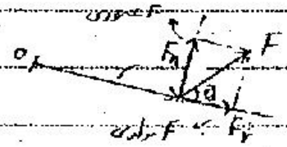
دینامیک دورانی

گشتاور دوران یک ذره

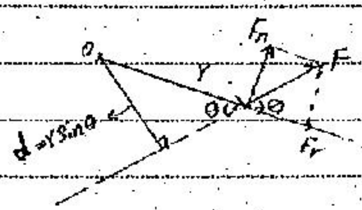
* در انتقال نیرو عامل حرکت است * در دوران گشتاور عامل حرکت است.



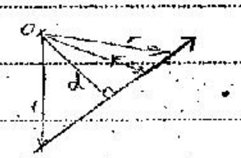
گشتاور برابر است با حاصلضرب برداری بردار مکان در نیرو $\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}$ گشتاور

$$\tau = F_n \cdot r = F\sin\theta \cdot r$$

$$\tau = F \cdot \underbrace{r\sin\theta} = F \cdot d \qquad d = \text{بازوی گشتاور}$$

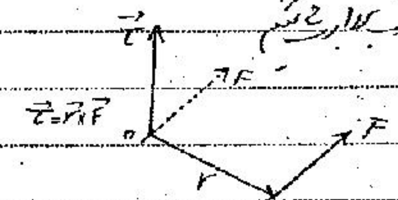


گشتاور کمیتی برداری است



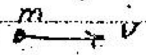
$$\vec{\tau}=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ x & y & z\\ f_x & f_y & f_z\end{vmatrix}$$

[illegible]

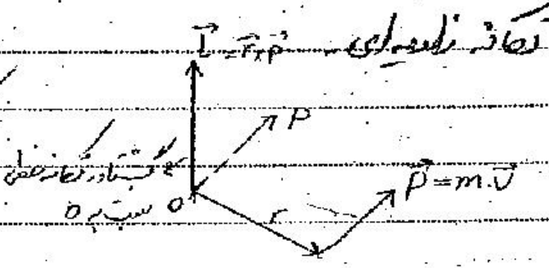


مثلاً اگر صفحه xy باشد (z) در راستای بردار $\vec{\tau}$ عمود بر صفحه است.

تکانه زاویه‌ای



* تکانه خطی $\vec{p}=m\vec{v}$ اگر گشتاور این را نسبت به یک نقطه حساب کنیم می‌شود تکانه زاویه‌ای



* تکانه زاویه‌ای گشتاور تکانه خطی نسبت به نقطه است.

$$\text{تکانه زاویه‌ای} = \vec{r}\times\vec{p} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ x & y & z\\ mv_x & mv_y & mv_z\end{vmatrix}$$

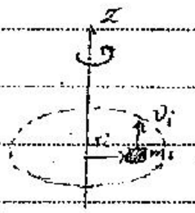
Subject:

Year. 200   Month.   Day.

تکانه زاویه‌ای یک ذره، سیستم ذرات، جسم صلب:

$\vec L = \vec r \times \vec p$ تکانه زاویه‌ای یک ذره

$\vec L = \sum \vec l_i = \sum \vec r_i \times m_i \vec v_i$ تکانه زاویه‌ای سیستم ذرات



$\vec l_i = \vec r_i \times m_i \vec v_i$

$v_i = r_i \omega$ ← ω اندیس نمی‌گیرد چون جسم صلب همراه اجزایش باهم حرکت می‌کنند.

$\vec l_i = \vec r_i \times (m_i (r_i \omega))$

$l_i = m_i r_i^2 \omega$

$\vec l_i = m_i r_i^2 \omega \hat k$

$\vec L = \sum \vec l_i = \sum m_i r_i^2 \omega \hat k$

$I = \sum m_i r_i^2$ لختی دورانی

$\vec L = I \omega \hat k$

$L = I\omega$ تکانه زاویه‌ای $p = mv$ تکانه خطی

قانون دوم نیوتن (در دوران): (برای یک ذره، سیستم ذرات، جسم صلب)

برای یک ذره: $\vec L = \vec r \times \vec p$

$\frac{d\vec L}{dt} = \frac{d\vec r}{dt} \times \vec p + \vec r \times \frac{d\vec p}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec L}{dt} = \vec \tau$

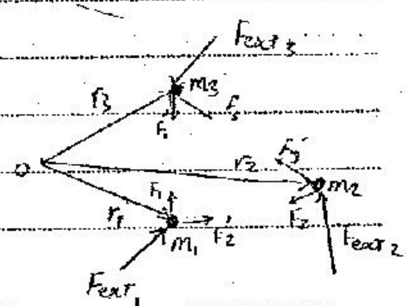
مشتق تکانه زاویه‌ای نسبت به زمان برابر است با گشتاور نیروی وارده
($\vec F = \frac{d\vec p}{dt}$ مثل)

$$\begin{cases} \frac{d\vec r}{dt} \times \vec p = \vec v \times m\vec v = 0 \\ \vec r \times \frac{d\vec p}{dt} = \vec r \times \vec F = \vec \tau \quad \text{گشتاور} \end{cases}$$

برای سیستم ذرات: $\sum \vec \tau_{ext} + \sum \vec \tau_{int} = \frac{d\vec L}{dt}$

داریم $\sum \vec \tau_{int} = 0$

بنابراین $\sum \vec \tau_{ext} = \frac{d\vec L}{dt}$



F, F' قرینه‌اند

از ①: $\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_2' + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{ext_1} = \frac{d\vec{L}_1}{dt}$

از ②: $\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_3' + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{ext_2} = \frac{d\vec{L}_2}{dt}$

از ③: $\vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_1' + \vec{r}_3 \times \vec{F}_{ext_3} = \frac{d\vec{L}_3}{dt}$

با هم جمع می‌کنیم

$$\vec{\tau}_{ext_1} + \vec{\tau}_{ext_2} + \vec{\tau}_{ext_3} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_2 + (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_3 = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\sum \vec{\tau}_{ext} + 0 = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

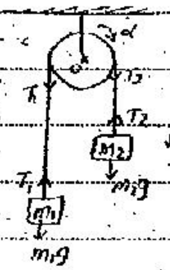
با توجه به شکل چون $(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)$ بر $\vec{F}_1$ منطبق است پس ضرب خارجی آنها صفر است.

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha \Rightarrow \sum \tau_{ext} = I\alpha$$

پس در $\sum \tau_{ext} = I\alpha$ بالا زمانی صدق می‌کند که جسم حول محور ثابت چرخش داشته باشد نسبت به مرکز جرم (یا نقطه‌ای که ساکن باشد)

مثال: نخ و قرقره ایده‌آل نیستند.
شتاب حرکت را به دست آورید.
قرقره اصطکاک دارد و نخ روی آن سر نمی‌خورد.
بنابراین T_1 و T_2 برابر نیستند.



حول مرکز جرم است چون ساکن است نسبت به این نقطه در نظر می‌گیریم

سه جسم داریم که یکی حرکت دورانی دارد و دوتا حرکت انتقالی دارند.

$T_1 - m_1g = m_1a$ ①

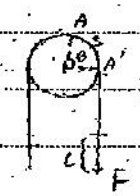
$T_2 - m_2g = -m_2a$ ②

$(T_2 R - T_1 R) = I\alpha$ ③

گشتاور نیروی T_2

$a = R\alpha$ ④

عامل حرکت دورانی گشتاور (نیرو در بازو (R)) است



$\Rightarrow s = l \qquad s = R\theta$

$\dot{s} = \dot{l} \qquad \dot{s} = R\omega$

$\ddot{s} = \ddot{l} \qquad \ddot{s} = R\alpha$

$v_A = v$

$a_A = a$

$a = R\alpha$

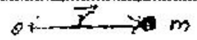
چون نخ روی قرقره نمی‌لغزد

$$\begin{cases} T_1 = m_1 g + m_1 a \\ T_2 = m_2 g - m_2 a \\ (T_2 - T_1) = \frac{I\alpha}{R} = \frac{Ia}{R^2} \end{cases}$$

$\alpha = \frac{a}{R}$

$$\Rightarrow a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}$$

اینرسی دورانی :



برای ذره $\quad m\vec{r} =$ گشتاور اول جرم

$I_o = m(\vec{r}\cdot\vec{r}) = mr^2$ گشتاور دوم جرم نسبت به o

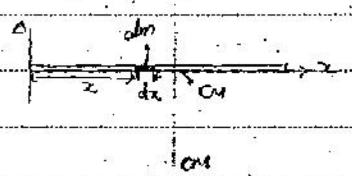
(سیستم ذرات) برای n ذره : $\quad I_o = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$

برای جسم صلب :

$$I_o = \sum m_i r_i^2$$

$$I_o = \int_{\text{روی جسم}} r^2\,dm$$

مثال: اینرسی دورانی میله‌ای باریک به جرم M و طول L را که یکنواخت است نسبت به محوری که از انتهای میله گذشته بر میله عمود است و بار دیگر نسبت به محوری که از مرکز جرم میله گذشته بر میله عمود است بیابید.



$$dm = \frac{M}{L}\,dx$$

$$dI_\Delta = x^2 dm = \frac{M}{L} x^2 dx$$

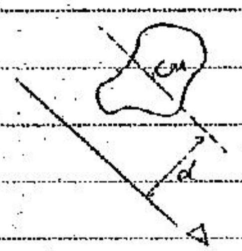
$$I_\Delta = \frac{M}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3} ML^2$$

$$I_{CM} = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx$$

$$I_{CM} = \frac{1}{12} ML^2$$

قضیه محورهای موازی :

برای اینکه اینرسی دورانی را نسبت به Δ حساب کنیم طبق این قضیه اول اینرسی دورانی را نسبت به محوری که از CM گذشته و موازی Δ است محاسبه می‌کنیم.



$$I_\Delta = I_{CM} + Md^2$$

اینرسی دورانی جسم نسبت به محور Δ — جرم جسم — فاصله دو محور

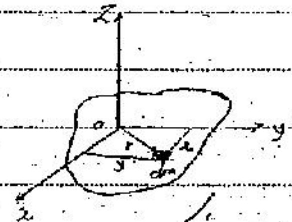
اینرسی دورانی جسم نسبت به محوری که از مرکز جرم گذشته و موازی Δ است

مثال: با استفاده از قضیه محورهای موازی گشتاور ماند یک میله را نسبت به مرکز جرم آن به دست آورید در صورتی که بدانیم اینرسی دورانی جسم نسبت به انتهای میله آن $I_0 = \frac{1}{3}ML^2$

$$I_\Delta = I_{CM} + Md^2 \Rightarrow I_{CM} = I_\Delta - M\underbrace{d^2}_{\text{فاصله دو محور}}$$

$$I_{CM} = \frac{1}{3}ML^2 - M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$$

قضیه محورهای متعامد برای ورقه‌های نازک (دو بعدی)



$$I_0 = \int r^2 dm$$

با توجه به شکل $r^2 = x^2 + y^2$

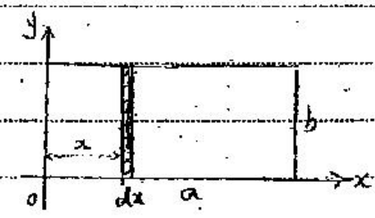
$$I_0 = \int y^2 dm + \int x^2 dm$$

$$I_0 = I_{xx} + I_{yy}$$

قضیه محورهای متعامد (دو بعدی): $I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$

الف- گشتاور ماند

۱. مستطیل



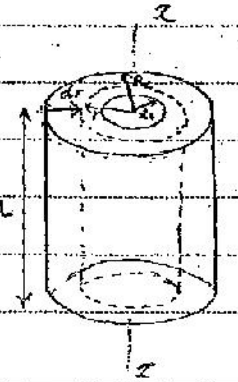
$$dm = \frac{M}{ab} b\, dx = \frac{M}{a} dx$$

$$I_{yy} = \int x^2 dm = \frac{M}{a}\int_0^a x^2 dx$$

$$I_{yy} = \frac{1}{3}Ma^2$$

$$I_{xx} = \frac{1}{3}Mb^2$$

ج- گشتاور ماند استوانه



$$I_{zz} = \frac{1}{2}\pi L\rho(R_2^4 - R_1^4)$$

$$dm = 2\pi r L\, dr\, \rho$$

$$m = \pi(R_2^2 - R_1^2) L\rho$$

$$dI_{zz} = r^2 dm$$

$$I_{zz} = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$$

$$I_{zz} = 2\pi\rho\int_{R_1}^{R_2} r^3 dr$$

$$I_z = 2\pi\rho(R_2^4 - R_1^4)$$

Subject:

Year. 200 Month. / Day.

دیسک توپر

$dm = 2\pi x . \rho . dx$

$I = \int x^2 dm$

$I = \int_0^R 2\pi\rho\, x^3 dx$

$I = 2\pi\rho . \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} MR^2$

$M = \rho \times \pi R^2$

$I_{zz} = \frac{1}{2} mR^2$

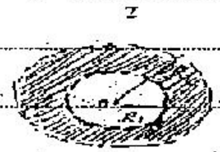
حالت خاص. الف) استوانه توپر: $R_1 = 0$

ب) استوانه توخالی: $dm = \rho L . 2\pi x dx$ $R_2 = R$

ج) پوسته استوانه‌ای نازک:

$(R_1 \simeq R_2) = R$

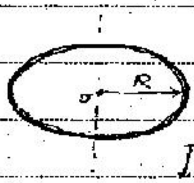
$I_{zz} = \frac{1}{2} mR^2 . 2 = mR^2$



یک برش از این استوانه انتخاب می‌کنیم (قرص نازک)

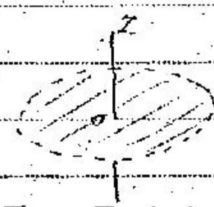
$I_{zz} = I_o = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$

حلقه نازک:



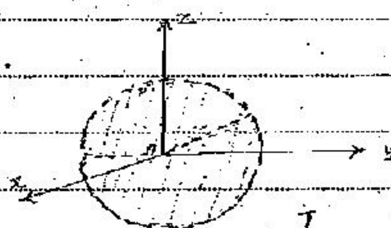
$I_{zz} = I_o = mR^2$

قرص کامل:



$I_{zz} = I_o = \frac{1}{2} mR^2$

قرص نازک:



$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$

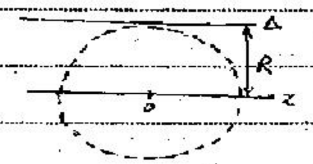
متقارن است $\rightarrow I_{xx} = I_{yy}$

$I_{zz} = 2 I_{xx} = 2 I_{yy}$

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2} I_{zz}$

$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} mR^2$

قرص نازک:



$I_\Delta = I_{OY} + mR^2$

$I_\Delta = \frac{1}{4} mR^2 + mR^2$

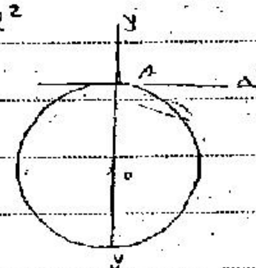
$I_\Delta = \frac{5}{4} mR^2$

$I_A = I_\Delta + I_{yy}$

$I_A = \frac{5}{4} mR^2 + \frac{1}{4} mR^2$

$I_A = \frac{3}{2} mR^2$

قرص نازک

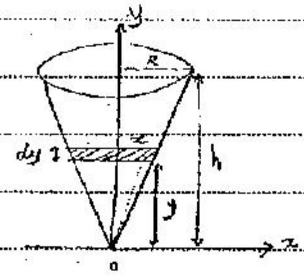


$I_A = I_o + mR^2$

$I_A = \frac{1}{2} mR^2 + mR^2$

$I_A = \frac{3}{2} mR^2$

گشتاور ماند یک مخروط



$$dm = \pi x^2 dy\, \rho$$

$$\frac{x}{R} = \frac{y}{h} \Rightarrow x = \frac{R}{h} y$$

$$dI_{yy} = \frac{1}{2} x^2 dm$$ (زیرا قرص است و محور از وسط آن رد شده)

$$dI_{yy} = \frac{1}{2} \pi \rho x^4 dy$$

$$dI_{yy} = \frac{1}{2} \pi \rho \left(\frac{R}{h} y\right)^4 dy$$

$$dI_{yy} = \frac{1}{2} \pi \rho \frac{R^4}{h^4} y^4 dy$$

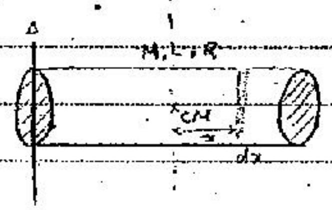
$$I_{yy} = \frac{1}{2} \pi \rho \frac{R^4}{h^4} \int_0^h y^4 dy \rightarrow I_{yy} = \frac{1}{10} \pi \rho \left(\frac{R^4}{h^4}\right) . h^5$$

$$I_{yy} = \frac{1}{10} \pi \rho R^4 h$$

$$I_{yy} = \frac{1}{3} \pi R^2 \rho h . \frac{3}{10} R^2$$

$$I_{yy} = \frac{3}{10} m R^2$$

مثال: گشتاور ماند استوانه زیر را نسبت به محور مشخص شده بدست آورید.



$I_\Delta = ?$ $\quad I_\Delta = \frac{1}{3} ML^2 + \frac{1}{4} MR^2$ ([illegible])

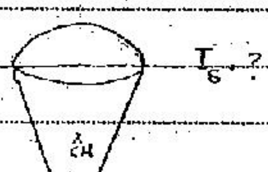
([illegible])

$$dm = \pi R^2 \rho\, dx \qquad I_{CM} = \int x^2 dm$$

$$M = \rho \times \pi R^2 L \qquad I_{CM} = \int_0^L x^2 \pi R^2 \rho\, dx = \pi R^2 \rho . \frac{L^3}{3} = \frac{1}{3} ML^2$$

$$I_\Delta = I_{CM} + Md^2 \Rightarrow I_\Delta = \frac{1}{3} ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow I_\Delta = \frac{1}{3} ML^2 + \frac{1}{4} ML^2$$

مثال: گشتاور ماند مخروط را نسبت به محورهای مشخص شده بدست آورید.



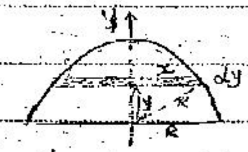
$I_\delta = ?$

$I_\Delta = ?$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

مثال. اینرسی دورانی یک نیم‌کره همگن را نسبت به قطر آن بیابید.



$$dm = \pi x^2 \, dy \, \rho \qquad (x^2 = R^2 - y^2)$$

$$I = \int y^2 dm = \int^{R} y^2 (R^2 - y^2)\, \pi \rho \, dy$$

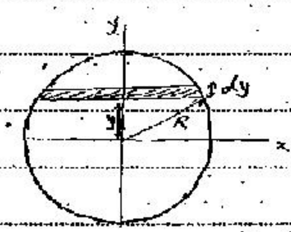
$$= \rho\pi \cdot \frac{2}{15} R^5$$

$$= \rho\pi \cdot \frac{2}{3} R^3 \times \frac{1}{5} R^2 = \frac{1}{5} m R^2$$

$$m = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3 \times \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{2}{3}\rho\pi R^3$$

اینرسی دورانی یک کره



$$dm = \pi x^2 \, dy \, \rho$$

$$dI_{yy} = \frac{1}{2} x^2 dm$$

$$dI_{yy} = \frac{1}{2} x^4 \pi \rho \, dy$$

$$x^2 = R^2 - y^2 \rightarrow dI_{yy} = \frac{1}{2}\pi\rho (R^2 - y^2)^2 dy$$

$$I_{yy} = \frac{1}{2}\pi\rho \int_{-R}^{R} (R^2 - y^2)^2 dy$$

$$I_{yy} = \pi\rho \left(R^4 y + \frac{y^5}{5} - \frac{2}{3} R^2 y^3\right)\Big|_0^R$$

$$I_{yy} = \frac{8}{15}\pi R^5 \rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \times \frac{2}{5} R^2$$

$$I_{yy} = \frac{2}{5} M R^2$$

مثال. اینرسی دورانی یک کره همگن نسبت به محور قطری برابر $I = \frac{8}{15}\pi R^5 \rho$ است با استفاده از این رابطه اینرسی دورانی یک پوسته کروی نازک را نسبت به یکی از قطرهای آن بدست آورید.

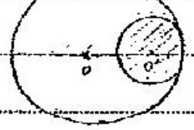
$$I = \frac{8}{15}\pi\rho (R_2^5 + R_1^5)$$

در پوسته نازک $R_1 \simeq R_2 \rightarrow I = \frac{8}{15}\pi\rho(2R^5) = \frac{16}{15}\rho\pi R^5$

PILAVARAN

PAGE:

از قرص همگن به شعاع R مطابق شکل قرصی کوچک به شعاع $r=\frac{R}{4}$ بیرون آورده‌ایم. لختی دورانی جسم باقی‌مانده را نسبت به مرکز قرص بدست آورید. (برحسب m' جرم باقی‌مانده، R شعاع قرص اصلی)



$$I_o = \frac{1}{2}MR^2$$

$$I'_{o'} = \frac{1}{2}mr^2$$

$$I'_o = \frac{1}{2}mr^2 + m(R-r)^2$$

$$\frac{m}{M} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{R^2/16}{R^2} = \frac{1}{16} \rightarrow M = 16m$$

$M = 16m$

$$I'_o = \frac{1}{2}m\frac{R^2}{16} + \frac{9}{16}mR^2 = \frac{19mR^2}{32}$$

اینرسی دورانی قرص بیرون آورده شده نسبت به مرکز قرص اصلی:

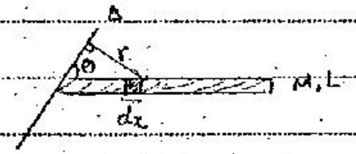
لختی جسم باقی‌مانده: $I''_o = I_o - I'_o$

$$I''_o = \frac{16}{2}mR^2 - \frac{19}{32}mR^2 = \frac{237}{32}mR^2$$

$$\rightarrow I''_o = \frac{237}{32} \times \frac{m'}{15}R^2 = \frac{237}{480}m'R^2$$

$$M' = M - m = 16m - m = 15m \Rightarrow m = \frac{m'}{15}$$

اینرسی میله باریک:



$r = x\sin\theta$

$$dm = \frac{M}{L}dx$$

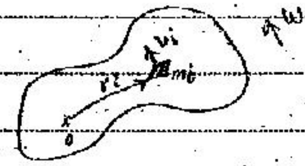
$$dI_\Delta = r^2 dm$$

$$dI_\Delta = \frac{M}{L}r^2 dx$$

$$dI_\Delta = \frac{M}{L}x^2\sin^2\theta\, dx$$

$$I_\Delta = \frac{M}{L}\sin^2\theta\int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3}ML^2\sin^2\theta$$

انرژی جنبشی در دوران:



$$k_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

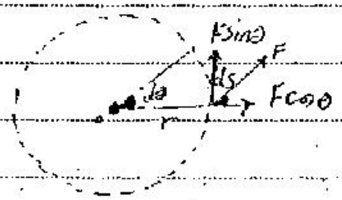
$$k_i = \frac{1}{2}m_i(r_i\omega)^2$$

$$k_i = \frac{1}{2}m_i r_i^2\omega^2$$

$$k = \sum \tfrac{1}{2}m_i r_i^2\omega^2 = \frac{1}{2}I_o\omega^2$$

I_o ممان اینرسی جسم نسبت به محور دوران

محاسبه در دوران:



$$dw = F\sin\theta \cdot ds$$

$$ds = r\,d\theta \rightarrow dw = F\sin\theta \cdot r\,d\theta \rightarrow dw = \tau\,d\theta$$

$$W = \int \tau\,d\theta$$

$$P = \frac{dw}{dt} = \frac{\tau\,d\theta}{dt} \rightarrow P = \tau\omega$$

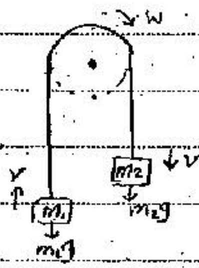
$$\vec{\tau} = \frac{dL}{dt} \rightarrow \tau = I\alpha$$

$$\tau\,d\theta = I\frac{d\omega}{dt}\cdot d\theta \rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2}\tau\,d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega\,d\omega$$

$$W = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

$$W = K_2 - K_1 = \Delta K$$

ـ با استفاده از قضیه کار انرژی شتاب را در سیستم قرقره بدست آورید.



$$\left(\frac{1}{2}m_1V^2 + \frac{1}{2}m_2V^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\right) - 0 = m_2gy - m_1gy$$

$$V = R\omega \qquad \text{نخ روی قرقره نمی‌لغزد}$$

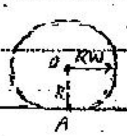
$$\omega = V/R$$

$$\frac{1}{2}V^2\left(m_1 + m_2 + I/R^2\right) = (m_2 - m_1)gy$$

$$V^2 = \frac{2(m_2 - m_1)gy}{m_1 + m_2 + I/R^2}$$

$$2V\frac{dV}{dt} = \frac{2g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + I/R^2}\cdot\frac{dy}{dt} \rightarrow a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + I/R^2}$$

غلتش:



حرکت دورانی و انتقالی است مرکز جرم آن تغییر می‌کند

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}I_A\omega^2 \\ I_A &= I_{CM} + MR^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow K = \frac{1}{2}(I_{CM} + MR^2)\omega^2$$

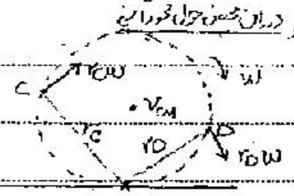
غلتش برابر است با دوران حول محور آنی دوران

$$K = \frac{1}{2}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

$$K = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

انرژی جنبشی جسم غلتان = انرژی جنبشی (انتقالی) مرکز جرم + (دوران حول مرکز جرم)

در این حین حول محور آنی ، $2RW$



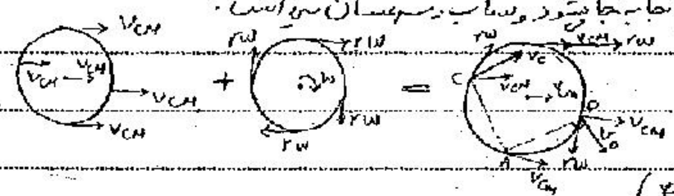
$V_A = 0 \qquad a_A = 0$

$V_{CM} = RW \qquad a_{CM} = R\alpha$

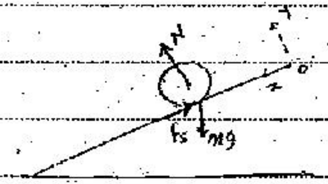
$V_B = 2RW \qquad a_B = 2R\alpha$

a) شتاب: نقاط برابر است با شعاع حاصل از آن در α

انتقال یعنی اینکه همه نقاط به موازات هم جابجا شوند و شتاب و سرعتشان یکی است.



- اگر غلتش بدون لغزش باشد (ادامه *)



انتقال مرکز جرم

$$\Sigma F(x) = mg\sin\alpha - f_s = m\bar{a} \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = N - mg\cos\alpha = 0 \quad (2)$$

دوران حول مرکز جرم: $\bar{\tau} = \bar{I}\alpha$

$$f_s \cdot R = \bar{I}\alpha \quad (3)$$

(شرط غلتیدن (غلتش بدون لغزش)) $\bar{a} = R\alpha$

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - f_s = m\bar{a} \\ f_s \cdot R = \bar{I}\alpha \\ \bar{a} = R\cdot\alpha \end{cases}$$

$$\rightarrow f_s = \frac{\bar{I}\alpha}{R} = \frac{\bar{I}\bar{a}}{R^2}$$

f_s - شتاب a انتقال را کم می‌کند یعنی حرکت کندتر می‌شود

$$mg\sin\alpha - \frac{\bar{I}\bar{a}}{R^2} = m\bar{a} \Rightarrow \bar{a} = \frac{mg\sin\alpha}{m + \bar{I}/R^2}$$

نقش نیروی مالش در انتقال بر خلاف انتقال را می‌گیرد و شتاب آن را کم می‌کند.

می‌غلتد ولی سر نمی‌خورد یعنی اصطکاک داریم.

(ادامه *) اگر غلتش بدون لغزش باشد باید نقطه A صفر یعنی نباید سرعت داشته باشد.

$$V_A = V_{CM} - RW = 0 \rightarrow V_{CM} = RW$$

$$V_B = V_{CM} + RW = 2RW \rightarrow V_B = 2RW$$

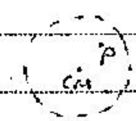
$$V_C = R_C W$$

این روابط برای شتاب هم صادق است.

در حالت کلی:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_{CM} + \vec{V}_{P/CM}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{CM} + \vec{a}_{P/CM}$$



Subject:

Year. 200 Month. Day.

الف) استوانه توخالی:

$$\bar{I} = \frac{1}{2}MR^2$$

اصطکاک شتاب انتقال را کم می‌کند

$\bar{a} = \frac{2}{3} g\sin\alpha$ ← علت لغزش نداری

انرژی تلف نمی‌شود به همین دلیل 2/3 است.

ب) کره توپر

$$\bar{I} = \frac{2}{5}mR^2$$

$$\bar{a} = \frac{5}{7}g\sin\alpha$$

ج) محاسبه حداقل ضریب مالش برای غلتش بدون لغزش

استوانه توپر

$$f_s = \frac{\bar{I}\bar{a}}{R^2} = \frac{\frac{1}{2}mR^2\left(\frac{2}{3}g\sin\alpha\right)}{R^2}$$

$$f_s = \frac{1}{3}mg\sin\alpha$$

کمترین نیروی مالش مورد نیاز

کران f_s مورد نیاز برای عدم لغزش است.

بیشترین نیروی مالش استاتیکی قابل دسترس ←

$$f_{s\,max} = \mu_s N = \mu_s mg\cos\alpha$$

اگر $\frac{1}{3}mg\sin\alpha = \mu_s mg\cos\alpha$

$\mu_s = \frac{1}{3}\tan\alpha$ اصطکاک مورد نیاز تامین شده غلتش بدون لغزش ولی استوانه در آستانه لغزش است.

$$\mu_s mg\cos\alpha > \frac{1}{3}mg\sin\alpha$$

$\mu_s > \frac{1}{3}\tan\alpha$ غلتش بدون لغزش است و جسم از لغزش بدور

اگر $\mu_s < \frac{1}{3}\tan\alpha$ ← غلتش همراه با لغزش

کره توپر

کره توپر ← $f_s = \frac{\bar{I}\bar{a}}{R^2} = \frac{\frac{2}{5}mR^2 \cdot \frac{5}{7}g\sin\alpha}{R^2}$

$$\mu_s = \frac{2}{7}\tan\alpha$$

$\mu_s > \frac{2}{7}\tan\alpha$. $\mu_s < \frac{2}{7}\tan\alpha$

PILAVARAN

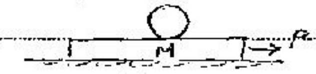
PAGE:

Subject:

Year. 200   Month.   Day.

سرعت انتقال مرکز جرم گوی با استوانه را حساب کنید (با استفاده از ...)

در انتقال شرط این است که جرم در مرکز جرم جمع شود



$a, \bar{a}, p$

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\bar{a}t^2 + \bar{V}_0 t + x_0$$

$$\bar{V} = \bar{a}t + \bar{V}_0$$

$$\bar{V}^2 - \bar{V}_0^2 = 2\bar{a}(\bar{x} - \bar{x}_0)$$

(مثال حل نشده)

پایستگی تکانه زاویه‌ای

$$\vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

اگر بر سامانه‌ای گشتاور خارجی اثر نکند تکانه زاویه‌ای کل تغییر نمی‌کند یعنی اجزا ممکن است تغییر کنند.

اگر بر سامانه‌ای $\tau_{ext} = 0$ پس $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \to \vec{L} =$ ثابت

$\vec{L}_i = \vec{L}_f$

پیوستگی تکانه زاویه‌ای

در مورد جسم صلب در حال چرخش حول محور ثابت : $I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$

اگر این شخص که نشسته است دستش را جمع کند سرعتش زیاد می‌شود

$L_1 = I_1 \omega_1$

$L_2 = I_2 \omega_2$

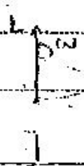
$L_1 = L_2 \Rightarrow I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$

$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{I_1}{I_2}$

حرکت دوچرخه هم همین مسأله است. چون تعادل آن مشکل است که با حرکت تعادل آن ایجاد است

وقتی حرکت می‌کند بردار L را ... می‌کند ولی وقتی ساکن است L ندارد

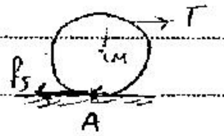
وقتی هنگام حرکت L بزرگ دارد و اگر بخواهیم بیفتد باید L تغییر کند که تغییر آن مشکل است.



Subject:

Year.200 Month. Day.

(3)



$T - f_s = M\bar{a}$

$f_s.R + T.R = I\alpha$

$\bar{a} = R\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\bar{a}}{R}$

$\bar{a} = ?$

$a = \frac{2T}{M + I/R^2}$

$\begin{cases} T - f_s = Ma \\ f_s + T = \frac{Ia}{R \times R} \end{cases}$

$2T = a(M + \frac{I}{R^2}) \rightarrow a = \frac{2T}{M + I/R^2} = \frac{2T}{M + \frac{MR^2}{2R^2}} = \frac{4T}{3M}$

$T.2R = I_A\alpha$

$T.2R = (\frac{1}{2}MR^2 + MR^2)\alpha$

$\left.\begin{matrix} \alpha = \frac{2RT}{3/2 MR^2} \\ \bar{a} = R\alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow \bar{a} = \frac{4T}{3M}$

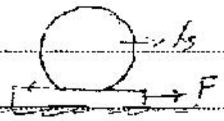
پیلاوران

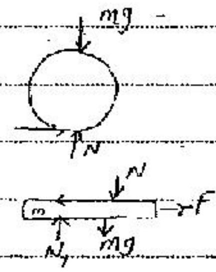
PILAVARAN

Subject:
Year. 200 Month. Day.

(2)

دینامیک جرم ۲:



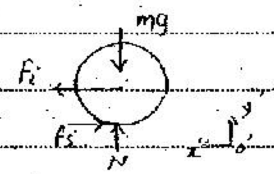


$$\begin{cases} f_s = ma \\ f_s \cdot R = \frac{2}{5} mR^2\alpha \\ \bar{a} - R\alpha = a \end{cases}$$

$\rightarrow \bar{a} = a + R\alpha$

$$F - f_s = ma$$

مثال: یک استوانه به جرم M، شعاع R که آن را استوانه توپر فرض می‌کنیم پشت اتاق کامیونی در حالت سکون قرار دارد. اگر کامیون با شتاب ثابت a به حرکت درآید پس از طی چه مسافتی استوانه از پشت کامیون می‌افتد؟ طول اتاق کامیون را L و غلتش استوانه را بدون لغزش فرض کنید. (مسئله را از دید ناظر متصل به کامیون تجزیه و تحلیل کنید)



$$-f_s + f_i = M\bar{a}'$$

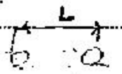
$$f_s \cdot R = \frac{1}{2} MR^2\alpha$$

$$\bar{a}' = R\alpha$$

شتاب کامیون

$$f_s = \frac{1}{2} M\bar{a}' \rightarrow -\frac{1}{2} M\bar{a}' + Ma = M\bar{a}'$$

شتاب انتقال مرکز جرم استوانه نسبت به شتاب کامیون $\bar{a}' = \frac{2}{3}a$



$$x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \frac{x}{L} = \frac{a}{a'} = \frac{a}{\frac{2}{3}a} = \frac{3}{2}$$

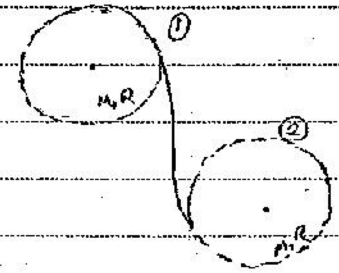
$$L = \frac{1}{2}a't^2$$

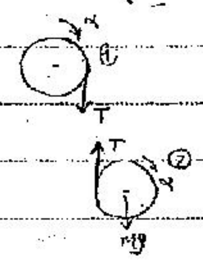
مثال: یک نخ به طول R دور قرقره پیچیده شده است.

در شکل مقابل دستگاه را از حالت سکون رها می‌کنیم. نخ از قرقره ۲ باز شده و قرقره ۱ حول محورش می‌چرخد. حرکت قرقره ۲ انتقال و دوران است. اگر نخ روی قرقره ۲ نلغزد مطلوب است: - شتاب زاویه‌ای هر یک از دو قرقره

- شتاب انتقال مرکز جرم قرقره ۲ - کشش نخ

(اینرسی دورانی قرقره‌ها را $\frac{1}{2}MR^2$ فرض کنید)



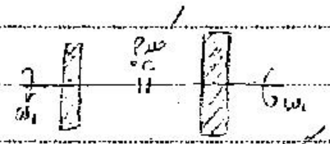


$$\begin{cases} T.R = \bar{I}\alpha \\ Mg - T = M\bar{a} \\ T.R = \bar{I}\alpha \\ \bar{a} = R\alpha (+) R\alpha \end{cases}$$

?

(1)

در هر جهت که نیروی گشتاور خارجی اثر نکند تکانه زاویه‌ای پایسته می‌ماند.



$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega$$

$$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}$$

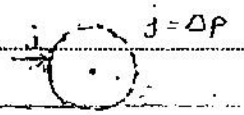
$$k = \frac{1}{2} I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2\omega_2^2$$

$$k' = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega_2^2$$

(مثال از تمرین)

صفحه 382 کتاب

سوال 14



$J = \Delta P$

$$J = mv_0 - 0$$

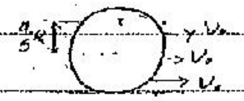
$$J \cdot d = I\omega_0$$

$$mv_0 d = I\omega_0$$

$$v_0 = \bar{v} = R\omega_0$$

$$m(R\omega_0)d = \frac{2}{5} mR^2\omega_0 \Rightarrow d = \frac{2}{5}R$$

17



$$J = \Delta P \rightarrow J = mv_0 - 0$$

$$J \cdot d = \bar{I}\omega_0$$

$$mv_0 \times \frac{4}{5}R = \frac{2}{5} mR^2\omega_0$$

$\frac{4}{5} \neq \frac{2}{5} \rightarrow$ پس غلتش $v_0 = \frac{1}{2}R\omega_0$ [illegible]
حرکت با چرخش است.

$$f_k = m\bar{a} \Rightarrow \mu_k mg = m\bar{a} \rightarrow \bar{a} = \mu_k g$$

$$\frac{\bar{v} - v_0}{t} = \mu_k g \quad (1)$$

$$-f_k \cdot R = \frac{2}{5} mR^2\alpha \rightarrow -\mu_k mgR = \frac{2}{5} mR^2 \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

$$\mu_k g = \frac{2}{5t}(R\omega_0 - R\omega) \quad (2)$$

$(1) = (2)$

شرط غلتش: $\bar{v} = R\omega$

$$\frac{2}{5}(R\omega_0 - R\omega) = \bar{v} - v_0$$

$$\bar{v} = R\omega \;,\; v_0 = \frac{1}{2}R\omega_0$$

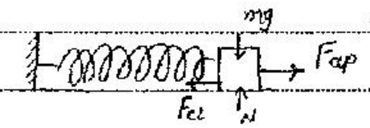
$$2(2v_0 - v) = 5\bar{v} - 5v_0 \Rightarrow 9v_0 = 7v \rightarrow v = \frac{9}{7}v_0$$

ادامه در جزوه [illegible]

Subject:

Year. 200 Month. Day.

نوسان:



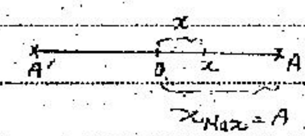
$F = ma$

$-kx = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow m\dfrac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x = 0$ معادلات دیفرانسیل معادلاتی از نسبت $\ddot{x}$, $\dot{x}$, x

$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$



$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$

$x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$

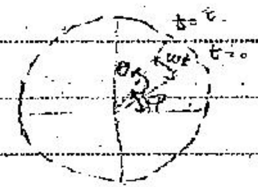
$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ $\quad \dfrac{1}{T} = f$

$y = A\sin\omega t$

$x = A\cos\omega t$

$x = A\cos\theta$

$= A\cos(\omega t + \varphi)$



$x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$\dfrac{dx}{dt} = v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$

$\dfrac{dv}{dt} = a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow a = -\omega^2 x$

$F = -m\omega^2 x$

$F = -m\omega^2 x$
$F = -kx$ $\Rightarrow k = m\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x = 0$

کل زاویه این ساعتگرد است می‌بینید

$F = ma$

$mg\sin\theta = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

در θ های کوچک $\Rightarrow \sin\theta = \tan\theta = \theta = \dfrac{x}{L}$

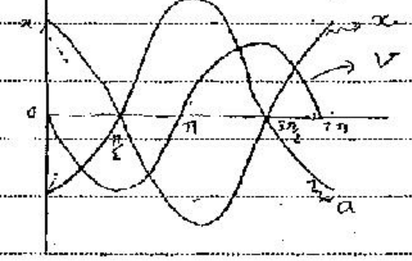
PILAVARAN

PAGE:

Subject:

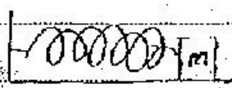
Year.200 Month. Day.

پس $mg\frac{x}{L} = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{L}x = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{L}$



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

ωt	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x	$+A$	0	$-A$	0	A



$U + K =$ مقدار ثابت

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$kx^2 + mV^2 = kA^2 \rightarrow V^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2)$$

$$V = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$$

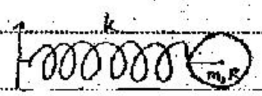
$T = ?$ باید به معادله $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ برسیم

$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}kA^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} kx\frac{dx}{dt} + mV\frac{dV}{dt} = 0$

$$kx + m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

مثال: در شکل مقابل جسم فنری را کشیده استوانه که غلتش بدون لغزش دارد پریود حرکت نوسان را بیابید



با پایستگی انرژی: $U + K =$ مقدار ثابت

جسمی که غلتش دارد دو انرژی دارد یکی انتقال مرکز جرم و یکی دوران حول محور

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\bar{V}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

شرط غلتش بدون لغزش $\leftarrow \omega = \frac{\bar{V}}{R}$; $\bar{I} = \frac{1}{2}mR^2$

$$\Rightarrow kx^2 + mV^2 + \frac{1}{2}mR^2\frac{\bar{V}^2}{R^2} = kA^2$$

$$kx^2 + \frac{3}{2}m\bar{V}^2 = kA^2 \Rightarrow 2kx\frac{dx}{dt} + \frac{3}{2}m \cdot 2\bar{V}\frac{d\bar{V}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow 2kx + 3m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2}{3}\frac{k}{m}x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{3m}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

آونگ پیچشی 8

- به یک میله متصل ثابت نرمی سنگینی می‌آویزیم تا حالتی که پیچ شود.

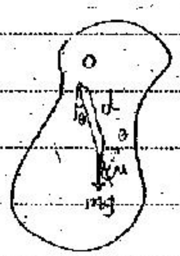
$\tau = I\alpha$ ضریب پیچشی

$\tau = -k'\theta \qquad F = -kx$

$-k'\theta = I\alpha \rightarrow -k'\theta = I\dfrac{d^2\theta}{dt^2} \rightarrow I\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + k'\theta = 0$

$\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{k'}{I}\theta = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\dfrac{k'}{I}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{k'}}$

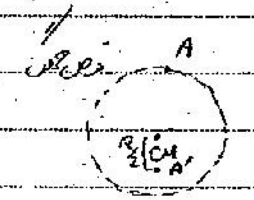
مثال: پریود نوسان جسمی را حول محور O بیابید با این آویخته شده



$-mgd\sin\theta = I_0\alpha$ اگر θ کوچک باشد $\rightarrow \sin\theta = \theta$

$-mg\theta . d = I_0\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

$I_0\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + mg\theta d = 0 \Rightarrow \dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{mgd}{I_0}\theta = 0 \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_0}{mgd}}$



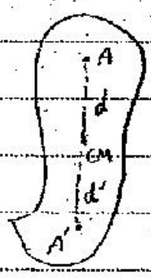
پریود نوسانات حلقه را حول A بیابید همچنین حول A'

$T_A = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_A}{mgR}}$

$T_A = 2\pi\sqrt{\dfrac{3/2\, mR^2}{mgR}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{3R}{2g}}$

تغییر نمی‌کند

$T_{A'} = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_{A'}}{mg\,R/2}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{3/2\, mR^2}{mg\,R/2}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{3R}{2g}}$



- نقطه‌ای مانند A' در سمت دیگر CM وجود دارد که دوره تناوب آن با A برابر است.

$T_A = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_A}{mgd}}$

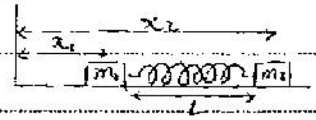
$d + d' = L$ طول آونگ ساده معادل با آونگ مرکب

$T_{A'} = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_{A'}}{mgd'}}$

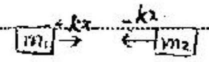
PILAVARAN

PAGE:

- [illegible]



$$x = (x_2 - x_1 - L)$$



$$kx = m_1\ddot{x}_1 \xrightarrow{\times m_2} \left\{ m_2 kx = m_1 m_2 \ddot{x}_1 \right.$$

$$-kx = m_2\ddot{x}_2 \xrightarrow{\times m_1} \left\{ m_1 kx = m_1 m_2 \ddot{x}_2 \right.$$

$$kx(m_1 + m_2) = -m_1 m_2 (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)$$

$$x = x_2 - x_1 - L$$

$$\dot{x} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 - 0$$

$$\ddot{x} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$$

$$\Rightarrow kx\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} + \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = 0$$

$$\Rightarrow kx\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} + \ddot{x} = 0$$

$$\ddot{x} + k\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}x = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} = \frac{1}{\mu}$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_1 m_2} + \frac{m_2}{m_1 m_2} = \frac{1}{\mu}$$

$$\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} = \frac{1}{\mu}$$

μ = جرم کاهیده

معادلات حرکت: $x = A\sin(\omega t + \varphi)$

$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi)$

$a = -\omega^2 x$

جرم کاهیده (چون از هر دو جرم کمتر است)

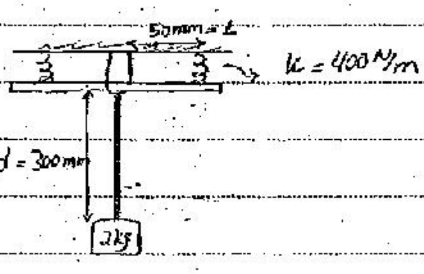
$$x = x_2 - x_1 - L$$

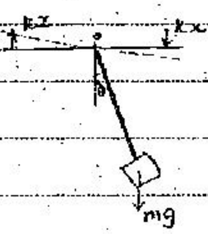
$$v = \dot{x}_2 - \dot{x}_1$$

$$a = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$$

مثال، میله ای [illegible] به آن متصل است [illegible] وزنه ای به جرم 2kg [illegible] است [illegible] در حالت تعادل [illegible] نیستند. دوره تناوب نوسانات کم دامنه [illegible]

وقتی جرم m را به سمت راست حرکت دهیم فنر ① متراکم میشود





$$\tau = I\alpha$$

$$-mgd\sin\theta - kxL - kxL = md^2\ddot{\theta}$$

$$x \approx L\theta$$

$\sin\theta \approx \theta$ زاویه کوچک است

Subject:

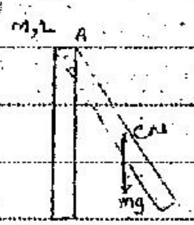
Year. 200 Month. Day.

$$mgd\theta + 2kL^2\theta + md^2\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{(mgd + 2kL^2)\theta}{md^2} = 0$$

$$\omega^2 = \frac{mgd + 2kL^2}{md^2} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{md^2}{mgd + 2kL^2}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{2\times(0.3)^2}{2\times 9.8\times 0.3 + 800\,(0.5)^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{18\times 10^{-2}}{0.6\times 9.8 + 2}}$$

ـ میله همگنی به طول L با جرم m را از یک انتها آویزان کرده‌ایم و به نوسانات کم دامنه وا می‌داریم.
ـ طول آونگ ساده هم‌زمان با این آونگ را بیابید.
ـ نقطه دیگری را روی میله بیابید که وقتی نوسانات حول آن نقطه انجام شود دوره برابر حالت اول گردد.



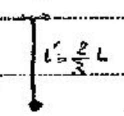
$$-mg\frac{L}{2}\sin\theta = I_A\cdot\alpha$$

$$-mg\frac{L}{2}\theta = \frac{1}{3}mL^2\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{g\,L/2}{\frac{1}{3}L^2}\right)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L}\theta = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$$

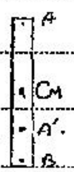
$T' = 2\pi\sqrt{\frac{L'}{g}}$ ← (آونگ ساده) $\qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$

$$T' = T \Rightarrow \sqrt{\frac{L'}{g}} = \sqrt{\frac{2L}{3g}} \rightarrow \frac{2L}{3g} = \frac{L'}{g}$$



$\Rightarrow L' = \frac{2}{3}L$

طول آونگ ساده هم‌زمان با آونگ فیزیکی



$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$$

تمرین: طول آونگ ساده هم‌زمان با آونگ مرکب را بدست آورید.

Subject:

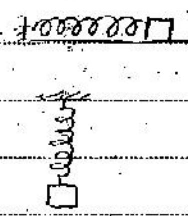
Year. 200   Month.   Day.

تمرین: ذره‌ای بین نقاط A و A' نوسان می‌کند متوسط زمانی و متوسط مکانی سرعت را بیابید.

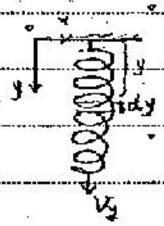
A — o — A' $x = A\sin(\omega t+\varphi)$

تمرین: فنری را یکبار بصورت افقی و بار دیگر بصورت عمودی می‌بندیم ثابت کنید در هر دو حالت $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ است.

تنها تفاوت این دو حالت این است که نقطه‌ی تعادلشان فرق می‌کند.



مثال:



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m+\frac{m_{spring}}{3}}{k}}$$

جرم فنر

انرژی جنبشی

$$dk = \frac{1}{2}dm\,(v_y)^2$$

$$dm = \lambda\,dy$$

$$V_y = \frac{V}{L}y \rightarrow dk = \frac{1}{2}\lambda dy\cdot\frac{V^2}{L^2}y^2$$

$$\Rightarrow dk = \frac{1}{2}\lambda\frac{V^2}{L^2}\cdot y^2dy$$

$$k = \frac{1}{2}\frac{\lambda V^2}{L^2}\int_0^L y^2dy \Rightarrow k = \frac{1}{2}\frac{\lambda V^2}{L^2}\cdot\frac{L^3}{3}$$

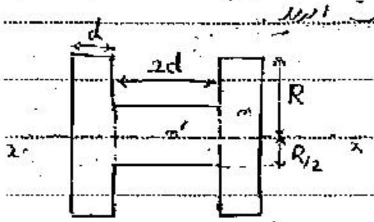
$$k = \frac{1}{2}\lambda\frac{L}{3}V^2 \quad , \quad \lambda L = m_s$$

$$k = \frac{1}{2}\cdot\frac{m_s}{3}\cdot V^2$$

$$k = \frac{1}{2}mV^2$$

لنگر استوانه‌ای همگن به شعاع R و طول $L=4d$ قرقره‌ای مطابق شکل می‌سازیم.

الف) اینرسی دورانی قرقره را حول محور zz' برحسب جرم قرقره (M) و R بدست آورید.



$$m = \pi R^2 d\rho + 2m' \qquad m' = \pi\frac{R^2}{4}\cdot 2d\rho = \pi R^2\frac{d}{2}\rho$$

$$I_{1xx} = \frac{1}{2}mR^2 \qquad I_{2xx} = \frac{1}{2}m'\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}mR^2$$

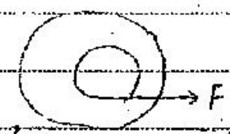
$M = 2m + m'$

$M = 2\pi R^2 d\rho + \frac{\pi R^2 d}{2}\rho = \frac{5}{2}\pi R^2 d\rho$

$I_{xx} = 2I_1 + I_2 \rightarrow I_{xx} = 2 \cdot \frac{1}{2} mR^2 + \frac{1}{16} mR^2$

$I_{xx} = \frac{17}{16} mR^2 \qquad \left.\begin{array}{l} m = \pi R^2 d\rho \\ M = \frac{5}{2}\pi R^2 d\rho \end{array}\right\} \Rightarrow M = \frac{5}{2} m$

$I_{xx} = \frac{17}{16} \cdot \frac{2}{5} MR^2 = \frac{17}{40} MR^2$



$\bar{a} = ?$ [illegible]

[illegible]

$(I = Mk^2)$

[illegible]

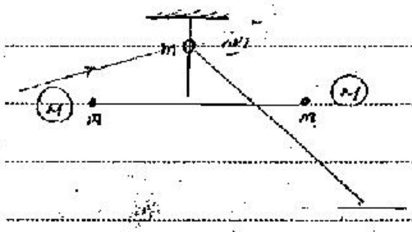
Subject:

Year. 200 Month. Day.

گرانش :

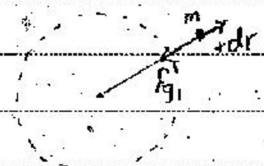
$\overrightarrow{m_1 \quad x \quad m_2}$

$$F = G\frac{m_1 m_2}{x^2} \quad , \; G = 6.67 \times 10^{-11} \; \frac{Nm^2}{kg^2}$$



$$\tau = -k'\theta$$

انرژی پتانسیل گرانشی :



$$\Delta U = -W$$

$$U_{(r_0)} - U_{(r)} = -\int_r^{r_0} \vec{f_g} \cdot \vec{dr}$$

$$U_{(r_0)} - U_{(r)} = -\int_r^{r_0} -\frac{GmM}{r^2}\, dr$$

$$U_{(r_0)} - U_{(r)} = -\frac{GmM}{r}\Big|_r^{r_0}$$

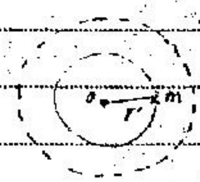
$$U_{(r_0)} - U_{(r)} = \frac{GmM}{r} - \frac{GmM}{r_0}$$

اگر $\begin{cases} U_{(r_0)} = 0 \\ r_0 = \infty \end{cases}$

$$0 - U_{(r)} = G\frac{mM}{r} \rightarrow U_{(r)} = -G\frac{mM}{r}$$

برای نقاط خارج زمین این فرمول درست است $r \geq R$

حال نیروی جاذبه را در داخل زمین بررسی می‌کنیم.



پوسته‌های خارج از این کره‌ی فرضی هیچ نقشی ندارند.

$$f_g = G\frac{mM'}{r'^2}$$

$$\frac{M'}{M} = \frac{4/3\,\pi r'^3 \rho}{4/3\,\pi R_e^3 \rho} \rightarrow \frac{M'}{M} = \left(\frac{r'}{R_e}\right)^3$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$\Rightarrow f_g = G\frac{m}{(r')^2}\left(\frac{r'}{R_e}\right)^3 M \rightarrow f_g = \frac{GmM}{R_e^3}\, r'$$

در مرکز زمین جاذبه وجود ندارد.

- پتانسیل گرانشی را در یک نقطه در داخل زمین بدست آورید.

$$f_g = G\frac{mM}{R_e^3}\cdot r'$$ احتیاج به نیروی گرانش داریم (پتانسیل در مرکز زمین صفر نیست)

$\Delta U = -W$ ← کار نیروی گرانش در داخل زمین.

نیرو متناسب با فاصله میدان اثر می‌کند یعنی نوسان می‌کند.

اگر تونلی از مرکز زمین عبور دهیم و جسمی درون آن قرار دهیم پریود نوسانات آن را حساب کنید.

$$f = -\frac{GmM}{R^3}\cdot r = -kr$$

$$-kr = m\ddot{r}$$

$$\ddot{r} + \frac{k}{m}r = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{GmM}{R^3}}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

در سطح زمین R_0 $\quad M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G\cdot\frac{4}{3}\pi\rho R^3}}$$

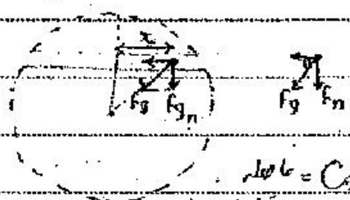
$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{g_0 R^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4\pi G\rho}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{6400\times10^3\,m}{9.8}} \simeq 84\ min$$

84 دقیقه طول می‌کشد از این سر زمین به آن سر برود.

- پریود نوسانات را حساب کنید.



$$f_g = G\frac{mM}{R_e^3}\cdot r$$ ← فاصله این نقطه تا مرکز زمین

فاصله $= C\cos\theta$

جرم با نقطه تعادل

$$F_x = F_g \cos\theta = G\frac{mM}{R^3}\, r\cos\theta \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

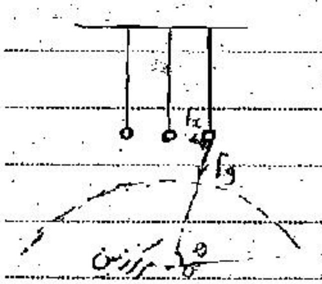
$$\rightarrow F_x = G\frac{mM}{R^3}\, r \cdot \frac{x}{r} \rightarrow F_x = G\frac{mM\,x}{R^3}$$

$$\rightarrow -G\frac{mM}{R^3}\, x = m\ddot{x} \rightarrow \ddot{x} + G\frac{M}{R^3}\, x = 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \,, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{g_0 R^2}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{R/g}$$

مثال: یک تونل حفر کرده‌ایم. دوره‌ی آن چقدر است؟ (در مورد نوسانات هماهنگ)



$$F_x = F_g\cos\theta \rightarrow F_x = G\frac{mM}{R^3}\, r \cdot \frac{x}{r}$$

اندازه $F_x = G\frac{mM}{R^3}\, x \rightarrow -G\frac{mM\,x}{R^3} = m\ddot{x}$

$$\rightarrow \ddot{x} + \frac{GM}{R^3}\, x = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \,, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

مثال: سه جرم داریم انرژی پتانسیل آن را بیابید.

کار انرژی پتانسیل

$U(r) = -G\frac{mM}{r}$ این پتانسیل بین دو ذره می‌باشد

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}} - G\frac{m_2 m_3}{r_{23}} - G\frac{m_1 m_3}{r_{13}}$$

m_1 را از ∞ آوردیم بی‌نهایت

در مورد m_3, m_1 جاذبه

حال m_3 را از بی‌نهایت بایستی جاذبه آن با m_1 حساب کنیم

اگر m_3 نبود هم همین کار را می‌کردیم

$$U = -\left(G\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + G\frac{m_2 m_3}{r_{23}} + G\frac{m_1 m_3}{r_{13}}\right)$$

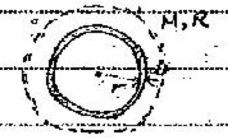
سوال: معادله‌ی حرکت اجسام نیوتنی در فضای شعاعی چیست

Subject:

Year. 200 Month. Day.

[illegible]

مثال: انرژی پتانسیل یک کره همگن را بیابید



$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

$dm = 4\pi r^2 \rho \, dr$

$du = G\frac{m\,dm}{r} \Rightarrow du = \frac{G(\frac{4}{3}\pi r^3 \rho) . 4\pi r^2 \rho \, dr}{r}$

$\Rightarrow du = \frac{16}{3} G\pi^2 r^4 \rho^2 dr \Rightarrow U = -\frac{16}{3} G\pi^2\rho^2 \int_0^R r^4 dr$

$\Rightarrow U = -\frac{16}{3} G\pi^2\rho^2 \frac{R^5}{5} \Rightarrow U = -G(\frac{4}{3}\pi R^3 \rho)^2 . \frac{3}{5} \frac{1}{R}$

$U = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$

مثال: انرژی پتانسیل کهکشان N ستاره‌ای به جرم M با شعاع R را بیابید

$N = 1.6 \times 10^{11}$

$R = 10^{23}$ cm

$M = 2 \times 10^{30}$ kg

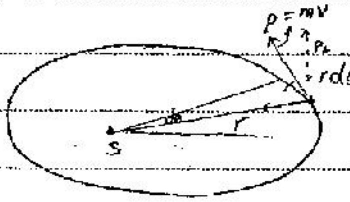
$U = -G(N-1)(N) \cdot \frac{M^2}{2R}$

$F = G\frac{mM}{r^2} \Rightarrow G\frac{mM}{r^2} = m r \omega^2$

$\frac{GM}{r^3} = \frac{4\pi^2}{T^2} \Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$

PILAVARAN

PAGE:



$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

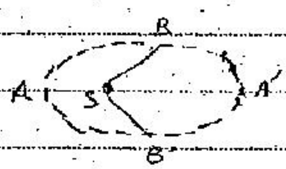
سرعت سطحی ، $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \omega$

تکانه زاویه‌ای $L = P_\perp \cdot r \Rightarrow L = mr\omega \cdot r = mr^2\omega$

$\frac{dA}{dt} = \frac{mr^2\omega}{2m} = \frac{L}{2m} =$ مقدار ثابت

$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ چون گشتاور خارجی وجود ندارد L ثابت است.

مثال: در حرکت زمین به دور خورشید نسبت زمان رفتن از B به B′ را به زمان برگشت از B′ به B را با
نسبت مساحت آن را بیابید.



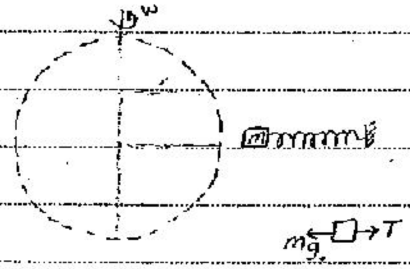
مثال: در شعاع r ، g چقدر تغییر می‌کند.

$$g = G\frac{M}{r^2} \Rightarrow dg = -2r\frac{GM}{r^4}dr$$

$$\Rightarrow \frac{dg}{dr} = -2\frac{GM}{r^3} \Rightarrow \frac{dg}{dr} = -2\frac{GM}{r^2} \times \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{dg}{dr} = -\frac{2g}{r}$$

مثال:



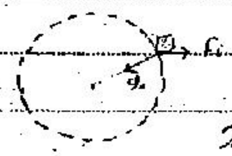
$mg_0 - T = ma$

$T = m(g_0 - a)$

$W = m(g_0 - a)$

$mg = m(g_0 - r\omega^2)$

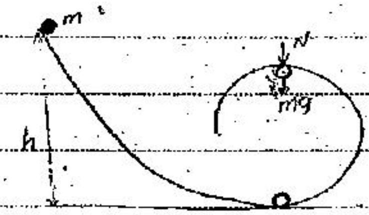
مقدار $r\omega^2$ برابر $\frac{3}{100}$ g است (در سطح زمین)



$g_0 = G\frac{Mm}{r^2}$

عرض جغرافیایی λ ← $g_{(\lambda)} = g_0 - a\cos\lambda$ $a = r\omega^2$

مثال: دیسک را از چه ارتفاع h رها کنیم تا جسم m حلقه را دور بزند؟



$mgh = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 + mg(2R - 2r)$

$mgh = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}m\underbrace{r^2\omega^2}_{\bar{v}^2} + 4mg(R - r)$

$2gh = \frac{7}{5}\bar{v}^2 + 2g(R - r)$ ①

یعنی حداقل سرعت $N = 0$

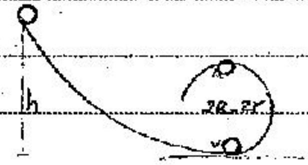
$N + mg = \frac{m\bar{v}^2}{R - r}$

$\Rightarrow \bar{v}^2 = g(R - r)$ ②

$mg = \frac{mv^2}{R - r}$

①,② → $h = 2.7(R - r)$ $r \ll R$

$h = 2.7R$



r سطح 2.7 m است