"بسمه تعالی"

حاشیه

«انتقال حرارت»

کتاب هولمن Heat transfer ← میان ترم ← جزوه و کتاب بند فصل ۱ تا ۳

← پایان ترم ← جزوه و کتاب باز همه فصل ۱ تا ۶

۳ پدیده انتقال حرارت داریم:

1. رسانش گرمایی Conduction
2. جابجایی (همرفت) Convection
3. تابش (تشعشع) Radiation

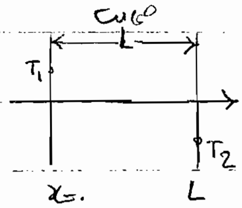
Conduction:

پدیده‌ای است که در جامدات ـ مایعات ـ گازها صورت می‌گیرد

اهمیت آن در جامدات است ولی در گازها و مایع هم اتفاق می‌افتد.

← هرگاه در ماده‌ای یک اختلاف دما وجود داشته باشد انرژی و گرما از طریق برخورد های مولکولی از نقطه گرم به نقطه سرد منتقل می‌شود

ضخامت



$T_1 > T_2$ $\quad$ $q\ [W]\ [J/s]$

$q \propto (T_1 - T_2)$

$q \propto A$ $\quad \Rightarrow q \propto \dfrac{A(T_1 - T_2)}{L}$

$q \propto \dfrac{1}{L}$ ← هرچه ضخامت ↑ ← انتقال حرارت کمتر

$$\Rightarrow q = k\,\frac{A(T_1 - T_2)}{L}$$

k ↓ Thermal Conductivity $[W/m^\circ C]$

k ضریب حرارت رسانایی ـ با جنس ماده

k تابعی از درجه حرارت است ← $k = f(T, \ldots)$

برای سادگی کار، از وابستگی k به دما صرف نظر می‌شه و مقدار متوسط دمای T_1 و T_2 را در نظر گرفته و مقدار k را از میانگین دما از جدول و نمودارها به دست می‌آوریم.

در جامدات و مایعات k به فشار بستگی ندارد.

ولی در گازها :

از 10mmHg به بالا ← وابستگی به فشار نامحسوس

از 10mmHg به پایین ← وابستگی به فشار بسیار محسوس

$k = f($ T , P و جهت اختلاف دما و مکان $)$

مواد را از جهت وابستگی به جهت اختلاف دما به دو 2 دسته تقسیم می‌شوند :

1. همسان‌گرا Isentropic

2. ناهمسان‌گرا Ani Isentropic

همسان‌گرا : استحکام در جهت اعمال نیرو یکسان است ← مثل برش افقی و عمودی کاغذ

ناهمسان‌گرا : استحکام در جهت اعمال نیرو متفاوت است ← مثل چوب ← در جهت الیاف راحت‌تر بریده می‌شه
در جهت عمود بر الیاف سخت‌تر بریده می‌شه

و در حالت اختلاف دما در اجسام ناهمسان‌گرا (در چوب) در جهت الیاف راحت‌تر از خلاف جهت الیاف است.
این گونه اجسام به جای یک حالت، 9 تا Conductivity دارند. البته در درس ما نیست.

□ مواد از جهت مکان :

1. همگن Homogeneous

2. ناهمگن Hetrogeneous

سنگ‌ها / چوب‌پنبه / ... جسم ناهمسانگرد ← k تابعی از x، y، z است ← k طی سه راستا تعریف می‌شود؟ ← اگر عمودی برش هم بزنیم، رفتار مولکولی و ترکیب با هر برش دیگر متفاوت است.

شیشه / آهن / مس / ... ← همگن ← k بستگی به x ندارد.

مساحت عمود بر جهت جریان

$$q = \frac{kA}{L}(T_1 - T_2)$$

فرمول زیر برای مختصات یک بعدی صدق می‌کند:

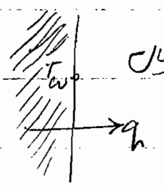
مثال ۱. مساحت سطح دیواره‌ی یک اتاق برابر $100 m^2$ دمای سطح داخلی 20° و دمای سطح بیرونی 0° است. ضخامت دیوار $40cm$ و ضریب رسانش آن $1 \frac{W}{m^\circ C}$ می‌باشد. مطلوب است میزان کل اتلاف گرما از این اتاق؟

اتلاف حرارتی ← $q = kA\frac{(T_1 - T_2)}{L} \Rightarrow q = 1 \times 100 \times \frac{(20-0)}{40\times 10^{-2}} = 5000\ W = 5\ kW$

در اینجا یک S.S است و زمان را وارد نمی‌کنیم.

همرفتی: Convection

هرگاه بین یک جسم و محیط اطراف آن اختلاف دما وجود داشته باشد انتقال حرارت از طریق جابجایی صورت می‌گیرد ← از سطح به سیال از طریق همرفتی



if $T_w > T_\infty$ or $T_\infty > T_w$ $\Rightarrow q \propto (T_w - T_\infty) \Rightarrow q = hA(T_w - T_\infty)$

$q \propto A$

q ∝ جنس سیال، سرعت سیال
نحوه قرارگرفتن سیال، شکل سیال

$q = hA(T_w - T_\infty)$ معادله سرمایش نیوتن

heat Transfer Coefficient

$[\frac{W}{m^\circ C}]$

h وابسته به جنس سیال (خواص فیزیکی k، μ، ρ، ...) سرعت سیال، نحوه قرارگیری و شکل سیال است.

نکته جالب : وقتی برعکس بدن سرد می شه باعث می شه هوای داخل مربع ساکن باشه یعنی ما را گرم می کنیم.

حرارت ← افقی رو به بالا h_1 ، افقی رو به پایین h_2 ← کمترین h ها در حالت افقی رو به پایین است خلاف طبیعت عمل می شه گرما درست طرف بره بالا ..

عمودی

پدیده همرفتی تقسیم می شود به :

Convection | Forced اجباری → فن، پمپ $u_\infty \neq 0$ → مثل کولر - رادیاتور (بیرون سیال ، اپتیمال)

Free - natural آزاد طبیعی → در سیال ساکن $u_\infty = 0$ → شوفاژ

phase change تغییر حالت | Boiling → h_{fg} (دیگ های بخار)

Condensation

در Forced و Free فرض براین است که سیال بر اثر انتقال حرارت تغییر فاز نمی دهد ولی در ۳ (... phase) بر اثر انتقال حرارت تغییر فاز داریم .

← وقتی کتری را می جوشانیم آب از 20° به 100° می رسد تا اینجا Free convection ($c_p \Delta T$) داریم ولی بعد از آن شروع تغییر پدیده phase con... رخ می دهد و h_{fg} داریم .

مثال ۴. اتلاف گرما یک اتاق مثل را طبق تعدادی پره شوفاژ با مشخصات زیر جبران می کنیم . تعداد پره ها را بیابید ؟

دمای هوای اتاق $22^\circ C$ / دمای سطح پره شوفاژ $72^\circ C$ / ضریب انتقال حرارت جابجایی از سطح پره به هوا $10\ W/m^2 C$

ارتفاع هر پره $60\ cm$ / عرض هر پره $20\ cm$

$$q = hA(T_w - T_\infty)$$

$$A = \frac{q}{h(T_w - T_\infty)} = \frac{5000}{10(\underbrace{72-22}_{50})} = \frac{5000}{500} = 10\ m^2$$

$$A = \underbrace{L}_{\text{ارتفاع}} \cdot \underbrace{w}_{\text{عرض}} \cdot \underbrace{N}_{\text{تعداد}} \cdot \underbrace{2}_{\text{پره دو طرف دارد}} \longrightarrow N = \frac{A}{L \cdot w \cdot 2} = \frac{10}{2(0.6 \times 0.2)} = 41.6 \simeq 42$$

جلسه ۲

انتقال حرارت تابشی : Radiation Heat transfer

تفاوت ها :

۱. برای انتقال Q نیازمند ΔT هستیم ← در انتقال حرارت تشعشعی برای طیف های بالاتر از 0 K داریم

← کلیه اجسام در محیط های با دمای بیشتر از 0 K انرژی را به صورت امواج الکترومغناطیسی از خود ساطع می کنند.

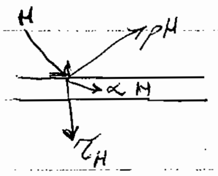
میزان این تشعشع از رابطه زیر بدست می آید:

$q_b = \sigma A T^4_{(K)}$ stefan_Boltzman

b ↳ b = black body   if $T = 0\ K \rightarrow q_b = 0$

$\sigma = 5.667 \times 10^{-8}\ W/m^2K^4$

جسمی که از نظر تشعشعی ایده آل است یعنی بر اساس فرمول فوق تشعشع می کند از طرفی هر تابشی که به آن برسد را کاملاً جذب می کند. = black body



یک تابش به جسم سه حالت برایش روی می دهد:

۱. بازتاب یا انعکاس ← ρ ضریب انعکاس

۲. جذب ← α ضریب جذب

۳. عبور ← τ ضریب عبور

$\rho + \alpha + \tau = 1$

جسم سیاه جسمی است که $\alpha = 1$ باشد.

e.m.r تابش الکترومغناطیسی:

هر جسمی که دمای آن از 0 K بیشتر باشد انرژی را به صورت امواج الکترومغناطیسی گسیل می کند.

$c = \lambda f$

c در یک محیط مشخص ثابت است. پس اگر $\lambda \uparrow$ ، $f \downarrow$

طیف

e.m.r spectrum

Gray X ray — Thermal Radiation — Radio Ray

$\lambda = 10^{-12}\,m$ — 10^{-7} — 10^{-4} — $10^{3}\,m$

پس انسان در طول موج Thermal Radiation تشعشع می‌کند.

اگر جسم سیاه یا ایده‌آل نباشد. $\alpha \neq$ باید پارامتر ε را تعریف کرد.

ε ضریب نشر Emissivity $= \dfrac{q_{real}}{q_{Ideal}}$

q_{Ideal} ← معادله استفان بولتزمن

$q = \sigma \varepsilon A T^4$

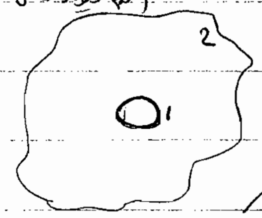
ضریب ε را چند ردیف یک مولکول مشخص می‌کند.

تبادل خالص تابش: Net Radiation Exchange

اگر دو جسم با هم در تماس باشند مقداری انرژی از دست می‌دهد و مقداری هم به دست آورد. اختلاف این را تبادل خالص تابش گویند.

جسم احاطه شده (به طور کامل) توسط دیواره‌ی سیاه یک محفظه

فرض: همه دیواره‌ها سیاه باشند (ایده‌آل)



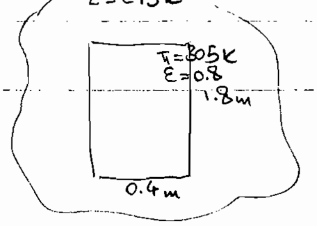
if $(T_1 > T_2)$

$$q_{1-2_{net}} = \sigma A_1 \varepsilon_1 (T_1^4 - T_2^4)$$ ← ساده‌ترین معادله

اگر sys بزرگ باشد معادله فوق قابل استفاده نیست.

$q_{1-2_{net}}$: مقدار خالصی که جسم ۱ از دست می‌دهد.

مثال ۳: فرض کنیم سطح بدن انسان در دمای 305K باشد و ضریب نشر آن 0.8 باشد. حال این جسم در اتاق بزرگی با دمای دیواره‌ی برابر 293K میزان خالص تبادل تابش را به دست آورید. (سطح بدن را به عنوان استوانه با ارتفاع 180cm و قطر 40 cm در نظر بگیرید.)



$$q_{1-2_{net}} = \sigma A_1 \varepsilon_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

$$q_{1-2_{net}} = 5.667 \times 10^{-8} \times 0.8 \times A (305^4 - 293^4)$$

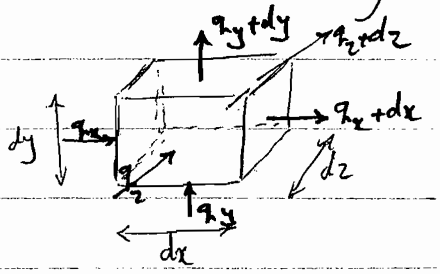
$$A = \pi D H + \frac{\pi}{4} D^2 \times 2$$

General Conduction Equation:

~~رابطه Conduction~~ در داخل یک جامد مثلاً پدیده رسانش حل می‌کنیم.

۳ رابطه عمومی Conduction داریم ۱. کارتزین ۲. استوانه‌ای ۳. کروی

برای حل مسئله در مختصات کارتزین یک المان کوچک در نظر می‌گیریم به ابعاد dx، dy، dz



می‌توانیم ۱. تولید و مصرف انرژی داشته باشیم

۲. در هر سه بعد انتقال حرارت داشته باشیم

۳. مسئله uns-s باشد

In - out + prod = Acc

ورودی خروجی تولید تجمع

تولید انرژی بر واحد حجم $\frac{w}{m^3}$

$$(q_x+q_y+q_z)-(q_{x+dx}+q_{y+dy}+q_{z+dz})+\dot{q}\,dx\,dy\,dz=\underbrace{\rho\,dx\,dy\,dz}_{m\ \text{جرم}}\,\underset{\text{گرمای ویژه}}{c}\,\frac{\partial T}{\partial t} \quad *$$

A_n مساحت عمود بر جهت n

$$q_n=-kA_n\frac{\partial T}{\partial n}$$

فرم جزئی یا دیفرانسیلی معادله فوریه:

n می‌تواند x، y، z باشد

ورودی + تغییرات

$$q_{n+dn}=q_n+\frac{\partial q_n}{\partial n}dn$$

$$q_n-q_{n+dn}=\frac{-\partial q_n}{\partial n}dn=\frac{\partial}{\partial n}\left(kA_n\frac{\partial T}{\partial n}\right)dn$$

$$*\rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(k\,dy\,dz\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\,dx\,dz\frac{\partial T}{\partial y}\right)dy+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\,dx\,dy\frac{\partial T}{\partial z}\right)dz+\dot{q}\,dx\,dy\,dz=$$
$$\rho\,dx\,dy\,dz\,c\frac{\partial T}{\partial t}$$

معادله کلی رسانش در مختصات کارتزین:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}=\rho c\frac{\partial T}{\partial t}$$

در معادله هدایت فرض می‌کنیم $k=cte$ که:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\underbrace{\frac{\dot{q}}{k}}_{\text{تولید}}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

α ضریب نفوذ حرارتی (گرمایی)

$$\alpha=\frac{k}{\rho c}=\text{Thermal Diffusivity}\ \left(\frac{m^2}{s}\right)$$

← α در معادله‌هایی وجود دارد که حالت ناپایا باشد (SS) باشد. و این ضریب فقط برای شرایط ناپایا کاربرد دارد.

هرچه α↑ ← توان نفوذ و گردش گرما آن جسم ↑ مثل آهن و چوب که $\alpha_{\text{چوب}} < \alpha_{Fe}$

الف ← مختصات کروی و استوانه‌ای در کتاب نوشته شده است اگر می‌شه نشان کن!!

ساده‌ترین حالت:

تولید انرژی نداریم و تنها یک جهت انتقال حرارت داریم:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=0$$
$$T=f(x)=?$$

اگر مسئله دوبعدی بود ← ۴ تا شرط مرزی می‌خواهیم.

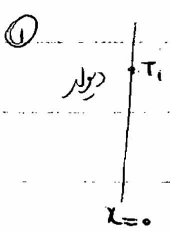
" " ۳ بعدی بود ← ۶ تا شرط مرزی می‌خواهیم.

شرایط مرزی:

Boundary Conditions + Initial Values

انواع شرایط مرزی که کمک انتقال است:

①

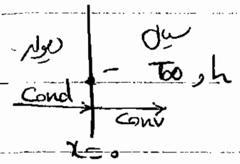


۱- شرط مرزی دمای سطح معلوم

$x=0 \rightarrow T=T_1$

← در واقعیت ما دمای دیوار را نداریم بلکه دمای سیال اطراف داریم.

②



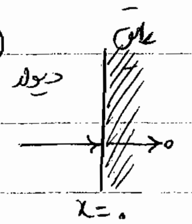
انرژی که به مرز می‌رسد همان انرژی به سیال وارد می‌شه (یک S.S است)

ولی حتی اگر un-S.S هم باشه چون مرز نازک است برقرار است:

$$\Rightarrow -k\frac{\partial T}{\partial x} = h(T-T_\infty)$$

جابجایی = رسانش

③



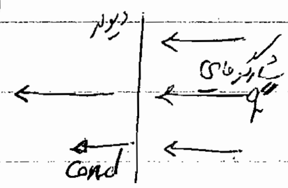
عایق ایده‌آل یعنی کاهش انتقال حرارت (مادر روابط ما)

عایق بودن یعنی $q=0$

هرگاه در مسئله از عایق شده استفاده شد یعنی گرادیان دما = صفر

$q=0 \qquad \frac{\partial T}{\partial x}=0$

④



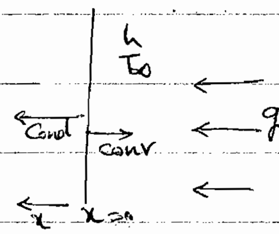
دیواری که در معرض تابش قرار گرفته و انرژی از طریق رسانش به دیوار منتقل می‌شود:

در $x=0$:

$$q''=\frac{q}{A} \qquad q''=-k\frac{dT}{dx}$$

$\left[\frac{W}{m^2}\right]$

⑤



دیوار در معرض یک شار حرارتی و سیال:

فرض تمام q'' در سطح جذب شود q''

$$\therefore\ q''A-\left(-kA\frac{dT}{dx}\right)-hA(T-T_\infty)=0 \rightarrow$$ چون تولید انرژی نداریم

حالت اول حالت خاصی از ② است اگر $h\to\infty$ برود چون طرفین $q=hA(T-T_\infty)$ پس

نتیجه می‌شود: $T=T_\infty$

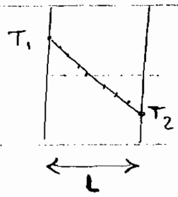
شرط اولیه: $T(\text{Any place}, t=0) = T_i$

در تمام نقاط در لحظه صفر جسم دارای دمای اولیه T است.

حل مسئله

مثال: دیواری به ضخامت L که یک طرف دیوار در دمای T_1 و سمت دیگر در دمای T_2، رابطه توزیع دما را برای هر یک از حالت زیر به دست آورید:

الف) k ثابت است   ب) k با تغییرات خطی نسبت به دما



فرض: دیوار را یک بعدی در نظر بگیریم

تولید یا مصرف انرژی نداریم. حالت SS است

الف) $\frac{d^2T}{dx^2}=0 \longrightarrow$ if: $k=cte$

یا $\frac{dT}{dx}=C_1 \longrightarrow T=C_1x+C_2$

شرط: $x=0 \longrightarrow T=T_1 \Longrightarrow C_2=T_1$

$x=L \longrightarrow T=T_2 \Longrightarrow C_1=\frac{T_2-T_1}{L}$

$\Rightarrow T=\frac{T_2-T_1}{L}x+T_1 \longrightarrow \frac{T-T_1}{T_2-T_1}=\frac{x}{L}$ نمودار توزیع دما به صورت یک خط

ب) if $k=k_0(1+\alpha T)$ می‌تواند $\alpha=+$ یا $\alpha=-$ باشد.

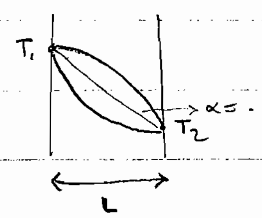
رابطه k متغیر: $\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right)=0 \longrightarrow \frac{d}{dx}\left(k_0(1+\alpha T)\frac{dT}{dx}\right)=0$

$\longrightarrow k_0(1+\alpha T)\frac{dT}{dx}=C_1 \longrightarrow k_0\left(T+\frac{1}{2}\alpha T^2\right)=C_1x+C_2$

in $x=0 \longrightarrow T=T_1$ $C_2=k_0\left(T_1+\frac{1}{2}\alpha T_1^2\right)$

$x=L \longrightarrow T=T_2$ $k_0\left(T_2+\frac{1}{2}\alpha T_2^2\right)=C_1L+k_0\left(T_1+\frac{1}{2}\alpha T_1^2\right)$

$C_1=\frac{1}{L}k_0\left[\left(T_2+\frac{1}{2}\alpha T_2^2\right)-\left(T_1+\frac{1}{2}\alpha T_1^2\right)\right]$



$\alpha=0 \longrightarrow k=cte$

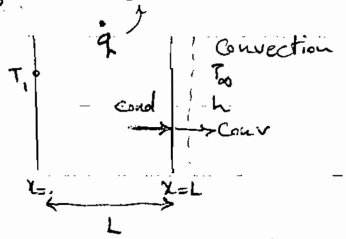
بسته به $\alpha=\pm$ منحنی آن بالا / پایین می‌گردد

(فرض‌های مسئله)

← تا ساده‌ترین مسئله ممکن (ساده‌ترین رابطه k با دما) خطی بگیریم، با این وجود جواب، جواب سهموی‌ای است.
به همین خاطر در اغلب مسئله‌های مهندسی از وابستگی k به دما صرف نظر کرده و فرض بر اینکه خطی است نمی‌گذاریم.

مثال ۲: دیواری به ضخامت L که درون آن انرژی $\dot q$ داخلی به میزان $\dot q$ آزاد می‌گردد. یک طرف دیوار به دمای T_1 و سمت دیگر آن در معرض محیطی به دمای T_∞ و ضریب انتقال حرارت جابجایی h می‌باشد. مطلوب است رابطه توزیع دما در این دیوار؟

از طریق وصل شدن به یک تولید انرژی داخلی داریم



$T = f(x) = ?$

(معادله حاکم) S.S

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot q}{k} = 0$$

in $x=0 \longrightarrow T = T_1$

$$x = L \longrightarrow -k\frac{dT}{dx} = h(T - T_\infty)$$

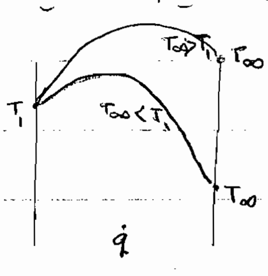
$$\longrightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot q x}{k} + C_1 \longrightarrow T = -\frac{\dot q x^2}{2k} + C_1 x + C_2$$

B.C.1 $\quad C_2 = T_1$

B.C.2 $\quad -k\left[-\frac{\dot q L}{k} + C_1\right] = h\left[-\frac{\dot q L^2}{2k} + C_1 L + T_1 - T_\infty\right]$

$$\rightarrow -\frac{\dot q L}{k} + C_1 = \frac{h}{k}\left(\frac{\dot q L^2}{2k}\right) - \frac{h}{k}C_1 L - (T_1 - T_\infty)\frac{h}{k} \longrightarrow C_1 : \checkmark$$

چون توزیع دما درجه دو است پس همانند شکل منحنی آن برمی‌گردد البته بستگی به اینکه $T_1 > T_\infty$ یا $T_\infty > T_1$ نیز دارد.

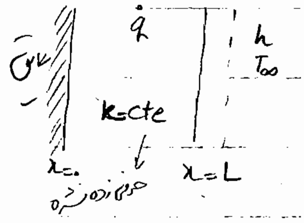


T_{max} نقطه $\longrightarrow x = \frac{C_1 k}{\dot q}$

نکته: در شکلی که گرادیان دما داریم یعنی $x=0$ و $x=L$، اتلاف حرارت داریم.
جمع کل اتلاف حرارت در $x=0$ و $x=L$ باید برابر $\dot q$ باشد زیرا حالت S-S است.

← جمع جبری گرادیان دما باید برابر حرارت تولید داخل دیوار باشد.

مثال ۳. دیواری به ضخامت L است با تولید انرژی داخلی به میزان $\dot{q}$. یک طرف دیوار کاملاً عایق بوده و سمت دیگر در معرض هوا با دمای T_∞ و ضریب انتقال حرارت جابجایی h. توزیع دمای این دیوار را به دست آورده، موازنه انرژی را بررسی کنید.



$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{\dot{q}}{k}=0$$

in $x=0$ $\quad \frac{dT}{dx}=0$

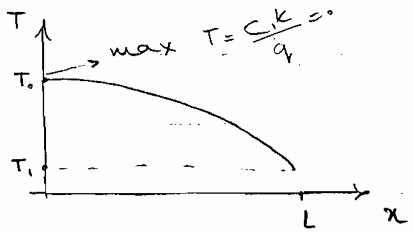
$x=L \quad -k\frac{dT}{dx}=h(T-T_\infty)$

$$\frac{dT}{dx}=-\frac{\dot{q}x}{k}+C_1 \longrightarrow BC.1 \Rightarrow \boxed{C_1=0}$$

$$\rightarrow T=\frac{-\dot{q}x^2}{2k}+C_2 \qquad BC.2 \longrightarrow -k\left(\frac{-\dot{q}L}{k}\right)=h\left(\frac{-\dot{q}L^2}{2k}+C_2-T_\infty\right)$$

$$\rightarrow \boxed{C_2=\frac{\dot{q}L}{h}+\frac{\dot{q}L^2}{2k}+T_\infty}$$

$$\rightarrow T=\frac{-\dot{q}x^2}{2k}+\frac{\dot{q}L}{h}+\frac{\dot{q}L^2}{2k}+T_\infty \Longrightarrow T=\frac{\dot{q}L^2}{2k}\left(1-\frac{x^2}{L^2}\right)+\frac{\dot{q}L}{h}+T_\infty$$



$$x=0 \longrightarrow T_0=\frac{\dot{q}L^2}{2k}+\frac{\dot{q}L}{h}+T_\infty$$

$$x=L \longrightarrow T_L=\frac{\dot{q}L}{h}+T_\infty$$

میزان حرارتی که دیوار را ترک می‌کند:

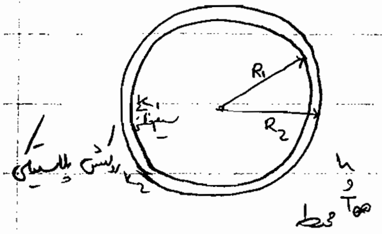
سمت چپ $q=0$

سمت راست $q=-kA\frac{dT}{dx}\Big|_{x=L}=-kA\left[\frac{-\dot{q}L}{k}+\cancel{C_1}\right]=\dot{q}AL$

حجم دیوار — انرژی تولید شده به ازای واحد حجم

$\Leftarrow$ موازنه انرژی برقرار شد.

مثال: سیم دنتیت به شعاع r_1 دارای غلاف پلاستیکی با ضخامت δ. ضرایب رسانش سیم و پلاستیک ثابت و به ترتیب برابر K_1 و K_2 می‌باشد. درون سیم انرژی داخلی به میزان $\dot{q}$ تولید می‌گردد. سطح غلاف (سطح پوشش) در معرض هوا با دمای T_∞ و ضریب انتقال حرارت جابجایی h می‌باشد. مطلوب است رابطه‌ای برای دما در مرز مشترک سیم و پوشش P



$$R_1 + \delta = R_2$$

- تمام سیم‌ها که برق با عبور جریان برق در داخلشان تولید انرژی داخلی دارند و سپس این انرژی نباید باعث ذوب شدن سیم یا پوشش گردد.
- سیم مختصات استوانه‌ای است.
- سیم از نظر انتقال حرارت یک بعدی است:

۱. سیم بلند و سطح مقطع در همه جا تفاوت ندارد ← تغییرات دما در جهت z نداریم.

۲. سیم در معرض هوا با دمای T_∞ است ← تغییرات دما در جهت θ نداریم.

۳. سیم تولید انرژی می‌کند پس انتظار داریم در مرکز دمای بیشتری داشته باشد و با افزایش r دما کم شود.

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

دو تا مسئله دو محیط داریم:

۱. سیم ۲. پوشش

wire : $\frac{d^2T_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT_1}{dr} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \longrightarrow$ در ناحیه T_1، تولید انرژی داخلی داریم.

plastic : $\frac{d^2T_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT_2}{dr} = 0 \longrightarrow$ در ناحیه T_2، تولید " " نداریم.

- چهار شرط مرزی داریم، برای هر معادله دو تا:

in $r=0 \rightarrow T = T_{max} \quad \frac{dT_1}{dr} = 0$ ✓ متقارن است ← در محور تقارن گرادیان صفر است.

$r = R_1 \longrightarrow T_1 = T_2 \longrightarrow$ پیوستگی دما

$r = R_1 \longrightarrow -k_1\frac{dT_1}{dr} = -k_2\frac{dT_2}{dr} \longrightarrow$ رسانش‌ها با هم برابر است

$r = R_2 \longrightarrow -k_2\frac{dT_2}{dr} = h(T_2 - T_\infty)$

حل عمومی: $\frac{d^2T_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT_1}{dr} + \frac{\dot{q}}{k_1} = 0 \xrightarrow{\times r} r\frac{d^2T_1}{dr^2} + \frac{dT_1}{dr} = -\frac{\dot{q}r}{k_1}$

$$\rightarrow \frac{d}{dr}\left(r\frac{dT_1}{dr}\right) = \frac{-\dot{q}r}{k_1} \rightarrow r\frac{dT_1}{dr} = \frac{-\dot{q}r^2}{2k_1} + C_1 \rightarrow \frac{dT_1}{dr} = \frac{-\dot{q}r}{2k_1} + \frac{C_1}{r}$$

$$\rightarrow T_1 = \frac{-\dot{q}r^2}{4k_1} + C_1 \ln r + C_2$$

K_1 با حالت $T_1 = -\dfrac{\dot{q}r^2}{4k_1} + C_1 \ln r_1 + C_2$: سیم فلزی

روکش عایق : $\dfrac{d^2T}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dT_2}{dr} = 0 \rightarrow \dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dT_2}{dr}\right) = 0 \rightarrow r\dfrac{dT_2}{dr} = D_1 \rightarrow \dfrac{dT_2}{dr} = \dfrac{D_1}{r}$

$T_2 = D_1 \ln r + D_2$ روکش

$B.C.1 \Rightarrow C_1 = 0$

$B.C.2 \xRightarrow{T_1=T_2} -\dfrac{\dot{q}R_1^2}{4k_1} + C_1 \ln R_1 + C_2 = D_1 \ln R_2 + D_2$

$B.C.3 \Longrightarrow -k_1\left(-\dfrac{\dot{q}R_1}{2k_1}\right) = -k_2\dfrac{D_1}{R_1} \longrightarrow D_1 = \dfrac{-\dot{q}R_1^2}{2k_1}$

$B.C.4 \Longrightarrow -k_2\dfrac{D_1}{R_2} = h\left[D_1 \ln R_2 + D_2 - T_\infty\right]$

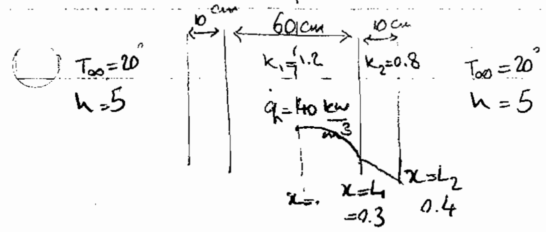
از طریق حل BC.2 و BC.4 ، C_2 و D_2 به دست می‌آید.

$T_1 = T_2 \Big|_{r=R_1}$: مرز سیم و روکش $= -\dfrac{\dot{q}R_1^2}{4k_1} + C_2$

مثلاً در مسئله می‌گوید حداکثر دمای قابل تحمل سیم 60° است پس از این طریق $\dot{q}$ به دست می‌آید که حالا $\dot{q}$ می‌تواند V_{max} ولتاژ و از V_{max} ، I_{max} (شدت جریان عبوری از سیم) را به دست آوریم.

C_2 به مفهوم فیزیکی اش دما در مرکز سیم است.

تمرین (امتحان) : دیوار بتنی به ضخامت 60 cm بین دو قالب چوبی هر یک به ضخامت 10 cm ریخته می‌شود. سطح بیرونی قالب چوبی در معرض محیطی با دمای 20° و ضریب انتقال حرارت جابجایی 5 $\frac{W}{m^2 °C}$ است. ضریب رسانش بتن 1.2 $\frac{W}{m °C}$ و ضریب رسانش چوب 0.8 می‌باشد. در اثر واکنش شیمیایی همراه با سفت شدن بتن 40 $\frac{kW}{m^3}$ انرژی آزاد می‌شود. دما در مرکز این دیوار بتنی را با فرض پایا بودن مسئله محاسبه کنید.



واکنش شیمیایی که باعث سفت شدن بتن می‌شود گرمازا است.

از مرکز شروع می‌شه تا مرز بتن و چوب و از چوب به بیرون حرارت وارد هوا

مسئله دو ناحیه است پس می‌توان برای آن محور تقارن تعریف کرد.

سیال: $\dfrac{d^2T_1}{dx^2} + \dfrac{\dot q}{k_1} = 0$

چوب: $\dfrac{d^2T_2}{dx^2} = 0$

4 شرط مرزی باید بنویسیم.

خواسته مسئله: بدست آوردن توزیع دما درون دیوار و قالب چوبی.

مقاومت گرمایی: Thermal Resistance

رابطه زیر را داشتیم:

جریان حرارت $\overset{I}{q} = kA\,\dfrac{\overset{V}{\Delta T}}{L}$

جریان برق $I = \dfrac{V}{R}$ ، R: مقاومت الکتریکی

که می‌بینیم که می‌توانیم روابط را شبیه سازی کنیم با جریان الکتریکی:

$\Longrightarrow R_{Cond} = \dfrac{L}{kA}$ مقاومت رسانش گرمایی

در سیالات اختلاف فشار (V) عامل حرکت سیال (I) می‌شود، شبیه سازی: اختلاف فشار $= V$

$R =$ حرکت سیال

هرچه $k\uparrow$ ← مقاومت در انتقال حرارت $\downarrow$

هرچه $A\uparrow$ ← $R_{Cond}\downarrow$

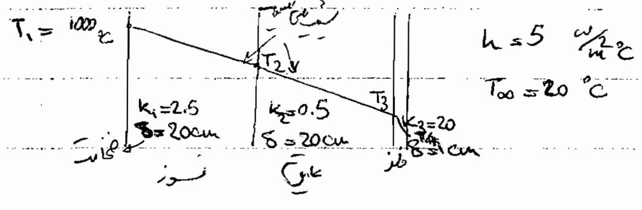
هرچه $L\uparrow$ ← $R_{Cond}\uparrow$

$\overset{I}{q} = hA\,\overset{V}{\Delta T} \longrightarrow R_{Conv} = \dfrac{1}{hA}$

هرچه $h\uparrow$ ← $R_{Conv}\downarrow$

کمک این مفهوم مسئله را با استفاده از روابط فوق حل کرد.

مثال: دیوار کوره از ۳ لایه‌ی آجر نسوز و عایق و پوسته‌ی فلزی ساخته شده است. سطح بیرونی دیوار در معرض هوا قرار دارد. با توجه به شکل نشان داده شده دمای مجهول و شار حرارتی را برای واحد سطح بدست آورید.



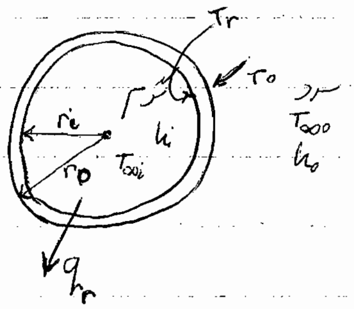
1000 — R_1 — R_2 — R_3 — R_4 — 20

$R_1 = \frac{0.2}{2.5\times 1}$ برای واحد سطح , $R_2 = \frac{0.2}{0.5}$, $R_3 = \frac{0.01}{20}$, $R_4 = \frac{1}{5}$

$$\frac{q}{A} = \frac{1000-20}{\sum R} \quad W/m^2$$

$$\frac{q}{A} = \frac{1000-T_2}{R_1} \quad , \quad \frac{q}{A} = \frac{T_2-T_3}{R_2} \quad , \quad \frac{q}{A} = \frac{T_3-T_4}{R_3}$$

جلسه ۴



تنها در جهت شعاعی استوانه حرارت داریم.

قانون فوریه $q_r = -kA_r \frac{dT}{dr}$, $A_r = 2\pi r L$ $\rightarrow q_r = -2\pi k r L \frac{dT}{dr}$

فرض $k = cte$

$$\rightarrow \int_{r_i}^{r_o} \frac{dr}{r} = -\frac{2\pi k L}{q} \int_{T_i}^{T_o} dT$$

شعاع خارجی را به طور تقریبی سطح خارجی لایه‌ی دوم در نظر می‌گیریم

T_o سطح دمای آجرین ردیف بیرونی که فلز

T_i سطح دمای سیال

$q = cte$, steady state

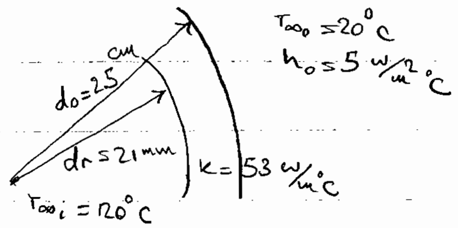
$$\rightarrow q = 2\pi k L \frac{T_i - T_o}{\ln \frac{r_o}{r_i}}$$

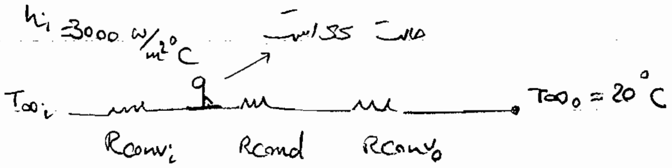
شبیه سازی: $I = \frac{V}{R} \longrightarrow R_{cond} = \frac{\ln\frac{d_o}{d_i}}{2\pi K L}$ حفظ شود مقاومت رسانشی در یک پوسته‌ی استوانه‌ای

$$R_{conv,i} = \frac{1}{h_i A_i} = \frac{1}{h_i 2\pi r_i L} = \frac{1}{\pi h_i d_i L}$$

$$R_{conv,o} = \frac{1}{\pi h_o d_o L}$$

مثال: بخار آب اشباع با دمای $120^\circ C$ و ضریب انتقال حرارت جابجایی $3000\ \frac{W}{m^2 {}^\circ C}$ درون لوله‌ای آهنی ($k = 53\ \frac{W}{m {}^\circ C}$) به قطر داخلی 21 mm و خارجی 25 mm جریان دارد. لوله در معرض هوای محیط با دمای $20^\circ C$ و ضریب انتقال حرارت جابجایی $5\ \frac{W}{m^2 {}^\circ C}$ است. مطلوب است میزان اتلاف گرما از این لوله در واحد طول. اگر عایقی از پشم شیشه ($k = 0.04\ \frac{W}{m {}^\circ C}$) با ضخامت 1 inch (2.5 cm) بر روی لوله نصب کنیم میزان کاهش اتلاف حرارت را به دست آورید.





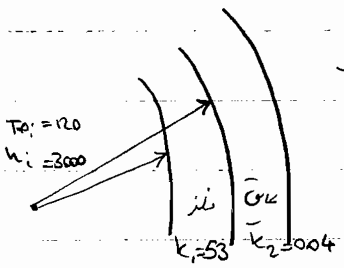
برای واحد طول خواسته شده $L = 1$

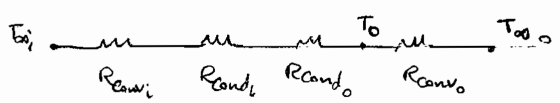
$$q = \frac{120 - 20}{\frac{1}{\pi \times 3000 \times 21 \times 10^{-3}} + \frac{\ln\frac{25\ mm}{21\ mm}}{2\pi \times 53} + \frac{1}{\pi \times 5 \times 25 \times 10^{-3}}} = \quad W/m$$

← بدون نیاز به داشتن دمای سطح داخلی لوله حل کردیم.

← بین تمام مقاومت‌های فوق مقاومت R_{conv_o} حدود 600 برابر از R_{conv_i} بزرگتر است و مقدار

□ حالا عایق می‌زنیم:





اتلاف با عایق فرض شده :

$$q = \frac{\pi(120-20)}{\frac{1}{3000\times 21\times10^{-3}} + \frac{\ln\frac{25}{21}}{2\times 53} + \frac{\ln\frac{75}{25}}{2\times 4\times10^{-2}} + \frac{1}{5\times 75\times10^{-3}}} = \quad \frac{W}{m}$$

این مقاومت عدد مهم است

وجود این مقاومت سبب کاهش انتقال حرارت می شه

قطر خارجی مجموعه شده = 75 mm .

در صنعت به دو دلیل تجهیزات عایق می شه :

۱- کاهش اتلاف حرارت

۲- ایمنی .

✓ برای ایجاد ایمنی ← حداکثر دمای مجاز را تعریف می‌کنیم به همین سبب ضخامت عایق را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم تا اینکه دما از این حداکثر کمتر باشه .

← هر چه ما بزرگتر شوند دمای سطح و سیال تقریباً به هم نزدیکتر می گردد.
عایق ها در ضخامت های استاندارد فروخته می شوند.

اگر مسئله از ما دمای سطح را خواسته بود :

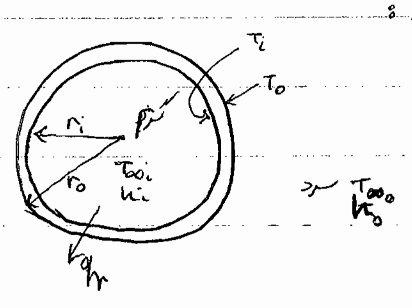
$$q = \frac{(T_o-20)\pi}{1/(5\times 75\times10^{-3})}$$

⑦ پس از حل مسئله مقاومت ها را باهم مقایسه کنید
← مقاومتی که بزرگتر از همه است ، مقاومت تعیین کننده یا محدود کننده است .

? مسئله اگر کروی باشد :

$$q_r = -kA_r\frac{dT}{dr}$$
$$A_r = 4\pi r^2$$
$$\hookrightarrow q_r = -4\pi k r^2\frac{dT}{dr}$$

فرض $k = cte$



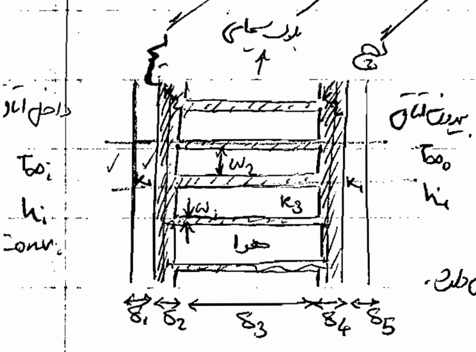
$$\int_{r_i}^{r_o} \frac{dr}{r^2} = \frac{-4\pi k}{q_r}\int_{T_i}^{T_o} dT$$

$q = cte \longrightarrow$ steady state

$$\left.\frac{-1}{r}\right]_{r_i}^{r_o} = -\frac{4\pi}{q_r} k \left[T\right]_{T_i}^{T_o}$$

$$\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o} = \frac{4\pi}{q_r} k (T_i - T_o)$$

$$q_r = \frac{4\pi k (T_i - T_o)}{\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}\right)} \quad , \quad R_{cond} = \frac{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}}{4\pi k} = \frac{r_o - r_i}{4\pi k r_i r_o}$$



سیمان $\delta_2 = \delta_4$

گچ ضخامت $\delta_1 = \delta_5$

بلوک‌های سیمانی در داخلشان هوا است که هم سبک‌تر می‌شوند هم عایق است.

هنگام عبور گرما با برخورد با بلوک، قسمتی از گرما از سمت سیمانی بلوک و گرمای از قسمت هوا می‌رود. میزان تقسیم گرما به اضافه است ... ۲ ضریب رسانش سیمان و ... مسئله کمک.

فرض می‌کنیم که انتقال حرارت یک بعدی باشد که این فرضیه خطای ... است.

فرض اول: دما در جهت عمود یکسان است چون گرادیان دما در داخل حفره ۴ با داخل ... یکی نیست.

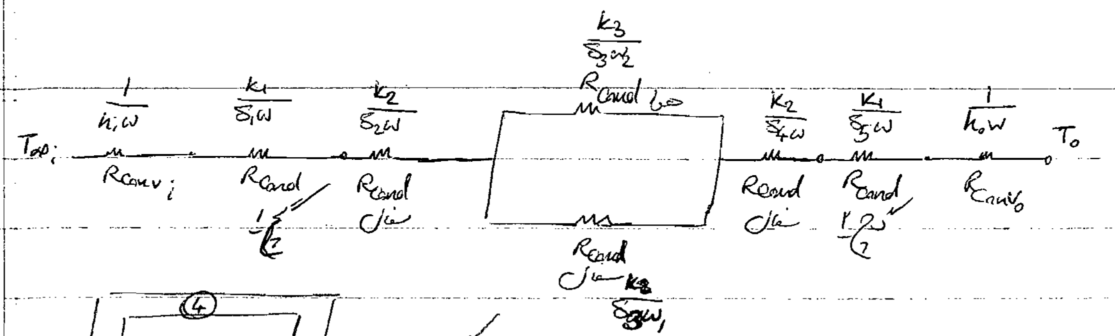
به فرض ۲. در داخل هوا، انتقال حرارت جابجایی در فضای بسته اتفاق می‌افتد که این واقعیت را نادیده گرفتیم. فرض را بر انتقال حرارت از طریق رسانش باشد. (صرف‌نظر از جریان‌های آزاد در فضای بسته حفره)

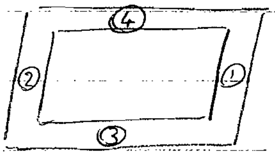
$T_{\infty i}$ — $R_{conv,i}$ — R_{cond} — ...

گچ

از این مرحله به بعد شکل ۴ مختلف می‌شود به مسئله نگاه کرد:

چون دیوار ارتفاع بلندی دارد با حل پیچیده ... به یک محور ... تعداد کلی بلوک ۴ می‌کنیم می‌شود کل دیوار.





حالت: سطوح ۱ و ۲ را با سرکار ۳ و ۴ را موازی می‌گیریم.

w_1 ۱۳   برای واحد عمق دیوار

$w_1 + w_2 = w$

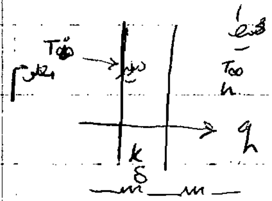
q برای واحد عمق دیوار $= \frac{T_{\infty i} - T_{\infty o}}{\sum R}$

$\sum R \rightarrow$ ۷ تا مقاومت داریم که ۴ تا آن حاصل موازی است.

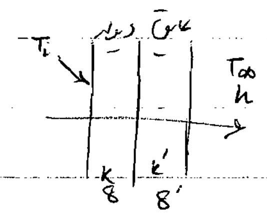
سارا؟ وقتی لوله را عایق می‌کنیم سطح عایق زیاد ↑ و در نتیجه انتقال حرارت ↑ و این تناقض است بین یک چیز داریم به نام:

ضخامت بحرانی عایق: Critical Insulation Thickness

دیوار مسطح: Flat wall



$$q = \frac{T_i - T_\infty}{\frac{\delta}{kA} + \frac{1}{hA}}$$

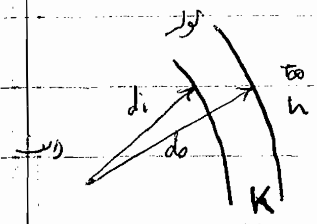


$$q = \frac{T_i - T_\infty}{\frac{\delta}{kA} + \frac{\delta'}{k'A} + \frac{1}{hA}}$$

هرچه قدر δ' را ↑ کنیم (ضخامت عایق ↑) مجموع مقاومت‌ها ↑ و q ↓

⇐ برای دیوار مسطح هرچه ضخامت عایق ↑ بیشتر باشد، اتلاف گرما کمتر می‌گردد.

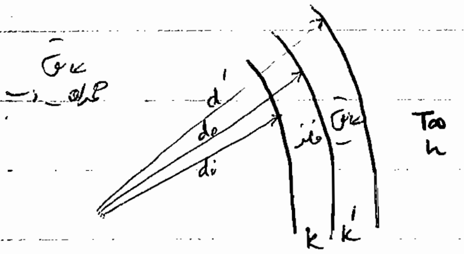
۲ پوسته استوانه‌ای Cylanderical shall



۲ مقاومت می‌شه چون دمای داخلی را T_i گرفتیم

$$q = \frac{T_i - T_\infty}{\frac{\ln\frac{d_o}{d_i}}{2\pi k L} + \frac{1}{\pi d_o L h}}$$

رسانش   جابجایی



$$q = \frac{T_i - T_\infty}{\frac{\ln\frac{d_o}{d_i}}{2\pi k L} + \frac{\ln\frac{d'}{d_o}}{2\pi k' L} + \frac{1}{\pi d' L h}}$$

رسانش   جابجایی

$$\text{ضخامت عایق} = \frac{d' - d_o}{2}$$

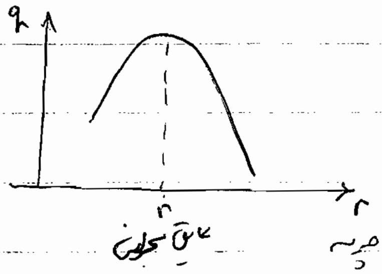
اگر ضخامت عایق ↑ ← d' ↑ ← با زیاد شدن d' یک کسر در مخرج (مقاومت رسانش عایق) ↑ و R_{conv} عایق ↓

در نتیجه ΣR را نمی‌دانیم بسته به میزان تأثیر هر یک دارد.

ضخامت عایق ↑ d' ↑ R_{cond} عایق ↑ R_{conv} ↓ ΣR?

برای حل این مسئله مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم (4 بار تست آمده)

$$\frac{dq}{dd'} = 0 \rightarrow r_{\text{عایق بحرانی}} = \frac{k_{\text{عایق}}}{h} = \frac{d'_{\text{عایق بحرانی}}}{2}$$



برخلاف دیوار مسطح با افزایش عایق، انتقال حرارت ↓ برای دیواره‌های کروی و استوانه‌ای با عایق کردن انتقال حرارت ↓ نمی‌شه

در ابتدا اثر

بلکه باعث افزایش انتقال حرارت ↑ زیرا سطح زیاد می‌شه و R_{conv} کم می‌شه

ولی بعد از آن R_{cond} غلبه می‌کند و زیاد شدن سطح به وسیله عایق نادیده گرفته می‌شود.

به همین دلیل باید در انتخاب ضخامت عایق در این حالت‌ها دقت کرد.

ساده‌ترین و ارزان‌ترین عایق پشم شیشه است با $k = 0.04$ و اگر h محیط هوا از 10 کمتر باشد. $h \approx 8$ را 8 فرض می‌کنیم در این حالت r بحرانی برابر

$$r_{\text{بحرانی}} = \frac{0.04}{8} = 5\ mm$$

فرض می‌کنیم لوله ابتدا که شعاعش 10 mm باشد، بنابراین ما سمت راست r بحرانی هستیم و اگر در این حالت عایق بکشیم q ↓ و اگر لوله که شعاعش 2 mm باشد چون سمت چپ r بحرانی هستیم ابتدا q ↑ سپس ↓ (به کمک عایق)

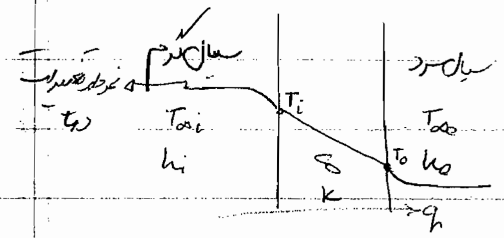
← بنابراین عایق هنگامی خوب کار می‌کند که شعاع لوله کمتر از شعاع بحرانی باشد.

← مفهوم شعاع بحرانی لوله برای کره هم داریم آن هم برای شعاع کره کمتر از شعاع کره بحرانی استفاده می‌شود.

مسائل سؤال تفاوت کره صفحه تمرین شده ۴ فرض شده kw.

جلسه ۵

Overall Heat transfer coefficient:



آنچه در مسائل اهمیت دارد، دمای سیال گرم و دمای سیال سرد است. T_i و T_o چندان اهمیت ندارد.

$$q = \frac{\Delta T}{\Sigma R}$$

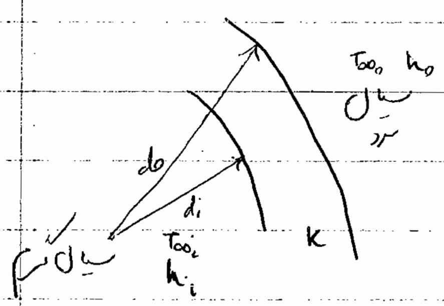
ضریب کلی انتقال گرما

$$= \frac{T_{\infty_i} - T_{\infty_o}}{\frac{1}{h_i A} + \frac{\delta}{kA} + \frac{1}{h_o A}} = UA(T_{\infty_i} - T_{\infty_o})$$

تعریف ضریب کلی انتقال گرما:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_i} + \frac{\delta}{k} + \frac{1}{h_o}$$

برای مقایسه کارایی مبدل حرارتی U هایشان را با هم مقایسه می‌کنیم و لازم نیست ببینیم هر کدام از مبدل‌ها کدام سمت سیال گرم‌تر یا سردتر است.



ضریب کلی انتقال گرما بر مبنای سطح خارجی — ضریب کلی انتقال گرما بر اساس سطح داخلی

$$q = \frac{T_{\infty_i} - T_{\infty_o}}{\frac{1}{h_i A_i} + \frac{\ln\frac{d_o}{d_i}}{2\pi k L} + \frac{1}{h_o A_o}} = U_o A_o (T_{\infty_i} - T_{\infty_o}) = U_i A_i (T_{\infty_i} - T_{\infty_o})$$

$$U_i A_i = U_o A_o$$

$$\boxed{\frac{1}{U_o} = \frac{d_o}{d_i}\frac{1}{h_i} + \frac{d_o \ln\frac{d_o}{d_i}}{2k} + \frac{1}{h_o}}$$

$$\frac{1}{U_i} = \frac{d_i}{d_o}\frac{1}{h_o} + \frac{d_i \ln\frac{d_o}{d_i}}{2k} + \frac{1}{h_i}$$

چرا بین U_i و U_o ، U_o را انتخاب می‌کنیم؟

جداول استاندارد تنظیم لوله‌ها بر مبنای قطر خارجی لوله تنظیم می‌کنند. (جدول A-11 ضمیمه کتاب)

سطوح گسترش یافته - پره   Extended surfaces - Fins

با هوا که h ها کوچک است پس کم بودن h ها را باید با افزایش سطوح جبران کنیم

مانند مثال یخچال که کم بودن h ها را با افزایش میله‌ها یا سطح تخلیل جبران می‌کنیم.

$q = hA\Delta T$ مقدار h و مشخص   با افزایش داریم

$q = \dot{m} h_{fg}$ مقدار مشخص

در سطوح توسعه یافته تنها در سیال هوا استفاده می‌کنیم.

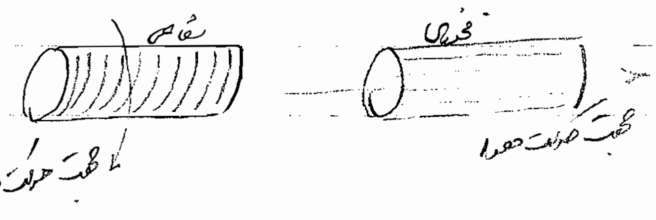
هیچ گاه در سیال آب از سطوح توسعه یافته استفاده نمی‌کنیم زیرا h های آب زیاد است.

هوا را به گاز تعمیم می‌دهیم.

سطوح توسعه یافته ۳ نوع اند:

Fins on Tubes
1. Annular شعاعی → هوا به صورت عرضی از روی آن عبور می‌کند
2. Axial محوری → در جهت محور هوا به صورت افقی عبور می‌کند
3. pin میله‌ای → استوانه‌های کوچک که بر روی سطوح ما.

در بعضی پره‌های شعاعی بر روی پره‌ها شیارهایی وجود دارد که سبب آشفتگی هوا می‌شوند که باعث بالا بردن h می‌گردد.



اگر ارتفاع پره بلند باشد به پره ی بلند High Fin

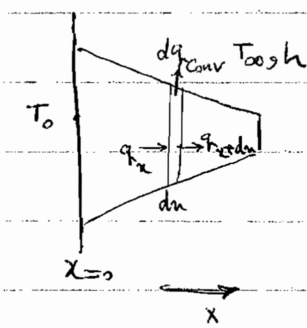
اگر ارتفاع پره کم باشد به پره ی کوتاه low fin می گویند و از پره ی استفاده می شه

جنس پایه و پره ی کاملا باهم match هستند زیرا اگر حفره ای وجود داشته باشد خود این حفره مقاومت حراراتی ایجاد می کند.

جنس پایه و پره می توانند متفاوت باشد

؟ می خواهیم بدانیم با حضور پره ی در یک سطح انتقال حرارت چه شکلی تغییر می کند؟

نمای پره



اول باید بدانیم توزیع دما در پره چگونه است؟

برای حل مسئله المانی به ضخامت dx در نظر می گیریم و ورودی و خروجی این المان را در نظر می گیریم.

$T = f(x)$?

! تغییرات دما در جهت x نوشتیم، یعنی یک بعدی در نظر گرفتیم در جهت y دما تغییر نمی کند.

$$q_x - q_{x+dx} - dq_{conv} = 0$$

$$q_x - \left(q_x + \frac{dq_x}{dx}dx\right) - h\underbrace{\overset{\text{محیط}}{P}dx}_{A}(T - T_\infty) = 0$$

$$-\frac{dq_x}{dx} - hP(T - T_\infty) = 0$$

$$-\frac{d}{dx}\left(-kA\frac{dT}{dx}\right) - hP(T - T_\infty) = 0$$

اگر استوانه باشد در امتداد طول محیط عوض نمی شه

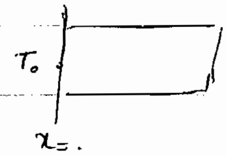
اگر مخروط باشد محیط در امتداد طول متغیر است.

$$\frac{d}{dx}\left(kA\frac{dT}{dx}\right) - hP(T - T_\infty) = 0$$

فرضیات برای انتگرال گیری:

۱- k ثابت باشد   ۲- h ثابت باشد   ۳- یک بعدی باشد   ۴- SS باشد.

برای ساده کردن مسئله مخروط ناقص را به یک استوانه تبدیل می کنیم دیگه A و P مستقل از مکان می گردد



$\theta = T - T_\infty$

$$\Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA}(T - T_\infty) = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2(\theta) = 0 \qquad m^2 = \frac{hP}{kA}$$

انتگرال

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت

in $x = 0 \rightarrow \theta = \theta_0 \Rightarrow \theta_0 = C_1 + C_2$ B.C 1

$x = L \rightarrow$

دو حالت پدید می آید (دو فرضیه می گیریم)

۱- حل ساده می شه ولی غیر واقعی تر بود

۲- به پیچیده تر ولی واقعی تر. اگر یا خیلی طولانی باشد در نهایت T نوک میله برابر T محیط می شه

1) if $L \rightarrow \infty \Rightarrow T = T_\infty \rightarrow \theta = 0$

نوک عایق شده،

2) if L محدود $\rightarrow q = 0 \rightarrow \frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = 0$

قسمت انتهای میله چون نسبت به قسمت های دیگر میله مساحت کمتری دارد می توانیم فرض کنیم در این نقطه انتقال حرارت صورت نمی گیرد که به آن نوک یا انتهای عایق شده می گویند.

3) L محدود $\quad -k\frac{dT}{dx} = h(T - T_\infty) \rightarrow -k\frac{d\theta}{dx} = h\theta$

حل این 3 حالت

① $0 = C_1 e^{\infty} + C_2 e^{-\infty} \rightarrow C_1 = 0 \rightarrow C_2 = \theta_0$

$$\theta = \theta_0 e^{-mx} \Rightarrow \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-mx}$$

② $0 = C_1 m e^{mL} - C_2 m e^{-mL} \rightarrow C_1 = \frac{e^{-mL}}{e^{mL}} C_2$

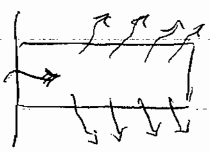
$$\frac{e^{-mL}}{e^{mL}} C_2 + C_2 = \theta_0 \rightarrow C_2 \left(e^{-mL} + e^{mL}\right) \theta_0 e^{mL}$$

$$C_2 = \frac{\theta_0 e^{mL}}{2\cosh(mL)} \quad , \quad C_1 = \frac{\theta_0 e^{-mL}}{2\cosh(mL)}$$

$$\theta = \frac{\theta_0}{2\cosh(mL)} \left[e^{-mL} e^{mx} + e^{mL} e^{-mx} \right]$$

$$\rightarrow \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}$$

حالت سوم حالت دقیق مسئله است ولی معمولاً همون حالت ۲ بهتر است و در اکثر موارد جواب می‌دهد.



$$q = -kA \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0}$$

چون ss است پس آن مقدار حرارتی که از سطح ریشه وارد می‌شود از سطح خارج می‌گردد.

① $q = -kA (T_0 - T_\infty)(-m) e^{-m(0)} = kA \sqrt{\frac{hP}{kA}} (T_0 - T_\infty)$

$$= \sqrt{hPkA}\,(T_0 - T_\infty)$$

② $q = -kA (T_0 - T_\infty)(-m) \frac{\sinh mL}{\cosh mL} = \sqrt{hPkA}\,(T_0 - T_\infty) \tanh(mL)$

تفاوت ۱ و ۲ در tanh است.

جواب ۴ مسئله صفحه 75 ← جواب ۴ را خودتان اثبات کنید
حالت سوم

از جمله خواص tanh:

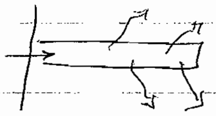
اگر $m \rightarrow \infty \Rightarrow \tanh mL = 1$

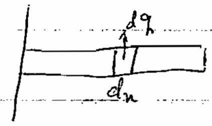
اگر $L \rightarrow \infty \Rightarrow \tanh mL = 1$

جلسه

$T = f(x)$ ✓

q ✓





$$q = -k\frac{dT}{dx}\Big|_{x=}$$

$$dq = hdA(T - T_\infty)$$

$$= hPdx(T - T_\infty) \rightarrow q = hP\int_0^L (T - T_\infty)dx$$

کل حرارت خروجی از پره از طریق جابجایی خارج می‌گردد.

هر دوی q ها به یک جواب می‌رسد.

برای سطوح گسترش یافته (پره‌ها) دو پارامتر مهم تعریف می‌کنیم که عملکرد پره را مشخص می‌کند:

1. η = fin Effeciency   راندمان

2. ε = fin Effectiveness   کارآیی پره

۱. راندمان ← واقعی به ایده‌آل.

فرض کوچک بودن ۲

فرض‌های ۱ و ۲ در این رابطه → $$\eta = \frac{q_{real}}{q_{Ideal}} =$$

با فرض این که در انتها انتقال حرارت وجود نداشته باشد

$$= \frac{\sqrt{hPkA}\,[\tanh(mL)](T_b - T_\infty)}{hPL(T_b - T_\infty) + h\frac{\pi}{4}d^2(T_b - T_\infty)}$$

که محیط

کل پره دمای T_b (دمای base) را داشته باشد.

صرف نظر می‌کنیم (انتقال حرارت نوک پره که $\frac{\pi}{4}$ فقط است).

q ایده‌آل معمولاً در ابعاد بسیار بزرگ‌تر است مثلاً طول پره بسیار زیاد باشد.

$$\eta = \sqrt{\frac{kA}{hPL^2}}\tanh(mL)$$

این رابطه راندمان تا زمانی است که سطح مقطع و محیط در طول x تغییر نکند.

η همیشه از ۱ کوچکتر است.

۲. کارآیی ← q منتقل شده با نصب پره تقسیم بر q منتقل شده قبل از نصب پره.

$$\varepsilon = \frac{q_{with\,fin}}{q_{without\,fin}} = \frac{\sqrt{hPkA}\,[\tanh(mL)](T_b - T_\infty)}{hA(T_b - T_\infty)} = \sqrt{\frac{kP}{hA}}\tanh(mL)$$

ε معمولاً باید ۱ بیشتر باشد زیرا با نصب پره انتقال حرارت ↑ ، هرچه ε ↑ ← یعنی اثرگذاری ↑ پره

یک تعریف دیگر: کارایی پره و کارایی سطح پره‌دار وجود دارد؛ زیرا وقتی یک سطح پره‌دار می‌گردد از چندین پره تشکیل شده است و کارایی هر پره مثلاً ۸۰ است ولی چون سطح پره‌دار از چندین پره تشکیل شده کارایی آن ۸۰٪ است [illegible].

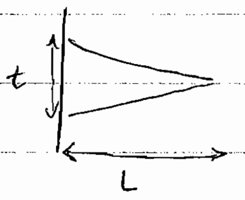
کارایی سطح پره‌دار برای ما مهم است ← کارایی پره می‌تواند تا ۹۰ هم باشد کارایی سطح پره‌دار (۱.۰-۵-۴) کمتر است ولی برای سود کردن باید حداقل ۲ یا بیشتر باشد.

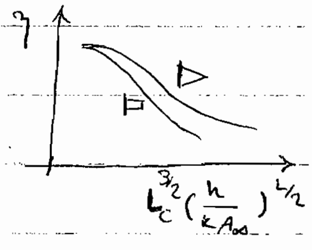
η: نمودارهای راندمان برای هر نوع پره ترسیم کرده‌اند بدین ترتیب هر کس با مراجعه به این منحنی‌ها بدون داشتن توزیع دما ($T-x$) می‌تواند محاسبه کارایی‌ها را صورت دهد.

ε: کارآمد کارایی ← طرح‌های مختلف پره‌ها با هم مقایسه می‌کنیم و از نظر اقتصادی و ... می‌سنجیم.

← راندمان برای پره‌ها با مقطع متغیر بیشتر است. بنابراین ← دستگاه ارزان‌تر می‌شود
(شکل ۱۱ کتاب) برای پره‌های طولی یکی با مقطع ثابت دیگری متغیر ← از فلز کمتری استفاده می‌کنیم و ...

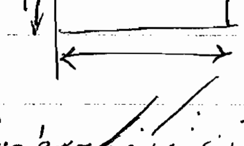
(شکل ۱۲ برای پره‌های حلقوی)
توضیح شکل ۱۱ با مقطع متغیر و ثابت.





در محاسبات کاری کردند تا تأثیر نوک هم در انتقال وجود دارد.

L_c: Corrected Lenght



فرض کرده‌ایم که سر این مقطع یک عایق کوچک بیرون آمده که انتقال حرارت از آن نوک صورت می‌گیرد (فرض ۴)

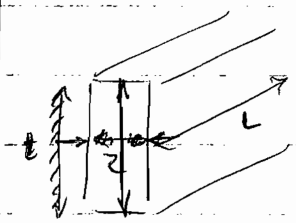
(هدف نادیده نگرفتن مساحت از انتقال حرارت در انتهاست) ← سپس یک مساحتی اضافه می‌کنیم که به سطح جانبی که برابر سطح مقطع انتهایی است

سطح مقطع: مساحت سطح مقطع $A = \frac{\pi}{4} D^2$ برای استوانه $\Rightarrow \boxed{L_c = L + \frac{\pi}{4}}$

اگر این سطح مقطع را برابر سطح جانبی بگیریم: $\frac{\pi}{4} D^2 = \pi D L'$ $\quad L' = \frac{D}{4}$

در حالت * برای به دست آوردن q سطح مقطع را از وسط باز کرده و دو طرف می‌کشیم فرض در واقع برای اینکه انتقال حرارت از سطح مقطع را هم در نظر بگیریم سطح مقطع را معادل سطح جانبی گرفتیم L_c را می‌دهد.

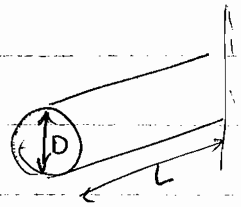
در حالت ۲ که ▷ است چون نوک وجود ندارد پس از L_c صرف‌نظر می‌شود.

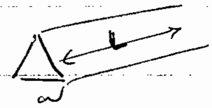


سطح جانبی ۲ تا است.

$$tz = 2 \times L' \times 2 \longrightarrow L' = \frac{t}{2}$$

از سطوح بالا و پایین چون z بسیار بزرگ است پس از آن دو صرف‌نظر می‌کنیم.





اگر Δ متساوی‌الاضلاع باشد

۳ تا سطح مقطع داریم

$$\frac{\frac{1}{2} w^2}{\sin 60} = L' \times 3w \Rightarrow L' = \frac{w}{3\sqrt{3}}$$

مثال: لوله‌ای به قطر خارجی 34 mm با دمای سطح $100°$ در محیطی به دمای $20°$ و ضریب انتقال حرارت جابجایی $5\ W/m^2 °C$ مطلوب است میزان انتقال حرارت برای واحد طول از سطح این لوله. پره‌های حلقوی با ارتفاع 15 mm و ضخامت 1 mm و فاصله‌ی گام 5 mm از جنس آهن با ضریب رسانش $35\ W/m°C$ بر روی این لوله نصب می‌گردد. میزان انتقال حرارت ناشی از پره‌گذاری به دست آورید. کارایی پره و سطح پره‌دار شده را مقایسه کنید.

گام پره به فاصله بین دو پره باهم

در هر 5 mm، 1 mm پره و 4 mm خالی است پس در 1m از لوله 200 حلقه روی آن نصب شده $1000 \div 5 = 200$

آخرین پره + 4 mm فضای خالی است

$$q_{without\ fin} = hA(T_b - T_\infty) = 5 \times \pi (34 \times 10^{-3}) \times 1 \times (100 - 20) = 42.72\ W/m$$

انتقال حرارت یک متر لوله bert (عریان)

4 mm

$$q_{with\ fin} = q_{fin} + q_{\substack{\text{سطح بدون} \\ fin}}$$

$$q_{\substack{fin \\ \text{سطح بدون}}} = \frac{4}{5}\left(\frac{8}{10}\right) \times \underbrace{42.72}_{q\ \text{کلی}} = 34.18\ W/m$$

به علت ۲ از ۱۰ طول

$$q_{fin} = 200 \times q_{one\ fin} =$$

$$q_{one\ fin} = \eta\, q_{\substack{one\ fin \\ Ideal}} =$$

η را از منحنی داخل کتاب بدست می‌آوریم که نیاز به داشتن توزیع دما در fin نیست.

$$\eta: \quad Fig\ 2\text{-}12 \xrightarrow{\text{طول تصحیح شده}} L_c = L + \frac{t}{2} = 15.5 \times 10^{-3}\ m$$

که طول اصلاح شده داده شده در نمودار شکل

$$r_{2c} = r_1 + L_c = 32.5 \times 10^{-3}\ m$$

که شعاع اصلاح شده

شعاع داخلی

$$A_m = t\,(r_{2c} - r_1) = 15.5 \times 10^{-6}\ m^2$$

$$L_c^{3/2}\left(\frac{h}{kA_m}\right)^{1/2} = 0.185$$

$$\frac{r_{2c}}{r_1} = 1.9 \xrightarrow{\text{از روی شکل}} \eta = 0.92$$

حالا باید پیدا کرد

$$q_{Ideal} = hA_{fin}(T_b - T_\infty)$$

$$A_{fin} = 2\left[\frac{\pi}{4}(D_o^2 - D_i^2)\right] + \pi D_o t = 4.82 \times 10^{-3}\ m^2$$

سطح جانبی

لوله

D_o: $r_i + L$

$$= 5 \times 4.82 \times 10^{-3}(100 - 20)$$

$$= 1.92\ W/fin$$

$$q_{\text{با سطح پره دار}} = 34.18 + 200 \times 1.92 \times 0.92 = 387.48\ W/m$$

که به صورت پره

$$\varepsilon_{\text{کل سطح پره دار}} = \frac{387.48}{\underbrace{42.72}_{\text{که همان سطح بدون پره}}} = 9.07 \qquad \varepsilon_{one\ fin} = \frac{1.92 \times 0.92}{\frac{1}{100} \times \underbrace{42.72}_{q\ \text{بدون fin}}} = 41.35$$

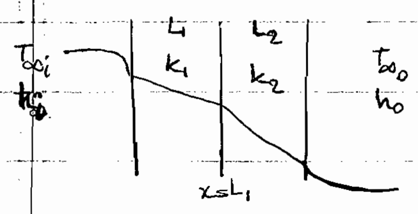
که هر پره $\frac{1}{100}$ لوله را اشغال کرده.

اگر تراکم پره‌ها ε ↑ که کارایی یک پره ثابت می‌ماند، کارایی کل سطح پره‌دار دچار تغییر شده و کم می‌شه.

پره گذاری باعث کاهش انتقال حرارت می شه.

مقاومت تماس: Contact Resistance

دو لایه داریم که در دو طرف آن سیال (یکی سرد و دیگری گرم) وجود دارد.



$$\text{in } x=L_1 \rightarrow BC: -k_1\frac{dT_1}{dx} = -k_2\frac{dT_2}{dx}$$

$$BC: T_1 = T_2 \longleftrightarrow$$ تمام مفهوم مقاومت تماس روی عبارت روبرو است.

$T_1=T_2$ زمانی اتفاق می افتد که مقاومت تماس صفر باشد.

لازمه برای T_1 و T_2 چیست؟ این دو لایه بسیار بسیار بسیار صیقلی باشند. به طوری که حد فاصل این دو لایه هیچ پستی و بلندی / زبری در ... وجود نداشته باشد زیرا در صورت وجود داخل این هوا وجود دارد.

فرض می کنیم دو ملک مستقل از جنس فولاد و بسیار صیقلی / دو ملک مستقل از جنس آهن داریم

← مقاومت تماس = 0 ← مقاومت تماس ≠ صفر

$\frac{\delta T}{\delta n} \neq 0 \longrightarrow$ داخل چند میکرومتر اختلاف دما وجود دارد که همین چند میکرومتر سبب مقاومت در برابر انتقال حرارت می شه که به آن مقاومت تماس گویند.

← در اکثر مسائل از مقاومت تماس صرف نظر می شه ولی در کارهای آزمایشگاهی و صنعتی صرف نظر نمی شه. اگر بین دو ماده یک ماده با ضریب رسانش بالا قرار دهیم (خمیر حرارتی) می توان از مقاومت تماس صرف نظر کرد.

جدول ۲.۲ ← بیان مقاومت تماس برای چند جنس مختلف

حل ۷

تمرینات فصل اول : ۳ / ۵ / ۷ / ۱۲ / ۱۴ / ۲۲ / ۲۸

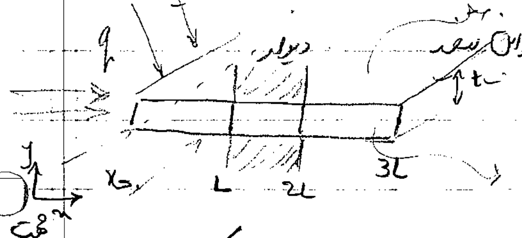
« دوم : ۴ / ۱۰ / ۲۵ / ۳۱ / ۳۳ / ۳۹ / ۴۴ / ۵۸ / ۶۴

تاریخ امتحان میان‌ترم : از ۳ فصل اول / جلسه بعد / دوشنبه ۸۹/۸/۱۴

مسائل تکمیلی از فصل ۲ :

انتقال حرارت یک‌بعدی در حالت SS و بدون تولید حرارت دست می‌آوریم و مقدار q را.

مثال ۱: تیغه‌ای فلزی به شکل طول 3L و ضخامت t با عرض بسیار بزرگ موجود است. $1/3$ تیغه درون کوره قرار داشته و شار حرارتی یکنواختی را دریافت می‌کند. بخش میانی آن داخل دیوار کوره و بخش انتهایی آن در هوا با دمای T_∞ و ضریب جابه‌جایی h قرار دارد. مطلوب است توزیع دما در این تیغه.

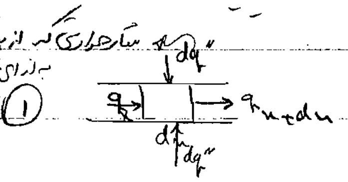


فرض $t << 3L$

این مسئله را به ۳ ناحیه تقسیم می‌کنیم و در هر ناحیه معادله حاکم را می‌نویسیم.

مسئله یک‌بعدی در جهت x است. در جهت z به علت عرض نامحدود و در جهت y کوچک می‌توان از تغییرات صرف‌نظر کرد.

شار حرارتی که از بیرون می‌آید به ازای واحد سطح



از پایین و بالا می‌گیرد

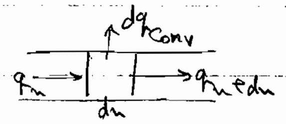
$$q_x + 2q''dx\,\omega - q_{x+dx} = 0$$

داریم $q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx}dx \Rightarrow -\frac{dq_x}{dx}dx + 2q''dx\,\omega = 0$

$$-\frac{d}{dx}\left(-kA\frac{dT}{dx}\right)dx + 2q''\omega\,dx = 0 \quad , A = t.\omega$$

$$\rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{2q''}{kt} = 0$$

② $\dfrac{d^2T_2}{dx^2}=0$ برای ناحیه ۲ که q''' نداریم.

③ 

$q_x - q_{x+dx} - dq_{conv} = 0$ همان مسئله پره که قبلاً حل شد

$-\dfrac{d}{dx}\left(-kA\dfrac{dT}{dx}\right)dx - 2hw\,dx\,(T-T_\infty) = 0 \quad , \; A = wt$

$\dfrac{d^2T_3}{dx^2} - \dfrac{2h}{kt}(T-T_\infty) = 0$ بر dx تقسیم می‌شه، در kt ضرب می‌آید

جواب ناحیه اول : $\dfrac{dT_1}{dx} = -\dfrac{2q'''x}{kt} + A \longrightarrow T_1 = -\dfrac{q'''x^2}{kt} + Ax + B$

جواب ناحیه دوم : $\dfrac{dT_2}{dx} = C \qquad T_2 = Cx + D$

جواب ناحیه سوم : $T_3 - T_\infty = Ee^{mx} + Fe^{-mx} \qquad m^2 = \dfrac{2h}{kt}$

اعمال شرایط مرزی :

۶ شرط مرزی باید بنویسیم :

$BC1 \Rightarrow$ in $x=0 \qquad -k\dfrac{dT_1}{dx} = q''$ این دقیق است.

$\dfrac{dT_1}{dx}=0$ تقریب می‌گیریم فین مشکل است پس از حرارت ورودی صرف نظر می‌کنیم:

اگر از فرض تقریب استفاده کنیم حل مسئله بسیار ساده‌تر می‌گردد.

in $x=L \qquad T_1 = T_2 \longrightarrow$ if چون که سطح تماس دو جسم است، مقاومت تماسی نداشته باشد

تماس مقاومتی نباشد (زمانی مطرح می‌شه که جنس ۲ متفاوت باشد)

$-\dfrac{dT_1}{dx} = -\dfrac{dT_2}{dx} \longrightarrow$ پیوستگی

in $x=2L \qquad T_2 = T_3$

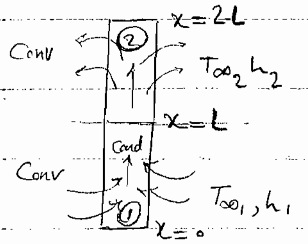
$-\dfrac{dT_2}{dx} = -\dfrac{dT_3}{dx}$

in $x=3L$ $\qquad -k\dfrac{dT_3}{dx} = h(T_3 - T_\infty)$ واقعیت

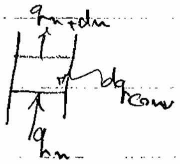
$\qquad \dfrac{dT_3}{dx} = 0$ تقریب

برای یافتن جواب ۳ حرارتی که میله اول را ترک می‌کند باید برابر همان حرارتی باشد که وارد سوم می‌شود یعنی q پیوسته است.

مثال ۲: میله‌ای است که به ارتفاع 2m نیمی از آن در داخل آب جوش به دمای T_{∞_1} و ضریب جابجایی h_1 و نیمه دوم در هوا به دمای T_{∞_2} و ضریب جابجایی h_2 می‌باشد. با فرض اینکه قطر میله در مقایسه با ارتفاع آن کوچک باشد میزان حرارت انتقال یافته از آب جوش و هوای سرد از طریق میله را به دست آورید. دمای انتهای سرد میله چقدر است؟
می‌توانست این تقسیم‌بندی با هم برابر نباشد.



ناحیه ①

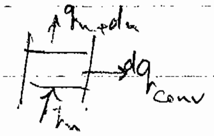


$$\frac{d^2T_1}{dx^2} - m_1^2(T_1 - T_{\infty_1}) = 0 \quad , \quad m_1^2 = \frac{h_1 P}{kA}$$

همان معادلات قبلی در قسمت سطوح توسعه یافته است.

$$\Longrightarrow T_1 - T_{\infty_1} = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{-m_1 x}$$

ناحیه ②



$$\frac{d^2T_2}{dx^2} - m_2^2(T_2 - T_{\infty_2}) = 0 \quad , \quad m_2^2 = \frac{h_2 P}{kA}$$

$$\Longrightarrow T_2 - T_{\infty_2} = D_1 e^{m_2 x} + D_2 e^{-m_2 x}$$

نیاز به ۴ شرط مرزی است:

in $x=0$ $\quad \dfrac{dT_1}{dx} = 0 \longrightarrow$ فرض قطر میله در مقایسه با ارتفاع خیلی کوچک $\quad d \ll L$

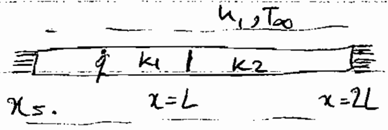
$x=L$ $\quad \dfrac{dT_1}{dx} = \dfrac{dT_2}{dx}$

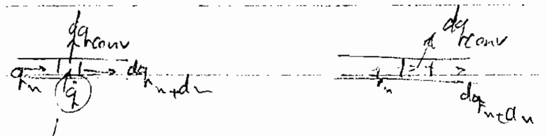
$x=L$ $\quad T_1 = T_2$

$x=2L$ $\quad \dfrac{dT_2}{dx} = 0 \qquad d \ll L$

مثال 3) میله‌ای است به طول $2L$ از دو جنس مختلف در محیطی به دمای T_∞ و h، نیمی از میله دارای تولید انرژی داخلی $\dot{q}$ می‌باشد. دو انتهای میله کاملاً عایق شده است. توزیع دما در میله (رابطه‌ای برای دما در ابتدا، وسط و انتهای میله) را به دست آورید.

از مقاومت تماسی صرف نظر می‌کنیم.





خروجی = تولید + ورودی

$$q_x - q_{x+dx} - dq_{h_{conv}} + \dot{q} A\, dx = 0$$

$$\dot{q}\, dv = \dot{q} A\, dx$$

سطح مقطع

in $x=L$ $T_1 = T_2$ نداشتن مقاومت تماسی

$$-k_1 \frac{dT_1}{dx} = -k_2 \frac{dT_2}{dx} \longrightarrow$$ k ها متفاوت است

chapter 3 (فصل 3)

Steady Multidimensional Conduction

در مسائل فصل 2، دما یک بعدی بود و تنها تابع x بود ولی در این فصل دما شرایط مسئله SS است ولی دما دو بعدی یا سه بعدی است و می‌تواند همراه تولید انرژی داخلی باشد یا خیر.

برای حل مسئله Math مسائل 3 روش داریم: 1) روش تحلیلی 2) روش ترسیمی 3) روش عددی

H.T — Math — H.T

1) Analytical Method

2) Graphical "

3) Numerical "

روش تحلیلی ⇐ حل معادلات دیفرانسیلی که جواب حاصل، معادلاتی است که در آن پیوستگی وجود دارد یعنی هر x و y و z به معادله در هم می‌توان به دما رسید. سه اشکال دارد ... تنها در شکل‌های با هندسه ساده کاربرد دارد که به حل ریاضی آن باید آگاه باشیم.

۲. روش ترسیمی:

جواب‌ها هندسه‌های ساده را به صورت خطی تقریبی به دست می‌آورند. هندسه شکل باید دوبعدی باشد.

این روش منسوخ شده است زیرا روش عددی و بسیار نرم‌افزار حیرت‌آور داریم.

۳. روش عددی:

در ابتدا معادله دیفرانسیل را تبدیل به سری تفاضلات معادله جبری می‌کنیم و این چند صد معادله جبری را همزمان حل می‌کنیم

سطح پیوسته را شبکه‌بندی می‌کنیم و از این طریق معادله دیفرانسیل می‌شه جبری.

مزیت‌ها:

هیچ محدودیتی در شرط مرزی و شکل هندسی ندارد.

معایب:

پیوستگی را از دست داده و اطلاعات را تنها برای گره‌ها به دست می‌آوریم و نتیجتاً اطلاعات طول و عرض را از دست داده باشیم.

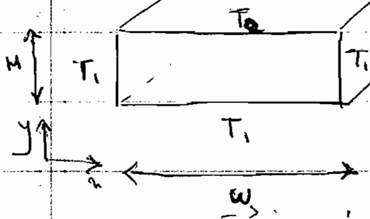
و برای کمتر کردن این کار می‌توان تعداد گره‌ها را ~~~~ بیشتر کرد.

جلسه ۸

~~Study~~ Steady Multidimensional Conduction Analytical Method:

← روش ترسیمی خودمان در کتاب‌ها می‌خوانیم در صفحه است !!!

صورت: یک میله بلند (بلند = بعد ضلع دیگر مطرح نیست ← دوبعدی) به سه طرفش دمای یکسان و سمت چهارم دمایش متفاوت است. (سطح مستطیل است) ; $\dot{q}$ ندارد ; SS است ; k هم ثابت است (مسئله بسیار ساده)



معادله حاکم ریاضی: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$

چهار شرط مرزی باید نوشت:

$$\begin{cases} BC1: & T(0,y)=T_1 \\ BC2: & T(W,y)=T_1 \\ BC3: & T(x,0)=T_1 \\ BC4: & T(x,H)=T_2 \end{cases}$$

بحث ریاضیات مسئله :

برای حل معادله دیفرانسیل درجه دوم باید همگن سازی انجام دهیم یعنی همگن کنیم یعنی در یک طرف تلاش کنیم تا با حذف شدن یعنی به عبارتی عدد ثابت در معادله نداشته باشیم و آن را حذف کنیم

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0 \qquad \text{Governing Eq.}$$

معادله حاکم همگن، عدد ثابت ندارد و همه اش بر حسب T است.

ولی شرایط مرزی ما همگن نیست T_1 ، T_0 و اینها عدد ثابت هستند پس آن را تغییر می دهیم :

$\theta = T - T_1$

معادله حاکم : $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}=0$

شرایط مرزی :
$$\begin{cases} \theta(0,y)=0 \\ \theta(a,y)=0 \\ \theta(x,0)=0 \\ \theta(x,H)=\theta_0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ یکی باقی ماند یعنی یکی از شرایط مرزی ما قابل همگن سازی نیست

فرض: Assume $\theta(x,y)=X(x)\cdot Y(y)$

فرض می کنیم تابع θ حاصلضرب دو تابع مستقل از هم باشد.

این کار را separation of variables انجام می دهیم یعنی :

$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}=Y\frac{d^2X}{dx^2}$ چون Y عدد ثابت است زمانی که بر حسب x مشتق بگیریم دو تابع مستقل از هم.

$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}=X\frac{d^2Y}{dy^2}$

$$\rightarrow Y\frac{d^2X}{dx^2}+X\frac{d^2Y}{dy^2}=0 \rightarrow \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=\frac{-1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=\begin{cases}-\lambda^2\\0\\+\lambda^2\end{cases}$$

مجبور است عدد باشد تابع نمی تواند باشد.

یک قاعده وجود دارد که تمام می شود ولی فعلاً چون نمی خواهیم حلش کنیم وارد نمی شویم.

$$\frac{d^2X}{dx^2}=0 \rightarrow X=Ax+B$$

$$\Rightarrow \theta(x,y)=(Ax+B)(Cy+D)$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2}=0 \rightarrow Y=Cy+D$$

Y در هر دو مشترک است.

$B.C\,1: \quad 0=(Ax_0+B)\,Y \longrightarrow B=0$

$B.C\,2: \quad 0=(A\times w+0)\,Y \longrightarrow A=0$

از دو شرط مرزی اول به $A=B=0$ رسیدیم پس جواب $\theta=0$ ← $T=T_1$ در تمام نقاط که با فرض اولیه متناقض است

پس جواب هر کدام صفر نیست یا $-\lambda^2$ یا $+\lambda^2$.

برای انتخاب $-\lambda^2$ یا $+\lambda^2$ اصولی وجود دارد، یعنی باید هر دو معادله مشخص می‌کنیم کدام جهت همگن است و کدام جهت غیر همگن است.

2. مثبت به علامت + و − یکی می‌شه سری فوریه و دیگری می‌شه exponentially. پس نتیجه اینکه علامت همگن را طوری انتخاب می‌کنیم که جهت همگن به نحوی باشد که به سری فوریه ختم گردد.

جهت همگن در جهت x است (در این مسئله) زیرا هر دو شرط مرزی آن همگن است (0) ولی جهت y غیر همگن است چون یک شرط آن همگن نیست.

← پس $-\lambda^2$ را انتخاب می‌کنیم $= -\lambda^2$ هر دو هم علامت باشند تا به سری فوریه برسند

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\lambda^2=0 \rightarrow \frac{d^2X}{dx^2}+\lambda^2X=0 \rightarrow X=A\sin\lambda x+B\cos\lambda x$$

جهت همگن جهت سری فوریه شده است.

مختلف العلامه تا به e برسیم

$$\frac{-1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\lambda^2=0 \rightarrow \frac{d^2Y}{dy^2}-\lambda^2Y=0 \rightarrow Y=Ce^{\lambda y}+De^{-\lambda y}$$

$B.C1 \Rightarrow \quad 0=(A\sin 0+B\cos 0)\,Y \longrightarrow \boxed{B=0} \qquad A\neq 0$

$B.C2 \Rightarrow \quad 0=(A\sin\lambda w+0)\,Y \longrightarrow \sin\lambda w=0 \qquad \lambda_n w=n\pi \qquad \lambda_n=\frac{n\pi}{w}$

⇐ characteristic value ← یعنی مقادیر ویژه معادله ما هر کدام است که این شرط را برقرار باشد.

$$\theta = (A\sin\lambda_n x)(Ce^{\lambda_n y} + De^{-\lambda_n y}) = \sin\lambda_n x\left[C'e^{\lambda_n y} + D'e^{-\lambda_n y}\right]$$

$$BC3:\ \theta(x,0)=0 \rightarrow \overbrace{\sin\lambda_n x}^{\neq 0}\overbrace{\left[C'e^{0} + D'e^{0}\right]}^{=0}=0 \rightarrow C' = -D'$$

از ضرب ۲ در C' بدست آمده است

$$\cancel{BC4\ \theta(x,H)=\theta_0} \Rightarrow C'\sin\lambda_n x\left[\sinh\lambda_n y\right] = \theta_0$$

متعامد بودن

$$BC\ 4\quad \theta(x,H)=\theta_0 \longrightarrow \text{orthogonality} \Rightarrow C'\ \checkmark$$

جواب نهایی :

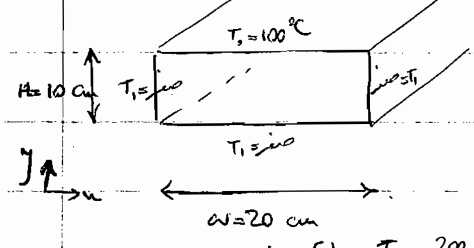
$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T-T_1}{T_0-T_1} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}\sin\frac{n\pi}{w}x\,\frac{\sinh\frac{n\pi}{w}y}{\sinh\frac{n\pi}{w}H}$$

مثال : میله‌ای است بسیار بلند به عرض 20cm و ارتفاع 10cm . سه طرف آن در دمای $0^{\circ}C$ و یک سمت آن در دمای $10^{\circ}C$ می‌باشد . ضریب رسانش گرمایی میله $1\ W/m^{\circ}C$ است . مطلوب است دمای نقاط A و B با مختصات زیر :

A (10, 5) B(15 , 2.5) C = (15 , 7.5)

شار حرارتی و جهت انتقال حرارت در این نقاط P . میزان حرارتی که سطح گرم را ترک کرده و به هر یک از سطوح سرد می‌رسد ؟

طول میله واحد 1cm باشد .



$T_0 = 100^{\circ}C \quad T_1 = 0^{\circ}C$

$$T = \frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{20}x\right)\right)\frac{\sinh\frac{n\pi}{20}y}{\sinh\frac{n\pi}{2}}$$

$$A(10,5)\quad T = \frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}\left(\sin\frac{n\pi}{20}\times 10\right)\frac{\sinh\frac{n\pi}{20}\times 5}{\sinh\frac{n\pi}{2}}$$

if n = زوج $\rightarrow T = 0$ این سری‌ها را با عدد دهی حل می‌کنیم .

$n =$ فرد $\quad T = \frac{200}{\pi}\left[0.775 + 0 + -0.062 + 0 + 7.86\times 10^{-3} + 0 + -1.1\times 10^{-3} + \dots\right]$ گاهی بیشتر n تا n=4 برویم

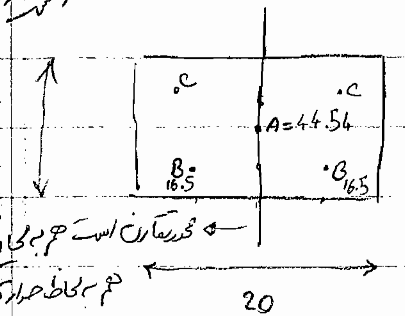
تا n سوم جواب ادامه دهیم کافی باشیم !!!

$$T\big|_A = 44.54\ ^{\circ}C$$

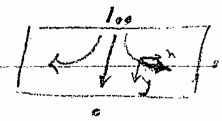
تا n=7 پیش برویم .

$$B(15, 2.5) \longrightarrow T\big|_B = 16.5\ ^{\circ}C$$

محور تقارن داریم چون دو طرفش دما صفر است

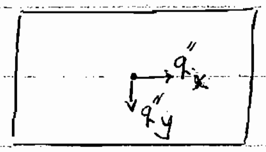


محور تقارن است هم به لحاظ هندسی هم به لحاظ حرارتی



محور تقارن داریم چون دو طرفش دما صفر است.
نقطه C را ما به دست آوریم

ب) به دست آوردن شار حرارتی برای نقاط A و B.
q را بر واحد سطح یک نقطه فرض کردیم.



فوریه = q'' در جهت y

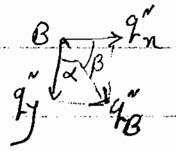
$$q''_y = -k\frac{\partial T}{\partial y}$$
$$= -k\frac{200}{\pi}\sum \frac{(-1)^{n+1}+1}{n}\sin\frac{n\pi x}{20}\,\frac{\frac{n\pi}{20}\cosh\frac{n\pi y}{20}}{\sinh\frac{n\pi}{2}}$$

$$q''_y\Big|_A = -10k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{4}\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)\frac{\cosh\frac{n\pi}{4}}{\sinh\frac{n\pi}{2}} = -9.9\,W/m^2$$

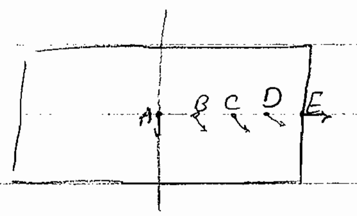
$$q''_x = -k\frac{\partial T}{\partial x} = -k\frac{200}{\pi}\sum\frac{(-1)^{n+1}+1}{n}\left(\frac{n\pi}{20}\cos\frac{n\pi x}{20}\right)\frac{\sinh\frac{n\pi y}{20}}{\sinh\frac{n\pi}{2}}$$

$$q''_x\Big|_A = -10\,k\frac{200}{\pi}\sum\frac{(-1)^{n+1}+1}{1}\cos\frac{n\pi x}{20}\,\frac{\sinh\frac{n\pi}{4}}{\sinh\frac{n\pi}{2}} = 0$$

چون نقطه A هم روی محور تقارن قرار گرفته پس بنابه تقارن صفر است q''_x آن. پس نقطه A تنها جهت y پیش می‌شه.
نقطه B برخلاف ما است پس تنها گذاشتن مختصات B در معادلات فوق است.



در این حالت هیچ کدام صفر نیست.
پس در نقطه B هم مقدار شار حرارتی هم جهت انتقال حرارت را.



تغییرات α P:

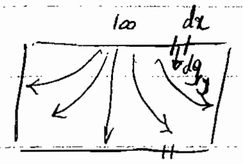
هر چه به سمت دیواره می‌رسیم α بزرگ‌تر می‌گردد.

$\alpha_A = 0 \rightarrow$

$\alpha_E = \frac{\pi}{2}$

$0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$

ج) به دست آوردن مقدار حرارت ترک شده از سطح گرم و رسیده به سطح سرد:



$$dq_{y} = -k(dx.1)\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=H} \rightarrow \text{سطح گرم}$$

یعنی اول نسبت به y مشتق گرفته سپس نسبت به x انتگرال گیری:

$$q_{\text{سطح گرم}} = -k\int_0^{w} \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=H} dx$$

$$= -\frac{200}{\pi}\sum \frac{(-1)^{n+1}+1}{n}\left(\cosh n\pi - 1\right)\frac{\cosh\frac{n\pi}{2}}{\sinh\frac{n\pi}{2}}$$ جواب با جملات سری تا 8 جمله است

$$= -552.58 \ w/m$$ به ازای واحد عمق

$$q_{\text{سطح پایین}} = -k\int_0^{w} \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0} dx = -102.2$$

$$q_{\text{سطح سمت راست}} = -k\int_0^{H} \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=w} dy$$

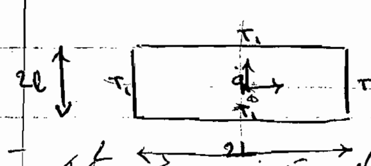
$$q_{\text{سطح سمت چپ}} = -k\int_0^{H} \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} dy$$

$$q_{\text{گرم}} - q_{\text{سرد}} = 440$$ که

در این مسئله از این 440 نصفش به سمت راست و نصفش به سمت چپ می‌رسد پس جواب آن با q سمت راست و q سمت چپ یکسان باشد.

جلسه 4

مثال 1. میله‌ای است بسیار بلند با ابعاد 2L در 2l. درون این میله تولید انرژی داخلی q صورت می‌گیرد. هر 4 دیوار این میله در دمای T_1 می‌باشند. مطلوب است:



الف) معادله حاکم و شرایط مرزی برای این مسئله

همچنین می‌توان نشان داد که توزیع دما درون میله براساس مختصات نشان داده شده در شکل مقابل زیر می‌باشد:

ب) با اطلاعات عددی داده شده دمای مرکز میله و میزان حرارت انتقال یافته از هر یک از سطوح را به دست آورید.

در جهت x و y تقارن داریم. منطق می‌گوید مبدأ را مرکز شکل بگیریم. پس تنها ۱/۴ مسئله حل کرده و باقی می‌ماند.

با کمک شرایط مرزی به این جواب می‌رسیم.

$$\frac{T-T_1}{(\dot{q}L^2/k)} = \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{x}{L}\right)^2\right] - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\lambda_n L)^3}\frac{\cosh\lambda_n y}{\cosh\lambda_n l}\cos\lambda_n x$$

$$\lambda_n L = \frac{2n+1}{2}\pi \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

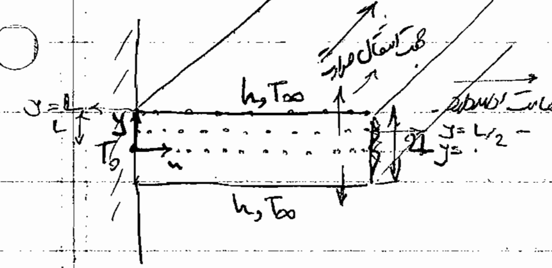
داده‌های مسئله:

$2L = 20\ cm$ و $2l = 10\ cm$ $\quad \dot{q} = 0.5\ MW/m^3 \quad T_1 = 20^\circ C \quad k = 20\ W/m^\circ C$

باید دما را در مرکز مختصات (۰و۰) می‌گذاریم.

میزان حرارتی که سطح بالا را ترک می‌کند که برابر پایین و حرارتی که سمت چپ را ترک می‌کند برابر حرارتی است که از سمت راست می‌رود.

مثال ۲. ورق بسیار طولانی در جهت x و z بر روی دیواره‌ای با دمای T_0 نصب شده است. ضخامت ورق **2L** می‌باشد. دو طرف این ورق در معرض محیطی با دمای T_∞ و ضریب جابجایی h قرار دارد. با توجه به شکل زیر معادله حاکم و شرایط مرزی را بنویسید. می‌توان نشان داد که توزیع دما به صورت زیر می‌باشد. برای این توزیع دما نمودار دما برحسب طول صفحه در 3 مقطع $y=0$ ، $y=\frac{L}{2}$ و $y=L$ ترسیم کنید.



انتقال حرارت را از سطح بالا و پایین در نظر می‌گیریم چون از سمت راست به بی‌نهایت می‌رسد.

Imp روی محور تقارن = مشتق برابر صفر است ← شرط مرزی اساسی می‌شه

$$\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\lambda_n L}{\lambda_n L+(\sin\lambda_n L)(\cos\lambda_n L)}e^{-\lambda_n x}\cos\lambda_n y$$

$\tan\lambda_n L = \frac{Bi}{\lambda_n L} \qquad Bi = \frac{hL}{k}$ $\quad$ اگر شرط مرزی i به این شرط تقارن برسد e داریم. (علامت e منفی است)

برخلاف مثال قبل که λ_n آنجا ساده‌تر بود در اینجا λ_n از ریشه‌های تساوی $\tan \lambda_n L$ با $\frac{Bi}{\lambda_n}$ است.

حالت‌های مسئله:

$2L = 6\ cm$

$h = 5\ W/m^2 °C$

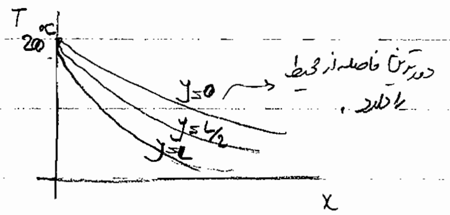
$K = 20\ W/m °C$

$T_0 = 200 °C$

$T_\infty = 0 °C$

نقطه‌ای که از Heat sink (چاله حرارتی) دورترین فاصله را دارد دمایش از همه بیشتر است.

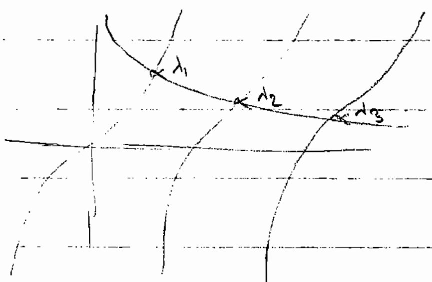
رسم تقریبی نمودار توزیع دما:



مرکز باید دمایش بیشتر باشد نسبت به چاله‌های دما (تقارن داشتیم)

زیرا در چاله‌های دما دو طرف، انتقال حرارت داریم.

$$\tan \lambda_1 (0.03) = \frac{(5 \times 0.03)/20}{\lambda_1 (0.03)}$$



که این ۲ تا عدد را سیستم در نقاط خودشان λ را می‌دهد.

روش ترسیمی:

1. Iso therm 2. Flow Line

براساس دو مفهوم مهم برقرار شده است:

۱. خطوط هم‌دما ۲. خطوط جریان

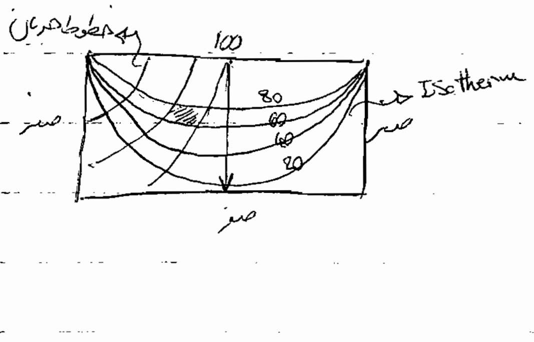
فلسفه روش: خطوط جریان بر خطوط هم‌دما باید عمود باشد.

در صنعت کاربرد ندارد این روش

ساحت چهارضلعی‌ها باید با هم برابر باشد..

در محل تقاطع خطوط جریان و هم‌دما ها باید بر هم عمود باشند.

فقط برای مسائل درسی کاربرد دارد که روی کاغذ باید رسم کنیم.



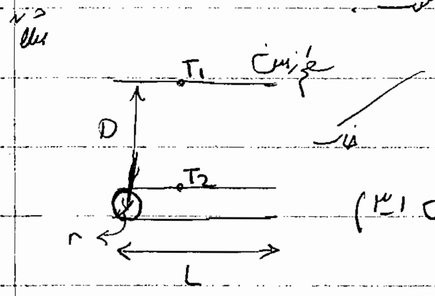
Conduction shape factor : ضریب شکل رسانش :

روش فوق به صورت زیر است که مهندسین با استفاده از رابطه زیر می توان تنها q را به دست آورد و دیگر توزیع دما دسترسی نخواهد داشت

$$-q = KS\Delta T$$

$$S = f(\text{پارامترهای هندسی})$$

در کتاب در جدول ۳-۱ برحسب پارامترهای هندسی مختلف S را داده است.



ضریب رسانش خاک

$$q = KS\Delta T$$

(جدول ۳-۱) $S = \dfrac{2\pi L}{\cosh^{-1}(\frac{D}{r})}$ or $S = \dfrac{2\pi L}{\ln(\frac{D}{r})}$

سپس شرایط محیطی را از این در استفاده کرده S را می یابیم.

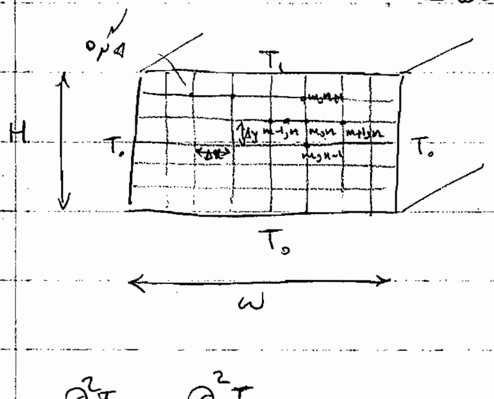
S و K و ΔT را داریم سپس q را می یابیم

هندسه حالت در جدول 3.1 به مورد 4.

Numerical Method روش عددی :

اساس روش عددی به صورت زیر است :

تبدیل معادله دیفرانسیلی به مجموعه‌ای از معادلات جبری و حل همزمان این معادلات.



قدم اول : شبکه‌ای بر روی این سطح منطبق می کنیم

نقاط تقاطع را گره (node) و فواصل را Δx و Δy می گیریم.

m در جهت x و n را در جهت y می گیریم شماره گذاری می کنیم.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m-1/2} = \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m+1/2} = \frac{T_{m,n} - T_{m+1,n}}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m-1/2} - \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{m+1/2}}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\Delta x^2}\left(T_{m-1,n} + T_{m+1,n} - 2T_{m,n}\right)$$

مشابهاً $$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\Delta y^2}\left(T_{m,n-1} + T_{m,n+1} - 2T_{m,n}\right)$$

if $\cancel{\Delta x = \Delta y}$ $\Rightarrow \frac{1}{\Delta x^2}\left(T_{m-1,n} + T_{m+1,n} - 2T_{m,n}\right) + \frac{1}{\Delta y^2}\left(T_{m,n-1} + T_{m,n+1} - 2T_{m,n}\right) = 0$

if $\Delta x = \Delta y$

$$\Rightarrow T_{m-1,n} + T_{m+1,n} + T_{m,n-1} + T_{m,n+1} - 4T_{m,n} = 0$$

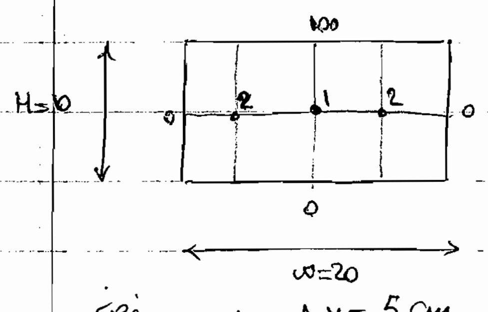
Finite Difference Method / روش تفاضل محدود

← یعنی دمای گره مورد نظر میانگین ۴ همسایه‌اش است.

توجه! پس برای یک گره داخلی از روش فوق استفاده می‌کنیم (نه گره مرزی)

مثال حل مسئله B

$\Delta x = \Delta y = 2.5$ cm



به دلیل تقارن

فرض: $\Delta x = \Delta y = 5$ cm → شبکه‌ای شد. ← اندازه دست خودمان است

دو مجهول گره ۱ و ۲ با داشتن دو معادله جبری

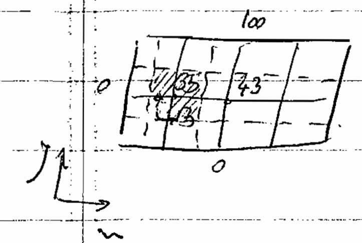
گره ①: $100 + T_2 + 0 + T_2 - 4T_1 = 0 \rightarrow 50 + T_2 - 2T_1 = 0 \rightarrow T_1 = \frac{1}{2}(50 + T_2)$

گره ②: $100 + 0 + 0 + T_1 - 4T_2 = 0 \rightarrow 100 + T_1 - 4T_2 = 0$

$\Rightarrow T_2 = 35.8\ ^\circ C \qquad T_1 = 43\ ^\circ C$

حل ۱

حل مسئله به روش عددی:



برای نقطه B می‌توان میزان انتقال حرارت و جهت را یافت.

در نقطه B باید حرارت را از 43° دریافت و به 0° برساند.

می‌توان برای نقطه B در جهت x یک معادله انرژی نوشت

نقطه B معرف یک حجم (مسائل سه‌بعدی) و یا یک سطح (مسائل دوبعدی) است.

به همین علت فاصله‌های dx و dy را نصف کرده که یک مربع با مستطیل‌های کوچک ایجاد می‌گردد که این فضا خلاصه‌شده در B

صحیح است هرچه فضا را کوچکتر بگیریم به نقطه نزدیکتر می‌گردد.

سطح مشترک نقطه B با نقطه با دمای 43° ($\Delta y.1$)

$$q_x = -\left(k\,\Delta y.1.\frac{43-35}{\Delta x}\right) + k\,\Delta y.1.\frac{35-0}{\Delta x}$$

چون خلاف جهت x است منفی می‌گردد.

خروجی - و یک در جهت x است

+ ←

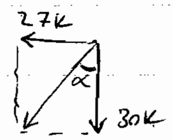
حجم و تولید نداریم

فرض: $\Delta x = \Delta y \Rightarrow -8k + 35k = q_x = 27k$

$$q_y = -k\Delta x.1.\frac{100-35}{\Delta y} + k\Delta x.1.\frac{35-0}{\Delta y} = -30k$$

خلاف جهت y

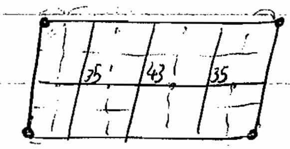
$$\boxed{q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2} = k\sqrt{27^2+30^2}}$$



Imp

$\tan\alpha = \frac{27}{30}$

$\alpha = \checkmark$



نقاط گوشه را مشکل داریم که منشأ خطا است برای سطح کلی در محاسبه

در مسائل عملی که تعداد نقاط زیاد است این نقاط چندان مشکل ایجاد نمی‌کنند ولی در مسائل عددی که تعداد نقاط کم است اگر T را سطح بالا یا پایین ثابت بگیریم تا حدی مسئله محسوس می‌شود پس در این حالت:

سطح بالا $q = \left[2k.\frac{\Delta x}{2}.1.\frac{100-0}{\Delta y} + 2k\,\Delta x\,\frac{100-35}{\Delta y} + k\Delta x\,\frac{100-43}{\Delta y}\right] \times -$ خلاف جهت y است

$$q = -\left[100k + 130k + 57k\right] = -287\,k \ \ w/m$$

نقطه مرزی را ۱۰۰ می‌گیریم یا صفر ولی اگر سطح بالا نقطه مرزی را صفر می‌گرفتیم از معادله صفر نیز انتقال حرارت خواهیم داشت پس تغییر در جهت خلاف هم خواهیم داشت ...

$$q_{\text{سطح پایین}} = -\left[2k\Delta x \cdot 1 \cdot \frac{35-0}{\Delta y} + k\Delta x\,\frac{43-0}{\Delta y}\right] = -113k \ \text{W/m}$$

$$q_{\text{سمت چپ}} = q_{\text{سمت راست}} \Rightarrow \frac{(287-113)k}{2} = 87k \ \text{W/m}$$

Boundary nodes:

نکته: گره‌هایی داشته باشیم که گره‌های مرزی بود.

در مسائل قبلی دماهای مرزی مشخص بود پس نیازی به نوشتن روابط مرزی نبود. ولی می‌توان مرزی داشت که

برای نوشتن معادله جبری از قاعده کیرشهف استفاده می‌کنیم:

محیط h, T_∞

$$\sum q_{\text{ورودی}} = 0$$

فضا را طوری انتخاب می‌کنیم که خلاصه شده باشد در نقطه (m,n)

رسانش از بالا، پایین، چپ و سمت راست جابجایی با سیال ⇐ انواع انتقال حرارت در (m,n)

فرض می‌کنیم همه ورودی باشند:

$$\underbrace{k\frac{\Delta x}{2}\cdot 1\cdot\frac{T_{m,n+1}-T_{m,n}}{\Delta y}}_{\text{بالا سر}} + k\Delta y\cdot 1\cdot\frac{T_{m-1,n}-T_{m,n}}{\Delta x} + k\frac{\Delta x}{2}\,\frac{T_{m,n-1}-T_{m,n}}{\Delta y} + h\Delta y\cdot 1\cdot(T_\infty - T_{m,n}) = 0$$

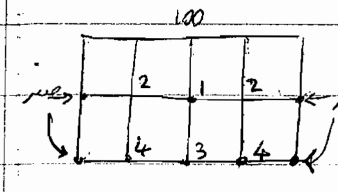
(معادله جبری گره‌های مرزی جابجایی)

$2\Delta x = \Delta y \Rightarrow$ ~~$T_{m,n+1} - T_{m,n}$~~

$$T_{m,n+1} + 2T_{m-1,n} + T_{m,n-1} + \frac{2h\Delta y}{k}T_\infty - \left(4 + \frac{2h\Delta y}{k}\right)T_{m,n} = 0$$

نکته: ضریب m,n با مجموع ضرایب دیگر باید باهم برابر باشد. Imp.

نقطه نوع ضریب ۲ دارد زیرا سطح مشترک آن ۲ دو برابر باقی است.



مثال: مثال قبل را با این شرایط حل می‌کنیم:

برای سادگی کار فرض می‌کنیم نقاط مرزی سطح پایین دمای $0\,°C$ دارند.

$k=20\ W/m\,°C$ $\quad \Delta y=\Delta x=5cm=0.05\,m$

$$① \quad 100+T_2+T_3+T_2-4T_1=0$$

$$② \quad 100+0+T_4+T_1-4T_2=0$$

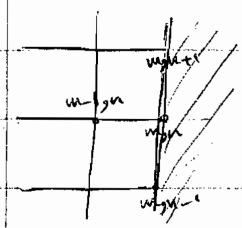
$$③ \quad T_4+T_4+2T_1+\frac{2\times5\times0.05}{20}\times0-\left(4+\frac{2\times5\times0.05}{20}\right)T_3=0$$

$$④ \quad 0+T_3+2T_2+\frac{2\times5\times0.05}{20}\times0-\left(4+\frac{2\times5\times0.05}{20}\right)T_4=0$$

حالت دوم: گره در مرز عایق شده

به جای جمله جابجایی صفر می‌گذاریم.

پس همان رابطه قبلی، به جمله جابجایی = صفر



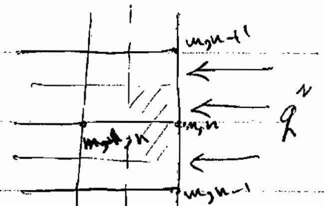
سوم: گره در معرض شار حرارتی ثابت:

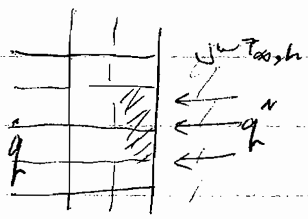
جمله جابجایی را برداشته و به جای آن

$q''\Delta y.1$ اضافه می‌کنیم به علاوه اینکه پس جابجایی نداریم

اما اگر عایق نباشد به جابجایی خواهیم داشت به هم $q''\Delta y.1$ هم جمله حرارتی خواهیم داشت

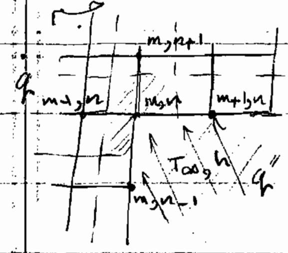
(۷) معمولاً سوال فرض می‌کنیم.





حالت چهارم: تولید انرژی داخلی:

تمام معادلات سر جای خود به علاوه $\dot{q}\,\Delta y\,\frac{\Delta x}{2}\times 1$ اضافه می‌کنیم



نسبت هاشور زده سه $\frac{3}{4}$ از مربع به فاصله نقطه m,n

چند پدیده دارد:

4 آثار رسانش، 2 جابجایی (در جهت x و y)، 2 تشعشع حرارتی، 1 تولید انرژی داخلی

همه را ورودی فرض می‌کنیم

$$\text{(آثار رسانش)}\quad k\,\Delta x\,\frac{T_{m,n+1}-T_{m,n}}{\Delta y}+k\,\Delta y\,\frac{T_{m-1,n}-T_{m,n}}{\Delta x}+k\,\frac{\Delta x}{2}\,\frac{T_{m,n-1}-T_{m,n}}{\Delta y}+k\,\frac{\Delta y}{2}\,\frac{T_{m+1,n}-T_{m,n}}{\Delta x}$$

$$\text{(جابجایی)}\quad +\,h\,\frac{\Delta x}{2}\left(T_\infty-T_{m,n}\right)+h\,\frac{\Delta y}{2}\left(T_\infty-T_{m,n}\right)$$

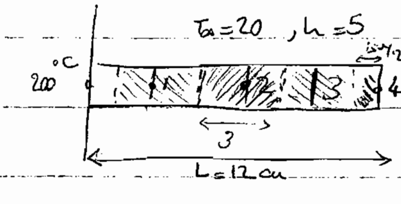
$$\text{(تشعشع)}\quad +\,q''\,\frac{\Delta x}{2}+q''\,\frac{\Delta y}{2}$$

$$\text{(تولید انرژی)}\quad +\,\dot{q}\,\overbrace{\left(\Delta x\cdot\frac{\Delta y}{2}+\frac{\Delta x}{2}\,\frac{\Delta y}{2}\right)}^{\frac{3}{4}\,V}=0$$

اگر عایق بود به جابجایی و تشعشع حذف می‌شد به علاوه اگر یک سمت عایق باشد تمام جملات حذف می‌شوند

مثال: میله‌ای است به قطر 5mm طول 12mm با ضریب رسانش $10\ \frac{W}{m^\circ C}$. میله در روی سطحی به دمای $200^\circ C$ نصب شده است و در معرض محیطی است به دمای $20^\circ C$ و ضریب انتقال حرارت جابجایی $5\ \frac{W}{m^2\,^\circ C}$. توزیع دما در این میله را به طول تا هر نقطه با استفاده از روش عددی به دست آورده با حل کلی مقایسه کنید.

$k=10$



اگر این طور بگیریم وسط ← دیگر نمی‌شه if $\Delta x=2$

$\Delta x=3$ ← به ۴ نقطه تبدیل کردیم ← با این حل می‌رسیم ✓

۴ نقطه داریم که ۱ و ۲ و ۳ به لحاظ پدیده‌ها یکی ولی نقطه 4 متفاوت است.

4 معادله جبری خواهیم داشت: (همه ورودی فرض می‌شه)

رسانش از سمت سر

$$i=1,2,3\Rightarrow kA\,\frac{T_{i-1}-T_i}{\Delta x}+kA\,\frac{T_{i+1}-T_i}{\Delta x}+h\overbrace{P\Delta x}^{\Delta A}\left(T_\infty-T_i\right)=0$$

از سطح انتها

$$i=4\Rightarrow kA\,\frac{T_{i-1}-T_i}{\Delta x}+hP\,\frac{\Delta x}{2}\left(T_\infty-T_i\right)+hA\left(T_\infty-T_i\right)=0$$

اگر انتها را عایق شده فرض می‌کردیم جمله صفر می‌شد.

$$T_1 = \frac{1}{2.36}\left(200 + T_2 + 7.2\right)$$

$$T_2 = \frac{1}{2.36}\left(T_1 + T_3 + 7.2\right)$$

$$T_3 = \frac{1}{2.36}\left(T_2 + T_4 + 7.2\right)$$

$$T_4 = \frac{1}{1.195}\left(T_3 + 3.9\right)$$

در این مسئله میله 5mm قطر و 12 طول بعد از تغییرات دما در جهت x صرف‌نظر شده یک بعدی

روش حدس و خطا:

حدس اول

T_1	0	87.79	104.85	—	121.01
T_2	0	40.25	56	—	78.80
T_3	0	20.10	35.31	—	58.38
T_4	0	20.13	32.81	—	52.12

مبنا و اختلاف ۲ عدد متوالی از عدد کمتر باشد.

از انتقال حرارت درس نقطه شده

روش تحلیلی θ $\quad \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$ $\qquad m = \sqrt{\frac{hP}{KA}} = 2.4$

	0.03	0.06	0.09	0.012	
T_{Ana}	120.65	78.61	58.39	52.39	تقریباً برابر شد
T_{num}	121.01	78.80	58.38	52.12	→ واقعی را داریم

تفاوتش بیشتر از این است

همواره باید عددی را با تحلیلی مقایسه کنیم و مشخص با کدام است.

مثال $\frac{11}{7}$

نکات تکمیلی

اگر مسئله سه بعدی بود شبکه با مختصات k, n, m بود.

در مسئله ۳ بعدی دمای هر گره متوسط ۶ دمای همسایه‌اش می‌شود.

حد قوانین کیرشهف را به صورت ورودی برای ۶ جهت می‌نویسیم. این روابط را برای

سیم پیچی است به شعاع 2mm با تولید انرژی داخلی 0.5 $\frac{W}{m^3}$ سطح سیم در معرض محیط به دمای °0 و ضریب انتقال حرارت جابجایی 10 $\frac{W}{m^2C}$ قرار دارد. ضریب رسانش سیم 10 $\frac{W}{m°C}$ است. مطلوب است توزیع دما در این سیم با استفاده از هر دو روش کلاسیک و عددی.

کلاسیک: $\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+\frac{\dot{q}r}{k}=0$

$r=0 \quad \frac{dT}{dr}=0$

$r=R \quad -k\frac{dT}{dr}=h(T-T_\infty)$

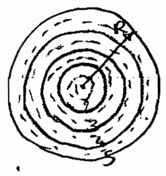
$$T=-\frac{\dot{q}r^2}{4k}+\frac{\dot{q}R^2}{4k}+\frac{\dot{q}R}{2h}+T_\infty$$

$r=0-R=0-2 \text{ mm}$

r را به گام‌های مختلف می‌دهیم به نقطه‌ها را تقسیم می‌کنیم.

روش عددی:

در این روش سیم را به المان‌هایی تقسیم می‌کنیم



$\Delta r=0.5 \text{ mm}$

ابتدا مشخص می‌کنیم چند نقطه گره داریم. (در ۵ نقطه گره داریم)، از لحاظ پدیده تنها ۳ گره داریم، ۱ و 5 منحصر به فرد و ۲ و ۳ و ۴ یکسان، پس ۳ معادله جبری را باید اثبات کنیم.

ابتدا فاصله بین ۱ و ۲ است را نصف می‌کنیم نصف آن می‌دهیم به نقطه ۱ و نصف دیگر را به نقطه ۲. به همین ترتیب فاصله‌ها را نصف می‌کنیم.

پدیده‌های ۱ ← رسانش با ۲ و تولید انرژی داخلی.

طول سیم — فاصله نقاط مرکزی

$$① \quad k\times 2\pi\frac{\Delta r}{2}\times 1\times\frac{T_2-T_1}{\Delta r}+\dot{q}\,\pi\left(\frac{\Delta r}{2}\right)^2\times 1=0$$

۲، ۳، ۴

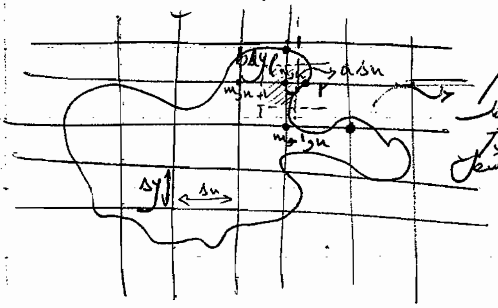
پدیده‌های ۲ ← رسانش با ۱ و ۳ و تولید انرژی داخلی.

$$②,③,④ \rightarrow k2\pi\left[(i-1)\Delta r-\frac{\Delta r}{2}\right]\frac{T_{i-1}-T_i}{\Delta r}+k2\pi\left[(i-1)\Delta r+\frac{\Delta r}{2}\right]\frac{T_{i+1}-T_i}{\Delta r}+$$
$$\dot{q}\pi\left[\left((i-1)\Delta r+\frac{\Delta r}{2}\right)^2-\left((i-1)\Delta r-\frac{\Delta r}{2}\right)^2\right]$$

پدیده‌های ۵ ← رسانش با ۴، تولید و جابجایی:

$$⑤ \rightarrow k2\pi\left(R-\frac{\Delta r}{2}\right)\times 1\times\frac{T_4-T_5}{\Delta r}+\dot{q}\left[\pi R^2-\pi\left(R-\frac{\Delta r}{2}\right)^2\right]+h2\pi R(T_\infty-T_5)=0$$

فرض می‌کنیم پله‌ای بلند با سطح مقطع این طور داریم (نامنظم و نامتقارن) و آن را شبکه‌بندی می‌کنیم.



فاصله $a\Delta x$ و $b\Delta y$ ، Δx و Δy اطراف آن را نصف می‌کنیم. مستطیلی پدید می‌آید که نقطه m,n در وسط آن قرار نمی‌گیرد. معادله گره‌ها را می‌نویسیم.

$a\Delta x$ ← فاصله نقطه m,n تا حد مرز

بالا — پشت سر — پایین — راست (روبرو)

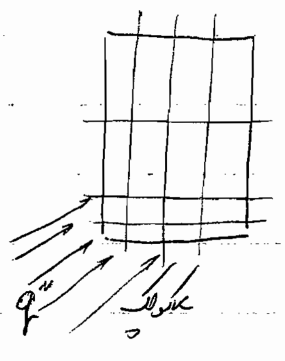
$$k\left(\frac{\Delta x}{2}+\frac{a\Delta x}{2}\right)\frac{T_2-T_{m,n}}{b\Delta y}+k\left(\frac{\Delta y}{2}+\frac{b\Delta y}{2}\right)\frac{T_{m-1,n}-T_{m,n}}{\Delta x}+k\left(\frac{\Delta x}{2}+\frac{a\Delta x}{2}\right)\frac{T_{m,n-1}-T_{m,n}}{\Delta y}$$
$$k\left(\frac{\Delta y}{2}+\frac{b\Delta y}{2}\right)\frac{T_1-T_{m,n}}{a\Delta x}=0$$

معادله جبری برای گره‌های داخلی نزدیک مرز منحنی الشکل

اگر $b=a=1$ باشد ← معادله حاصل همان معادله گره داخلی در می‌آید.

می‌تواند Δx و Δy مساوی باشد یا نباشد ولی می‌توانند Δx و Δy متغیر باشد.

فرض می‌کنیم دیوار ساختمان (یعنی کم‌عرض) داریم که در معرض جریان شار حرارتی قرار گرفته، یعنی در طول تابش شار گرم و در بالا (انتها) سرد است.

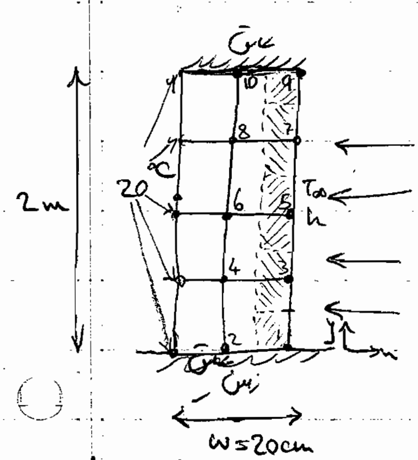


Δy را برابر فرض کردیم ولی در جهت x اختلاف دما زیاد است تعداد گره‌ها را زیاد در نظر می‌گیریم.

فرض ← $\Delta x_{i+1}=\sqrt{2}\,\Delta x_i$

مثال حل فصل 5 خواهیم دید $h=f(y)$ است ← تابع y است.

تمرین 8



اگر فرض شود $h=f(y)$ باشد ← شرط مرزی متغیر خواهیم داشت ← مشکلی نیست، عددی حل است.

تقارن نداریم چون h پایین با h بالا فرق می‌کند ← پس تقارن هندسی نداریم)

به خاطر وجود شار حرارتی ← اندکی از آن شار حرارت اندکی گرما به محیط و اندکی به دیوار منتقل می‌شود.

$q''=1000\ W/m^2$

$T_\infty=20\,^{\circ}C$

$K=1\ W/m\,^{\circ}C$

$h=10\,(1+0.5y^{3/4})$

گره‌ها ← ... ۱، ۲، ۳ ، شار حرارتی جابجایی با محیط

$\Delta x=0.1$

$\Delta y=50\ cm$

$y_1=0$

$y_3=0/5$

$y_5=1$

اگر سطح چپ دیوار هم عایق بود آنگاه هم این گره‌ها مجهول بودند و ... تمام شار حرارتی دریافتی دیوار باید از طریق جابجایی به محیط بازگردد.

جلسه ۱۲

chapter 4:   فصل ۴:

Unsteady Conduction   رسانش ناپایا

در این فصل شرایطی مطرح می‌شود که تغییرات دما با زمان همراه باشد.

$T = f(\text{مکان}, \underset{\text{زمان}}{t}) = ?$

مکان می‌تواند یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی باشد.

از همان معادله عمومی رسانش شروع می‌کنیم و جمله سمت راست دیگر صفر نیست، و علاوه بر شرایط مرزی باید «شرط اولیه» هم اعمال گردد.

حالتی وجود دارد که می‌توان مسئله را ساده‌تر کرد. یک مسئله رسانش ناپایا را می‌توان با دو فلسفه فرمول‌بندی کرد:

Formulation

۱- انباشته، متمرکز lumped:

فرض می‌کنیم $T = f(t)$ باشد و شرایطی وجود داشته باشد که از تابعیت T نسبت به مکان صرف نظر شود.

۲- Distributed: فرض می‌گردد $T = f(\text{مکان}, t)$

۱- تحلیلی Analytical ← { دیفرانسیلی Differential، انتگرالی Integral }

۲- ترسیمی Graphical

۳- عددی Numelical

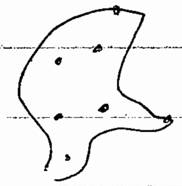
روش عددی بسیار پرکاربرد است

سیستم با ظرفیت گرمایی انباشته: Lumped Heat Capacity System

هدف: تغییر T را تابعی از زمان می‌خواهیم.

یک قطعه با یک شکل منظم / غیرمنظم داریم. این قطعه در ابتدا همه‌جا دمایش T_i است. سپس به طور ناگهانی قطعه را داخل یک جریان با T_∞ و h می‌اندازیم (با فرض اینکه دمای محیط یکنواخت است) (با فرض اینکه ضریب انتقال حرارت h هم به طور ناگهانی است.)

بنابراین فرض اولیه، دما در نقاط مختلف هم‌دما باید در نظر گرفته شود. (تغییرات دما به طور یکنواخت هم‌زمان با یکدیگر باشد)



$T = f(t) = ?$

$T(t=0) = T_i$

h, T_∞ — به طور یکنواخت

فرض: $T_i > T_\infty$ (در یک جسم هر شکلی ای دفع کند)

موازنه انرژی گرما:

ورودی نداریم — تولید نداریم

$$0 - hA(T - T_\infty) + 0 = \rho c V \frac{dT}{dt}$$

با فرض ثابت بودن h و c, ρ, V انتگرال می گیریم

$$\int_{T_i}^{T} \frac{dT}{T - T_\infty} = \int_0^t -\frac{hA}{\rho c V}\, dt$$

دما برحسب زمان:

$$\Rightarrow \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-\frac{hA}{\rho c V} t}$$

در چه شرایطی از این روش (معادله) استفاده می کنیم:

جسم رسانا ۱ـ k خیلی بزرگ داشته باشیم یعنی وقتی ضریب رسانش k بالا باشد انتقال حرارت به سرعت از مرکز به سطح می رسد

۲ـ سطح کوچک باشد. (اندازه کوچک) که هندسه

۳ـ h باید کوچک باشد که انتقال حرارت کند صورت گیرد، زیرا اگر h بالا باشد انرژی فرصت دارد که از مرکز به سطح آید و گرادیان دمایی داشته باشد.

عدد بدون بعد به نام Biot تعریف شده که کمک می کند ... صورت کسر ندارد.

$B_i = Biot\ No = \frac{hS}{k}$

$S = \frac{V}{A}$ ~ که از این به حجم یا سطح اندازه

سطح: سطحی که انتقال حرارت روی آن صورت می شه.

if $B_i \le 0.1 \rightarrow$ LHCS ✓ می توان از این فرمول استفاده کرد.

همواره در این گونه مسائل اول عدد B_i را حساب کرده اگر کمتر از ۰.۱ بود از این روش می رویم.

چون پارامترهای K و h و S نسبی است:

برای یک بلوک مربع به ضلع L می‌خواهیم بدانیم L چه قدر باشد که از LHCS استفاده کنیم؟

	K	h ($W/m^2{}^\circ C$) هوا 5	100	1000
مس	400	48	2.4	0.25
آهن	50	6	0.3	0.03
آجر	1	0.12	0.06	0.006

$$\delta_{\text{بلوک}} = \frac{V}{A} = \frac{L^3}{6L^2} = \frac{L}{6} \qquad \frac{hL}{6k} = 0.1$$

که حداکثر عدد Bi

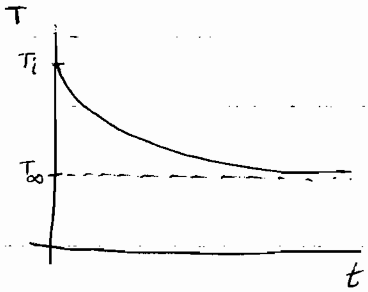
حال اعداد داخل جدول را پر می‌کنیم:

$$L = \frac{0.6k}{h}$$

یعنی اگر مکعب مسی با $L=48$ را داشتیم می‌توانیم آن را Lumped در هوا با $h=5$ فرض کرد و اگر درون آب با $h=100$ باشد باید مکعب کوچکتر گردد. ← در هوا مس را همیشه می‌توان Lumped فرض کرد.

← نتیجه جدول:

اعداد K (بزرگ)، h (کوچک)، S (کوچک) نسبی هستند ← باید هر سه را باهم دید.



$$\frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty} = e^{-\frac{hA}{\rho cv}t}$$

در این معادله پارامتر $\frac{hA}{\rho cv}$ داریم که عکس زمان است ← چون t بُعد دار است این پارامتر هم باید $1/s$ باشد که آن را $\bar{t}$ نمایش می‌دهیم.

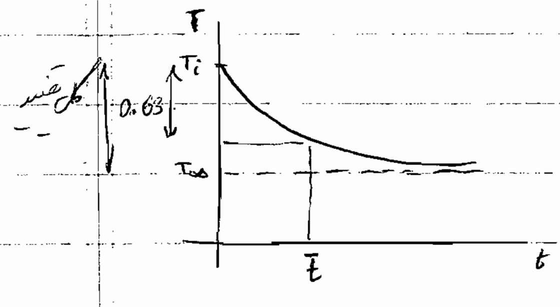
$$\bar{t} = \frac{\rho cv}{hA} = \text{Time Constant}$$

$$\Rightarrow \frac{T-T_\infty}{T_i-T_\infty} = e^{-t/\bar{t}}$$

$$\text{If} \quad t=\bar{t} \Rightarrow T-T_\infty = (T_i-T_\infty)\,e^{-1}$$

که ۶۳٪ از انرژی می‌آید

Imp تعریف t ← مدت زمانی که بگذرد و 63% از کل فرایند یا صورت بگیرد.



کاربرد $\bar{t}$:

در تمام تجهیزات اندازه‌گیری (دماسنج، فشارسنج و ...) در کاتالوگ آن t (ثابت زمانی) ذکر شده یعنی ثابت زمانی یکی از مشخصات دستگاه، t است. هرچه $t\downarrow$ ← حساسیت نسبت به تغییرات دما $\uparrow$

← به طور مثال اگر دماسنج را داخل آب 100° بگذاریم هرچه t کمتر باشد حساسیت نسبت به تغییرات دما بیشتر است و زودتر به 100° می‌رسد.

در صنعت مثل سیستم اندازه‌گیری دما شعله گاز باید t آن $\uparrow$ باشد و ثابت زمانی آن زیاد باشد که مدام قطع و وصل نشود.

← گاهی t دستگاه را زیاد و گاهی کم در نظر می‌گیریم. در کارهای تحقیقاتی بیشتر مورد نظر است ← $t\downarrow$

اگر قطر سیم ترموکوپل کوچک باشد $\frac{V}{A}\downarrow \Rightarrow t\downarrow$ ← $\bar{t}\downarrow \to \frac{V}{A}\downarrow$

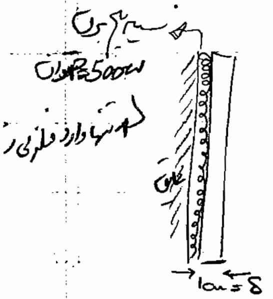
ترموکوپل کلفت $\frac{V}{A}\uparrow \to t\uparrow$.

← در ترموکوپل ρc دست ما نیست. پیام را بستر محیط اطراف است. پس با $\frac{V}{A}$ بازی می‌کنیم تا t را کم و زیاد کنیم.

در تمام پدیده‌هایی که ناپایداری داشته باشیم مفهوم 63% پیش می‌آید حتی در اقتصاد.

مثال: اتو برقی با توان 500 W که سطح صفحه آن برابر $300\ cm^2$ است. ضخامت صفحه 1cm و یک سمت آن کاملاً عایق شده است. اتو در هوای با دمای 20° قرار دارد. با روشن کردن آن و گرم شدن سطح صفحه انتقال حرارت جابجایی با $h = 5\frac{W}{m^2{}^\circ C}$ با فرض ثابت بودن با هوا برقرار می‌کند. مطلوب است،

نمودار تغییرات دمای صفحه اتو با زمان. دمای نهایی اتو در صورتی که فاقد ترموستات باشد چقدر است P



فرض می‌کنیم h ثابت باشد ولی در حقیقت تابعی از t است زیرا T تابعی از t است با زیاد شدن t

$T\uparrow$ شده در نتیجه جنبش مولکول‌ها $\uparrow$ ← $h\uparrow$

h

T_∞ دمای محیط بیرون صفحه (استیل)

$$\underbrace{P}_{\text{ورودی}} - \underbrace{hA(T-T_\infty)}_{\text{خروجی}} + 0 = \rho c A \delta \frac{dT}{dt}$$

0: خود صفحه استیل تولید ندارد و انرژی از سیم گرمکن است

$A = 300\ cm^2$

شرط اولیه $T(t=0)=T_\infty=20^{\circ}C$

مثل اینکه اتو به برق نزنیم دمای سطح اتو هم دمای اتاق بود.

← رسانش را در نظر نمی‌گیریم زیرا اگر رسانش را در نظر می‌گرفتیم ($T=f(x, \ldots)$ مطرح می‌شد ← ولی تغییرات دما نسبت به مکان ثابت است.

← ابتدا با $Bi=\frac{h\delta}{k}$ را اندازه می‌گرفتیم.

رسم نمودار ← اشکال می‌گیریم

← اگر ترموستات خراب باشد ∞ دمای آن $\uparrow$ می‌شد در نهایت sys به حالت SS خواهد رسید.

$t\to\infty$

$$\frac{dT}{dt}=0 \rightarrow \boxed{T=T_\infty+\frac{P}{hA}}$$ دمای نهایی

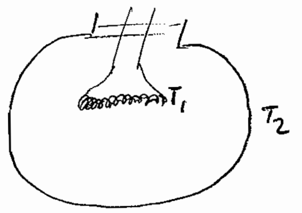
که اگر ترموستات داشتیم در این دما قطع می‌کرد sys را

یعنی مسئله SS می‌شود که P ورودی از طریق جابجایی خارج گردد یعنی P = انرژی جابجایی خروجی

$$P=hA(T-T_\infty)$$

مثال: یک لامپ 100w از سیمی به قطر 50μm و طول 10cm ساخته شده است. سیم درون حباب شیشه‌ای به قطر 10cm قرار دارد. لامپ ابتدا خاموش و در تعادل با هوای اتاق در 20° است. به طور ناگهانی لامپ روشن شده و انرژی درون سیم آزاد می‌شود. معادلات لازم برای حل این مسئله را برای سیم و حباب شیشه‌ای بنویسید. ضخامت حباب شیشه 0.2mm است. (برای حل نیاز به تبدیل لاپلاس است)

برای حل دو ناحیه: ۱- سیم ۲- حباب شیشه‌ای داریم.



$$\begin{cases} T_1(t=0)=T_\infty \\ T_2(t=0)=T_\infty \end{cases}$$

بعد از روشن کردن داخل سیستم هم ورودی نداریم ولی خروجی (سیستم به اطراف گرمایش دما، تشعشع می کند) داریم و تولید داریم ← پس تجمع هم داریم.

برای حساب سه تشعشع سیستم هم را دریافت (ورودی) مقداری از تشعشع را جذب و مقداری را به عنوان نور خارج می کند. مقداری را هم که جذب کرده از طریق ... جابجایی به محیط می دهد.

حساب

تشعشع از سیستم 80% = ورودی

خروجی = Convection

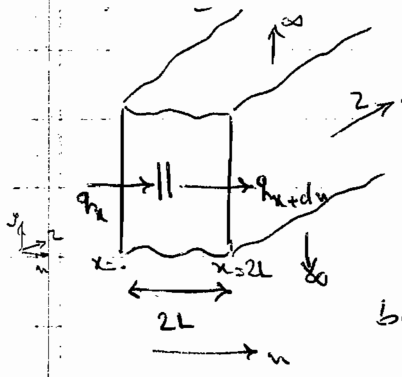
تجمع آن تولید و مصرف در سیستم = تولید و مصرف

تجمع $\neq 0$

جلسه ۱۳

Analytical Method (Distributed Formulation)

دیواری به ضخامت 2L در جهت y تا بی نهایت و در جهت z هم تا بی نهایت ادامه دارد. بنابراین تنها جهت x اش محدود است. اگر تمام نقاط سطوح هر دو طرف دیوار را 100° برسانیم (ابتدا همه اول همه 100° باقی بمانند) دما از لایه ... به لایه های داخلی می رود. در نتیجه حالت یک بعدی در جهت x داریم.



ابتدا

در کلیه نقاط $T = T_0$

به طور ناگهانی

$$x=0 \;,\; x=2L \longrightarrow T=T_1$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} \quad * \quad \text{هدایت}$$

$$\longrightarrow \underbrace{q_x - q_{x+dx}}\; + 0 = \rho c A\, dx \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(kA\frac{\partial T}{\partial x}\right)dx = \rho c A\, dx \frac{\partial T}{\partial t}$$

با فرض $k = \text{constant}$ به معادله * می رسیم

دو شرط مرزی و یک شرط اولیه می خواهیم.

$T(0,t) = T_1$ شرط مرزی

$T(2L,t) = T_1$ 〃

$T(x,0) = T_0$ 〃 ⟶ دما در کلیه نقاط در زمان صفر

$\theta = T - T_1 \qquad \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\partial \theta}{\partial t} \qquad \begin{cases} \theta(0,t) = 0 \\ \theta(2L,t) = 0 \\ \theta(x,0) = \theta_0 \end{cases}$

$\theta = X(x)\cdot \tau(t) \qquad \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \tau \dfrac{d^2 X}{dx^2}$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = X \frac{d\tau}{dt}$$

$\Rightarrow \tau \dfrac{d^2 X}{dx^2} = \dfrac{1}{\alpha} X \dfrac{d\tau}{dt}$

جداسازی متغیرها:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{dt} = \begin{matrix} -\lambda^2 \\ 0 \\ +\lambda^2 \end{matrix}$$

صفر هم که جواب نیست چون

$X = Ax + B \qquad \tau = c \qquad \theta = c(Ax + B)$

چون دارای اصلاً وابستگی به زمان نشان نداده و از نقطه نظر فیزیکی غلط است.

if $= -\lambda^2$

$\dfrac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \qquad X = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x$

$\dfrac{d\tau}{dt} = -\alpha\lambda^2\tau \qquad \tau = c\, e^{-\alpha\lambda^2 t}$

$\theta = T - T_1 = (A'\sin\lambda x + B'\cos\lambda x)\, e^{-\alpha\lambda^2 t}$

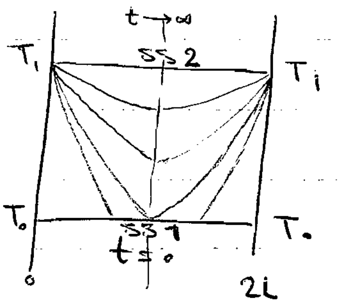
B.C.1 $\quad 0 = [A'(0) + B'(1)]\,\tau \qquad B' = 0$

B.C.2 $\quad 0 = [A'\sin\lambda \times 2L]\,\tau \qquad \sin 2\lambda L = 0 \qquad 2\lambda L = k\pi \qquad \lambda = \dfrac{n\pi}{2L}$

B.C.3 $\quad \dfrac{\theta}{\theta_1} = \dfrac{T - T_1}{T_0 - T_1} = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2 \alpha t} \sin\frac{n\pi}{2L}x$

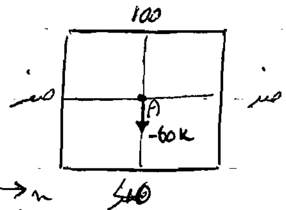
$T = F(x,t)$ ✓

if $t \to \infty$ $T = T_1$ به حالت 2 ، S.S می رسیم



حل ۱۴

مثال ۲ کتاب a



1- $T_A = \frac{1}{4}(100+0+40+0) = 35^\circ C$

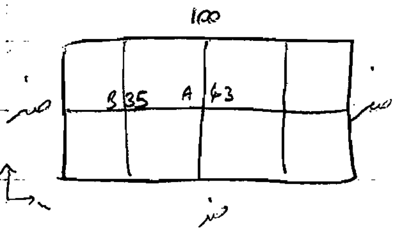
هدف نوشتن میزان حرارت در جهت x و y گرما در نقطه A : دقت کن

در جهت x می نویسیم $q_x = k\Delta y\,\frac{0-35}{\Delta x} + k\Delta y\,\frac{35-0}{\Delta x} = 0$

واحد و نقطه مثل شرایط نقطه ی مرزی

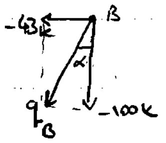
$$q_y = k\Delta x\,\frac{40-35}{\Delta y} + k\Delta x\,\frac{35-100}{\Delta y} = k[40-100] = -60k$$

که خلاف جهت است.



2- B) $\vec{q}_x = k\Delta y\,\frac{0-35}{\Delta x} + k\Delta y\,\frac{35-43}{\Delta x} = k(0-43) = -43k$

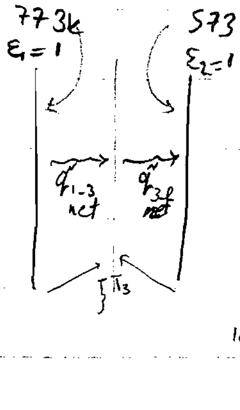
$$q_y = k\Delta x\,\frac{0-35}{\Delta y} + k\Delta x\,\frac{35-100}{\Delta y} = k(0-100) = -100k$$



$$q_B = \sqrt{(43)^2 + (100)^2}\;k =$$

سوال ۵

حل ۵!



$$q_{1-2/A\,net} = \sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

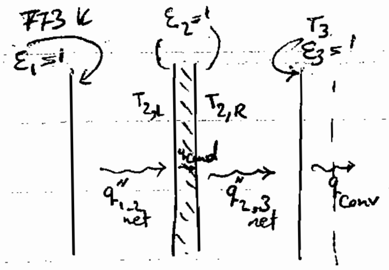
دقت کنید این سطر در تعادل است ← T_3 در هر دو طرف صفحه یکسان است $0 = \frac{\partial T}{\partial x}$

$\varepsilon_{3l} = \varepsilon_{3r} = 1$

$$q''_{1-3\,net} = \sigma(T_1^4 - T_3^4)$$

$$q''_{3-2\,net} = \sigma(T_3^4 - T_2^4)$$

$$q''_{1-3\,net} = q''_{3-2\,net} \checkmark \quad , \quad T_3 \checkmark$$



$\delta = 5cm$

$k=1$

$h=5$

$T_\infty = 300K$

تمامی q ها با هم برابر است / به ازای واحد سطح داریم:

$$q'' = q''_{1-2_{net}} = \sigma\left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

$$q'' = q_{cond} = \frac{k}{\delta}\left(T_{2L} - T_{2R}\right)$$

$$q'' = q''_{2-3_{net}} = \sigma\left(T_2^4 - T_3^4\right)$$

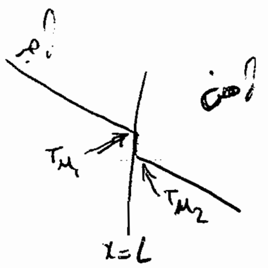
$$q'' = q_{conv} = h\left(T_3 - T_\infty\right)$$

اگر هم Rad داشتیم در کنار T_3 این طور می‌نوشتیم:

$$q'' = h\left(T_3 - T_\infty\right) + \sigma T_3^4$$

مقاومت تماس:

دلبخواه



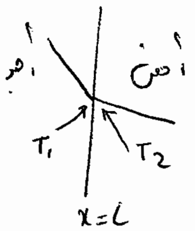
$x = l \qquad T_1 = T_{M_1}$

$T_2 = T_{M_2}$

$$\cancel{\frac{\partial T_1}{\partial x} = \frac{\partial T_2}{\partial x}} \qquad q = -k_1\frac{dT_1}{dx} = -k_2\frac{dT_2}{dx}$$

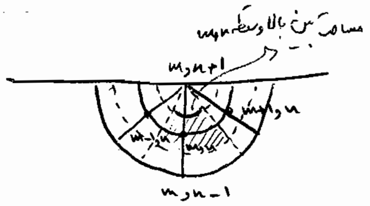
جریانی که به سطح وارد می‌شود با جریانی که از سطح خارج می‌گردد با هم برابرند و مقاومت تماس ناچیز باشد.

برابر با یه



$T_1 = T_2$

$$-k_1\frac{\partial T_1}{\partial x} = -k_2\frac{\partial T_2}{\partial x}$$



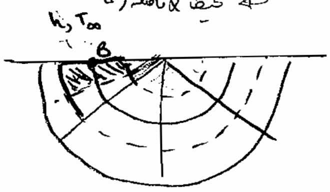
نوشتن معادله جبری برای این شکل:

در اینجا کشیدیم ... فاصله‌ها را نصف می‌کنیم

چهار تا معادله می‌نویسیم.

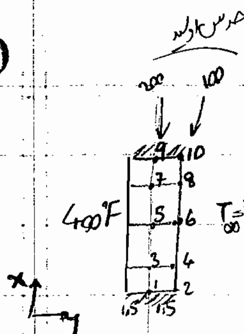
$$\Rightarrow \quad k2\pi\frac{\Delta r}{2}\cdot 1\,\frac{\Delta\theta}{2\pi}\,\frac{T_{m,n-1}-T_{m,n}}{\Delta r} + k\,2\pi\,\frac{3\Delta r}{2}\times 1\,\frac{\Delta\theta}{2\pi}\,\frac{T_{m,n-1}-T_{m,n}}{\Delta r}$$

$$+\,k\cdot\Delta r\cdot 1\,\frac{T_{m+1,n}-T_{m,n}}{2\pi\Delta r\frac{\Delta\theta}{2\pi}} + k\,\Delta r\cdot 1\,\frac{T_{m+1,n}-T_{m,n}}{2\pi\Delta r\frac{\Delta\theta}{2\pi}} = 0$$



$$q_{conv} = \Delta r\cdot 1\cdot h\left(T_\infty - T_B\right)$$

سؤال 46 فصل 3:



① $h_x = 0.22\,(T_w - T_\infty)^{1/4}\, x^{-1/4}$

② h ثابت

برای حالت دوم مسئله یک بعدی نیست زیرا دیگر h ثابت است. اینجا دما در جهت x ثابت فرض نمی‌کنیم لذا دما در جهات x و y خواهد بود

ولی برای حالت اول هم مسئله دو بعدی در جهت x و y متغیر است. در حالت بالا چون h تابعی از x است تغییر می‌کند.

شبکه‌بندی نقطه‌ها متفاوت است و برای هر x یک h جداگانه استفاده می‌کنیم.

$\Delta y = 1.5$ in

$\Delta x = 3$ in

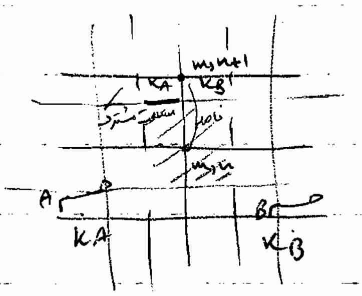
هرچه h ↓ مقاومت ↑ ⟸ مقاومت $\frac{1}{hA}$ ↑

- یک کره توپر یک بعدی به هم $\frac{\dot q}{k}$ را دارد. زیرا از این صورت هم دلیلی برای انتقال وجود ندارد.

کره توپر $\quad \frac{1}{r}\frac{d^2(rT)}{dr^2} + \frac{\dot q}{k} = 0$

دیگر نمی‌توانیم $\frac{\dot q}{k}$ را داشت یا داشت (چون امکان انتقال به وجود دارد)

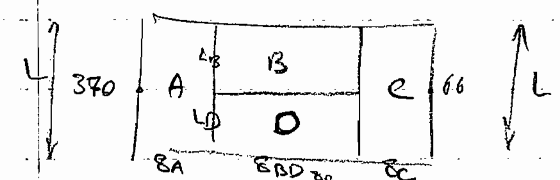
$$0 = \frac{1}{r}\left[r\frac{d^2T}{dr^2} + 2\frac{dT}{dr}\right] + \frac{\dot q}{k} = 0$$

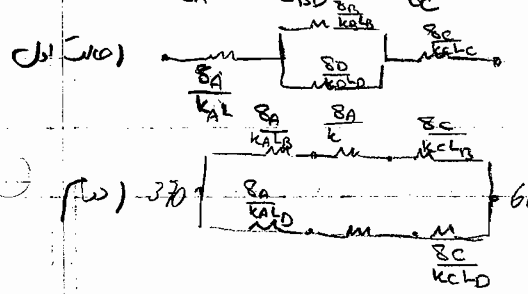


$$k_B \frac{\Delta x}{2}\cdot 1\cdot \frac{T_{m,n+1}-T_{m,n}}{\Delta y} + k_A \frac{\Delta x}{2}\cdot 1\cdot \frac{T_{m,n+1}-T_{m,n}}{\Delta y} + \dots$$

سؤال 4 فصل 2:

انتقال حرارت یک بعدی نداریم

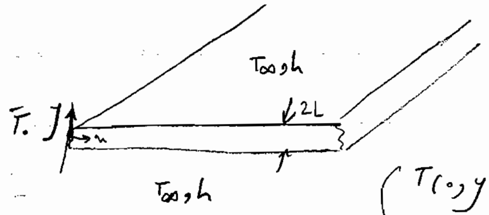




$$q = \frac{370 - 66}{\sum R}$$

« اندکی از جلسه ۱۳ »

مثال ورق طولانی در جهت x :



رابطه حاکم $\quad \dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$

$$\begin{cases} T(0,y) = T_0 & \text{غیرهمگن} \\ T(\infty,y) = T_\infty & \text{غیرهمگن} \\ \dfrac{\partial T(x,0)}{\partial y} = 0 \longrightarrow & \text{چون روی محور تقارن است.} \\ -k\dfrac{\partial T(x,L)}{\partial y} = h\left(T(x,L) - T_\infty\right) & \text{غیرهمگن} \end{cases}$$

هر جا محور تقارن داشتیم مشتق $\dfrac{\partial T}{\partial y}$ صفر می‌شود.

or $\quad -k\dfrac{\partial T(x,-L)}{\partial y} = h\left(T(x,-L) - T_\infty\right)$

معادله حاکم همگن است.

$\theta = T - T_\infty \qquad \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$

$$\begin{cases} \theta(0,y) = \theta_0 \\ \theta(\infty,y) = 0 \end{cases} \Big\} \longrightarrow \text{جهت } x$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta(x,0)}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \theta(x,L)}{\partial y} = -\dfrac{h}{k}\left(\theta(x,L)\right) \end{cases} \Big\} \text{جهت } y$$

همگن، چون ترم تک جمله‌ای θ ظاهر شده است.

$\theta = X(x)\,Y(y) \qquad \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = Y\dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2} \qquad \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = X\dfrac{\partial^2 Y}{\partial y^2}$

ثابت $= \lambda^2$

مبدأ مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که در شرایط مرزی مشتق صفر را داشته باشیم؛

$Y\dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X\dfrac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0 \qquad \dfrac{\partial^2 X}{\partial x^2}\dfrac{1}{X} = -\dfrac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\dfrac{1}{Y} = \begin{matrix}\lambda^2 \\ -\lambda^2\end{matrix}$

اگر مبدأ مختصات را در پایین می‌گرفتیم:

$$\begin{cases} T(0,y) = T_0 \\ T(\infty,y) = T_\infty \\ -k\dfrac{\partial T(x,0)}{\partial y} = h\left(T(x,0) - T_\infty\right) \\ -k\dfrac{\partial T(x,2L)}{\partial y} = h\left(T(x,2L) - T_\infty\right) \end{cases}$$

سؤالات فصل 3 ← 19 / 20 / 21 / 22 ← به طریق ضریب شکل رسانش / 33 (برای یک بعدی گذرا و چند بعدی) /
37 / 45 هر چه جداش سه بعدی است ← 45 / 46 / 49 / $\underbrace{52}_{\Delta x \neq \Delta y}$ / 54 / 60 / 66

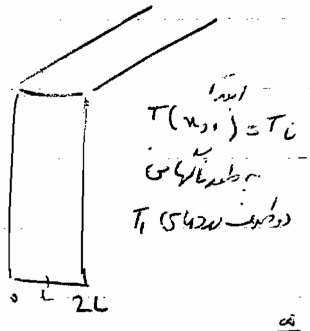
← مخروطی به روش یک بعدی

خصوصی وقتی که به هر شکل بتوان ... نوشت

ورودی مساحت بزرگتر و خروجی مساحت کوچکتر

← مساحت متغیر

جلسه 15



$$\Rightarrow \frac{T-T_1}{T_i-T_1} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2 \alpha t} \sin \frac{n\pi x}{2L}$$

$n=1,3,5,\ldots$

مثال: دیواری است به ضخامت $2L$، ابتدا در دمای 20° که به طور ناگهانی دو طرف آن به دمای 120° افزایش داده می‌شود. ضریب رسانش دیوار $1.4\ W/m^\circ C$ و ضریب نفوذ گرمایی $6.65\times10^{-7}\ \frac{m^2}{s}$. مطلوب است دما در مرکز (L) دیوار پس از گذشت 0.5 ساعت و 2 ساعت از ابتدای عملیات. ب) توزیع دما درون دیوار پس از گذشت 0.5 hr. ج) میزان (گرما) حرارت انتقال یافته پس از گذشت 0.5 ساعت. د) شار حرارتی در $x=0$ و $x=L$ درون مقطع زمانی (0.5 hr).

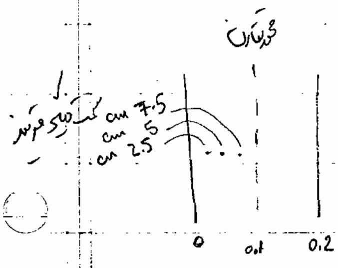
$t = 1800s \qquad \overset{L}{x=0.1} \rightarrow 2L=0.2$

$$\frac{T-120}{-100} = \frac{4}{\pi} \sum \frac{1}{n} e^{-0.295n^2} \sin\frac{n\pi}{2} \qquad n=1,3,5,7,\ldots$$ اینجا L است

$$= \frac{4}{\pi}\left(0.744 - 0.023 + 1.25\times10^{-4} - \ldots\right)$$

الف) in $0.5hr \Rightarrow T(0.1, 1800) = 28.18\ ^\circ C$

$2hr \rightarrow T(0.1, 7200) = 80.87\ ^\circ C$



ب) با 5 نقطه توزیع دما را به دست آورده و نمودارش را رسم می‌کنیم.

$x=0$ را نمی‌گذاریم چون شرط مرزی می‌شه T_i.

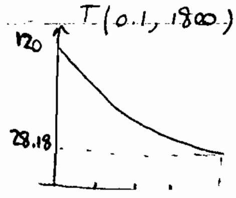
$T(0,1800) = 120^\circ$

$T(0.025,1800) = 80.96$

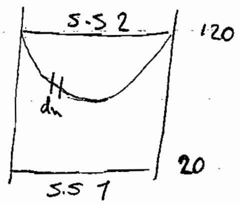
$T(0.05,1800) = 50.73$

$T(0.075,1800) = 33.56$

$T(0.1,1800) = 28.18^\circ$



ج)



دمای همه نقاط به 120 رسیده است. ← s.s ← $Q = \rho 2LAC(120-20)$ (کل دما)

$= 100(2L\rho AC)$ ω

$\alpha = \frac{k}{\rho c} \rightarrow \rho c = \frac{k}{\alpha}$

$dQ = \rho\, dx\, AC(T-20)$

به علت تقارن بازه 2L تا 0 را نصف کردیم یا L-0 و در 2 ضرب کنیم $Q_t = 2\rho AC\int_0^L (T-20)\,dx$

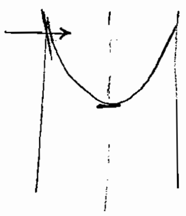
به جای T معادله را می‌گذاریم که برحسب t معلوم 1800s و x است.

$$Q_t = 2\rho AC\int_0^{0.1}\left[T_1 + (T_i - T_1)\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2\alpha t}\sin\frac{n\pi x}{2L} - \underset{20^\circ}{T_i}\right]dx$$

$\frac{Q}{A}(1800) = 25.14\ MJ/m^2$

$\frac{Q}{A}(\text{steady}) = 50.53\ MJ/m^2$

$\frac{Q_{1800}}{Q_{SS}} = 49.74\ \%$



در مرکز گرادیان صفر است ← در مرکز همواره نرخ انتقال حرارت صفر است به خاطر تقارن !!!

نرخ انتقال حرارت در هر لحظه به گرادیان بستگی دارد.

فقط برای به دست آوردن شار حرارتی از رابطه توزیع دما مشتق می‌گیریم.

$q'' = -k\frac{\partial T}{\partial x}$

$$q'' = -k(T_i - T_1)\frac{4}{\pi}\sum\frac{1}{n}e^{-\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2\alpha t}\frac{n\pi}{2L}\cos\frac{n\pi}{2L}x$$

$x = 0.1 = L$ مرکز $\cos\frac{n\pi}{2} = 0 \Longrightarrow q'' = 0$ at any time

$x = 2L$ یا 0 روی سطح $q''(0, 1800) = 2.28\ kw/m^2$

در مسیر سطح تا مرکز به انرژی ورودی به هنگام عبور از لایه‌ها مقداری از آن جذب لایه‌ها می‌شود پس از q'' سطح کمتر و از q'' مرکز بیشتر است.

✓ قسمت ج بسیار مهم و حائز اهمیت است !!!

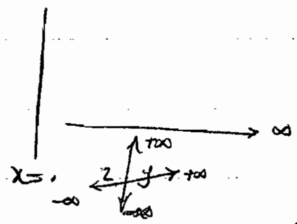
تمام مطالب گفته شده برای دیوار مسطح همگن بود ولی برای سایر اجسام هندسی که داریم هم مطالبی وجود دارد.

Semi-Infinite wall

دیوار نیمه محدود :

یعنی دیواری داریم که در جهت y و z از $-\infty$ تا $+\infty$ و در جهت x از 0 تا $+\infty$ امتداد یافته است.

از نظر تئوری در عمل چنین نیست که این شرایط را دارا باشد.



استاد از این مفهوم در مسائلی استفاده می‌کنند که در جهت x عمق نفوذش به قدری کم است با اعمال تغییر در یک نقطه مدت زمان خیلی زیادی طول می‌کشد تا به انتهای دیوار منتقل گردد.

$T(x,0)=T_i$ ابتدا

T_1 سطح دمای ثابت

$T=f(x,t)=?$

کارتزین یک بعدی ناپایا :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

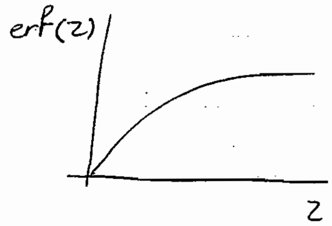
شرط اولیه $T(x,0)=T_i$

شرایط مرزی $\begin{cases} T(0,t)=T_1 \\ T(\infty,t)=T_i \end{cases}$

$$\xrightarrow[\text{laplace}]{\text{تبدیل}}\quad \frac{T-T_1}{T_i-T_1}=\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

برای حل این مثال به تبدیل لاپلاس نیاز است.

erf = error function $\rightarrow$ یک تابع است مثل سینوس ...



در کتاب

$z \rightarrow z=\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$

نتیجه می‌گیریم : مسائل خیلی ساده از نظر شکل هندسی و شرایط مسئله منجر به ریاضیات خیلی مشکل می‌گردد پس روش تحلیلی روش مناسبی برای رسیدن به راه کار عملی نیست.

مثال : فرض کنیم دیوار نیمه محدود Semi-Infinite wall که ابتدا $T(x,0)=T_i$ بوده، شار گرمای ثابت بر روی سطح اعمال q'' داریم.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

شرط اولیه : $T(x,0)=T_i$

شرایط مرزی : انتها $T(\infty,t)=T_i$

روی سطح $-k\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=q''$

$$T-T_i=\frac{2q''\sqrt{\frac{\alpha t}{\pi}}}{kA}\,e^{\frac{-x^2}{4\alpha t}}-\frac{q''x}{kA}\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)\right]$$

Semi-Infinite

دیوار نیمه محدود فرض کنید که به طور ناگهانی سیال سرد T_∞ و h از روی آن عبور کند :

$T(x,0)=T_i$

به طور ناگهانی تشکیل می‌شود T_∞ و h

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

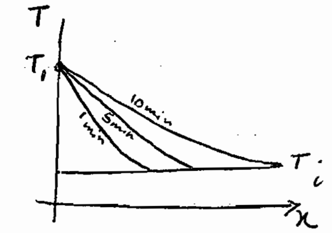
$T(x,0)=T_i$

$T(\infty,t)=T_i$

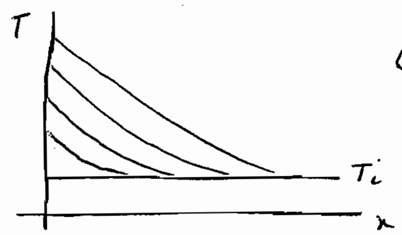
$$-k\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=h\left(T(0,t)-T_\infty\right)$$

جواب در کتاب به طولانی است .

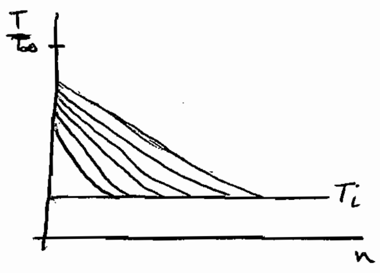
اگر برای سه حالت یاد شده توزیع دما را رسم کنیم :



① یک طرف همواره دمایش ثابت است و موج گرما داده با یک سرعتی در داخل لایه‌ی مختلف دیوار نفوذ کرده و وسعت بیشتری را تا حد خود فرا می‌دهد .



② به علت اعمال انرژی T یک سمت می‌تواند تا بی‌نهایت ادامه یابد اما ابتدا بسیار سریع است ولی به مرور زمان بر شدت افزایش T کم می‌شه از نظر فیزیکی چون انرژی که به خود دیوار شروع به شکستن می‌کند پس تا حد زیاد نمی‌شه .



③ این دما حداکثر T_∞ است و در $t\to\infty$ به $T\to T_\infty$ و به مرور زمان فاصله ΔT از هم کم می‌شه سرعت رشد کم می‌شه ، مجموعاً به T_∞ می‌رسه .

مثال: سطح زمین در دمای $5^\circ C$ است. به طور ناگهانی سرد و به $-10^\circ C$ کاهش می‌یابد لوله‌ی آبی در عمق 30^{cm} دفن شده است مشخص کنید چه مدت زمان طول می‌کشد تا این لوله یخ نزند . (حالت اول)

$T=0 \leftarrow x=30^{cm}$

$T_f=-10^\circ$

$T_i=5^\circ C$

$$\frac{0-(-10)}{5-(-10)}=\operatorname{erf}\frac{0.3}{2\sqrt{\alpha t}}$$

خاک $\alpha = 5\times10^{-7}\ \frac{m^2}{s}$

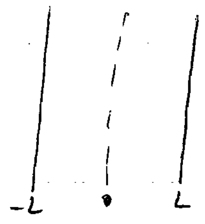
باید عکس erf به دست آورده به جدول در کتاب مراجعه کرده به t برسیم

برای آنکه مهندسان دیگر مسائل ریاضی نکنند و کاربردی کار کنند، یکسری نمودارات در کتاب آمده است:

Heisler charts

Heisler سه حالت را درنظر گرفته.

۱- دیوار یک بعدی



ابتدا $T(x,0)=T_i$ به طور یکنواخت

دو طرف در معرض T_∞ و h

این حالت متداول ترین حالتی که در صنعت با آن برخورد کرده و ساده ترین انتقال حرارت که به حالت یک بعدی است پس:

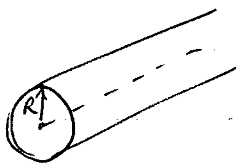
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

شرط اولیه $T(x,0)=T_i$

شرط مرزی $\frac{dT(0,t)}{dx}=0$ ← چون از نظر هندسی هم از نظر حرارتی متقارن است

$$-k\frac{\partial T(L,t)}{\partial x}=h\left(T(L,t)-T_\infty\right)$$

۲_ استوانه بسیار بلند به شعاع R که انتقال حرارت یک بعدی است.



استوانه بسیار بلند

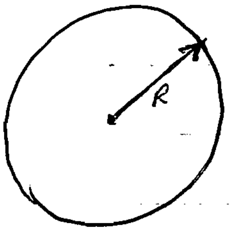
$T(r,0)=T_i$

به طور یکنواخت در معرض محیط T_∞ و h

معادله دیفرانسیل استوانه یک بعدی = معادله حاکم

شرط مرزی و اولیه به جای x، r مثل بالا

۳_ کره:



یک بعدی به انتقال حرارت در جهت r و در جهت φ و θ چون ... است

شرایط متقارن است.

از شکل شماره ۷ تا شماره ۱۶ صفحه 154 به بعد که با استفاده از ۹ شکل، 3 تا کارتزین 3 تا استوانه 3 تا کره می‌توان توزیع دما و میزان انتقال حرارت را یافت.

* اگر سه بعدی باشد نمی‌توان ... با مسئله یک بعدی حل کرد و در نهایت هر سه را در هم ضرب کرد تا سه بعدی شد.

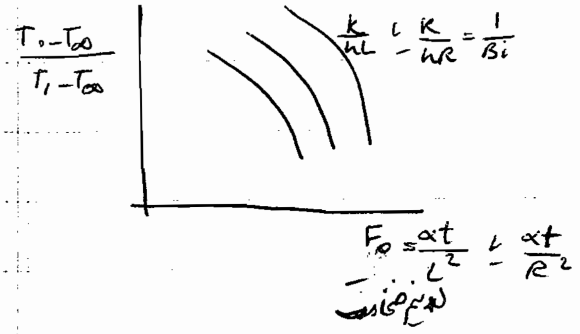


Fig 4-7 → کارتزین
8 → استوانه
9 → کروی

دما در مرکز فقط برحسب تابعی از زمان

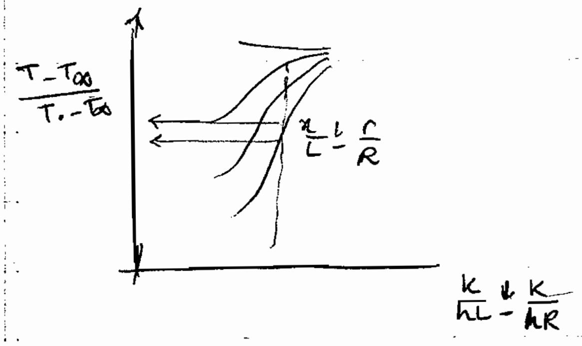


Fig 4-10
11
12

دما در هر نقطه را می‌یابیم با استفاده از داشتن دما در مرکز

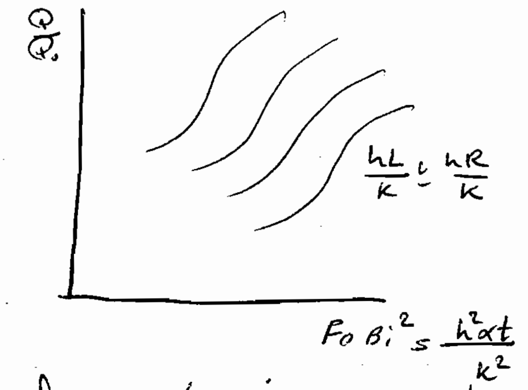
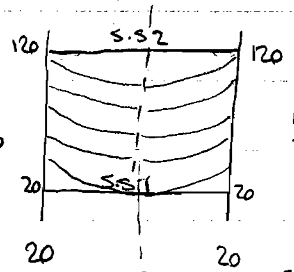


Fig 4-14
15
16

میزان انتقال حرارت در زمان t خاص را به ما می‌دهد.

این نمودارها تجربی نیست بلکه حاصل حل کامل معادلات است و برای استفاده مهندسی به شکل نمودار درآورده‌اند.

مثال: صفحه (دیوار) ای است به ضخامت 40 cm ، ابتدا در دمای $20^\circ C$ به طور ناگهانی دو طرف دیوار در معرض محیطی به دمای $120^\circ C$ و ضریب انتقال حرارت جابجایی $20 \frac{W}{m^2 {}^\circ C}$ قرار داده می‌شود. ضریب رسانش دیوار $1 \frac{W}{m^\circ C}$ ضریب نفوذ گرمایی $5\times10^{-6} \frac{m^2}{s}$ ~~...~~ می‌باشد. مطلوب است الف) توزیع دما درون دیوار و میزان انتقال حرارت یا... پس از 2hr.



دمای سطح هم ثابت نیست خود سطح هم با زمان دماش زیاد می‌شه ،

$2L = 0.4$

$t = 2hr = 7200\ s$

عدد فوریه $F_o = \frac{5\times10^{-6}\times 7200}{(0.2)^2} = 0.9$

که بی بعد است

$\frac{1}{Bi} = \frac{k}{hL} = \frac{1}{20\times0.2} = 0.25$

$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{T_o - T_\infty}{T_1 - T_\infty} = 0.33$ (Fig 4-7)

$T_1 = T_i = 20 \quad T_\infty = 120^\circ C$

$T_o(t = 7200) = 87^\circ C$

یعنی بعد از ۲hr دمای مرکز 87° است .

توزیع دما را به صورت جدول انجام داده‌ایم : (Fig 4-10)

x	$\frac{x}{L}$	$\frac{T - T_\infty}{T_1 - T_\infty}$	T
0 مرکز دیوار	—	—	87°
0.05	0.25	0.94	89
0.1	0.5	0.8	93.6
0.15	0.75	0.57	101.2
0.2	1.0	0.27	111.1

از قبل انجام شده.

یعنی هنوز دمای سطح به 120° نرسیده است

ج) میزان انتقال حرارت !

$F_o Bi^2 = \frac{h^2 \alpha t}{k^2}$

$(0.9)\left(\frac{1}{0.25}\right)^2 = 14.4 \quad \rightarrow \frac{hL}{k} = Bi = 4$

Fig (4-14) $\quad \frac{Q}{Q_o} = 0.75$

$Q_o = \rho A \overset{0.4}{2L} C (120 - 20) \qquad \alpha = \frac{k}{\rho c} \rightarrow \rho c = \frac{k}{\alpha}$

که به ازای هر سطح ۱

$\Rightarrow Q$

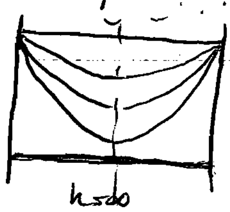
Q_o بر حسب $\frac{J}{m^2}$ سپس از $\frac{Q}{Q_o}$ ← Q را می‌یابیم .

Q_o ← کل گرمایی که باید دیوار ذخیره کند تا تمام نقاط آن دماش 120° / از 20° به گردد . پس باید به میزان (120-20) گرما در جسم ذخیره گردد.

اگر بعد از مدت‌ها بی‌نهایت بزرگ باشد یعنی سطح و سیال دماشان یکی است و مقاومت جابجایی نداریم لذا دمای سطح به صورت ناگهانی برابر دمای سیال می‌شود یعنی همیشه دیوار دماش T_o است

$T_o = 119^\circ$ دمای مرکز ،

یعنی تمام نقاط بین 119 تا 120 است یعنی $\frac{Q}{Q_o} \simeq 1$.



این نمودارها که مطالعات برای مسائل یک‌بعدی بود ولی می‌توان برای مسائل دوبعدی یا سه‌بعدی هم استفاده کرد.

استفاده از نمودارهای هایسلر برای مسائل دوبعدی و سه‌بعدی:

شکل 4-18 ← شکل‌های ضرب ممکن

این شکل‌ها می‌گوید که یک شکل سه‌بعدی از حاصل برخورد سه صفحه ایجاد شده است.

مثلاً شکل ت ← برخورد سه صفحه با مختصات یک‌بعدی

" ج ← " یک استوانه بلند با یک صفحه

" ث ← یک استوانه نیمه محدود که از برخورد یک صفحه نیمه بی‌نهایت و یک استوانه بلند است شکل زیر حاصل می‌شود

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Assume: $T(x,y,z,t)=X(x,t)\cdot Y(y,t)\cdot Z(z,t)$

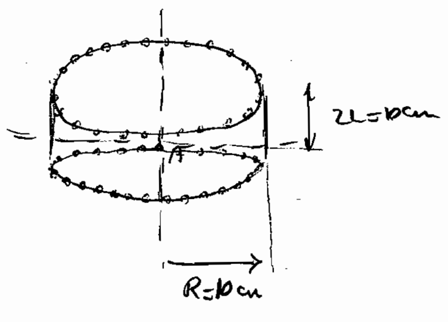
مثال: یک قوطی کنسرو ماهی به شعاع 10 cm و ارتفاع 10 cm ابتدا در دمای $20^{\circ}C$ است. به طور ناگهانی درون آب گرم با دمای $100^{\circ}C$ و ضریب انتقال حرارت جابجایی $100\ W/m^2{}^{\circ}C$ قرار می‌گیرد. ضریب رسانش محتویات داخل قوطی $3\ W/m^{\circ}C$ و ضریب نفوذ آن 8×10^{-6} می‌باشد. مطلوب است دمای سردترین و گرم‌ترین نقطه برای این استوانه. $(t=20\ min)$

ابتدا چند فرض داریم:

۱- قوطی درون آب معلق باشد که کف جسم هم باشد برای فرض تقارن

۲- فرض می‌کنیم جداره فلزی هیچ گونه مقاومتی ندارد و ضریب رسانش آن

۳- محتویات داخل قوطی کاملاً گوشت باشد بدون هیچ حفره هوایی.



نقطه A ← دورترین مکان از آب گرم قرار دارد پس سردترین نقطه است.

که دورترین فاصله از جهت شعاع و از جهت هر ضلع

گرم‌ترین نقاط ← تمام لبه‌ها هستند.

که از لحاظ هر ضلع و شعاع نزدیک‌ترین نقطه به آب گرم.

$\theta = T - T_\infty$

$$A(0,0) = \left(\frac{\theta_0}{\theta_i}\right)_A = \left(\frac{\theta_0}{\theta_i}\right)_r \left(\frac{\theta_0}{\theta_i}\right)_z$$

که در جهت r   در جهت z ← کارتزین در یک دیواره

که مسئله استوانه یک بعدی   X   مسئله صفحه یک بعدی = مسئله دو بعدی

برای z: $F_0 = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{8\times10^{-6}\times 20\times 60}{(0.05)^2} = 3.84$, $\frac{1}{B_i} = \frac{k}{hL} = 0.6$

$\frac{\theta_0}{\theta_i} = 0.017$ (Fig 4-7)

برای r: $\frac{\alpha t}{R^2} = 0.96$

$\frac{1}{B_i} = \frac{k}{hR} = 0.3$ $\left(\frac{\theta_0}{\theta_i}\right)_r = 0.028$ Fig 4-8

$$\left(\frac{\theta_0}{\theta_i}\right) = 0.017\times 0.028 = 4.25\times10^{-4} = \frac{T_A - T_\infty}{T_i - T_\infty} \qquad T_A = 99.9\ ^\circ C$$

دما در مرکز $99.9^\circ C$ رسیده است. تقریباً دمای لبه‌ها برابر است.

نقطه B دورترین لبه است:

$B(\overset{r}{10}, \overset{z}{5})$

Fig (4-10) $\quad \frac{z}{L} = 1 \quad \frac{1}{B_i} = 0.6 \Rightarrow \frac{\theta}{\theta_0} = 0.5$

Fig (4-11) $\quad \frac{r}{R} = 1 \quad \frac{1}{B_i} = 0.3 \Rightarrow \frac{\theta}{\theta_0} = 0.3$

$$\left(\frac{\theta}{\theta_i}\right)_B = \left(\frac{\theta_0}{\theta_i}\times\frac{\theta}{\theta_0}\right)_z \left(\frac{\theta_0}{\theta_i}\times\frac{\theta}{\theta_0}\right)_r =$$
$$= (0.017\times0.5)(0.028\times0.3) = \Rightarrow T_B = 99.99\ ^\circ C$$

- مقدار حرارت انتقال یافته معادله 4-22 ← برای مسائل دو بعدی
  4-23 " ← برای مسائل سه بعدی

برای دو بعدی است $\quad 4\text{-}22 \Rightarrow \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_{total} = \underbrace{\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_1}_{4\text{-}14} + \underbrace{\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_2}_{4\text{-}15} \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_1\right]$

تفاوتی ندارد که کدام را r و کدام را z می‌گیریم. دقت باید حواسمان باشد که هرکدام را r گرفتیم در شکل مربوط به خودش استفاده کنیم

مثال: آجری به ابعاد $6\times12\times24$ cm ابتدا در دمای $1020^\circ C$ است. که به طور ناگهانی در معرض هوا به دمای 20° و ضریب انتقال حرارت جابجایی (به فرض ثابت بودن) $5\ \frac{W}{m^2{}^\circ C}$ قرار می‌گیرد. مشخص کنید اختلاف دما برای گرمترین و سردترین نقاط این آجر را پس از گذشت نیم ساعت؟ در این زمان چه میزان (درصدی) از کل انتقال حرارت صورت گرفته است؟ چه مدت زمان سپری شود تا دما در مرکز به $200^\circ C$ کاهش یابد.

برای آجر: $k=1\ W/m^\circ C$ و $\alpha=5.4\times10^{-7}\ m^2/s$ از کتاب جدول A-3)

(در صورتی با کاهش دما $h \downarrow$ یعنی وقتی دما پایین می‌شه $20^\circ \rightarrow h=0$ زیرا انتقال حرارت در حالت جابجایی به خاطر دماست.)

سردترین نقاط ← ۸ تا گوشه. مسئله ۳ بعدی است. از معادله 4-23.

گرمترین نقطه ← وسط

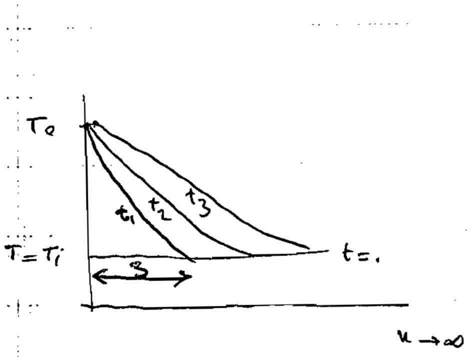
توضیح قسمت سوم سؤال ← باید با حدس و خطا حل کنیم یعنی یک زمانی را حدس زده مسئله را حل می‌کنیم دما در مرکز را حل می‌کنیم با دمای (T 200°) مقایسه می‌کنیم اگر x بود دوباره حدس می‌زنیم.

حدس اولیه ← استاد در فضای یک بعدی حل می‌کنیم زمان را به دست می‌آوریم، زمان اصلی از آن کمتر است. زیرا بعدهای دیگر هم به کمک این حد می‌آیند.

Heat Balance Integral Method (HBI) — جلسه ۱۷

مبنای کارایی این روش این است که از معادله کلی دیفرانسیل انتگرال می‌گیرد و از یکی از ابعاد یا در دوتا از ابعاد خودش یک معادله توزیع حرارت را فرض می‌کند. بنابراین روش دقیقی نیست ولی در شرایط خاصی ممکن است این خطا ناچیز باشد.

یک محیط نیمه بی‌نهایت داریم که ابتدا T در همه مکان‌ها T_i است.



$T(x,0)=T_i$ ابتدا

$T(0,t)=T_0$ به طور ناگهانی

هرچه زمان می‌گذرد عمق نفوذ گرما به داخل محیط $\uparrow$ می‌شود.

δ = عمق نفوذ = peratation Depth

$=f(t)$ فقط تابع زمان است.

معادله دیفرانسیل حاکم $= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$

با روش دیفرانسیلی در محاسبات مثل این معادله را حل کردیم. حال از روش انتگرالی می‌رویم.

$$\int_0^s \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^s \frac{\partial T}{\partial t}\,dx$$

$$\frac{dT}{dx}\bigg|_s - \frac{dT}{dx}\bigg|_0 = \frac{1}{\alpha}\int_0^s \frac{\partial T}{\partial t}\,dx \qquad \text{HBI Equation}$$

فرض می‌کنیم : $T = A + Bx + Cx^2$

از آن جایی که می‌دانیم تابع ما $\sin x$ نیست، تابع خطا است، به بسط تیلور به صورت توابع چندجمله‌ای نوشت. حال ما در آن ٤ را تا جمله توان سوم به بعد صرف‌نظر کردیم در نتیجه محاسبات ما خطادار است.

A، B، C را با سه شرط مرزی به دست می‌آوریم. از طرفی T هم تابع t و هم x است که ما تنها برای x فرض کردیم و گذاشتیم t آن را s مشخص کند.

$B.C1 \Rightarrow \quad x=0 \quad \text{Any time} \quad T=T_0 \quad \rightarrow \quad A=T_0$

$B.C2 \Rightarrow \quad x=S \quad \text{"} \quad T=T_i \quad \rightarrow \quad T=T_0+BS+CS^2$

$B.C3 \Rightarrow \quad x=S \quad \text{"} \quad \frac{dT}{dx}=0 \quad \rightarrow \frac{dT}{dx}=0=B+2CS \rightarrow B=-2CS$

[illegible]

$$\Rightarrow C=\frac{T_0-T_i}{S^2}\ ,\quad B=\frac{-2(T_0-T_i)}{S}$$

$$\Rightarrow T = T_0 - 2\frac{(T_0-T_i)}{S}x + (T_0-T_i)\frac{x^2}{S^2}$$

یعنی تغییرات را برحسب زمان را یافتیم.

حال از HBI پارامتر زمان را هم می‌یابیم.

$$\text{معادله HBI} \Rightarrow 0 - 2(T_0-T_i)\frac{1}{S} = \frac{1}{\alpha}\int_0^S \frac{dT}{ds}\frac{ds}{dt}\,dx$$

s تنها تابعی از t است پس $\frac{ds}{dt}$ می‌تواند بیرون بیاید.

$$\Rightarrow 2\alpha(\cancel{T_0-T_i})\frac{1}{S} = \frac{ds}{dt}\int_0^S\left[2(\cancel{T_0-T_i})\frac{x}{S^2} - (\cancel{T_0-T_i})\frac{2S}{S^4}x^2\right]dx$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{S} = \frac{ds}{dt}\left[\frac{x^2}{2S^2}-\frac{x^3}{3S^2}\right]_0^S = \frac{ds}{dt}\left[\frac{1}{6}\right] \rightarrow \frac{6\alpha}{S}=\frac{ds}{dt}$$

$$\rightarrow \int 6\alpha\,dt = \int s\,ds \Rightarrow 6\alpha t = \tfrac{1}{2}S^2 + C'$$

$$\text{in } t=0 \rightarrow S=0 \Rightarrow C'=0 \qquad \Rightarrow S=\sqrt{12\alpha t}$$

$$T = T_o - 2(T_o - T_i)\frac{x}{\delta} + (T_o - T_i)\frac{x^2}{\delta^2} \quad , \quad \delta = \sqrt{12\alpha t}$$

بنابراین وابستگی دما به زمان برحسب δ تعریف شد.

معادله فوق کمک می‌کند که در هر زمان و مکان T را بیابیم.

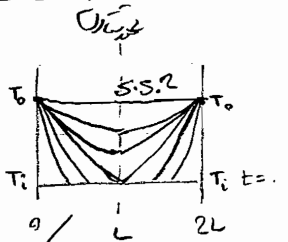
مثال: دیوار نیمه محدودی است ابتدا در دمای $0°C$ که به طور ناگهانی دمای سطح آن به $100°C$ افزایش می‌یابد توزیع دما پس از گذشت $1min$ از شروع عملیات را برای هر یک از دو حالت زیر و در هر مورد با استفاده از پاسخ دیفرانسیلی و پاسخ انتگرالی رسم کرده و مقایسه کنید. خواص فیزیکی در آخر کتاب موجود است.

الف) دیوار آجری باشد.

ب) دیوار آهنی باشد که عمق نفوذ پس از $1min$ بسیار زیاد است.

می‌خواهیم ببینیم با چه خطا به ضخامت دیوار شکل دار باشد که با این معادله از درجه ۲ فرض کرده باشیم

مثال: دیواری است به ضخامت $2L$ ابتدا در دمای T_i که به طور ناگهانی هر دو طرف آن به دمای T_o افزایش داده می‌شود. با استفاده از روش HBI توزیع دما را در این دیواره به دست آورید.



انواع شرایط مرزی را می‌توانستیم داشته باشیم که با اعمال این شرایط دیگر تقارن نخواهیم داشت. اینجا این تقارن را داریم.

این دو موج به درون این دیوار نفوذ می‌کنند بدون اینکه از هم خبر داشته باشند پس مثل دیوار نیمه محدود است با همان معادله حاکم. اما پس از رسیدن به محور (لحظه نفوذ) وجود هم را درک می‌کنند از هم مستقل نیستند و از آن پس از خطوط آن پیروی نمی‌کنند. دیگر به آن به اندازه کافی زمان دهیم می‌شود S.S2.

مسئله را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم:

1. دوره قبل از نفوذ در محور: $t < \frac{L^2}{12\alpha}$ Pore penetration period

2. بعد از نفوذ $t > \frac{L^2}{12\alpha}$ post " "

تا لحظه $T = \frac{L^2}{12\alpha}$ بررسی معادله مثل دیوار را بررسی می‌کنیم

قبل از نفوذ قبلاً انجام شد (دیوار نیمه محدود).

حل نمونه:

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_L - \left.\frac{dT}{dx}\right|_0 = \frac{1}{\alpha}\int_0^L \frac{dT}{dt}\,dx \qquad H.B.I$$

Assume: $T = A' + B'x + C'x^2$

B.C1 $\quad x=0 \quad T=T_0 \rightarrow T_0 = A'$

B.C2 $\quad x=L \quad \frac{dT}{dx}=0 \quad$ عایق $\Rightarrow B' + 2c'L = 0 \Rightarrow B' = -2cL$

شرط مرزی سوم بخودی خود ارضا می‌شود زیرا با تقریب ثابت Σ با توجه به دو شرط مرزی بدست آمد.

$$T = T_0 - 2c'Lx + c'x^2$$

c' وابسته به زمان را نشان می‌دهد:

$$HBI: \quad 0 - (-2c'L) = \frac{1}{\alpha}\int_0^L \frac{dT}{dc'}\frac{dc'}{dt}\,dx$$

$$2c'\alpha L = \frac{dc'}{dt}\int_0^L \frac{dT}{dc'}\,dx \Rightarrow 2c'\alpha L = \frac{dc'}{dt}\int_0^L (-2Lx + x^2)\,dx$$

$$\Rightarrow 2c'\alpha L = \frac{dc'}{dt}\left[\frac{-\cancel{2}Lx^2}{\cancel{2}} + \frac{x^3}{3}\right]_0^L \Rightarrow 2c'\alpha L = \frac{-2}{3}L^3\frac{dc'}{dt}$$

$$\frac{dc'}{c'} = \frac{-3\alpha}{L^2}\,dT \rightarrow \ln c' = \frac{-3\alpha}{L^2}t + Const$$

شرط اولیه: $\quad$ in $t = \frac{L^2}{12\alpha}$ at $x=L$ $\quad T = T_i \quad$ برای آخرین لحظه

$$T = T_0 - 2c'Lx + c'x^2 \Rightarrow T_i = T_0 - 2c'L^2 + c'L^2 \rightarrow c' = \frac{T_0 - T_i}{L^2}$$

این c' تنها متعلق به آن لحظه $\frac{L^2}{12\alpha}$ است.

$$\ln\frac{T_0 - T_i}{L^2} = \frac{3\cancel{\alpha}}{\cancel{L^2}} \times \frac{\cancel{L^2}}{\cancel{12}_4\cancel{\alpha}} + Const \rightarrow Const = \frac{1}{4} + \ln\frac{T_0 - T_i}{L^2}$$

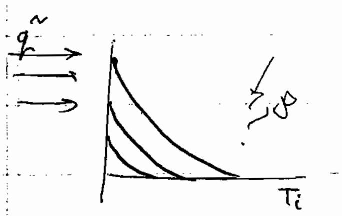
$$\ln c' = -\frac{3\alpha}{L^2}t + \frac{1}{4} + \ln\frac{T_0 - T_i}{L^2} \Rightarrow c' = \frac{T_0 - T_i}{L^2}\,e^{\frac{1}{4} - \frac{3\alpha}{L^2}t}$$

$$T = T_0 - 2c'Lx + c'x^2$$

$t \to \infty \Rightarrow c' = 0 \Rightarrow T = T_0 \quad$ S.S2 حالت مستقل از زمان

یعنی در تمام نقاط T_0

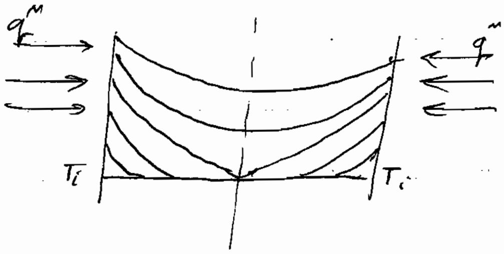
دیوار نیمه محدود ابتدا در دمای T_i ، به طور ناگهانی به آن شار حرارتی می‌دهیم.



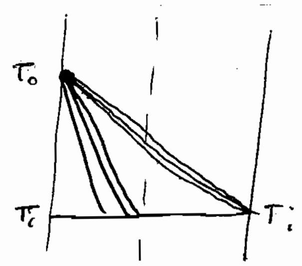
$$BC1: \quad \frac{dT}{dx} = \frac{-q''}{k} \quad at\ x=0$$ شرط مرزی دوم

دیوار محدود

اصلاً جواب SOS ندارد. چون با این گرما وارد می‌شه.



تئوری: یک طرف را بالا ببریم یک طرف دما را ثابت نگه داریم:



انحنای منحنی‌ها با گذشت زمان به خط راست میل می‌کند.

به زمانی عمق نفوذ ← در زمانی است که دما ... منحنی‌ها ... نزدیک به هم

جلسه ۱۸

مثال ۱: دیواری است فولادی که می‌توان آن را نیمه محدود فرض کرد. دمای اولیه آن $25^\circ C$ است. به طور ناگهانی دمای یک طرف آن به $35^\circ C$ کاهش داده می‌شود. مطلوب است دما در فاصله 2.5 cm از سطح دیوار پس از گذشت 30 s ، $(k = 4.5\ \frac{W}{m^\circ C})$ ، $\alpha = 1.4\times10^{-5}\ \frac{m^2}{s}$.

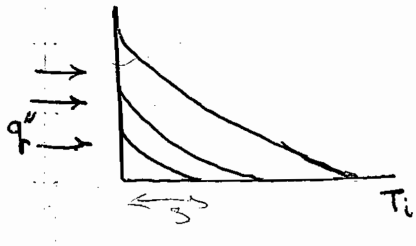
$$\frac{T-T_0}{T_i-T_0} = erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \quad *$$

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{2.5\times10^{-2}}{2\sqrt{1.4\times10^{-5}\times30}} = 0.61 \xrightarrow[\text{آخر کتاب}]{\text{A جدول}} erf(0.61) = 0.611 \xrightarrow[\text{* در erf}]{\text{با قرار دادن}} T = 166.36^\circ C$$ جواب دقیق‌تر

$$T = T_0 - 2(T_0 - T_i)\frac{x}{S} + (T_0 - T_i)\frac{x^2}{S^2} \longrightarrow S = \sqrt{12\alpha t} = 0.07\ m$$ پس از 30 s گرما

$$at \quad x = 2.5\ cm \quad \rightarrow T = 159.7^\circ C$$ 7 cm نفوذ می‌کند.

به علاوه در این که عمق نفوذ گرما بیشتر می‌کند دمای سطح نیز ثابت نمی‌ماند.



$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_S - \left.\frac{dT}{dx}\right|_0 = \frac{1}{\alpha}\int_0^S \frac{dT}{dt}\,dx \qquad HBI$$

Assume : $T = A + Bx + Cx^2$

at $x = 0$ $\quad \dfrac{dT}{dx} = \dfrac{-q''}{k}$

at $x = S$ $\quad T = T_i \qquad T_i = A - \dfrac{q''}{k} S + C S^2$

at $x = S$ $\quad \dfrac{dT}{dx} = 0 \qquad 0 = -\dfrac{q''}{k} + 2CS \longrightarrow C = \dfrac{q''}{2kS}$

$$A = T_i + \frac{q''}{k} S - \frac{q''}{2k} S = T_i + \frac{q''}{2k} S$$

$$T = T_i + \frac{q'' S}{k} - \frac{q'' x}{k} + \frac{q''}{2kS} x^2$$

HBI: $\quad 0 - \left(\dfrac{-q''}{k}\right) = \dfrac{1}{\alpha} \displaystyle\int_0^S \dfrac{dT}{dS} \dfrac{dS}{dt}\, dx \longrightarrow \dfrac{q''\alpha}{k} = \dfrac{dS}{dt} \displaystyle\int_0^S \left(\dfrac{q''}{2k} - \dfrac{q''}{2kS^2} x^2 \right) dx$

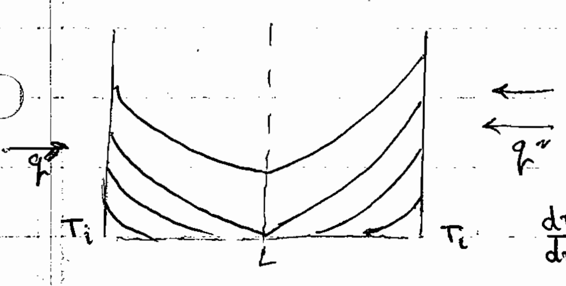
$$\frac{q''\alpha}{k} = \frac{dS}{dt} \left[\frac{q'' x}{2k} - \frac{q'' x^3}{6kS^2} \right]_0^S = \frac{dS}{dt} \left[\frac{1}{3} \frac{q'' S}{k} \right] = 0$$

$3\alpha\, dt = S\, dS \longrightarrow 3\alpha t = \frac{1}{2} S^2 + \text{Const}$

$t = 0 \rightarrow S = 0 \rightarrow \text{Const} = 0$

$S = \sqrt{6\alpha t} \longrightarrow$ عمق نفوذ با سرعت کمتری تغییر می‌کند در واقع دما سطح و عمق هم‌گام با هم تغییر می‌کند اما در دمای ثابت

$S = \sqrt{12\alpha t}$ بود در واقع با دمای سطح را تغییر می‌دهیم.



Post Reretration period $\quad t > \dfrac{L^2}{6\alpha}$

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_L - \left.\frac{dT}{dx}\right|_0 = \frac{1}{\alpha} \int_0^L \frac{dT}{dt}\, dx \longleftarrow \text{HBI}$$

Assume : $T = A' + B'x + C'x^2$

$x = 0 \quad \dfrac{dT}{dx} = \dfrac{-q''}{k} \qquad \boxed{B' = -\dfrac{q''}{k}}$

$x = L \quad \dfrac{dT}{dx} = 0 \qquad B' + 2C'L = 0 \longrightarrow \boxed{C' = \dfrac{q''}{2kL}}$

شرط مرزی سوم ندادیم ضمن اینکه یکی از ضرایب حذف می‌شود تا وابستگی به زمان را داشته باشیم

$$T = A' - \frac{q''}{k} x + \frac{q''}{2Lk} x^2 \longrightarrow \text{HBI} \longrightarrow 0 - \left(\frac{-q''}{k}\right) = \frac{1}{\alpha} \int_0^L \frac{dT}{dA'} \frac{dA'}{dt}\, dx$$

$$\frac{q''\alpha}{k} = \frac{dA'}{dt} \int_0^L (1)\, dx = \frac{dA'}{dt} L \qquad \frac{dA'}{dt} = \frac{q''}{kL} \rightarrow A' = \frac{q''\alpha}{kL} t + \text{Cons}$$

شرط اولیه بس از نفوذ : $at \to x=L \qquad at = \frac{L^2}{6\alpha} = t \qquad T=T_i \qquad A' = T_i + \frac{q''L}{k} - \frac{q''L}{2k} = T_i + \frac{q''L}{2k}$

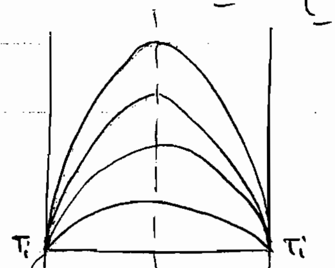
$$T_i + \frac{q''L}{2k} = \frac{q''\alpha}{kL}\cdot\frac{L^2}{6\alpha} + Const \qquad Const = T_i - \frac{q''L}{2k}$$

$$A'' = \frac{q''\alpha}{kL}t + T_i - \frac{q''L}{2k}$$

$$\boxed{T = T_i - \frac{q''L}{2k} + \frac{q''\alpha}{kL}t - \frac{q}{k}x + \frac{q''}{2Lk}x^2}$$

وقتی $\infty \to T$ می رود T همچنان افزایش می یابد چون ما همچنان انرژی به آن می دهیم و خروجی انرژی نداریم اما در واقعیت جسم گرم با محیط اطرافش جابجایی دارد.

مثال 8: دیواری است به ضخامت $2L$ ابتدا در دمای T_i به طور ناگهانی با ورود جریان برق درون آن تولید انرژی داخلی می شود. دو طرف دیوار همچنان در دمای T_i حفظ می شود. مطلوب است رابطه ای برای توزیع دما درون دیوار.



گرادیان دما در حال افزایش است یعنی هر چه زمان می گذرد بیشتر گرمای خروجی بر اثر اینکه دما در T_i باقی می ماند بیشتر می شود.

تا زمانی که مقدار خروجی گرما با مقدار تولیدی گرما توسط جریان برابر شود.

① عمق نفوذ نداریم چون با ایجاد جریان تمام لایه ها هم گرم می شوند اما لایه های درونی $T\uparrow$ دارند چون فاصله شان از جداره های گرمایی $\downarrow$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\int_0^L \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}dx + \int_0^L \frac{q}{k}dx = \int \frac{1}{\alpha}\frac{dT}{dt}$$

Assume: $T = A + Bx + Cx^2$

ini. $x=0 \qquad T=T_i \longrightarrow A=T_i$

$x=L \qquad \frac{dT}{dx}=0 \qquad B+2cL=0 \rightarrow B=-2cL$

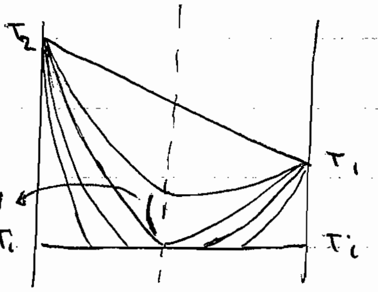
$T=T_i - 2cLx + cx^2 \longrightarrow$ برای HBI می بریم تا c وابستگی به زمان را به دست آوریم t.

$$HBI: \quad 0-(-2cL) + \frac{qL}{k} = \frac{1}{\alpha}\int_0^L \frac{dT}{dc}\frac{dc}{dt}dx$$

$$\alpha\left(2cL + \frac{qL}{k}\right) = \frac{dc}{dt}\int_0^L(-2Lx + x^2)dx$$

$$\alpha\left(2cL + \frac{q_L}{k}\right) = \frac{dc}{dt}\left[-Lx^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^L$$

شرط اولیه   in x, t, $T = T_i$



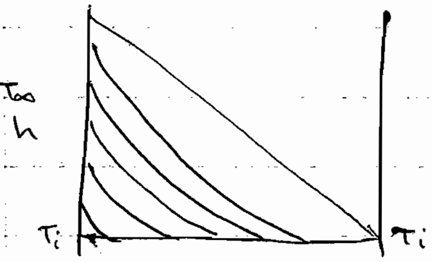
از این لحظه به بعد دیگر اثر سیستم هم در وسط دیوار نیست

برای این حالت نیز بنظمی که وسط دیوار به هم می رسند.

چون در این حالت $S = \sqrt{2\alpha t}$ را ثابت گرفتیم α ها با هم

و به دما وابسته نیست در نتیجه گرادیان (شیب) به اختلاف دما

بستگی ندارد.



قبل از نفوذ: دمای سطح شروع به افزایش می کند و نفوذ هم داریم.

Convection داریم به سطح بعد Cond بدون دیگر.

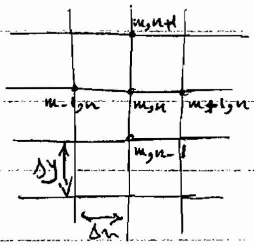
SS2 زمانی است که این دو با هم برابر شوند

چون $\frac{dT}{dx}$ در حال افزایش است نزدیک رسانش ↑

حال اگر دو بعدی باشد از $O6$ گام ۳:

Assume: $T = (A + Bx + Cx^2)(A' + B'y + C'y^2)$

Numerical Method:



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{\Delta x^2}\left(T_{m-1,n}+T_{m+1,n}-2T_{m,n}\right)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{1}{\Delta y^2}\left(T_{m,n-1}+T_{m,n+1}-2T_{m,n}\right)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{T_{m,n}^{P+1}-T_{m,n}^{P}}{\Delta t}$$

P به مرحله زمانی است

ΔP به مرحله‌ی بعدی است. هرچه بتوان بیشتر کوچک فاصله زمانی است.

همانطور که مکان و فضا را تقسیم به فضاهای کوچک کردیم زمان را هم به زمان‌های کوچک تقسیم می‌کنیم هرچه $\Delta t \downarrow$ به محاسبات دقیق‌تر

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left(T_{m-1,n}^{P}+T_{m+1,n}^{P}-2T_{m,n}^{P}\right)+\frac{1}{\Delta y^2}\left(T_{m,n-1}^{P}+T_{m,n+1}^{P}-2T_{m,n}^{P}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\Delta t}\left(T_{m,n}^{P+1}-T_{m,n}^{P}\right)$$

البته می‌توان در معادلات به جای P از $P+1$ استفاده کرد اما استفاده از روش back بهتر از Forward است.
معادله بیان می‌کند که دمای نقطه m,n یعنی $T_{m,n}$ وابسته به خودش و همسایه‌هایش یک مرحله قبل است.

if $\Delta x=\Delta y$

$$T_{m,n}^{P+1}=\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\left(T_{m-1,n}^{P}+T_{m+1,n}^{P}+T_{m,n-1}^{P}+T_{m,n+1}^{P}\right)-\frac{4\alpha\Delta t}{\Delta x^2}T_{m,n}^{P}+T_{m,n}^{P}$$

برای ساده‌تر کردن مسئله می‌توان یک فرض کرد:

البته حس فرضیاتی که را محدود می‌کنند زیرا در صورت عدم حس شرطی

if $\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} = \frac{1}{4}$

می‌توان Δx و Δy و Δt را خودمان انتخاب کنیم ولی محدودیت داریم

$$T_{m,n}^{P+1} = \frac{1}{4}\left[\text{همسایه‌ها}^{P}\right]$$

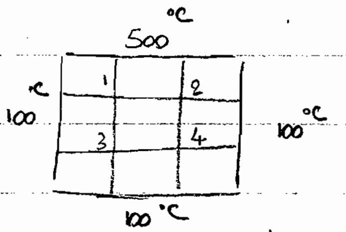
Δx و Δy اختیاری برای محدود کردن Δt نداریم زیرا Δt از شرایط بالا بدست می‌آید.

مثلاً فرض می‌کنیم $\Delta t = 0.1\,s$ بدست آمد برای اینکه Δt کوچکتر شود: ۱) می‌توان Δx را کوچکتر فرض کرد یا Δy کوچکتر ← Δt کوچکتر

۲) فرض ۴ را افزایش می‌دهیم.

در حالت سه بعدی تعداد همسایه ۶ تا و ضریب $T_{m,n}$ هم ۶ در می‌آید.

مثال: میله‌ای است بسیار بلند با طول ضلع 9 cm و سه طرف آن در دمای 100°C و سطح چهارمش در دمای 500°C است. توزیع دما درون میله P. به طور ناگهانی سطح سمت راست این میله به دمای 200° افزایش داده می‌شود. تغییرات دمایی حسب مکان و زمان را بدست آورید. مشخصات میله $K = 215\ \frac{W}{m^\circ C}$ و $\alpha = 8.85\times10^{-5}\ \frac{m^2}{s}$ است.



میله به صورت بلند ← دو بعدی

$L = 9\,cm \rightarrow \Delta x = \Delta y = 3\,cm$

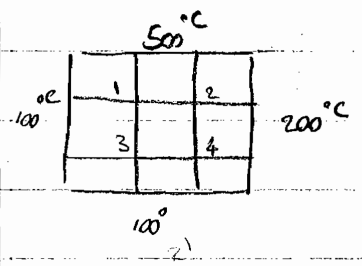
الف) بخش اول مسئله در حالت SS ← حل 3 مسئله ← $T_1 = T_2$ و $T_3 = T_4$ به خاطر تقارن ←

$$1 \text{ نقطه} \rightarrow 500 + 100 + T_3 + T_2 - 4T_1 = 0 \quad , \quad T_1 = T_2$$

$$3 \text{ نقطه} \rightarrow 100 + 100 + T_1 + T_4 - 4T_3 = 0 \quad , \quad T_3 = T_4$$

$$\Rightarrow T_1 = 250^\circ C \ , \ T_3 = 150^\circ C$$

ب) در این حالت دیگر تقارن نداریم.



$\Delta x = 0.03\ m \quad \alpha = 8.85\times10^{-5}\ \frac{m^2}{s}$

if $\frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} = 1/4 \rightarrow \Delta t = 2.54\ sec$

← ۴ معادله داریم:

$$1 \text{ نقطه} \Rightarrow T_1^{P+1} = \frac{1}{4}\left[500 + 100 + T_3^P + T_2^P\right]$$

$$2 \text{ نقطه} \Rightarrow T_2^{P+1} = \frac{1}{4}\left[500 + T_1^P + T_4^P + 200\right]$$

$$3 \text{ نقطه} \Rightarrow T_3^{P+1} = \frac{1}{4}\left[100 + 100 + T_4^P + T_1^P\right]$$

$$4 \text{ نقطه} \Rightarrow T_4^{P+1} = \frac{1}{4}\left[T_2^P + T_3^P + 100 + 200\right]$$

حال با این ۴ معادله ۴ مجهول را در هر مرحله زمانی حل می‌کنیم

	P=0	P=1	P=2	P=3	P=4	P=5
T_1	250	250	256	259.37	260.94	261.72
T_2	250	275	281.25	284.37	285.94	281.72
T_3	150	150	156.25	159.37	160.94	161.72
T_4	150	175	181.25	184.37	185.96	186.72
t	0	2.54 s	5.08 s	7.62	10.16	12.7

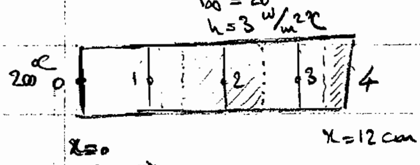
در مرحله P=1 نقطه ۲ و ۴ که همسایه 200°C هستند تغییر می‌کنند.

← با گذشت زمان نرخ تغییرات دما کندتر و کندتر می‌شود و به حالت پایا نزدیک‌تر می‌شود.

← از نظر عملی این مسئله 13 s طول می‌کشد تا به حالت پایا برسد.

[illegible]

مثال ۶ میله‌ای است به طول 12 cm و قطر 2 mm در تعادل حرارتی با محیط خود در دمای 20°C است. به طور ناگهانی یک سر میله به دمای 200°C گرم می‌شود. مطلوب است توزیع دما برحسب زمان برای این میله. از فرض‌های مسئله مثال استفاده شود یا گرم شدن میله انتقال حرارت جابجایی با محیط صورت می‌گیرد که h را می‌توان ثابت و برابر $3\ \frac{W}{m^2 {}^\circ C}$ فرض کرد.



$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} \leftarrow$$ گره‌ها را باید فرض کنیم جواب یک بعدی

چون تغییرات در جهت r ناچیز است، در جهت x هم جابجایی T_∞ است، یک بعدی

$d = 2\ mm$ $\quad T = f(x,t)$

$\Delta x = 3\ cm$

چهار گره داریم که ۱ و ۲ و ۳ یک نوع و ۴ هم جدا.

برای ۱ و ۲ و ۳ که درون یک دو شکل (از طرف محیط) یک حجم جابجایی از اطراف دارند با معادله انرژی داریم:

$$i=1,2,3 \rightarrow KA\frac{T_{i-1}^p - T_i^p}{\Delta x} + KA\frac{T_{i+1}^p - T_i^p}{\Delta x} + hP\Delta x(T_\infty^p - T_i^p) = \rho A \Delta x\, c\, \frac{(T_i^{p+1} - T_i^p)}{\Delta t}$$

$$i=4 \rightarrow KA\frac{T_{i-1}^p - T_i^p}{\Delta x} + hP\frac{\Delta x}{2}(T_\infty^p - T_i^p) + \underbrace{hA(T_\infty^p - T_i^p)}_{\text{که می‌توانستیم از آن صرف‌نظر کنیم}} = \rho A \frac{\Delta x}{2} c \frac{(T_i^{p+1} - T_i^p)}{\Delta t}$$

پس ۴ دما که ۴ مجهول حل می‌کنیم.

می‌توان یک شرط ساده‌کننده بگذاریم که شرط ساده کننده را برای موثرترین معادله می‌گذاریم

ضریب T_i^p در معادله اول : $\frac{KA}{\Delta x} + \frac{KA}{\Delta x} + hP\Delta x = \rho A \Delta x C \frac{1}{\Delta t}$

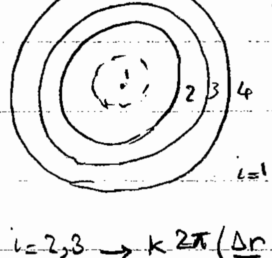
$$2KA + Ph\Delta x^2 = \rho A \Delta x^2 c \frac{1}{\Delta t} \rightarrow 1 + \frac{hP\Delta x^2}{2KA} = \frac{\rho \Delta x^2 c}{K 2 \Delta t}$$

$\rightarrow$ از این شرط $\rightarrow \Delta t$ به دست می‌آید

$$\rightarrow 1 + \frac{hP\Delta x^2}{2KA} = \frac{1}{2\alpha}\frac{\Delta x^2}{\Delta t}$$

اگر انتقال حرارت در جهت θ داشته باشیم r هم خود به خود می‌آید.

مثال : سیم مسی است به شعاع 3 mm از محیطی به دمای 20°C به طور ناگهانی با عبور جریان برق از داخل این سیم تولید انرژی داخلی به میزان 0.5 $\frac{MW}{m^3}$ صورت می‌گیرد. با اینکه سطح سیم انتقال حرارت جابجایی با ضریب $5\ \frac{W}{m^2 {}^\circ C}$ (به فرض ثابت بودن) برقرار می‌کند. توزیع دما برحسب زمان را برای این سیم به دست آورید. برای خواص فیزیکی از داده‌های مثال ۴ می‌توان استفاده شود. از روی α و K ← ρc به دست می‌آید.



$\Delta r = 1\ cm$

تغییرات دما در امتداد سیم خیلی ناچیز نداریم در جهت θ هم شرایط متقارن است پس تغییر

مثل از جاری شدن برق $T_{1,2,3,4} = 20^\circ C$ آنهم در تعادل با محیط :

$$i=1 \rightarrow k\frac{2\pi\Delta r}{2}\times 1 \times \left(\frac{T_{i+1}^p - T_i^p}{\Delta r}\right) + \dot{q}\pi\left(\frac{\Delta r}{2}\right)^2 \times 1 = \rho\pi\left(\frac{\Delta r}{2}\right)^2 \times 1 \times c \frac{T_i^{p+1} - T_i^p}{\Delta t}$$

$$i=2,3 \rightarrow k2\pi\left(\frac{\Delta r}{2} + (i-2)\Delta r\right)\left(\frac{T_{i-1}^p - T_i^p}{\Delta r}\right) + k2\pi\left(\frac{\Delta r}{2} + (i-1)\Delta r\right)\left(\frac{T_{i+1}^p - T_i^p}{\Delta r}\right) +$$

$$+\dot{q}\pi\left[\left(\frac{\Delta r}{2} + (i-1)\Delta r\right)^2 - \left(\frac{\Delta r}{2} + (i-2)\Delta r\right)^2\right] = \rho\pi\left[\left(\frac{\Delta r}{2} + (i-1)\Delta r\right)^2 - \left(\frac{\Delta r}{2} + (i-2)\Delta r\right)^2\right] c \frac{T_i^{p+1} - T_i^p}{\Delta t}$$

$$i=4 \rightarrow k2\pi\left[(i-2)\Delta r+\frac{\Delta r}{2}\right]\left(\frac{T_{i-1}^{p}-T_i^{p}}{\Delta r}\right)+h2\pi R\left(T_\infty^{p}-T_i^{p}\right)+\dot{q}\left(\pi R^2-\pi\left[(i-2)\Delta r+\frac{\Delta r}{2}\right]^2\right)$$
$$=\rho\left[\pi R^2-\pi\left[(i-2)\Delta r+\frac{\Delta r}{2}\right]^2\right]c\,\frac{T_i^{p+1}-T_i^{p}}{\Delta t}$$

شرط پایداری را برای گره ٤ بیان می‌کنیم.

پایداری به محافظه‌کارانه‌ترین شرط انتخاب Δt را برآورده می‌کند.

جلسه ۲۰

chapter 5 _ Forced convection H_T
"فصل ۵"

سطح در معرض محیط با دمای هوا T_∞ و انتقال حرارت جابجایی h (در فصل قبل) و حاکی از شرایط و مشخصات محیط جابجایی بود.
صحبت در این فصل برای به دست آوردن h است.

$q = hA\Delta T$

$h = f(?)$

Convection H.T
- 1_ Forced
- 2_ Free

  → تغییر فاز نداریم و صرفاً تغییر دما است
- 3_ phase change → علاوه بر تغییر دما، تغییر فاز هم اتفاق می‌افتد مثل جوشش، چگالش و ...
  - Boiling
  - Condensation

  دو پدیده مهم در این مورد

این فصل خصوصاً در ادامه دروس به بحث مکانیک سیالات مقدم از مفاهیم حرارت چون در این جا حرکت و جابجایی سیال
سروکار داریم و حرکت نتیجه مکانیک سیالات.

هدف به دست آوردن h / برای رسیدن به h دو راه داریم: ۱- مطالعات نظری Theoretical

۲- " تجربی - آزمایشگاهی Expelinented

مطالعات نظری به روی کاغذ مطالعات را نوشته، مسئله فیزیکی را تبدیل به ریاضی کرده و حل کنیم با معادله جرم، انرژی و مومنتم و ...

ما کار دوم که ساخت مدل آزمایشگاهی و با استفاده از اطلاعات تجربی معادله خواسته شده را بیابیم:

مطالعات تئوری برای هندسه‌های ساده جواب می‌دهد که جریان روی صفحه / جریان داخل لوله که همراه با ساده‌سازی‌ها و فرضیات بسیار زیاد

که البته این مطالعات هنوز ادامه دارند.

مطالعات تجربی که هیچ گونه محدودیتی ندارد و هر گونه شکل هندسی را می‌توان ساخت و بررسی کرد ولی هزینه زیادی دارد.

البته برای تئوری می‌توان روش عددی را نیز به کار برد که با در دست داشتن کامپیوتر و نرم افزار ... که اطلاعات به صورت نقطه نقطه نه پیوسته.

Force convection:

u_∞ از صفر بیشتر است که یعنی سیال جاری است و ساکن نیست. $u_\infty > 0$ ($u_\infty = 0$ Free در)

فصل 5 مبحث را تئوری دنبال می‌کند

« 6 « « تجربی « «

در این قدم هندسه کار است. در فصل ۵ دو هندسه داریم ۱- Flow over Flat wall

۲- Flow inside pipe

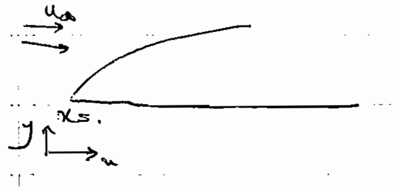
مورد ۲ مشکل‌تر از مورد ۱ است. که حالت ۲ در هندسی سخت‌تر کاربردی‌تر است

دو نوع جریان داریم: Laminar جریان (لایه‌ای) آرام / Turbulent جریان آشفته

در این فصل بیشتر تمرکز در جریان آرام است.

Laminar Flow over Flat wall: (Fluid Mechanics)

در جریان Free conv که حالت قرارگرفتن جسم (افقی، عمودی، مایل) مهم است ولی در جریان force حالت قرارگرفتن جسم مهم نیست.



سیال روی صفحه در حرکت است.

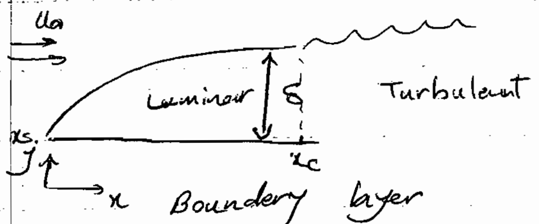
جهت جریان را همیشه x و جهت عمود بر جریان را y می‌گیریم.

وقتی سیال به سطح می‌رسد یک لایه مرزی ایجاد می‌شود (Boundry layer)

درون این لایه مرزی سرعت و دما لزوماً برهم منطبق نیستند

قسمتی از سیال که پارامتر مورد نظر ما متغیر باشد ← تعریف لایه مرزی

بین روی مولکول روی دیوار ← صفر و آخرین مولکول سرعتش u_∞ است.



δ ← ضخامت لایه مرزی

فرض کردیم مسئله دو بعدی باشد

$\delta = f(x) = ?$

$u = f(x, y) = ?$

فرضیات: ۱- مسئله دو بعدی (x جهت جریان / y عمود بر جریان)

۲- در شرایط ss هستیم (عدم تغییرات با زمان)

۳- خواص فیزیکی ثابت

ضخامت لایه مرزی در حد mm است ← دیواره‌های صفحه (دیواره) به علت اینکه عرض دیوار خیلی بزرگتر از δ است می‌توان از اثرات دیواره‌های دیوار صرف نظر کرد.

در محدوده $x < x_c$:

جریان آرام ← لایه‌ها کنار هم حرکت می‌کنند و انتقال حرارت، جرم، مومنتوم از نوع انتقال مولکولی هستند.

جریان آشفته ← درون جریان، eddy ها و گردابه‌هایی درست می‌گردند که به علت اختلاف فشار در محدوده eddy ها باعث ایجاد انتقال جرم، حرارت و مومنتوم می‌شوند یعنی علاوه بر پدیده‌های مولکولی وجود eddy ها باعث افزایش پدیده‌های

" " " حرارت و " " می‌گردد ← پدیده‌های مولکولی داریم ولی تأثیرش نسبت به eddy ها بسیار ناچیز است.

پارامتر تشخیص آرام و آشفته بودن جریان، عدد Re است.

$$Re = \frac{\rho u x}{\mu}$$ از یک حدی جریان آشفته می‌شود.

if $Re < 10^5$ آرام

$Re > 10^6$ متلاطم

هر هندسه‌ای معیار Re خاص خود را دارد مثلاً در هندسه لوله $Re < 2100$ آرام و $Re > 4000$ آشفته.

ناحیه انتقال تأثیر پدیده‌های مولکولی = تأثیر eddy ها.

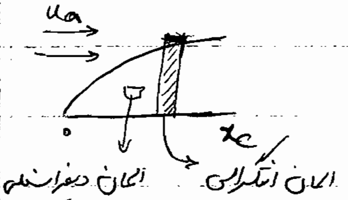
ما در مسئله‌های صفحه‌ای صرف نظر از ناحیه انتقال Re را بحرانی گوییم حساب می‌کنیم:

$$Re = 5\times10^5$$

برای به دست آوردن x_c:

$$5\times10^5 = \frac{\rho u x_c}{\mu}$$ ← x_c به دست می‌آید

حال معادلات بر حجم دیفرانسیلی می‌نویسیم.

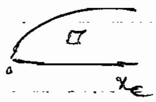


تفاوت ظاهری این دو المان:

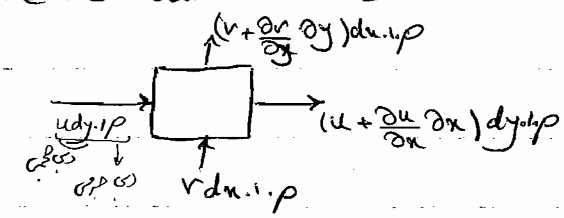
دیفرانسیلی ← همه تا داخل لایه مرزی قرار گیرند

انتگرالی ← یک ضلع روی دیوار است و ضلع دیگر در سیال قرار گیرند

Differential Formulation:



① Mass Ballance:



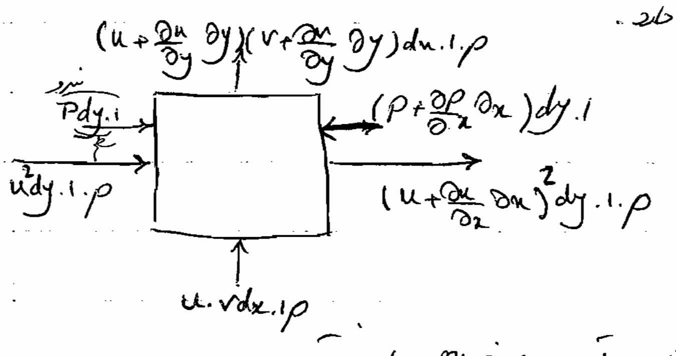
تولید و تجمع نداریم (SS) و z هم نداریم چون مسئله دوبعدی است.

ساده‌ترین حالت ممکن.

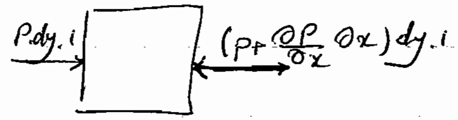
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

② Momentum (Force) Ballance: (x direction)

جریانی که از جهت x حرکت می‌کند یک مقدار مومنتم با خود دارد.

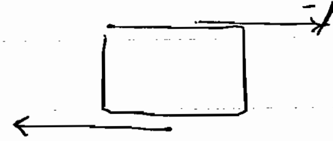


در تمام مسیر جریان حرکت می‌کنیم افت فشار داریم یعنی فشار در طول دیفرانسیل المان با هم برابر است.



بالا و پایین اصولاً فشار هیدرواستاتیکی است چون بین 8 در حد چند mm است پس از تغییرات فشار در بالا و پایین صرف نظر می‌کنیم.

المان نسبت به لایه پایین سرعتش بیشتر و لایه بالا سرعتش کمتر است پس لایه پایین یک تنش برشی دارد که المان را به جلو حرکت می‌دهد به سمت عقب و لایه بالایی المان را با خود حرکت می‌دهد (جلو)



$$-\mu\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy\right]dx.1$$

$$\underbrace{-\mu\frac{\partial u}{\partial y}}_{C}\ \underbrace{dx.1}_{A}$$

نقطه بیت سر و جلو هم سرعتشان متفاوت است پس در این جهت هم یک تنش برشی به سمت بالا و پایین داریم ولی چون این مقدار ما بسیار ناچیز است فرض می‌کنیم از تنش‌های برشی عمود بر جهت جریان صرف نظر می‌کنیم.

اگر می‌خواستیم بنویسیم به این حالت بود:

$$\uparrow\ ①\ -\mu\frac{\partial v}{\partial x}dy.1$$

$$\downarrow\ ②\ -\mu\left[\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx\right]dy.1$$

پس در حالت لایه مرزی و فلوی داریم حال می‌توان معادله را بنویسیم:

از نیروی وزن و نیروی شناوری صرف نظر کردیم به خاطر این که در Free Conv این ۲ قابل صرف نظر نیستند.

چون زیرا باعث نیروی بزرگ هستند.

پس افقی، عمودی، مایل بودن مهم نیست

زیرا نیروی وزن نداریم.

چون زیرا باعث نیروی کوچک هستند به همین دلیل است که افقی عمودی و مایل بودن صفحه مهم است.

در Force Conv، انتقال حرارت و سیالات جدا از هم حل شده و سپس با هم ادغام می‌شه

در Free Conv ″ و سیالات با هم و همزمان حل می‌شه.

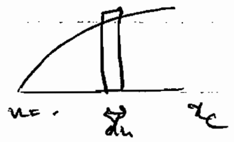
گردش موازنه را همزمان انجام دهیم:

$$\rho\left[u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right]=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{\partial P}{\partial x}$$

یک معادله دیفرانسیلی جزئی که برای حلش به شرایط مرزی نیاز داریم ۲ تا برای u، ۱ برای P و ۱ برای v که ۴ تا شرط مرزی

این معادله دیفرانسیلی تحلیلی حل نمی‌شود و حلش از محدوده ما خارج است.

Integral Formulation:



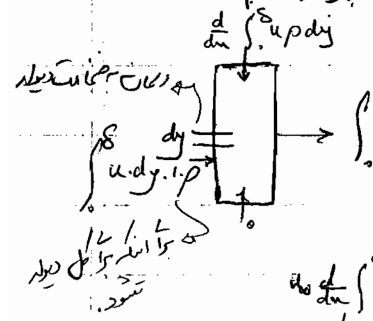
در حجم کنترل: یک ضلع روی دیواره، یک ضلع داخل جریان آزاد.

ضلعی که داخل دیواره قرار گرفته ← از طریقش جرمی وارد نمی‌شود (یک جمله حذف شد)

ضلعی که در بالا قرار گرفته ← در طرفش سرعت u_∞ است ← تنش برشی نداریم (سرعت ثابت است)

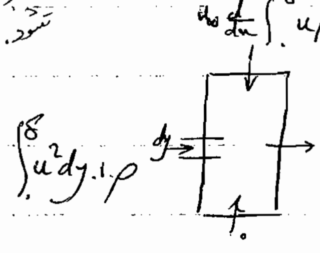
اگر بخواهیم برای کل دیواره که ضخامت δ دارد مقدار جرم ورودی را می‌نویسیم

بر انتقال جرم که در dy رخ داده انتگرال می‌گیریم.



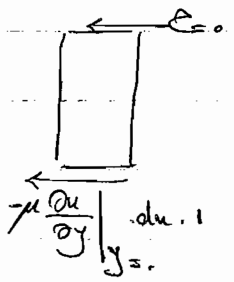
$$\int_0^\delta u\,dy\,\rho + \frac{d}{dx}\int_0^\delta u\rho\,dy$$

حالا انتقال جرم مومنتم:



$$\int_0^\delta u^2 dy\,\rho + \frac{d}{dx}\int_0^\delta u^2\rho\,dy$$

تنش برشی:



از تغییرات فشار نسبت x به طولها صرف‌نظر می‌کنیم؛ به خاطر سادگی کار و حل راحت‌تر مسئله.

$$\Rightarrow \cancel{\rho\frac{\partial}{\partial x}} \quad \rho\frac{d}{dx}\int_0^\delta (u_\infty - u)\,u\,dy = \mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}$$

M.B.I
مومنتم ↓ بالانس ↓ انتگرال ↓

برای حل:

u تابعی از x و y است ← در فصل ۲ T تابعی از x و t بود ← در فصل ۲ یک معادله خودمان چندجمله‌ای فرض کردیم

، اجازه می‌دادیم بعد دیگر مسئله حل کند. این جا هم همین کار را می‌کنیم، فرض می‌کنیم:

Assume: $u = A + By + Cy^2 + Dy^3$

می‌توانیم ۴ شرط مرزی تعریف کنیم:

in: 1, $y=0$ $\quad u=0$ $\qquad$ 3, $y=\delta$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0$

2, $y=\delta$ $\quad u=u_\infty$ $\qquad$ 4, $y=0$ $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ $\qquad u=v=0$

فرض با خطای زیاد:

Assume $u = A + By$

1) $y=0 \quad u=0 \quad A=0$

2) $y=\delta \quad u=u_\infty \quad B=\dfrac{u_\infty}{\delta}$

$\longrightarrow u = u_\infty \dfrac{y}{\delta}$

in MBI:

$$\rho \frac{d}{dx}\left[\int_0^\delta \left(u_\infty - u_\infty \frac{y}{\delta}\right) u_\infty \frac{y}{\delta}\, dy\right] = \mu \frac{u_\infty}{\delta}$$

$$\rho u_\infty^2 \frac{d}{dx}\int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2}\right) dy = \mu \frac{u_\infty}{\delta}$$

$$\rho u_\infty \frac{d}{dx}\left[\frac{y^2}{2\delta} - \frac{y^3}{3\delta^2}\right]_0^\delta = \mu/\delta$$

$$\Rightarrow \frac{\rho u_\infty}{6}\frac{d\delta}{dx} = \frac{\mu}{\delta} \longrightarrow \delta\, d\delta = \frac{6\mu}{\rho u_\infty} dx$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}\delta^2 = \frac{6\mu}{\rho u_\infty} x + Const$$

$x=0 \quad \delta=0 \quad Const=0$

$$\frac{\delta^2}{x^2} = \frac{12\mu}{\rho u_\infty x} \longrightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{\sqrt{12}}{Re_x^{1/2}} \longrightarrow \frac{\delta}{x} = 3.464\, Re_x^{-1/2}$$

جواب کتاب:

$$\frac{\delta}{x} = 4.64\, Re_x^{-1/2}$$

اگر فرمول دیفرانسیل را بلد بودیم حل می‌کنیم جوابش به صورت زیر می‌شد:

$$\frac{\delta}{x} = 5\, Re_x^{-1/2}$$

تمرین: $u=A+By+Cy^2$ را با ضوابط مرزی حل کن ← جالب است.

Laminar Flow over Flat plate Energy Balance

از دو روش ـ دیفرانسیلی و انتگرالی می‌توان h را حساب کرد.

روش دیفرانسیلی جواب کامل را به ما خواهد داد ولی ما آن را با روش انتگرالی حساب خواهیم کرد.

دیفرانسیلی 

انتگرالی 

روش دیفرانسیلی:

فرضیات: SS ـ دوبعدی ـ خواص فیزیکی ثابت ـ از تنش در جهت عمود بر جریان صرف نظر کردیم ـ افت فشار صرف نظر شده

$\rho[v+\frac{dv}{dy}dy]dx$

$\rho u \cdot 1 \cdot dy \rightarrow \square \rightarrow \rho[u+\frac{du}{dx}dx]\cdot 1 \cdot dy$ → موازنه جرم

$\uparrow \rho v \cdot 1 dx$

$\rho[v+\frac{\partial v}{\partial y}dy]dx\, c_p[T+\frac{\partial T}{\partial y}dy]$

$\underbrace{\rho u \cdot 1 dy\, c_p T}_{\text{انرژی ورودی}} \rightarrow \square \rightarrow \underbrace{\rho[u+\frac{\partial u}{\partial x}dx]\cdot dy\, c_p[T+\frac{\partial T}{\partial x}dx]}_{\text{انرژی خروجی}}$ موازنه انرژی:

$\uparrow \rho v \cdot 1 \cdot dx\, c_p T$

دمای دیوار T_w و دمای سیال T_∞ است. چون انتقال حرارت یا انرژی داریم.

فرض می‌کنیم T_w ثابت است (یعنی به طریقی دما را حفظش کردیم).

در المان دیفرانسیلی دو نقطه پایینی گرمتر از نقاط زبرین است.

اگر انتقال حرارتی بخواهد صورت بگیرد باید بر اثر برخورد مولکول‌ها است و این یعنی رسانش پس خواهیم داشت:

$\uparrow -k\,dx\cdot 1\left[\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}dy\right]$

$\square$ جمله رسانش:

$\uparrow -k\,dx\cdot 1\frac{\partial T}{\partial y}$

به همین طور که سیال جلو می‌رود دما گرمتر می‌شود و نقطه عقب سردتر و نقطه جلو گرمتر است پس در جلو و عقب هم رسانش داریم ولی از این رسانش صرف نظر می‌کنیم یعنی از رسانش در جهت جریان صرف نظر می‌کنیم زیرا

در جهت x: جمله حرکت توده‌ای انرژی $\rho u \cdot 1 \cdot dy\, c_p dT$ از مقدار حرکت مولکولی رسانش $-k\,dy \frac{\partial T}{\partial x}$ خیلی بیشتر است.

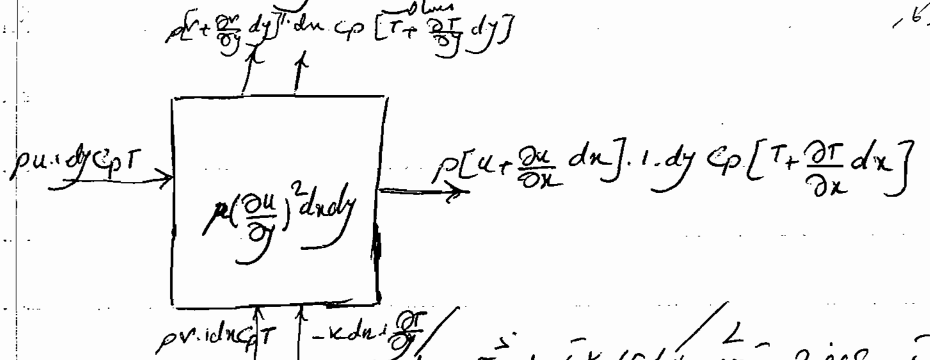
در راست: $-k\,dy\left[\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}dx\right]$ 〃 〃 〃 $\rho\left[u+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right]\cdot 1 \cdot dy\; c_p\left[T+\frac{\partial T}{\partial x}dx\right]$

با نسبت u خیلی کوچک است پس حد بالا را بیش نمی‌توان از حرکت مولکولی رسانش صرف‌نظر کرد.

اگر u خیلی بزرگ باشد (جریان فلزات مذاب) و یا سرعت u کم باشد نمی‌توان از جمله رسانش در جهت جریان صرف‌نظر کرد.

• کار خالص نرخی = تفاضل دو جمله تنش برشی × مساحت × مسافت $\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dx\,dy \times 1$

نیرو × جابجایی = کار

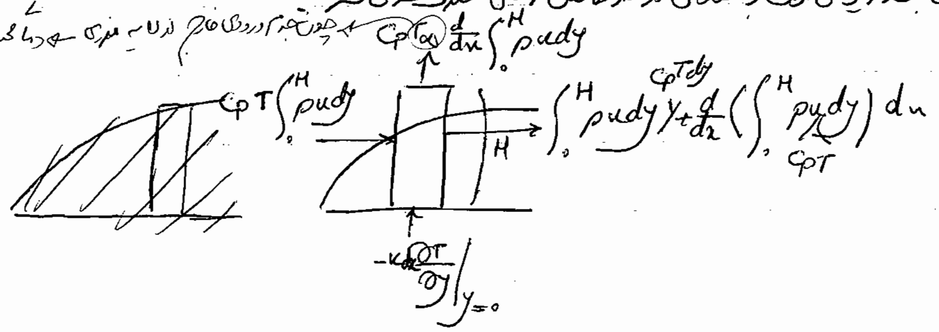


اگر این هشت عبارت را (۴ تا ورودی خروجی توده‌ای و مولکولی) ۲ تا رسانش و یکی کار نرخی معادله کنیم:

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

حالت ساده شده است می‌باشد زیرا می‌توان با سادگی از کار خالص نرخی صرف‌نظر می‌شد.

چون جرم ورودی خارج از لایه مرزی بوده با تحقیقات دارد.



نقطه بالا رسانش ندارد اما به جرم به آن وارد می‌شد.

از کار نرخی صرف‌نظر شده که در کتاب عوامل کاملش هست.

$$\frac{d}{dx}\int_0^H (T_\infty - T)\,u\,dy = \alpha \left.\frac{dT}{dy}\right|_{y=0} \qquad \delta \; H.B.I$$

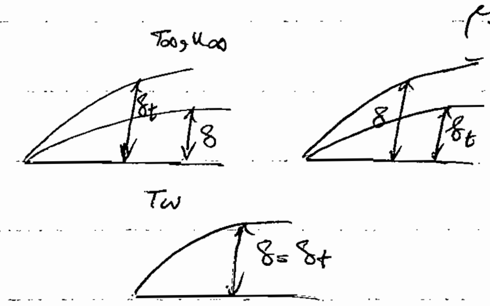
T را باید برحسب y چندجمله‌ای فرض کرد که دقیق‌ترینش درجه سوم است:

قبل از حل توضیحی راجع به H:

در لایه مرزی حرارتی / لایه مرزی جایی است که پارامترهای آن متغیر است. در اینجا هم سرعت و هم دما متغیر است

δ ← ضخامت لایه مرزی سرعت ← مربوط به بحث سیالات هستیم.

δ_t ← ضخامت لایه مرزی دما ← با انتقال حرارت سروکار داریم



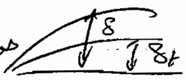
سرعت از صفر تا u_∞ تغییر می‌کند ← در امتداد δ

در امتداد δ_t دما از T_w تا T_∞ تغییر می‌کند.

هر سه حالت ممکن است (هر سه شکل)

در یک شرایط خاص این دو بر هم منطبق می‌گردند.

HBI معادله انرژی است ← چون معادله انرژی باید در فاصله δ_t از آن انتگرال بگیریم یعنی $H \equiv \delta_t$ می‌توانیم است.

در حالت  چون از بعد δ_t تمام لایه‌ها دماشان یکسان برابر T_∞ است پس دیگر در معادله انرژی صرف‌نظر می‌شه.

Assume $\quad T = A' + B'y + C'y^2 + D'y^3$

T هم تابع x و هم y. از این دو یکی را فرض می‌کنیم و دیگری را ...

احتیاج به چهار شرط مرزی داریم.

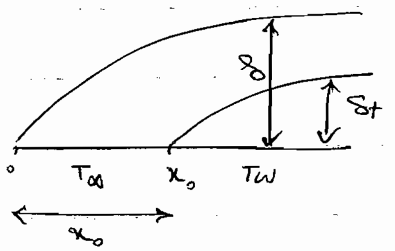
$$\left.\begin{array}{l} y=0 \rightarrow T = T_w = A' \\ y=\delta_t \rightarrow T = T_\infty \\ y=\delta_t \rightarrow \dfrac{\partial T}{\partial y} = 0 \\ y=0 \rightarrow \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta_t} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3 \quad *$$

که از معادله موازنه دیفرانسیلی

جواب در کتاب دقیق‌ترین جواب است.

* در HBI گذاشته انتگرال گرفته سپس مشتق می‌گیریم. جواب نزدیک هست.

جاهایی که در حل انتگرال HBI به مشکل برخوردیم:



صفحه را تا x_0 گرم نمی‌کنیم و تا x_0 دما همان دمای سیال است از x_0 به بعد صفحه را حرارت می‌دهیم و تا x_0 فقط انتقال مومنتوم داریم و انتقال حرارت از x_0 به بعد شکل می‌گیرد. سپس x_0 را به سمت صفر میل می‌دهیم.

از هفته پیش داشتیم:

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \qquad \frac{\delta}{x} = \frac{4.64}{Re_x^{1/2}}$$

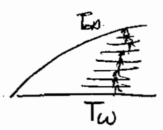
فرض هست:

$$\frac{T-T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3$$

$$\frac{\delta_t}{\delta} = 0.974\, Pr^{-1/3}\left[1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{3/4}\right]^{1/3}, \quad Pr = \frac{c_p \mu}{k}$$

$$\text{if } x_0 \to 0 \qquad \frac{\delta_t}{\delta} = 0.974\, Pr^{-1/3} \; *$$

δ را بر حسب x داریم پس δ_t بر حسب x به دست می‌آید.



حرارت از طریق رسانش انتقال می‌یابد $\Rightarrow -k \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = h(T_w - T_\infty)$

$$\Rightarrow h = -k \frac{\left.\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right|_{y=0}}{T_w - T_\infty} \Longrightarrow 1$$

$$h = -k\frac{(T_\infty - T_w)\frac{3}{2}\frac{1}{\delta_t}}{T_w - T_\infty} = \frac{3}{2} k/\delta_t$$

$$\frac{hx}{k} = \frac{3}{2}\frac{x}{\delta_t} = \frac{3}{2}\frac{x}{\delta_t}\frac{\delta}{\delta}^{*} = \frac{3}{2}\frac{1}{0.974}Pr^{1/3} \times \frac{1}{4.64}Re_x^{+1/2}$$

عدد ناسلت $Nu_x = \frac{h_x x}{k} = 0.332\, Re_x^{1/2}\, Pr^{1/3}$

اول هستیم پرسیدیم (؟) $h=f$ حال به جواب رسیدیم:

$$h_x = 0.332\left(\frac{\rho u_\infty x}{\mu}\right)^{1/2}\left(\frac{c_p \mu}{k}\right)^{1/3}$$

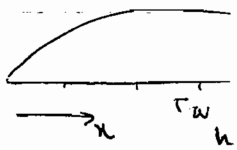
~~ضریب انتقال حرارت روی یک صفحه از طریق خواص فیزیکی سیال اثرش را روی صفحه می‌گذارد.~~

ضریب انتقال حرارت روی یک صفحه سیال اثرش را از طریق c_p، ρ و μ که خواص فیزیکی اند وارد می‌کند سرعت جریان از طریق u_∞ و مکان هندسی روی صفحه از طریق x خودش را وارد تابع ضریب انتقال حرارت می‌کند.

✓ مقدار Nu_x برای هندسه‌های مختلف متفاوت است: $Nu = C Re^a Pr^b$

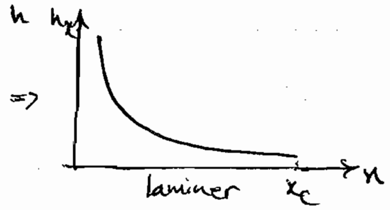
نکات:

چرا در Nu_x اندیس x گذاشتیم؟ زیرا h_x تابعی از x است و بیانگر h = local ~~Heat transfer~~ HTC است و تابع موضعی است نسبت به x.



$$h_x \propto x^{-1/2}$$

① هر چه در جهت جریان پیش می‌رویم h_x کم می‌شود



تا جایی که جریان آرام باشد این نمودار برقرار است.

② ضخامت لایه مرزی در مسیر حرکت پیوسته بیشتر می‌شود یعنی هرچه در x به سمت جلو می‌رویم ضخامت لایه $\uparrow$ مقاومت $\uparrow$ $h \downarrow$

③ مهندس اصولاً علاقه‌ای به h موضعی ندارد و نیاز به h متوسط دارد

$$\bar h = \frac{\int_0^L h_x\,dx}{\int_0^L dx} \quad L \le x_c$$

در رابطه بالا جایگذاری می‌کنیم

$h_x \propto x^{-1/2}$ ، $h_x = \overset{\text{ثابت}}{C}\, x^{-1/2}$

$$\Rightarrow \bar h = 2h_{x=L}$$

④ دمای فیلم

$$Re = \frac{\rho u_\infty x_c}{\mu} < 5\times10^5$$

حال سؤال این است که خواص فیزیکی لایه مرزی حرارتی را در چه دمایی بخوانیم؟

باید در متوسط دمای T_w و T_∞ بخوانیم.

$$T_f = \frac{1}{2}(T_w + T_\infty)$$

Film Temperature ← T_f

سپس با استفاده از جداول در کتاب خواص فیزیکی با توجه به T_f می‌خوانیم.

$$Pr = \frac{c_p\mu}{k} = \frac{\mu/\rho}{k/\rho c_p} = \frac{\nu}{\alpha}$$

Pr علاوه بر اینکه خواص فیزیکی را به ما می‌دهد مفهوم فیزیکی $\frac{\text{نرخ انتقال مومنتوم}}{\text{نرخ انتقال حرارت}}$.

هر عدد بدون بعد مفهوم فیزیکی دارد

$$Re = \frac{\text{عامل حرکت}}{\text{عامل بازدارنده}} = \frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی لزجت}}$$

$$Nu = \frac{\text{انتقال توده‌ای انرژی در حالت ماکروسکوپی}}{\text{" " " در حالت میکروسکوپی}}$$

لایه مرزی هم منطبق می‌گردند. در = نرخ دو انتقال حرارت با هم برابرند. $Pr=1 \longrightarrow \delta=\delta_t$

$$\Rightarrow \frac{\delta_t}{\delta}=1 \rightarrow Pr^{1/3}=0.974 \Rightarrow Pr=0.974^3$$

لزوماً یکی نشد

ولی به علت فرضیاتی که گرفتیم $Pr\neq1$ نمی‌شه.

آیا Pr برای یک سیال به خصوص ثابت است؟ خیر زیرا تابع دما است البته به مقدار خیلی جزئی به فشار نیز وابسته است.

$Pr_{air} \approx 0.7 \longrightarrow$ خیلی هم با دما تغییر نمی‌کند زیرا k و c_p و μ
آن چنان با T تغییر نمی‌کند.

$Pr_{water} = 5 \longrightarrow$ وابستگی شدیدی با T دارد. $\rightarrow T\uparrow \Rightarrow Pr\downarrow$ 2و3

$Pr_{\text{روغن موتور}} = 500-5 \rightarrow$ در دماهای کم زیرا ویسکوزیته‌اش زیاد $\rightarrow \uparrow T \Rightarrow Pr\downarrow$

$Pr_{Hg} = 0.02 \longrightarrow$ از یک خیلی کمتر است زیرا
k جیوه خیلی بزرگ است.

لایه مرزی رشد پیدا می‌کند زیرا جرم در این لایه وارد می‌شه.

مثال: آب با سرعت $1\ m/s$ و دمای $20^\circ C$ بر روی صفحه‌ای با دمای 100° جریان خواهد داشت. با فرض اینکه توزیع سرعت خطی و توزیع دما درجه دوم فرض شود. مطلوب است:

الف) در چه فاصله‌ای جریان آشفته می‌شه؟

ب) ضخامت لایه مرزی سرعت در فواصل 10 و 20 cm از ابتدای صفحه؟

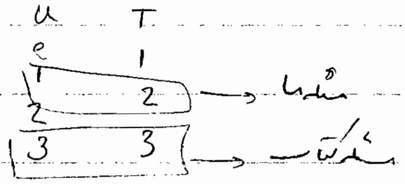
ج) میزان جرمی که از جریان آزاد در فاصل این دو مقطع وارد لایه مرزی می‌گردد.

د) مقادیر ضخامت لایه مرزی حرارتی در این دو مقطع

ه) مقادیر موضعی ضریب انتقال حرارت در این دو مقطع

و) مقدار حرارت انتقال یافته در فاصل این دو مقطع

مسئله جریان روی صفحه 12 تا پاسخ دارد یعنی سرعت را می‌توان درجه ۱، 2، 3 و T را درجه ۱، 2، 3 (صفر نمی‌گیریم) زیرا T° به دلیل ... دما حذف می‌کنیم.



حل ۲۲

برای حل مسئله خواص فیزیکی سپس Re (فصل 5، 6) سپس عدد ناسلت (فصل 7، 8) می‌یابیم تا بدانیم جریان آرام یا متلاطم. سپس وقتی نوع جریان را یافتیم به معادله مناسب آن‌ها را پیدا می‌کنیم.

در دمای متوسط $60^\circ C$ خواص را می‌یابیم.

$$T_f = \tfrac{1}{2}(100+20) = 60^\circ C$$

از کتاب $\rightarrow \rho = 997.8\ kg/m^3$

$k = 0.604\ W/m^\circ C$

$c_p = 4179\ J/kg^\circ C$

$\mu = 9.8\times 10^{-4}\ kg/m\cdot s$

الف) $Re = \dfrac{\rho u_\infty x_c}{\mu} \leq 5\times 10^5 \Rightarrow x_c = 0.491\ m$

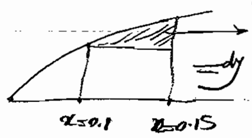
تا 49 cm جریان آرام است و بعد از آن متلاطم می‌شه

با فرض توزیع سرعت خطی: $u = u_\infty \dfrac{y}{\delta}$ $\qquad \dfrac{\delta}{x} = 3.464\, Re_x^{-1/2}$ **

در δ/x ، Re را جایگزین کرده $x = 0.1 \rightarrow Re = 1.02\times10^{5} \Rightarrow \delta = 1.085\ mm$

و چون عرض را نداشتیم δ را می‌یابیم. $x = 0.15 \rightarrow Re = 1.53\times10^{5} \rightarrow \delta = 1.323\ mm$

ضخامت δ در حد mm است که فرض ما مبنی بر اینکه مسئله را دو بعدی فرض کردیم و از اثرات انتهایی صرف نظر کردیم به همین علت است
چون ضخامت لایه مرزی کوچک است.



جرمی که در این فاصله از جریان آزاد وارد لایه مرزی شده است

dy

دبی جرمی داخل لایه مرزی در 10^{cm} و 15^{cm} را یافته و از هم کم می‌کنیم که تفاضلش می‌شود جرمی که در این
فاصله از جریان وارد شده است.

$$d\dot m = \rho u \cdot 1 \cdot dy$$

$$\dot m = \rho \int_0^{\delta} u\, dy = \rho \int_0^{\delta} u_\infty \frac{y}{\delta}\, dy \Rightarrow \dot m = \rho u_\infty \left[\frac{y^2}{2\delta}\right]_0^{\delta} = \frac{\rho u_\infty \delta}{2}$$

مقدار δ در دو جرم 10^{cm} و 15^{cm} را جایگزین می‌کنیم

$@\ x = 0.1 \rightarrow \delta = 1.085\times10^{-3} \rightarrow \dot m = 0.541\ kg/s$

$x = 0.15 \rightarrow \delta = 1.323\times10^{-3} \rightarrow \dot m = 0.66\ kg/s$

$\Delta \dot m = 0.119\ kg/s$

از اینجا به بعد وارد مبحث انتقال حرارت شده‌ایم.

توزیع درجه ۲

$$T = c_1 + c_2 y + c_3 y^2$$

1) $y = 0 \quad T = T_w$

2) $y = \delta_t \quad T = T_\infty$

3) $y = \delta_t \quad \dfrac{dT}{dy} = 0$

$$\Rightarrow \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w} = \frac{2y}{\delta_t} - \frac{y^2}{\delta_t^2}$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^H (T_\infty - T)\, u\, dy + \frac{\mu}{\rho c_p}\Big[\underbrace{\int_0^H \left(\frac{du}{dy}\right)^2}_{}\Big] = \alpha \left.\frac{dT}{dy}\right|_{y=0} \qquad \delta HBI$$

که مربوط به کار اصطکاکی است
و از آن صرف نظر می‌کنیم که اگر صرف نظر نکنیم جواب حاصل کسره‌ای است

$H = \delta_t \longrightarrow$ محدوده‌ای که گرادیان دما وجود دارد.

$\longrightarrow$ محدوده‌ای که انتقال حرارت حاکم است.

$$\frac{\delta_t}{\delta} = 1.587\, Pr^{-1/3} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \right]^{1/3} \quad *$$

$$x_0 \to 0 \Rightarrow \frac{\delta_t}{\delta} = 1.587\, Pr^{-1/3}$$

$$-k \left.\frac{dT}{dy}\right|_{y=0} = h\,(T_w - T_\infty) \qquad h = \frac{2k}{\delta_t}$$

$$\frac{h_x x}{k} = \frac{2x}{\delta_t} = 2\,\frac{x}{\delta_t}\cdot\frac{\delta}{\delta} = 2\left(\frac{x}{\delta}\right)^{**}\cdot\left(\frac{\delta}{\delta_t}\right)^{*}$$

$$Nu_x = 0.364\, Re_x^{1/2}\, Pr^{1/3}$$

از ۲ حالت بدون کتاب

II حالت (بدون کتاب) تنها ضریب تفاوت دارد و توان‌ها ۱/۲ و ۱/۳ است ولی در یک مورد توان‌ها هر دو ۱/۲ است.

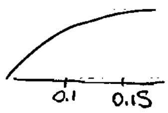
$\bar{h} = 2h_{x=L} \longrightarrow$ زیرا توان Re نصف شده است

ضخامت لایه مرزی حرارتی؟

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k} = 3.01$$

$x = 0.1 \quad \delta = 1.085\ mm \to \delta_t = 0.833\ mm$ ← ضخامت لایه حرارتی

$x = 0.15 \quad \delta = 1.323\ mm \to \delta_t = 0.928\ mm$



Re و Pr معلوم → Nu معلوم ← h_x جی از ضرب ۲ در ←

$x = 0.1 \to h_{x=0.1} = 1556\ W/m^2\,°C \qquad \bar{h} = 3112$

$x = 0.15 \to h_{x=0.15} = 1272 \qquad \bar{h} = 2545$

$$q_{0-0.1} = \overset{3112}{\bar{h}}\,(1\times 0.1)(100-20) = 24.89\ \frac{kW}{m}$$

$$q_{0-0.15} = \bar{h}\,(1\times 0.15)(100-20) = 30.54\ \frac{kW}{m}$$

Σq تفاضل $\Rightarrow q_{0.1-0.15} = 30.54 - 24.89 = 5.64\ \frac{kW}{m}$

مثال: صفحه‌ای است به ابعاد $1 \times 1\ m^2$ در دمای $400^\circ C$ هوا با سرعت $2\ m/s$ و دمای $20^\circ C$ بر روی آن جریان دارد مطلوب است میزان حرارت انتقال یافته اگر توزیع سرعت در لایه مرزی وجود نداشته باشد و توزیع دما خطی در نظر گرفته شود.

فرض می‌کنیم $u = u_\infty \rightarrow$ لایه مرزی سرعتی وجود ندارد

فقط δ_t وجود دارد که بسیار ساده می‌شه.

$$T = C_1 + C_2 y \quad \left|\begin{array}{ll} y=0 & T=T_w \\ y=\delta_t & T=T_\infty \end{array}\right.$$

پس دیگر x_0 و $\frac{\delta_t}{\delta}$ را نداریم.

توان Re در رابطه Nu عدد $\frac{1}{2}$ هم گردد،

در مسائل حرارت فصل 5 و 6 و ... برای سطح گرم دو حالت می‌توانیم داشته باشیم:

a) 1) Constant wall temperature

b) 2) 〃 〃 Heat flux

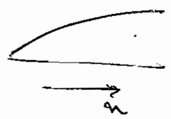
در حالت اول دیواره یا صفحه در دمای ثابت است. (بررسی شد)

〃 〃 2 صفحه یا دیواره‌های تحت شار حرارتی ثابت به بیرون است.

فرمول‌های ارائه شده برای هر دو:

$$q'' = h(T_w - T_\infty)$$

a) $T_w - T_\infty = cte \longrightarrow x\uparrow \Rightarrow h_x \downarrow \Rightarrow q'' \downarrow$



b) $q'' = cte \quad x\uparrow \Longrightarrow h_x \downarrow \Rightarrow (T_w - T_\infty)\uparrow \xrightarrow{T_\infty = cte} T_w \uparrow$

که این h_x از یکسری فرمول که قبلی پیروی می‌کند دارای.

برای حالت b هم باز هم: $Nu_x = C\,Re^a\,Pr^b$ (کتاب)

! نکته: در اینگونه مسائل به سراغ معادلات و روابط مربوط به شار حرارتی ثابت که در کتاب وجود دارد می‌رویم.

اگر مسئله قبل را با فرض شار حرارتی ثابت حل می‌کردیم. فقط شرط مرزی عوض می‌شود و بقیه استدلالات و مراحل یکسان است و با بهای ثابت است.

$$y=0 \quad q'' = -k\frac{dT}{dy} \xleftarrow{\text{در شار ثابت}} \quad \xrightarrow{\text{در } T \text{ ثابت}} y=0 \quad T=T_w$$

پس اگر دو حالت ۱ و ۲ روی شکل نشان دهند فقط یک شرط مرزی تفاوت دارند اما روش حل این دو حالت خیلی باهم متفاوت است.
ما در این روش ۴ معادله با استفاده از دمای متوسط روابط را به دست می‌آوریم ولی در این دیگر T را نداریم
چون در حالت شار ثابت ما دمای ۴ را نداریم تا متوسط گیری کرده و دمای فیلم را بیابیم تا بتوان خواص را تعیین کرد. همین دلیل باید دما را حدس بزنیم.
در این مسائل باید یک حدس اولیه زده با استفاده از آن مسئله را حل کنیم دوباره T را یابند با T اولیه مقایسه می‌کنیم.
می‌توانیم حدس اولیه را ها گرفته و خواص فیزیکی را در دمای ها به حساب آوریم.

Calbourn Analogy:

ضریب اصطکاک پوسته‌ای

$$St_x Pr^{\frac{2}{3}} = \frac{C_{fx}}{2}$$

این x ها نشان دهنده موضعی بودن است

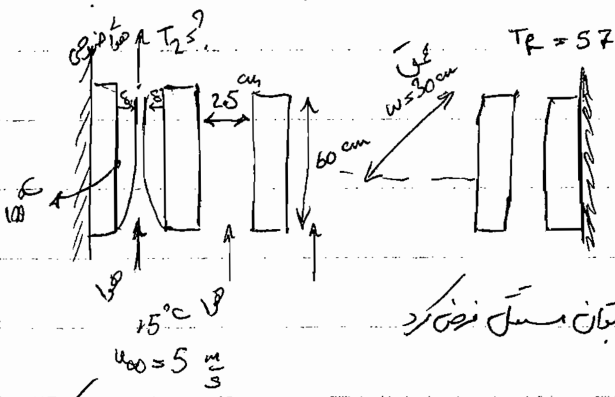
$$St_x = \frac{Nu_x}{Re_x Pr} = f(h_x)$$

$$\Rightarrow h_x \propto C_{fx}$$

موضعی

هر کاری بکنیم که ضریب اصطکاک زیاد شود ضریب انتقال حرارت هم به همان مقدار زیاد می‌شود.
این روابط برای بدنه‌ی جریان متلاطم کاربرد دارد.

مثال: شکل زیر نشانگر یک sys گرمایش هوا می‌باشد. دمای سطح صفحات $100^\circ C$ دمای هوای ورودی $15^\circ C$ است. سرعت هوا $5\ \frac{m}{s}$ می‌باشد. ابتدا نشان دهید که جریان توسعه یافته نمی‌باشد (Imp). دمای خروجی هوای گرم شده را به دست آورید.



$T_f = 57.5\ ^\circ C$ $\nu = 19.19\times10^{-6}$

$\rho = 1.07$ $Pr = 0.701$ plate 21 "کل" داریم

$c_p = 1008$ $K = 0.0285$

جریان توسعه نیافته به معنی دو لایه مرزی تشکیل شده به یک بالا هرگز به هم نمی‌رسند به این گونه فرض کردیم تا لایه‌ی مرزی را بتوان مستقل فرض کرد
اگر به هم برسند مستقل نیستند.

اگر $\delta+\delta > 2.5$ باشد ← توسعه یافته هست به این معنی که لایه مرزی در $x=60^{cm}$ را باید با هم جمع کنیم
اگر از 2.5 کمتر شد توسعه نیافته است.

توزیع سرعت صفحه ۳ : $\frac{\delta}{x} = \frac{4.6}{Re_x^{1/2}}$

$x = 0.6\ m \rightarrow Re_x = 1.56 \times 10^5 \rightarrow \delta = 7\ mm$

$7 + 7 = 14\ mm \rightarrow 1.4\ cm < 2.5\ cm \Rightarrow$ جریان توسعه نیافته است .

لایه‌ای — $Nu = 0.332\ Re_x^{1/2}\ Pr^{1/3}$

$x = 0.6 \rightarrow h_x = 5.54\ W/m^2{}^\circ C \rightarrow \bar{h} = 2h_x = 11.07\ W/m^2{}^\circ C$

ابتدا h موضعی در انتهای صفحه یافته سپس 2 برابر کرده h متوسط را می‌یابیم

$q = \bar{h} A \Delta T$

$A = \underset{\text{تعداد}}{40} \times 0.3 \times 0.6\ m^2$ ۲۱ صفحه سه ۲۲ وجه که ۲ تا از آنها در معرض حرارت نیستند ۴۰ سطح

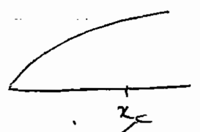
$\Delta T = 100 - 15$

$q = 6.78\ kW$ ← $q = \dot{m} c_p (T_{out} - T_{in})$ (c_p : 1008 ، T_{in} : $15^\circ C$) → $T_{out} = 23.38^\circ C$

$\dot{m} = \rho u_\infty \left[2.5 \times 10^{-2} \times \underset{\text{عمق}}{0.3} \times \underset{\text{تعداد}}{20} \right]$

جلسه ۲۳

Flow over Flat plane wall - Turbulent Region



در جریان آرام تا فاصله x_c یک لایه بندی لایه‌ای داریم که نشان می‌دهد انتقال صرفاً بر اثر برخورد مولکولها صورت می‌گیرد. متر شدن بعد از x_c حرکت توده‌ها و گردابه‌ها پدیدار می‌شود که به آن Eddy می‌گویند.

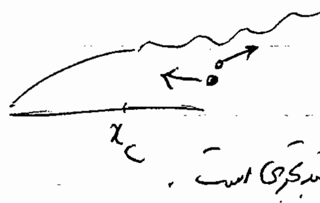
~~یک Eddy مجموعه‌ای از چندین هزار~~

یک Eddy توده‌ای است از سیال از تعداد زیادی مولکول که مولکولهای آن دارای دما ، جهت حرکت و سرعت یکسان هستند.

و هر توده با توده‌ی دیگر متمایز است.

برخورد این‌ها مکانیزم انتقال مومنتوم ، انتقال جرم را هم به سمت تساوی دما و تساوی غلظت پیش می‌برند.

برخورد این توده‌ها علاوه بر وجود مولکولهای موجود در سیال موجب افزایش پدیده‌های انتقال می‌شوند.



بنابراین انتظار داریم h که ضریب انتقال حرارت است بیشتر شود (علاوه بر آن)

در جریان متلاطم می‌خواهیم بدانیم $h = f(?)$ چیست .

در جریان آشفته تحلیل تئوری کار بسیار دشوار است و تحلیل‌هایی که وجود دارد تجربی است .

دو راه کار کلی داریم:

1. Comprehensive study مطالعه جامع

2. ~~phenomenological~~ study
phenomenological

در مورد اول سعی می‌کنیم معادلات مومنتوم و انرژی را درست بنویسیم

در روش ۲: در این روش پدیده‌ها را با هم مقایسه کنیم و سعی کنیم مثلاً در جریان آرام داریم:

Laminar	Turbulent
$\frac{\tau}{\rho} = -\nu \frac{du}{dy}$ ← معادله نیوتن، تنش برشی	$\frac{\tau}{\rho} = -(\nu + \varepsilon_M)\frac{\partial u}{\partial y}$
ν = Molecular KV	ε_M = Eddy K.V

در این جا یک پارامتر مشابه ν برای ε تعریف می‌کنیم که مشابه رفتار مولکولی ε هست.

← یعنی در این روش مشابه سازی داریم.

← یعنی در جریان توربولنت علاوه بر حرکت و جریان مولکولی ε، حرکت را برای ε هم داریم.

Laminar	Turbulent
$\frac{q}{\rho c_p} = -\alpha \frac{\partial T}{\partial y}$	$\frac{q}{\rho c_p} = -(\alpha + \varepsilon_H)\frac{\partial T}{\partial y}$
α = Molecular T.D	ε_H = Eddy T.D

α، ν در جریان آرام مولکولی

ε_H، ε_M در جریان توربولنت

$$\frac{\nu}{\alpha} = Pr = \frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_H}$$

$$\frac{\varepsilon_M}{\nu} = \frac{\varepsilon_H}{\alpha}$$

در حالت از طریق آزمایش رابطه ε_M به ν را بدست آوریم و از طریق آنالوژی رینولدز - کلبرن استفاده کنیم به انتقال حرارت که مثال چند مورد به قرار زیر است:

موضعی

$C_{fx} = 0.0592\, Re^{-0.2}$ → از سیالات داریم

$St_x Pr^{2/3} = \frac{C_{fx}}{2}$ آرام → فرض می‌کنیم همین نسبت برای جریان توربولنت هم برقرار است

$St_x Pr^{2/3} = \frac{1}{2}(0.0592)\, Re^{-0.2}$

$$\frac{Nu_x}{Re_x Pr} Pr^{2/3} = \frac{1}{2}(0.0592) Re_x^{-0.2}$$

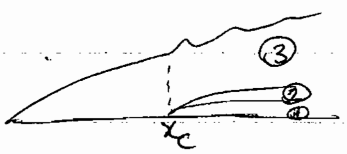
$$Nu_x = 0.028\, Re_x^{0.8}\, Pr^{1/3}$$

در کتاب معادلات 79، 80 برای معادلات متوسط است شبیه معادلات هم √.

هر که رشته‌ای از درس انتظار نداریم.

Imp. توزیع سرعت در این لایه مرزی چگونه است؟

این لایه مرزی را به ۳ ناحیه تقسیم می‌کنیم.



① → laminar sub layer ε_M و $\varepsilon_H \approx 0$

قسمتی که خیلی نزدیک دیواره است و جریان صفر است به حالت آرام می‌گردد.

③ → Turbulent layer $\varepsilon_M \gg \nu$, $\varepsilon_H \gg \alpha$. ε های Eddy کاملاً غالب و حاکم هستند.

② → Buffer ″ $\varepsilon_M \simeq \nu$, $\varepsilon_H \simeq \alpha$ لایه میانی

در ناحیه ۱ به خاطر وجود اینکه ذرات ایستاده هستند به تنهایی پدیده ε مولکولی اتفاق می‌افتد.

″ ″ ۳ به می‌شود از پدیده ε مولکولی صرف‌نظر کرد به تنهایی ذرات ...

″ ″ ۲ به اثر پدیده ε مولکولی = پدیده ε ادی.

← معادله ۵-۷۳ به به تا معادله است به توزیع سرعت را بر این سه لایه داده است و باید از کنار ۵-۶۷ و ۵-۶۸ ببینیم.

در ناحیه در معادلات ۸۸-۸۹ و به جای ضخامت لایه مرزی به با یکسری فرمول براساس کارهای تجربی است.

مهمترین هندسه جریان در داخل لوله است ولی هندسه صفحه نیز یکسری کاربردها را خودش دارد.

Flow Inside pipes

جریان داخل لوله

جنس جریان

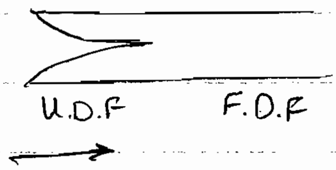
آیا می‌توان سه حالت فرض کرد به لحاظ سیالاتی:

می‌توان جریان را تقسیم کنیم به:

1. underdeveloped Flow (توسعه نیافته) — laminar / Turbulent

2. Fully ״ ״ (توسعه یافته) — laminar* ✓ این فصل / Turbulent

وقتی سیالی وارد لوله می‌شه به صورت حلقوی جریانی برای آن سه رادیوس‌ها به وجود می‌آید و هر چه در طول لوله پیش می‌رویم این حلقه‌ها کوچکتر و بیشتر می‌شه.



تمام این بر مبنای پروفیل سرعت است.

در UDF ← پروفیل سرعت ثابت نشده در حال تغییر است.

در F.DF ← ״ ״ ״ شده است.

در فصل ۵ ما FDF را دنبال می‌کنیم آن هم با تأکید بیشتر روی جریان آرام. زیرا ریاضیات ساده‌تری برای حل دارد.

Fully developed ~~flow~~ laminer Flow Inside pipes :

از سیالات داریم برای چنین جریان رابطه زیر را داشتیم:

به خاطر اصطکاک معادله نیرو داریم. ← از موازنه نیرو به آن می‌رسیم. از موازنه نیرو

$$\frac{u}{u_0} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

زیرا اگر در سطح لوله ۴ اصطکاک وجود نداشت لغت فشار که داشتیم موازنه نیرو نداشتیم.

از موازنه انرژی به آن می‌رسیم: از موازنه انرژی: $h = F(?)$

گرم (دیواره)

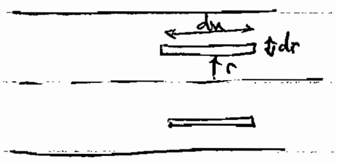
سرد (سیال)

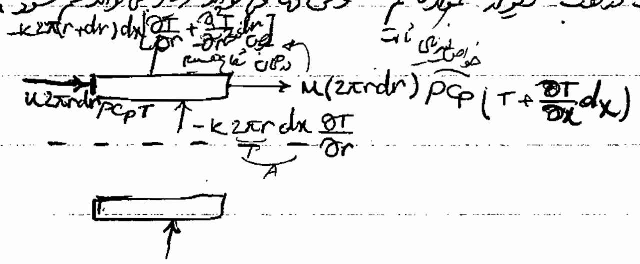
فرض توزیع سرعت در داخل لوله درجه ۲ است.

دیواره می‌تواند شار ثابت باشد یا دما ثابت.

اگر دیوار در حال گرم شدن باشد لایه چسبنده به دیوار سرعت کمتر دمای بیشتر داشت.

سرعت در جهت دیوار همواره کم ولی دما می تواند زیاد می تواند کم شود.





✓ از کار ویسکوز صرف نظر می شود. ✓ ما انتقال حرارت در جهت x و r داریم.

✓ از رسانش در جهت x صرف نظر می کنیم.

$$-k2\pi r dr\frac{\partial T}{\partial x} \longrightarrow -k2\pi r dr\left[\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}dx\right]$$

زیرا در اکثر موارد که با آن سر و کار داریم جمله رسانش در جهت r بسیار بزرگتر از رسانش در جهت x است.

$\frac{\partial T}{\partial r}=$ روی سطح صفر (دیوار عایق)

مثل کلاس معادله 8

[4 جمله برای معادله داریم]

$$\frac{1}{ur}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\text{in } r=0 \rightarrow \frac{dT}{dr}=0$$

سیال یا داره سرد می شود یا گرم در مرکز یا max هست یا min پس مشتق دما آنجا صفر است.

$$r=R \Longrightarrow q_w=cte$$

فرض Assume: $\frac{dT}{dx}=$ ثابت

مثلا در 1m اول دما 2 درجه گرم شده پس در ابتدای بعدی هم دما 2 درجه گرم می شود به همین ترتیب.

$$\Rightarrow r\frac{dT}{dr}=\frac{1}{\alpha}u_0\frac{\partial T}{\partial x}\left(\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}\frac{r^4}{R^2}\right)+c_1 \qquad B.C.1 \longrightarrow c_1=0$$

u را درجه 2 فرض کردیم یعنی انتگرال گرفتیم.

$$T=\frac{1}{\alpha}u_0\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{4}r^2-\frac{1}{16}\frac{r^4}{R^2}\right)+c_2$$

شرط: in $r=0 \rightarrow T=T_c$ $\qquad T_c=F(x)$

T_c (center) معلوم نیست و البته تابعی از x نیز هست.

$\Rightarrow c_2=T_c \rightarrow$ c_2 دمای مرکز را بیان می کند که خود T_c مجهول است.

$$T - T_c = \frac{1}{\alpha} u_0 \frac{\partial T}{\partial x}\left[\frac{1}{4} r^2 - \frac{1}{16}\frac{r^4}{R^2}\right]$$

از مدل می‌دانیم

انتقال حرارت میکروسکوپی — انتقال حرارت ماکروسکوپی

$$q_r = -kA\frac{dT}{dr}\Big|_{r=R} = hA\,(T_w - T_b)$$

که یک اختلاف پتانسیل

بیان می‌کند یعنی یک عاملی که انتقال حرارت را توجیه می‌کند

در جابجایی آزاد داریم $T_w - T_\infty$

در جابجایی اجباری داریم $T_w - T_c$ ولی T_c مجهول بود. پس T_b را تعریف می‌کنیم یعنی:

T_b = Adibatic Mixing Cup Temperature → Bulk Temp

که کمیتی از جنس انرژی می‌باشد

هر مقطع لوله دارای توزیع سرعت درجه ۲ و توزیع دما درجه ۴ است. اگر سیال را داخل فنجان بریزیم و آن را mix کنیم توزیع سرعت که مربوط به سیالات است حذف ولی توزیع درجه حرارت می‌شه میانگین از درجه حرارت تمام لایه‌ها که به آن T_b (دمای متوسط) می‌گویند. یعنی اختلاف پتانسیل نسبت به تمام لایه‌ها به طور میانگین یکسان سنجیده می‌شه.

$$T_b = \frac{\int_0^R u\,2\pi r\,dr\,\rho c_p T}{\int_0^R u\,2\pi r\,dr\,\rho c_p} = \frac{\int_0^R \overset{\text{درجه ۲}}{u}\,\overset{\text{درجه ۴}}{T}\,dr}{\int_0^R \underset{\text{درجه ۲}}{u}\,dr} = T_c + \frac{7}{96}\frac{u_0 R^2}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}$$

چون T را نمی‌خواهیم که دوباره T بعد از mixing برای تمام لایه‌ها

ثابت فرض شد

$$T_w = T\Big|_{r=R} = T_c + \frac{3}{16}\frac{u_0 R^2}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\Rightarrow h = \frac{24}{11}\frac{k}{R} \qquad \Rightarrow Nu = \frac{h d_i}{k} = \frac{48}{11} = 4.364$$

Nu در مقطع ثابت است چون پروفیل سرعت ثابت است. چون ما برای F.DF فرض کردیم.

یعنی لایه مرزی‌ها را در نظر گرفتیم همچنین ما نیز در مقطع نیست

برای جریان آرام کاملاً توسعه یافته با فرضیات ذکر شده، خواص فیزیکی ثابت، کار نیروی ناچیز و صرف‌نظر از رسانش x‌ها

$Nu = 4.364$

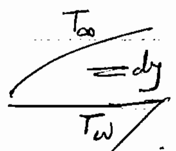
جریان آرام یعنی $Re < 2300$

$Re = \frac{\rho u d_i}{\mu}$ — اصلاً مهم نیست سرعت یا Re چقدر باشد به شرط اینکه از 2300 کمتر باشد.

Laminar $Re < 2300$ — h یک مقدار ثابت است چون h فقط به قطر لوله و k بستگی دارد و وابسته به سرعت نیست.

(البته به شرط اینکه در ناحیه آرام باشیم) $h \neq f(u)$

البته در عمل با کارهای تجربی h تابع u است ولی ما با فرضیاتی که در نظر گرفتیم این وابستگی را از بین برده‌ایم.



u	T
1	1
2	2
3	3

مثلاً توزیع سرعت و توزیع دما هستیم

مقطعی به ضخامت dy را در نظر می‌گیریم که دارای توزیع سرعت و توزیع دماست. آن را وارد مخزن می‌کنیم و دوباره به محل اولیه برمی‌گردانیم. (سرعت همچنان در یک مقدار است اما دما به میانگین T_b تبدیل شده)

$q = u\,dy \cdot 1 \cdot \rho c T$

$q = u\,dy \cdot 1 \cdot \rho c T_b \longrightarrow$ u هنوز وابسته به مکان است اما دما نه.

می‌توان u و T را در هر محل فرض کرده و از طریق آن دما متوسط را یابیم.

$$T_b = \frac{\int_0^{\delta_t} u T\, dy}{\int_0^{\delta_t} u\, dy}$$

تقریباً برای تمام حالات به این می‌رسیم:

$$T_b = \beta T_w + (1-\beta) T_\infty$$

β: یک کسر

مثلاً اگر $\beta = \frac{1}{3}$ بود T_b به میزان $\frac{1}{3}$ متأثر از T_w و $\frac{2}{3}$ متأثر از T_∞ است یعنی T_∞ تأثیر بیشتری روی T_b دارد.

Turbulent flow inside pipe

(Fully developed)

در جریان آشفته همچون یک جریان آشفته روی صفحه صاف، به وجود ادی‌ها علاوه بر مولکول‌ها هست.

دقیقاً همه معادلات و شبیه‌سازی‌ها درباره لوله نیز انجام شده است.

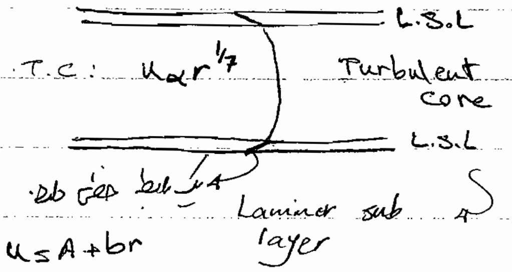
$St\, Pr^{2/3} = \frac{C_{fx}}{2}$ صفحه

$St\, Pr^{2/3} = \frac{f}{8}$ (ضریب اصطکاک) لوله $\longrightarrow$ f از منحنی Fanny یا Moody

می‌تواند از معادلات مربوط هم باشد.

این قسمت از کتاب خوانده شود

برای پروفیل سرعت :



قسمت Turbulent flow که تشریح آن در کتاب براساس Analogie است .

فصل ۶ Chapter 6

Implical Relations (Correlation)

این فصل در خصوص روابط تجربی است :

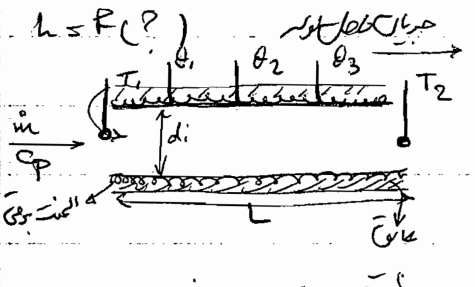
در فصل 5 دیدیم که حتی برای ساده‌ترین هندسه‌ها تحلیل جریان روی صفحه یا داخل لوله تئوری و تحلیل بسیار دشوار بود حتی برای مسائل تحلیلی در صنعت اوضاع کاملاً مشخص بود .

در سایر مسائل صنعتی اشکال حالت کلی دیده می‌شود ما براساس تجربه است ... نیاز به معادلات تجربی هستیم . بدست آوردن معادلات تجربی هدف ما است .

هدف : پیدا کردن h بر اساس عوامل مختلف

دما دیواره در نقاط مختلف (ترموکوپل)

$h = f(?)$



می‌خواهیم بدانیم h به چه ترتیبی تابع است از :

u ← با تغییر $\dot{m}$

d و L ← تغییر شکل لوله

تغییر سرعت و قطر ← تغییر عدد Re

که تا اینجا حالت تجربی از آزمایش به دست آمد .

$h = f(u)$, $f(\dot{m})$

$h = f(d, L)$ $\quad h = f($نوع سیال ، خواص ترموفیزیکی$)$

که همان عدد Pr

یک A و V خاص ، sys می‌دهیم q را می‌توانیم بسازیم .

θ_w سه دمای دیواره است که در نقاط مختلف با ترمومتر اندازه گرفتیم
سپس متوسط گیری کردیم.

$$q = \dot{m} c_p (T_2 - T_1)$$
$$= \bar{h} A (\underbrace{\bar{\theta}_w - \bar{T}}_{\text{که اختلاف پتانسیل باشد}})$$

h مجهول است که آن را می یابیم.
سپس پارامترها را یکی یکی عوض می کنیم. مثلاً در چند آزمایش u را عوض کنیم و تأثیر آن بر h را می یابیم سپس یکجا همین کار را با ثابت نگه داشتن پارامترهای دیگر و تغییر دادن پارامترهای دیگر و تأثیر آن را بررسی می کنیم.

Dimensional Analysis

برای اینکه آزمایش ها تکراری انجام ندهیم می آییم آنالیز ابعادی انجام می دهیم

یعنی:

$$h = f(\underbrace{u, d_i, L}_{\text{هندسه}}, \underbrace{\rho, c_p, \mu, k}_{\text{نوع سیال}}, \ldots)$$

بعد معادله ای که h را می دهد به صورت حاصلضرب ها می نویسیم

$$h = c\, u^a d_i^b L^c \rho^d c_p^e \mu^f k^g$$

که a تا g مجهول هستند نه ها معلوم.

پس از کمی عملیات آنالیز ابعادی به این نتیجه می رسیم که

$$Nu = \frac{h d_i}{k} = c \left(\frac{u d_i \rho}{\mu}\right)^a \left(\frac{c_p \mu}{k}\right)^e \left(\frac{L}{d_i}\right)^c$$
$$Nu = c\, Re^a Pr^e \left(\frac{L}{d_i}\right)^c$$

Fully develope $Nu = c Re^a Pr^e$

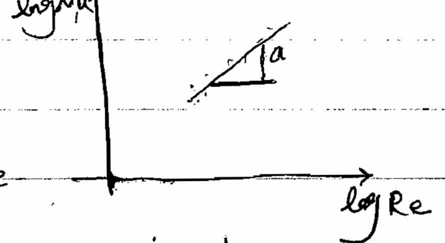
مسئله را با معادله بدون بعد بررسی می کنیم.
اگر مسئله fully develope باشد تأثیر طول حذف می گردد c → به طور کلی a و b و c را می یابیم.

در چند مختلف h را به دست می آوریم و از طریق آن Nu و Re

u	$\bar{h}$	$Re = \frac{\rho u d_i}{\mu}$	$Nu = \frac{\bar{h} d_i}{k}$

البته حواسمان هست که در طی این آزمایش هندسه و خواص فیزیکی ثابت است.

$\log Re$	$\log Nu$



$$\log Nu = a \log Re + \log c Pr^e$$

که از این a را می یابیم

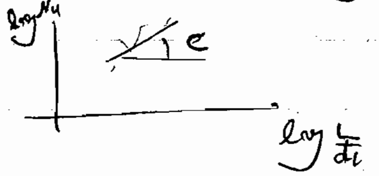
با بقیه خواص فیزیکی و حرکت ثابت e را می‌یابیم.

برای بدست آوردن c ← مثلاً ۳ آزمایش انجام دادیم برای پیدا کردن a و ۲ تا هم برای پیدا کردن e ← پس بعد تمام این آزمایش‌ها که یک c را داشتیم ← بین این cها متوسط گیری می‌کنیم.

برای حالت توسعه یافته Inderdevelop :

همین آزمایش‌ها را با بقیه طول انجام می‌دهیم تا کلیه داده‌ها از شکل مشخص شده بین ... می‌سنجیم.

$$\log Nu = c \log \frac{L}{d_i} + \log e\, Re^{a}\, pr^{e}$$



در کتاب هندسه‌های مختلف را بررسی کرده است.

Imp_ Flow Inside pipes جریان داخل لوله

– " " Ducts " " کانال — می‌تواند مقطع مختلف داشته باشد

– " over pipes " روی لوله — مقطع‌ها به صورت متقاطع نه موازی

– " " Ducts " " کانال

– " " spheres " روی کره

Imp – " Through Tube Bundels (کلاف مجموعه لوله) جریان از لابلای لوله‌ها

مثلاً برای مبدل فن کویل آنچه که در داخل لوله‌ها جریان دارد حالت ۱ و برای هوایی که از لابلای لوله‌ها می‌خواهد عبور کند از حالت آخری پیروی می‌کند.

یک معادله تجربی خوب باید دو تا ویژگی داشته باشد: ۱- محدوده کاربردش داده شده باشد ← یعنی دقیقاً آزمایش را انجام داده‌ایم مثلاً در چه سرعتی استفاده شده باید داده شده باشد تا بدانیم تا چه Re ، pr و ... قابل استفاده است تا معادله مناسب‌مان را برگزینیم.

$Nu = c\, Re^{a}\, pr^{e}$ → ۳ تا مجهول داریم

هرچه تعداد مجهول‌ها بیشتر شود ← باید آزمایش‌های بیشتری انجام دهیم.

هرچه تعداد مجهول‌های یک معادله ↑ ← معادله کم‌دقت‌تر است و معادله یک محدوده بیشتری را پوشش می‌دهد.

۲- خطای معادله تجربی باید معلوم باشد $x \pm$ عدد (بیانگر خطا) ← یعنی عدد محاسبه شده توسط رابطه ۵± بالاتر یا پایین‌تر است (مثلاً).

برای محاسبه خطا باید واقعیت را بدانیم به همین دلیل در اکثر معادلات تجربی میزان خطا را نداریم چون واقعیت را نمی‌دانیم.

فصل ۶ از معادله ۵-۶ الی ۶-۳ + شکل های ۵-۶ و ۶-۶

۵-۶: جریان آشفته کاملاً توسعه یافته

۶-۶: جریان آشفته

ضخامت بیشتر ← مقاومت نسبت به انتقال حرارت ↑

نسبت را به سمت ۱ میل می‌دهد.

ویسکوزیته در دما متوسط

$$\left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^{0.14} = \phi$$ معادله ۶-۵:

ویسکوزیته در دما دیوار

viscosity correction factor

گاهی هم از این استفاده می‌کنند:

خواص فیزیکی در دمای متوسط

$$\left(\frac{Pr_R}{Pr_w}\right)^{\alpha}$$ physical properties correction factor

خواص فیزیکی در دما دیوار

در معادلات تجربی وقتی می‌خواهیم خواص فیزیکی را بیابیم معمولاً متوسط گیری می‌کنیم به فرض هم می‌کنیم خواص فیزیکی در طول لوله ثابت است. مثل آب، هوا، بنزین و ... ← چون خواص فیزیکی و مشخصاً خواص فیزیکی (ویسکوزیته) با دما چندان تغییر نمی‌کند. ← اصلاً توجهی به دمای دیواره نمی‌کنیم.

البته این کار در برخی سیالات دارای اشکال است زیرا دمای دیواره بر خواص فیزیکی بالاخص ویسکوزیته مؤثر است. مثل روغن، گلیسیرین، عسل ← حتی با تغییرات کم دما.

θ_w

T_{in} T_{out}

$\frac{1}{2}(T_{in} + T_{out})$

بنابراین اگر این سیالات در سیستم وجود داشت حتماً باید از V.C.F استفاده کنیم و حالت $\frac{\mu}{\mu_w}$ مهم است.

توان 0.14 برای آب، هوا و الکل بدون توجه به اینکه گرم یا سرد شود، ϕ در حدود ۱ است. اما برای روغن و عسل عدد ϕ بیشتر از ۱ است و این تغییرات روی h تأثیر می‌گذارد. که از ۱۲ حالت

دو نوع مسئله داریم در فصل ۵ ← ۱) اثبات مجموعه روابط مثل ۹-۵ / ۲) مسائل عددی ... ← در این ... پیدا کردن خواص فیزیکی

۲- پیدا کردن Re

فصل ۵: ۹ - ۱۰ - ۲ - ۳ - ۲۷

اثباتی

در داخل لوله

۳- در فصل ۶

جدول ۲-۵ ... معادلات ... داده است ← یافتن معادله

۴- جایگذاری در معادله یافتن h

۵- $q = hA\Delta T$

جلسه ۲۵

← چهارشنبه چند روز قبل از exam، کلاس فوق العاده داریم. ساعت ۴ بعدازظهر

Flow Inside ducts:

جریان داخل کانال

تفاوت لوله ها و کانال ها صرفاً در سطح مقطع‌شان است. ← جدول ۶_۱ کتاب

اگر جریان لوله‌ای است: ۱) Laminer ← Constante temp

← Heat Flux

۲) Turbulent

در جدول ۶_۱ ← $\frac{f.Re}{4}$ ستون آخر ← f ضریب اصطکاک است

در سطح مقطع دایره در جدول $4.36 = \frac{48}{11}$ همان عدد در فصل ۵ است.

برای سیستم‌های غیر دایره‌ای سعی می‌کنیم که یک قطر معادل به دست بیاوریم: $d_e = \frac{4A}{P}$ (P محیط ترشده) و در تمام معادلاتی که برای جریان داخل لوله است به جای قطر داخلی ← قطر معادل را بگذاریم.

مثال: ۶_۵ Eq: $Nu = 0.027\, Re^{0.8} Pr^{1/2} \left(\frac{\mu}{\mu_w}\right)^{3/2}$

جریان داخل لوله

$Nu = \frac{h d_i}{k}$ $\quad Re = \frac{\rho u d_i}{\mu}$

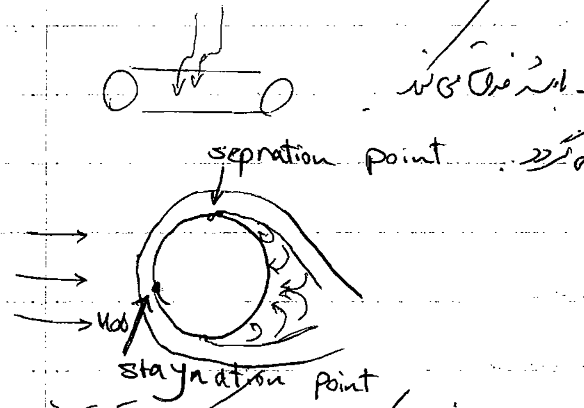
به جای تمام این d_e و d_i را می‌گذاریم

Flow over Cylinders + spheres:

جریان روی استوانه و کره‌ها

هوا به طور عمودی از روی استوانه عبور می‌کند اگر طولی و یا موازی باشد فرق می‌کند

اگر استوانه را به صورت در نظر بگیریم یک لایه مرزی روی آن تشکیل می‌گردد.



شکل ۶_۸ در کتاب ←

در این نقطه سرعت صفر می‌گردد و گرادیان سرعت منفی است.

دلیلش که از + به - می‌رویم نقطه صفر می‌شود

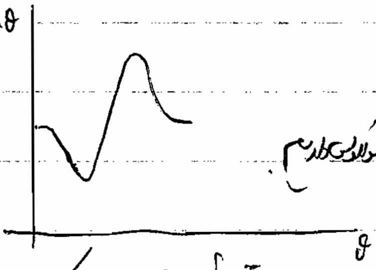
نقطه سکون: جایی است که سرعت جریان صفر است و تمام سرعت به فشار تبدیل می‌شود

نقطه‌ای که گرادیان سرعت در آن صفر است ← sepration point

لایه مرزی با آن خصوصیات و سرعتی که ما داشتیم جدا می‌شود به سبب وجود گردابه‌ها و ... تا اینجا اصلاً گردابه نداریم و از نقطه جدایی به بعد دو لایه مرزی داریم.

یعنی از این نقطه به بعد (زاویه ۱۳۰ به بعد) گردابه‌ها حتی می‌توانند خلاف جهت جریان حرکت کنند.

شکل ۱۱-۶ صفحه ۲۹۵: ترسیم Nu_θ برحسب θ، به ازای اعداد Re مختلف



$\frac{h_\theta d}{k}$ عدد ناسلت موضعی (در این نقطه)

مشاهده می‌کنیم از صفر تا حدود ۸۰ ـ ۹۰ درجه ← Nu کم می‌شود یعنی

$h \downarrow$ (d و k ثابت) ← زیرا ضخامت لایه مرزی $\uparrow$ ← $h \downarrow$ ← مقاومت مولکولی داریم

در ۹۰ ـ ۷۰ درجه یک مرتبه افزایش ناگهانی اتفاق می‌افتد ←

این نقطه همان نقطه جدایش است ← به علت افزایش h ← وجود گردابه‌ها است (انتقال آن توسط پدیده مولکولی بوده.)

تا حدود ۹۰ تا ۱۲۰ این بار زیاد شده است (ضخامت جریان زیاد شده)

از ۱۲۰ به بعد به علت افزایش ضخامت و وجود گردابه‌ها h دوباره زیاد می‌شود.

(این رابطه تجربی است)

یک مهندس علاقه به داشتن مقدار متوسط است ← مقادیر متوسط ← یعنی $C Re^{n} Pr^{1/3} = \frac{\bar{h} d}{k}$ (۱۷-۶)

$\frac{1}{3}$ ثابت عمومی

جدول ۲-۶ ← مقادیر C و n ← رابطه بالا. ابتدا Re را به دست می‌آوریم با تعیین مقادیر C و n را می‌خوانیم

از معادله (۱۷-۶) ← $\bar{h}$ را می‌یابیم

معادله ۱۷-۶ ← عمدتاً برای هوا مناسب است و معادله ۱۸-۶ ← برای مایعات مناسب است.

در معادله ۲۰ و ۲۱ ← Pe ← عدد پکله $Pe = Re \times Pr$ (در معادله ۱۱-۶)

تعریف Pe: $Pe = Re \times Pr = \frac{d u \rho c_p}{k}$

اگر یک A در صورت و مخرج و ΔT در صورت و مخرج ضرب و d را به مخرج انتقال دهیم. صورت می‌شود ← جریان انرژی به صورت توده‌وار

مخرج ← رسانش.

$$Pe = \frac{A u \rho c_p \Delta T}{k \frac{A}{d} \Delta T}$$

عدد Pe ← نسبت جریان توده‌وار انرژی به جریان مولکولی انرژی است.

اگر k بزرگ باشد ← $Pe \downarrow$

اگر $u \downarrow$ ← $Pe \downarrow$ برای اعداد کوچک Pe نمی‌توانیم این فرض را که از رسانش در جهت جریان صرف‌نظر می‌شود (برای آب و هوا) صدق می‌کند

(برای فلزات مذاب این فرض خوب نیست)

مطالب کره ها در حالات مختلف در صفحه ۲۹۹ ← به عهده خودتان.

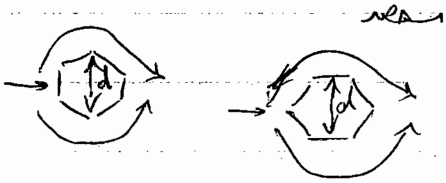
Flow over Ducts: جریان روی کانال ها:

جدول ۶-۳:

در این جدول ← اینکه جریان عمود بر سطح باشد یا در امتداد قطر حائز اهمیت است.

طول ضلع به مشخصه — قطر ضلع مشخصه

آخرین سطر جدول ولی عمقش زیاد است؟



Flow Through Tube Bundel: جریان در روی مجموعه لوله ها

بحث مبدل ها، پوسته و لوله ← مهمترین مبدل های مورد استفاده در صنعت

این مبدل ها شامل لوله های بسیار زیادی است که داخل لوله ها سیال جریان دارد.

و سیالی که در بیرون لوله ها است از لابلای این لوله ها عبور می کند ← طبق مطالعات و روابط تجربی است (فعلاً تئوری نداریم)

آرایش لوله ها در کنار هم یکی (شکل شماره ۱۴) ← ۲ نوع آرایش داریم که دو تا اساس شده:

الف) ردیف لوله ها در یک خط ← هستند $S_n = S_p$ — S_n ← فاصله مرکز تا مرکز لوله ها در جهت n (نرمال)

S_p ← " " " " " P (موازی جریان)

ب) ردیف لوله ها پراکنده (عین یک خط اریب) ←

جریان در داخل لوله ها با استفاده از روابطی که قبلاً داشتیم به دست می آید.

جدول ۶-۴ و ۶-۵ صفحه ۳۰۴

در جدول ۶-۴ ← قطر لوله و S_n و S_p معلوم ← n و C را می خواهیم ← در معادله ۱۷ می گذاریم ← h

← این جدول برای حالتی است که سیال حداقل ۱۰ ردیف لوله در جهت جریان طی کند.

اگر تعداد ردیف ها کمتر از ۱۰ بود جدول ۶-۵:

در جدول ۶-۵ ← در این حالت $\bar{h}$ را به دست آورده به فرض ۱۰ ردیف به دست آوردیم X تعداد ردیف ها می کنیم

$\bar{h}$ مورد نظر را می یابیم ← ...

مثلاً اگر یک ردیف داشتیم $\bar{h} \times 0.68$ می‌کنیم.

~~[illegible]~~

وقتی تعداد ردیف کمتر از ۱۰ باشد $\bar{h}$ کمتر می‌شود چون در ضریب تصحیحی ضرب می‌کنیم که از ۱ کوچکتر است.

هرچه تعداد ردیف‌ها ↑ ضریب انتقال حرارت ↑

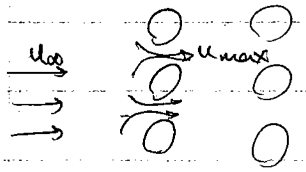
معادله ۶-۳۴ در صفحه ۳۰۴:

C و n ← از جدول شماره ۶-۶ و ۶-۷ به دست می‌آید.

برای ۲ ردیف لوله‌ها ← اگر از ۲۰ ردیف کمتر بود (اگر برای تعدادی بود که در جدول اشاره شده درون‌یابی می‌کنیم)

نکته: u_∞ و u_{max} با هم متفاوت است.

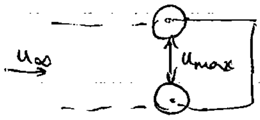
u_∞ ← سرعت سیال و هوا قبل از ورود به مجموعه لوله‌ها ولی به محض ورود به لوله‌ها سرعتش زیاد می‌شه چون دبی حجمی ثابت سطح مقطع کم شده پس سرعت ↑ می‌شه. این u_{max} ثابت است.



در طول لوله همان طور که هوا داره عبور می‌کنه دانسیته کم می‌شه که به سرعت اثر می‌گذارد.

پس نه u_{max} ثابت نه u_∞ ولی ما برای حل مسائل دانسیته را متوسط فرض کرده u_{max} را نیز ثابت می‌گیریم.

اثبات بدست آوردن u_{max}:



$$u_\infty S_n \cdot LP = u_{max}(S_n - d_o) LP$$

$$u_{max} = \cancel{\frac{S_n - d_o}{S_n} u_\infty} = \frac{S_n}{S_n - d_o} u_\infty$$

اگر لوله‌ها با هم چسبیده باشند ← $S_n = d_o$ ← مخرج صفر ← u_{max} بی‌نهایت می‌شد (در عمل امکان‌پذیر نیست)

پس هرچه فاصله‌ها کم می‌شه u_{max} ↑ می‌شه

معادله ۳۱، ۳۲، ۳۳ ← همه فرض‌ها مثل حرارتی تو شکست انتقال حرارت هم بسته‌ها مثل است فشار هم مهم است (رهکشید سازی می‌کنیم بعداً !!!!)

در ۳۱ ← G_{max} شار جرمی. هرچه تعداد ردیف‌ها ↑ ← f ↑

انتقال حرارت جابجایی:

یک کلاس تئوری گرده ← هدف فصل 5 است. صفحه ۳۰۸ ← روش به معادله کاری انجام شده در فصل ۵

چند معادله تجربی داده ← هدف تحلیل.

جدول ۸-۲۶ تمامی معادلات تجربی هندسه‌ها کلی ← بسیار ارزشمند Imp

مسائل:

شماره ۴۹ صفحه ۳۴۲:

$d = 0.025\ mm$ $\rho = 65\ \mu\Omega\, cm$

$L = 15\ cm$ $\alpha = 0.002\ ^\circ C^{-1}$

حل: 8 دستگاهی برای اندازه‌گیری سرعت در سیم داغ (سرعت سنج سیم داغ)

هرچه قدر سرعت هوا عبوری از سیم ↑ ← گرمای بیشتری از سیم می‌برد.

دمای سیم را با مقاومت اندازه می‌گیریم. چون فرمول R, T داریم.

$q = hA(T_w - T_\infty)$

I, E ✓ با طول قطر، از روی R، ✓

$Nu = C\, Re^a\, Pr^b$ ✓ ✓ ✓

از این رابطه h به دست می‌آید ← Nu

پس Nu ✓ ~~← Re ←~~ u به دست می‌آید.

۱ـ به دست آوردن خواص فیزیکی

۲ـ به دست آوردن Re

۳ـ انتخاب معادله مناسب

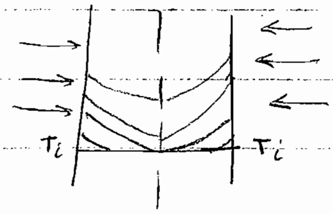
۴ـ به دست آوردن h

۵ـ $q = hA\Delta T$

جلسه

حل تمرین 8

- کتاب جزوه را با خود همراه بیاورید.



تا جایی که به عمق می‌رسند سوی شبه حل رسند :

Dreperautio - - period

$S = \sqrt{2\alpha t}$ $T = T_i + \frac{q'' S}{2k} - \frac{q'' x}{k} + \frac{q''}{2kS} x^2$

مرحله بعد از نفوذ

HBI 8 $\left.\frac{dT}{dx}\right|_L - \left.\frac{dT}{dx}\right|_0 = \frac{1}{\alpha}\int_0^L \frac{dT}{dt}\,dx$

Assume: $T = A' + B'x + C'x^2$

$x = 0 \longrightarrow \frac{dT}{dx} = \frac{-q''}{k} \longrightarrow -\frac{q''}{k} = B'$

$x = L \longrightarrow \frac{dT}{dx} = 0 \longrightarrow 0 = \frac{-q''}{k} + 2C'L \longrightarrow C' = \frac{q''}{2kL}$

$T = A' - \frac{q''}{k}x + \frac{q''}{2kL}x^2$

A' باید به تابعیت از زمان برای آن به دست بیاید :

$0 + \frac{q''}{k} = \frac{1}{\alpha}\int_0^L \frac{dT}{dA'}\cdot\frac{dA'}{dt}\,dx \Rightarrow \frac{q''\alpha}{k} = \frac{dA'}{dt}\int_0^L (1)\,dx$

$\frac{q''\alpha}{k} = \frac{dA'}{dt}L \longrightarrow \frac{q''\alpha}{kL}\,dt = dA' \longrightarrow A' = \frac{q''\alpha}{kL}t + \text{Const}$

نیاز به شرط اولیه داریم که این A' را به دست آوریم.

at $t = t_{pen} = \frac{L^2}{2\alpha} \rightarrow x = L \Rightarrow T = T_i$

$T_i = A' - \frac{q''}{k}L + \frac{q'' L^2}{2kL} \longrightarrow A' = T_i + \frac{q'' L}{2k}$ تا لحظه زمانی فرض است به شکل زمانی ۲.

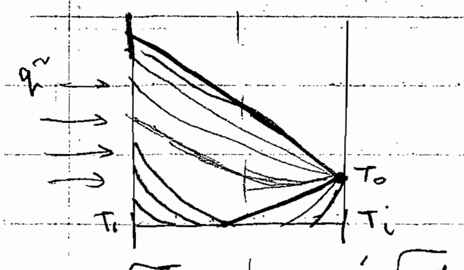
$T_i + \frac{q''L}{2k} = \frac{q''\alpha}{kL} \times \frac{L^2}{2\alpha} + \text{Const} \longrightarrow \text{Const} = \frac{1}{3}\frac{q''L}{k} + T_i$

$A' = \frac{q''\alpha}{kL}t + T_i + \frac{1}{3}\frac{q''L}{k}$

$\Rightarrow T = T_i + \frac{1}{3}\frac{q''L}{k} + \frac{q''\alpha}{kL}t - \frac{q''}{k}x + \frac{q''}{2kL}x^2$

این مسئله پاسخ SS ندارد.

که با ترم به تدریج که ما ذخیره کردیم انتظار داریم SS ولی در حقیقت به دلیل وجود هوا جابجایی وجود داریم بین به حالت SS می‌رسیم دیگر T به صورت خطی در نمی‌آید.



$s = \sqrt{2\alpha t}$ | $s' = \sqrt{12\alpha t}$

در این حالت دمای متقارن ندارد ← به خاطر شار حرارتی متقارن نیست

دما هر دو طرف افزایش می یابد

دمای سطح T_0 ثابت است و T_i دما

برای یک t یکسان و α یکسان ← $s < s'$.

نتیجه s و s' در کجا به هم می رسند؟ زمانی که:

$$\begin{cases} s + s' = 2L \\ s' > s \end{cases}$$

ss ← وقتی ← رسانش $= q''$

ss ندارد ← چون معادله‌ای که داشتیم دیگر حرارتی نداشتیم.

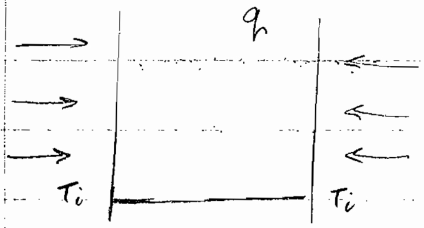
$$s + s' = 2L$$

$$\sqrt{2\alpha t} + \sqrt{12\alpha t} = 2L \implies t = \checkmark$$

زمانی که این دو به هم می رسند.

این زمان می شه شرط اولیه برای معادله دوم.

$$\rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$



$$\int^L \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}dx + \int^L \frac{q}{k}dx = \int^L \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}dx$$

هر وقت تولید انرژی داخلی داشتیم همه نقاط دیواره متأثر از q هستند پس

را به $L\bar{T}$ می گیریم ←

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_L - \left.\frac{dT}{dx}\right|_0 - \frac{\dot{q}}{k}L = \frac{1}{\alpha}\int_0^L \frac{\partial T}{\partial t}dx$$

در معادله‌ها ... به خاطر اهمیت نگذاشتیم ۱ به ۲ > ۲ به ۳

$u = u_\infty$ ثابت

$$T = A + By \begin{cases} y = 0 \rightarrow T = T_w \\ y = \delta_t \rightarrow T = T_\infty \end{cases} \implies T = T_w + \frac{T_\infty - T_w}{\delta_t}y$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta_t}(T_\infty - T)\,u\,dy = \alpha \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} \qquad (5.32)$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta_t}\left(T_\infty - T_\infty - \frac{T_\infty - T_w}{\delta_t}y\right)u_\infty\,dy = \alpha\,\frac{T_\infty - T_w}{\delta_t}$$

$$\cancel{(T_\infty - T_w)}\,u_\infty\,\frac{d}{dx}\int_0^{\delta_t}\left(1-\frac{y}{\delta_t}\right)dy = \alpha\,\frac{\cancel{T_\infty - T_w}}{\delta_t}$$

$$u_\infty\frac{d}{dx}\left[\delta_t - \frac{\delta_t^2}{2\delta_t}\right] = \frac{\alpha}{\delta_t} \qquad \frac{u_\infty}{2}\frac{d\delta_t}{dx} = \frac{\alpha}{\delta_t} \longrightarrow \frac{1}{2}\delta_t^2 = \frac{2\alpha}{u_\infty}x + C \quad \Big|\, \begin{matrix} x=0 \\ \delta_t=0 \\ C=0 \end{matrix}$$

$$\delta_t = \left[\frac{4\alpha x}{u_\infty}\right]^{1/2}$$

$$\boxed{-k\frac{dT}{dy}\Big|_0 = h(T_w - T_\infty)} \qquad -k\,\frac{T_\infty - T_w}{\delta_t} = h(T_w - T_\infty)$$

$$h = \frac{k}{\delta_t} = \frac{k u_\infty^{1/2}}{(4\alpha x)^{1/2}} \qquad \frac{hx}{k} = \frac{u_\infty^{1/2}\,x}{2\alpha^{1/2}x^{1/2}}$$

$$\frac{h_x}{k} = 0.5\,u_\infty^{1/2}\,x^{1/2}\,\frac{\nu^{1/2}c_p^{1/2}}{k^{1/2}}\,\frac{\mu^{1/2}}{\mu^{1/2}} \qquad \bar{h} = 2h_x$$

$$Nu_x = 1/2\,Re^{1/2}\,Pr^{1/2}$$

مثال صفحه ۱۸۶ ← چون شرایط برای همه یک Δt نیست هر کدام را جداگانه می‌گیریم

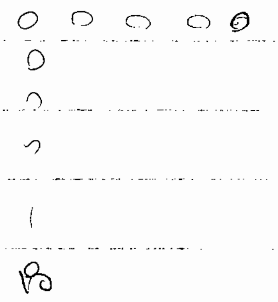
معادله ۵-۴۴ ← u و T درجه ۳

$$Nu = a\,Re^b\,Pr^c \qquad 10^4 < Re < 10^7$$

$$Nu = a'\,Re^{b'}\,Pr^{c'} \qquad 10^4 < Re < 10^{10}$$

اگر Re ها 10^5 باشند ... ثابت

ما یک بولدار ... از ... استفاده می‌کنیم



۵ ردیف در عمق

۱۵ ردیف ارتفاع

۵ ردیف در عمق

جهت جریان سمت عمق