تئوری سازه‌ها (۱) «علی اکبر گل‌افشانی»

سازه از مجموعه‌ای از اعضا (elements) تشکیل می‌شود.
(members)

وقتی که سرهم می‌شوند برای یک function خاصی مورد استفاده قرار می‌گیرند و خاصیت باربری Loading دارند.

درس ما تحلیل یا تئوری سازه است. در واقع می‌خواهیم ببینیم نیروها و تغییر مکان‌های کل سازه و اعضای سازه چی هستند؟ Analysis

هدفمان طراحی این اعضا است به گونه‌ای که مقاوم باشند پس اول باید بدانیم چه نیروهایی در وجودشان می‌افتد!

Loading دو بخش داره ۱ سازه‌ها بارگذاری بهشان داده می‌شود

Live Load & Dead Load ۱ { Static Loading وزنش ثابت خاصی عمل می‌کند
Dynamic Loading

Static Loading مثل وزن سازه، وزن ساکنان ساختمان

Dynamic Loading بار موج، بار باد، بار موج انفجار: اثر دینامیکی دارند و تغییراتشان نسبت به زمان خیلی زیاده ← انرژی ساختمان به طور مجازی (نیروی) وارد کار محاسبات ما می‌شود.

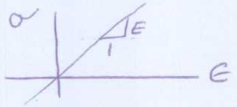
ما فقط Static Loading را بررسی می‌کنیم (درس ما در این مورده تا اینجاش)

ما چه سازه‌هایی را در تئوری می‌بینیم؟ تیر ۱ بعدی (تیر، خرپا و ...) سازه دوبعدی قاب‌ها...

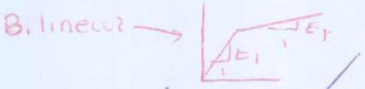
Dimension Structure — با در بنا هم نداشتن اعضای 1D.
1-D , $\boxed{2\text{-}D}$ ✓ , 3-D — اعضای 2D به دست می‌آوریم
و یا 3D که با دست سخته (با کامپیوتر انجام می‌دهیم)
دقت آنالیز سه بعدی خیلی بیشتره مثلاً: سقف بتنی « plate » است و 2-D

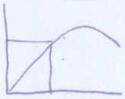
✓Linear Vs. Nonlinear Analysis

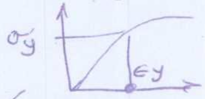
توی لیسانس Linear است ۱ کل سازه ۲ اجزا رفتار خطی داشته باشند
وقتی بار را ۲ برابر کردیم ε و σ ها دو برابر شوند.



رفتار مواد ما اگر خطی باشد Linear 1-1



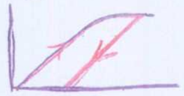


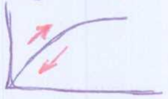


رفتار مواد تا الی الابد که دیگر خطی نیست طبعی غیرخطی رفتار می‌کند. در لیسانس رفتار مواد خطی است ولی ما بارگذاری را تا حدی انجام می‌دهیم که خطی بماند پس قانون هوک برقرار است. $\underline{\sigma}=\underline{E}\,\underline{\epsilon}$ (ماتریسی)

✓Elastic - Nonelastic

امکان داره مواد ما غیرخطی باشد ولی رفتار Elastic یا Nonelastic نشان بدهد





ماده ما می‌تواند Linear یا Nonlinear باشد یا هر کدام می‌تواند رفتار Elastic شد یا Nonelastic.

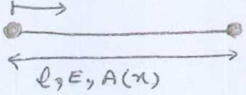
غیرخطی بودن ما: ۱ مواد ۲ هندسه‌ی سازه (Geometry)
و ما هر دو را در مسائل‌مان خطی در نظر می‌گیریم.

آن کس که نداند و نداند که نداند
در جهل مرکب ابدالدهر بماند

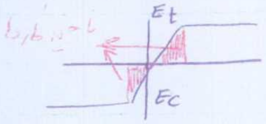
۱) هوک X. ۲) رفتار Enelastic ۳) هندسه‌ی سازه مورد دارد
باید دامنه‌ی کاری در هر فصول ابتدایی اما دانستن غیرخطی نباید باعث زحمت آوردن باشد
تمام مسائل ما خطی هستند پس نگران هیچ چیز نباشید.
اولین قدم طراحی آنالیز کردن است. سری تمرین‌ها را داده تکثیر
مکانیک جامدات + استاتیک (خصوصاً کارهای مجازی و خرپا) را مرور کنید.

خرپاها   Truss Structure

ساده ترین عضو شکل truss element : ۱) ۱ بعدی است ۲) طولش را با x نشان می دهیم ۳) دارای سطح مقطع ثابت یا متغیر است ۴) دارای E است

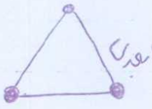


۵) فقط نیروی محوری تحمل می کند ← چون گره ها دو سر مفصل اند
خمش تحمل نمی کند   نیروی جانبی ندارد (مثل نوار است)
فقط نیروی محوری دارد



۱) فقط axial force توش ایجاد می شود.
۲) E فشار = E کشش   هم فشار و هم کشش
(اگر Ec ≠ Et ← (Non Linear))

از عضو خرپایی می خواهیم سازه (دو بعدی) درست کنیم. کمترین تعداد: ۳ عضو



خرپای ساده (خرپای مادر، خرپای پایه) کوچکترین سازه ۲ بعدی
Member ، Node (اتصال joint)
نباید سه گره روی یک راستا باشند
خرپای پایه: M = ۳   N = ۳

خرپای ساده:

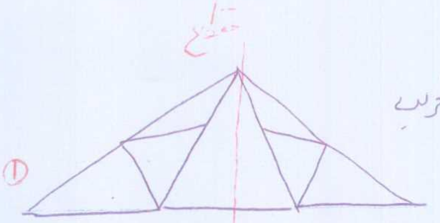
خرپای ساده یا simple truss . بر مبنای خرپای پایه تشکیل می شود و با اضافه کردن یک گره به وسیله ی افزودن دو عضو با اتصال به گره های قبلی متصل شود تشکیل می شود. مهم نیست که خرپا چی باشد مهم راهی برای تحلیل خرپاهاست.

(*) این دو عضو نباید در یک راستا قرار داشته باشند. در خرپای ساده «M = ۲N - ۳»

ما باید بدانیم کجا چه راه حلی استفاده کنیم. در خرپای ساده از آخرین گره روش گره را به کار می بریم و تا اولین گره می آییم پس راه حل ساده ای است.
همواره می توان روش گره را توی این خرپا استفاده کرد.

خرپای مرکب:

از اتصال چند خرپای ساده به هم به روش خاصی تشکیل می شود.
مثلاً دو خرپای ساده را در یک گره بهم متصل می کنیم به علاوه ی یک عضو است دیگر که از گره عبور نکند و حول آن می تواند نیرو (← ممان) ایجاد کند.



خرپای مرکب $M_1 = 2N_1 - 3$

$M_2 = 2N_2 - 3$

ترکیب آن:

$N = N_1 + N_2 - 1$ $M = M_1 + M_2 + 1$

$M = 2(N_1 + N_2 - 1) - 4 + 1 \longrightarrow M = 2N - 3$

پس خرپای مرکبی که از ادغام دو خرپای ساده در یک گره + یک عضو که حول آن نقطه دوران ایجاد می‌کند از این رابطه پیروی می‌کند. $\boxed{M = 2N - 3}$ ✓

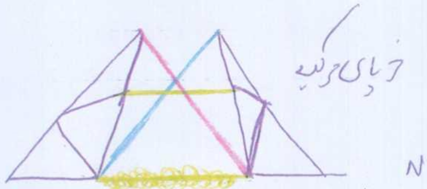
دیگه نمی‌توانم از روش گره برای حلش استفاده کنم

TA: رضا عندلیب   اول تمرین‌های خودمان را حل می‌کنیم و یاد می‌گیریم

← یکشنبه ۷٫۵ تا ۹

برای اتصال صلب دو سازه به هم باید حداقل سه نیرو بینشان رد و بدل شود که

۱) متقارب نباشند   ۲) موازی نباشند   ۳) هم متصل شوند)

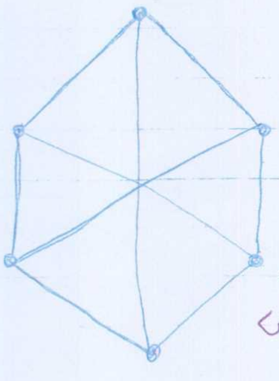


خرپای مرکب $M = M_1 + M_2 + 3 = 2(N_1 + N_2) - 6 + 3$

$\rightarrow \boxed{M = 2N - 3}$

$N = N_1 + N_2$

خرپاهای دیگری هم هست که $M = 2N - 3$ در آن‌ها برقرار باشد.

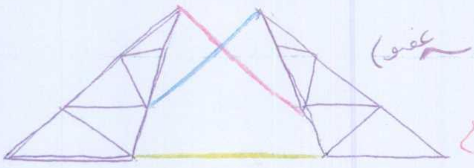


$N = 6$ $M = 9$

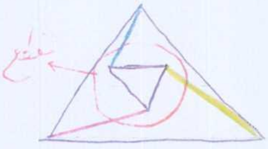
Complex truss

$M = 2N - 3$ ✓ امّا این خرپای ساده یا خرپای مرکب نیست پس به خرپایی که نه ساده باشد و نه مرکب و $M = 2N - 3$ توش صادق باشد می‌گوییم خرپای بغرنج (معمولاً خرپای پایه ندارد ولی می‌تواند هم داشته باشد!)

۱) حل   ۲) پایداری   خیلی دقّت می‌خواهد

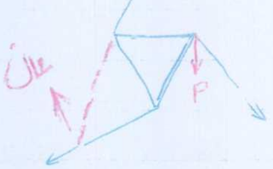


خرپای مرکب (با اتصال سه عضو)



روش مقطع: از محل اتصال دو خرپای ساده بهم، مقطع می زنیم

هر مقطعی که می زنیم باید یک جوری بزنیم که [illegible] ۳ [illegible] + [illegible]
① ← ۳ تا مجهول بدست می آوریم



حل معادلات تعادل: ۲ برابر تعداد گره ها

$R=3$ عکس العمل تکیه گاه

مجهول $= M+R$ معادلات $= 2N$

روش گره و مقطع $\underline{M=2N-3}$ ⇐ (اینجا) تا بتوانیم خرپا را حل کنیم ⟵ $M+R=2N$

statically determinate Structure

☑ تمرین زیاد حل کنید تا سر امتحان مثل بعضی از بنده های در گل گیر نکنید!
به خاطر همین است که می گویم غلط زیادی خوانیم که بالاخره یه دور کتبی اش درست در بیاید!

پایدار است

1) $M+R=2N$ → staticly determinate structure
سازه معین استاتیکی

مجهول ها   معادلات
۲) $M+R>2N$ → سازه ی نامعین استاتیکی
n معادله ی غیر تعادلی ← تعداد مجهول ها - تعداد معادلات = درجه نامعینی = n
استاتیکی نیاز داریم   (استاتیکی)

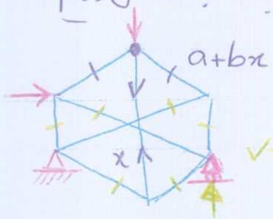
پس به تعداد n معادله ی الاستیک (تغییر شکل) بدست می آوریم.

۳) $M+R<2N$ → سازه ناپایدار است

حل خرپاهایی که نه ساده اند و نه مرکب اند ← بغرنج اند.

روش مقطع هم کارآمد نیست. پس چیکار می کنیم. نیرو در یک عضو را می گیریم

x و بعد از روش گره نیروی دو عضو کناری را برحسب x بدست می آوریم.



به جای V مجهولمان به دست می آید.

V → بدست می آید : x

پایداری سازه ها

همه ی خرپاهای ساده و مرکب پایدار اند اما پایداری خرپاهای بغرنج سخت

است. (علم و صنعت!)

تئوری سازه ها (۱)

« گل انسانی »

پریسا شاهسوند : عمران ۸۷

TA: عندلیبی یا عندلیب (!)

کلاس حل تمرین : یکشنبه ها ساعت ۷/۱۵ الی ۹

☑ ← تمرین های خودمان که همترازند سپس اول (در کلاس حل تمرین) تمرین های خودمان را حل می کنیم بعد می رویم سراغ تمرین های متفرقه

تحلیل سازه بین بسیاری از درس هایمان است (!)

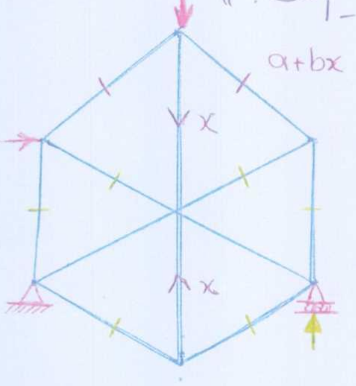
« بیا تا گل برافشانیم و می در ساغر اندازیم
فلک را سقف بشکافیم و طرحی نو دراندازیم »

Don't be afraid we'll make it out of this mess!

It's a love story baby just say "yes".

پایداری سازه ها

همه ی خرپاهای ساده و مرکب پایدارند اما پایداری خرپاهای بغرنج سخت است. (علم و صنعت!) «روش هنبرگ را جلوتر خواهیم گفت!»

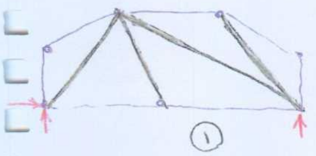


در این جا روش مقطع هم کارآمد نیست!

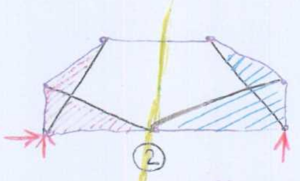
✓ → x بدست می آید

☑ به جای ✓ مجهول ما را (= x) بدست می آید.

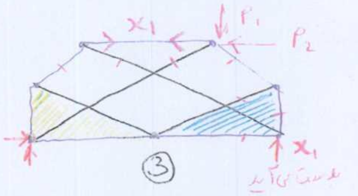
برای حل خرپاهایی که بغرنج اند!



①



②



③

N = 7   2(7) − 3 = 11   11 − ⑦عضو = ④عضو نیاز داریم

① : خرپای ساده است (گره دو عضو جدید!) برای حل از یک گره ی دوتایی شروع می کنیم.

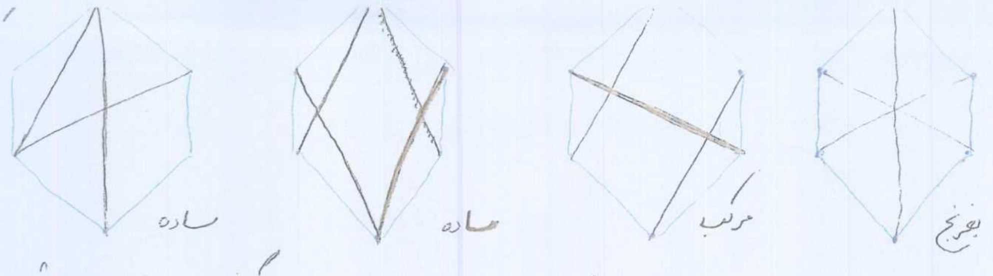
✓ روش گره حتما قطعا برای خرپای ساده جواب می دهد

پروژه: برنامه بنویسید که (برای 2N = M+R) اعضا و گره ها و تکیه گاه ها را بگیرد و برای هر گره ۲ معادله بنویسد ← 2N معادله 2N مجهول را حل کند! با جابجایی ها!

پروژه: نشست تکیه گاهی داشته باشیم! تکیه گاه مورب CoredProject

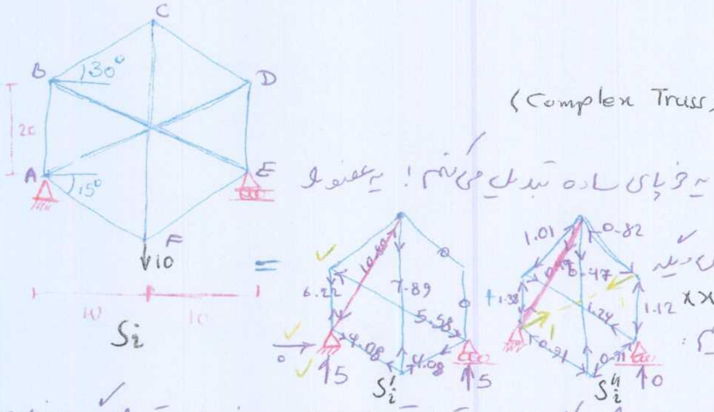
② خرپای مرکب است. روش گره جواب نمی دهد ← روش مقاطع ابداع شد. عضو و گره را قطع می زنیم تا مجهول گره کمتر از دو شود؛ عضو بدست می آید. بعد از روش گره استفاده می کنیم و به دست می آوریم!

③ خرپای بغرنج: ابتدا نیروهای تکیه گاه ها را بدست می آوریم سپس با هر گره ۲ مجهول داریم سیکل را طی می کنیم


1
ساده
ساده
مرکب
بغرنج

ما هم می‌توانیم بر اساس نوع مسئله روش حل را بدست بیاوریم. خرپای زیر را می‌خواهیم با روش هنبرگ حل کنیم.

روش هنبرگ (Complex Truss)


C
B
130°
D
20
A
15°
E
F
10
10
10
S_i
=
10.89
7.89
6.22
0
0
5.58
4.08
4.08
0
15
5
S'_i
1.01
0.82
0.47
1.38
1.24
1.12
0.91
0.91
0
S''_i
xx

خرپای رو به رو را به یک خرپای ساده تبدیل می‌کنیم! یک عضو را برمی‌داریم و می‌ذاریم یه جای دیگه و جمع رو با تشکیل می‌دهیم:

اگر نیرو در عضو صورتی = 0 باشد کار بالا درست است (جمع) چون معادلات را در گره‌ها می‌نویسیم

تلاش‌های عضو (نیروهای عضو) را در گره‌ها می‌کشیم. به نکته نوشتن روابط تعادلی!

خرپای بغرنج را کردیم دو خرپای ساده و هر کدام را حل کردیم. حالا چون می‌خواهیم در صورتی نیرو صفر شده یه معادله بنویسیم (S_i نیرو در هر عضو در خرپای اصلی با S'_i نیرو در هر عضو در اولی و...:

$$S_{AC} = S'_{AC} + S''_{AC}(x) = 0 \rightarrow x \checkmark \quad \text{این جا} \quad x = \frac{10.89}{0.47} = 23.42$$

یعنی «حل دومی × 23.42 + حل اولی = حل کل خرپای بغرنج اصلی مسئله‌ی ما»!

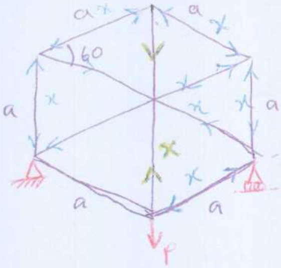
« $S_i = S'_i + x S''_i$ » حسن این روش نسبت به روش همزمان در این است

که حل این است که فقط یه معادله! یعنی اگر سر تال x را پیدا کنیم همه را داریم

(شما هم شانس) البته تفاوت این روش که در واردی خودمان عضوه چون اعتقره!

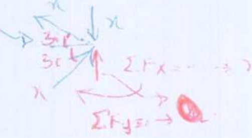
اگر عضو سوم هم در عضوها داشتیم دو تا x_1 و x_2 داریم ← سه تا حل داریم!

پایداری خرپاهای بغرنج



- خرپای بغرنج خیلی جالب : خرپای شش ضلعی منتظم

این خرپای جالب را می‌خواهیم حل کنیم.



خرپای کل ← X · P/2

پس این خرپا ناپایدار است. یعنی این خرپا خاصیت باربری ندارد یعنی P=0 باید باشد ← تغییر مکانی می‌دهد که زوایایش از 60 و 30 خارج شوند! به روش بار صفر هم داریم برای چک کردن پایداری خرپا که البته این جا همین کافی است که به این تناقض رسیدیم. همین که زوایا از 60 خارج می‌شوند ← خرپای ما ناپایدار می‌شود. اگر نزدیک 60 باشد اگر P خیلی کوچک داشته باشیم نیروها در عضوها 100P یا 200P اند! یا شاید 1000P و ...! خرپای بغرنج پایداری اش از چیز دیگری به دست می‌آید!

. ناپایداری خرپاهای بغرنج به روش بار صفر

Zero load test

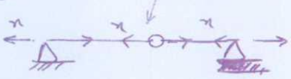
برای همه‌ی خرپاهای M = 2N-3 هست اما ما بیشتر در مورد خرپای بغرنج استفاده اش می‌کنیم

چک : عملاً برای همه‌ی خرپاها(ی بحرانی) استفاده می‌شود و جوابگو است.

یکی از اعضا را زوری بار الکی x ← بقیه‌ی نیروها را بدست بیاور و به ترتیب ← عکس العمل ها = 0

(یعنی جابجا نه!)

پس به خاطر بارگذاری صفر بار x انتخابی خودم است و جالب اینجاست که x می‌تواند هر مقداری باشد در حالیکه هیچ باری رویش نگذاشته‌ام ← سازه حتماً ناپایدار است.



دلیل : استدلال تکنیکی : چون x می‌تواند هر چیزی باشد ← می‌تواند ∞ باشد ← ناپایدار

مثال)

$Ax + 0.6\,Sa = 0$

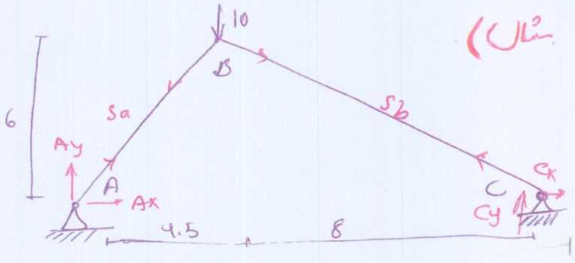
$Ay + 0.8\,Sb = 0$

$-0.6\,Sa + 0.8\,Sb = 0$

$\xrightarrow{} \boxed{10} + 0.8\,Sa + 0.6\,Sb = 0 \rightarrow \boxed{-10}$

$0.8\,Sb + Cx = 0$

$0.6\,Sb + Cy = 0$



بعد ماتریس کلی بدست آمده را حل می‌کنیم. ماتریس 2N×2N و 2N مجهول داریم.

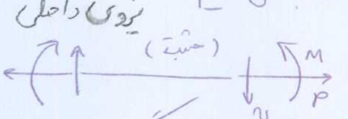
چه موقع ماتریس A دترمینانش صفر است!

اگر دترمینان A نزدیک به صفر باشد سازه‌ی ما از نظر هندسی ناپایدار است.

Substrcturing یا Superposition

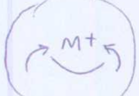
تیرها

در خرپا فقط نیروها را گفتیم، اما تغییر مکان‌ها را دیگر حساب نمی‌کردیم.



چون در مورد خرپا آن روش قدیمی بود. در تیر سه مجهول داریم

این نیروها مثبت اند (نیروهای داخلی اند و همه عمل و عکس العمل اند) کشش را مثبت بگیرید.

اگر تیری خم شود این جوری می‌خندد


غشای پایینی تحت کشش: ممان مثبت

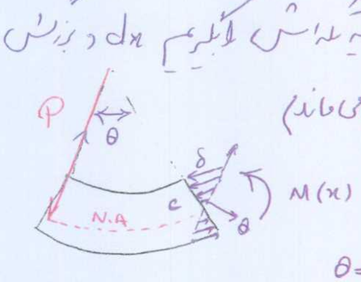
M مثبت ← در بتن آرماتورها را پایین می‌گذاریم (اگر +M باشد).

نیروهای خارجی (تغییر علامت‌ها نه داخلی ـ خارجی)

این‌ها مثبت اند (خارجی)

خلاصه‌ای از مکانیک جامدات

اگر یه تیری داشته باشیم تحت اثر بارگذاری، این تیر را به تکه‌ای به اندازه dx را بررسی کنیم. غشای بالا فشار، پایینی کشش (این محور صفر باقی می‌ماند)



برآیند این نیروها = M(x) ممان ماست.

مسئله خطی ماند؟ وقتی تغییر مکان‌ها کوچک باشند $\theta = \frac{\delta}{c}$

3- قانون هوک صادق است.

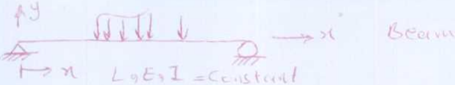
$$\theta = \frac{\delta}{c} = \frac{dx}{\rho} \qquad \epsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{Mc}{EI} \qquad \frac{\delta}{dx} = \epsilon = \frac{c}{\rho} = \frac{Mc}{EI}$$

$$K_v = \frac{1}{\rho} = \frac{d^2y/dx^2}{[1+(dy/dx)^2]^{3/2}} \doteq \frac{d^2y}{dx^2} \text{ (Carvature)}$$

$\frac{dy}{dx} = \theta \le 10^\circ$

$$c\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Mc}{EI} \longrightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}}$$

جلسه 10، 12، 88 (تیرها)



می‌خواهیم این تیر را تحلیل کنیم نیروهای داخلی

نیروهای خارجی

رسیدیم به این معادله :

$$\text{Curvature} = \frac{d^2y}{dx^2} \qquad \frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \theta_{(x)} = \int_0^x \frac{M_{(x)}}{EI_{(x)}}dx + \theta_0$$ (یه عدد ثابت) (الان اگر ندارد EI ثابت باشد اما این جا ثابته!)

θ = ضریب زاویه ضریب زاویه مثبت

$$y = \int \boxed{\frac{dy}{dx}dx} + y_0 = \iint \frac{M}{EI}\,dx\,dx + \int \theta_0\,dx + y_0 \longrightarrow y_{(x)} = \iint \frac{M}{EI}\,dx\,dx + \int \theta_0\,dx + y_0$$

پس باید معادله من پیوسته باشد ↔ (مفصل نداشته باشم) روش انتگرال مضاعف

[illegible]

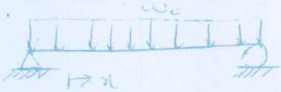
Deflection of Beam - Double Integration Method (روش انتگرال مضاعف)

بدست آوردن معادله‌ی ممان تیر

Equation of Moment

۱) ریاضی ۲) مهندسی دو دسته روش داریم برای معادله‌ی ممان بدست آوردن

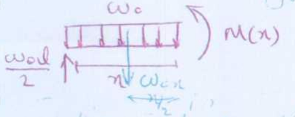
انتگرال بگیری



$\omega(x) = -\omega_0$ ↓⊖ خارجی

مهندسی (مقطع می‌زنیم و انتگرال نمی‌گیریم) از جمله‌ی مهندس‌ها

(مهندسی)



$$M(x) = \frac{\omega_0 l}{2}(x) - \frac{\omega_0 x^2}{2}$$ بی سوادترند (مهندس‌های عمران)

[illegible]

rad [illegible]

ریاضی: اگر بارگذاری را داریم ω معادله برشی (انتگرال بار)

$$V = \int \omega\,dx + V_0$$

هر چیز رو ⊕ می‌گیریم

برشی (V) = (ω) انتگرال بار تیر

$$\frac{dM}{dx} = V(x) \qquad \frac{dV}{dx} = \omega(x)$$

$$M = \int V\,dx + M_0 = \iint \omega(x)\,dx + \int V_0\,dx + M_0$$ ممان = انتگرال برشی = انتگرال مضاعف ω

1

$\frac{M}{EI} = \omega$ ← معادله ممان = معادله جابجایی ↔ متناظر می‌شوند

یعنی ممان بارالاستیک همان تغییر مکان است. (y) = y تغییر مکان

elastic loading

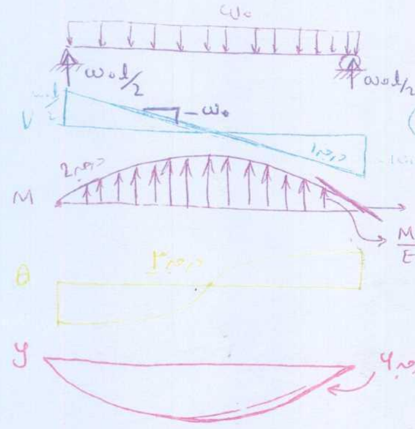
روش تیر مزدوج

برش بارالاستیک = θ

θ و y را بدون استفاده از انتگرال گیری با روش هندسی بدست می‌آوریم با به جای بار، بارالاستیک بگذاریم. باید شرایط مرزی اش را هم در نظر بگیریم. ← دوتا Constant ها را بدست می‌آوریم.

* ممان بارالاستیک = تغییر مکان   * برش بارالاستیک = ضریب زاویه

شرایط اولیه (زمان) ← initial Condition   شرایط مرزی (مکان وحد) ← boundary Cond.



$\omega(x) = -w_0$ $y = \iint \frac{1}{EI}\iint w\,dx\,dx\,dx\,dx$

با شیب ثابت منفی می‌رود پایین. (ضریب زاویه خط = $-w_0$)

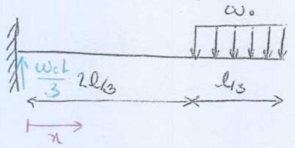
ممان در ابتدا صفر است، در انتها هم صفر است. ضریب زاویه اینجا = $-\frac{w_0 L}{2}$

باید تبدیلش کنیم به بارالاستیک (تقسیم بر EI می‌کنیم)

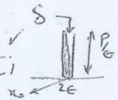
علامتها به خاطر بارالاستیک است. مفهومش متناظر با بار است.

شیب داریم تغییر مکان یک + ◡ − شکل است. θ درجه ۳ و سطح ۰ درجه ۴

اولش ⊖ آخرش ⊕ پس ∫ می‌شود.



مثال) تیر زیر را در نظر بگیرید: (پا ورقی: انتگرال گیری



$\frac{1}{2}\left(\frac{P}{\epsilon}\right)(2\epsilon) = P$ $\delta(x - x_0)$

$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)\,dx = 1\right.$ δ: تابع دیراک.

$\frac{2l}{3} \leq x \leq \frac{3l}{3}$ $\frac{M}{EI} = \frac{w_0 l/3\,(x)}{EI} - \frac{w_0}{2EI}\left(x - \frac{2l}{3}\right)^2$ $0 \leq x \leq \frac{2L}{3}$ $\frac{M}{EI} = \frac{w_0 l}{3EI}x$

$$\theta = \frac{1}{EI}\left(\frac{w_0 l}{3}\,\frac{x^2}{2} + -\frac{w_0}{2}\,\frac{(x - 2l/3)^3}{3}\right) + \theta'$$ $$\theta = \frac{1}{EI}\left(\frac{w_0 l}{3}\,\frac{x^2}{2}\right) + \theta_0$$

این جا فرضش نکنیم $\theta_0 = 0$ است. ایده‌آل‌ترین شرایط مرزی در این جا $\theta_0 = 0$ و $y_0 = 0$

پس برای ما مسائلی را طرح می‌کند که خیلی خیلی مهم "ه" و توی حل کمک کنیم!

«النجاة فی الصدق» یادت باشه که نجات در درستی و درستکاری و راستگویی است. همه‌ی ما ه

۲۰ امیم مسلمه اینکه خلافش ثابت شه. نظرتان را عوض کرده‌اند که به این حرف می‌خندیم.

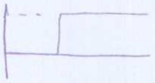
$y = \frac{1}{EI}\left(\frac{w_0 l}{3}\frac{x^3}{6}\right) + \cancel{\theta_0} x + \cancel{y_0}$ برای $x < 2L/3$ حالا بدست آوردن y در مثال قبلی (حالت ۱)

$y = \frac{1}{EI}\left(\frac{w_0 l}{3}\frac{x^3}{6} - \frac{w_0}{2}\left(\frac{(x-2l/3)^4}{12}\right)\right) + \theta_0' x + y_0'$ θ و y باید در نقطه‌ی [illegible] برابر باشند

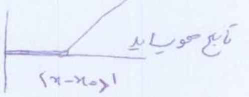
او شرط در نقطه‌ی انتهای بارگذاری ($x = 2L/3$) برابر باشند

در $x=\frac{2L}{3}$ شیب زاویه و تغییر مکان پیوسته است. وقتی حالا پیدا می‌کنیم این‌جا $\theta_0' = 0$ می‌شود. ← $y_0' = 0$

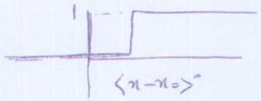
هویساید یه سری توابع singular را تعریف کرده است که جزو unit stepfunct ها هستند.

unit stepfunction ←  دیگه کمک می‌کند به پیدا کردن جواب‌ها برای تیرها.

$$\langle x-x_0\rangle^n = \begin{cases}(x-x_0)^n & n>0 \text{ و } x \geq x_0\\ 0 & n>0 \text{ و } x<x_0\end{cases}$$



$$\langle x-x_0\rangle^0 = \begin{cases}1 & x \geq x_0\\ 0 & x<x_0\end{cases}$$



حسن تابع‌ها:

$$\int \langle x-x_0\rangle^n dx = \frac{\langle x-x_0\rangle^{n+1}}{n+1} \qquad \frac{d}{dx}\langle x-x_0\rangle^n = n\langle x-x_0\rangle^{n-1}$$

جمع‌بندی

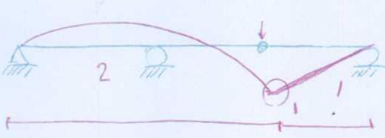
$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{EI}\left(\frac{w_0 l}{3}x - \frac{w_0}{2}\langle x-\frac{2L}{3}\rangle^2\right)$$ پس یه شرط مرزی پیدا می‌کنه

$$\theta = \frac{1}{EI}\left(\frac{w_0 l}{6}x^2 - \frac{w_0}{6}\langle x-\frac{2L}{3}\rangle^3\right) + \cancel{\theta_0}$$ استفاده از توابع هویساید [illegible]

$$y = \frac{1}{EI}\left(\frac{w_0 l}{18}x^3 - \frac{w_0}{24}\langle x-\frac{2L}{3}\rangle^4\right) + \cancel{y_0}$$ دارای [illegible]

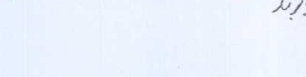
نکته‌ها در مورد انتگرال مضاعف

جلسه چهارشنبه ۸۸/۱۲/۱۲



۴ تا ثابت باید پیدا کنیم. چون نمی‌توانیم در این حالت برای کل تابع و کل تیر یه تابع بنویسیم. (عدم پیوستگی)

۱) عدم پیوستگی در تیر



۲) عدم پیوستگی در I

θ و v چپ و راست نقطه برابرند

۳) برای تابع هویساید باید این شکلی بنویسیم

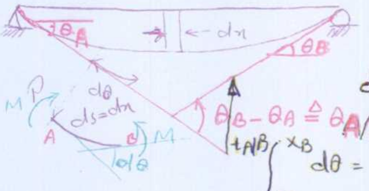
$$\omega(x) = \omega_0 - \langle x - l/2 \rangle \omega_0$$

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} \longrightarrow \text{Elastic load} = \frac{M}{EI}$$

Moment Area Method

روش لنگر سطح

به تیری تحت اثر یه بارگذاری یه تغییر شکلی پیدا می‌کند اگر یه تکه کوچکش را بگیریم dx و اون dx



انحنا رو هم داریم $d\theta = \frac{dx}{\rho}$ $\theta = \frac{dy}{dx}$

$$d\theta = \frac{dx}{\rho} = \frac{M}{EI}\,dx \rightsquigarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\theta_B - \theta_A \triangleq \theta_{A/B}$$

$$\int_{x_A}^{x_B} d\theta = \theta_B - \theta_A = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M}{EI}\,dx$$ لزومی نداره A و B نزدیک هم باشند!

از ضریب زاویه B به A می‌رویم ($\theta_{B/A}$). سطح زیر منحنی بار الاستیک از نقطه A تا B

قانون اول لنگر سطح: اختلاف ضریب زاویه‌ی B نسبت به A برابر است با سطح زیر منحنی بار الاستیک از نقطه A تا B

$$\theta_B - \theta_A = \theta_{A/B} = \int_{x_A}^{x_B} \frac{M}{EI}\,dx$$

$t_{A/B} =$ انحراف عمودی که از A به مماس B

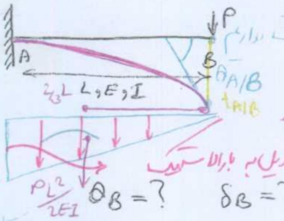
$$dt = (x_B - x)\,d\theta = (x_B - x)\frac{M}{EI}\,dx$$

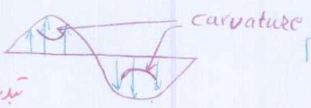
$$t_{A/B} = \int_{x_A}^{x_B} dt = \int_{x_A}^{x_B} (x_B - x)\frac{M}{EI}\,dx$$: گشتاور اول سطح بار الاستیک نسبت به نقطه‌ی B

قانون دوم لنگر سطح: گشتاور اول سطح بار الاستیک نسبت به نقطه‌ی B

$$t_{A/B} = \int_{x_A}^{x_B} (x_B - x)\frac{M}{EI}\,dx$$

مثال) معادلات θ و f(x) را بنویسید. (I ثابت) ما انتگرال گیری دوگانه داریم





$\theta_B = ?$ $\delta_B = ?$

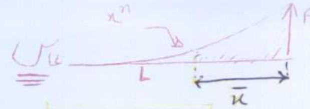
منحنی اول M/EI ← بعد دو انتگرال می‌گیریم

شکل تغییر حالت را رسم می‌کنیم ← $\theta_A = 0$, $\delta_A = 0$

$$\theta_{A/B} = \theta_B - \cancel{\theta_A} = -\frac{PL}{EI}\cdot\frac{L}{2} = \frac{-PL^2}{2EI} \longrightarrow \boxed{\theta_B = \frac{-PL^2}{2EI}}$$ در خلاف جهت مثلثاتی

$$t_{A/B} = -\frac{PL^2}{2EI}\left(\frac{2L}{3}\right) = \frac{-PL^3}{3EI} = \delta_B \longrightarrow \boxed{\delta_B = \frac{-PL^3}{3EI}}$$ جهت منفی قائم (مهندسی) ↓

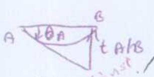
در دفاتر مهندسی این جوری عمل می‌کنند. مقدارش (قدر مطلق) را از این جا می‌گیرند و جهتش را از شکلش.



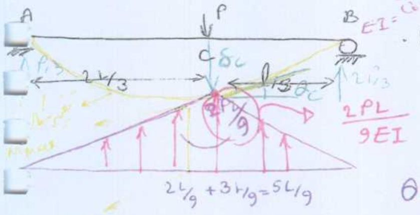
$$\boxed{A = \frac{PL}{n+1}}$$

(گشتاور خارجی با شکل x^n) A: مساحت زیر نمودار !

$$\boxed{\bar{x} = \frac{L}{n+2}}$$



هندسی که عنوان از محور شیب تیره



مثال) ۱) دیاگرام ممان ← دیاگرام بار الاستیک را رسم می‌کنیم.

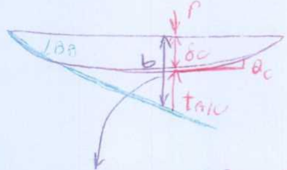
θ_A و δ_C و θ_C را می‌خواهیم

$\theta_{A/C} = \theta_C - \theta_A \Rightarrow$ اول : $\frac{-t_{A/B}}{L} = \theta_A$

$$\theta_A = \frac{-t_{A/B}}{L} \Rightarrow t_{A/B} = \frac{2PL}{9EI}\left(L/3 \times 5L/9\right) + \frac{2PL}{9E}\left(L/6 \times \frac{2L}{9}\right) = \frac{4}{81}\cdot\frac{PL^3}{EI}.$$

$$\theta_A = \frac{-4}{81}\cdot\frac{PL^2}{EI} \quad \theta_C = \theta_{A/C} + \theta_A \;;\; \theta_{A/C} = \frac{2PL}{9EI}\cdot\frac{L}{3} = \frac{2PL^2}{27EI}$$

$$\rightarrow \theta_C = \frac{6PL^2}{81EI} - \frac{4PL^3}{81EI} = \frac{2PL^3}{81EI}$$



حالا δ_C را چه جوری حساب کنیم؟ δ_C را چه جوری بدست بیاوریم؟

$$t_{A/C} = \frac{2PL}{9EI} \times \frac{L}{3} \times \frac{2L}{9} = \frac{4PL^3}{243EI}$$

$$= \theta_A \cdot 2L/3 = \frac{4PL^2}{81EI}\cdot\frac{2L}{3} = \frac{8PL^3}{243EI} \qquad \delta_C = \left|\frac{8PL^3}{243EI} - \frac{4PL^3}{243EI}\right| = \frac{4PL^3}{243EI} \downarrow$$

۱) دیاگرام ممان ← دیاگرام بار الاستیک را رسم می‌کنیم   اشکال روش تنگی سطح شیب بودن است که

۲) شکل تغییر شکل تیر را رسم می‌کنیم   همراهش باید به مرجع پیداکنی ② برای هر نقطه

۳) روابط مورد نیاز را بدست می‌آورید (هندسه)   می‌دهد یعنی معادله بهم می‌دهد : جواب ← استدلال

اگر می‌گفت x_{max} و δ_{max} را بدست آورید چه کار می‌کنید؟ ۱) بدانیم چپ C است یا راست C است (این‌جا

۲) باید $\theta_{x_{max}} = 0 \leftarrow \theta_{A/max} = \theta_{max} - \theta_A \leftarrow$ یه معادله بدست می‌آید ← x_{max} ✓

$$\frac{x_{max}}{2L/3} = \frac{M_{max}}{\frac{2PL}{9EI}} \rightarrow M_{max} = f(x_{max})$$

۱) $\frac{L}{81}$ نشست تکیه‌گاهی داشته باشیم و تغییر مکان‌ها رو هم را بدست بیاورید.

۲) x_{max} و δ_{max} را بدست بیاورید. (وقتی نشست تکیه‌گاهی نداریم).

Conjugate Beam Method

روش تیر مزدوج

تیر حقیقی ←

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M}{EI} \qquad \theta=\frac{dy}{dx}=\int\frac{M}{EI}\,dx \qquad \frac{d^2M}{dx^2}=w$$

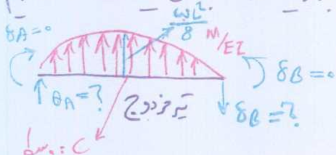
$$y=\int\theta\,dx=\iint\frac{M}{EI}\,dx\,dx \qquad V=\int w\,dx=\frac{dM}{dx} \qquad M=\int V\,dx=\iint w\,dx\,dx$$

تیر مزدوج: بارگذاری روش بارالاستیک $\left(\frac{M}{EI}\right)$ است. برش در تیر مزدوج معادل ضریب زاویه تیر حقیقی است.

برش در تیر مزدوج = ضریب زاویه تیر حقیقی

لنگر در تیر مزدوج = تغییر مکان تیر حقیقی

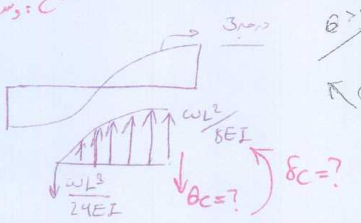
بارالاستیک: روی تیری که شرایط مرزی تیر را ارضا کند. ضریب زاویه در ابتدای تیر را نداریم



$\delta_A=0$
$\frac{wL^2}{8}$
M/EI
$\delta_B=0$
$\theta_A=?$
تیر مزدوج
$\delta_B=?$
وسط: C

پس برش در تیر مزدوج در ابتدای تیر مزدوج مجهول است.

شرایط مرزی را روی تیر مزدوج اعمال میکنیم



درجه 3
$\frac{wL^2}{8EI}$
$\frac{wL^3}{24EI}$
$\theta_C=?$
$\delta_C=?$

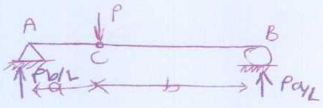
$$\sum M_B=0 \rightarrow L\theta_A+\frac{2}{3}\,\frac{wL^2}{8EI}\times L\times\frac{L}{2}=0$$

$$\rightarrow\boxed{\theta_A=\frac{-wL^3}{24EI}}\ \downarrow \qquad \boxed{\theta_B=\frac{wL^3}{24EI}}$$

$$\sum F_y=0\rightarrow\frac{-wL^3}{24EI}+\frac{wL^2}{8EI}\cdot\frac{L}{2}\cdot\frac{2}{3}-\theta_C=0\rightarrow\boxed{\theta_C=0}$$

$$\sum M_C=0 \qquad \delta_C=\frac{wL^2}{8EI}\times\frac{L}{2}\times\frac{2}{3}$$

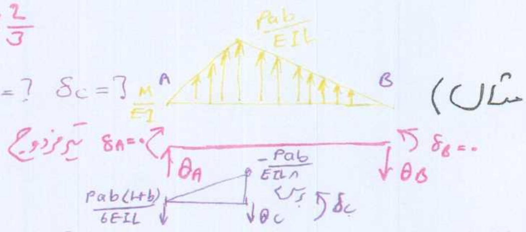
مثال)



A
P
C
B
Pb/L
a
b
Pa/L

$\theta_A=?\ \theta_B=?\ \theta_C=?\ \delta_C=?$

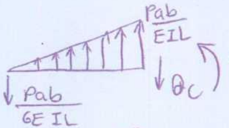
$a+b=L$



$\frac{Pab}{EIL}$
$\frac{M}{EI}$
A
B
تیر مزدوج
$\delta_A=0$
θ_A
$-\frac{Pab}{EIL}$
برش
$\delta_B=0$
θ_B
$\frac{Pab(L+b)}{6EIL}$
θ_C
δ_C

$$\sum M_B=0\rightarrow L\theta_A+\frac{Pab}{EIL}\times\frac{a}{2}\times\left(b+\frac{a}{3}\right)+\frac{Pab}{EIL}\times\frac{b}{2}\left(\frac{2}{3}a\right)=0\rightarrow\theta_A=\frac{-Pab(L+b)}{6EIL}$$

$$\sum F_y=0\rightarrow\theta_A+\frac{Pab}{EIL}\,\frac{L}{2}-\theta_B=0\rightarrow\theta_B=\frac{Pab(L+a)}{6EIL}$$



$\frac{Pab}{EIL}$
$\frac{Pab}{6EIL}$
θ_C
δ_C

$$\sum F_y=0\rightarrow\frac{Pab(L+b)}{6EIL}+\theta_C-\frac{Pab}{EIL}\,\frac{a}{2}=0\rightarrow\boxed{\theta_C=-\frac{Pab(b-a)}{3EIL}}$$

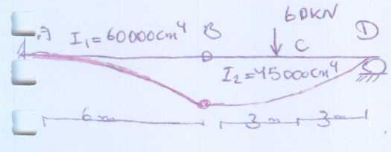
$$\sum M_C=0\rightarrow\delta_C+\frac{Pab(L+b)}{6EIL}\,a-\frac{Pab}{EIL}\,\frac{a}{2}\,\frac{a}{3}=0\rightarrow\boxed{\delta_C=-\frac{Pa^2b^2}{3EIL}}\ \downarrow$$

مزایای تیر مزدوج نسبت به لنگر سطح : برای حل تیر می‌توانیم بهم کمیم معادلاتش را بدست آوردیم .

انتگرال‌گیری هم ندارد ← کار مان خیلی سریعتر پیش می‌رود .

تیر خورده سطح را می‌بریم بالای .

مثال)

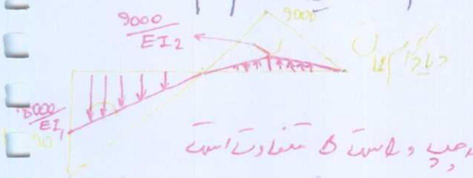

A
I₁=60000cm⁴
B
60KN
C
D
I₂=45000cm⁴
6m
3m
3m

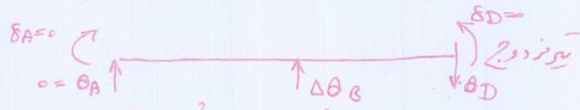
$\theta_{B^+}=?\quad \theta_{B^-}=?\quad \delta_B=?\quad \theta_D=?$

$E=20000\ KN/cm^2$

سازه معین استاتیکی است . اگر مفصل B را نداشتیم نامعین بود.

مفصل ← ممان در این نقطه صفر است . می‌توانیم شکل طیف ممان این را رسم کنیم

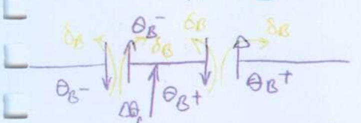

9000/EI₂
9000
5000/EI₁
90
دیاگرام M


δA=0
0 = θA
ΔθB
δD=0
θD
تیر مزدوج

ΔθB را می‌داریم چون به خاطر بارگذاری پرش در تیر مزدوج ممان در چپ و راست B متفاوت است

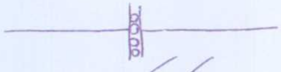
پس باید ΔθB را بگذاریم . اگر نگذاریم شکل این است در صورتی که [illegible] باشیم تیر ممان در این نقطه پیوسته است که [illegible]

امتحان میان ترم سازه (I) ۲۳ ، ۲ ، ۸۹ (۲۳ اردیبهشت : پنج شنبه)

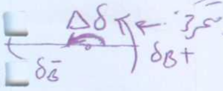

δB
θB⁻
δB
δB
δB
θB⁻
ΔθB
θB⁺
θB⁺

δB [illegible] B برابر است .

$$\theta_{B}^{-}+\Delta\theta_B-\theta_{B}^{+}=0 \longrightarrow \boxed{\Delta\theta_B=\theta_{B}^{+}-\theta_{B}^{-}}$$



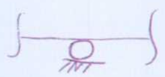
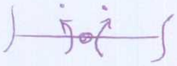
تیر پرده بالای (کنکور کارشناسی ارشد) به جای B همچنین شکلی می‌دادم



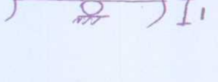
شیب‌ها در چپ و راست برابرند اما تغییر مکان‌ها مساوی نیستند . مثل : لنگر متمرکز .

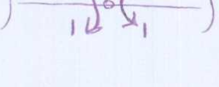
$$\delta_{B}^{-}-\Delta\delta-\delta_{B}^{+}=0 \longrightarrow \boxed{\Delta\delta=\delta_{B}^{-}-\delta_{B}^{+}}$$

تیر چیز دیگه . اگر تیر هم چنین تکیه گاهی داشتیم (در داخل نه در مرز) چه جوری مدل می‌کنیمش ؟

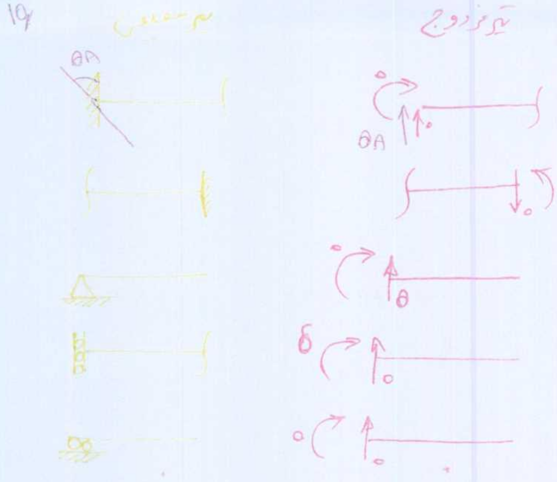

→ تیر مزدوج

مفصل

اگر همان مفصله به شکل تکیه گاهی داشته باشیم این شکلی مدلش می‌کنیم .



→ تیر مزدوج


مفصل


تیر معمولی
تیر مزدوج
θA
θA
0
0
0
0
θ
δ
0
0
0
0

θ_A = شیب تکیه‌گاهی در خمشی

با دانستن اصل کلی

۱) شیب حقیقی θ = برش تیر مزدوج

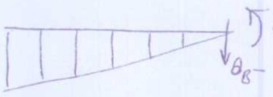
۲) تغییرمکان حقیقی δ = لنگر تیر مزدوج

این حالات را هم بدست می‌آوریم.

ادامه حل مثال: $\sum^{D}_{\text{در تیر مزدوج}} M_B = 0 \rightarrow \frac{18000}{EI_1}\times\overset{\text{cm}}{300}\times400+\frac{9000}{EI_2}\times300\times300-600\times\theta_D = 0$

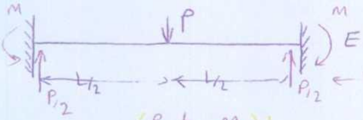
$\rightarrow \theta_D =$ [redacted]

(علامت مثبت بدست می‌آید) ↶



برش مقطع می‌زنیم بین E از طرف A تا B پس داریم

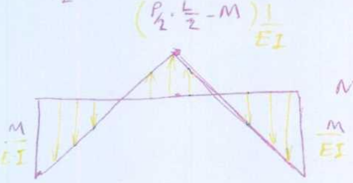
..... $\theta_B = \frac{18000}{EI_1}\times300$ $\delta_B = -\frac{18000}{EI_1}\times300\times400$


M
P
M
L/2
L/2
P/2
P/2
تقارن

$EI = \text{Constant}$

مثال) لنگر حالا نمی‌دانیم!

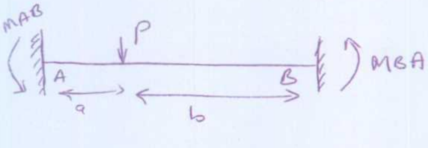
« قبل از عالی بودن متقارن باشد » خواهش می‌کنم!


$\left(\frac{P}{2}\cdot\frac{L}{2}-M\right)\frac{1}{EI}$
M/EI
M/EI

برای حل این مسئله ، برای رسم لنگر فقط یک مجهول داریم: M

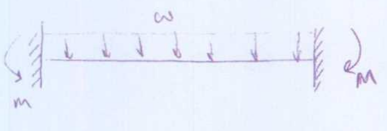
$\sum F_y = 0 \rightarrow M = \frac{PL}{8}$ $\frac{PL}{4} - M = M \rightarrow M = \frac{PL}{8}$

پس من می‌دانم تیرهای نامعین را هم حل کنیم (نیاز به تعادل ندارد)


MAB
P
MBA
A
B
a
b

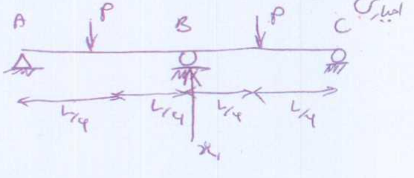
حل کنید: ۱

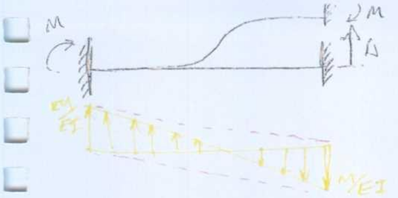
$\boxed{M_{AB} = \frac{Pab^2}{L^2}}$ $\boxed{M_{BA} = -\frac{Pa^2b}{L^2}}$

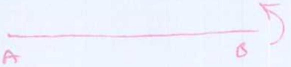


$\boxed{M = \frac{\omega L^2}{12}}$

تیر مزدوج حکایت لنگر اجباری


A
P
B
P
C
L/4
L/4
L/4
L/4
x_1

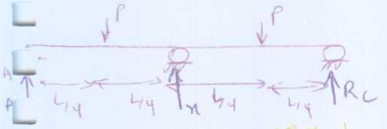




تیر مزدوج

$$\sum M_B = 0 \qquad \Delta = \frac{M}{EI}\left(\frac{L}{2}\cdot\frac{2L}{3} - \frac{L}{2}\cdot\frac{L}{3}\right) = \frac{ML^2}{6EI}$$

$$\boxed{M = \frac{6EI}{L^2}\,\Delta}$$

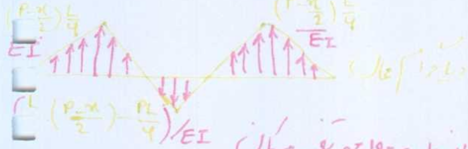

P
P
A
L/4
L/4
x
L/4
L/4
RC

مثال)

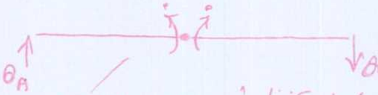
$R_A = R_C \qquad 2R_A + x = 2P \Rightarrow x = 2P - 2R_A$

or $R_A = P - \frac{x}{2}$

این را با انتگرال مساحت هم حل کن؟

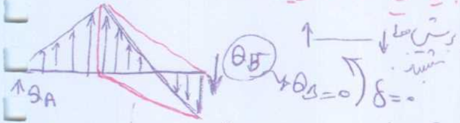

$\left(P-\frac{x}{2}\right)\frac{L}{4}$ / EI
$\left(P-\frac{x}{2}\right)\frac{L}{4}$ / EI
$\left(\left(\frac{P-x}{2}\right)-\frac{PL}{4}\right)$ / EI

دیاگرام بار


θ_A
θ_C

تیر مزدوج

⚠ * هر جا نیرو مجهوله تغییر مکان متناظرش معلومه و برعکس، و هر جا نیرو معلومه تغییر مکان متناظرش مجهوله (هر دوتا باهم معلوم یا مجهول نیستند)

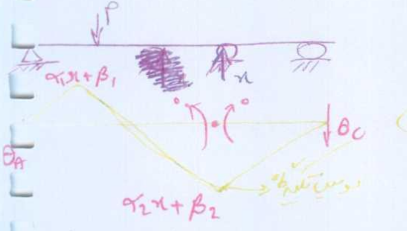

δ_A
θ_B
$\theta_B = 0$
$\delta = 0$
این برش‌ها شبیه

می‌دانیم $\theta_B^+ = \theta_B^-$ ⟵ $\theta_{B^+} = \theta_B^- = \theta_B$ (به علت تقارن) در این مسئله یک حالت خاص $\theta_B = 0$

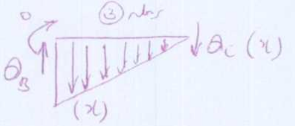
$$\frac{L}{2} - \frac{L}{12} = \frac{6L - L}{12} = \frac{5L}{12}$$

$$\sum M_A = 0 \longrightarrow \left(P - \frac{x}{2}\right)\frac{L}{4}\times\frac{L}{4}\times\frac{L}{4} - \left[\left(P - \frac{x}{2}\right)\frac{L}{2} - \frac{PL}{4}\right]\times\frac{L}{8}\times\frac{5L}{12} = 0 \rightarrow x = P$$

مثال) اگر تقارن نداشتیم چی؟

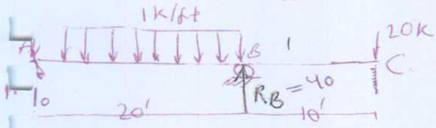

P
x
$\alpha_1 x + \beta_1$
θ_A
θ_C
$\alpha_2 x + \beta_2$
دو خط شکسته

دیاگرام بار


③ معادله
θ_B
θ_C (x)
(x)

δ در تکیه‌گاه = ۰ ✓

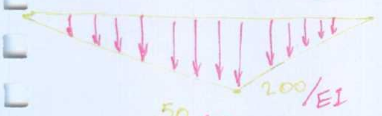
θ_B جزو شرایط داخلی است: جزو شرایط مرزی‌ای نیست (پس مجهولها را اضافه نمی‌کند!)


1k/ft
20K
A
B
C
$R_B = 40$
20'
10'

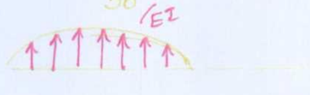
مثال۲)

$E = 30{,}000\,\text{ksi} \quad I = 864\,\text{in}^4 \quad \overset{\text{نشست}}{\Delta_B = 1\,\text{in}}$

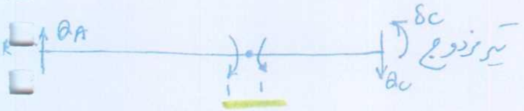
خواسته‌ها: $\theta_C = ?$ $\delta_C = ?$ استاتیک را حتماً دوره کنید!



$$\sum M_A = 0 \rightarrow 1\times 20\times 10 + 20\times 30 - 20R_B = 0 \rightarrow \underline{R_B = 40}$$

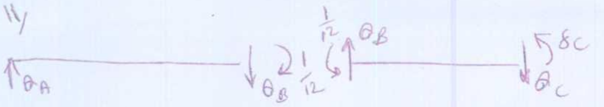


دیاگرام بار را قسمت قسمت می‌کشیم! (* اینجا مثبت اند)


θ_A
δ_C
θ_C

تیر مزدوج

11/



$AB: \sum M_A = 0 \rightarrow -\frac{50}{EI}\left(\frac{2}{3}20\right)\times 10 + \frac{200}{EI}\left(10\times\frac{40}{3}\right) + \frac{1}{12} + 20\theta_B = 0$

$\theta_B = \frac{1}{240} + \frac{1000}{EI}$

$EI = 30000\ \frac{k}{in^2} \times 864\ in^4 \times \left(\frac{1\,ft}{12\,in}\right)^2 = \frac{30000\times 864}{12^2} = 180000\ k.ft^2$

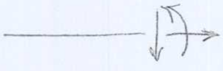
$\rightarrow \theta_B = 0.00972\ Rad \circlearrowleft \quad \xrightarrow[\sum M_B]{\sum F_y} \theta_C = -0.01528\ Rad \quad \delta_C = -0.217\,ft \downarrow$

۱- از روش تیر مزدوج تمام مسائل قابل حل اند.

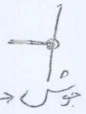
۲- یه مطلب جنبی جالب ($M+R=2N$ ← معادلات استاتیکی برای معین استاتیکی یا نامعین استاتیکی خرپا)

اما تیرها را از کجا بفهمیم که معین اند یا غیر معین. روشی خواهیم گفت که قابل گسترش است. هر تیر سه مجهول

ممان، برشی و نیروی محوری داره.

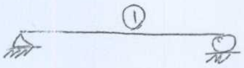


سه معادله تعادل: $\sum F_y$ و $\sum F_x$ برای اتصال (۰ ۳) (حاوی تیر) داریم.

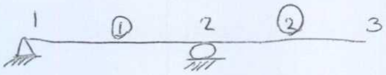


قاب است (جوش است) ← سه معادله

وگرنه اگر خرپا بود ← ۲ معادله چون که ممان ها خودشان صفر می شوند.



$R=3 \quad M=1 \rightarrow R+3M=6 \quad N=2 \rightarrow 3N=6$ تیر معین

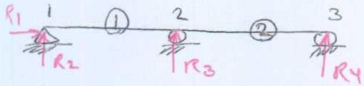


$N=3 \quad M=2 \quad R=3 \rightarrow 3M+R=9=3N$ تیر معین

هر عضو خرپا یه نیرو تحمل می کند چه در صفحه چه در فضا پس برای خرپای فضایی برای هر عضو یه مجهول

بیشتر نداریم. R: مجهولات تکیه گاهی   کل مجهولات = $M+R$ معادلات: $3N$ ← N تعداد گره

خرپای فضایی: $3N=M+R$ ← معین   (ما فعلاً کاری با اینا نداریم)

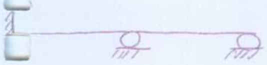


$3M+R=3\times2+4=10 \quad N=3 \rightarrow 3N=9$ درجه نامعینی $n=1$

هر نیروی افقی را می توانیم بگیریم؟ خیر! اگر R_1 را بگیریم از مجموع نیروهای افقی مساوی صفر

در می آید. پس یه مجهولی را باید بگیریم که اگر حذفش کنیم سازه ناپایدار نشه. یا اگر را

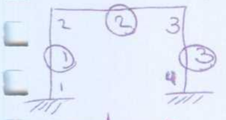
بگیریمش سازه ای که شود معین. درجه نامعینی = اون ها را حذف کنی ← سازه ماند ← سازه معین پایدار



M=2   N=3   R=5   3M+R= 6+5=11   3N=9 $\underline{n=2}$

2 درجه نامعینی داره . از کجا می شد فهمید ؟ دوتا تکیه گاه اضافی داشتیم سازه می شد معین

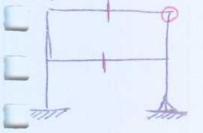
(ناپایدار) ← 2 درجه نامعینه سازه حول!   این فقط برای تکیه گاه های دوبعدی هم صدق میکنه!



M=3   N=4   R=6   3M+R=15   n=3   3 درجه نامعینه

3N = 12 ⟶ $\underline{n=3}$

مفصل نیست جوش است (در قاب جوش داریم)



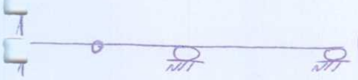
N=6   M=6   R=5   3M+R= 18+5=23

3N=18   n=5

اگر یکی را قطع کنیم پایدار

و اگر این دو عضو را قطع کنیم هر کدام از سازه ها پایدار و معین اند ← 6 تا مجهول حذف کرده ایم

1 مجهول هم اضافه کرده ایم ← پس 5 تا مجهول داریم ← 5 درجه نامعینه!

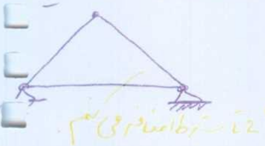


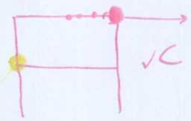
مفصل ← یه شرط استاتیکی اضافه می کنیم پس فرمولم را اصلاح می کنم

(شرایطی که خودم اضافه کردم) Condition ↙

$3M+R=3N+C$ ⟶ معین ، اختلاف ← n نامعینی

کمتر ← ناپایدار





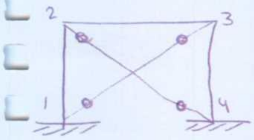
مفصل اضافه کنیم

← یه معادله صفره ← یه √C

مفصل در گره : تعداد اعضا - 1 ← √C

M=3   N=3   R=4   C=3   خرپا (قاب تکیه‌ش)

3M+R = 9+4 = 13   3N+C = 12 ⟶ $\underline{n=1}$ ✓   خرپا چون به گره‌هامون را مفصلی کرده

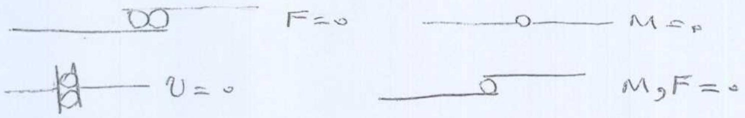


M=5   N=4   R=6   C=4   سازه‌های مرکب را هم شامل می شود.

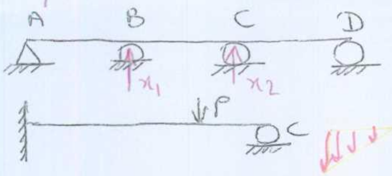
3M+R=21   C+3N=16 $\underline{n=5}$ درجه نامعینی

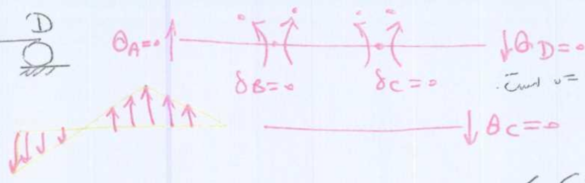
n اجبار خواسته داری ۱ و

کیا شرطمی



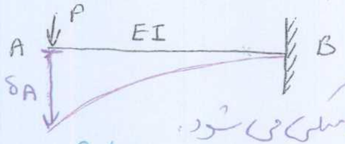
(بسیار مهم ★) تیر مزدوج برای تیرهای معین و نامعین به کار می رود.





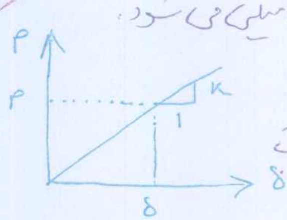
θ در طرفین صفر است زیرا مساحت زیر نمودار $\frac{M}{EI}=0$ است.

کار مجازی



کار نیروی خارجی (External Work)

در استاتیک بار آرام آرام اعمال می شود وگرنه حالت دینامیکی می شود.



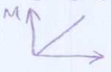
$$\text{کار نیروی خارجی} = \frac{1}{2}P\delta$$

برای رابطه های خطی $P=K\delta$ که در آن K ضریب سختی است

این کار در تیر به صورت پتانسیل خمشی ذخیره می شود که در هر نقطه ای داخلی تیر به صورت

$$\text{کار نیروی داخلی} = \text{Internal Work} = \frac{1}{2}\int_0^l \overset{-Px}{M(x)}\,d\theta \rightarrow$$ چون مثل P آرام آرام اعمال می شود

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} = \frac{d}{dx}\overset{\theta}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{d\theta}{dx} \rightarrow d\theta = \frac{M(x)}{EI}dx$$



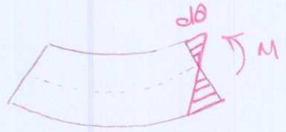
$$\text{Internal work} = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2(x)}{EI}dx \xrightarrow{M(x)=-Px} = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{P^2x^2}{EI}dx = \frac{P^2}{2EI}\frac{l^3}{3}$$

$$\overset{IW}{\text{Internal work}} = \overset{EW}{\text{External work}} \rightarrow \frac{P\delta_A}{2} = \frac{P^2}{2EI}\frac{l^3}{3} \rightarrow \delta_A = \frac{Pl^3}{3EI}$$

δ در راستای P است.

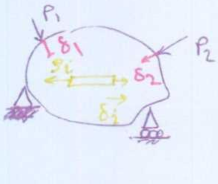
$$\text{External work} = \frac{1}{2}P\delta \qquad \text{Internal work} = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M(x)}{EI}dx$$

* در تیرها بیشترین انرژی به صورت خمشی و در خرپاها به صورت محوری ذخیره می شود



$$\omega_I = \frac{1}{2}\int M(x)\,dx$$

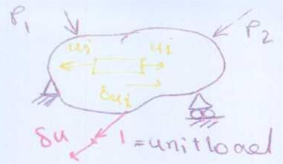
روش به کار رفته تنها برای یک بار اعمال شده و برای δ محل اعمال نقطه بکار می رود.



$$EW = \frac{1}{2}P_1\delta_1 + \frac{1}{2}P_2\delta_2$$

عضو خرپا با طول فرض شود.

$$IW = \sum \frac{1}{2} s_i \delta_i$$

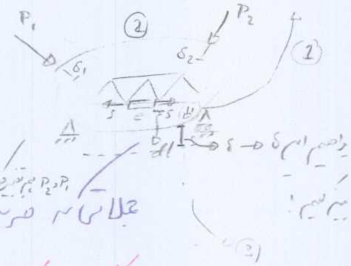


Vertual Displacement: اگر سیستمی در حال تعادل است (یکی بار) در (داخل، خارج) تحت تاثیر تغییر مکان مجازی ... قرار گیرد کار مجازی نیروهای خارجی مساوی کار مجازی نیروهای داخلی است

$$EW = \frac{1}{2} \times 1 \times \delta u$$

$$IW = \sum \frac{1}{2} u_i \delta u_i$$

پس از اعمال بار P_1 و P_2 به سیستم ما بار کلی خواهیم داشت



② در اثر بار واحد ① ③ تغییر مکان بار واحد در اثر اعمال P_1 و P_2!

$$EW = \underbrace{\frac{1}{2} \times 1 \times \delta}_{②} + \frac{1}{2} P_1 \delta_1 + \frac{1}{2} P_2 \delta_2 + 1 \times \Delta$$

$$IW = \underbrace{\sum \frac{1}{2} u_i \delta u_i}_{②} + \sum^{①} \frac{1}{2} s_i \delta s_i + \sum u_i \delta_i^{③}$$

کار در اثر بار واحد

dl_i P_1 و P_2 هم تغییر مکان می‌دهند

جملاتی که ضریب $\frac{1}{2}$ ندارند یعنی از قبل وجود داشته‌اند.

* هرگاه در یک نقطه از جسم تغییر مکان را بخواهیم در نقطه‌ی مذکور یک بار مجازی واحد می‌گذاریم و بعد نیروهای خارجی را اعمال می‌کنیم.

کار نیروی مجازی داخلی ناشی از نیروهای داخلی = کار نیروی مجازی خارجی ناشی از بار مجازی واحد

یعنی بار مجازی است

$$1 \times \Delta = \sum \bar{u}_i \times \delta_i \longrightarrow \text{تغییر مکان حقیقی داخلی}$$

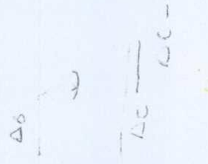
vertual

تغییر مکان حقیقی ناشی از P_1 و P_2 (خارجی)

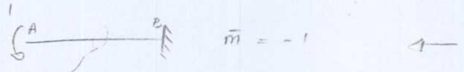
نیروی مجازی

تغییر مکان حقیقی داخلی در اثر P_1 و P_2

* در سازه‌های معین تغییر طول در اعضا، نیرو ایجاد نمی‌کند. (می‌تواند در اثر درجه حرارت باشد) در نظر می‌گیریم که عضوی که تغییر طول دارد را برمی‌داریم بعد عضو بزرگتری جای آن می‌گذاریم که در این فاصله بقیه اعضا تغییر طول و در نتیجه ایجاد نیرو ندارد. بلکه تنها سازه تغییر شکل می‌دهد. وقتی عضو مذکور برداشته شود، اگر خرپای حاصل ناپایدار باشد دیگر هیچ نیرویی در عضو افزوده شده و در کل سازه نمی‌افتد.



* در سازه‌های نامعین تغییر طول امکان دارد ایجاد نیرو نماید.



$\bar{m} = -1$

اگر تغییر مکان این نقطه را بخواهیم بار واحد

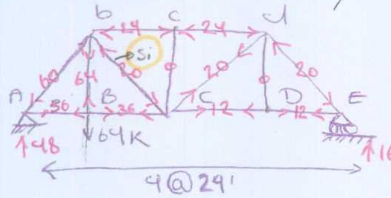
$$1 \times \theta_A = \int \bar{m}\, d\theta = \int_0^l \bar{m} \frac{M}{EI} dx$$

در اینجا ...

$$\rightarrow \theta_A = \int_0^l -\left(-\frac{Px}{EI}\right) dx = \frac{P}{EI} \int_0^l x\, dx = \frac{Pl^2}{2EI}$$

V3/

Truss Deflection



$\left[32' \right.$

find ΔBv ?

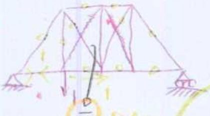
ولی اینجا را با علامت ضرب می‌نویسیم → +

تغییر مکان d ؟

vertical $\frac{L(ft)}{A(in)^2} = 1$ — $E = 30000\ k/in^2$

$\Delta B = ? \downarrow$

بار واحد می‌گذاریم



$\bar{u}_1$ ΔBx

نیروهای داخلی را حساب می‌کنیم

عضو	S_i	$u_i = \frac{S_i}{64}$	$(\frac{L}{A})_i\ \frac{ft}{in^2}$	$\bar{u}_i S_i (\frac{L}{A})_i$
AB	+36	36/64		$36^2/64$

$$\boxed{\delta_i = \frac{S_i L_i}{E A_i}}\quad T \times \Delta B = \sum \bar{u}_i \frac{S_i L_i}{E A_i}$$

$u_i = S_i/64$

$$\rightarrow \boxed{T \times \Delta B = \frac{1}{E}\sum \bar{u}_i S_i} = \frac{1}{E}\sum \frac{S_i^2}{64} = \frac{1}{64E}\sum S_i^2$$

$$\sum \bar{u}_i \left(\frac{S_i L_i}{E A_i}\right) = \frac{1}{E}\sum \left(\frac{L}{A}\right)_i \bar{u}_i S_i$$

روش ۱

جدول نیرو

حاصل جمع ستون آخر جدول ← 202

$$\rightarrow \Delta B = \frac{1}{64E}\sum S_i^2 = \frac{202}{E} = 0.00673\ ft = 0.0808\ in$$

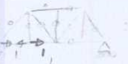
+ است یعنی در جهت بار واحد است ⇐ ↓

علامت مثبت و منفی جواب اهمیت

روش ۲ ←

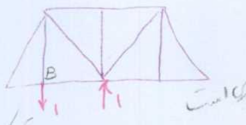
$1 \times \Delta Bh = 1 \times \frac{36 \times 1}{30000}$ $\frac{36}{E} \times 1$ $(+ +)$

در جهت بار واحد تعیین می‌شود.



حالا اگر ΔBh را بخواهیم چطور؟ در راستای افقی ← بار واحد را

اگر بپرسیم عضو BC چقدر چرخیده؟ می‌توانیم چرخش را با Deflection ها حساب کنیم؟ بله!



چون تغییر مکان پایین (۱)

$1 \times \Delta C - 1 \times \Delta B = \dots$

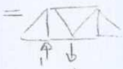
$\theta BC = \frac{\Delta C - \Delta B}{24}$

اما این شکلی:

$$\rightarrow \theta = \frac{80}{24E} = \frac{1}{4000}\ rad \circlearrowright$$

$1 \times \Delta_{BV} + 1 \times \Delta_{CV} = \sum u_i \frac{S_i L_i}{E_i A_i} = \frac{1}{E}\sum \bar{u}_i S_i$

$\theta_{BC} = \frac{\Delta BV + \Delta CV}{24}$

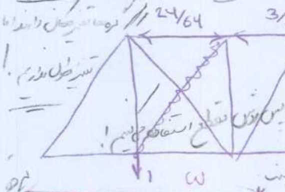


$\alpha = 6.5 \times 10^{-6} / {}^\circ F$

اگر عضو bc و cd به میزان $50^\circ F$ + گرم شوند ΔBV را حساب کنید

در خرپای معین استاتیکی اگر تغییر طول عضو داشته باشیم نیرویی بوجود نمی‌آید ولی تغییر مکان خواهیم داشت.

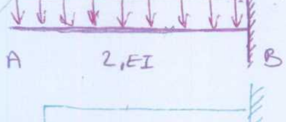
$T \times D_{BV} = \sum u_i (\alpha L \Delta T)$



$\delta bc = \delta cd = L\alpha\Delta T = 6.5 \times 10^{-6} \times 24 \times 50 = 0.0078$

$$1 \times \Delta = \sum u_i \textcircled{\delta_i} \rightarrow \alpha \Delta T L_i$$

$$\delta B_V = 2\left(-\frac{3}{8}\right)(0.0078) = -0.00585\ ft$$

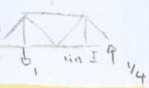


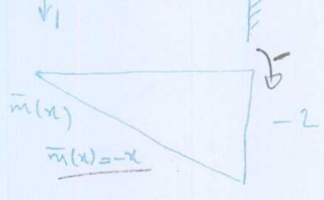
$\delta A = ?$

$$T\delta A = \int_0^L \bar{m}\, d\theta = \int_0^L \bar{m}\frac{M}{EI}dx \rightarrow d\theta$$

$$d\theta = \frac{M(x)}{EI}dx$$

$1 \times D_{BV} + (1/4)(-1/12) = \sum \bar{u}_i \left(\frac{S_i L_i}{E A_i}\right) + \sum \bar{u}(\alpha L \Delta T) + \sum \bar{u}_i d l_i$



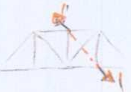


$$M(x) = -\frac{\omega x^2}{2}$$

$$T\delta A = \int_0^L \textcircled{\bar{m}}\frac{M}{EI}dx = \int_0^L (-x)\frac{-\omega x^2}{2EI}dx$$

$$= \frac{\omega}{2EI}\int_0^L x^3 dx = \frac{\omega L^4}{8EI}\ \downarrow$$

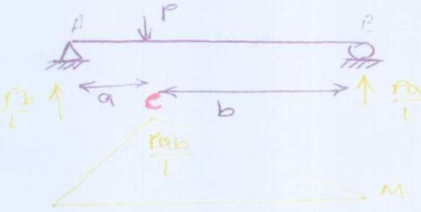
چون با بار واحد مشخص شد



حل مسئله با نیروی ...

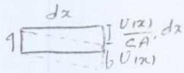
مثبت و منفی جواب ... در جهت بار واحد ...

$\theta_A = ?$ $1 \times \theta A = \int_0^L (-1) \frac{-\omega x^2}{2EI} dx = \frac{\omega}{2EI} \int_0^L x^2 dx = \frac{\omega L^3}{6EI}$ ↺


A
P
B
$\frac{Pb}{L}$
a
C
b
$\frac{Pa}{L}$
$\frac{Pab}{L}$
M

$a+b=L$ $\theta_A = ?$ $\theta_C = ?$ $\Delta C = ?$

$$P\Delta C = \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx$$


dx
1
$\frac{V(x)}{GA'} dx$
V(x)

تغییر طول برشی

$$\Delta C = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L mM dx$$

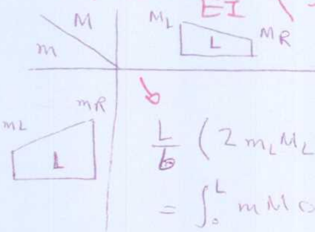
$\int_0^L \bar{V}(x) \left(\frac{V(x)}{GA'}\right) d$

$$\rightarrow \Delta C = \frac{1}{EI} \left(\int_0^a mM dx + \int_a^L mM dx \right)$$

$G = 0.6E$

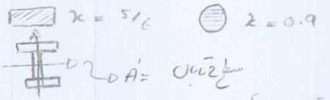
سطح موثر برش ← $A' = kA$

Form Factor ≤ 1


M
m
M_L
L
M_R
m_R
m_L
L

$$\frac{L}{6} \left(2m_L M_L + 2m_R M_R + m_L M_R + m_R M_L \right)$$

$$= \int_0^L mM dx$$



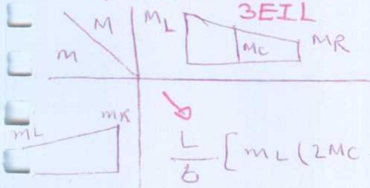
$A' =$ سطح جان

برش در جان اعمال می‌شود ← سطح جان $= A'$ در این جهت باشد

$$EI\Delta C = \frac{a}{6}\left[2\frac{Pa^2b^2}{L^2}\right] + \frac{b}{6}\left[2\frac{Pa^2b^2}{L^2}\right] = \frac{Pa^2b^2}{3L^2}(a+b) = \frac{Pa^2b^2}{3L}$$

$$\rightarrow \Delta C = \frac{Pa^2b^2}{3EIL}$$

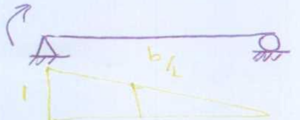
$\int_0^L \bar{T}(x) \left(\frac{T(x)}{GJ}\right) dx$ →


M
M_L
M_C
M_R
m
m_R
m_L

$$\frac{L}{6}\left[m_L(2M_C + M_L) + m_R(2M_C + M_R)\right]$$

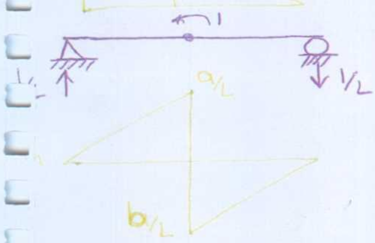
$$EI\theta_A = \int m \frac{M}{EI} dx = \frac{a}{6}\left[2 \times \frac{b}{L} \times \frac{Pab}{L} + \frac{Pab}{L}\right]$$

$$+ \frac{b}{6}\left[2\frac{b}{L} \times \frac{Pab}{L}\right]$$

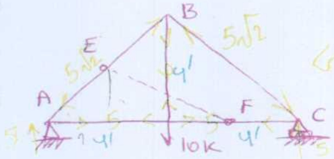


$$EI\Delta C = \frac{a}{6}\left[2 \times \frac{a}{L} \times \frac{Pab}{L}\right] - \frac{b}{6}\left[2 \times \frac{b}{L} \times \frac{Pab}{L}\right]$$

$$= \frac{Pab}{3L^2}\left[a^2 - b^2\right] = \frac{Pab(a-b)}{3L}$$



$$\begin{cases} \text{if } a<b \rightarrow \Delta C<0 \\ \text{if } a>b \rightarrow \Delta C>0 \end{cases}$$

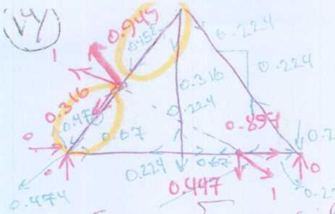

B
$5\sqrt{2}$
E
$5\sqrt{2}$
4'
A
5
5
F
C
5
4'
10K
4'
5

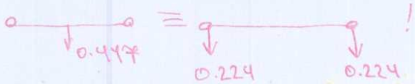
نیروهای داخلی حقیقی

(امتحانی) دو نقطه‌ی E و F نسبت به هم چقدر

نزدیک می‌شوند؟ $\Delta_{EF} = ?$ (E و F وسط)

$EA = 30000K$


0.945
0.158
0.316
0.474
0.67
0.224
0.316
0.224
0.224
0.224
0.894
0.224
0.67
0.447
0.224
0.474
1
1
0
0


0.447
0.224
0.224

کارشان!

نیروهای مجازی داخلی u_i

نیروهای حقیقی داخلی S_i

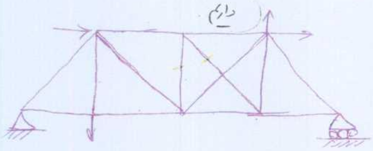
$$\delta_{EF} = \sum u_i \frac{S_i l_i}{EA} = \frac{1}{EA}\left(\sum u_i S_i l_i\right) = \frac{1}{EA}\left(\boxed{(-0.474)(-5\sqrt{2})(2\sqrt{2})}\right.$$

$$\left.+\boxed{(0.158)(-5\sqrt{2})(2\sqrt{2})}+\cdots\right) = \frac{1}{EA}(26.82) = \frac{26.82}{30000}\times 12 = \boxed{0.01\ \text{in}}\ \oplus$$ دور می‌شوند

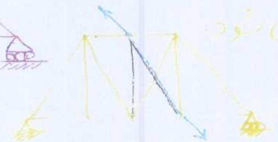
در حالت $\overline{S_i}$ یک عضو
در حالت $\overline{U_i}$ ۲ عضو

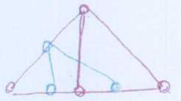
چون وسط عضو جایی نیروی قائم نمی‌تواند وجود داشته باشد آن نیرو را به مفصل‌ها می‌دهیم

مثال) سازه‌ی شکل روبرو را داریم. (سازه‌ی نامعین)



با برداشتن این دو عضو سازه معین می‌شود.





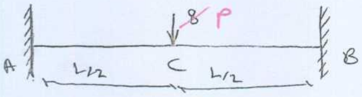
$N=4\quad M=5\quad R=3\quad M+R=8\quad 2N=8$

$N=6\quad M=9\quad R=3\quad M+R=9+3=12\quad 2N=12$

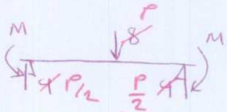
* نیروی قائم در مفاصل کار انجام می‌دهد اما در وسط اعضا کار انجام نمی‌دهد پس می‌رسیم به مفاصل که اثر نیروی افقی آن کار انجام می‌دهد.

* در سازه‌های نامعین یک سری اعضا را حذف می‌کنیم و یک دو را هم حذف می‌کنیم تا سازه‌مان معین شود ← تغییر طول عضو حذف شده را از روش مثال قبلی بدست می‌آوریم.

مثال)

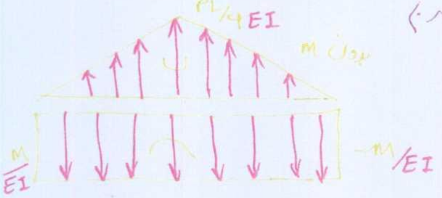


$EA = \text{Constant}\qquad \delta c = ?$

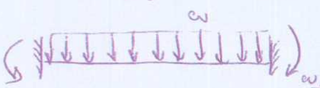


(کنکور کارشناسی ارشد)

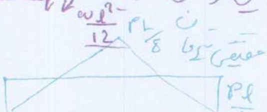
سازه‌ی سه درجه نامعین.


PL/4EI
M بدون
M/EI
-M/EI

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \frac{PL}{4EI}\times\frac{L}{2} - \frac{M}{EI}\times L = 0 \rightarrow \boxed{M=\frac{PL}{8}}$$

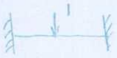


تو خونه این را حل کنید:


$\frac{wl^2}{12}$
$\frac{PL}{8}$
M حقیقی یا $\overline{M}$
$-\frac{PL}{8}$
$\frac{PL}{8}$

$$\overline{U}\times\Delta = \sum \overline{u}\frac{SL}{EA}$$

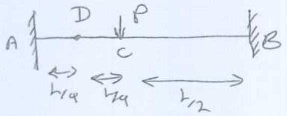
در خمش $\int_0^L \overline{m}\frac{M}{EI}dx$

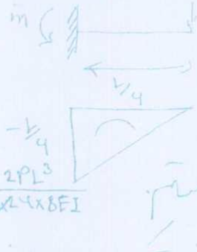


$$\boxed{\cancel{\overline{1}}\,\overset{P}{}\times\delta_c = \int \cancel{\overline{m}}\overset{M}{}\frac{M}{EI}dx} \rightarrow P\times\delta_c = \int\frac{M^2}{EI}dx = 4\times\frac{L/4}{6}\left[2\left(\frac{PL}{8}\right)^2\right] = \frac{PL^3}{8\times24EI}$$

$$\rightarrow \boxed{\delta_c = \frac{PL^3}{8\times24EI}}$$

مثال) δ_D در مثال قبل





$$1\times\delta_D=\int_0^{L/4}\bar{m}\,\frac{M}{EI}\,dx$$

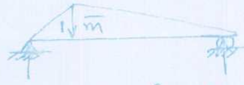
$$\delta_D=\frac{L/4}{6EI}\left[2\times\frac{L}{4}+\frac{PL}{8}\right]=\frac{2PL^3}{4\times 24\times 8EI}$$

طاقت نمی‌خواد با یه سیستم معادل معادل مجازی حل کنیم.

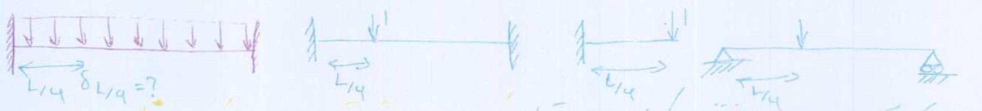
$$\longrightarrow\boxed{\delta_D=\frac{PL^3}{4\times 96EI}}\downarrow$$

هر بار مجازی متقارنی برای من قابل قبوله و لازم نیست به روی همان

سازه بگذارم. مثلاً می‌شد این را بگذارم:



$$1\times\delta_D=\int\bar{m}\,\frac{M}{EI}\,dx$$



* هر کدوم از بالایی‌ها را انتخاب کنی درسته! که بار مجازی [illegible] خیلی زیاد.

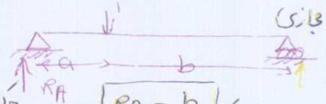
کار مجازی یه بعد دیگه هم داره. نیروهای حقیقی مجازی × تغییر مکان‌های مجازی = نیروهای حقیقی

* تغییر مکان‌های مجازی داخلی باید نیروها با هم، هم جنس و تغییر مکان‌ها با هم، هم جنس باشند

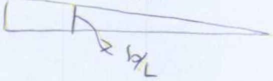
تغییر مکان مجازی داخلی $d\theta$ ( )

$$1\times\bar{\delta}=\int M\boxed{\frac{m}{EI}dx}$$

$d\theta=0$



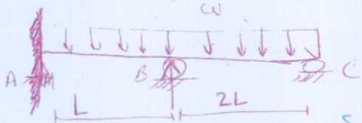
شکل تغییر مکان



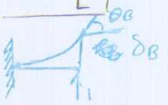
$$R_A\times 1-1\times\left(\frac{b}{L}\right)+0=0$$

حرکت: حرکت صلب

$$\longrightarrow\boxed{R_A=\frac{b}{L}}\checkmark$$



$R_B=?$



آخ، آخ! تقارن هم نداره.

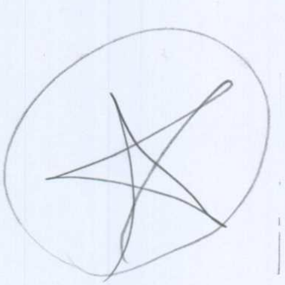
$$\delta_B R_B+\theta_B M_B=\int\frac{m}{EI}M(x)\,dx$$

$$\leftarrow \text{انرژی محوری}=\left(\sum\frac{uLS}{EA}=\sum u\,\frac{SL}{EI}\right)+\int u(x)\left(\frac{S(x)}{EA(x)}dx\right)\leftarrow$$

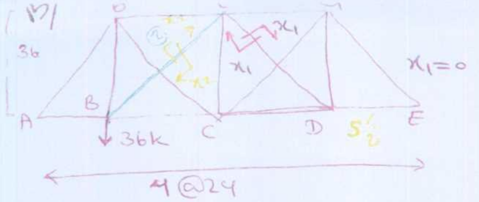
$$\rightarrow \text{انرژی خمشی}=\int m\,\frac{M}{EI}\,dx\leftarrow$$

$$\rightarrow \text{انرژی برشی}=\int \upsilon\,\frac{V}{EA}\,dx\leftarrow$$

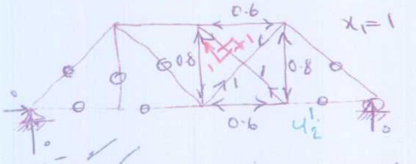
$$\text{انرژی پیچشی}=\int t\,\frac{T}{GJ}\,dx.$$



مثال) خرپای نامعین (n=1)



عضوی را حذف می‌کنیم که سازه را معین و پایدار کند!



Δ'_1 : فاصله‌ی نیروهای x از یکدیگر تحت تاثیر بارگذاری خارجی

$x_1=0 \rightarrow$ primary structure سازه اولیه

تغییر مکان متناظر x_1 سازه اولیه تحت تاثیر بار خارجی $= \Delta'_1$

$\delta_{11} =$ تغییر مکان در راستای x_1 تحت اثر بار واحد $x_1=1$ primary structure سازه اولیه

$$\boxed{\delta_{11} x_1 + \Delta'_1 = \Delta_1 = 0}$$

«معادله الاستیک»

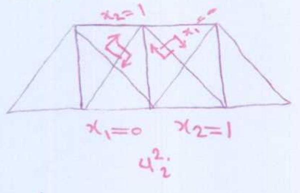
$$\Delta'_1 = \sum_{i=1}^{M} u_i \frac{S'_i L_i}{E_i A_i}$$

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^{M} \frac{u_i^2 L_i}{E_i A_i}$$

Consistant Displacement Method روش تغییر مکان سازگار

② ← ۲ تا معادله‌ی الاستیک لازم داریم. سازه‌مان باید با حذف نیرو و عضو بشود معین و پایدار.

1) $x_1=x_2=0$ 2) $x_1=0$ $x_2=1$ 3) $x_1=1$ $x_2=0$ مثلاً ما خودش را حذف می‌کنیم.



$$\begin{cases} \delta_{11} x_1 + \delta_{12} x_2 + \Delta'_1 = \Delta_1 \\ \delta_{21} x_1 + \delta_{22} x_2 + \Delta'_2 = \Delta_2 \end{cases}$$

پس معادلات بالا را در نظر می‌گیریم

$\Delta'_i =$ تغییر مکان در راستای i سازه اولیه تحت تاثیر بارگذاری خارجی

$\delta_{ij} =$ تغییر مکان در راستای i به ازای نیروی واحد در راستای j $(x_j=1)$ (و دیگر نیروهای اضافی صفر باشند)

displacement @ D.O.F: i due to unit load @ D.O.F j

$$\delta_{11} = \sum (u_i^1)^2 \left(\frac{L}{EA}\right)_i$$

$$\delta_{22} = \sum u_i^2 \left(\frac{u_i^2 L}{EA}\right)$$

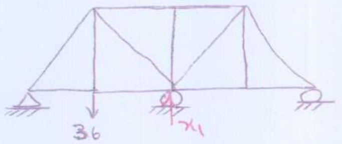
$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum u_i^1 u_i^2 \left(\frac{L}{EA}\right)_i$$

$$\boxed{\sum_i \delta_{ji} x_i + \Delta'_j = \Delta_j} \quad j=1 \to n$$

معادلات سازگاری تغییر مکان

$\delta_{ij} = \delta_{ji}$

مثال)



$\delta_{11}x_1 + \Delta'_1 = \Delta_1 = 0$

اگر نشست تکیه‌گاه میانی به اندازه ۱ داشتیم

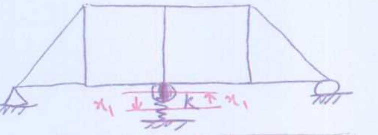
$\delta_{11}x_1 + \Delta'_1 = \Delta_1 = -1$

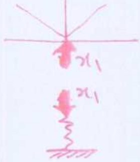
اگر عضو انتخاب شده تغییر دما داشته باشد

Δ_1 = تغییر طول ناشی از تغییر دما

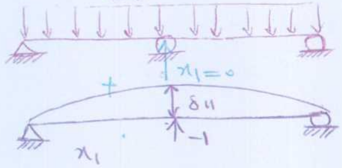
مثال) ۳۷

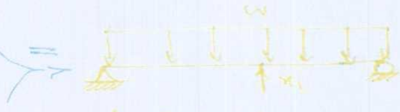
$\boxed{\Delta_1 = -\frac{x_1}{k}}$





مثال)





$\Delta'_1 + \delta_{11}x_1 = \Delta_1 = 0$

امتحان میان‌ترم موکول به ۲۴ اردیبهشت تا الان؟

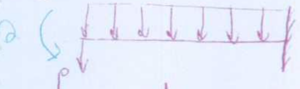
$$\Delta = \int \frac{\partial M}{\partial P}\frac{M}{EI}dx + \int \frac{\partial V}{\partial P}\frac{V}{GA'}dx + \int \frac{\partial S}{\partial P}\frac{S}{EA}dx + \int \frac{\partial T}{\partial P}\frac{T}{GJ}dx$$

Castigliano

قضیه کاستیگلیانو (به حالت دوری کاربردی است!)

اگر انرژی سیستم را داشته باشیم. انرژی داخلی = W

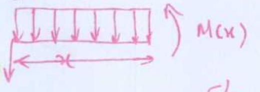
$\frac{\partial W}{\partial P} = \delta P$,, تغییر ω_0



$W(P, \omega_0, E, I) = ?$ $\frac{\partial W}{\partial P} = ?$ (P کاذب یا مجازی)

$$W = \int_0^L \frac{1}{2}M(x)\,d\theta = \int_0^L \frac{1}{2}M(x)\left(\frac{M(x)}{EI}dx\right) = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2(x)}{EI}dx = W$$

$$\frac{\partial W}{\partial P} = \frac{1}{2}\int_0^L 2\frac{\partial M}{\partial P}\frac{M(x)}{EI}dx = \boxed{\int_0^L \underbrace{\frac{\partial M}{\partial P}}_{\to -x}\overbrace{\frac{M}{EI}}^{\to -Px}dx = \delta P} = \frac{PL^3}{3EI}$$



$M(x) = -Px - \omega_0\frac{x^2}{2}$

P را خودم گذاشته‌ام

$$\delta P = \int_0^L (-x)\left(-\frac{\cancel{Px} + \omega_0 x^2/2}{EI}\right)dx = \int_0^L x\,\frac{\omega_0 x^2/2}{EI}dx$$

$$\to \delta P = \frac{\omega_0}{2EI}\int_0^L x^3 dx = \boxed{\frac{\omega_0 L^4}{8EI}}$$

(+ یعنی در جهت مثبت P)

$\frac{\partial M}{\partial P} = m$: ممان به ازای وقتی که فقط P داریم و P هم واحد:

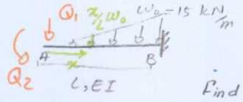
فقط دارای مرحله [illegible]!!!

$M(P, Q, \omega_0, x) \to \delta Q = \int_0^L \frac{\partial M}{\partial Q}\left(\frac{M}{EI}dx\right)$

چون جهت‌ها مثبت در جهت Q_1 و Q_2 است.

جواب :

چون جای [illegible]



$\omega_0 = 15\ kN/m$

$L = 5m$

$E = 20{,}000\ kN/cm^2$

$I = 12{,}000\ cm^4$

Find δ_A, θ_A?

$\delta_A = \frac{\partial W}{\partial Q_1} = \int_0^L \frac{\partial M}{\partial Q_1}\frac{M}{EI}dx$

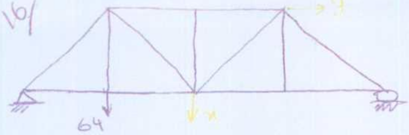
$\theta_A = \frac{\partial W}{\partial Q_2} = \int_0^L \frac{\partial M}{\partial Q_2}\frac{M}{EI}dx$

$\frac{\partial M}{\partial Q_1} = -x$, $\frac{\partial M}{\partial Q_2} = -1$

نهایتاً بعد از نوشتن انتگرال به جای $Q_1 = Q_2 = 0$ قرار می‌دهیم

$\to M(x) = -Q_1 x - Q_2 - \omega_0 \frac{x^3}{6}$

16/



(مثال)

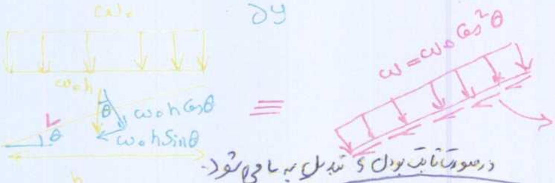
$$W = \sum_i \frac{1}{2} (S)_i \left(\frac{SL}{EA}\right)_i$$

$$\delta x = \frac{\partial W}{\partial x} \sum_i \frac{1}{2} \times 2 \frac{\partial S}{\partial x} \frac{SL}{EA}$$

x و y = 0 چون بارگذاری نبودند

* همچنین اینکه فقط نیرو اثر دارد با تحلیل سازه‌های درجه دوم (درس !)

* نیروی داخلی وقتی به y = 1 باشد و تغییری نیروها صورت شد : $\frac{\partial S}{\partial y}$



$$\frac{w_0 h \cos\theta}{L} = \frac{w_0 L \cos^2\theta}{L} = \boxed{w_0 \cos^2\theta}$$

$$\frac{w_0 h \sin\theta}{L} = \frac{w_0 L \cos\theta \sin\theta}{L} = \boxed{w_0 \sin\theta \cos\theta}$$

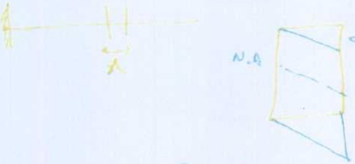
در صورت ثابت بودن S تبدیل به SL می‌شود.

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \int_0^L \frac{\partial S}{\partial x} \left(\frac{S}{EA}\right) dx = \frac{\partial S}{\partial x} \frac{SL}{EA}$$

$$W = \underbrace{\int_0^L \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx}_{\text{خمشی}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^L \frac{S^2}{EA} dx}_{\text{محوری}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{V^2}{GA'} dx}_{\text{برشی}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{T^2}{GJ} dx}_{\text{پیچشی}}$$

انرژی داخلی که به صورت‌های بالا (دلیل نیروی خمشی) می‌شود، اگر از محوری + برشی و پیچشی صرف نظر کنیم

$$\frac{\partial W}{\partial P} = \int \frac{\partial M}{\partial P} \frac{M(x)}{EI} dx + \int \frac{\partial S}{\partial P} \frac{S}{EA} dx + \int \frac{\partial V}{\partial P} \frac{V}{GA'} dx + \int \frac{\partial T}{\partial P} \frac{T}{GJ} dx$$



$$dV = \frac{V}{GA'}$$

$$\frac{V}{A} = \frac{V}{A'}$$

A': سطح موثر در برش

K: form factor

$K_{\text{مستطیل}} = 5/6$ ▨

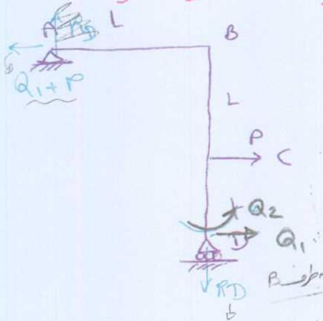
$K_{\text{دایره}} = \frac{9}{10}$ ●

بزرگترین K می‌شود

$A' = KA$

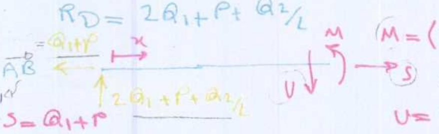
$$\int m \frac{M}{EI} dx + \int u \frac{S}{EA} dx + \int v \frac{V}{GA'} dx + \int t \frac{T}{GJ} dx \Rightarrow \text{SAP} ✓$$

$\delta D = ?$ $\theta D = ?$ ~~بدون~~ با درنظر گرفتن تغییر طول محوری و برشی



$$2LQ_1 + PL + Q_2 - R_D L = 0 \qquad \delta Q_i = \frac{\partial W}{\partial Q_i}$$

$$R_D = 2Q_1 + P + Q_2/L$$



$S = Q_1 + P$

$M = (2Q_1 + P + Q_2/L)x$ خمش

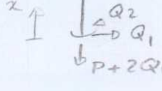
S محوری

$V = 2Q_1 + P + Q_2/L$ برشی

$(P + \frac{Q_2}{L} + 2Q_1)$

$$\frac{\partial M}{\partial Q_1} = 2x \quad \frac{\partial M}{\partial Q_2} = \frac{x}{L} \quad \frac{\partial S}{\partial Q_1} = 1 \quad \frac{\partial S}{\partial Q_2} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial Q_1} = 2 \quad \frac{\partial V}{\partial Q_2} = \frac{1}{L}$$

DC :

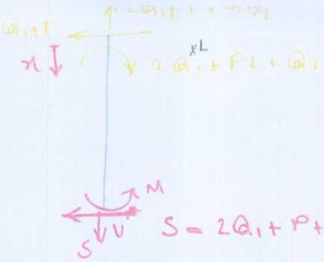


$$\begin{cases} S = P + 2Q_1 + Q_2/L \\ V = Q_1 \\ M = -Q_1 x - Q_2 \end{cases}$$

$\partial M/\partial Q_1 = -x$, $\frac{\partial M}{\partial Q_2} = -1$

$\partial V/\partial Q_1 = 1$, $\partial V/\partial Q_2 = 0$

BC



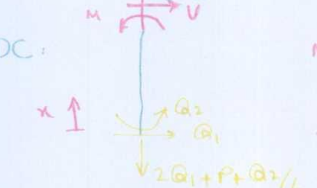
$M(x) = L(2Q_1) + PL + Q_2 - (Q_1+P)x$ ← ? ✓

$\frac{\partial M}{\partial Q_1} = 2L - x \qquad \frac{\partial M}{\partial Q_2} = 1$

$S = 2Q_1 + P + \frac{Q_2}{L} \qquad \frac{\partial S}{\partial Q_1} = 2 \qquad \frac{\partial S}{\partial Q_2} = \frac{1}{L}$

$V = -Q_1 - P \qquad \frac{\partial V}{\partial Q_1} = -1 \qquad \frac{\partial V}{\partial Q_2} = 0$

DC:



$M(x) = -Q_2 - xQ_1 \qquad \frac{\partial M}{\partial Q_1} = -x \qquad \frac{\partial M}{\partial Q_2} = -1$

$S = 2Q_1 + P + Q_2 L \qquad \frac{\partial S}{\partial Q_1} = 2 \qquad \frac{\partial S}{\partial Q_2} = \frac{1}{L}$

$V = -Q_1 \qquad \frac{\partial V}{\partial Q_1} = -1 \qquad \frac{\partial V}{\partial Q_2} = 0$

$\delta_D = \int (Px)(2x)\,dx, \quad \theta_D = \int (Px)(x/L)\,dx$

$\delta Q_1 = \frac{\partial W}{\partial Q_1} = \sum \int \frac{\partial M}{\partial Q_1}\frac{M}{EI}\,dx = \int_0^L \frac{2x(Px)}{EI}\,dx + \cdots$ تنها ناشی از خمش

$\rightarrow EI\,\delta Q_1 = \int_0^L (2x)(Px)\,dx + \int_0^L (2L-x)(L-x)P\,dx + \cancel{\int_0^L 0(-)(-)\,dx} \xrightarrow{} 0$

$\rightarrow EI\,\delta Q_1 = \frac{2PL^3}{3} + \qquad \rightarrow \boxed{\delta Q_1 = \frac{3}{2}\frac{PL^3}{EI}}$ ✓ → سهم خمش

برش : $\delta Q_2 = \frac{\partial W}{\partial Q_2} = \sum \int \frac{\partial V}{\partial Q_2}\frac{V}{GA'}\,dx \rightarrow GA'\delta Q_2 = \sum \int \frac{\partial V}{\partial Q_2} V\,dx$

$\rightarrow GA'\delta Q_2 = \frac{1}{L} \times P \times L + 0 + 0 = P \rightarrow \boxed{\delta Q_2 = \frac{P}{GA'}}$ ✓ میزان چرخش مقطع را به ما می‌دهد

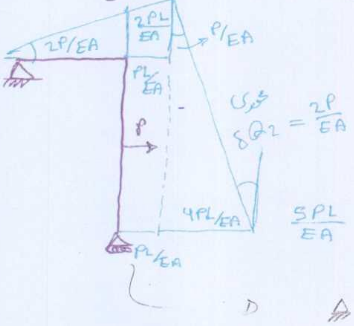
سهم برشی $GA'\delta Q_1 = 2PL + PL + 0 \rightarrow \boxed{\delta Q_1 = \frac{3PL}{GA'}}$ → سهم برشی

سهم محوری $EA\,\delta Q_1 = PL + 2PL + 2PL = 5PL \rightarrow \boxed{\delta Q_1 = \frac{5PL}{EA}}$ ✓ سهم محوری

$$\boxed{\delta Q_1 = \frac{5PL}{EA} + \frac{3PL}{GA'} + \frac{3}{2}\frac{PL^3}{EI}}$$ کل

از یا بار واحد یا روش کاستیلیانو!

کاستیلیانو ← نشست تکیه‌گاهی و تغییر دما و تغییر طول عضو را در نظر نمی‌گیرد. ← محدود است.



Pure axial

محوری $\delta Q_2 = \frac{2P}{EA}$

$\frac{5PL}{EA}$

آنالیز مسئله Δ ← Q1 ≠ صفر

D Δ → D

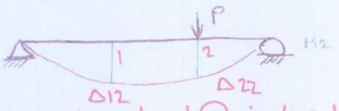
اگر تکیه‌گاه ثابت می‌بود.

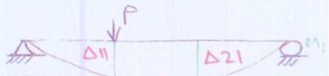
تغییر مکان در راستای Q1 را بدست می‌آوریم سپس آن را

صفر قرار می‌دهیم ... Q1 ...

Maxwell's Law

قانون ماکسول


P
1
2
M2
Δ12
Δ22

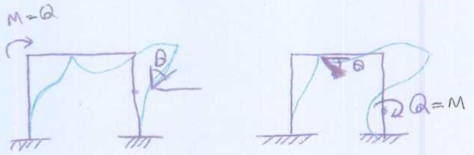


$$\boxed{\Delta_{12} = \Delta_{21}}$$ قانون ماکسول

Δ_{ij} = displ. @ i due to load P @ j → unit load → δ_{ij}

نیروی بار واحد δ حقیقی

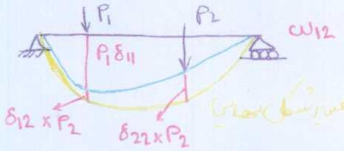
اثبات: $\Delta_{12} = \int \frac{M_1}{P} \frac{M_2}{EI} dx$ $\Delta_{21} = \int \frac{M_2}{P} \frac{M_1}{EI} dx \longrightarrow \Delta_{12} = \Delta_{21}$



قانون ماکسول این طوری که:

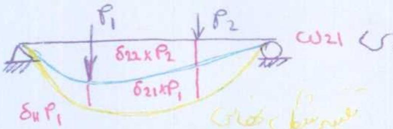
$Q = M$, $\theta = \theta$!

قانون بتی


P1
P2
P1δ11
δ12 x P2
δ22 x P2
تغییر شکل نهایی

ω_{12} P1 روی سیستم هست ← تغییر شکل می‌دهد

بعد بار P2 را هم روی سیستم می‌گذاریم.


P1
P2
δ22 x P2
δ21 x P1
δ11 P1
تغییر شکل نهایی

ω_{21} چون مسئله خطی است هر دو تغییر شکل نهایی برابرند در نتیجه انرژی ذخیره شده در هر دو سیستم در انتهای کار با هم برابر اند.

ω_{12} = external work done by P_1 when P_2 is applied

↳ work done by force P_1 already on system during displacement caused by P_2

ω_{21} = external work done by P_2 when P_1 is applied

قانون بتی → $\boxed{\omega_{12} = \omega_{21}}$

$\omega_{12} = P_1(\delta_{12} P_2)$ $\omega_{21} = P_2(\delta_{21} P_1)$ → باید $\delta_{12} = \delta_{21}$

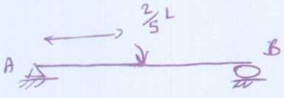
Ext Work:

$$\frac{1}{2} P_1(\delta_{11} P_1) + \frac{1}{2} P_2(\delta_{22} P_2) + P_1(\delta_{12} \times P_2) \overset{\text{صحیح}}{\equiv} \frac{1}{2} P_2(\delta_{22} P_2) + \frac{1}{2} P_1(\delta_{11} P_1) + P_2(\delta_{21} P_1)$$

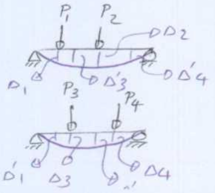
↳ ضریب $\frac{1}{2}$ ندارد چون P_1 بوده از قبل

$$\longrightarrow \boxed{P_1(\delta_{12} P_2) = P_2(\delta_{21} P_1)}$$ قانون بتی → $\delta_{12} = \delta_{21}$ قانون ماکسول

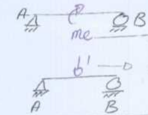
« قانون بتی ⊆ قانون ماکسول » چه جالب!!!



ماکزیمم δ برای نقطه‌ی 2/5 چقدر است و بار w در چه فاصله‌ای B از تکیه‌گاه A قرار می‌گیرد؟

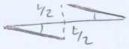

P1
P2
Δ2
Δ1
Δ'3
Δ'4
P3
P4
Δ'1
Δ3
Δ'2
Δ4

$$\longrightarrow (P_1 \Delta'_1 + P_2 \Delta'_2) = (P_3 \Delta'_3 + P_4 \Delta'_4)$$



me ← باید Max شود

نقش قید است ← ۱



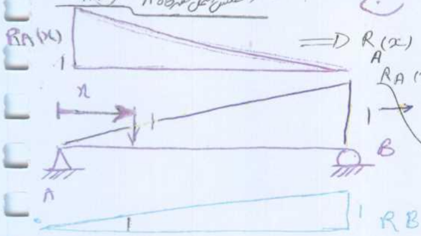
امتحان میان ترم ۸۹/۲/۳۰ تالار یک ساعت ۹ صبح

امتحان پایان ترم ۱۰ خرداد ۸۹ ساعت ۹ صبح است

$M_C(x)$: خط تأثیر ممان در نقطه C ← بار واحد در نقطه x

$R_A(x)$: عکس العمل نقطه A

خط تأثیر برای سازه‌های معین



$\Rightarrow R_A(x)$

$R_A(x) = \frac{(L-x)\times 1}{2}$ $(\Sigma M_B = 0)$

$1 \to \delta$ مجازی

عکس العمل B کی Max می شود (x = ?)

$\to R_A(x)\times 1 - 1\times(1-\frac{x}{L}) = 0 \to R_A(x) = 1 - x/L$

خط تأثیر تکیه‌گاه B

عکس العمل

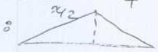
عکس العمل نقطه B متناظر با بار واحد ۱ در نقطه‌ی x و را دارد.

$R_B(x) = \frac{x}{L}$ استاتیک

نیرو و تغییر مکان علاقه هستند

$R_B(1) + 1(-\frac{x}{L}) = 0 \to R_B(x) = \frac{x}{L}$ شکلی که خط به خودش می‌گیرد شکل

خط تأثیر سازه است (برای نقطه‌ی مورد نظر ما B) برای A ← A را برمی‌داریم و ...

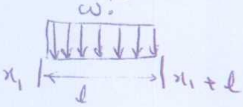


$M_C(x)$:

$0 \le x \le L/2$

$M_C(x) = L/2\, R_B(x) = x/2$

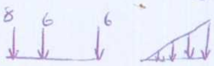
$L/2 \le x \le L \to M(x) = L/2\, R_A(x) = \frac{L}{2}(1-\frac{x}{L})$



$$R_B = \int_{x_1}^{x_1+l} R_B(x)\, w_0\, dx$$

R_B مقدار کمیت $= \int$ (حاصلضرب بار در خط تأثیر B)

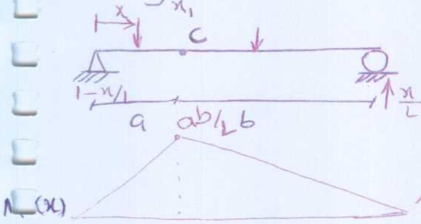
$$R_B = \int_{x_1}^{x_2} R_B(x)\, P(x)\, dx$$



این خطی گونه

M = L/4 ← C بار واحد روی

M = 0 ← A ...



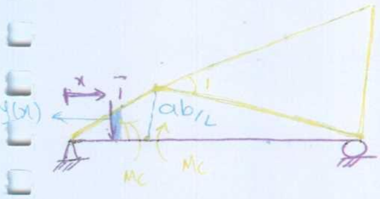
خط تأثیر ممان در نقطه C را رسم کنید. $a+b=L$ $M_C(x)$

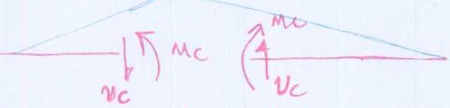
$x \le a$ $M(x) = \frac{bx}{L}$ $x \ge a$ $M(x) = (1-\frac{x}{L})a$

تعمیم بار واحد در کجا قرار دهیم Max شود.

خط تأثیر Mc وقتی بار واحد حرکت می‌کند (روی سازه)

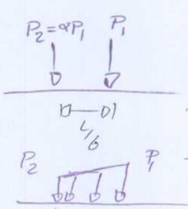
C را مفصل می‌کنیم کاری می‌کنیم که اختلاف θ چپ و راست ۱ شود ← خط تأثیر M_C = شکل سازه





$M_C(1) + V_C(\frac{ab}{L} - \frac{ab}{L}) - 1\times y(x) = 0$ (بتی)

$\to \boxed{y(x) = M_C}$



$M_C(x)$ کجا قرار گیرد تا Max شود؟!

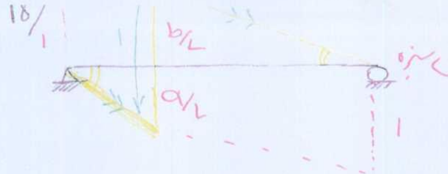
برحسب x

$\overline{M_C(x)}\,P_1 + \overline{M_C}(x - L/6)\,P_2$

$M_C = \int_{\text{طول بار}} w(x)\, M_C(x)\, dx$

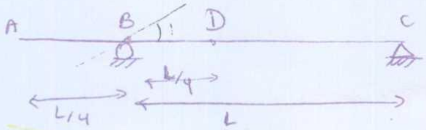
خط تأثیر V_C در سازه‌ی مثال قبل

خط تأثیر: شکل سبزه

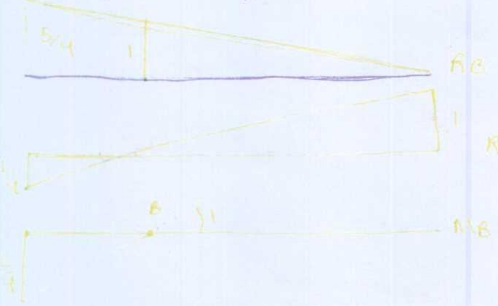


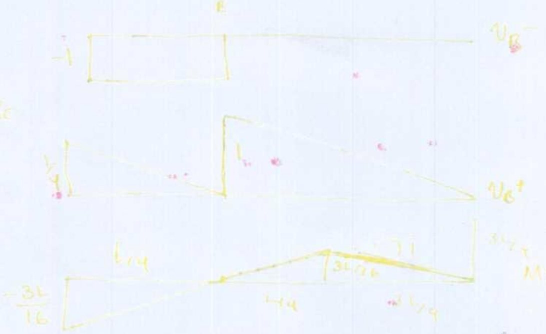
Ⓐ: ضریب [illegible] = است [illegible]

مثال) یک مثال پیچیده‌تر

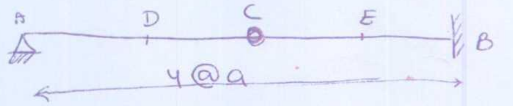

A
B
D
C
1
L/4
L/4
L

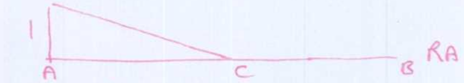
خط تأثیرها ?= MD و MB و V_B^+ و V_B^- و RC و RB

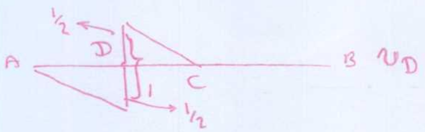

5/4
1
RB
1
RC
1/4
B
1
MB
L/4

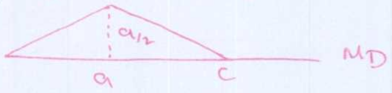

B
V_B^-
-1
1/4
1
V_B^+
L/4
3L/16
MD
-3L/16
L/4

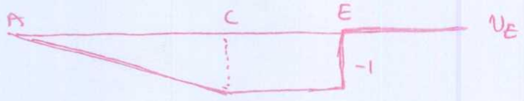
مثال) خط تأثیرهای RA و ME ، VD ، MD و VE .

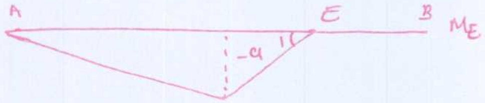




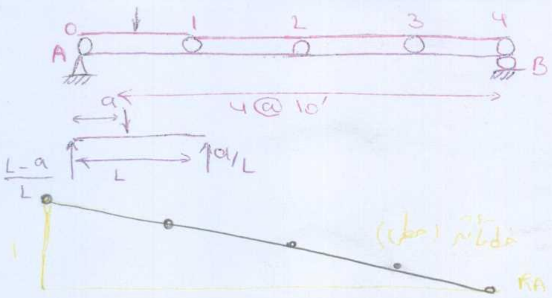

1/2
D
A
C
1
1/2
B
V_D







باید طراحی طوری باشد که جابجایی jump برای عابر نداشته باشیم مثل مثال دوم صفحه‌ی قبل که بدترین نوع طراحی است زیرا مشکلی اتفاق می‌افتد ← می‌شکند ⊕ بار دینامیکی نیز ایجاد می‌شود که عملاً باعث زود شکسته شدن و پایین آمدن بازده ورق و تیر و کلاً سازه می‌شود.

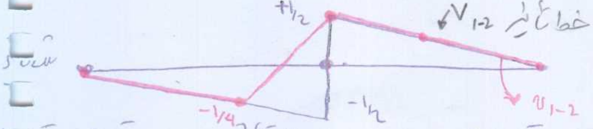

0
1
2
3
4
A
B
a
4@10'
$\frac{L-a}{L}$
L
a/L
1
خط تأثیر (قطعی)
RA

با تیرهای عرضی شکل مقابل برخورد می‌کنیم

(Bay ⇐ ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴)

برشی را در دهانه 1-2 (V_{1-2})

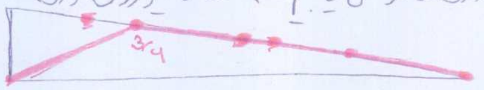
بدست آورید. (خط تأثیر)


+1/2
خط تأثیر V_{1-2}
-1/4
-1/2
V_{1-2}

خط تأثیر شکل ورق‌هاست پس داریم:

(برای دارای ورق)

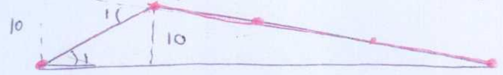
ابتدا شکل شاه تیر را می‌کشیم سپس نقطه‌های ورق‌ها را می‌یابیم ← خط تأثیر روی ورق‌ها بدست!



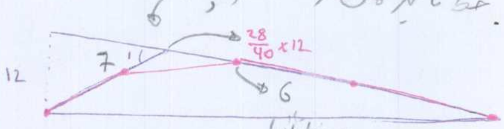
برشی در دهانه‌ی 1-0 (هر جایی از دهانه که

می‌خواهی بگیر ← خط تأثیر شاه تیر ← رسم ← ادامه...)

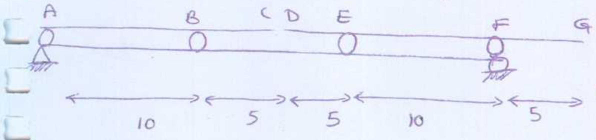
M_1 خط تأثیر

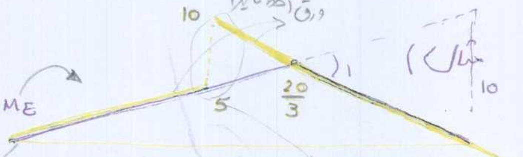


خط تأثیر ممان در x=12 از چپ:


$\frac{28}{40}\times 12$
7
1
12
6

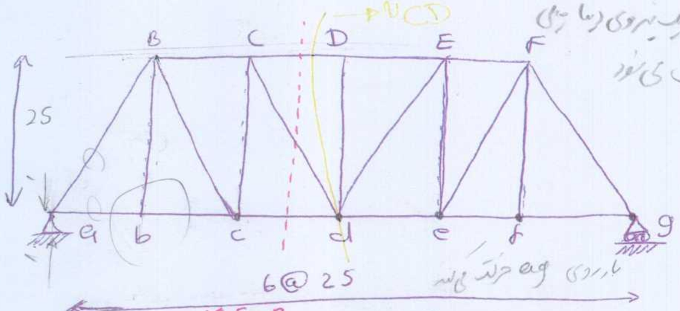
M(2)


A
B
C
D
E
F
G
10
5
5
10
5


10
ورق (خط تأثیر)
(مثال)
10
1
M_E
5
$\frac{20}{3}$

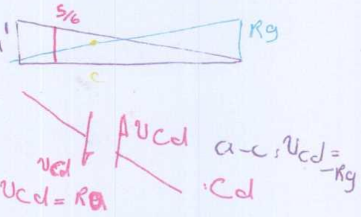
$-\frac{10}{3}$

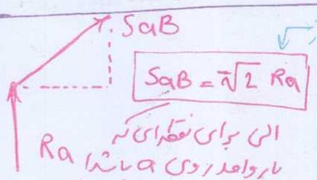
چنین خط تأثیری باعث می‌شود که بار در E یک نیروی [illegible] به وجود آورد و باعث می‌شود خطی سه شکست ی شود


B
C
D
E
F
25
a
b
c
d
e
f
g
6@25

بار روی ag حرکت می‌کند

Ra، SaB، SBb، vcd

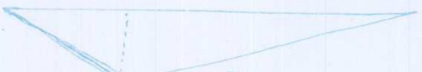

5/6
Ra
1
Rg
c
vcd
vcd
a-c : $v_{cd} = -R_g$
g-d : $v_{cd} = R_a$
:cd

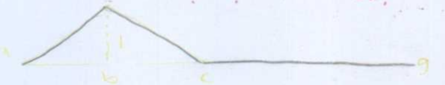


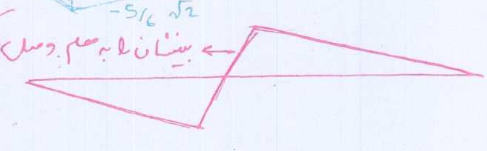
$$\boxed{S_{aB} = -\sqrt{2}\, R_a}$$

الی برای نقطه‌ای که بار واحد روی a باشد

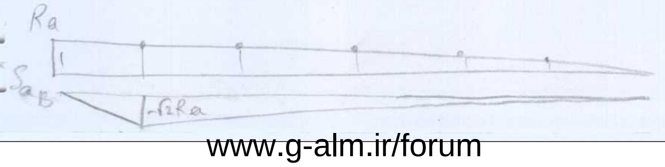
از b→g ≡ √


SaB
$-\frac{5}{6}\sqrt{2}$





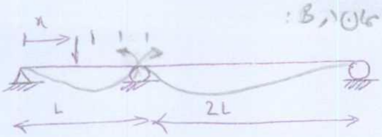
بیشان را به هم وصل می‌کنیم

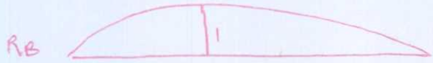

Ra
1
S_{aB}
$-\sqrt{2}R_a$

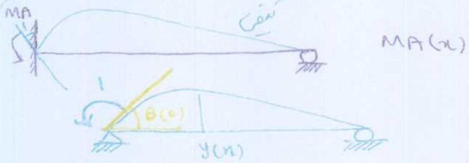
(۱۹)

?

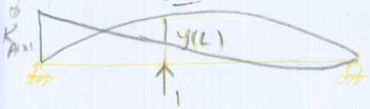
ممان در B :






MA
کیفی
MA(x)
1
θ(0)
y(x)

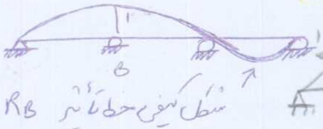
خط تأثیر سازه‌های نامعین

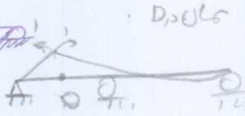


$y(x) =$ معادله $y(L) = \dots$

$$\boxed{R_B(x) = \frac{y(x)}{y(L)}}$$

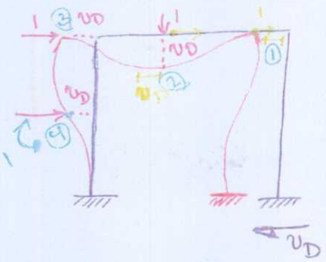
ممان در D :



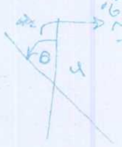


R_B شکل کیفی خط تأثیر

$y(x) = \dots$ (معادله) $\theta(0) = \frac{dy}{dx}(0)$ $M_A(x) = \frac{y(x)}{\theta(0)}$ $M_A \cdot \overset{1}{~~\theta_A~~} = 1 \times y(x)$


1
③
v_D
1
v_D
1
①
②
v_D
v_D
1
④
v_D

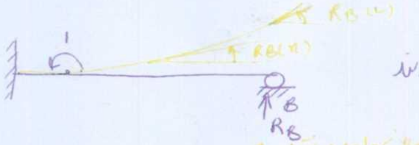
$① = ② = ③$



چرخش در اثر ممان واحد = عکس‌العمل تکیه‌گاه

شکلی که از تغییر شکل‌ها به دست می‌آید دقیقاً همان خط تأثیر است

$-1 \times \theta + v_D \times 1 = 0 \rightarrow \boxed{\theta(x) = v_D(x)}$


1
R_B(L)
R_B(x)
B
R_B

R_B را به دست بیاورید هنگامی که ممان واحد حرکت می‌کند

$R_B(x) =$ ضریب زاویه در نقطه x برای ممان واحد در نقطه x

Conjugate Structure

سازه‌ی مزدوج (روش ابتکاری)

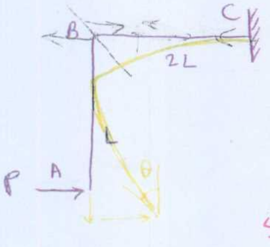
سازه حقیقی	سازه مزدوج
θ_z	v_z
δy	M_y
δx	M_x

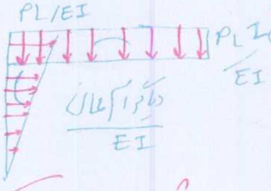
بار را ساعتگرد ۹۰ درجه می‌چرخانیم ← عمود بر صفحه

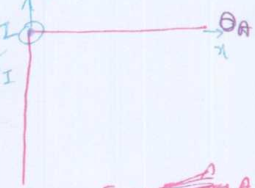
(با قانون دست راست می‌چرخانیم)

تیر حقیقی	تیر مزدوج
$\delta y = \theta$	v
$\theta_z = y$	M

Const = EI ← از تغییر شکل‌های برشی و محوری صرف نظر



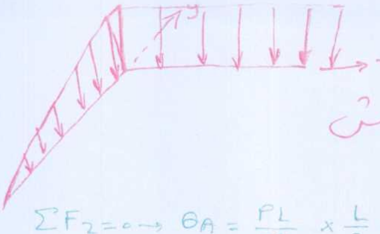

PL/EI
دیاگرام ممان / EI



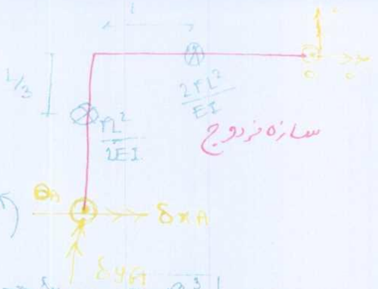
می‌خواهیم θ_A ، δy_A ، δx_A .

سازه مزدوج

الان: دست‌هامان را روی A ~~[illegible]~~ در جهت Curvature انگشتان ← شست = جهت بار الاستیک



شکل فضایی سازه مزدوج و بارگذاری اش

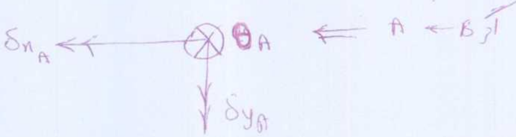

L/3
$\frac{PL^2}{2EI}$
$\frac{2PL^2}{EI}$
سازه مزدوج
θ_A
δx_A
δy_A

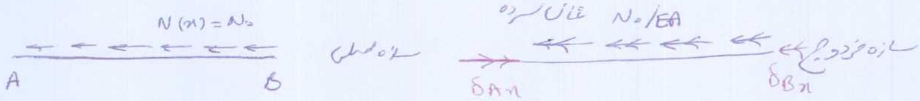
$\sum F_z=0 \rightarrow \theta_A = \frac{PL}{EI}\times\frac{L}{2}+\frac{PL}{EI}\times 2L = \boxed{\frac{5}{2}\frac{PL^2}{EI}}$ ↺

(حول)A: $\sum M_{x_A}=0 \rightarrow \delta x_A - \frac{PL^2}{2EI}\times\frac{2L}{3} - \frac{2PL^2}{EI}\times L = 0 \rightarrow \boxed{\delta x_A = \frac{7}{3}\frac{PL^3}{EI}}$ →

$\sum M y_A=0 \rightarrow \delta y_A + \frac{2PL^2}{EI}\times L \rightarrow \boxed{\delta y_A = -\frac{2PL^3}{EI}}$ ↓

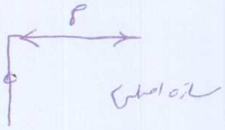
وجه شروع = وجه مثبت   وجهی که از آن برش می‌زنیم: وجه منفی ← جهت‌ها عوض می‌شوند

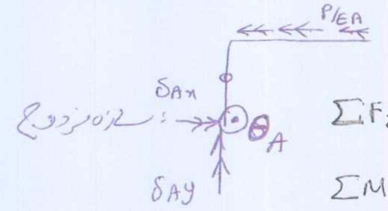

δx_A
θ_A
δy_A
⇐ A ← B از


N(x) = N₀
A
B
سازه اصلی
بار گسترده
N₀/EA
سازه مزدوج
δ_{Ax}
δ_{Bx}

$\delta_{Ax} - N_0L/EA - \delta_{Bx} = 0$

$\rightarrow \boxed{\delta_{Ax} - \delta_{Bx} = \frac{N_0L}{EA}}$

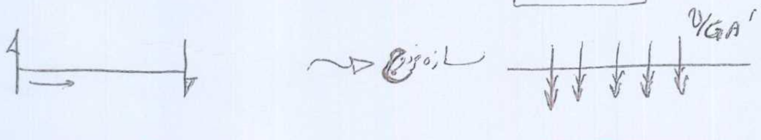


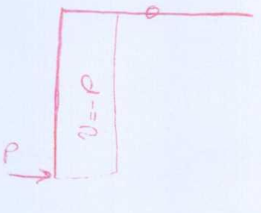

P/EA
δ_{Ax}
سازه مزدوج:
θ_A
δ_{Ay}

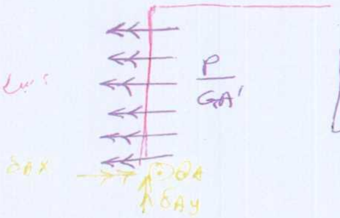
$\sum F_z=0 \rightarrow \boxed{\theta A = 0}$

$\sum M_x=0 \rightarrow \delta_{Ax} - \frac{P}{EA}\times 2L = 0 \rightarrow \boxed{\delta_{Ax} = \frac{2PL}{EA}}$

$\sum M_y = 0 \rightarrow \boxed{\delta_{Ay} = 0}$


سازه مزدوج
V/GA'

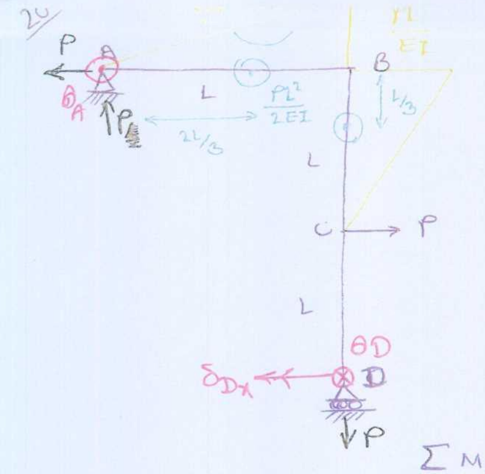



سازه مزدوج:
$\frac{P}{GA'}$
δ_{Ax}
θ_A
δ_{Ay}

$\delta_{Ay} = \theta_A = 0$

$\boxed{\delta_{Ax} = \frac{P}{GA'}L}$

مثال ۱)


P
A
θ_A
P_A
B
L
$\frac{PL^2}{2EI}$
$2L/3$
$L/3$
①
L
C
P
L
θD
δ_{Dx}
D
P
$\frac{PL}{EI}$

$\theta_D = ? \rightarrow$ اول θ_A

خمشی ها $\quad \sum F_z = 0 \rightarrow \theta_D$ ✓

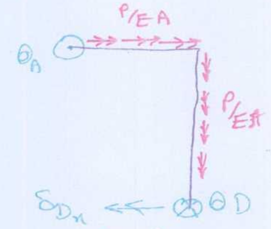
[illegible]: $\sum M_{Dy} = 0 \rightarrow L\theta_A + \frac{PL^2}{2EI} \cdot \frac{L}{3} = 0$

$$\rightarrow \boxed{\theta_A = \frac{-PL^2}{6EI}}$$

$$\theta_D = \frac{2PL^2}{2EI} - \frac{PL^2}{6EI} \rightarrow \boxed{\theta_D = \frac{5PL^2}{6EI}}$$

$$\sum M_{Ax} = 0 \rightarrow \frac{PL^2}{2EI} \cdot \frac{L}{3} + \delta_{Dx} - 2L\theta_D = 0$$

$$\rightarrow \frac{PL^3}{6EI} + \delta_{Dx} - \frac{5PL^3}{3EI} = 0 \rightarrow \boxed{\delta_{Dx} = \frac{3}{2}\frac{PL^3}{EI}} \rightarrow$$

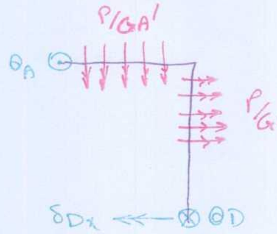

P/EA
θ_A
P/EA
δ_{Dx}
θD

بارگذاری محوری : $\quad \sum M_{Ax} = 0 \rightarrow \frac{PL}{EA} - \delta_{Dx} + 2L\theta_D = 0$ ✓

$$\sum M_{Ay} = 0 \rightarrow \frac{-PL}{EA} \times 2 + L\theta_D = 0 \rightarrow \boxed{\theta_D = \frac{2P}{EA}}$$

$$\rightarrow \boxed{\delta_{Dx} = \frac{5PL}{EA}}$$

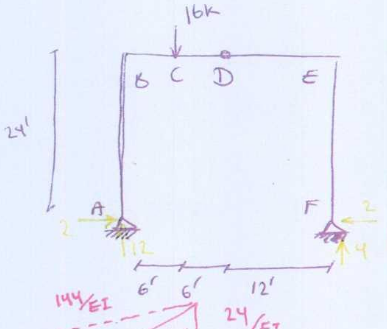
بارگذاری برشی : ✓


P/GA'
θ_A
P/GA'
δ_{Dx}
θD

$$\sum M_{Ay} = 0 \rightarrow \frac{-P}{GA} \times L + L\theta_D = 0 \rightarrow \boxed{\theta_D = \frac{P}{GA'}}$$

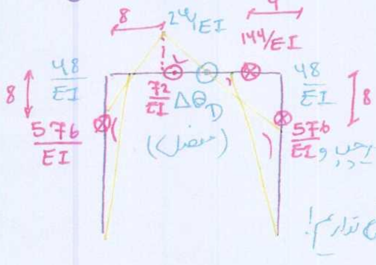
$$\sum M_{Ax} = 0 \rightarrow \frac{P}{GA'} + 2L \times \theta_D - \delta_{Dx} = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{\delta_{Dx} = \frac{3PL}{GA'}} \rightarrow$$


16k
B
C
D
E
24'
A
F
2
12
2
4
6'
6'
12'

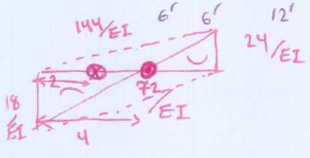
$I = 1000\ in^4 \quad E = 50000\ ksi$ $\quad$ تنها حالت خمشی حل کنید. ✓

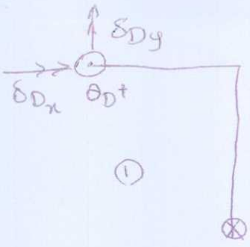
$\delta_{Dy} = ? \quad \delta_{Ex} = ? \quad \theta_A = ? \quad \theta_F = ?$


8
24/EI
4
144/EI
48/EI
8
72/EI
$\Delta\theta_D$
48/EI
8
576/EI
(مفصل)
576/EI

۱ـ رسم دیاگرام‌ها ✓

به خاطر اختلاف ضریب زاویه چپ و راست در D ← $\Delta\theta_D$ متمرکز داریم! ✓


144/EI
24/EI
2
72/EI
18/EI
4



δ_{Dy}
δ_{D_x}
θ_D+
①

اگر در B ببریم تیر دو معادل ۱

برای θ_A و θ_F ابتدا معادل نیروهای x و y حول نقطه D

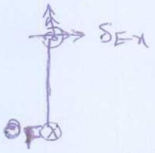
خلاصه می کنیم ← دو معادله و دو مجهول ← θ_A و θ_F ✓ θ_F

اصلاً: $\sum M_{AF} = 0 \rightarrow 2 \times 16 \times \frac{576}{EI} + 2 \times \frac{144}{EI} \times 24 - 2 \times \frac{72}{EI} \times 24 = 24 \Delta\theta_D$

$$\rightarrow \boxed{\Delta\theta_D = \frac{1056}{EI}} \rightarrow \sum M_{EF} = 0 \rightarrow \theta_A ✓$$

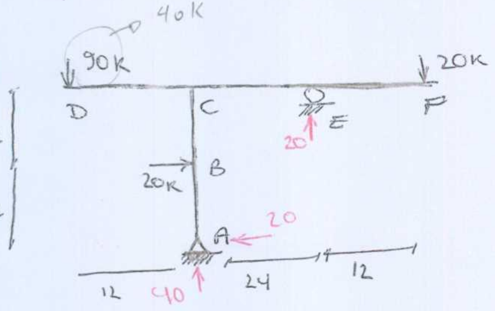
$\sum F_z = 0 \rightarrow \theta_F ✓$ یا $\sum M_{AB} = 0 \rightarrow \theta_F ✓$

$\rightarrow$ ① در: $\sum M_{Dx} = 0 \rightarrow \delta_{Dx} ✓$ و $\sum M_{Dy} = 0 \rightarrow \delta_{Dy} ✓$



δ_{Ex}
θ_F

$\sum M_{Ex} = 0 \rightarrow \delta_{Ex} ✓$

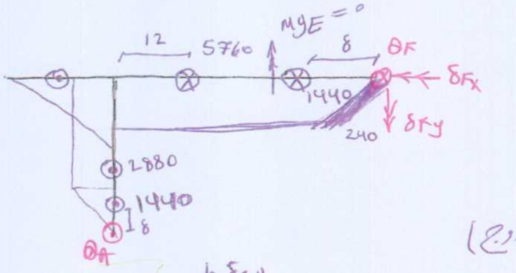


40K
90K
20K
D
C
E
F
20
12
12
B
20K
A
20
12
40
24
12

E = 29000 ksi $\quad A = 1 in^2$

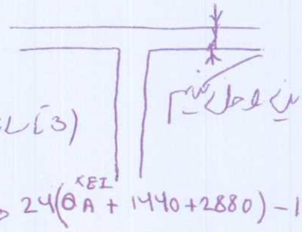
$I = 1440 in^4 \quad \delta_{Fx} \ \delta_{Fy} \ \delta_{Dy}$

$\delta_{xF} = ? \quad \delta_{yD} = ? \quad \delta_{yF} = ?$



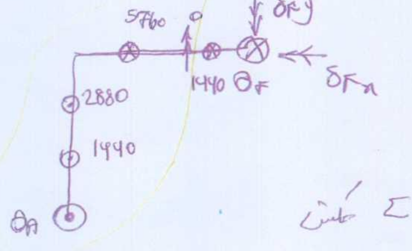
$M_{yE} = 0$
12
5760
8
θ_F
δ_{Fx}
1440
240
δ_{Fy}
2880
1440
8
θ_A

سازه مزدوج



می توانیم این را حل کنیم

(3 سازه مزدوج)



5760
0
δ_{Fy}
1440
θ_F
δ_{Fx}
2880
1440
θ_A

$\sum M_{Ey} = 0 \rightarrow 24(\overset{\times EI}{\theta_A} + 1440 + 2880) - 12 \times 5760 = 0$

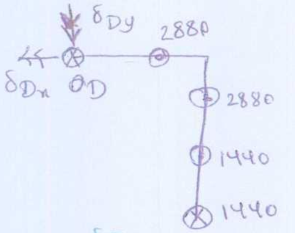
$$\rightarrow \boxed{\theta_A = -1440/EI}$$

خلاصه $\sum M_{F_y} = 0 \rightarrow \overset{EI_x}{\delta_{Fy}} + 36(1440 - 1440 - 2880 + 24 \times 5760$
$+ 8 \times 1440 = 0$

$$\rightarrow \delta F_y = \frac{-46080}{EI} = \boxed{-1.843\ in} \downarrow$$

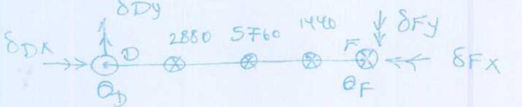
$$\sum M_{F_x} = 0 \rightarrow EI\,\delta F_x + 24 \times (-1)\,(1440) + 1440 \times 16 + 2880 \times 6 = 0$$

$$\rightarrow \delta F_x = \frac{-5760}{EI} = \boxed{-0.230\ in} \leftarrow$$



$$\sum M_{D_y} = 0 \rightarrow \delta D_y \cdot EI + 2880 \times 8 + 12(2880 + 1440 + 1440) = 0$$

$$\rightarrow \delta D_y = \frac{-57600}{EI} = \boxed{-2.304\ in} \downarrow$$



$\delta D_x = \delta F_x$ اگر از تغییر مکان محوری صرف نظر کنیم

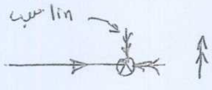
$$\sum M_{D_x} = 0 \rightarrow \delta D_x - \delta F_x = 0 \rightarrow \boxed{\delta D_x = \delta F_x} \checkmark$$

از یه نقطه شروع می کنیم به یه نقطه ی (انتهایی) دیگه می ریم دیگه کاری به بقیه سازه نداریم (یه شاخه طول

داریم!) ← ⊗ ← نمی خواهد!   عملاً گره ای تکیه گاه ها [illegible] سازه مزدوج

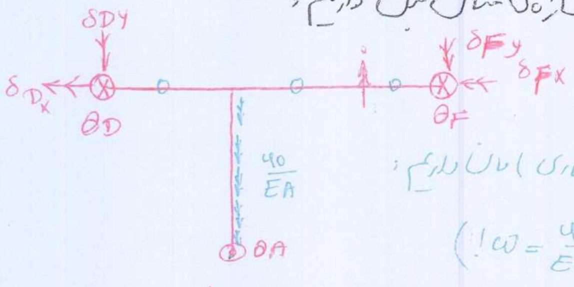
سازه مزدوج برای تغییر مکان محوری (و برشی و ...) هم مشکل هست!

در مثال قبل در حالتی که تکیه گاه E به مقدار 1in به طرف پایین نشست می کند؟



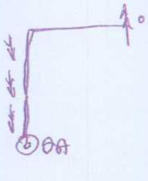
تنها کاری که می کنیم به جای $\delta_{Ey} = 0$ می گذاریم $\uparrow \frac{1}{12}\,ft = \delta_{Ey}$

* برای تغییر مکان های محوری المان ها در همان سازه ی مثال قبل داریم:

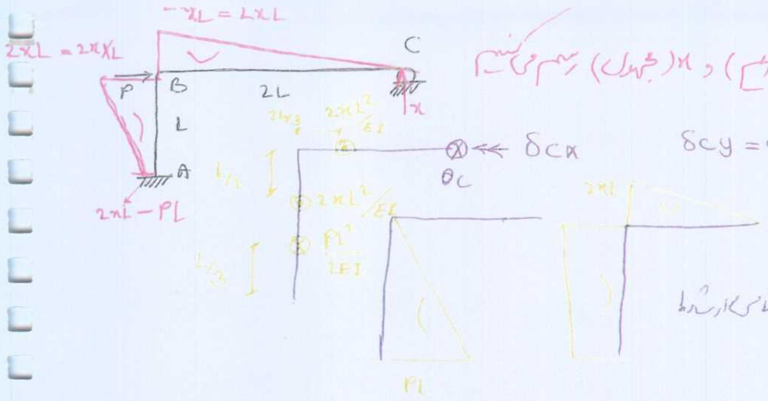


برای شبیه سازی بار محوری (فشاری) المان داریم:

(المان گسترده ای به میزان $\omega = \frac{40}{EA}$!)



$$\theta A \times 24 - \frac{40}{EA} \times 24 = 0 \rightarrow \boxed{\theta A = \frac{40}{EA}}$$



$-xL = L x L$
$2xL = 2x \times L$
C
P
B
2L
L
A
x
$2L/3$
$2xL^2/EI$
$L/2$
$2xL^2/EI$
$PL^2/2EI$
$L/3$
δ_{cx}
θ_c
$2xL - PL$
PL
2xL

دیاگرام ممان را برحسب P (دارم) و x (مجهول) رسم می‌کنیم

C: غلتک ← $\delta_{cy} = 0$

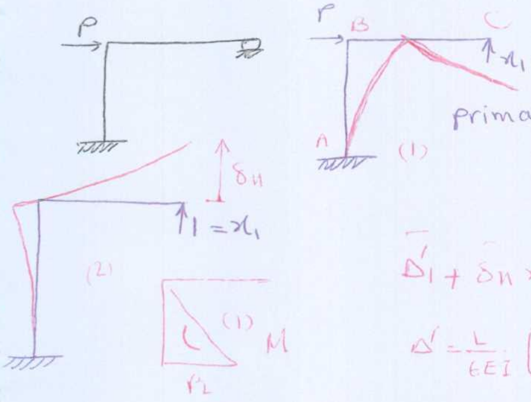
دیاگرام M دوبار می‌کشیم:

یه ابزار قوی برای کنکور کارشناسی ارشد

HOOKRAY!

$$\Sigma M_{cy} = 0 \rightarrow \frac{PL^2}{2EI} \times 2L - \frac{2xL^2}{EI} \times 2L - \frac{2xL^2}{EI} \times 4L/3 = 0 \rightarrow \boxed{x = \frac{3P}{20}} \checkmark$$

تغییر شکل‌های سازگار

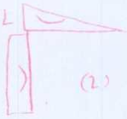


P
P
B
C
A
(1)
δ_H
$1 = x_1$
(2)
(1)
M
PL

$\uparrow x_1 = x = 0 \downarrow \delta x = \Delta'_1 = ?$

primary structure

این سازه معین



$$\Delta'_1 + \delta_H x_1 = 0 \rightarrow x_1 \checkmark$$

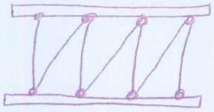
$$\Delta' = \frac{L}{6EI}\left(-2PL \times 2L - PL \times 2L\right) \Rightarrow \boxed{\Delta'_1 = \frac{-PL^3}{EI}}$$

$$\delta_H = L \times \frac{(2L)^2}{EI} + \frac{2L}{6EI}\left(2 \times (2L)^2\right) = \frac{40}{6}\frac{L^3}{EI}$$

$$\rightarrow \boxed{x_1 = \frac{3P}{20}} \checkmark$$

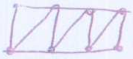
در دو حالت نیروهای مجهول را با اندازه غیرمطابق می‌نویسیم -

حل تمرین تحلیل سازه



خرپای عملی

درعمل چنین چیزی داریم



خرپای ایده‌آل

حداقل سه مولفه‌ی تکیه‌گاهی غیرهم‌رس برای تعادل خارجی خرپامان لازم داریم.

درجه‌ی نامعینی یک سازه

m = تعداد اعضا یا نیروی مجهول

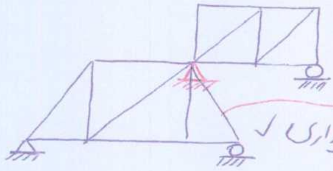
r = عکس العمل های تکیه‌گاهی

j = joint مفاصل (تعدادشان)

درجه نامعینی = $m + r - 2j$

بررسی پایداری

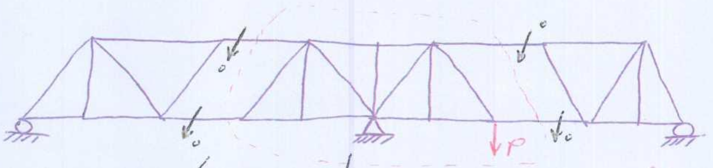
۱) بررسی چشمی



پایداری ✓

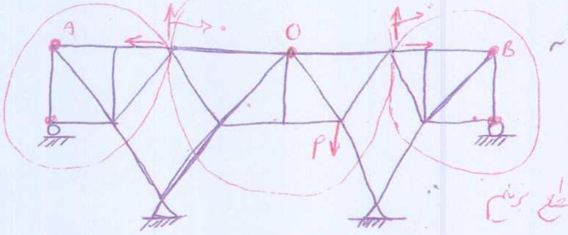
نقش تکیه‌گاه مفصلی را برای بالایی بازی می‌کند!

۲) اعمال بار روی سازه برای تعیین پایداری



ناپایدار ← کل سازه : ناپایدار

نسبت به هر بخش ممان می‌نویسیم



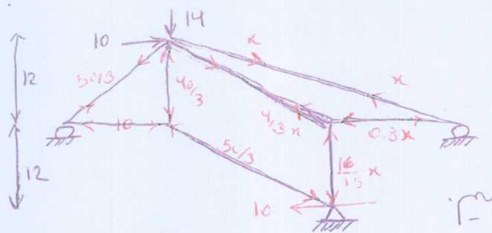
حالا باید بار را کجا بگذارم تا ببینم که پایداره یا نه؟ این سازه ناپایداره!

اگر حول این تکیه‌گاه‌های مفصلی مقطع بزنیم

و بعد حول A و B ممان بگیریم عکس العمل عمودی مفاصل = ۰ می‌شوند ← سازه ناپایداره

۳) روش بار صفر

بعداً معرفی خواهد شد (در کتاب دکتر کاوه توضیح داده شده است!)

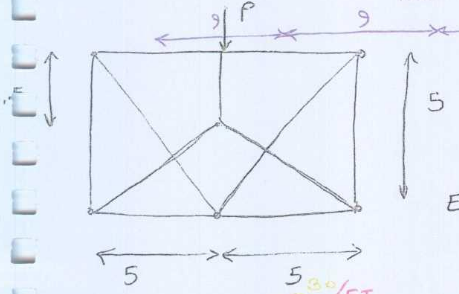

14
10
12
12
$5\sqrt{3}$
$4\sqrt{3}$
x
x
$4/3\,x$
0.3x
$5\sqrt{3}$
$\frac{16}{15}x$
10
10

مثال) (میانترم دو سال پیش حل اشتباهی)

یکی از اعضا را به دلخواه x می‌گیریم

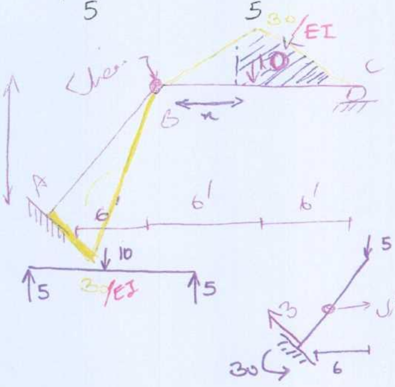
بعد توی گره‌های تکیه‌گاهی برایش تعادل می‌نویسیم.

$\boxed{x = 30}$ ✓ → نیروها به دست می‌آید



مثال) تمرین تحویلی

Email: andalib.reza @ yahoo / gmail . Com


30/EI
C
مفصل
B
x
A
6'
6'
6'
10
5
5
30/EI
5
3
6
30

مسئله‌ی امتحانی) جواب‌ها را با کل EI باشد!

از تغییر مکان محوری صرف نظر شود. تغییر مکان Max

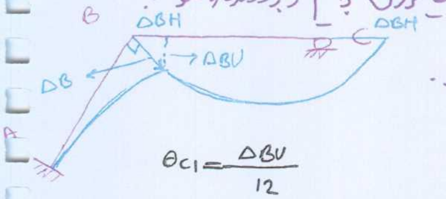
تغییر مکان Max تیر BC و محل آن از گره B را بیابید

از تغییر مکان های محوری صرف نظر نمی‌کنیم [illegible]

[illegible] تغییر مکان محوری EA [illegible]

EI [illegible] = [illegible]

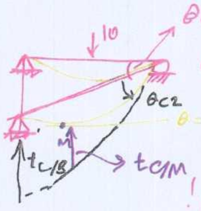
حالا باید شکل تغییر مکان این سازه را بکشیم. از جایی که شرایط مرزی برایم وجود دارد و معلوم‌اند!


B
ΔBH
ΔBH
C
ΔBV
ΔB
A

چون تغییر مکان محوری نداریم ← عمود بر عضو (مثل دوران) حرکت می‌کند.

$$\theta_{C1} = \frac{\Delta BV}{12}$$

$$\theta_{C2} = \frac{t_{C/B}}{12} \quad ?$$


10
θ_{C1}
θ_{C2}
$t_{C/B}$
$t_{C/M}$

نشست تکیه‌گاهی مان و تحلیلش

فرض: B و C نسبت به هم جابجایی ندارند! تغییر مکان محوری نداریم!

$$\theta_C = \theta_{C1} + \theta_{C2} = \frac{\Delta BV + t_{C/B}}{12}$$

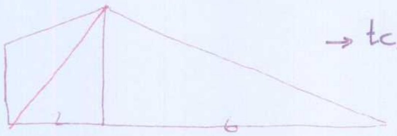
$$\theta_{M/C} = \theta_C - \cancel{\theta_M} = \theta_C$$

احتیاج داریم ΔBV و ΔBH را داشته باشیم. $\Delta B = t_{A/B} = \frac{30}{EI}\cdot\frac{10}{2}\cdot\frac{20}{3}$

$$\boxed{\Delta B = \frac{1000}{EI}} \longrightarrow \Delta BH = 0.8\,\Delta B = \frac{800}{EI}, \quad \Delta BV = 0.6\,\Delta B = \frac{600}{EI}$$

$$t_{C/B} = \frac{30}{EI} \times 6 \times 6 = \frac{1080}{EI} \qquad \theta_C = \frac{1080+600}{EI} \times \frac{1}{12} = \frac{140}{EI}$$

$\theta_{M/C} = \frac{30}{EI} \times 6 - \frac{5x^2}{2EI} \rightsquigarrow 180 - \frac{5}{2}x^2 = 140 \rightsquigarrow \underline{x=4}$ ، x<0 ← معنی ندارد پس



$\rightarrow t_{C/M} = \frac{413.3}{EI} \qquad \delta_M = \frac{140}{EI}\,8 - \frac{413.3}{EI} = \boxed{\frac{706.7}{EI}} \downarrow$

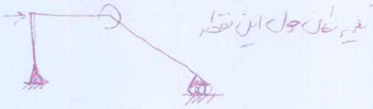
۱- اشکال [illegible] ۲- [illegible] می‌شود

[illegible]

۱- فرمول را درست بدست آورده‌ام. ۲- جواب را هم درست بیاورم (توضیح داده شده چرا شده)

در جامع نقطه جواب عددی را در هر مرحله حل! ما اول خواندن و نوشتن ضعیف هستیم. وقتی شما طراح هستید باید تا آخر طراحی را انجام دهید صورت مسئله، فرضیات، تئوری، فرمول‌ها، حل، محاسبات، چک‌های استاتیکی ← امضاء (مهندس) شما ← designer دومی چک می‌کند سومی approve می‌کند و امضاء می‌کند ← initial ← امضاء ← approved برای ساختن. عدد به عدد اضافه می‌کند. اگر تا اینجا این شیت را که می‌دارند اول کارهای دومی بررسی ← [illegible] جدی می‌شود calculation نقشه‌کش امضای کند Material Take off عملی می‌شود.

Material Take Off



دوشنبه : کار مجازی 2

شنبه : (2,3) Castigliano

دوشنبه : (2,5) خط تاثیر

ستون ها (فصل 3

تنش (خلاصه)

تئوری ساده (خمش + [illegible])