بسمه تعالی

جزوه

تحلیل سازه 2

دانشگاه

تهران

استاد

دکتر عباسی

تحلیل سازه‌های (۲)

- مقدماتی از تحلیل ماتریسی سازه‌ها (سختی و نرمی) TRUSS
معادله‌های شیب - افت (Slope - Deflection) ⇐ مبنای روش سختی
مفصل ، اصلاح معادله‌ها برای شرایط مرزی ، اثر حرارتی ، نشست تکیه‌گاه ارتجاعی
Frame / Euler - Bernoulli B.T. / Timoshenko - B.T.

- تحلیل تکراری مسائل نامعین
روش توزیع لنگر Cross
روش کانی Kany

- روش‌های تقریبی تحلیل سازه‌های نامعین
مقدماتی بر تحلیل دینامیکی
مقدماتی بر تحلیل غیرخطی

◄ مقدمه‌ای از تحلیل ماتریسی سازه‌ها

مشاهده (پدیده طبیعی)

⇓

پدیده فیزیکی → مدلسازی فیزیکی → مدلسازی ریاضی → معادلات دیفرانسیل

→ دستگاه معادلات همزمان

* معادلات دیفرانسیل ، ابزار ریاضی ما هستند برای حل مسائل فیزیکی

* در تحلیل سازه‌ها با نیرو (Force) و تغییرمکان (Displacement) سروکار داریم

- تغییرمکان‌ها به ما کمک می‌کنند تا سازگاری (تولرانس) لازم را رعایت کنیم
- نیروها در طراحی مقاومت سازه به ما کمک می‌کنند.

تغییرمکان → معیار خدمت   نیرو → معیار قدرت

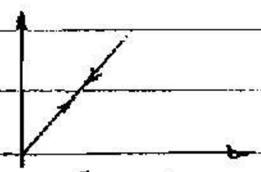
* در تحلیل یک سازه باید معادلات زیر را بررسی کنیم:

۱) معادلات تعادل → (اصل کار مجازی، مینیمم کردن انرژی)
۲) معادلات سازگاری
۳) معادلات رفتاری

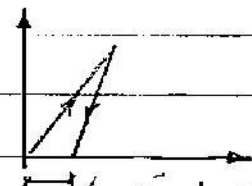
* اگر یکی از معادلات بالا ارضاء نشوند حل ما غلط است و اگر فرضی را از خودمان اضافه کنیم حل ما تقریبی است و در صورتی جواب درست است که شرط ما به واقعیت نزدیک باشد.

◄ گروه اعتبار:

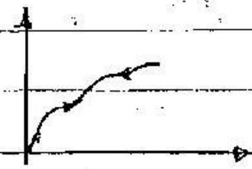
۱- تغییرمکان‌ها بسیار کوچک   ۲- گره‌های سازه صلب هستند.
۳- مصالح خطی و ارتجاعی → منحنی بارگذاری و باربرداری بر هم منطبقند
۴- تأثیر نیروی محوری ناچیز   به عبارت دیگر فرض اضافی در سازه باید کم باشند



خطی الاستیک

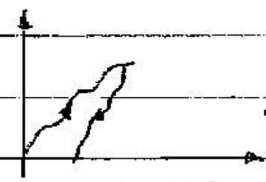


کرنش پسماند — خطی غیرالاستیک



غیرخطی الاستیک

★ از دو فرض اول نتیجه می‌گیریم که اصل Supper Position یا اصل انطباق آثار برقرار است.



★ رفتار واقعی همه مصالح

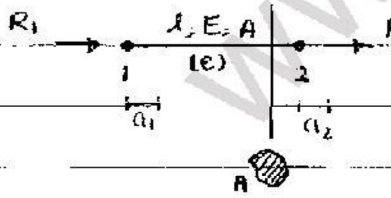
غیرخطی غیرالاستیک

★ تا زمانیکه تغییر مکان‌ها کوچک است ⇐ حذف پایداری (کمانش)

تغییر مکان بسیار کوچک ⇐ هندسه جسم قبل و بعد از تغییر شکل ثابت است

◄ تحلیل مقدماتی ماتریسی

■ تحلیل خرپاهای صفحه‌ای: برای شروع، یک عضو خرپایی را به عنوان مبدأ در نظر می‌گیریم



$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \sigma A \\ \sigma &= E\varepsilon \\ \varepsilon &= \frac{a_1 - a_2}{l} \end{aligned}\right\} \Rightarrow R_1 = \frac{EA}{l}(a_1 - a_2)$$

از تعادل طولی $\Rightarrow R_1 + R_2 = 0 \Rightarrow R_2 = -\frac{EA}{l}(a_1 - a_2)$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

نیرو = سختی × تغییر مکان

$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{a}$ رابطه سختی

★ رابطه بین نیرو و تغییر مکان، رابطه سختی است (رابطه سختی را در سطح یک عضو بدست آوردیم)

★ ماتریس سختی در حقیقت یک تنسور است

★ با استفاده از تحلیل ماتریسی معادله دیفرانسیل را به دستگاه جبری هم‌زمان تبدیل می‌کنیم.

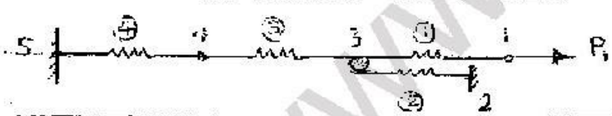
★ دستگاه مختصات محلی، دستگاهی است که بر روی عضو قرار می‌گیرد و جهت آن با استفاده از قانون دست راست تعیین می‌شود.

$$\frac{EA}{l}=K \Rightarrow \begin{bmatrix}R_1\\R_2\end{bmatrix}=K\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$$ رابطهٔ سختی

★ رابطهٔ سختی، نیرو را به تغییر مکان مربوط می‌کند و چون در سطح عضو تعریف شده است به آن رابطهٔ سختی عضو گفته می‌شود.

★ منظور از حل یک سیستم، بدست آوردن عکس العمل‌ها، نیروها و تغییر مکان‌ها است.

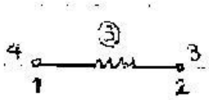
(1) سیستم را به عضوهای ساده تقسیم می‌کنیم.



(2) روابط مربوط به هر عضو را می‌نویسیم

$$R_1=K^{(1)}(a_1^{(1)}-a_2^{(1)})$$
$$R_2=-K^{(1)}(a_1^{(1)}-a_2^{(1)})$$

$$R_1=K^{(2)}(a_1^{(2)}-a_2^{(2)})$$
$$R_2=-K^{(2)}(a_1^{(2)}-a_2^{(2)})$$



$$R_1=K^{(3)}(a_1^{(3)}-a_2^{(3)})$$
$$R_2=-K^{(3)}(a_1^{(3)}-a_2^{(3)})$$

$$R_1 = K^{(4)}\left(a_1^{(4)} - a_2^{(4)}\right)$$

$$R_2 = -K^{(4)}\left(a_1^{(4)} - a_2^{(4)}\right)$$

(۳) سازگاری را در سیستم اعمال می‌کنیم. در این مسئله تغییرمکان‌ها در راستای عضو است و هر گره به علت اتصال به گره‌های دیگر، یک تغییرمکان دارد.

تغییرمکان گره ۱ = a_1 — تغییرمکان گره ۳ = a_3 — تغییرمکان گره ۵ = a_5

تغییرمکان گره ۲ = a_2 — تغییرمکان گره ۴ = a_4

◄ از روی شکل سیستم، روابط سازگاری را می‌نویسیم:

$a_1^{(1)} = a_3$ $\quad$ $a_1^{(3)} = a_4$

$a_2^{(1)} = a_1$ $\quad$ $a_2^{(3)} = a_3$

$a_1^{(2)} = a_3$ $\quad$ $a_1^{(4)} = a_5$

$a_2^{(2)} = a_2$ $\quad$ $a_2^{(4)} = a_4$

◄ با نوشتن روابط سازگاری، در حقیقت یک انتقال از دستگاه کلی به دستگاه عضوی انجام داده‌ایم.

◄ حال تغییرمکان‌های بدست آمده را در معادلات عضوها قرار می‌دهیم:

$R_1^{(1)} = K^{(1)}(a_3 - a_1)$, $R_2^{(1)} = -K^{(1)}(a_3 - a_1)$

$R_1^{(2)} = K^{(2)}(a_3 - a_2)$, $R_2^{(2)} = -K^{(2)}(a_3 - a_2)$

$R_1^{(3)} = K^{(3)}(a_4 - a_3)$, $R_2^{(3)} = -K^{(3)}(a_4 - a_3)$

$R_1^{(4)} = K^{(4)}(a_5 - a_4)$, $R_2^{(4)} = -K^{(4)}(a_5 - a_4)$

(۴) معادلات تعادل گره‌ها را می‌نویسیم:

$R_1^{(1)} \rightarrow \overset{1}{\bullet} \rightarrow P_1$ $\quad$ (1) $R_2^{(1)} + P_1 = 0$

(2) $R_2^{(2)} + R_2 = 0$ $\quad$ (3) $R_2^{(3)} + R_1^{(2)} + R_1^{(1)} = 0$

(4) $R_1^{(3)} + R_2^{(4)} = 0$ $\quad$ (5) $R_1^{(4)} + R_5 = 0$

◄ اگر مسئله خطی باشد، به تعداد گره‌ها مجهول داریم.

$$K^{(1)}(a_3 - a_1) + P_1 = 0$$

$$K^{(2)}(a_3 - a_2) + R_2 = 0$$

$$K^{(3)}(a_4 - a_3) + K^{(2)}(a_3 - a_2) + K^{(1)}(a_3 - a_1) = 0$$

$$K^{(3)}(a_4 - a_3) - K^{(4)}(a_5 - a_4) = 0$$

$$K^{(4)}(a_5 - a_4) + R_5 = 0$$

▶ رابطه سختی سیستم :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K^1 & 0 & -K^1 & 0 & 0 \\ 0 & K^2 & -K^2 & 0 & 0 \\ -K^1 & -K^2 & K^1+K^2+K^3 & -K^3 & 0 \\ 0 & 0 & -K^3 & K^3+K^4 & -K^4 \\ 0 & 0 & 0 & -K^4 & K^4 \end{bmatrix}}_{\text{ماتریس سختی کل}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix}}_{\text{بردار تغییرمکان کل}} = \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 \\ R_2 \\ 0 \\ 0 \\ R_5 \end{bmatrix}}_{\text{بردار نیروی کل}}$$

★ از اعمال تعادل در اعضای سیستم، دستگاه معادله سیستم بدست می آید.

▲ به این روش حل سیستم، روش سختی یا تغییرمکانی گفته می شود.

★ روش سختی : روش حل مسائل نامعین است که در آن مجهول اصلی مسئله، تغییرمکان ها هستند و در حل مسئله به طریقی اقدام می شود که بتوانیم از حل دستگاه جبری هم زمان، تغییرمکان های مجهول را بدست آوریم و مجهولات ثانوی از روابط قبلی قابل محاسبه است.

★ روش دیگر حل مسائل نامعین، روش نرمی یا نیرو است که در آن مجهولات اصلی، نیروها هستند.

▶ مراحل مربوط به روش سختی :

۱) تجزیه سیستم کل به تعدادی عضو ساده یا پایه

۲) بدست آوردن رابطه سختی عضوها

۳) رابطه سختی برای تمام اعضا نوشته می شود.

۴) سازگاری در سیستم اعمال می‌شود
۵) تعادل نیروها را برقرار می‌کنیم
← دستگاه معادلات جبری خطی همزمان
۶) حل دستگاه جبری و بدست آوردن مجهولات اصلی (تغییر مکان‌ها)
۷) بدست آوردن مجهولات ثانوی
۸) کنترل نتایج *

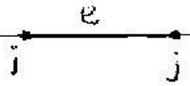
خواص ماتریس سختی:
۱) متقارن است
۲) قطر حاکم است Diagonal Dominant
← مقدار عناصر قطر نسبت به عناصر سطر و ستون آن بیشتر است.
۳) ماتریس نواری است
← عناصر غیر صفر آن حول قطر است.
۴) ماتریس مثبت معین است
← عناصر قطری غیر صفر ند.

▲ این ماتریس‌ها ماتریس‌های ویژه هستند یعنی معکوس ندارند و قابل حل نیستند پس برای حل دستگاه به دو روش عمل می‌کنیم:
۱) سطر و ستون مربوط به مجهولات معین را حذف می‌کنیم.
۲) از تکنیک پنالتی استفاده می‌کنیم.

روش بدست آوردن ماتریس سختی کل:
۱) یک ماتریس ترسیم می‌کنیم که تعداد سطر و ستون آن به تعداد گره‌های سازه باشد
۲) اسلایس‌های ماتریس سختی عضو را در کل بر حسب سطر و ستون‌های مربوط به شماره گره‌های عضو قرار می‌دهیم

$$\underset{\sim}{K^e} = \begin{bmatrix} K^e & -K^e \\ -K^e & K^e \end{bmatrix}$$

▲ بردار نیروی کل با جمع نیروهای هر گره بدست می‌آید



$$\begin{array}{c|cc} & i & j \\ \hline i & K^e & -K^e \\ j & -K^e & K^e \end{array}$$

ماتریس کلی حل

* مقدماتی بر تحلیل ماتریسی سازه‌ها:

۱- رابطه سختی در المان (روابط تئوری)
۲- سازگاری تغییر مکان‌ها (انتقال به دستگاه کلی)
۳- تعادل نیرو ← تشکیل دستگاه معادله (اصل کارهای مجازی - مینیمم کردن انرژی پتانسیل)
۴- بدست آوردن تغییر مکان‌ها و نیروها
۵- کنترل

* دستگاه‌های مختصات: ۱- دستگاه مختصات کلی
۲- دستگاه مختصات محلی (Local - member)

* می‌توانیم به تعداد عضوهای مسئله، دستگاه مختصات محلی داشته باشیم

- دستگاه مختصات کلی ← هندسه، نیروهای خارجی، تغییر مکان‌ها
- دستگاه مختصات محلی ← نیروهای داخلی، تنش، کرنش و ...

* شرایط مرزی ← تغییر مکانی
← نیرویی

* به تعبیر فیزیکی ماتریس ویژه در صورتی به وجود می‌آید که سیستم به صورت یک مکانیزم باشد یعنی قید و بندی نداشته باشد.
* با اعمال شرایط مرزی، سیستم را از حالت مکانیزم خارج می‌کنیم و سیستم را از نظر ریاضی قابل حل می‌کنیم
* وقتی ماتریس سیستمی قابل حل باشد یعنی در تکیه‌گاه‌های آن مشکل وجود ندارد.

* برای تعادل استاتیکی سیستم و جمع نیروهای یک گره از کنترل های ساده یک سیستم پس از حل آن است.

◄ اجرای برنامه :

- تحلیل ماتریسی خرپاهای مسطح TRUSS 2_D

* درک و دریافت صورت مسئله / حل مسئله / ارائه جواب

داده Input ← سختی المان ← تشکیل ماتریس کل ← اعمال شرایط مرزی ← حل دستگاه ← محاسبات ثانوی ← ارائه نتایج

* در ابتدای برنامه باید ابعاد گذاری (Dimensioning) انجام دهیم

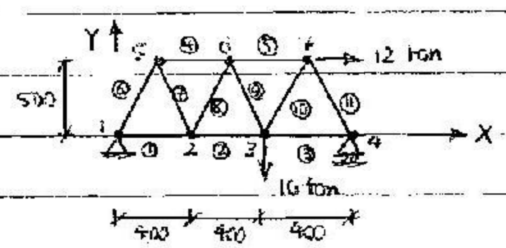
NPOIN تعداد گره

NELEM تعداد عضو

NBOUN تعداد تکیه گاه

COORD مختصات نقاط

LNODS ارتباطات گره ای



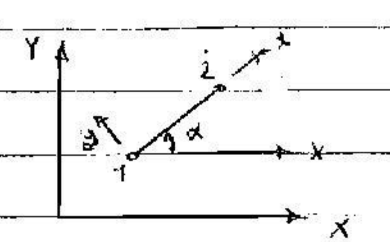
$$1 \quad\quad 2 \quad \rightarrow x$$

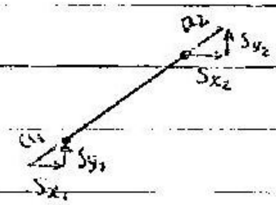
$$R_1 = \frac{EA}{l}(a_1 - a_2)$$

$$R_2 = -\frac{EA}{l}(a_1 - a_2)$$

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

* انتقال از دستگاه محلی به دستگاه کلی - دوران حول محور z است. دوران در جهت مثلثاتی تعیین می‌شود.

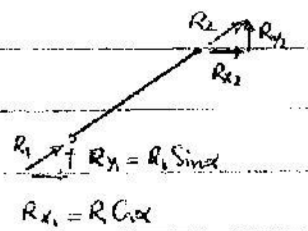




$$\begin{cases} a_1 = S_{x_1}\cos\alpha + S_{y_1}\sin\alpha \\ a_2 = S_{x_2}\cos\alpha + S_{y_2}\sin\alpha \end{cases}$$

$$\underset{\sim}{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} S_{x_1} \\ S_{y_1} \end{bmatrix} \underset{\sim}{T}^T = \underset{\sim}{S_1}\,\underset{\sim}{T}^T \quad , \quad a_2 = \begin{bmatrix} S_{x_2} \\ S_{y_2} \end{bmatrix} \underset{\sim}{T}^T = \underset{\sim}{S_2}\,\underset{\sim}{T}^T$$



$$R_1 = \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{R_1} \quad , \quad R_1 = Ka_1 - Ka_2$$

$$R_2 = \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{R_2} \quad , \quad R_2 = -Ka_1 + Ka_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1 = K\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{\delta_1} - K\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{\delta_2} \\ R_2 = -K\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{\delta_1} + K\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{\delta_2} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\times T} \begin{cases} \underset{\sim}{R_1} = \underset{\sim}{T}K\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{\delta_1} - \underset{\sim}{T}K\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{\delta_2} \\ \underset{\sim}{R_2} = -\underset{\sim}{T}K\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{\delta_1} + \underset{\sim}{T}K\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{\delta_2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{R_1} \\ \underset{\sim}{R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{x_1} \\ R_{y_1} \\ R_{x_2} \\ R_{y_2} \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\delta_1} \\ \underset{\sim}{\delta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{x_1} \\ \delta_{y_1} \\ \delta_{x_2} \\ \delta_{y_2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{R_1} \\ \underset{\sim}{R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{T}K\underset{\sim}{T}^T & -\underset{\sim}{T}K\underset{\sim}{T}^T \\ -\underset{\sim}{T}K\underset{\sim}{T}^T & \underset{\sim}{T}K\underset{\sim}{T}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\delta_1} \\ \underset{\sim}{\delta_2} \end{bmatrix}$$

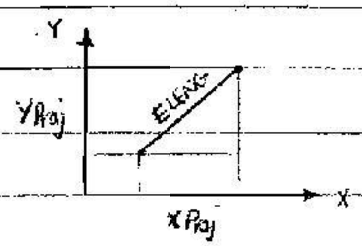
* اگر المان در فضا داشته باشیم، همین رابطه برقرار است. فقط نیروها و تغییر مکان‌ها دارای سه مولفه هستند.

$$\underset{\sim}{R} = K\underset{\sim}{a} \Rightarrow \underset{\sim}{T}K\underset{\sim}{T}^T = K\begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$K^e = \begin{bmatrix} K_{11\,2\times2} & K_{12\,2\times2} \\ K_{21\,2\times2} & K_{22\,2\times2} \end{bmatrix} \quad , \quad K_{11} = K \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$K_{12} = -K_{11} \quad , \quad K_{21} = -K_{11} \quad , \quad K_{22} = K_{11}$$

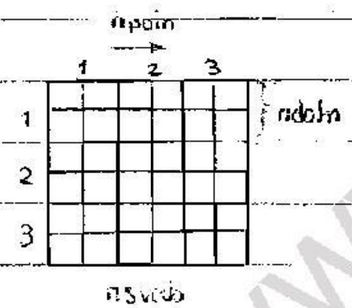
* برای بدست آوردن ماتریس سختی عضو باید K و α را داشته باشیم: $\quad K = \frac{EA}{l}$



$$ELENG = SQRT\,(Xproj^{**2} + Yproj^{**2})$$

$$\cos\alpha = Xproj / ELENG$$

$$\sin\alpha = Yproj / ELENG$$



* ماتریسی به ابعاد (تعداد گره‌ها × تعداد گره‌ها) تشکیل می‌دهیم
هر سطر و ستون ماتریس را به تعداد درجات آزادی عضو آن
تقسیم بندی می‌کنیم و ماتریس سختی عضو را در محل تلاقی سطر و
ستون مربوط به گره‌های عضو قرار می‌دهیم.
به این ترتیب ماتریس سختی کل به دست خواهد آمد.

◄ مقدمات تئوری ماتریسی

• Frame Analysis

* قاب‌ها سیستم‌های سازه‌ای با مفاصل صلب هستند که بارها را به صورت خمشی تحمل می‌کنند
و به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند: ۱) قاب‌های مستطیلی ۲) قاب‌های غیرمستطیلی

* مبنای کلی قاب‌ها کلاً تیر است (عضو مبنای قاب تیر است)

* پس تئوری مورد احتیاج ما تئوری خمش تیرها است (Beam Bending Theory)

* در تئوری خمش معمولی در مورد تیرهای طویل از اثر برش صرف نظر می‌کنیم. (Euler Bernoulli)
ولی تئوری دیگری به نام تیموشنکو داریم که برای تیرهای ضخیم برش را هم در نظر می‌گیریم

معادله‌های شیب - افت (Slope-Deflection)

* اگر نیروی افقی نداشته باشیم و از نیروهای محوری صرف نظر کنیم می‌توانیم یکی از مجهولات را حذف کنیم

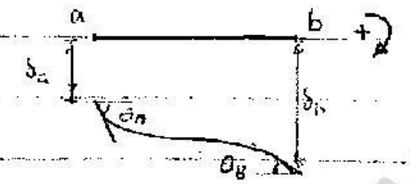
در نتیجه سازه روبه‌رو دو درجه نامعین است. $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma M_o = 0$

* مبنای کار ما محول کردن لنگرها بر حسب دوران‌ها است

* لنگرهای موجود در سازه ناشی از یکی از عوامل زیر است:

۱- دوران ابتدای تیر θ_A ۲- دوران انتهای تیر θ_B

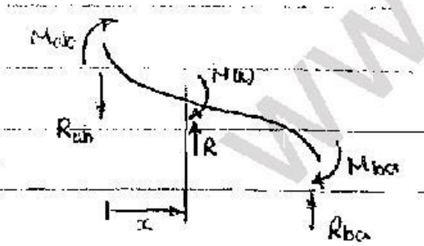
۳- دوران کلی تیر $\phi = \frac{\Delta}{l}$ ۴- بارهای خارجی



$$\delta_b - \delta_a = \Delta$$

$$\phi = \frac{\Delta}{l} \;,\; \theta_A \;,\; \theta_B$$

تغییر شکل‌های متناظر، دوران‌ها هستند



$$M(x) - R_{ab}x + M_{ab} = 0$$

$$EIy'' - R_{ab}x + M_{ab} = 0$$

* دوبار از معادله بالا انتگرال می‌گیریم و سپس شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم

$$x = 0 \Rightarrow y'(0) = \theta_A \;,\; y(0) = 0$$

$$x = L \Rightarrow y'(L) = \theta_B \;,\; y(L) = \Delta$$

• در غیاب نیروهای خارجی

$$M_{ab} = \frac{2E(I)}{l}\left(2\theta_A + \theta_B - 3\frac{\Delta}{l}\right)$$

$$M_{ba} = \frac{2E(I)}{l}\left(\theta_A + 2\theta_B - 3\frac{\Delta}{l}\right)$$

◄ روش کلی این است که بدون در نظر گرفتن بارهای خارجی، معادله دیفرانسیل تیر را از روی دیاگرام آزاد آن به دست می‌آوریم و با دوبار انتگرال گرفتن و اعمال شرایط مرزی، لنگرها را به دست می‌آوریم.

• اگر بارهای خارجی بر تیر اعمال شوند :

$$\frac{d}{dx^2}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\,EI(x)\right) = q(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d^4Y}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI(x)}$$

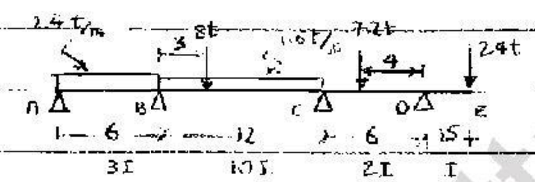
که معادله دیفرانسیل تیر در حالت ساده

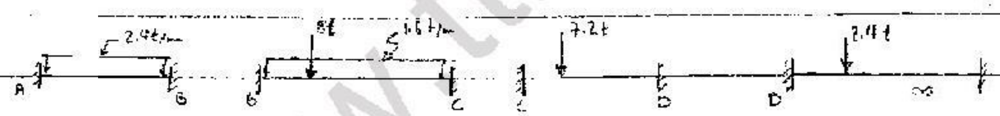
$$M_{ab} = \frac{2EI}{L}\left(2\theta_A + \theta_B - 3\frac{\Delta}{l}\right) + M_{ab}^{FE}$$

$$M_{ba} = \frac{2EI}{L}\left(\theta_A + 2\theta_B - 3\frac{\Delta}{l}\right) + M_{ba}^{FE}$$

لنگرهای گیرداری ←

مثال: تیر زیر را با استفاده از معادلات شیب - افت حل کنید





← از برقراری تعادل در گره‌ها معادلات لازم را برای حل تیر بدست می‌آوریم. با حل دستگاه، دوران گره‌ها بدست می‌آید و با قراردادن آنها در معادلات شیب - افت تیرها لنگرها معین می‌شوند

$$M_{ab} = \frac{Pab}{l}$$

$$M_{ij} = \frac{2E(I)}{l_{ij}}\left(2\theta_i + \theta_j - 3\frac{\Delta}{l_{ij}}\right) + M_{ij}$$

← چون تکیه‌گاهها نشست نداشته‌اند بنابراین Δ در تمام گره‌ها صفر است

1) مجهولات مسئله : $\theta_A, \theta_B, \theta_C, \theta_D$

محاسبه لنگرهای گیرداری :

$$M_{ab} = -q\,l^2/12 = -2.4\times 6^2/12 = -7.2 \ t.m$$

$$M_{ba} = +q\,l^2/12 = 7.2 \ t.m$$

$M_{bc} = -31.2$ tm , $M_{cb} = 31.2$ tm

$M_{cd} = 6.4$ tm , $M_{dc} = 3.2$ tm

$M_{de} = -3.6$ tm

$$M_{ab} = \frac{2E(3I)}{6}(2\theta_a + \theta_b) + (-7.2)$$

$$M_{ba} = \frac{2E(3I)}{6}(\theta_a + 2\theta_b) + 7.2$$

$$M_{bc} = \frac{2E(10I)}{12}(2\theta_b + \theta_c) + (-31.2)$$

$$M_{cb} = \frac{2E(10I)}{12}(\theta_b + 2\theta_c) + 31.2$$

$$M_{cd} = \frac{2E(2I)}{6}(2\theta_c + \theta_d) + (-6.4)$$

$$M_{dc} = \frac{2E(2I)}{6}(\theta_c + 2\theta_d) + 3.2$$

$$M_{de} = -3.6$$

3) نوشتن تعادل گره‌ها :

$a \rightarrow M_{ab} = 0$, $b \rightarrow M_{ba} + M_{bc} = 0$

$c \rightarrow M_{cb} + M_{cd} = 0$, $d \rightarrow M_{dc} + M_{de} = 0$

$$EI \begin{bmatrix} 2.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 5.33 & 1.67 & 0.0 \\ 0.0 & 1.67 & 4.67 & 0.67 \\ 0.0 & 0.0 & 0.67 & 1.33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \\ \theta_c \\ \theta_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.2 \\ 24.0 \\ -24.8 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

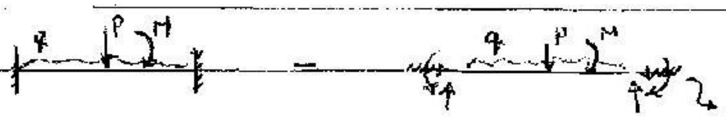
$\theta_D = \frac{4.56}{EI}$, $\theta_c = -\frac{8.52}{EI}$, $\theta_B = \frac{7.16}{EI}$, $\theta_a = \frac{0.02}{EI}$

$M_{ab} = 0$, $M_{ba} = 21.54$, $M_{bc} = -21.54$, $M_{cb} = 14.73$

$M_{cd} = -14.73$, $M_{dc} = 3.6$, $M_{de} = -3.6$

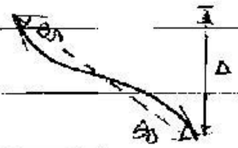
اگر بارگذاری تغییر کند، ماتریس سختی تغییر نمی‌کند، فقط بردار نیروی کل عوض می‌شود.
شرایط مرزی هم بر ماتریس سختی اثر دارد.

روش شیب ـ افت در تحلیل سازه های نامعین



از نیروی محوری صرف نظر می کنیم

* می خواهیم اثر حرکت، بار و تغییر مکان را بر روی لنگرها بررسی کنیم



$$M_{ab} = M_{ab}^{\theta_a} + M_{ab}^{\theta_b} + M_{ab}^{\Delta} + \mathcal{M}_{ab}$$

$$M_{ba} = M_{ba}^{\theta_a} + M_{ba}^{\theta_b} + M_{ba}^{\Delta} + \mathcal{M}_{ba}$$

$\theta_A , \theta_B , \Delta/l$

$$\begin{cases} M_{ab} = \dfrac{2E(I)}{l}\left(2\theta_a + \theta_b - \dfrac{3\Delta}{l}\right) + \mathcal{M}_{ab} \\ M_{ba} = \dfrac{2E(I)}{l}\left(\theta_a + 2\theta_b - \dfrac{3\Delta}{l}\right) + \mathcal{M}_{ba} \end{cases}$$

• برای تحلیل سیستم، آن را به عضوهای بسیط تجزیه می کنیم و معادلات شیب افت را برای هر عضو می نویسیم. سپس سازگاری را اعمال می کنیم و معادلات را در گره ها می نویسیم

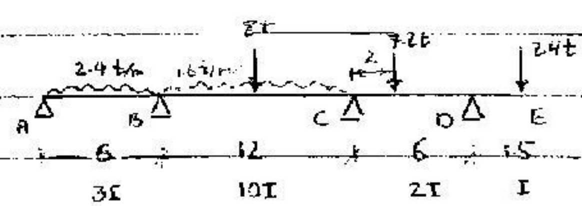
$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI}$$

* جواب های عمومی این معادله لنگرهای گیرداری هستند

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0 \Rightarrow y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

اعمال شرایط مرزی $x=0 \begin{cases} y=0 \\ y'=\theta_A \end{cases} , \quad x=l \begin{cases} y=\Delta \\ y'=\theta_B \end{cases}$

مثال) سازه زیر را تحلیل کنید.



$$M_{ab} = \frac{2E(3I)}{6}(2\theta_{AB} + \theta_{BA}) + (-7.2) \quad , \quad M_{ba} = \frac{2E(3I)}{6}(\theta_{AB} + 2\theta_{BA}) + (7.2)$$

15

$M_{bc} = \frac{2E(10I)}{12}(2\theta_{BC} + \theta_{CB}) + (-31.2)$, $M_{cb} = \frac{2E(10I)}{12}(\theta_{BC} + 2\theta_{CB}) + (31.2)$

$M_{cd} = \frac{2E(2I)}{6}(2\theta_{CD} + \theta_{DC}) + (-6.4)$, $M_{dc} = \frac{2E(2I)}{6}(\theta_{CD} + 2\theta_{DC}) + (3.2)$

$M_{de} = -3.6$

• معادلات سازگاری

$\theta_{AB} = \theta_A$, $\theta_{BA} = \theta_{BC} = \theta_B$, $\theta_{CB} = \theta_{CD} = \theta_C$, $\theta_{DC} = \theta_{DE} = \theta_D$

• برقراری تعادل در گره‌ها

$A \rightarrow M_{ab} = 0$, $B \rightarrow M_{ba} + M_{bc} = 0$

$C \rightarrow M_{cb} + M_{cd} = 0$, $D \rightarrow M_{dc} + M_{de} = 0$

(I) $EI(2\theta_A + \theta_B) - 7.2 = 0$

(II) $[EI(\theta_A + 2\theta_B) + 7.2] + [EI(\frac{5}{3}2\theta_B + \frac{5}{3}\theta_C) - 31.2] = 0$

(III) $[EI(\frac{5}{3}\theta_B + 2\times\frac{5}{3}\theta_C) + 31.2] + [EI(\frac{2}{3}2\theta_C + \frac{2}{3}\theta_D) - 6.4] = 0$

(IV) $[EI(\frac{2}{3}\theta_C + \frac{2}{3}\times 2\theta_D) + 3.2] + [-3.6] = 0$

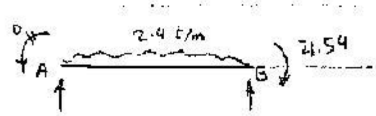
$$EI\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2+\frac{10}{3} & 5/3 & 0 \\ 0 & 5/3 & 14/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 4/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7.2 \\ 24 \\ -24.8 \\ 0.4\end{bmatrix}$$

اگر مشخصات بار تغییر کند، ماتریس کلی آن همیشه ثابت است

$\theta_A = \frac{0.02}{EI}$, $\theta_B = \frac{7.16}{EI}$, $\theta_C = \frac{-8.533}{EI}$, $\theta_D = \frac{4.562}{EI}$

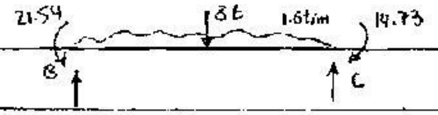
$M_{ab} = 0$, $M_{ba} = 21.54$, $M_{bc} = -21.54$, $M_{cb} = 14.73$

$M_{cd} = -14.73$, $M_{dc} = 3.6$, $M_{de} = -3.6$



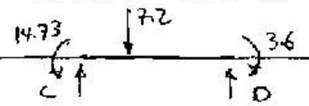
$R_{ab} = \frac{2.4\times6}{2} - \frac{21.54+0}{6}$

$R_{ba} = \frac{2.4\times6}{2} + \frac{21.54+0}{6}$



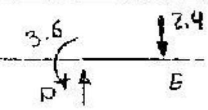
$$R_{bc} = (4 + 1.6\times 6) - \left(\frac{-21.54 + 14.73}{12}\right)$$

$$R_{cb} = (4 + 1.6\times 6) + \left(\frac{-21.54 + 14.73}{12}\right)$$

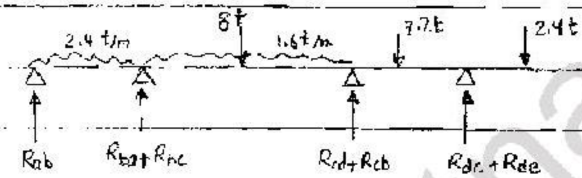


$$R_{cd} = \frac{7.2\times 4}{6} - \left(\frac{-14.73 + 3.6}{6}\right)$$

$$R_{dc} = \frac{7.2\times 2}{6} + \left(\frac{-14.73 + 3.6}{6}\right)$$

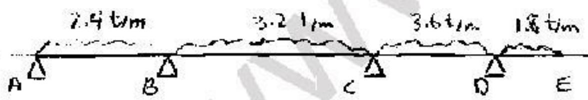


$$R_{de} = 2.4$$



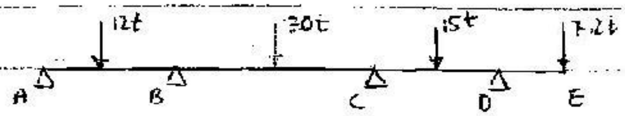
← کنترل واقعی مسئله این است
که ثابت کنیم فرض اولیه ما
درست بوده که منطقی باورانه است

مثال ۱۲: مسئله قبل را با بارگذاری زیر تحلیل کنید



← ماتریس سختی و مجهولات مانند مسئله
قبل است و تغییر نمی‌کند
فقط بردار نیروی کل تغییر می‌کند که از معادلات تعادل در گره‌ها به دست می‌آید

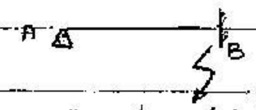
$$EI\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5.333 & 5/3 & 0 \\ 0 & 5/3 & 14/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 4/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_C \\ \theta_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.2 \\ 31.2 \\ -27.6 \\ -8.785 \end{bmatrix}$$



← بارهای خارجی ماتریس سیستم را تغییر می‌دهند بنابراین می‌توانیم علاوه بر آنچه گفتیم ماتریس نیروی سیستم
را تغییر می‌دهند. به عنوان مثال ... بنابراین آن را به یک بردار بار معادل تبدیل می‌کنیم

- تمارین

- شیب افت اصلاح شده



$$M_{ab} = \frac{2E(I)}{l}(2\theta_A + \theta_B)$$

$$M_{ba} = \frac{2E(I)}{l}(\theta_A + 2\theta_B)$$

تکیه‌گاه گیرداری که بعداً رها می‌شود.

$$M_{ab} = 0 \implies \theta_A = -\frac{\theta_B}{2}$$

$$M'_{ba} = \frac{2E(I)}{l}\left(-\frac{\theta_B}{2} + 2\theta_B\right) \implies M'_{ba} = \frac{3E(I)}{l}\theta_B$$

$$M'_{ab} = \frac{3E(I)}{l}\theta_A$$

مفصل چپ است $M'_{ab} = \frac{3E(I)}{l}\left(\theta_A - \frac{\Delta}{l}\right) + \mathcal{M}'_{ab}$

مفصل راست $M'_{ba} = \frac{3E(I)}{l}\left(\theta_B - \frac{\Delta}{l}\right) + \mathcal{M}'_{ba}$

$$\mathcal{M}'_{ab} = \mathcal{M}_{ab} - \frac{1}{2}\mathcal{M}_{ba} \quad , \quad \mathcal{M}'_{ba} = \mathcal{M}_{ba} - \frac{1}{2}\mathcal{M}_{ab}$$

▶ استفاده از روش شیب افت در تحلیل سازه‌های نامعین

- تغییر مکان‌های معلوم

$$M_{ij} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_i + \theta_j - \frac{3\Delta}{l}\right) + \mathcal{M}_{ij}$$

$$M_{ji} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_j + \theta_i - \frac{3\Delta}{l}\right) + \mathcal{M}_{ji}$$

$$M_{ij} = \frac{2E(I)}{l}\left(-\frac{3\Delta}{l}\right) = \frac{-6E(I)}{l^2}\Delta$$

★ وقتی تغییر مکان معلوم است می‌توانیم آن را حذف کنیم و به جای آن لنگر معادل را قرار دهیم

$$M_{ji} = -\frac{6E(I)}{l^2}\Delta$$

• در این روابط Δ با علامت وارد می‌شود

• برخلاف لنگرهای ناشی از θ که مخالف العلامه‌اند، در این حالت لنگرهای دو سر عضو هم علامت‌اند

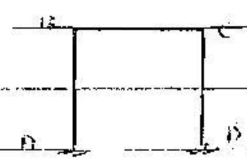
◄ تحلیل قاب‌ها به روش شیب افت

✓ قاب‌ها بار را در صفحهٔ خود تحمل می‌کنند، سطح مقطع پایهٔ قاب ... تر است

★ قاب‌ها را برای تحلیل به دو دسته تقسیم می‌کنیم :

۱- متعامد: زاویهٔ بین اعضای آن 90° است

۲- شیبدار

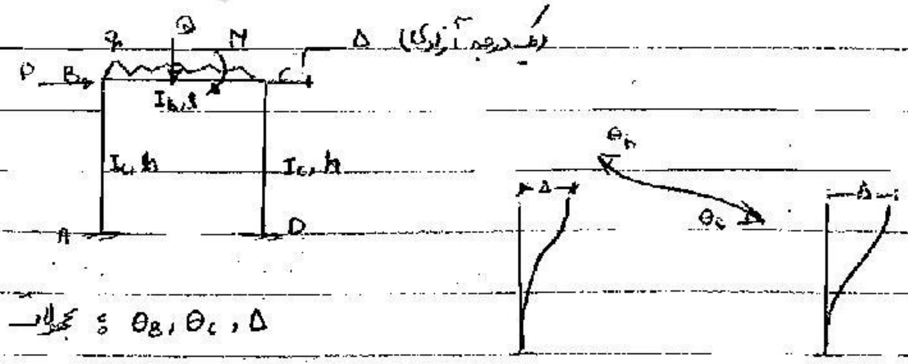


★ یکی از انواع قاب‌های متعامد، پرتال است.

★ اولین مسئله‌ای که باید در قاب‌ها بررسی شود حرکت جانبی قاب است

حرکت جانبی قاب (Sway)

★ اگر قاب متقارن باشد و بارگذاری هم متقارن باشد، حرکت جانبی نداریم



مجهولات : $\theta_B, \theta_C, \Delta$

• معادلات شیب افت را می‌توانیم برای هر عضو بنویسیم.

$$M_{ab} = \frac{2E(I_c)}{h}\left(\theta_B - \frac{3\Delta}{h}\right)$$

$$M_{ba} = \frac{2E(I_c)}{h}\left(2\theta_B - \frac{3\Delta}{h}\right)$$

$$M_{bc} = \frac{2E(I_b)}{l}(2\theta_B + \theta_C) + \mu_{bc}$$

$$M_{cb} = \frac{2E(I_b)}{l}(\theta_B + 2\theta_C) + \mu_{cb}$$

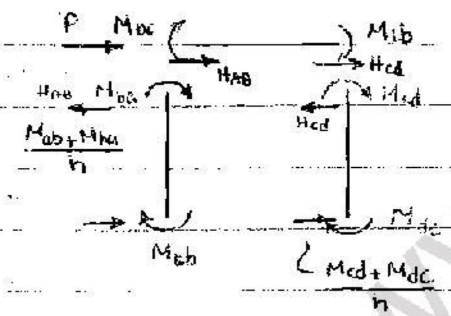
$$M_{cd} = \frac{2E(I_c)}{h}\left(2\theta_c - \frac{3\Delta}{h}\right)$$

$$M_{dc} = \frac{2E(I_c)}{h}\left(\theta_c - \frac{3\Delta}{h}\right)$$

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow M_{ba} + M_{bc} = 0 \quad (I)$$

$$\Sigma M_C = 0 \rightarrow M_{cb} + M_{cd} = 0 \quad (II)$$

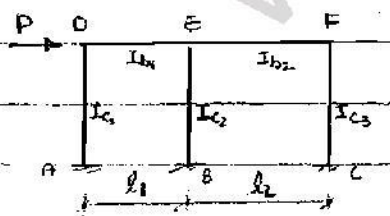
برای معادله سوم، از روی دیاگرام آزاد سازه، تعادل برشی را می‌نویسیم.



$$\Sigma F_{x/BC} = 0 \rightarrow P + H_{ab} + H_{cd} = 0 \quad (III)$$

* فرق این معادله این است که مجهولی اضافه نمی‌شود و معادله برشی منحصر به فرد است.

مثال: چند دهانه و چند طبقه



۱) تعیین مجهولات

* تعداد تغییر مکان های جانبی به تعداد طبقات بستگی دارد.

مجهولات: $\theta_D , \theta_E , \theta_F , \Delta$

۲) معادلات شیب افت را برای اعضا می‌نویسیم.

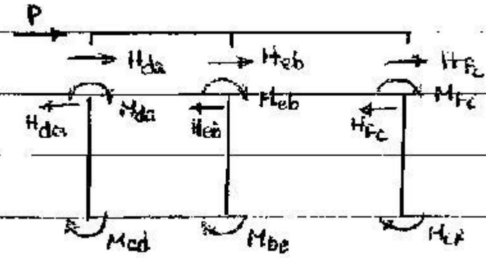
۳) تعادل گره‌ها را برقرار می‌کنیم.

$$M_{de} + M_{da} = 0 \quad (I)$$

$$M_{ed} + M_{ef} + M_{eb} = 0 \quad (II)$$

$$M_{fe} + M_{fc} = 0 \quad (III)$$

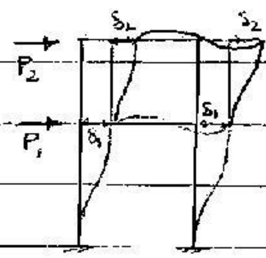
۴) برای بدست آوردن معادله آخر، از برش استفاده می‌کنیم



$$P + H_{da} + H_{eb} + H_{fc} = 0 \quad (IV)$$

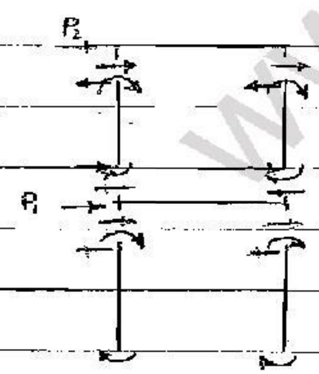
* قاب‌ها در مقابل حرکت‌های جانبی ضعیف‌تر از دوران هستند

◄ قاب چند طبقه



* در تحلیل قاب‌ها اینطور فرض می‌کنیم که نیروی اول اثر می‌کند و طبقه‌ها به صورت جسم صلب تغییر مکان می‌دهد و سپس فرض می‌کنیم نیروی دوم اثر می‌کند و تغییر شکل در سازه اتفاق می‌افتد.

مجهولات: $\theta_1 , \theta_2 , \theta_3 , \theta_4 , \delta_1 , \delta_2$



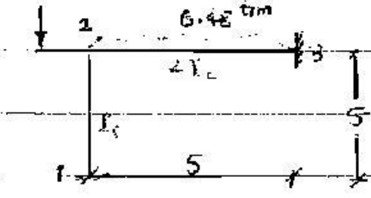
◄ نکاتی که باید در تحلیل قاب‌ها رعایت کنیم:

۱) باید حرکت‌های اضافی را در مسئله در نظر بگیریم

۲) اگر تعداد مجهولات از معادلات بیشتر شود، دیگر معادلات شیب افت برشی‌ها جواب نمی‌دهند.

وجود حرکت (Δ) در انتهای یکی از عضوها ← عدم تقارن

مثال) قاب زیر را تحلیل کنید



◄ این مجهولات تغییر مکان‌ها را تعیین کنیم: θ_B

و امکان حرکت نداریم چون اعضا نمی‌توانند تغییر طول دهند.

$$M_{23} = -M_{32} = -\frac{6.48\times 25}{12} = -13.5\ t.m$$

$$M_{12} = \frac{2E(I_c)}{5}(\theta_2) \quad , \quad M_{21} = \frac{2E(I_c)}{5}(2\theta_2)$$

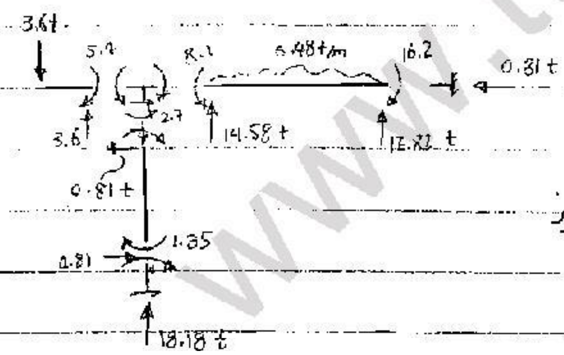
$$M_{23} = \frac{2E(2I_c)}{5}(2\theta_2) + (-13.5)$$

$$M_{32} = \frac{2E(2I_c)}{5}(\theta_2) + 13.5 \quad , \quad M_{con.} = 3.6\times 1.5 = 5.4\ t.m$$

$$\sum M_{(2)} = 0 \Rightarrow M_{21} + M_{23} + M_{con.} = 0 \Rightarrow \theta_2 = \frac{3.375}{EI}$$

$$M_{12} = 1.35\ t.m \quad , \quad M_{21} = 2.7\ t.m$$

$$M_{23} = -8.1\ t.m \quad , \quad M_{32} = 16.2\ t.m$$

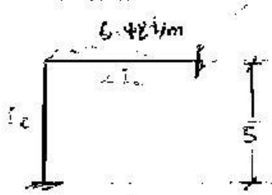


* اگر تکیه‌گاه 3 غلتکی بود، امکان حرکت جانبی داشتیم. یعنی بارگذاری قائم نیز می‌تواند موجب حرکت جانبی شود.

* اگر قابی دارای امکان حرکت جانبی داشته باشد فقط در حالت سازه متقارن و بارگذاری متقارن باشد، امکان حرکت وجود ندارد.

* متقارن بودن سازه شامل تکیه‌گاه‌ها هم می‌شود.

مثال 2) قاب زیر را تحلیل کنید.



* فقط $M_{con.}$ از مثال قبل حذف می‌شود و داریم:

$$M_{21} + M_{23} = 0$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \frac{5.625}{EI}$$

* وجود کنسول، گیر را متعادل می‌کرده است و با برداشتن آن گیر در تکیه θ افزایش یافته است

$M_{12} = 2.25$, $M_{21} = 4.5$, $M_{23} = 4.5$, $M_{32} = 18$

مثال 3) مثال قبل را در حالتی که I تیرها 2I باشد حل کنید

$\theta_2 = \dfrac{8.4375}{EI}$

$M_{12} = 3.375$, $M_{21} = 6.75$, $M_{23} = 6.75$, $M_{32} = 16.785$

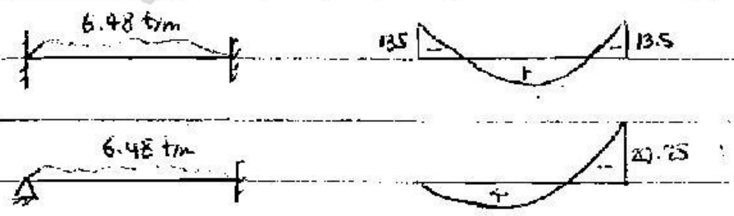
◄ همین مثال را در حالتی که I تیر 10 برابر I ستون باشد حل کنید.

$\theta_2 = \dfrac{1.534}{EI} \Rightarrow M_{12} = 0.612$, $M_{23} = 1.227$

$M_{21} = 1.227$, $M_{32} = 19.636$

◄ وقتی حالت برعکس ستون 10 برابر تیر باشد:

$M_{12} = 6.136$, $M_{21} = 12.27$, $M_{23} = 12.27$, $M_{32} = 14.11$



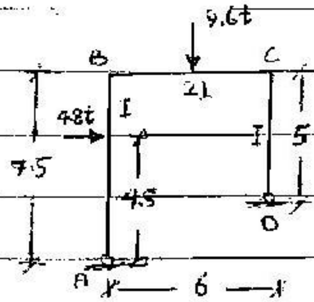
(1)

(2)

◄ در طراحی‌ها، سختی عضوها نقش مؤثری ایفا می‌کند.
هرچه تیر سختی بیشتری نسبت به ستون داشته باشد، تکیه‌گاه به سمت تکیه‌گاه ساده میل می‌کند (شکل 2) و هرچه ستون سختی بیشتری داشته باشد تکیه‌گاه‌ها به سمت تکیه‌گاه گیردار می‌روند (شکل 1).

◄ مفصل‌های سمت راست و چپ بالا در قاب، حالت تیر و ستون را دارند.

مثال ۱: قاب زیر را تحلیل کنید

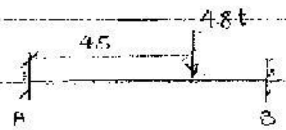


مجهولات: $\theta_A, \theta_B, \theta_C, \theta_D, \Delta$

۵- اگر از شیب افت اصلاح شده استفاده کنیم دو مجهول حذف می‌شوند: θ_A, θ_D

$\Rightarrow$ مجهولات: $\theta_B, \theta_C, \Delta$

$$M^*_{ab} = M_{ab} - \frac{1}{2} M_{ba} \quad , \quad M^*_{ba} = M_{ba} - \frac{1}{2} M_{ab}$$



$$M_{ab} = -\frac{4.8 \times 4.5 \times 3^2}{7.5^2} = -3.45 \ t.m$$

$$M_{ba} = \frac{4.8 \times 3 \times 4.5^2}{7.5^2} = +5.18 \ t.m$$

۵- عضو ab را $90°$ درجه نسبت می‌چرخانیم و مانند عضو افقی آن را حل می‌کنیم

$$M_{bc} = -\frac{9.6 \times 6}{8} = -M_{cb} = -7.2 \ t.m$$

$$M'_{ba} = \frac{3E(I)}{7.5}\left(\theta_B - \frac{\Delta}{7.5}\right) + \left(5.18 - \frac{1}{2}(-3.45)\right)$$

$$\begin{cases} M_{bc} = \dfrac{2E(2I)}{6}(2\theta_B + \theta_C) + (-7.2) \\ M_{cb} = \dfrac{2E(2I)}{6}(\theta_B + 2\theta_C) + (+7.2) \end{cases}$$

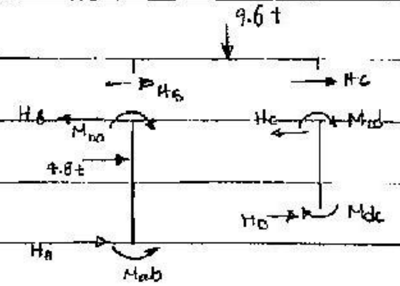
۵- برای عضو CD نیز از شیب افت اصلاح شده استفاده می‌کنیم:

$$M'_{cD} = \frac{3E(I)}{5}\left(\theta_c - \frac{\Delta}{5}\right)$$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow M'_{ba} + M_{bc} = 0 \quad (I)$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow M_{cb} + M'_{cd} = 0 \quad (II)$$

برای معادله سوم از برش استفاده می‌کنیم:



$$H_A = \frac{4.8\times 3}{7.5} \quad \frac{M_{ab}+M_{ba}}{7.5}$$

$$H_B = \frac{4.8\times 4.5}{7.5} + \frac{M_{ab}+M_{ba}}{7.5}$$

$$H_C = \frac{M_{cd}+M_{dc}}{5} = -H_D$$

$$H_B + H_C = 0 \qquad (III)$$

$$EI \begin{bmatrix} \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \\ \; & \; & \; \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_B \\ \theta_C \\ \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \; \\ \; \\ \; \end{bmatrix}$$

◄ استفاده از جدول Wilbur برای محاسبه لنگرهای گیرداری

۲/ فرض این روش این است که علامت خود به خود درست در می‌آید.

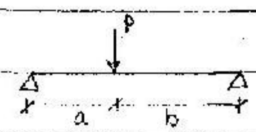
این روش مخصوص معادلات شیب افت است.

۱) تیر ساده — a لنگر نسبت به $= m_{oa}$

۲) سطح لنگر خمشی — b لنگر نسبت به $= m_{ob}$

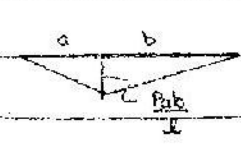
$$M_{ab} = \frac{2}{l^2}(m_{oa} - 2m_{ob}) \quad , \quad M_{ba} = \frac{2}{l^2}(2m_{oa} - m_{ob})$$

مثال: لنگرهای گیرداری را با استفاده از روش wilbur بدست آورید.



$$m_{oa} = \frac{Pab}{6}(2a+b)$$

$$m_{ob} = \frac{Pab}{6}(a+2b)$$



$$M_{ab} = -\frac{Pab^2}{l^2} \quad , \quad M_{ba} = +\frac{Pa^2b}{l^2}$$

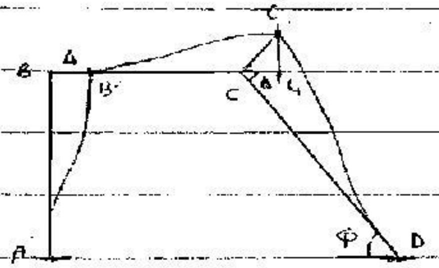
• قاب‌های شیب‌دار

اضلاع این قاب‌ها شیب‌دار هستند. محور اصلی این قاب‌ها معادل کردن مجهولات مکانی است (حل هندسی)

۱) تعیین مجهولات تغییر مکانی و دورانی

۲) معادل کردن مجهولات

• حل هندسی: تعیین مجهولات می‌نماییم



۱) تعیین مجهولات

θ_B , θ_C , Δ_{AB} , Δ_{BC} , Δ_{CD}

۲) معادل کردن مجهولات

$CC_1 = \Delta_{AB}$, $C_1C' = \Delta_{BC}$, $CC' = \Delta_{CD}$

$$\frac{CC_1}{\sin\varphi} = \frac{C_1C'}{\cos\varphi} = \frac{CC'}{\sin 90} \longrightarrow \begin{cases} C_1C' = \Delta_{AB}\operatorname{Cotg}\varphi \\ CC' = \Delta_{AB}\operatorname{Cosecant}\varphi \end{cases}$$

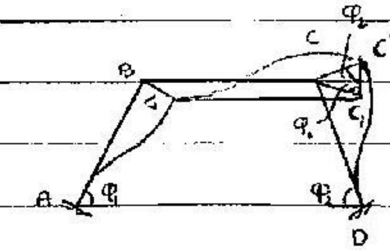
$$\begin{cases} M_{ab} = \frac{2EI}{l}\left(\theta_b - 3\frac{\Delta}{l}\right) + \mathcal{M}_{ab} \\ M_{ba} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_b - 3\frac{\Delta}{l}\right) + \mathcal{M}_{ba} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{bc} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_b + \theta_c + \frac{3\Delta\operatorname{Cot}\varphi}{l}\right) + \mathcal{M}_{bc} \\ M_{cb} = \frac{2EI}{l}\left(\theta_b + 2\theta_c + \frac{3\Delta\operatorname{Cot}\varphi}{l}\right) + \mathcal{M}_{cb} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{cd} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_c - \frac{3\Delta\operatorname{Cosec}\varphi}{l}\right) + \mathcal{M}_{cd} \\ M_{dc} = \frac{2EI}{l}\left(\theta_c - \frac{3\Delta\operatorname{Cosec}\varphi}{l}\right) + \mathcal{M}_{dc} \end{cases}$$

$M_{ba} + M_{bc} = 0$ (I) ; $M_{cb} + M_{cd} = 0$ (II)

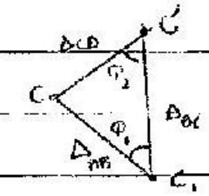
$\sum F_{x/BC} = 0$ (III)



$CC_1 = \Delta_{AB}$

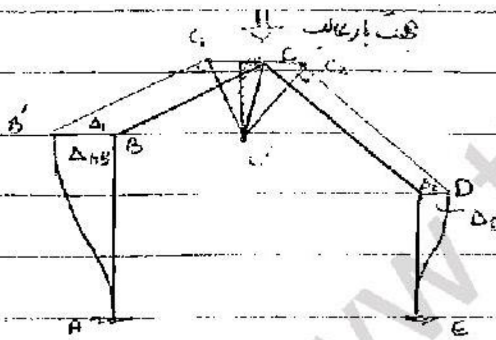
$C_1C' = \Delta_{BC}$

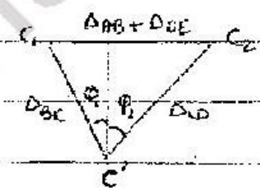
$CC' = \Delta_{CD}$



$$\frac{\Delta_{BC}}{\sin(\pi-\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{\Delta_{AB}}{\sin\varphi_2} \quad , \quad \frac{\Delta_{CD}}{\sin\varphi_1} = \frac{\Delta_{AB}}{\sin\varphi_2}$$

★ از مهم ترین قاب های شیبدار که تحلیل می کنیم، قاب های سوله هستند که دو درجه آزادی مستقل دارند.





$$\begin{cases} \Delta_{BC} = f(\Delta_1 + \Delta_2) \\ \Delta_{CD} = g(\Delta_1 + \Delta_2) \end{cases}$$

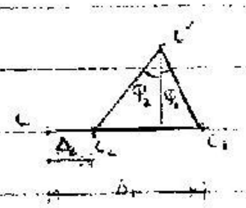
* در حالت کلی باید دستگاه 5 معادله، 5 مجهول را حل کنیم اما با استفاده از حل جبری، با حذف مجهولات، مسئله را حل می کنیم.

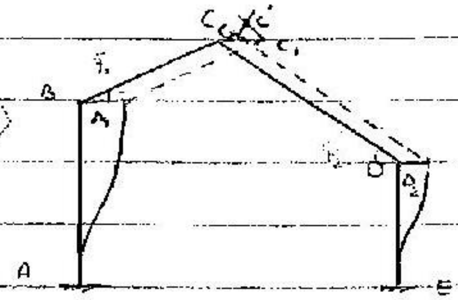
$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow M_{ba} + M_{bc} = 0$

$\Sigma M_c = 0 \Rightarrow M_{cb} + M_{cd} = 0$

$\Sigma M_d = 0 \Rightarrow M_{de} + M_{dc} = 0$

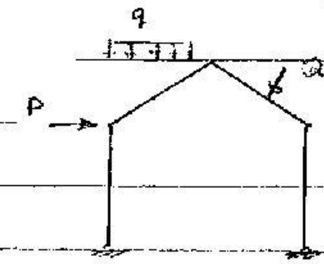
$\Sigma F_{x(B)} = 0 \quad , \quad \Sigma F_{x(D)} = 0$



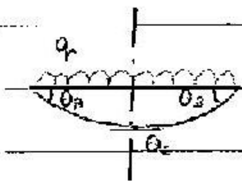


• تقارن

✓ از نظر هندسی اگر سازه متقارن باشد می‌توانیم از تقارن استفاده کنیم. تقارن تکیه‌گاهی و بارها مد نظر نیست



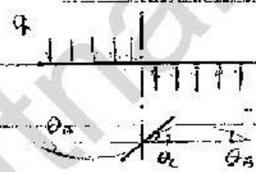
(سازه متقارن)



• بارگذاری متقارن

$\theta_B = -\theta_A \;,\; \theta_C = 0$

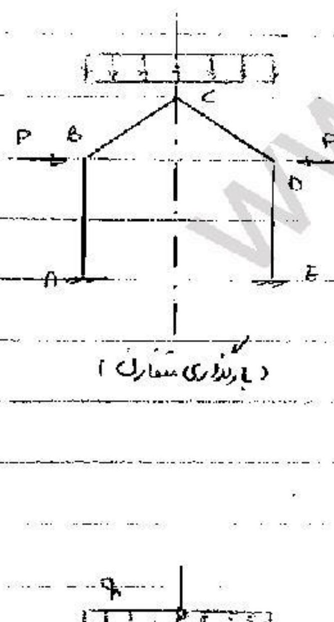
$\Delta_{VC} \neq 0 \;,\; \Delta_{HC} = 0$



• بارگذاری متقارن معکوس

$\theta_B = \theta_A \;,\; \theta_C \neq 0$

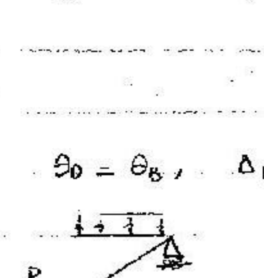
$\Delta_{VC} = 0 \;,\; \Delta_{HC} \neq 0$



(بارگذاری متقارن)

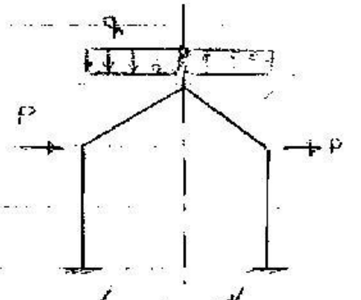
$\theta_D = -\theta_B \;,\; \theta_C = 0$

$\Delta_{HC} = 0 \;,\; \Delta_{VC} \neq 0$



★ به جای سازه مسئله می‌توانیم سازه روبه‌رو را با دو مجهول حل کنیم

$\theta_B^{I} \,,\, \Delta_{AB}^{I}$



(بارگذاری متقارن معکوس)

$\theta_D = \theta_B \;,\; \Delta_{DE} \;\; \Delta_{HB}$

★ مسئله را با سازه روبه‌رو و دو مجهول حل می‌کنیم.

$\theta_B^{II} \,,\, \Delta_{AB}^{II}$

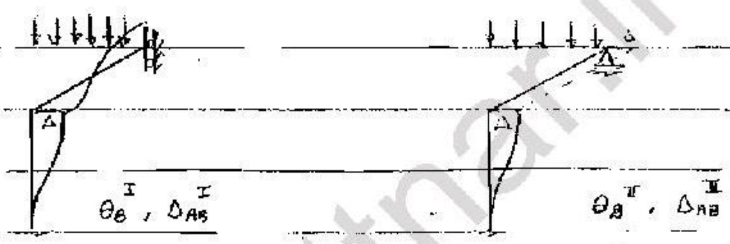
* روش گام به گام حل :

۱) تبدیل بارگذاری به دو حالت متقارن + متقارن معکوس

۲) حل دو نیم قاب

۳) ترکیب جواب های تغییر مکانی

* اگر مسئله ای را به صورت زیر به دو نیم قاب تبدیل کرده باشیم ، برای ترکیب جواب ها داریم :

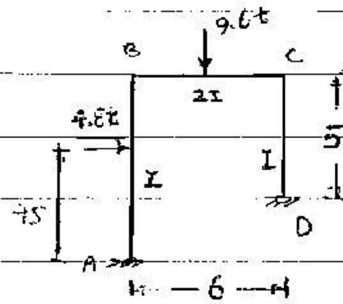


$$\begin{cases} \Delta_{AB} = \Delta^{I} + \Delta^{II} \\ \Delta_{BC} = \Delta_{BC}^{I} \\ \Delta_{CD} = -\Delta_{BC}^{I} \\ \Delta_{DE} = \Delta^{II} - \Delta^{I} \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta_B = \theta_B^{I} + \theta_B^{II} \\ \theta_C = \theta_C^{II} \\ \theta_D = -\theta_B^{I} + \theta_B^{II} \end{cases}$$

* حال با استفاده از Δ و θ های بدست آمده معادلات شیب افت را می نویسیم.

▸ کنترل در این حل این است که از رابطه M نیز شیب افت هر عضو بدست می آید و θ_B را یک بار در AB دیگر بار در BC می نویسیم. باید θ_B از چپ و راست در سازه اصلی یکسان باشد.

مثال) قاب زیر را تحلیل کنید.



$$M_{ab} = -\frac{4.8 \times 3^2 \times 4.5}{7.5} = 3.45 \ t.m$$

$$M_{ba} = 5.18 \ t.m$$

$$M_{bc} = -M_{cb} = -7.2 \ t.m$$

$$M_{ab} = \frac{2E(I)}{7.5}\left(2\theta_a + \theta_b - \frac{3\Delta}{7.5}\right) - 3.45$$

$$M_{ba} = \frac{2E(I)}{7.5}\left(\theta_a + 2\theta_b - \frac{3\Delta}{7.5}\right) + 5.18$$

$$M_{bc} = \frac{2E(2I)}{6}\left(2\theta_b + \theta_c\right) - 7.2$$

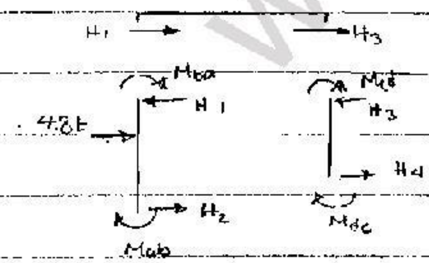
$$M_{cb} = \frac{2E(2I)}{6}\left(\theta_b + 2\theta_c\right) + 7.2$$

$$M_{cd} = \frac{2E(I)}{5}\left(2\theta_c + \theta_d - \frac{3\Delta}{5}\right)$$

$$M_{dc} = \frac{2E(I)}{5}\left(\theta_c + 2\theta_d - \frac{3\Delta}{5}\right)$$

$M_{ab} = 0 \quad (I)$, $M_{ba} + M_{bc} = 0 \quad (II)$

$M_{cb} + M_{cd} = 0 \quad (III)$, $M_{dc} = 0 \quad (IV)$



$$H_1 = \frac{4.8 \times 4.5}{7.5} + \frac{M_{ab} + M_{ba}}{7.5}$$

$$H_3 = \frac{M_{cd} + M_{dc}}{5.0}$$

$$\Rightarrow \quad H_1 + H_3 = 0 \quad (V)$$

$$\begin{bmatrix} 0.5333 & 0.26667 & 0.0000 & 0.0000 & -0.1067 \\ & 1.8667 & 0.6667 & 0.0000 & -0.1067 \\ & & 2.1333 & 0.4 & -0.24 \\ & \text{Symm} & & 0.8 & -0.24 \\ & & & & 0.1244 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_a \\ \theta_b \\ \theta_c \\ \theta_d \\ \Delta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3.45 \\ 2.016 \\ -7.2 \\ 0.0 \\ 3.1104 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 33.642 \\ 2.982 \\ 4.14 \\ 40.912 \\ 143.27 \end{bmatrix}$$

$$f_1 \qquad EI \times \underset{\sim}{a}$$

$M_{ab} \simeq 0.0$, $M_{ba} = 0.463$

$M_{bc} = 0.469$, $M_{cb} = 14.708$

$M_{cd} = 14.708$, $M_{dc} \simeq 0.0$

ـ ماتریس بدست آمده در این حالت، ماتریس سختی در حالت کلی است و برای هر شرایطی قابل استفاده است.

تحلیل قاب های مسطح :

ـ قاب های مسطح، سازه هایی هستند که بار در صفحه خود تحمل می کنند.

۱ـ ارتباط نیرو تغییرشکل در سطح عضو [ماتریس سختی عضو]
۲ـ انتقال به دستگاه کلی (اعمال سازگاری)
۳ـ برقراری تعادل نیروها ← دستگاه معادلات
۴ـ اعمال شرایط مرزی ← دستگاه قابل حل
۵ـ بدست آوردن مجهولات تغییرشکل
۶ـ بدست آوردن مجهولات نیرویی
۷ـ کنترل

$$[u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2] = \underset{\sim}{a}^{e^T}$$

$$[P_1, Q_1, M_1, P_2, M_2, Q_2] = \underset{\sim}{F}^{e^T}$$

$$M_1 = M_{ij} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_1 + \theta_2 + 3\,\frac{v_2 - v_1}{l}\right)$$

$$M_2 = M_{ji} = \frac{2EI}{l}\left(\theta_1 + 2\theta_2 + 3\,\frac{v_2 - v_1}{l}\right)$$

$$Q_1 = \frac{M_1 + M_2}{l} \quad , \quad Q_2 = \frac{M_1 + M_2}{l}$$

$$Q_1 = \frac{2EI}{l^2}\left(3\theta_a + 3\theta_b + 6\,\frac{v_2 - v_1}{l}\right)$$

$$Q_2 = \frac{2EI}{l^2}\left(3\theta_a + 3\theta_b + 6\,\frac{v_2 - v_1}{l}\right)$$

▲ چون در محدوده تغییر مکان های کوچک و ارتجاعی قرار داریم می توانیم اثر نیروهای محوری را برهم گذاری کنیم :

$$P_1 = \frac{EA}{l}(u_1 - u_2) \quad , \quad P_2 = \frac{EA}{l}(u_1 - u_2)$$

▲ ماتریس سختی در حقیقت تغییر از فضای تغییر مکان به فضای نیرو است.

K_{ij} = نیروی ایجاد شده در درجه آزادی i در اثر اعمال تغییر مکان واحد در درجه آزادی j وقتی که تمام سایر تغییر مکان ها صفر باشند.

← درایه ماتریس جرم

m_{ij} = نیروی ایجاد شده در درجه آزادی i در اثر اعمال شتاب واحد در درجه آزادی j وقتی که تمام سایر تغییر مکان ها صفر باشند.

← درایه ماتریس میرایی

c_{ij} = نیروی ایجاد شده در درجه آزادی i در اثر اعمال سرعت واحد در درجه آزادی j وقتی که تمام سایر تغییر مکان ها صفر باشند.

$$\begin{array}{c|cccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\hline
1 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\
2 & & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\
3 & & & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\
6 & & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\
5 & & & & & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\
6 & & & & & & \frac{4EI}{l} \\
\hline
\end{array}
\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} P_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ P_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس کلی اثر 2 بر 1   ماتریس اصلی ← ماتریس کلی گره 2

$$K_{11} = P_1\Big|_{\substack{u_1 = 1 \\ u_2 = v_1 = v_2 = \theta_1 = \theta_2 = 0}} = \frac{EA}{l} \quad , \quad K_{12} = P_1\Big|_{\substack{v_1 = 1 \\ u_1 = u_2 = v_2 = \theta_1 = \theta_2 = 0}} = 0$$

$$K_{13} = P_1 \Big|_{\substack{\theta_1 = 1 \\ u_1 = u_2 = v_1 = v_2 = \theta_2 = 0}} = 0 \quad , \quad K_{14} = P_1 \Big|_{\substack{u_2 = 1 \\ u_1, \dots = 0}} = \frac{-EA}{l}$$

$$K_{15} = P_1 \Big|_{v_2 = 1} = 0 \quad , \quad K_{16} = 0$$

$$K_{22} = Q_1 \Big|_{\substack{v_1 = 1 \\ u_1 = u_2 = \theta_1 = \theta_2 = v_2 = 0}} = \frac{12EI}{l^3} \quad , \quad K_{23} = Q_1 \Big|_{\substack{\theta_1 = 1 \\ u_1 = \dots = 0}} = \frac{6EI}{l^2}$$

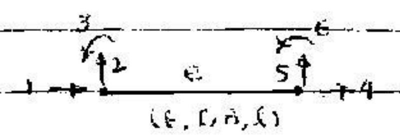
$$K_{24} = Q_1 \Big|_{u_2 = 1} = 0 \quad , \quad K_{25} = Q_1 \Big|_{v_2 = 1} = -\frac{12EI}{l^3}$$

$$K_{26} = Q_1 \Big|_{\theta_2 = 1} = \frac{6EI}{l^2}$$

ماتریس تبدیل برای تبدیل مختصات محلی به کلی :

$$\begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{T}' \qquad \underset{6\times6}{\underset{\sim}{T}} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{T}' & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{T}' \end{bmatrix}$$

$$\underset{6\times6}{\underset{\sim}{K_G}} = \underset{6\times6}{\underset{\sim}{T}^T} \; \underset{6\times6}{\underset{\sim}{K_L}} \; \underset{6\times6}{\underset{\sim}{T}}$$



$$\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{f}$$

بردار نیروی معلوم

★ بردار تغییر مکان های مجهول به دو دسته تقسیم می شوند : ۱- فعال active ۲- غیرفعال passive

فعال : درجات آزادی هستند که پیدا کردن آنها برای حل مسئله واجب است

غیرفعال : در حل مسئله تاثیری ندارند ولی می توانند بر حسب تغییر مکانهای اکتیو بدست آیند

active ← $n-m$ nonactive ← m