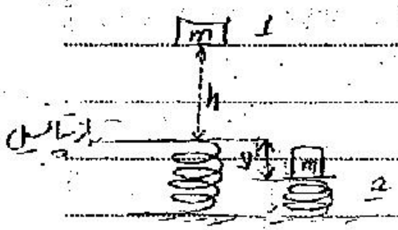
$$U_2 - U_1 = -(-mg(y_2 - y_1))$$

$$U_2 - U_1 = mg(y_2 - y_1)$$

قرارداد (در جاذبه) $\begin{cases} U_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ y_2 = h \end{cases}$

$U_2 = mgy_2 = mgh$ (انرژی پتانسیل)

مثال: در شکل زیر اگر جسم m رها شود حداکثر تراکم فنر را بیابید.



$$(U_{el} + U_g + k)_1 = (U_{el} + U_g + k)_2$$

$$0 + mgh + 0 = \frac{1}{2}ky^2 - mgy + \frac{1}{2}mv^2$$

$$ky^2 - 2mgy + mv^2 - 2mgh = 0$$

$$\text{if } y = y_{Max} \rightarrow v = 0$$

$$ky_{Max}^2 - 2mgy_{Max} - 2mgh = 0$$

$$y_{Max} = \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2kmgh}}{k}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$y_{Max} = \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k}}$$

سرعت ماکسیمم را هم بدست آورید.

mg ↓ ، ↑ ky ← نیروی فنر

مدام تغییر می‌کند (هرچه y بیشتر باشد ky هم بیشتر است)

$$F_{net} = mg - ky$$

$$mg - ky = 0 \leftarrow$$ در حال تعادل سرعت ماکسیمم است

$$y = \frac{mg}{k}$$

می‌توانیم از معادله قبل v را بدست آوریم

$$ky^2 - 2mgy + mv^2 - 2mgh = 0 \longrightarrow v^2 = -\frac{k}{m}y^2 + 2g(y+h)$$

مشتق بگیریم :

$$2v\frac{dv}{dt} = -\frac{2k}{m}y\frac{dy}{dt} + 2g\frac{dy}{dt}$$

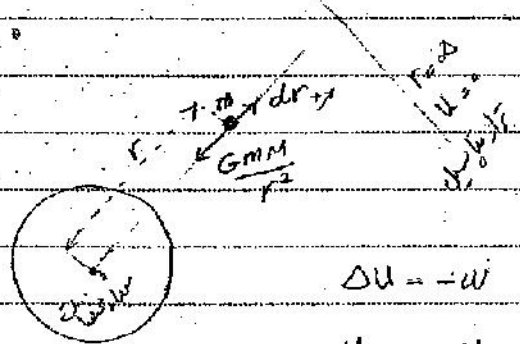
$$2\frac{dv}{dt} = -\frac{2k}{m}y + 2g$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}y + g = 0 \quad \Rightarrow y = \frac{mg}{k}$$

به ازای $y = \frac{mg}{k}$ سرعت به بیشینه خود می‌رسد.

$$v^2_{Max} = -\frac{k}{m}\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + 2g\left(\frac{mg}{k} + h\right)$$

زمان ماکسیمم در چه لحظه‌ای است؟



مثال: پتانسیل انرژی جسم m را بیابید.

$$\Delta U = -W$$

$$U_{(r_0)} - U_{(r)} = -\int_{r}^{r_0} \vec{F_g}\cdot\vec{dr}$$

$$U_{(r_0)} - U_{(r)} = -\int_{r}^{r_0} -\frac{GmM}{r^2}\,dr$$

PILAVARAN

PAGE:

$$U(r_0) - U(r) = -GmM\left|\frac{1}{r}\right|_r^{r_0}$$

$$U(r_0) - U(r) = -\frac{GmM}{r_0} + \frac{GmM}{r}$$

کاری که نیروی گرانش انجام می‌دهد تا از این نقطه به بی‌نهایت ببریم

قرارداد $\begin{cases} r_0 = \infty \\ U(r_0) = 0 \end{cases}$ $U(r) = -\frac{GmM}{r}$ (جرم m) $r \geq R_e$

$$U_2 - U_1 = -\frac{GmM}{r_2} - \left(-\frac{GmM}{r_1}\right)$$

مبدا = مرکز زمین

پتانسیل گرانشی = معادل انرژی پتانسیل جرم واحد

$$U_2 - U_1 = GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$ اگر $r_2 = r + \Delta r$

$$U_2 - U_1 = GmM\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)$$ $r_1 = r$, $\Delta r \ll r$

$$U_2 - U_1 = \frac{GmM}{r^2}(r_2 - r_1)$$ $r_1 r_2 = r(r + \Delta r) = r^2\left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)$, $\Delta r \ll r$ $\simeq r^2$

$$U_2 - U_1 = mg(r_2 - r_1) \rightarrow r_2 - r_1 = y_2 - y_1$$

$$U_2 - U_1 = mg(y_2 - y_1)$$

مثال: جسمی به جرم m را از نقطه‌ای به فاصله r از مرکز زمین به بی‌نهایت می‌بریم. کار نیروی گرانش را در این جابجایی بدست آورید و آن را با انرژی پتانسیل گرانشی جرم m در نقطه آغاز مقایسه کنید.

$U(r) = -G\frac{mM}{r}$ $\quad W = \int_1^2 \vec{F_g} \cdot d\vec{r}$

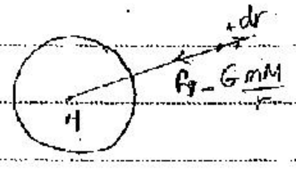
$$W = -\int_r^{\infty} \frac{GmM}{r^2}\, d\vec{r} \Rightarrow W = GmM\left[\frac{1}{r}\right]_r^{\infty}$$

$$W = GmM\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r}\right)$$

انرژی پتانسیل گرانشی جرم m در یک نقطه از میدان گرانش برابر است با کاری که نیروی گرانش روی جرم m انجام می‌دهد تا m از نقطه مورد نظر به بی‌نهایت برده شود.

$$W = -G\frac{mM}{r}$$

$$U(r) = -G\frac{mM}{r}$$



پتانسیل گرانشی جرم m در یک نقطه از میدان گرانش برابر است با کاری که ما انجام می‌دهیم تا جرم m در شرایط تعادل از بی‌نهایت به نقطه مورد نظر آورده شود.

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$\Delta U = -W$$

$$U_{(x)} - U_{(x_0)} = -W$$

مشتق می‌گیریم $dU_{(x)} - d(U_{(x_0)}) = -dW \Rightarrow dU_{(x)} = -F_x\,dx$

ثابت

$$* \; F_x = -\frac{dU_{(x)}}{dx} \; *$$

$$U_{el} = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad F_x = -\frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right)$$

$$F_x = -kx$$

$$U_r = -\frac{GmM}{r}$$

$$F_r = \frac{d}{dx}\left(\frac{GmM}{r}\right) \Rightarrow F_r = -\frac{GmM}{r^2}$$

هرگاه پتانسیل را برابر $U = U_{(x,y,z)}$ باشد داریم

$$F_{(x)} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$F = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{k}\right)$$

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} u$$

مثال: نیرو را بدست آورید. (کار انجام شده را از نقطه $A(1,1,1)$ به $B(2,2,2)$ بدست آورید)

$$u = \frac{2x^2}{y} + \frac{y^2}{2xz} + x^2y^2z^2$$

$$F_x = -\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{4x}{y} + \frac{y^2}{2zx^2} - 2y^2z^2x$$

کافیست پتانسیل را در نقاط A و B بدست آوریم و با یکدیگر تفریق کنیم

$$F_y = -\frac{\partial u}{\partial y} = +2x^2\frac{1}{y^2} - \frac{y}{xz} - 2x^2z^2y$$

$$F_z = -\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{y^2}{2xz^2} - 2x^2y^2z$$

Subject:

Year. 200   Month.   Day.

$$\vec{F} = \left(-\frac{4z}{y} + \frac{y^2}{2x^2z} - 2xy^2z^2\right)\hat{i} + \left(\frac{2x^2}{y^2} - \frac{y}{xz} - 2x^2yz^2\right)\hat{j} + \left(\frac{y^2}{2xz^2} - 2x^2y^2z\right)\hat{k}$$

$$\Delta U = -W \rightsquigarrow W = -(U_B - U_A) \qquad A(1,1,1)$$

$$W = U_A - U_B \qquad B(2,2,2)$$

مثال: نشان دهید نیروی F پایستار است.

$$F = (y^2z^3 - 6xz^2)\hat{i} + 2xyz^3\hat{j} + (3xy^2z^2 - 6x^2z)\hat{k}$$

1. آیا می‌توان برای آن یک تابع پتانسیل بدست آورد

چون تابع پتانسیل مشخص شد نیرو پایستار است.

2. نشان دهیم کار نیرو در مسیر دلخواه به مسیر بستگی ندارد

$$F_x = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$U = -\int F_x\,dx \rightsquigarrow U = -\int (y^2z^3 - 6xz^2)\,dx$$

$$U = -y^2z^3x + 3x^2z^2 + C_1(y,z) \quad ①$$

$$F_y = -\frac{\partial u}{\partial y} \rightsquigarrow U = -\int F_y\,dy \rightarrow U = -\int 2xyz^3\,dy$$

$$U = -xy^2z^3 + C_2(x,z) \quad ②$$

$$F_z = -\frac{\partial u}{\partial z} \rightarrow U = -\int (3xy^2z^2 - 6x^2z)\,dz$$

$$U = -xy^2z^3 + 3x^2z^2 + C_3(x,y) \quad ③$$

$$\text{فرض}\begin{cases} C_2(x,z) = 3x^2z^2 + C \\ C_1(y,z) = C_3(x,y) = C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_① = -y^2z^3x + 3x^2z^2 + C \\ U_② = -xy^2z^3 + 3x^2z^2 + C \\ U_③ = -xy^2z^3 + 3x^2z^2 + C \end{cases}$$

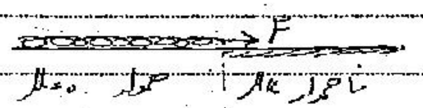
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\overbrace{\frac{\partial u}{\partial y}}^{-F_y}\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\overbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}^{-F(x)}\Big) \rightsquigarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}(F_y) = -\frac{\partial}{\partial y}(F_x)$$

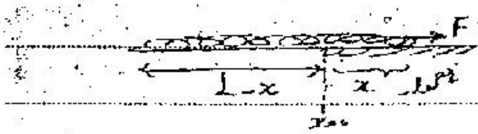
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\overbrace{\frac{\partial u}{\partial z}}^{-F_z}\Big) = \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big) \rightsquigarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x}(F_z) = -\frac{\partial}{\partial z}(F_x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big) = \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big) \rightsquigarrow \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(F_z) = -\frac{\partial}{\partial z}(F_y)$$

$$\operatorname{curl}\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0$$

مثال: زنجیر همگنی به جرم واحد طول λ روی سطح افقی شامل یک بخش هموار (بدون اصطکاک) و یک بخش ناهموار به ضریب اصطکاک μ_k قرار دارد. یک سر این زنجیر با نیروی ثابت F کشیده می‌شود. اگر در آغاز تمام زنجیر روی سطح هموار ($x=0$) در حالت سکون باشد، در لحظه‌ای که تمام طول زنجیر روی سطح ناهموار منتقل می‌شود ($x=L$) سرعت زنجیر چقدر است؟





$$F - \mu_k g \lambda x = m\frac{dv}{dt}$$

$$F - \mu_k g \lambda x = \lambda L\, v\frac{dv}{dx}$$

$$\int_0^x (F - \mu_k g \lambda x)\,dx = \lambda L \int_0^v v\,dv$$

$$Fx - \frac{1}{2}\mu_k g \lambda x^2 \Big|_0^x = \frac{1}{2}\lambda L v^2$$

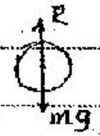
$$2Fx - \mu_k g \lambda x^2 = \lambda L v^2$$

$$v = \left(\frac{2Fx}{L\lambda} - \frac{\mu_k g x^2}{L}\right)^{1/2}$$

$$x = L \quad \rightarrow \quad v = \left(\frac{2F}{\lambda} - \mu_k g L\right)^{1/2}$$

سرعت حد:

نیروی مقاومتی R تابعی از سرعت است.



$$\vec{mg} + \vec{R} = m\vec{a}$$

برداری $\vec{R} = -k\vec{v}$ تابع سرعت $\qquad mg - kv = m\frac{dv}{dt}$

جبری $R = -kV$

اندازه $|R| = kV$

kV آنقدر زیاد می‌شود تا با mg برابر شود

سرانجام $V = V_T$ برآیند نیروهای مؤثر بر جسم صفر شده و حرکت یکنواخت می‌شود (یعنی $a=0$) سرعت این حرکت را سرعت نهایی یا حد گویند.

Subject:

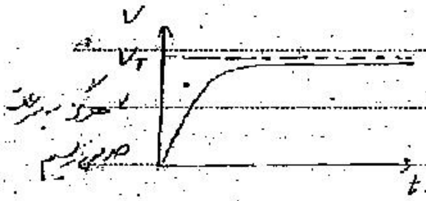
Year. 200 Month. Day.

$mg - kV_T = 0 \Rightarrow V_T = \frac{mg}{k}$

$\underbrace{mg}_{kV_T} - kV = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow kV_T - kV = m\frac{dv}{dt}$ [illegible]

$\Rightarrow \frac{dv}{V_T - V} = \frac{k}{m}\,dt$

$$\int_0^V \frac{-dv}{V_T - V} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt$$



$\log(V_T - V)\Big|_0^V = -\frac{k}{m}t$

$\log\frac{V_T - V}{V_T} = -\frac{k}{m}t \Rightarrow \frac{V_T - V}{V_T} = e^{-\frac{k}{m}t}$

$\Rightarrow 1 - \frac{V}{V_T} = e^{-\frac{k}{m}t} \Rightarrow V = V_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

$t = ?$

$V = V_T \Rightarrow V_T = V_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) \Rightarrow t = \infty$

پس از چه مدت $V = 0.99V_T$ ؟

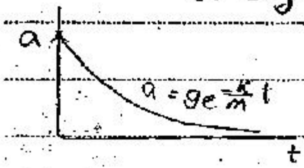
پس از t مشتق می‌گیریم $\frac{dv}{dt} = V_T(0 + \frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t})$

$0.99\cancel{V_T} = \cancel{V_T}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

$\frac{1}{100} = e^{-\frac{k}{m}t}$

$a = ge^{-\frac{k}{m}t}$

$\log 1 - \log 100 = -\frac{k}{m}t \Rightarrow t = \frac{\log 100}{k/m}$



$\frac{dy}{dt} = V_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

$dy = V_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t})dt \Rightarrow \int_0^y dy = V_T\int_0^t (1 - e^{-\frac{k}{m}t})\,dt$

[illegible]

$y = V_T(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t})\Big|_0^t$

$y = V_T(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m}{k})$

$y = V_T(t + \frac{m}{k}(e^{-\frac{k}{m}t} - 1))$

$y = V_T(t + \frac{m}{k}(e^{-\frac{k}{m}t} - 1))$

$a = \frac{dv}{dt}$

$t = \infty \Rightarrow y = \infty$

$t = 0 \Rightarrow y = 0$

Subject:

Year. 200   Month.   Day.

مثال: نشان دهید نیروی زیر پایستار است. (آن را در دستگاه قطبی بیابید)

$$\vec{F} = -2kx\hat{i} - 2ky\hat{j}$$

F پایستار است $\Leftarrow \begin{cases} \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = 0 & \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial z} = 0 & \dfrac{\partial F_z}{\partial y} = 0 \end{cases}$

یا دیگر $F_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \rightarrow \int F_x\,dx = -U$

$$U = -\int -2kx\,dx \rightarrow U = kx^2 + C_1(y,z) \quad ①$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \rightarrow \int F_y\,dy = -U \rightarrow U = -\int -2ky\,dy$$

$$\Rightarrow U = ky^2 + C_2(x,z) \quad ②$$

$$\begin{cases} ① & U = kx^2 + C_1(y,z) \\ ② & U = ky^2 + C_2(x,z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U = kx^2 + ky^2 + C \\ U = kx^2 + ky^2 + C \end{cases} \Rightarrow$$ نیرو پایستار است.

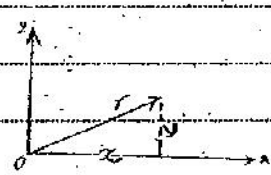
$$C_1(y,z) = ky^2 + C$$

$$C_2(x,z) = kx^2 + C$$

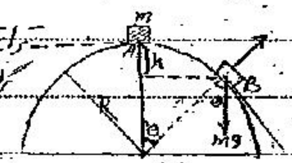
دستگاه قطبی:

$$U = k(x^2 + y^2) + C$$

$$U = kr^2 + C$$



مثال: جرم m روی سطح کره ای قرار دارد. ضربه ای به آن وارد می کنیم. می خواهیم ببینیم در چه زاویه ای سطح کره را ترک می کند.



$$\sum F_t = mg\sin\theta = ma_t \rightarrow a_t = g\sin\theta$$

$$\sum F_r = mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{R}$$

در لحظه ای که m سطح کره را ترک کند: $N = 0$ $\quad mg\cos\theta = \dfrac{mv^2}{R} \rightarrow v^2 = gR\cos\theta \quad ①$

$$h = R - R\cos\theta$$

$$(U+k)_A = (U+k)_B$$

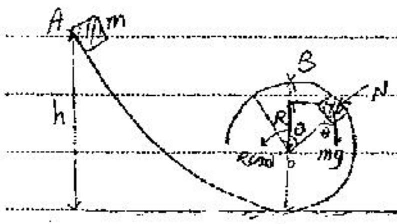
$$0 + 0 = -mgh + \tfrac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = 2gh \rightarrow v^2 = 2g(R - R\cos\theta) \quad ②$$

$\dfrac{①}{②}$ تقسیم $\begin{cases} v^2 = gR\cos\theta \\ v^2 = 2g(R - R\cos\theta) \end{cases} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{2}{3}$

$$\theta = \operatorname{Arccos} \tfrac{2}{3}$$

مثال: جرم m کی حلقه را ترک می‌کند



$$\Sigma f_r = mg\cos\theta + N = \frac{mv^2}{R}$$

در لحظه‌ای که m حلقه را ترک می‌کند $N=0$ و $\Rightarrow v^2 = gR\cos\theta$ ①

با پایستگی انرژی: $mgh + 0 = mg(R + R\cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2$

$$v^2 = 2gh - 2gR(1+\cos\theta) \quad ②$$

$$\begin{cases} ① & v^2 = gR\cos\theta \\ ② & v^2 = 2gh - 2gR(1+\cos\theta) \end{cases} \Rightarrow gR\cos\theta = 2gh - 2gR(1+\cos\theta)$$

$$3gR\cos\theta = 2h - 2R$$

$$\cos\theta = \frac{2(h-R)}{3R}$$

حداقل h چقدر باشد تا جسم بتواند حلقه را دور بزند؟ یعنی باید از نقطه B عبور کند یعنی θ صفر باشد

$$\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{2(h-R)}{3R} \Rightarrow 1 = \frac{2h-2R}{3R} \Rightarrow 3R = 2h - 2R$$

$$5R = 2h \Rightarrow h > \frac{5}{2}R$$

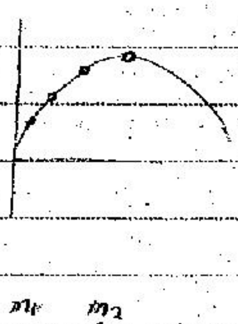
$$h = \frac{5}{2}R$$

اگر $h=2R$ باشد چه اتفاقی می‌افتد؟ مسلماً به نقطه اوج نمی‌رسد
(بدون سرعت اولیه از $h=2R$ رها شود کجا حلقه را ترک می‌کند)

$h = 2R$

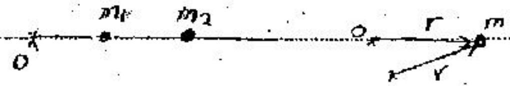
$$\cos\theta = \frac{2(2R-R)}{3R} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}$$

مرکز جرم



مثل این است که جرم متمرکز در آن نقطه اثر کند.
یک نقطه‌ی ویژه در جسم که مسیر منحنی طی می‌کند.
بقیه نقاط جسم حرکت پیچیده‌ای دارند.

گشتاور اول جرم:



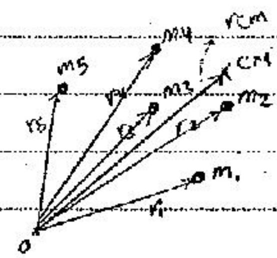
گشتاور اول جرم $= m.\vec{r}$

حاصلضرب بردار مکان در جرم جسم

گشتاور اول جرم $= m\vec{r}$

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

مرکز جرم



$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}$$

مرکز جرم سامانه‌ای از ذرات نقطه‌ای است که اگر تمام جرم در آن نقطه قرار گیرد گشتاور اول آن حول هر نقطه‌ی دلخواه برابر است با مجموع گشتاورهای جرم‌های ذرات نسبت به آن نقطه.

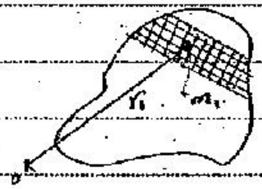
مرکز جرم نقطه‌ای است که گشتاور اول آن برابر است با مجموع گشتاورهای اول کلیه‌ی نقاط

$$M\vec{r}_{cm} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots$$

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots}{M}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots}{M}$$

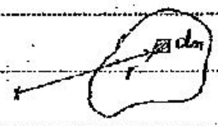
$$z_{cm} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + \cdots}{M}$$



$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{M \text{ یا } \sum m_i}$$

اگر توزیع جرم تابع ریاضی مشخصی باشد می‌توان نوشت $\Rightarrow$ $\vec{r}_{cm} = \dfrac{\int \vec{r}\,dm}{\int dm}$

$\Delta m = dm$



$$x_{cm} = \bar{x} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} \qquad z_{cm} = \bar{z} = \frac{\int z\,dm}{\int dm}$$

$$y_{cm} = \bar{y} = \frac{\int y\,dm}{\int dm} \qquad \int dm = M$$

مساحتی (جرم ندارم سطح دارد) $\Rightarrow$ $\vec{r}_{cm} = \dfrac{\int \vec{r}\,dA}{\int dA}$ سطح

(مرکز سطح را مرکز هندسی گویم)

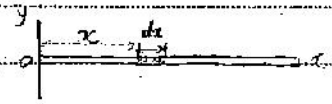
مثال: مرکز جرم میله‌ای به طول L را تعیین کنید در صورتی که بدانیم توزیع جرم از رابطه زیر تبعیت می‌کند.

1. انتخاب محورهای مختصات مناسب

2. انتخاب جزء دلخواه (المان) و تعیین جرم و مختصات آن $\qquad \lambda = \lambda_0(1+ax)$

3. استفاده از رابطه $\quad \bar{y} = \dots \quad \bar{x} = \frac{\int x\,dm}{\int dm}$

4. انتگرال‌ها را بگیرید



$$\lambda = \lambda_0(1+ax) \qquad dm = \lambda\,dx$$

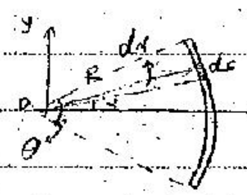
$$dm = \lambda_0(1+ax)\,dx \Rightarrow \bar{x} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} =$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^L \lambda_0(1+ax)\,x\,dx}{\int_0^L \lambda_0(1+ax)\,dx} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}ax^3\Big|_0^L}{x + \frac{1}{2}ax^2\Big|_0^L}$$

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{3}aL^3}{L + \frac{1}{2}aL^2} = \frac{3L + 2aL^2}{6 + 3aL}$$

بررسی: $a = 0 \Rightarrow \bar{x} = \frac{L}{2}$ ، ⇐ درست است ✓

مثال: سیم به شکل کمان دایره‌ای که شعاع آن R است، مرکز جرم آن را بیابید.



جرم واحد طول

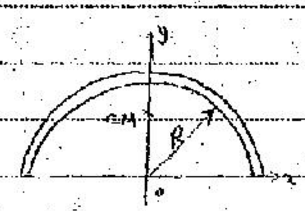
$$dm = \lambda\,dS = \lambda R\,d\alpha$$

$$dS \begin{cases} x = R\cos\alpha \\ y = R\sin\alpha \end{cases}$$

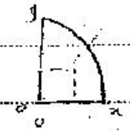
$$\bar{x} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\lambda R^2 \int_{-\theta/2}^{\theta/2} \cos\alpha\,d\alpha}{\lambda R \int_{-\theta/2}^{\theta/2} d\alpha} = \frac{2R\int_0^{\theta/2} \cos\alpha\,d\alpha}{2\int_0^{\theta/2} d\alpha}$$

$$\bar{x} = \frac{R\,\sin\alpha\Big|_0^{\theta/2}}{\alpha\Big|_0^{\theta/2}} = \frac{R\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}$$

مثال: مرکز جرم نیم‌دایره را با این روش پیدا کنید.



$$\bar{y} = \frac{R\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{\pi}$$



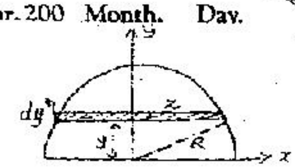
$$\bar{y} = \frac{R\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4R\frac{\sqrt{2}}{2}}{\pi} = \frac{2R\sqrt{2}}{\pi}$$

Subject:

Year. 200   Month.   Day.

مثال: مرکز جرم قطاع کره را بیابید

مرکز جرم نیمکره:



$$dm = \overset{\text{جرم حجمی}}{\rho} \cdot \pi x^2\, dy$$

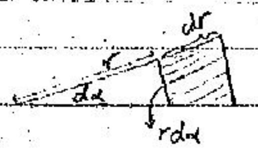
$$R^2 = x^2 + y^2 \rightarrow \underline{x^2 = R^2 - y^2}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y \cdot \rho\pi (R^2 - y^2)\, dy}{\int \rho\pi (R^2 - y^2)\, dy}$$

$$\rightarrow \bar{y} = \frac{\rho\pi \int_0^R (yR^2 - y^3)\, dy}{\rho\pi \int_0^R (R^2 - y^2)\, dy} = \frac{\frac{1}{2} y^2 R^2 - \frac{1}{4} y^4 \Big|_0^R}{R^2 y - \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^R} =$$

$$\frac{\frac{1}{2} R^4 - \frac{1}{4} R^4}{R^3 - \frac{1}{3} R^3} = \frac{\frac{1}{4} R^4}{\frac{2}{3} R^3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} R = \frac{3}{8} R$$

حال باید مرکز جرم این سطح را بگو



$$dm = \overset{\text{جرم سطحی}}{\sigma}\, r\, d\alpha\, dr$$

$$x = r \cos\alpha$$

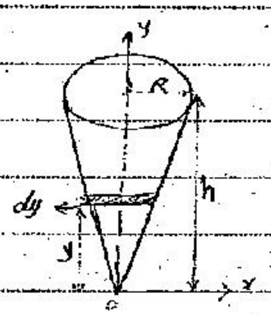
$$y = r \sin\alpha$$

$$\bar{x} = \frac{\int (r\cos\alpha)\, \sigma\, r\, d\alpha\, dr}{\int \sigma\, r\, d\alpha\, dr}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^R r^2 dr \int_{-\theta/2}^{\theta/2} \cos\alpha\, d\alpha}{\int_0^R r\, dr \int_{-\theta/2}^{\theta/2} d\alpha} = \frac{2}{3} \frac{R \sin \theta/2}{\theta/2}$$

مثال: مرکز جرم یک مخروط را بیابید.

در حالت دو بعدی مرکز جرم روی محور تقارن است



$$dm = \rho \pi x^2 dy$$

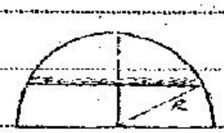
$$\bar{y} = \frac{\int y\, dm}{dm} = \frac{\pi\rho \int x^2 y\, dy}{\pi\rho \int x^2 dy}$$

$$\frac{x}{R} = \frac{y}{h} \rightarrow x = \frac{R}{h} y$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^h \left(\frac{R}{h} y\right)^2 y\, dy}{\int_0^h \left(\frac{R}{h} y\right)^2 dy} = \frac{\int_0^h y^3 dy}{\int_0^h y^2 dy} = \frac{\frac{y^4}{4}\Big|_0^h}{\frac{y^3}{3}\Big|_0^h}$$

$$\bar{y} = \frac{3}{4} R$$

اگر نیمکره پر داشته باشیم به صورت بالا عمل می‌کنیم



$$G: \bar{y} = \frac{3}{8} R$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

حرکت مرکز جرم:

از $M\vec{r}_{CM} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots$

نسبت به t مشتق می‌گیریم:
$$M\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = m_1\frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{r}_2}{dt} + \cdots$$

$$M\vec{V}_{CM} = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 + \cdots$$

$$M\vec{V}_{CM} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \cdots \Rightarrow \vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \cdots$$

$$\vec{P} = M\vec{V}_{CM}$$

$$\vec{P} = M\vec{V}_{CM} = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 + \cdots$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{V}_{CM}}{dt} = m_1\frac{d\vec{V}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{V}_2}{dt} + \cdots$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \cdots$$

قانون دوم نیوتن در استفاده

سامانه‌ی ذرات:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \underbrace{\sum \vec{F}_{ext}}_{\text{نیروی خارجی}} + \underbrace{\sum \vec{F}_{int}}_{=0} \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} = \dfrac{d\vec{P}}{dt} \\ \sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM} \end{cases}$$

نیروهای داخلی

$\sum F = \frac{dP}{dt}$, $\sum F = ma \Rightarrow$ قانون نیوتن

در استفاده یک ذره (همه نیروها خارجی اند)

* نیروی داخلی نمی‌توانند تکانه کل را تغییر دهند و یا مرکز جرم را شتاب دار کنند اما می‌توانند اجزای جسم را شتاب دار کنند.

اصل پایستگی تکانه خطی:

اگر $\sum \vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$

$\vec{P} =$ ثابت

اگر نیروی خارجی بر سامانه‌ای از ذرات اعمال نشود تکانه کل ثابت است.

اگر $\sum \vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{a}_{CM} = 0$

PILAVARAN

PAGE:

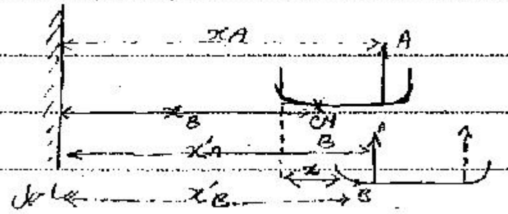
Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال: این شخص روی قایق به سمت جلو حرکت کند چه اتفاقی می‌افتد؟ (با فرض نبودن اصطکاک زیر قایق)

قایق عقب می‌رود (چون شخص به جلو می‌رود عکس العمل)

(یا قایق عقب می‌رود)



$$x_{CM} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}$$

$$x'_{CM} = \frac{m_A x'_A + m_B x'_B}{m_A + m_B}$$

چون ΣF_{ext} برابر صفر است مرکز جرم سامانه (شخص + قایق)

جابه‌جا نمی‌شود. (نه اینکه اجزای سامانه جابه‌جا نمی‌شوند)

$$x'_{CM} = x_{CM}$$

$$m_A x'_A + m_B x'_B = m_A x_A + m_B x_B$$

اگر قایق را جابه‌جا کنیم / اگر قایق به اندازه x جابه‌جا شود (A به اندازه d جابه‌جا شود)

$$m_A x'_A - m_A x_A = m_B x_B - m_B x'_B$$

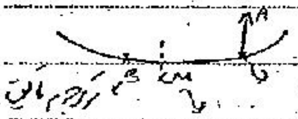
(میزان جابه‌جایی قایق)

$$* \quad m_A(x'_A - x_A) = -m_B(x'_B - x_B) *$$

$$x'_A = x_A - d + x$$

$$x'_B = x_B + x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'_A - x_A = x - d & (1) \\ x'_B - x_B = x & (2) \end{cases}$$



مرکز جرم قایق   A جرم

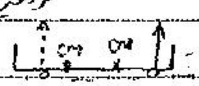
$$m_A(x - d) = -m_B(x)$$

$$m_A x - m_A d = -m_B x \rightarrow x(m_A + m_B) = m_A d$$

مرکز جرم سامانه (بین این دو تا مرکز جرم و نزدیکتر به جرم سنگین‌تر)

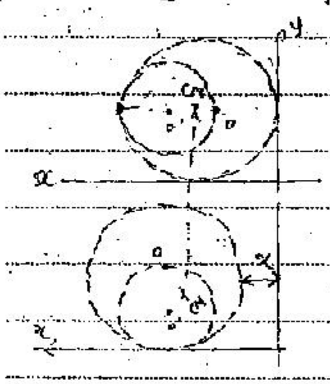
$$x = \frac{m_A}{m_A + m_B} d$$

میزان جابه‌جایی قایق



قایق

مثال: یک پوسته کروی به جرم M و شعاع R داریم و درون آن یک کره توپر به جرم M و شعاع $\frac{R}{2}$ است. اگر آن را رها کنیم وقتی این کره به پایین می‌رسد کل سامانه چقدر جابه‌جا می‌شود؟



چون نیروی خارجی در راستای x نداریم پس مرکز جرم در راستای x جابه‌جا نمی‌شود. در راستای y نیرو داریم (نیروی گرانش) پس تاثیری ندارد.

مرکز جرم اولیه: $\bar{x} = \frac{M \times R + M \times \frac{3}{2}R}{M + M} = \frac{5}{4}R$

در راستای x

$$\bar{y} = \frac{MR + MR}{M + M} = \frac{2MR}{2M} = R$$

PILAVARAN

PAGE:

Subject:

Year. 200   Month.   Day.

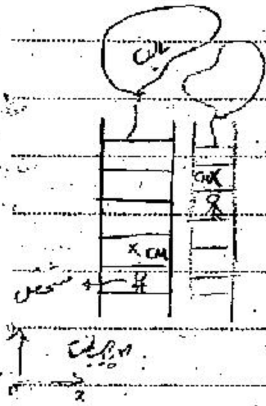
$$\begin{cases} \bar{x}' = \dfrac{(M+M)(R+x)}{2M} = R+x \\ \bar{y}' = \dfrac{M\times R + M\times R/2}{2M} = \frac{3}{4}R \end{cases}$$

$\bar{x}' = \bar{x}$

$\frac{5}{4}R = R + x \rightsquigarrow x = R/4$

مثال: بالنی را می‌بینیم که بر آن یک نردبان طنابی بسته شده و مجموعه در حال تعادل است.

اگر شخص از پایین با سرعت v_r بالا رود چه اتفاقی می‌افتد.



$M =$ جرم بالن + نردبان

$m =$ جرم شخص

$V_r =$ سرعت شخص نسبت به نردبان

$u =$ سرعت شخص نسبت به زمین

$V =$ سرعت نردبان بالن نسبت به زمین

وقتی شخص بالا می‌رود از جرم سامانه چون چیزی بالاتر نمی‌رود پس باید نردبان پایین بیاید که جای مرکز جرم تغییر نکند یعنی y_{cm} تغییری نکند.

چون $\sum F_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \vec{P}'$

$0 = mu + MV$

سرعت نردبان نسبت به زمین + سرعت شخص نسبت به نردبان = سرعت شخص نسبت به زمین

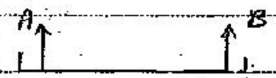
$u = V_r + V$

$$\begin{cases} 0 = mu + MV \\ u = V_r + V \end{cases} \Rightarrow 0 = mV_r + mV + MV$$

$$0 = V(M+m) + mV_r \rightsquigarrow V = -\frac{m}{m+M}V_r$$

یعنی نردبان با این سرعت در جهت پایین می‌آید

مثال: اگر جای A و B عوض شود چه اتفاقی می‌افتد



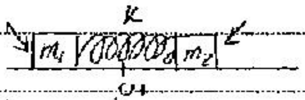
اگر $m_A = m_B \Rightarrow$ اتفاقی نمی‌افتد

$m_A > m_B$ محال

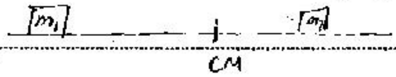
$m_B > m_A$ مرکز جرم به طرف B می‌رود (سمت جرم بیشتر) تا لوله در جهت عکس آن باید جابجا شود.

Subject:

Year. 200 Month. Day.



پس از رها کردن دست، در راستای افقی نیروی خارجی به سیستم
وارد نمی‌شود پس $\sum F_{ext} = 0$ پس مرکز جرم جابجا نمی‌شود



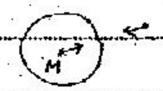
$$P = P'$$

$$0 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \rightsquigarrow \frac{V_1}{V_2} = -\frac{m_2}{m_1}$$

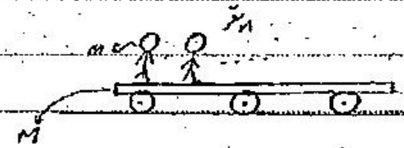
$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\frac{1}{2} m_1 V_1^2}{\frac{1}{2} m_2 V_2^2} = \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 \rightsquigarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{m_1}{m_2}\left(-\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

مثلا: جرم m_1 دو برابر جرم m_2 باشد m_2 دو برابر سرعت حرکت می‌کند. باز هم مرکز جرم تغییری نمی‌کند

وقتی یک جسم را از سطح زمین رها می‌کنیم باید زمین هم به سمت جسم بیاید اما چون جرم زمین بسیار زیاد است این جابجایی
محسوس نمی‌باشد.



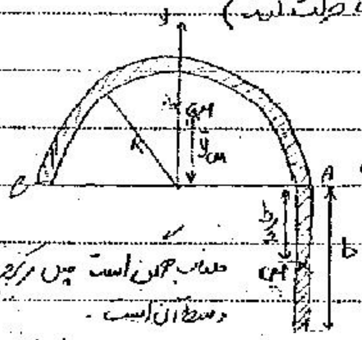
مثال: n نفر روی این واگن قرار گرفته‌اند سیستم در حال حاضر ساکن است. افراد یکی یکی از واگن پایین می‌آیند
سرعت نهایی را حساب کنید.
با فرض اینکه n نفر با هم پایین بپرند در این صورت
سرعت نهایی چه تغییری می‌کند؟



Subject:

Year. 200   Month.   Day.

مثال، یک لوله شیشه‌ای را به صورت شکل درآورده‌ایم. طنابی از داخل آن عبور داده‌ایم [illegible] از آن جرم [illegible] است.
وقتی طناب از نقطه A می‌گذرد سرعت آن چقدر است. (طناب را آزاد می‌کنیم تا حرکت کند)



$$\overline{y} = \frac{R \sin \theta/2}{\theta/2} = \frac{R \sin 90}{\pi/2} = \frac{2R}{\pi}$$

طناب چون [illegible] است پس مرکز جرم این قسمت وسط آن است.

$$\underset{\frac{1}{2}mgh}{(U} + \underset{\frac{1}{2}mv^2}{k)_1} = (U+k)_2$$ در حالت 2 کل طناب (L) آویزان است

$$\lambda \pi R g . \overline{y} + (\lambda b g \times -\frac{b}{2}) = (\lambda L g \times -\frac{L}{2}) + \frac{1}{2}\lambda L v^2$$

جرم طناب : $\lambda \cdot R\pi$
چگالی طولی × طول

$$Rg\frac{2R\pi}{\pi} - \frac{b^2 g}{2} = -\frac{1}{2}L^2 g + \frac{1}{2}Lv^2$$

$$2R^2 g - \frac{b^2 g}{2} = -\frac{1}{2}L^2 g + \frac{1}{2}Lv^2$$

مرکز جرم نیم دایره

$ds = R\,d\theta$, $x = R\cos\theta$, $dm = \delta . ds$

$$v^2 = \frac{4R^2 g - b^2 g + L^2 g}{L}$$ (v) جواب سرعت است.

$$\overline{Y} = \frac{\int x\,dm}{\int dm} = \frac{\delta \int R\cos\theta . R\,d\theta}{\delta \int R\,d\theta} = \frac{R^2 \sin\theta \Big|_0^{\pi/2}}{R\theta \Big|_0^{\pi/2}} = \frac{2R}{\pi}$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{L}(4R^2 - b^2 + L^2)}$$

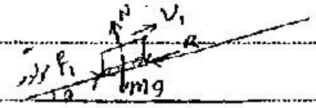
مثال، دو لوله [illegible] (بدون اصطکاک) قرار گرفته‌اند و [illegible]
که [illegible] سرعت هر کدام چقدر می‌شود؟

Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال: کامیونی با سرعت V_1 از سربالایی یک جاده بالا می‌رود، $R = 0.04mg$ ، $\sin\theta = 0.02$

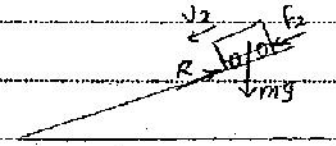
اگر در برگشت این کامیون همین توان را مصرف کند سرعتش را بیابید. $P_1 = P_2$



$$\Sigma F = f_1 - mg\sin\theta - R = 0$$

$$f_1 = mg \times 0.02 + 0.04mg$$

$$f_1 = 0.06mg$$



در پایین آمدن

$$\Sigma F = f_2 - R + mg\sin\theta = 0$$

$$f_2 = R - mg\sin\theta$$

$$f_2 = 0.04mg - 0.02mg$$

$$f_2 = 0.02mg$$

توان تغییر نکند $P_1 = P_2$

$$f_1 V_1 = f_2 V_2 \rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{f_1}{f_2} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{0.06mg}{0.02mg} = 3 \rightarrow V_2 = 3V_1$$

مثال: هواپیمایی از نقطه A به B می‌رود (مسافت بین دو نقطه را مستقیم طی می‌کند) زمان رفت و برگشت در هوای آرام $t = \frac{2L}{V}$ است. نشان دهید اگر باد بوزد زمان رفت و برگشت بیشتر می‌شود. $AB = L$

(سرعت هواپیما نسبت به باد تغییر نکند)

$A \xrightarrow{V}$ $\xleftarrow{u}$ B

سرعت ثابت $x = vt + x_0$

$x - x_0 = vt$

$L = vt \rightarrow t = \frac{L}{V}$ (بدون باد)

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{L}{V-u} & \text{(رفت در خلاف باد)} \\ t_2 = \dfrac{L}{V+u} & \text{(برگشت در جهت باد)} \end{cases} \Rightarrow t' = t_1 + t_2 = \frac{L}{V-u} + \frac{L}{V+u}$$

$$t' = \frac{L(2V)}{V^2 - u^2} = 2L\frac{V}{V^2-u^2}$$

زمان رفت و برگشت $t = \frac{2L}{V}$

$$t' = \frac{2LV/V^2}{\frac{V^2-u^2}{V^2}} = \frac{2L/V}{1 - u^2/V^2}$$

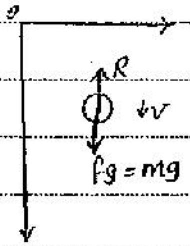
$t = \frac{2L}{V}$

$$\Rightarrow t' = \frac{t}{1 - \frac{u^2}{V^2}} \rightarrow t' > t$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال: جسمی داریم که از ارتفاع نسبتاً زیاد سقوط می‌کند



$R = -kV$

$\vec{F}_g + \vec{R} = m\vec{a}$

$mg - kV = ma$

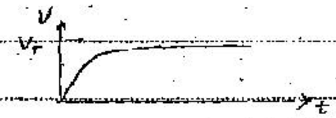
در آغاز حرکت چون سرعت نداریم سقوط آزاد است یعنی

$mg - 0 = mg$

$g = a$

حرکت کند شونده شتاب‌دار تا

سرعت انتهایی که سقوط با mg برابر می‌شود $\rightarrow mg - kV_T = 0 \rightarrow V_T = \frac{mg}{k}$



$mg - kV = m\frac{dv}{dt}$

$kV_T - kV = m\frac{dv}{dt}$

$\frac{dv}{V_T - V} = \frac{k}{m}dt$

$\int_0^V \frac{dv}{V_T - V} = \frac{k}{m}\int_0^t dt$

$\ln|V_T - V|_0^V = -\frac{k}{m}t$

$\ln\frac{V_T - V}{V_T} = -\frac{k}{m}t$

$\frac{V_T - V}{V_T} = e^{-\frac{k}{m}t} \rightarrow 1 - \frac{V}{V_T} = e^{-\frac{k}{m}t} \rightarrow V = V_T(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

از نظر ریاضی این جسم هیچ گاه به سرعت حدی نمی‌رسد اما از نظر فیزیکی این طور نیست

$\begin{cases} V = V_T \\ t = \infty \end{cases}$

ضربه و برخورد

نیروی ضربه‌ای و

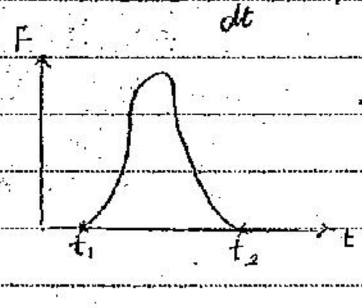
نیرویی است که زمان تأثیر آن کوتاه

اما مقدار آن خیلی زیاد است.

$F = ma$

$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \rightarrow \vec{F}dt = d\vec{P}$

$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt = \int_{P_1}^{P_2}d\vec{P} \rightarrow$



این انتگرال قابل محاسبه نیست چون

F برحسب t نداریم فقط نمودارش را

حدس می‌زنیم.

$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt}_{I = \text{ضربه}} = P_2 - P_1$

ضربه برابر است با تغییرات تکانه $\vec{J} = \Delta\vec{P}$ ضربه $= j = P_2 - P_1 =$ ضربه

انتگرال زمانی نیرو

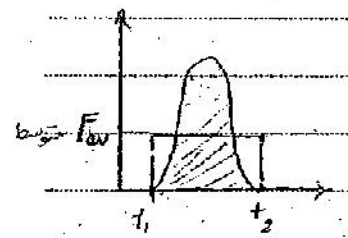
این رابطه چون برداری است سه معادله به ما می‌دهد $m = \Delta t$ (انتگرال زمانی نیرو)

پس از تجزیه در راستای محورها به صورت زیر است:

$J_x = \Delta P_x = m(V_x - V_{0x})$

$J_y = \Delta P_y = m(V_y - V_{0y})$

$J_z = \Delta P_z = m(V_z - V_{0z})$



$\int F\,dt = j =$ سطح زیر منحنی نیرو - زمان

$\bar{F} = \dfrac{\Delta P}{\Delta t}$

$$\int F\,dt = j = F_{av}(t_2 - t_1) \rightarrow F_{av} = \frac{j}{t_2 - t_1} = \frac{j}{\Delta t} = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

مثال: گلوله‌ای به جرم 200g از ارتفاع h برابر 4.9 m بدون سرعت اولیه رها می‌شود. این گلوله پس از برخورد با زمین تا ارتفاع 4m بالا می‌رود. اگر طول مدت برخورد 0.01s فرض شود مطلوب است:

الف: ضربه وارد بر گلوله از زمین؟

ب: متوسط نیروی ضربه‌ای؟ متوسط نیروی ضربه‌ای را با وزن جسم و زمان برخورد را با زمان حرکت مقایسه کنید.

$V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 4.9} = 9.8\ m/s \downarrow$

$V' = \sqrt{2gh'} = \sqrt{2 \times 9.8 \times 4} = 8.85\ m/s \uparrow$

$V \downarrow \bigcirc \quad \bigcirc \uparrow V'$

$J_y = m(V' - V)$ $\quad j = 0.200\ kg(+8.85\ m/s + 9.8\ m/s)$

$j = 3.73\ kg\,m/s\ (N/s) \uparrow$ ضربه وارد بر گلوله

(چون ما جرم گلوله و سرعت گلوله را در نظر گرفتیم)

$j = 3.73\ N/s \downarrow$ ضربه وارد بر زمین

$F_{av} = \dfrac{j}{\Delta t} = \dfrac{3.73\ N/s}{0.01\ s} = 373\ N$ $\qquad \dfrac{F_{av}}{mg} = \dfrac{373\ N}{0.2 \times 9.8\ N} = \dfrac{373}{1.96} \simeq 190$

این نیرو (F_{av}) 190 برابر از وزن جسم بزرگتر است پس قابل توجه است.

$V = gt$

زمان حرکت $t = \dfrac{9.8\ m/s}{9.8\ m/s^2} = 1s$ $\qquad \dfrac{t}{\Delta t} = \dfrac{1s}{0.01} = 100$ (زمان برخورد) این زمان 100 برابر کوچکتر از زمان حرکت است پس تمام این نیرو یک نیروی ضربه‌ای بوده است.

t زمان برخورد را با زمان حرکت مقایسه می‌کنیم

برخورد پدیده‌ای است که بین چند جسم برهم‌کنش دارد.
در برخورد سرعت‌های قبل از برخورد و سرعت‌های حین برخورد و سرعت‌های بعد از برخورد قابل بررسی هستند.

نیروهای داخلی برای $\vec{F}_A$ $\vec{F}_B$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A\, dt = \Delta \vec{p}_A$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_B\, dt = \Delta \vec{p}_B$$

چون در خلاف $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$

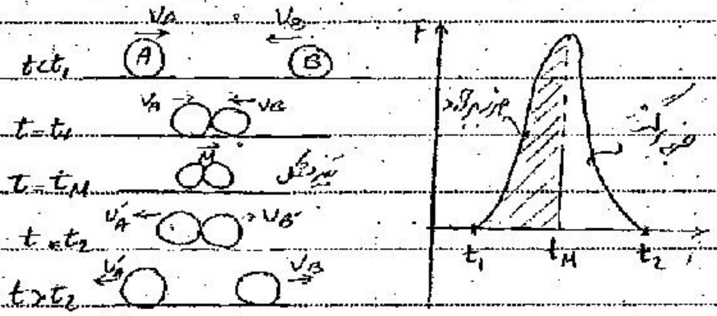
پس:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_A\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_B\, dt$$

$$\Delta \vec{p}_A = -\Delta \vec{p}_B$$

$$\Delta \vec{p}_A + \Delta \vec{p}_B = 0$$

نتیجه: اگر در حین برخورد نیروی خارجی اثر نکند (یا بتوان از نیروی نیروی خارجی در مقایسه با نیروی برخورد صرف‌نظر کرد) آن‌گاه تکانه کل پایسته است.



$$e = \frac{\int_{t_M}^{t_2} F_A\, dt}{\int_{t_1}^{t_M} F_A\, dt}$$

ضریب برخورد (ضریب بازگشت)

$$0 \le e \le 1$$

$e=1$ برخورد کشسان — در کشسان کامل اتلاف انرژی وجود ندارد.

$e=0$ ناکشسان کامل

ضریب برخورد برابر $e = -\dfrac{v_A' - v_B'}{v_A - v_B}$

نیز برقرار است

نشان دهید در برخورد کشسان کامل ($e=1$) اتلاف انرژی جنبشی وجود ندارد.

$e=1$ پس $1 = -\dfrac{v_A' - v_B'}{v_A - v_B} \Rightarrow 1 = \dfrac{v_B' - v_A'}{v_A - v_B} \Rightarrow v_B' - v_A' = v_A - v_B$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

- برخورد کشسان دو جسم :

شرط پایستگی: نیروی خارجی نباشد یا اثر نکرده باشد

$$\begin{cases} m_A V_A + m_B V_B = m_A V_A' + m_B V_B' \\ e = -\dfrac{V_A' - V_B'}{V_A - V_B} = 1 \quad \text{کشسان کامل} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_A V_A + m_B V_B = m_A V_A' + m_B V_B' \\ m_A \,|\; V_A - V_B = -V_A' + V_B' \end{cases}$$

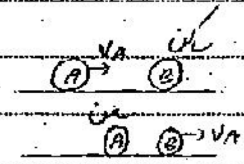
$$2 m_A V_A + V_B (m_B - m_A) = V_B' (m_A + m_B)$$

$$\begin{cases} V_B' = \dfrac{2 m_A V_A}{m_A + m_B} + \dfrac{(m_B - m_A) V_B}{m_A + m_B} \\ V_A' = \dfrac{2 m_B V_B}{m_A + m_B} + \dfrac{(m_A - m_B) V_A}{m_A + m_B} \end{cases}$$

حالت‌های خاص :

الف) اگر $m_A = m_B$ $\Leftarrow$ $\begin{cases} V_A' = V_B \\ V_B' = V_A \end{cases}$

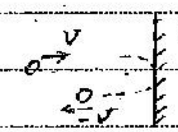
ب) اگر $m_A = m_B$ و $V_B = 0$



$\Leftarrow \begin{cases} V_A' = 0 \\ V_B' = V_A \end{cases}$

ج) اگر $m_A \gg m_B$ و $V_A = 0$

$\Leftarrow \begin{cases} V_B' = -V_B \\ V_A' \simeq 0 \end{cases}$

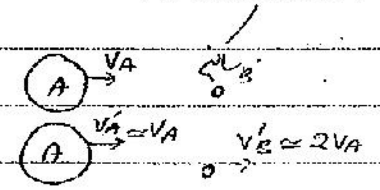


برخورد کشسان

$e = 1 \qquad V_A' - V_B' = -(V_A - V_B)$

اندازه سرعت نسبی قبل از برخورد با سرعت نسبی بعد از برخورد برابر است

د) اگر $m_A \gg m_B$ و $V_B = 0$



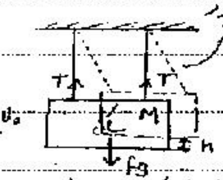
PILAVARAN

PAGE:

Subject:

Year. 200 Month. Day.

برخورد پاندول بالستیک حالت ۲



$\Sigma F_y = 0$ پس نیروی خارجی نداریم

اگر چوب سخت باشد و گلوله چوب را سوراخ نکند و نخ‌ها قائم باشند آنگاه در راستای x نیروی خارجی داریم و دیگر نمی‌توانیم از اصل پایستگی تکانه استفاده کنیم پس باید چوب سخت نباشد یا طناب‌ها بلند باشند

$mV_0 + M\times 0 = (m+M)V$ ؛ پایستگی تکانه

$$V = \frac{mV_0}{m+M}$$

- در طول برخورد تکانه کل پایسته است اما انرژی مکانیکی پایسته نیست

پس از برخورد تکانه کل پایسته نیست ولی انرژی مکانیکی پایسته است.

در اثر برخورد پاندول به طوری که مرکز جرم آنها به اندازه h بالا می‌رود.

$$(M+m)gh = \frac{1}{2}(m+M)V^2$$

$$V^2 = 2gh \rightarrow V_0 = \frac{(m+M)\sqrt{2gh}}{m}$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\frac{1}{2}mV_0^2}{\frac{1}{2}(m+M)V^2} = \frac{m}{(m+M)}\left(\frac{V_0}{V}\right)^2$$

$$= \frac{m}{m+M}\left(\frac{m+M}{m}\right)^2 \Rightarrow \frac{k_1}{k_2} = \frac{m+M}{m}$$

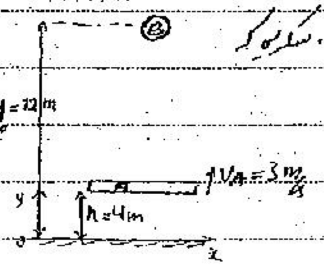
اگر $m_1 = 10g \ , M = 990g$

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{10}{10+990} = \frac{1}{100} \Rightarrow k_2 = \frac{1}{100}k_1$$

$$\frac{k_1 - k_2}{k_1} = \frac{m+M-m}{m+M} \Rightarrow \frac{\Delta k}{k_1} = \frac{M}{m+M}$$

مثال، مطابق $t=0$ از ارتفاع $y=12m$ نسبت به سطح زمین رها می‌شود. در لحظه رها شدن توپ، سکویی که در ارتفاع $h=4m$ از همان سطح قرار دارد با سرعت ثابت $v=3 m/s$ به سمت بالا حرکت می‌کند. توپ پس از برخورد با سکو به بالا ...

الف) توپ در چه ارتفاعی بالای سکو است؟ ب) پس از چه مدت توپ برای بار دوم به سکو برخورد می‌کند؟ (جرم سکو بزرگ فرض شود)



$$\begin{cases} y_A = V_A t + h \\ y_B = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 \end{cases}$$

در لحظه برخورد $y_A = y_B$

$$V_A t + h = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$$

$$\frac{1}{2}gt^2 + V_A t - y_0 + h = 0 \Rightarrow 5t^2 + 3t - 8 = 0$$

$t = 1s \qquad y_A - y_B = 7m$

PILAVARAN

PAGE:

Subject:

Year. 200   Month.   Day.

$m_A \gg m_B \Rightarrow$ عملاً بعد از برخورد سرعت A تغییر نمی‌کند $\qquad v_B = -gt$

$v_B = -10 \times 1$

$v_B = -10\ m/s$

$$e = \frac{v'_A - v'_B}{v_A - v_B} \Rightarrow 1 = \frac{v_A - v'_B}{v_A - v_B}$$

$$1 = \frac{3 - v'_B}{3 - (-10)} \Rightarrow 13 = -3 + v'_B \Rightarrow v'_B = 10\ m/s \uparrow$$

$$H = \frac{v'^2_B}{2g} = \frac{(10\ m/s)^2}{2 \times 10\ m/s^2} = 12.8\ m$$ از نقطه برخورد

$y_{Max} = 12.8 + 7 = 19.8$ از زمین

$$\begin{cases} y_B = -\frac{1}{2}gt^2 + v'_B t + 7 \\ y_A = v_A t + 7 \end{cases}$$

لحظه برخورد: $y_A = y_B$

$v_A t + 7 = -\frac{1}{2}gt^2 + v'_B t + 7$

$\frac{1}{2}gt^2 - v'_B t + v_A t = 0$

$5t^2 - 10t + 3t = 0 \Rightarrow 5t^2 - 13t = 0$

$$\begin{cases} t = 0 & \text{لحظه برخورد اول} \\ t = 2.6\ s & \text{لحظه برخورد دوم} \end{cases}$$

مسئله: سه گلوله داریم که روی یک سطح بدون اصطکاک قرار دارند و نوع برخورد را الاستیک فرض کنیم جرم m' چقدر لازم است که در این شرایط بیشترین انرژی جنبشی از m به M منتقل شود.

$(m) \rightarrow v_0 \qquad$ ساکن $(m') \qquad$ ساکن (M)

$$\begin{cases} mv_0 + m' \times 0 = mv'_0 + m'v' \\ e_1 = \dfrac{v'_0 - v'}{v_0 - v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mv_0 = mv'_0 + m'v' \\ m \times \; e_1 v_0 = -v'_0 + v' \end{cases}$$

$$mv_0(1 + e_1) = v'(m + m')$$

$$v' = \frac{mv_0(1 + e_1)}{m + m'}$$ سرعت m' بعد از برخورد اول

$(m') \rightarrow v' \qquad$ ساکن (M)

$$\begin{cases} m'v' + M \times 0 = m'v'' + MV' \\ e_2 = \dfrac{v'' - V'}{v' - V} \end{cases} \Rightarrow V' = \frac{(1 + e_2)m'v'}{M + m'} \Rightarrow V' = \frac{(1 + e_1)(1 + e_2)mm'v_0}{(m + m')(m' + M)}$$

که سرعت M بعد از برخورد است

$$V' = \frac{\overset{\text{ثابت}}{A}(mm')}{(m + m')(m' + M)}$$

$$\frac{dV'}{dm'} = \frac{m(mm' + mM + m'^2 + m'M) - mm'(m + 2m' + M)}{D^2}$$

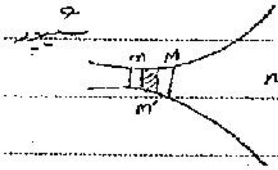
m و M ثابت هستند و m' را تغییر می‌دهیم

مشتق نسبت به m' برابر صفر $\qquad mm' + mM + m'^2 + \cancel{m'M} - mm' - 2m'^2 - \cancel{m'M} = 0$

$-m'^2 + mM = 0$

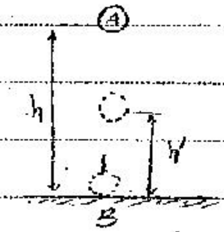
$m'^2 = mM \rightarrow m' = \sqrt{mM}$

شیمیدو



برای اینکه بیشترین سرعت منتقل شود

باید $m' = \sqrt{mM}$



مثال: $e = ?$

$v = \sqrt{2gh}$

$v' = \sqrt{2gh'}$

کل مسافت $S = h + 2h' + 2h'' + 2h''' + \cdots$

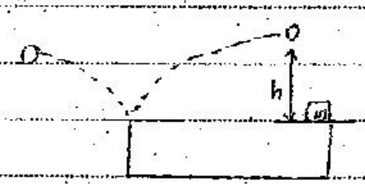
$S = h + 2e^2h + 2e^4h + 2e^6h + \cdots$

تصاعد هندسی

$$e = -\frac{v'_A - v'_B}{v_A - v_B}$$

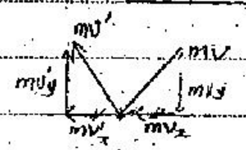
$$e = \frac{\sqrt{2gh'} - 0}{-\sqrt{2gh} - 0} \Rightarrow e = \sqrt{\frac{h'}{h}}$$

$h' = e^2 h$



مثال: یک ظرف ... شیشه‌ای به یک کفه ترازو برخورد می‌کند

$n = 100$



مولفه افقی تغییر نکرده

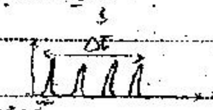
$\Delta P_x = 0 \Rightarrow mv_x = mv'_x$

$\Delta P_y = mv'_y - mv_y$

$\Delta P_y = mv_y - (-mv_y)$

$\Delta P_y = 2mv_y$

در این بسته n بار ضربه ...



زمان ...

$\bar{F} = \frac{\Delta P}{\Delta t}$ $\quad \bar{F} = n(\Delta P)$

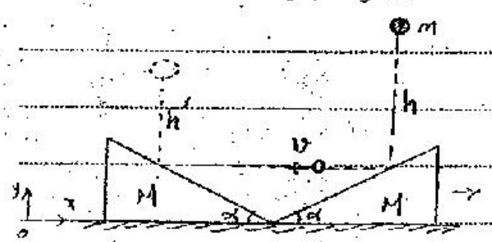
$\bar{F} = n(2mv_y)$

$v_y = \sqrt{2gh} \rightarrow \bar{F} = 2nm\sqrt{gh} = 2 \times 100 \times 5 \times 10^{-4}\,kg \times \sqrt{2 \times 9.8 \times 0.5}$

$= 0.31\,N$

$m = \frac{0.31}{9.8} \times 10^3 = 30g$

مثال



در راستای y به علت وجود نیروی خارجی تکانه

پایسته نیست

$Mx0 + mx0 = MV + mv$ در راستای x

$V = -\frac{m}{M} v$ ①

پایستگی انرژی : $mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2 \Rightarrow 2gh = v^2 + \frac{M}{m} \left(-\frac{m}{M} v\right)^2$

$2gh = v^2 + \frac{m}{M} v^2$ ②

برگشت : $mv + Mx0 = MV' + mx0 \Rightarrow V' = \frac{m}{M} v$

$\frac{1}{2} m v^2 + 0 = \frac{1}{2} M V'^2 + mgh'$

$\Downarrow$

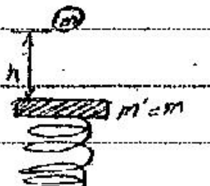
$2gh' = v^2 - \frac{M}{m}\left(\frac{m}{M} v\right)^2$

$2gh' = v^2 \left(1 - \frac{m}{M}\right)$ ③

$\frac{③}{②} \to \frac{h'}{h} = \frac{1 - \frac{m}{M}}{1 + \frac{m}{M}} = \frac{M-m}{M+m}$

مثال: با استفاده از اصل هم ارزی ... فشار گاز را از یک حجم بدست آورید

$p = \frac{1}{3} \rho \overline{v^2}$



مثال: مطابق شکل، گلوله‌ای به جرم $m = 1kg$ از ارتفاع $h = 0.8m$ رها شده و با سرعت
... به جسم $m' = m$ که روی فنری
با سختی $k = 400 N/m$ قرار دارد برخورد کرده و به آن می‌چسبد. مطلوبست:

الف) سرعت مجموعه بلافاصله پس از برخورد

ب) حداکثر تراکم فنر

ج) حداکثر سرعت مجموعه پس از برخورد $(g = 10 m/s^2)$

$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 10 \times 0.8} = 4 m/s \downarrow$

$mv + m'x0 = (m + m') v'$

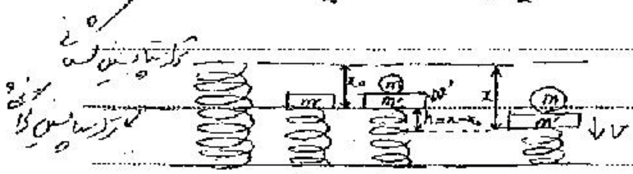
$v' = \frac{v}{2} = 2 m/s$ سرعت بلافاصله

بلافاصله پس از برخورد

بقای انرژی:

$$\frac{1}{2}(m+m')V'^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}(m+m')V^2 + \frac{1}{2}kx^2 - (m+m')g(x-x_0)$$

یا



$$V'^2 + \frac{1}{2}kx^2 = V^2 + \frac{1}{2}kx^2 + 2g(x-x_0)$$

$$4 + 200\left(\frac{1}{40}\right)^2 = V^2 + 200x^2 - 20x + 20\times\frac{1}{40}$$

تراکم اولیه فنر $x_0 = \frac{m'g}{k} = \frac{1\times10}{400} = \frac{1}{40}$

$$4 + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} = V^2 + 200x^2 - 20x$$

$$V^2 = -200x^2 + 20x + \frac{29}{8}$$

حداکثر تراکم فنر وقتی است که سامانه ساکن لحظه‌ای باشد $(V=0)$: $0 = -200x_{Max}^2 + 20x_{Max} + \frac{29}{8}$

$x_{Max} =$

حداکثر سرعت وقتی است که مشتق آن برابر صفر باشد : $2V\frac{dV}{dt} = -200\times2x\frac{dx}{dt} + 20\frac{dx}{dt} + 0$

$$2\frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow -400x + 20 = 0 \Rightarrow x = \frac{20}{400} = \frac{1}{20}(m) = 2x_0$$

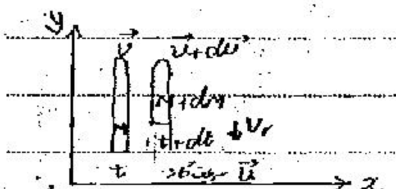
$$x = \frac{1}{20}m \rightarrow V_{Max}^2 = -200\left(\frac{1}{20}\right)^2 + 20\left(\frac{1}{20}\right)^2 + \frac{29}{8}$$

$V_{Max} =$

* وقتی توان ماکزیمم است که مشتق $P = F.V$ برابر صفر باشد.

حرکت راکت:

• راکتی با جرم M در لحظه t (جرم M و سرعت V) در لحظه $t+\Delta t$ یا $(t+dt)$ مقداری از جرم راکت سوخته و بیرون رانده شده. $m+dm$ در نتیجه سرعت $v+dv$ شده و نیز مقداری تغییر در خط حرکت ایجاد می‌شود.



$$M_2 - M_1 = dM$$
$$M_2 = dM + M_1$$

$$d\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$

$$d\vec{P} = \left((M+dM)(\vec{V}+d\vec{V}) + M(-dM)\right) - M\vec{V}$$

$$d\vec{P} = Md\vec{V} + \vec{V}dM + dM\,d\vec{V} - MdM \rightarrow \approx 0$$ صرف نظر می‌کنیم

u: سرعت خروج گازها نسبت به زمین

سرعت نسبی گاز؟

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{V}}{dt} - (\vec{U}-\vec{V})\frac{dM}{dt}$$

$$F_{ext} = M\frac{d\vec{V}}{dt} - (\vec{U}-\vec{V})\frac{dM}{dt}$$

Subject:

Year. 200   Month.   Day.

سرعت راکت نسبت به زمین + سرعت گاز نسبت به راکت = سرعت گاز خارج شده نسبت به زمین

$$\vec{u} = \vec{v}_r + \vec{v} \Rightarrow \vec{u} - \vec{v} = \vec{v}_r$$

$$F_{ext} = M\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}_r \frac{dM}{dt}$$

$\vec{F}_{ext} \approx 0$ اگر به اندازه کافی از زمین دور باشیم
(یعنی نیروی جاذبه مقاوم نداریم)

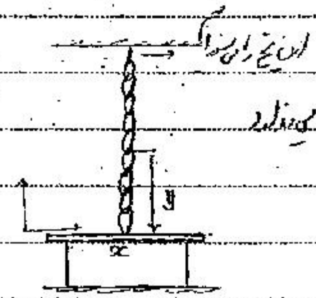
$v_r \frac{dM}{dt} = T$ نیروی پیشرانه یا نیروی پیشران

$$\vec{v}_r \frac{dM}{dt} = M\frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{یا} \quad v_r \frac{dM}{dt} = M\frac{dv}{dt}$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = v_r \int_{M_0}^{M} \frac{dM}{M} \Rightarrow v - v_0 = v_r \ln\frac{M}{M_0}$$

هرچه نسبت جرم باقی مانده به جرم اولیه عدد مایل تر کوچک شود ⇐ راکت سریع‌تر است

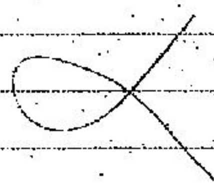
زنجیری که به سقف است می‌بینیم. وقتی زنجیر به میز برخورد می‌کند نیرویی که به میز وارد می‌شود به صورت ... از ... است. اصل



هر چه زنجیر بالاتر باشد نیروی بیشتری به میز وارد می‌کند
زنجیر چگونه است. نیروی آن وزن زنجیر چقدر است؟ (وقتی یک ابتدا ارتباط پیدا می‌کند
زنجیر یک بار از ابتدا به بالا و به میز وارد می‌کند) به این صورت بگوییم ... آزاد است

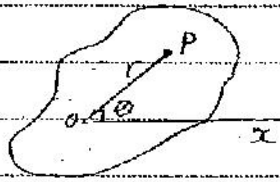
$$\sum F_{ext} = 0 \Rightarrow \Delta P \ \text{ثابت}$$

$$P_1 = P_2 \Rightarrow$$



سینماتیک دورانی:

دوران حول محور ثابت (یک) ... محور



موقعیت لحظه‌ای P $\quad t_1 \quad t_2 \quad \omega_{av} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ rad/s

$\qquad\qquad\quad \theta_1 \quad \theta_2$

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

t_1 t_2

ω_1 ω_2 $\alpha_{av} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ rad/s^2 $\alpha = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$

$$\alpha = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

معادلات حرکت با شتاب زاویه‌ای ثابت:

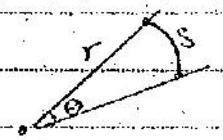
$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ $\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \alpha\int_0^t dt$ → $\omega = \omega_0 + \alpha t$ → $\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \alpha t$

$\theta = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ با انتگرال‌گیری

$\alpha = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$ $\int_{\omega_0}^{\omega}\omega d\omega = \alpha\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta$

$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$ رابطه بین سرعت و جابجایی

مقایسه کمیت‌های زاویه‌ای و خطی:

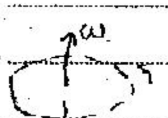


(مفهوم رادیان) $\theta = \frac{s}{r}$ s = خطی

رابطه بین این دو؟ ← θ = زاویه‌ای

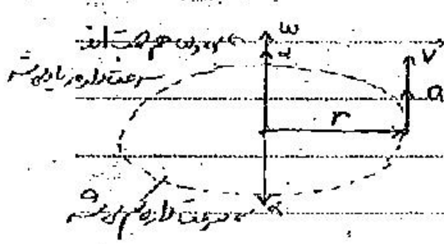
$S = r\theta$

$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$ → $V = r\omega$ نتیجه اندازه سرعت

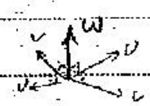


$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$ → $a_T = r\alpha$ شتاب مماسی

ω اگر جهت عوض شود $a_r = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = v.\omega$ در حرکت دورانی شتاب مرکزگرا داریم که a_r نامیده می‌شود



$\vec{V} = \vec{r} \times \vec{\omega}$



$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{r} + \vec{\omega}\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$ → $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_T + \vec{a}_r$

$|\vec{\alpha} \times \vec{r}| = r\alpha$ → $a_T = r\alpha$ $\vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{r}$ برای شتاب مماسی داریم

$|\vec{\omega} \times \vec{v}| = \omega.v = \omega.r\omega = r\omega^2$ → $a_r = r\omega^2$ $\vec{a}_r = \vec{\omega}.\vec{v}$