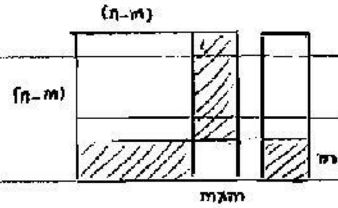
* ماتریس سختی را به صورت زیر اصلاح می‌کنیم و درجات آزادی فعال و غیرفعال را از هم جدا می‌کنیم:



◄ روش‌هایی برای حل ماتریس وجود دارد:

۱- حذف درجات آزادی غیرفعال از سیستم و کوچک کردن ماتریس سختی کل

۲- استفاده از تکنیک پنالتی برای اعمال تغییرمکان‌ها و نیروهای مجهول

تأثیر تغییر درجه حرارت:

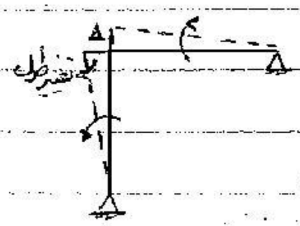
* تأثیر درجه حرارت از جنس انرژی است و اگر از حرکت جلوگیری شود درجه حرارت تولید نیرو می‌کند.
حرارت به صورت در سیستم اعمال می‌شود: ۱- حرارت یکنواخت ۲- نامتقارن (گرادیان حرارتی)

• حرارت یکنواخت: باعث افزایش یا کاهش طول میله‌ها می‌شود.

$$\Delta l = \alpha (\Delta T)\, l$$

فولاد، بتن ← $\alpha = 1.2\times10^{-6} /°C$ ـ $1.1\times10^{-6} /°C$

* اعمال تأثیر حرارت یکنواخت به صورت نشست تکیه‌گاهی امکان‌پذیر است:

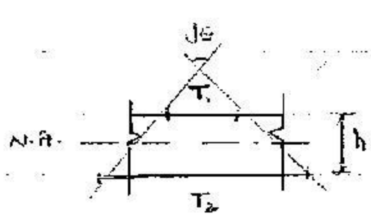


• تغییر طول تیر ← نشست برای ستون

• تغییر طول ستون ← نشست برای تیر

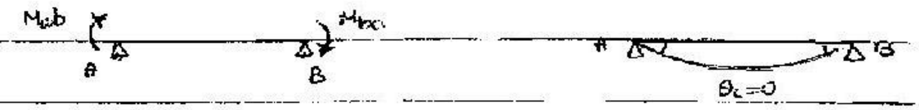
$$M_{ij} = \frac{2E(I)}{l}\left(2\theta_i + \theta_j - \frac{3\Delta}{l}\right) = -\frac{6EI}{l^2}\,\delta$$

Δl



* شکل تیر به صورت انحنا می‌باشد (تیر در خمش)
یعنی اثر گرادیان حرارتی در سیستم به صورت تولید لنگر است و
عملکرد آن مانند بار لنگر است.

$$d\theta = \frac{\alpha(\Delta T)}{h}\,dx \Rightarrow \theta_a = \int_0^{l/2} d\theta = \frac{\alpha l \Delta T}{2h} = \theta_b$$



$$\theta_a = \frac{l M_{ab}}{3EI} - \frac{l M_{ba}}{6EI} \quad , \quad \theta_a = \frac{\alpha \Delta T l}{2h}$$

$$M_{ab} = -M_{ba} = \frac{\alpha EI(\Delta T)}{h}$$

★ برای اینکه Mab و Mba مقدار گیرداری باشند

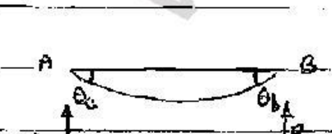
باید مقدار آنها به صورتی باشد که θ_a را صفر کنند.

★ برای اعمال اثر حرارت یکنواخت باید از حل هندسی استفاده می‌کنیم.

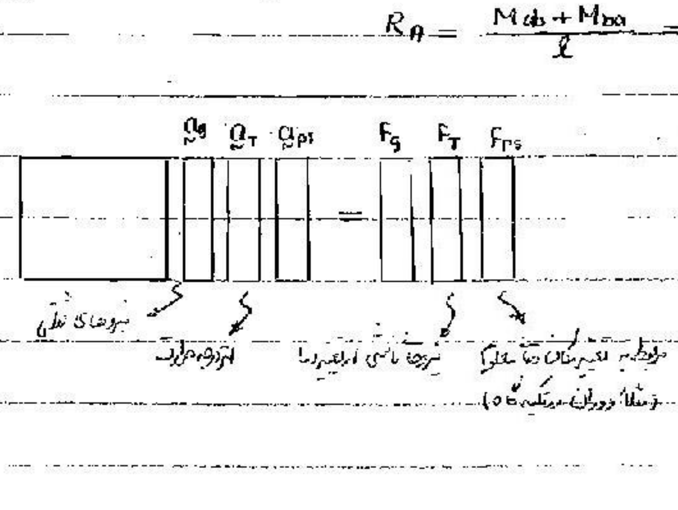
★ وقتی عبوری سیستم، بارگذاری حرارتی انجام دهیم، انرژی سیستم تغییر می‌کند و در نتیجه تنش و کرنش ایجاد می‌شود.

بارگذاری حرارتی:
- یکنواخت ــــ تغییر طول
- تفاضلی ــــ لنگرهای گیرداری

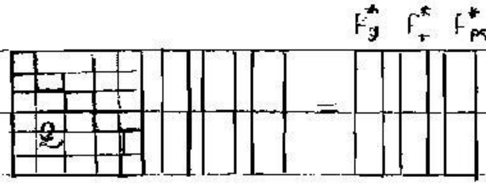
• برش ناشی از حرارت تفاضلی نداریم



$$R_A = \frac{M_{ab} + M_{ba}}{l} = 0$$



* ماتریس سختی را تبدیل به ماتریس بالا مثلثی می‌کنیم.



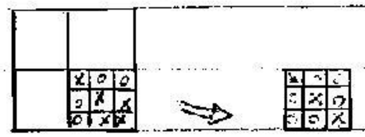
* اصلاح Frame
برای بارگذاری‌های بیش از ۱

تکیه گاه ارتجاعی:

تکیه گاهی است که نه به طور کامل مانع حرکت عضو می‌شود نه آن را به طور کامل رها می‌سازد
یعنی در محل خود دو عضو هم بستن نداشته باشیم — در این صورت تغییرمکان‌های آن دو
به هم مقید است و تکیه گاه ارتجاعی محسوب می‌شوند.

تکیه گاه ارتجاعی ← تغییرمکان داریم ولی مقید است

* تکیه گاه ارتجاعی را با فنر مدلسازی می‌کنیم



* اگر سه فنر هم متصل باشند
ماتریس به صورت روبرو در می‌آید.

هدف: تعیین تغییرمکان‌ها و نیروهای ایجاد شده در تکیه گاه است.

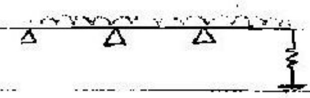
تعریف سختی تکیه گاه ≡ فنر معادل

۱) حذف تکیه گاه ارتجاعی و قرار دادن تکیه گاه معمولی
۲) از روش شیب-افت مسئله حل می‌شود
۳) عکس العمل تکیه گاه بدست می‌آید ... (R_o)
۴) در محل تکیه گاه ارتجاعی تغییرمکان واحد اعمال می‌کنیم.

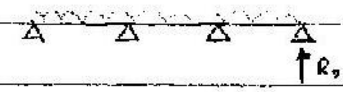
۵) مسئله بدون بارگذاری خارجی حل می‌شود.

۶) عکس العمل محل تکیه‌گاه ارتجاعی را بدست می‌آوریم (R^{I})

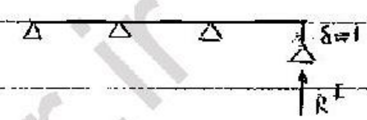
$$\text{سختی فنر} = \frac{\text{نیرو}}{\text{تغییرمکان}}$$



تغییرمکان واقعی فنر : x



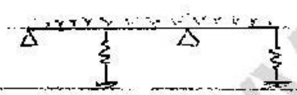
عکس العمل تکیه‌گاه : $x R^{I} + R_o$

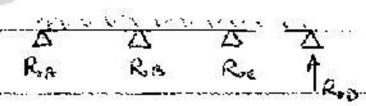


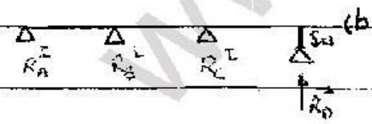
عکس العمل واقعی تکیه‌گاه : $R_F = x K_s$

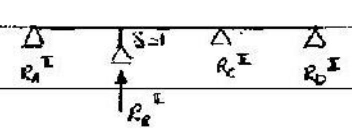
$$\Rightarrow \quad x R^{I} + R_o = x K_s$$

★ اگر چند تکیه‌گاه ارتجاعی داشته باشیم (بیش از ۱) قسمت اول حل مسئله تغییری نمی‌کند.









تغییرمکان واقعی فنر $B = y$ $\longrightarrow$ عکس العمل: $y R_B^{I} + R_{oB}$

$$R_{FB} = y K_B$$

$$\begin{cases} y R_B^{I} + R_{oB} = y K_B \\ x R_D^{I} + R_{oD} = x K_D \end{cases}$$

$$\begin{cases} y K_B = R_{oB} + x R_B^{I} + y R_B^{II} \\ x K_D = R_{oD} + x R_D^{I} + y R_D^{II} \end{cases} \Rightarrow$$

۷) از حل این دستگاه، مجهولات مسئله بدست می‌آید.

۸) اگر تعداد مجهولات مسئله ما n باشد باید n+1 بار مسئله را حل کنیم (دستگاه معادلات ← n×n)

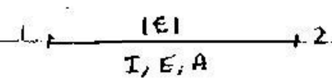
▶ تحلیل به روش شیب افت

- تحلیل تیرها با مقطع متغیر

- توابع شکل Shape Functions

* توابعی که برای تعریف میدان تغییر مکان در یک سیستم سازه ای به کار می رود. این میدان تغییر مکان برحسب تغییر مکان های نقاط گره ای تعریف می شوند.

تابع تغییر مکان $w(x)$



هدف تعریف $w(x)$ برحسب تغییر مکان گره های 1 و 2.

$$w(X) = \Phi_1(x)\, w_1 + \Phi_2\, \theta_1 + \Phi_3(x)\, w_2 + \Phi_4\, \theta_2$$

★ اگر این توابع را یک بار بدست آوریم می توانیم برای همه تیرها از آن استفاده کنیم.

با تبدیل کردن تغییر مکان، به قسمت های کوچکتر می توانیم به نتایج واقعی برسیم
(با کوچک کردن المان ها و تعداد بیشتر می توانیم به جواب واقعی نزدیک شویم)

$$\Phi_1(x) = 3\left(1-\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(1-x/l\right)^3$$

$$\Phi_2(x) = l\left(1-\frac{x}{l}\right)^2\left(\frac{x}{l}\right)$$

$$\Phi_3(x) = 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3$$

$$\Phi_4(x) = -l\left(\frac{x}{l}\right)^2\left(1-\frac{x}{l}\right)$$

مطلوب شد: ۱) تعریف میدان تغییر مکان به روش استاندارد

۲) تعریف میدان کرنش و تنش

۳) به دست آوردن درایه های K_{ij} ، m_{ij} ، c_{ij}

(ماتریس های سختی، جرم، میرایی ← ماتریس های سیستم)

ماتریس سختی $K^e_{ij} \leftarrow \sum \underset{\sim}{K}^e \leftarrow \underset{\sim}{K}$

ماتریس جرم $m^e_{ij} \leftarrow \sum \underset{\sim}{M}^e \leftarrow \underset{\sim}{M}$

ماتریس میرایی $c^e_{ij} \leftarrow \sum \underset{\sim}{C}^e \leftarrow \underset{\sim}{C}$

معادله تعادل دینامیکی سیستم $\quad \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{q} + \underset{\sim}{M}\,\ddot{\underset{\sim}{q}} + C\dot{\underset{\sim}{q}} = \underset{\sim}{F}(t)$

معادله تعادل استاتیکی سیستم $\quad \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{F}$

$$K^e_{ij} = \int_0^{\ell^e} \varphi_i''(EI)\,\varphi_j''\,dx \quad , \quad m^e_{ij} = \int_0^{\ell} \varphi_i(m)\,\varphi_j\,dx$$

$$C^e_{ij} = \int_0^{\ell} \varphi_i'(C)\,\varphi_j'\,dx$$

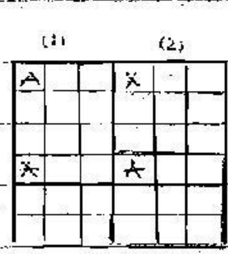
* توابع شکل دیگری هم باید برای نیروی محوری تعریف شوند.

$\varphi_1 , \varphi_2 \rightarrow$ توابع خطی (درجه یک) هستند

$$\frac{d^2}{dx^2}(EA) = \underbrace{b(x)}^{0} \quad \Rightarrow \quad y(x) = ax + b$$ جواب معادله:

نیروی محوری گسترده تیر

(1) (2)

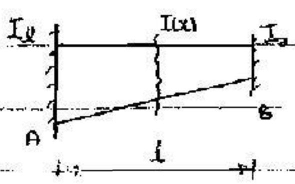


$$\begin{cases} \varphi_1 = 1 - \dfrac{x}{\ell} \\ \varphi_2 = \dfrac{x}{\ell} \end{cases}$$

$$K^e_{ij} = \int \varphi_i'\,(EA)\,\varphi_j'\,dx \quad (i,j = 1,4)$$

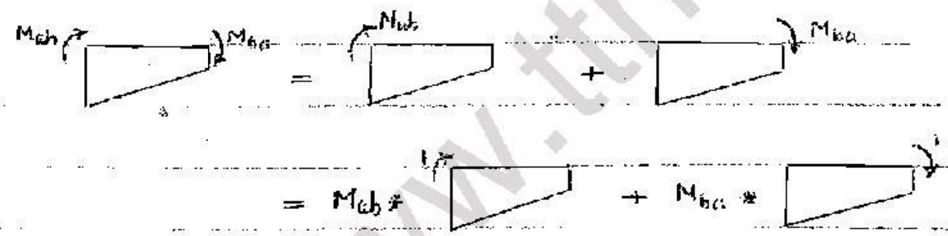
تحلیل تیرها با مقطع متغیر:

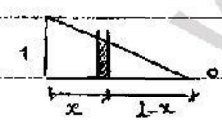
دلیل ساخت مقاطع متغیر، استفاده مناسب از مصالح است و فضای کافی برای معماری ایجاد می‌شود. در مقاطع فولادی از ورق های تقویت استفاده می‌کنیم.



$$\begin{cases} M_{ab} = \frac{2EI}{l}\left(2\theta_a + \theta_b - \frac{3\Delta}{l}\right) + \mathcal{M}_{ab} \\ M_{ab} = M^{\theta}_{ab} + M^{\theta} + M^{\Delta} + \mathcal{M}_{ab} \end{cases}$$

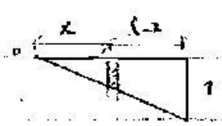
$I(x) = n x I_c \quad (n > 1)$





$M(x) = \frac{l-x}{l}$

$\frac{M(x)}{EI(x)} = \frac{l-x}{l} \times \frac{1}{EI(x)}$



$M(x) = \frac{x}{l}$

$\frac{M(x)}{EI(x)} = \frac{x}{l} \times \frac{1}{EI(x)}$

$\varphi_{11} = \frac{1}{l}$ (ممان سطح زیر منحنی $\frac{M}{EI}$ نسبت به b)

$\varphi_{21} = \frac{1}{l}$ (a 〃 〃 〃 〃)

$\varphi_{12} = \frac{1}{l}$ (لنگر سطح زیر منحنی $\frac{M}{EI}$ نسبت به b)

$\varphi_{22} = \frac{1}{l}$ (a 〃 〃 〃 〃 〃)

$$\varphi_{1} = \frac{1}{\ell^3}\left[\int_0^{\ell} \frac{(\ell-x)^2}{nx}\,\frac{\ell}{EI_c}\,dx\right] \quad , \quad \varphi_{12} = \varphi_{21}$$

$$\varphi_{21} = \frac{1}{\ell^2}\left[\int_0^{\ell} \frac{(\ell-x)\,x}{nx}\,dx \cdot \frac{\ell}{EI_c}\right] \quad , \quad \varphi_{22} = \frac{1}{\ell^2}\int_0^{\ell} \frac{x^2}{nx}\,\frac{\ell}{EI_c}\,dx$$

$$\varphi_{11} = \frac{C_1\ell}{EI_c} \quad , \quad \varphi_{12} = \frac{C_2\ell}{EI_c} = \varphi_{21} \quad , \quad \frac{C_3\ell}{EI_c}$$

★ φ را برای M_{ab} و M_{ba} ضرب می‌کنیم تا θ_{1a} ، θ_{1b} ، θ_{2a} و θ_{2b} بدست آیند :

$$M_{ab}\varphi_{11} = \theta_{1a} \qquad M_{ba}\varphi_{12} = \theta_{2a}$$
$$M_{ab}\varphi_{21} = \theta_{1b} \qquad M_{ba}\varphi_{22} = \theta_{2b}$$

جهت مثبت θ : $(+$

$$\begin{cases} \theta_a = \theta_{1a} - \theta_{2a} = M_{ab}\dfrac{C_1\ell}{EI_c} - M_{ba}\dfrac{C_2\ell}{EI_c} \\[2ex] \theta_b = -\theta_{1b} + \theta_{2b} = -M_{ab}\dfrac{C_2\ell}{EI_c} + M_{ba}\dfrac{C_3\ell}{EI_c} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}\theta_a \\ \theta_b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & -C_2 \\ -C_2 & C_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_{ab} \\ M_{ba}\end{bmatrix}\frac{\ell}{EI_c}$$

$$\begin{bmatrix}M_{ab} \\ M_{ba}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{C_3}{2(C_1C_3-C_2^2)} & \dfrac{-C_2}{2(C_1C_3-C_2^2)} \\[2ex] \dfrac{-C_2}{2(C_1C_3-C_2^2)} & \dfrac{C_1}{2(C_1C_3-C_2^2)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_a \\ \theta_b\end{bmatrix}$$

• بدون درنظرگرفتن نیروهای محوری

$$M_{ab} = \frac{2EI_c}{\ell}\left(K_{aa}\theta_a + K_{ab}\theta_b - (K_{aa}+K_{ab})\frac{\Delta}{\ell}\right)$$
$$M_{ba} = \frac{2EI_c}{\ell}\left(K_{ab}\theta_a + K_{bb}\theta_b - (K_{bb}+K_{ab})\frac{\Delta}{\ell}\right)$$

• باید برای حل مسئله تیر با مقطع متغیر C ها را محاسبه کنیم ۳ K را محاسبه کنیم

۳ تا C ها ضرایب ۱ و ۲ در روابط شیب افت ، ضرایب مربوطه را می‌نویسیم

★ اگر Δ و لنگر گیرداری نداشته باشیم:

$$M_{ab}=\frac{2EI_c}{\ell}\left(K_{aa}\theta_a+K_{ab}\theta_b\right)$$

$$M_{ba}=\frac{2EI_c}{\ell}\left(K_{ba}\theta_a+K_{bb}\theta_b\right) \qquad (I \text{ : ممان مقطع } , I_c)$$

$$K_{aa}=\frac{C_3}{2(C_1C_3-C_2)^2}\ ;\quad K_{ab}=K_{ba}=\frac{C_2}{2(C_1C_3-C_2^2)}\ ;\quad K_{bb}=\frac{C_1}{2(C_1C_3-C_2^2)}$$

$$C_1=\frac{1}{\ell^3}\int_0^{\ell}\frac{(\ell-x)^2}{nx}\,dx\ ;\quad C_2=\frac{1}{\ell^3}\int_0^{\ell}\frac{(\ell-x)x}{nx}\,dx\ ;\quad C_3=\frac{1}{\ell^3}\int_0^{\ell}\frac{x^2}{nx}\,dx$$

• خیز نقطه b نسبت به مماس بر a = لنگر $\frac{M}{EI}$ نسبت به b

• خیز a نسبت به مماس بر b = لنگر $\frac{M}{EI}$ نسبت به a

$$M(x)=M_{ab}^{\Delta}\frac{(\ell-x)}{\ell} \qquad\qquad M(x)=M_{ba}^{\Delta}\frac{x}{\ell}$$

$$\Delta=\left[\int_0^{\ell}\frac{M_{ab}^{\Delta}}{EI(x)}\frac{(\ell-x)}{\ell}(\ell-x)\,dx+\int_0^{\ell}\frac{M_{ba}^{\Delta}}{EI(x)}\frac{x}{\ell}(\ell-x)\,dx\right]$$

$$\Delta=\left[\int_0^{\ell}\frac{M_{ab}^{\Delta}}{EI(x)}\frac{(\ell-x)}{\ell}x\,dx-\int_0^{\ell}\frac{M_{ba}^{\Delta}}{EI(x)}\frac{x}{\ell}x\,dx\right]$$

از حل معادلات بالا در یک دستگاه داریم:

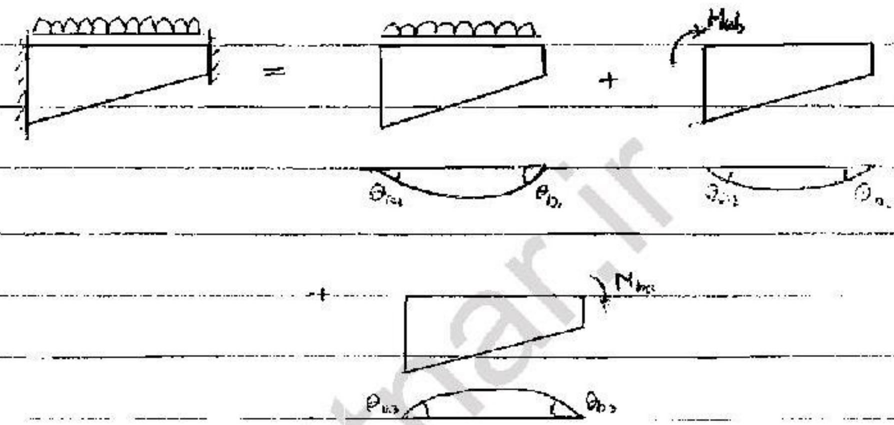
$$M_{ab}^{\Delta}=-\frac{2EI_c}{\ell}\left(\frac{C_2+C_3}{2(C_1C_3-C_2^2)}\right)\Delta$$

$$M_{ba}^{\Delta}=-\frac{2EI_c}{\ell}\left(\frac{C_1+C_2}{2(C_1C_3-C_2^2)}\right)\Delta$$

$$M_{ab} = \frac{2EI_c}{l}\left(K_{aa}\theta_a + K_{ab}\theta_b - (K_{aa}+K_{ab})\frac{\Delta}{l}\right)$$

$$M_{ba} = \frac{2EI_c}{l}\left(K_{ba}\theta_a + K_{bb}\theta_b - (K_{ab}+K_{bb})\frac{\Delta}{l}\right)$$

• محاسبهٔ لنگرهای گیرداری در مقطع متغیر



* اگر Mab و Mba لنگرهای گیرداری باشند روابط زیر برقرارند:

$$\begin{cases} \theta_{a_1} + \theta_{a_2} - \theta_{a_3} = 0 \\ -\theta_{b_1} - \theta_{b_2} + \theta_{b_3} = 0 \end{cases}$$

$$\theta_{a_1} = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{M(x)}{EI(x)}(l-x)\,dx \quad ; \quad \theta_{b_1} = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{M(x)}{EI(x)}\,x\,dx$$

$$\theta_{a_2} = M_{ab}\frac{c_1 l}{EI_c} \quad ; \quad \theta_{a_3} = M_{ba}\frac{c_2 l}{EI_c}$$

$$\theta_{b_2} = M_{ab}\frac{c_2 l}{EI_c} \quad ; \quad \theta_{b_3} = M_{ba}\frac{c_3 l}{EI_c}$$

$$\begin{bmatrix} M_{ab} \\ M_{ba} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2(c_1c_3 - c_2^2)}\begin{bmatrix} c_3 & c_2 \\ c_2 & c_1 \end{bmatrix}\right) \times \frac{2}{l^2}\begin{bmatrix} c_4 \\ c_5 \end{bmatrix}$$

$$C_4 = \int_0^l \frac{M(x)(l-x)}{nx}\,dx \quad ; \quad C_5 = \int_0^l \frac{M(x)\cdot x}{nx}\,dx$$

* در مقطع ثابت ضریب انتقال لنگر از یک انتها به انتهای دیگر برابر 2 است ولی در مقطع متغیر K_{aa} به K_{ab} می باشد یعنی لنگر به نسبت دوران های دو سر انتقال می یابد

روش های عددی انتگرال گیری :

* این مقطع را به مقاطع کوچک تری تقسیم کنیم
هرچه تعداد قسمت ها بیشتر باشد دقت بیشتری را در انتگرال گیری دارد

محاسبه مقاطع متغیر از روی ... ماتریس نرمی :

* در روش نرمی، مجهولات اصلی ما نیروها ... عیب این روش این است که انتخاب واکنش ها اضافی کاملاً اختیاری است و راه های ... دارد. مشکل دیگر این است که با حذف واکنش های اضافی سازه باید پایدار باشد ... که سازه ... مستلزم انجام محاسبات عددی زیادی است

* فرمول سازی مختلط Mixed Formulation

$I(x) = I_c$

$$C_1 = \int_0^l \frac{(1-x/l)^2}{EI(x)}\,dx \quad ; \quad C_2 = \int_0^l \frac{(1-x/l)(x/l)}{EI(x)}\,dx$$

$$C_3 = \int_0^l \frac{(x/l)^2}{EI(x)}\,dx$$

* دو عامل ثابت x/l و $1-x/l$ در این انتگرال ها وجود دارد.

$$F = \left\{ \int_0^l \begin{bmatrix} \left[\frac{(1-x/l)^2}{EI(x)}\right] & \left[\frac{(1-x/l)(x/l)}{EI(x)}\right] \\ \left[\frac{(1-x/l)(x/l)}{EI(x)}\right] & \left[\frac{(x/l)^2}{EI(x)}\right] \end{bmatrix} \right\} dx$$

$$F = \int_0^{l} \left\{ \begin{bmatrix} (1-x/l) \\ (x/l) \end{bmatrix} \left(\frac{1}{EI(x)}\right) \begin{bmatrix} (1-x/l) & (x/l) \end{bmatrix} \right\} dx$$

* در روش های عددی، مقدار تابع را در نقاط معین بدست می‌آوریم و با هم جمع کرده و در ضریب مربوطه ضرب می‌کنیم.

◄ روش ذوزنقه

$$\int_0^{l} J(x)\, dx = \frac{h}{2}\left[J_0 + 2J_1 + 2J_2 + \dots + J_n\right]$$

$(l = nh)$:

که بازه را به n قسمت تقسیم می‌کنیم. هرچه تعداد تقسیمات بیشتر باشد دقت هم افزایش می‌یابد.

◄ روش سیمپسون

$$\int_0^{l} J(x)\, dx = \frac{h}{3}\left[J_0 + 4J_1 + 2J_2 + \dots + 4J_{n-1} + J_n\right]$$

* در روش سیمپسون باید تعداد تقسیمات زوج باشد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.6 & 0.5 & 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.8 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{EI_0} & & & & & \\ & \frac{4}{EI_1} & & & 0 & \\ & & \frac{2}{EI_2} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & \frac{4}{EI_9} & \\ & & & & & \frac{1}{EI_{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.9 & 0.1 \\ 0.8 & 0.2 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

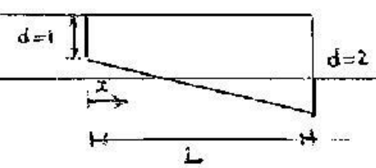
* ابتدا بازه را به نقاط مورد نیاز تقسیم بندی می‌کنیم و سپس مقدار تابع را به ازای xهای مختلف بدست آورده و در ضرایب مربوطه ضرب می‌کنیم.

$$F_{11} = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{x_i}{l}\right)^2 * D_i$$

$$F_{12} = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{x_i}{l}\right)\left(\frac{x_i}{l}\right) * D_i$$

$$F_{22} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{l}\right)^2 * D_i$$

مثال) مقطع متغیر زیر را تحلیل کنید



$$I(x) = \frac{bd^3}{12} = \frac{bd_0^3}{12}\left(1+\frac{x}{l}\right)^3 = I_0\left(1+\frac{x}{l}\right)^3$$

$$d(x) = d_0\left(1+\frac{x}{l}\right)$$

در حالت کلی وقتی مقاطع به طور خطی تغییر می‌کنند : $d(x) = d_0\left(1+\alpha\frac{x}{l}\right)$: تغییر ارتفاع

$x = 0 \rightarrow I_0 = I_0$; $x = 0.1 \rightarrow I_1 = I_0(1.1)^3$

$I_2 = I_0(1.2)^3$; $I_3 = I_0(1.3)^3$; ...... ; $I_{10} = I_0(1.1)^3 = 8I_0$

$$D_0 = \frac{1}{I_0}, \quad D_1 = \frac{4}{I_0(1.1)^3}, \quad D_2 = \frac{2}{I_0(1.2)^3}, \quad \ldots, \quad D_{10} = \frac{1}{8I_0}$$

$$F_{11} = \sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{x_i}{l}\right)^2 \times D_i = \frac{0.1l}{3EI_0}(5.794)$$

$$F_{12} = \sum_{i=1}^{n}(1-x_i/l)(x_i/l) \times D_i = \frac{0.1l}{3EI_0}(1.705)$$

$$F_{22} = \sum_{i=1}^{n}(x_i/l)^2 \times D_i = \frac{0.1l}{3EI_0}(2.045)$$

$$F = \frac{l}{6EI_0}\begin{bmatrix} 1.159 & 0.341 \\ 0.341 & 0.409 \end{bmatrix} \Longrightarrow K = F^{-1} = \frac{2EI_0}{l}\begin{bmatrix} 3.930 & 2.860 \\ 2.860 & 9.719 \end{bmatrix}$$

ضرایب K را از این طریق محاسبه می‌کنیم و سپس در معادلات شیب افت قرار دهیم : $\frac{2EI_0}{l}\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ab} & K_{bb} \end{bmatrix}$

محاسبه لنگرهای گیرداری :

$$C_4 = \int_0^l \frac{M(x)}{EI(x)}(l-x)\,dx$$

$$C_5 = \int_0^l \frac{M(x)}{EI(x)}\,x\,dx$$

$$\xi_1 = \int_0^l M(x) \left[\frac{1}{EI(x)}\right] \left(1 - \frac{x}{l}\right) dx$$

$$\xi_2 = \int_0^l M(x) \left[\frac{1}{EI(x)}\right] \left(\frac{x}{l}\right) dx$$

★ به همان صورت روش سیمپسون، انتگرال‌های گیرداری را تشکیل می‌دهیم.

◀ استفاده عملی از روش شیب افت

• روش‌های تکراری Intrative Methods

★ روش‌های تکراری، روش‌هایی هستند که یک مجهول را از چند فرمول بدست می‌آوریم و سعی می‌کنیم جواب‌ها را به هم نزدیک کنیم. روش تکراری بر مبنای فرمول‌های دقیق انجام می‌شوند بنابراین روش‌های دقیقی هستند.

محدوده اعتبار:

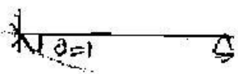
• تغییر شکل‌های بسیار کوچک
• گره‌های صلب
• تأثیر ناچیز نیروی محوری

◀ تعاریف:

سختی دورانی: به ازای دوران واحد در تیر، لنگر معادل را بدست می‌آوریم که سختی دورانی متناظر آن است ← سختی دورانی مطلق

$$M_{ij} = \frac{2EI}{l}(2\theta_i + \theta_j)$$

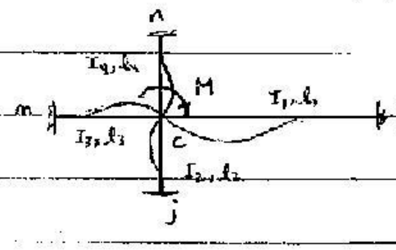
$$M = K' = \frac{4EI}{l}$$ سختی دورانی مطلق



$$K'' = \frac{3EI}{l}$$ سختی دورانی کاهش یافته

* هرچه سازه را نامعین می‌کنیم، سختی آن را افزایش می‌دهیم و پایداری آن نیز بیشتر می‌شود

- توزیع لنگر:



* چون گره صلب است، تمامی اعضاء به اندازه θ دوران می‌کنند.

$$M_{ci} = \frac{2EI_1}{l_1}(2\theta) \quad , \quad M_{ci} = K_1'\,\theta$$

$$M_{cj} = \frac{4EI_2}{l_2}\,\theta = K_2'\,\theta$$

$$M_{cm} = \frac{4EI_3}{l_3}\,\theta = K_3'\,\theta \quad \Rightarrow \quad M = (K_1' + K_2' + K_3' + K_4')\,\theta$$

$$M_{cn} = \frac{4EI_4}{l_4}\,\theta = K_4'\,\theta$$

$$\boxed{\theta = \frac{M}{\sum_{i=1}^{4} K_i}}$$

$$M_{ci} = \frac{K_1'}{\sum K_i'}\,M = r_{ci}\,M$$

$$M_{cj} = \frac{K_2'}{\sum K_i'}\,M = r_{cj}\,M$$

$$M_{cm} = \frac{K_3'}{\sum K_i'}\,M = r_{cm}\,M$$

$$M_{cn} = \frac{K_4'}{\sum K_i'}\,M = r_{cn}\,M$$

$$\boxed{r_{ij} = \frac{K_{ij}'}{\sum_{\text{گره}} K_{ij}'}}$$

◄ وقتی در یک گره، لنگری وجود دارد، این لنگر به نسبت سختی اعضاء تقسیم می‌شود.
توزیع لنگر (Moment Distribution)

- انتقال لنگر:

$$M_{ci} = \frac{2EI_1}{l_1}(2\theta_c + \cancel{\theta_i})$$

$$M_{ic} = \frac{2EI_1}{l_1}(\theta_c + 2\cancel{\theta_i}) \quad \leadsto \quad M_{ic} = \frac{1}{2} M_{ci}$$

* لنگر از یک سر تیر به سر دیگر منتقل می‌شود. این امر فقط در تیرهایی با مقطع ثابت صادق است و در مقاطع متغیر مطرح نمی‌شود.

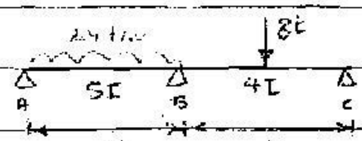
تمرین) پس حل این مسئله توسط روش شیب افت و روش توزیع لنگر را برای پیدا کنید.

* تکیه گاه ها را گیردار می کنیم و لنگر درگیری را حساب می کنیم.

◄ روش توزیع لنگر Moment Distribution

(Cross)

۱) بدست آوردن سختی اتصالی که در گره ها وجود دارند



$$K' = \frac{4EI}{l} \quad , \quad K = \frac{I}{l} \quad , \quad r_{ij} = \frac{I/l}{\Sigma I/l}$$

B) AB, BC

$$K_{ba} = \frac{5I}{10} \quad , \quad K_{bc} = \frac{4I}{12}$$

$$\Sigma K_B = \frac{5I}{10} + \frac{4I}{12}$$

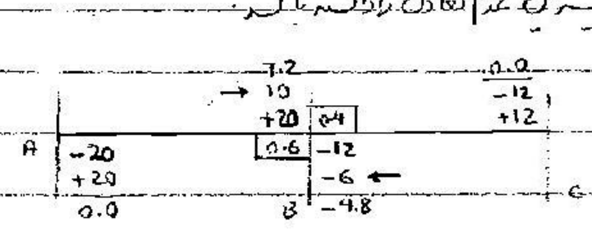
$$r_{ba} = \frac{5I/10}{(5I/10 + 4I/12)} = 0.6 \quad , \quad r_{bc} = \frac{4I/12}{(5I/10 + 4I/12)} = 0.4$$

۲) بدست آوردن لنگرهای گیرداری

$$M_{ab} = M_{ba} = 20 \text{ t.m}$$

$$M_{bc} = M_{cb} = 12 \text{ t.m}$$

* از گره ای برای توزیع لنگر شروع می کنیم که بیشترین عدم تعادل را داشته باشد.



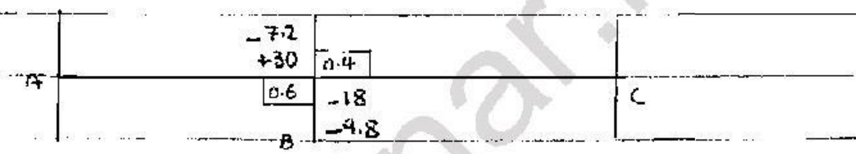
* حل تیر به این صورت مناسب نیست و بهتر است تیر را به این صورت تقسیم کرده و در مسئله قرار دهیم

بنابراین از سختی کاهش یافته برای تیرک در مفصل استفاده می کنیم.

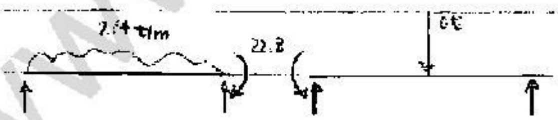
$$K_{ba} = \frac{5I}{10} \times \frac{3}{4} \quad , \quad K_{bc} = \frac{4I}{12} \times \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow r_{ba} = 0.6 \quad , \quad r_{bc} = 0.4 \Rightarrow \begin{cases} M'_{ba} = +30 \ t.m \\ M'_{bc} = -18 \ t.m \end{cases}$$

انتقال لنگر در عضوی که یک سر مفصل است صورت نمی گیرد بنابراین با یک بار توازن جواب می گیریم.



$$\Rightarrow M_{bc} = -22.8 \quad , \quad M_{ba} = 22.8$$



★ اگر تغییر مکان جانبی نسبی داشته باشیم، به صورت لنگر گیرداری در تیر اعمال می کنیم.

◄ روش‌های تکراری در حل سازه‌های نامعین:

. مبنا: حل (عددی) تکراری دستگاه معادله

. حل اولیه با حل صفر، حل تکراری

* پس از تعیین ضرایب توزیع و ضرایب انتقال، از گرهی شروع می کنیم که بیشترین عدم تعادل (لنگر نامتعادل) را داشته باشد.

نشست تکیه گاه:

A Δ 3I Δ B 10I Δ C 2I Δ D

6 m 12 m 6 m

$E = 2\times10^{7}\ t/m^2$

$I = 4\times10^{-4}\ m^4$

B در نشست $= 15\ mm$

با توجه به نشست ← لنگرهای معادل شده

$M_{BA} = \frac{3EI(\delta)}{l^2} = 30\ t.m$

$M_{BC} = M_{CB} = -\frac{6EI(\delta)}{l^2} = -50\ t.m$

$B) :\ ba, bc \rightsquigarrow K^r_{ba} = \frac{3}{6}\times\underset{\downarrow}{\frac{3}{4}} = 0.375 \rightarrow K_{bc} = \frac{10}{12} = 0.833$

اصلاح

$\Rightarrow r_{ba} = 0.31,\ r_{bc} = 0.69$

$C) :\ cb, cd \rightsquigarrow K_{cb} = \frac{10}{12} = 0.833 \rightarrow K_{cd} = 0.25$

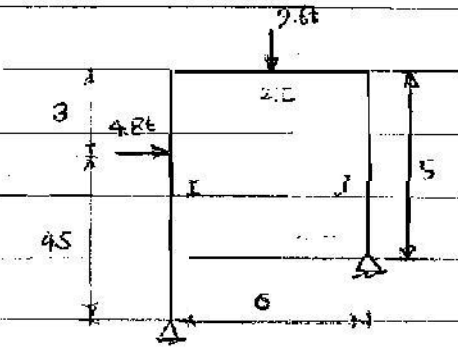
$\Rightarrow r_{cb} = 0.77,\ r_{cd} = 0.23$

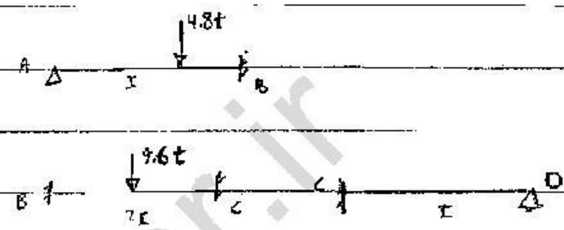
BA	BC	CB	CD
0.31	0.69	0.77	0.23
−30	+50	+50	0.0
−0.25	19.25	−38.5	−11.5
−0.03	−0.52	−0.26	+0.06
	0.1	0.2	0.01
	−0.07	−0.03	
	0.01	+0.03	
−30.27	30.28	+11.43	−11.43

تحلیل سازه های نامعین به روش تکراری

تحلیل قاب به روش توزیع لنگر

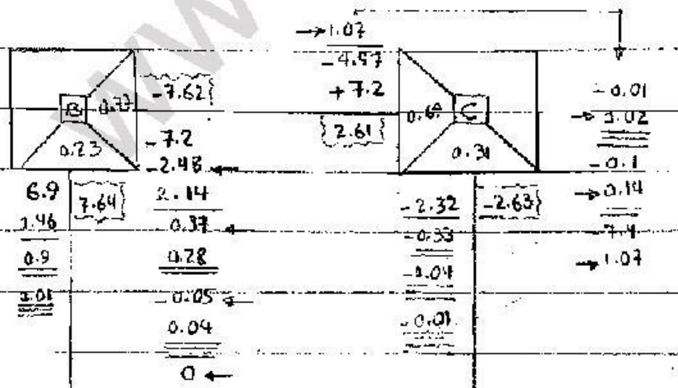
مثال) قاب زیر را تحلیل کنید.

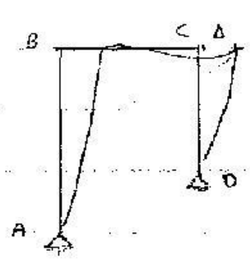




$B: K^{r}_{ba} , K_{bc}$, $C: K_{cb} , K^{r}_{cd}$ — $K^{r}_{ij} = \frac{3}{4} K_{ij}$

$$\begin{cases} M'_{ba} = 6.9 \ t.m \\ M_{bc} = M_{cb} = 7.2 \ t.m \end{cases} \qquad \begin{cases} M'_{ab} = M_{ab} - \frac{1}{2} M_{ba} \\ M'_{ba} = M_{ba} - \frac{1}{2} M_{ab} \end{cases}$$





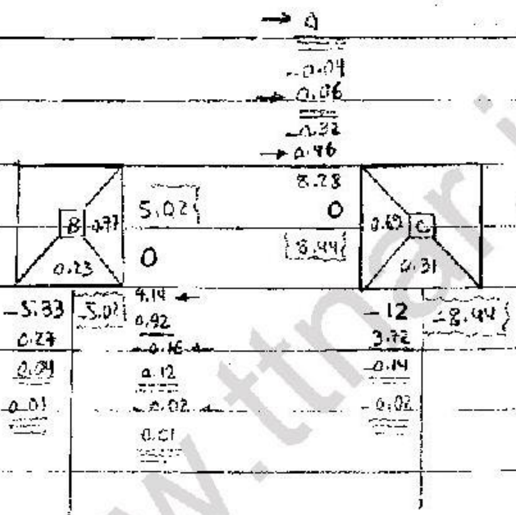
برای حل مثال مشابه در روش توزیع لنگر اول باید حال حرکت جانبی (Δ) را هم در نظر می گیریم و باید لنگرهای گیرداری معادل با سازه اعمال کنیم

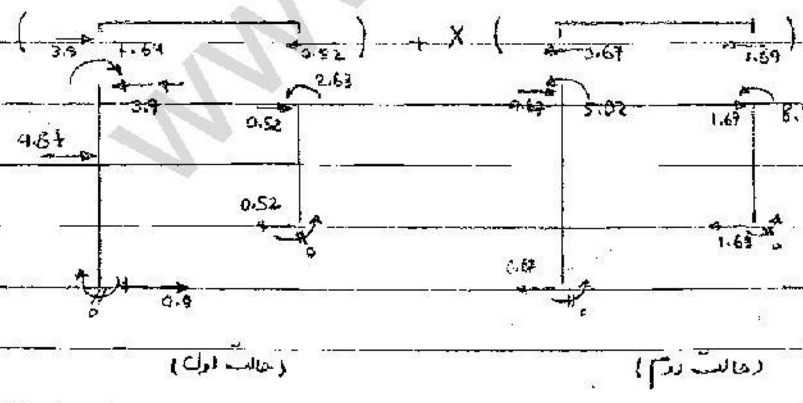
• گیرداری معادل تغییر مکان دلخواه در محل تکیه گاه مجازی

$$5.33\ t.m = M'_{ba} = \frac{3E(I)}{l^2}\Delta \;\rightarrow\; \Delta = \frac{100}{EI}$$

$$-12\ t.m = M'_{cd} = \frac{3E(I)}{l^2}\Delta$$

Δ را برای انتخاب می‌کنیم که لنگرهای بدست آمده در حدود لنگرهای قبلی باشند.





(حالت اول) (حالت دوم)

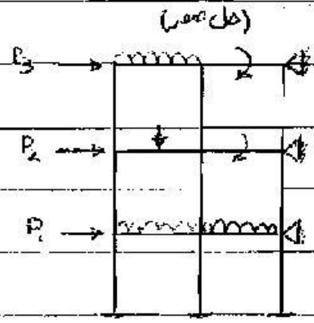
• معادله حالا بالا را براساس سازه می‌نویسیم و مقدار X را بدست می‌آوریم.

$$(0.9 - 0.52) + X(-0.67 - 1.69) = 4.8 \Rightarrow \boxed{X = 1.43}$$

Δ جدید $\Delta = \frac{143}{EI}$

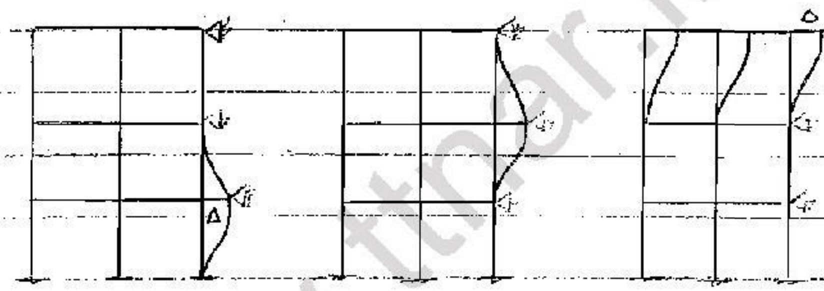
$M_{ba} = (-1.64) + 1.43(-5.02)$, $M_{cb} = 2.61 + 1.43(8.44)$

▲ اگر قاب بیش از یک طبقه داشته باشد :



✓ ابتدا با قرار دادن تکیه گاه های مجازی امکان حرکت جانبی را از سازه می گیریم و آن را تحلیل می کنیم.

✓ سپس به ترتیب تکیه گاه ها را آزاد می کنیم تا به اندازه Δ حرکت جانبی داشته باشند و سازه را تحلیل می کنیم



حل I   حل II   حل III

(حل صفر) + x (حل I) + y (حل II) + z (حل III)

★ برای بدست آوردن معادلات لازم، دیاگرام آزاد سازه را رسم می کنیم و معادله برش را در هر طبقه می نویسیم

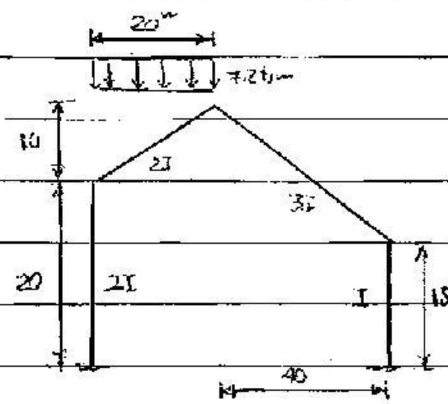
★ در این حالت باید n+1 بار مسئله را حل کنیم

★ چون در این روش باید دستگاه معادله n×n را حل کنیم از روش های کلی تر برای تحلیل این قاب ها استفاده می کنیم :

۱ـ تحلیل جداگانه برای افقی و قائم : فرض می کنیم بار قائم تولید حرکت جانبی نمی کند و سپس بارهای جانبی را در نظر می گیریم و جواب ها را با هم جمع می کنیم. این روش تقریبی است چون فقط در حالت سازه متقارن بار قائم تولید حرکت جانبی نمی کند.

۲ـ روش کانی

تمرین) مطلوبست تحلیل قاب زیر به روش توزیع لنگر



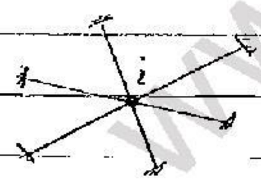
◄ روش کانی در تحلیل سازه‌های نامعین

★ مبنای این روش شیب افت است و تمامی فرضیات شیب افت در اینجا هم صادق است.

$$M_{ij} = \frac{2EI}{l} 2\theta_i + \frac{2EI}{l}\theta_j - \frac{6EI\delta}{l^2} + \mathcal{M}_{ij}$$

$$M_{ij} = 2M_{ij}^{\theta} + M_{ji}^{\theta} + M_{ij}^{\Delta} + \mathcal{M}_{ij}$$

★ جمع لنگرهای گیرداری در گره i ثابت است
هدف روش کانی بدست آوردن M_{ij}^{θ} می‌باشد.



$$\sum M_{ij} = \sum 2M_{ij}^{\theta} + \sum M_{ji}^{\theta} + \sum \mathcal{M}_{ij}$$

چون جمع لنگرهای گیرداری گره ثابت است $\Rightarrow \sum \mathcal{M}_{ij} = \mathcal{M}_i$ (لنگر گره)

چون گره متعادل است $\longrightarrow \sum M_{ij} = 0$

$$\sum M_{ij}^{\theta} = -\frac{1}{2}\left[\sum M_{ji}^{\theta} + \mathcal{M}_i\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{ij}^{\theta} = -\frac{1}{2} K_{ij}\left[\mathcal{M}_i + \sum M_{ji}^{\theta}\right]}$$

ضریب توزیع کانی — $r_{ij} = -\frac{1}{2}\frac{K_{ij}}{\sum K_i} \Rightarrow M_{ij}^{\theta} = r_{ij}^{k}\left[\mathcal{M}_i + \sum M_{ji}^{\theta}\right]$

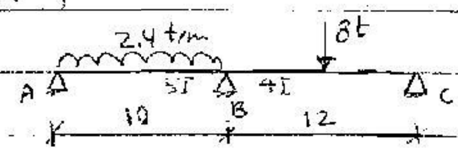
◀ روش کانی (Kany)

$$\overset{\theta}{M}_{ij} = r_{ij}^{K}\left[\mathcal{M}_i + \Sigma M_{ji}^{\theta}\right]$$

$$r_{ij}^{K} = \frac{1}{2}\frac{K_{ij}}{\underset{گره}{\Sigma K_{ij}}} \quad , \quad \mathcal{M}_i = \Sigma M_{ij}$$

* در روش کانی حتماً به جواب واقعی خواهیم رسید. این روش، خودش را اصلاح می‌کند و تقریب روش کانی یک درصد بیشتر از روش کراس است.

مثال: تیر زیر را با روش کانی تحلیل کنید.



۱) لنگرهای گیرداری

$$\begin{cases} \mathcal{M}'_{ba} = +ql^2/8 = 30\ t.m \\ \mathcal{M}'_{bc} = -pl/8 = -18\ t.m \end{cases}$$

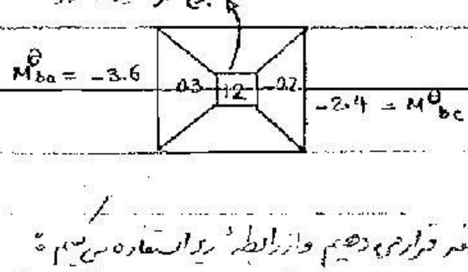
۲) بدست آوردن ضرایب توزیع

B) : ba , bc $\quad K_{ba} = \frac{3}{4}\frac{5}{10} \quad , \quad K_{bc} = \frac{3}{4}\frac{4}{12}$

$$r_{ba} = \frac{-1}{2}\frac{K_{ba}}{K_{ba}+K_{bc}} = -0.3 \quad , \quad r_{bc} = -0.2$$

* جمع ضرایب توزیع در هر گره برابر $\frac{1}{2}$ است.

۳) محاسبه دوران چرخش‌ها



* ابتدا دوران در انتهای دور را صفر قرار می‌دهیم و از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\overset{\theta}{M}_{ij} = r_{ij}^{K}\left[\mathcal{M}_i + \Sigma M_{ji}^{\theta}\right]$$

$$M^{\theta}_{ba} = -0.3\ [12 + 0] = -3.6\ t.m$$

$$M^{\theta}_{bc} = -0.2\ [12 + 0] = -2.4\ t.m$$

$M_{ba} = 2M_{ba}^{\theta} + M_{ab}^{\theta} + \mathcal{M}'_{ba}$

$= 2(-3.6) + (0) + (30) = 22.8\ t.m$

$M_{ab} = 2M_{ab}^{\theta} + M_{ba}^{\theta} + \mathcal{M}_{ab} = 0$

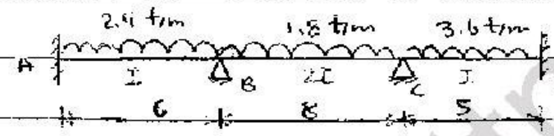
$M_{bc} = 2M_{bc}^{\theta} + M_{cb}^{\theta} + \mathcal{M}'_{bc}$

$= 2(-2.4) + (0) + (18) = 22.8\ t.m$

$M_{cb} = 0$

مثال 12 - تیر را به روش کانی تحلیل کنید

با استفاده از روش کراس تحلیل نمایید



۱) لنگرهای گیرداری

$\mathcal{M}_{ab} = -\mathcal{M}_{ba} = 7.2\ t.m$

$\mathcal{M}_{bc} = \mathcal{M}_{cb} = 9.6\ t.m \quad , \quad \mathcal{M}_{cd} = \mathcal{M}_{dc} = 7.5\ t.m$

۲) محاسبه ضرایب توزیع

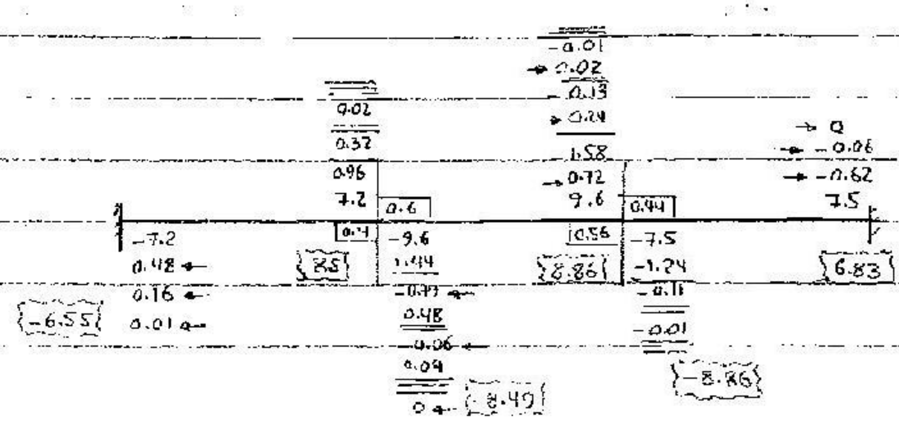
B) : ba , bc

$K_{ba} = \frac{1}{6} \quad , \quad K_{bc} = \frac{2}{8}$

$\Sigma K = 5/12 \Rightarrow r_{ba} = 0.4 \quad , \quad r_{bc} = 0.6$

C) : cb , cd $\quad K_{cb} = 1/4 \quad , \quad K_{cd} = 1/5 \quad , \quad \Sigma K = 9/20$

$\Rightarrow r_{cb} = 0.56 \quad , \quad r_{cd} = 0.44$



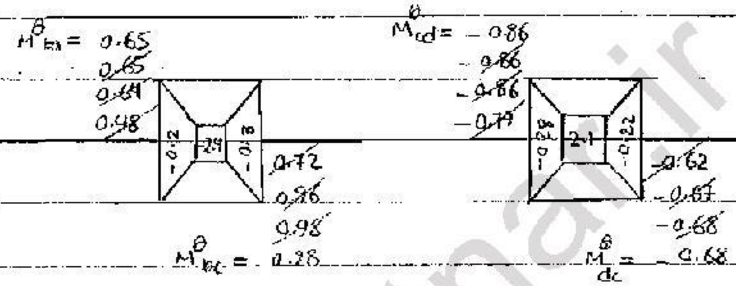
مسئله به روش کانی حل می‌کنیم :

۱) گره‌گذاری مانند روش کراس است

۲) ضرایب توزیع

$r_{ba} = -0.2 \ , \ r_{bc} = -0.3$

$r_{cb} = -0.28 \ , \ r_{cd} = -0.22$



چرخش انتهای دور را صفر در نظر می‌گیریم. (چرخش گره A)

در هر مرحله که چرخش دو انتهای که در هر یک گره B صفر و 0.79- است

وقتی جوابها مشابه تکرار شوند یعنی به مقادیر نهایی رسیده‌ایم

$M_{ab} = 2M^{\theta}_{ab} + M^{\theta}_{ba} + \mathcal{M}_{ab}$

$= 2(0) + 0.65 + (-7.2) = -6.55$

$M_{ba} = 2M^{\theta}_{ba} + M^{\theta}_{ab} + \mathcal{M}_{ba}$

$= 2(0.65) + (0) + (7.2) = 8.5$

$M_{dc} = 2M^{\theta}_{dc} + M^{\theta}_{cd} + \mathcal{M}_{dc}$

$= 2(0) + (-0.68) + 7.5 = 5.82$

$M_{cd} = 2M^{\theta}_{cd} + M^{\theta}_{dc} + \mathcal{M}_{cd}$

$= 2(-0.68) + (0) + (-7.5) = -8.86$

تفاوت روش کراس و کانی :

در کانی نصف ضرایب توزیع

در روش کراس هم لنگرهای گیرداری را روی اتصالات مسئله می‌نویسیم

انتقال لنگرها در روش کراس انجام می‌شود

که جواب در کراس باید به صفر برسد

جمع لنگرها در ستون‌ها ، لنگرهای نهایی را می‌دهد

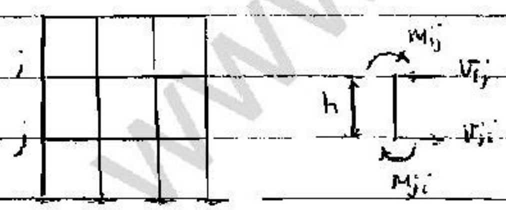
روش کانی برای حرکت جانبی :

الف) حرکت جانبی بدون بارگذاری جانبی

ب) حرکت جانبی ناشی از بارگذاری افقی

$$M_{ij} = 2M_{ij}^{\theta} + M_{ji}^{\theta} + 3M_{ij}^{\Delta} + \bar{M}_{ij}$$

الف) حرکت جانبی بدون بارگذاری جانبی



$$V_{ij} = \frac{M_{ij} + M_{ji}}{h}$$

چون بارگذاری جانبی نداریم : $\Sigma V_{ij} = \dfrac{\Sigma(M_{ij} + M_{ji})}{h_{ij}} = 0$

$$\Rightarrow \Sigma\left(2M_{ij}^{\theta} + M_{ji}^{\theta} + 3M_{ij}^{\Delta} + 2M_{ji}^{\theta} + M_{ij}^{\theta} + 3\underbrace{M_{ij}^{\Delta}}_{M_{ij}^{\Delta} = M_{ji}^{\Delta}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \Sigma\left(3M_{ij}^{\theta} + 3M_{ji}^{\theta} + 6M_{ij}^{\Delta}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 6\Sigma M_{ij}^{\Delta} = -3\Sigma\left(M_{ij}^{\theta} + M_{ji}^{\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \Sigma M_{ij}^{\Delta} = -\frac{1}{2}\left[\Sigma\underbrace{\left(M_{ij}^{\theta} + M_{ji}^{\theta}\right)}\right]$$

جمع لنگرهای بالا و پایین ستون

گیرداری از گره‌ها به نسبت سختی تقسیم می‌شود.

$EI\,\delta/\ell^2 \rightarrow EI/\ell\,(\delta/\ell)$

هدف: پیدا کردن M_{ij}^{θ}

$$\Rightarrow M_{ij}^{\Delta} = r_{ij}\left[\Sigma(M_{ij}^{\theta} + M_{ji}^{\theta})\right]$$

$$M_{ij} = 2M_{ij}^{\theta} + M_{ji}^{\theta} + 3M_{ij}^{\Delta} + \mathcal{M}_{i}$$

$$\Sigma \cancel{M_{ij}} = 2\Sigma M_{ij}^{\theta} + \Sigma M_{ji}^{\theta} + 3\Sigma M_{ij}^{\Delta} + \Sigma \mathcal{M}$$

0

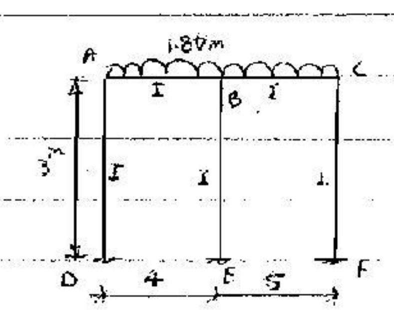
$$\Rightarrow \Sigma M_{ij}^{\theta} = \frac{1}{2}(\Sigma M_{ij}^{\theta} + 3\Sigma M_{i}^{\Delta} \ldots)$$

$$\boxed{M_{ij}^{\theta} = r_{ij}^{K}\left[\mathcal{M}_i + \Sigma M_{ji} \ldots \hat{M}_{ij}\right]}$$

$$M_{ij}^{\Delta} = \gamma_{ij}\left[\ldots M_{ji}^{\theta})\right]$$

$$r_{ij}^{K} = \frac{1}{2} \ldots \quad , \quad \gamma_{ij} = \frac{3}{2}\,\frac{K_{ij}}{\Sigma K_{ij}}$$ سختی / مجموع سختی‌ها

مثال: قاب زیر را به روش‌های تکراری تحلیل کنید.



۱) لنگرهای گیرداری:

$\mathcal{M}_{ab} = \mathcal{M}_{ba} = 2.4\ t.m$

$\mathcal{M}_{bc} = -\mathcal{M}_{cb} = 3.75\ t.m$

۲) ضرایب توزیع:

A) ab , ad , $K_{ab} = 1/4$, $K_{ad} = 1/3$

$\Sigma K = 7/12 \Rightarrow r_{ab} = 0.43$, $r_{ad} = 0.57$

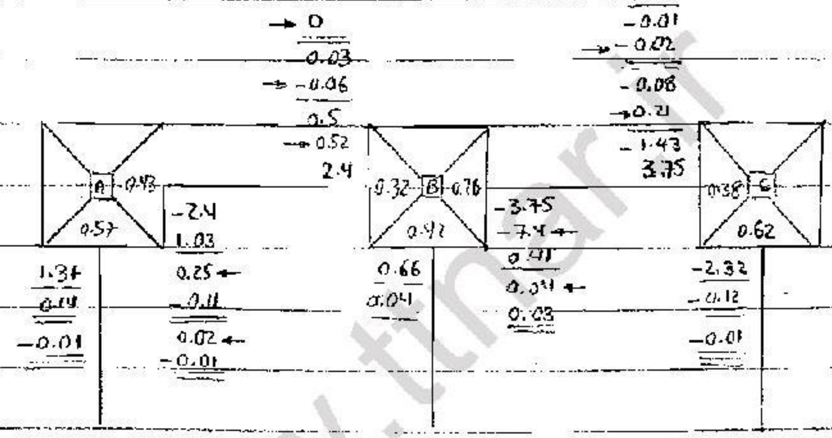
B) : ba, bc, be → $K_{ba} = 1/4$, $K_{bc} = 1/5$, $K_{be} = 1/3$

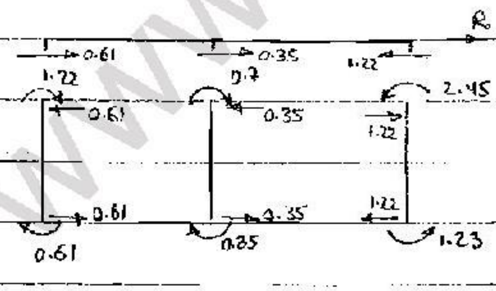
$\Sigma K = 47/60 \Rightarrow r_{ba} = 0.32$, $r_{bc} = 0.26$, $r_{be} = 0.42$

C) : cb, cf → $K_{cb} = 1/5$, $K_{cf} = 1/3$

→ $r_{cb} = 0.38$, $r_{cf} = 0.62$

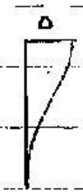
◁ حل قسمت اول به روش کراس





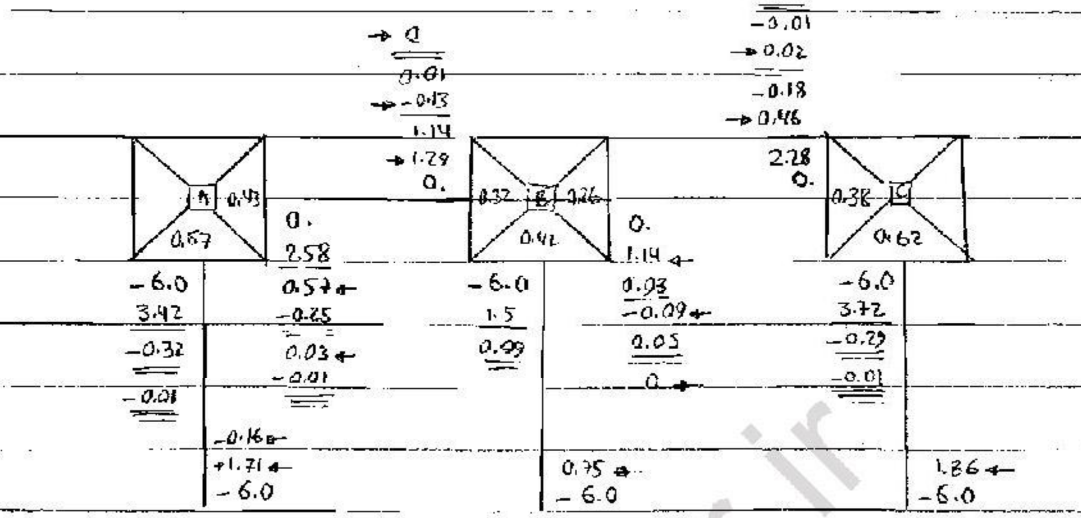
$R_a = 0.26$ ton

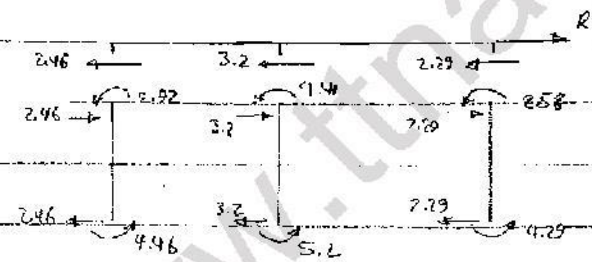
◁ حل قسمت دوم با فرض وجود Δ



$\bar{M} = -\dfrac{6EI\Delta}{l^2}$

$\Delta = \dfrac{9}{EI} \rightarrow \bar{M}_{ij} = 6$ ton





$R^I = 6.75$ ton

$xR^I + R^0 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -0.0327}$

$\Delta_{\text{جانبی}} = \Delta^0 + \Delta^I x = 0 + \frac{9}{EI}(-0.327) = \frac{-0.29}{EI}$

$M_{da} = 0.61 - .0322(-4.46) = 0.76$ t.m

$M_{eb} = 2.45 - .0327(2.58) = 2.37$ ton

- مراحل حل به روش کراس :

الف) فرض عدم وجود حرکت جانبی و حل مسئله (حل صفر)

ب) تغییر مکان دلخواه در محل تکیه‌گاه‌های کاذب و حل مسئله به تعداد تکیه‌گاه‌ها

ج) برقراری تعادل و به‌دست آوردن ضریب واقعی

د) ترکیب کردن جواب‌ها با ضرایب مربوطه و به‌دست آوردن جواب‌های نهایی

روش کانی

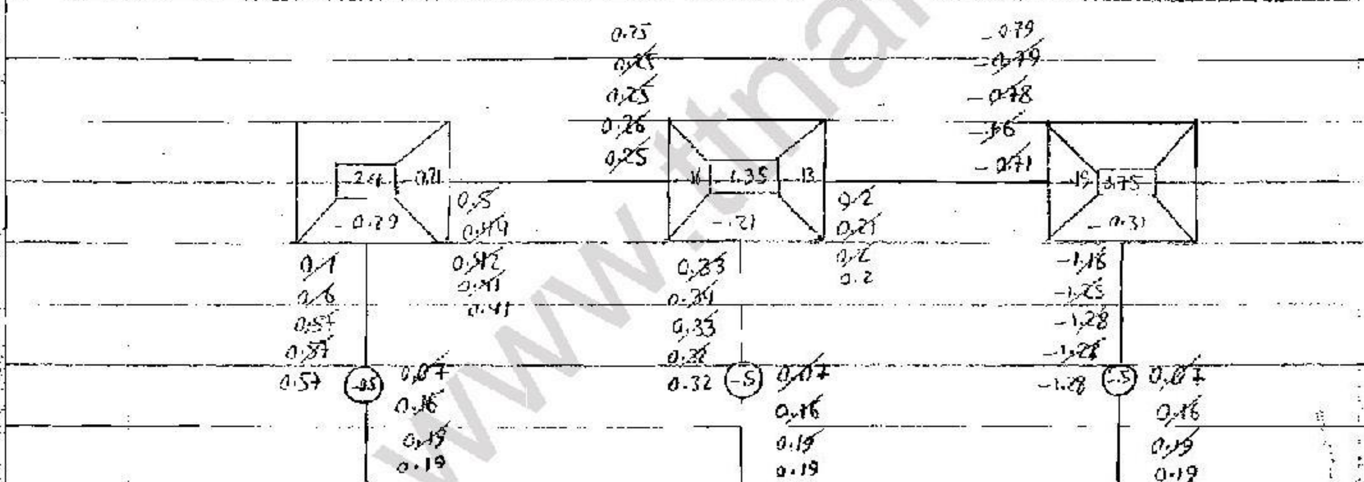
A) $r_{ab} = -0.21$, $r_{ad} = -0.29$

B) $r_{ba} = -0.16$, $r_{bc} = -0.13$, $r_{be} = -0.21$

C) $r_{cb} = -0.19$, $r_{cf} = -0.31$

$$\gamma_{ij} = -\frac{3}{2} \frac{K_{ij}\ \text{ستون}}{\sum K_{ij}\ \text{ستون‌های طبقه}}$$ ضرایب توزیع ستون ها

$K_{ad} = 1/3$, $K_{be} = 1/3$, $K_{cf} = 1/3 \Rightarrow \gamma_{ad} = \gamma_{be} = \gamma_{cf} = -0.5$



① $\overset{\theta}{M}_{ij} = r_{ij} \left[M_i + \sum \overset{\theta}{M}_{ji} + \sum \overset{\Delta}{M}_{ij} \right]$

② $\overset{\Delta}{M}_{ij} = \gamma_{ij} \left[\sum \underbrace{(\overset{\theta}{M}_{ij} + \overset{\theta}{M}_{ji})}_{\text{ستون‌ها}} \right]$

در دور اول $\overset{\theta}{M}_{ij}$ و $\overset{\Delta}{M}_{ij}$ را صفر فرض می‌کنیم بنابراین فقط M_i در روابط وارد می‌شود

* در مرحله بعد برای فرمول ② هر دو مقدار $\overset{\Delta}{M}_{ij}$ را به دست آورده و در فرمول ① قرار می‌دهیم

$\overset{\Delta}{M}_{ij} = -0.5 \left[0.7 + 0.33 - 1.16 + 0 \right] = -0.07$

$M_{ij} = 2\overset{\theta}{M}_{ij} + \overset{\theta}{M}_{ji} + \overset{\Delta}{M}_{ij} + M_i$

$M_{da} = 2(0) + (0.57) + (0.19) + (0) =$