

بسمه تعالی

**جزوه**

انتقال حرارت ۱

**دانشگاه**

صنعتی امیر کبیر

**استاد**

دکتر بصیرت

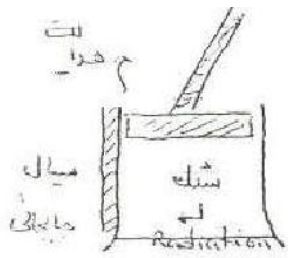
## انتقال حرارت-گرما

در سه شاخه بررسی می شود.

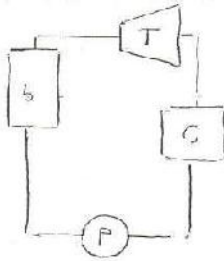
۱. هدایت conduction
۲. جابجایی-همرفتی convection
۳. تشعشعی radiation

هدایت درس کاملا ریاضی است. در مورد جابجایی نیاز به دانستن سیالات و آن هم مکانیک دینامیک سیالات هستیم. در مورد تشعشع نیز نیاز به دانستن فیزیک و موج هستیم.

در مورد موتور های احتراق داخلی و حتی کلکتورهای خورشیدی هر سه شاخه بررسی می شود.



در انتقال حرارت ما به rate توجه داریم. در سیستم انتقال حرارت به سیستم میکروسکوپی یک توجه باید داشت.



$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_J = \dot{E}_{st}$$

تولید      تلف

انتقال حرارت از معادلات نیوتن =

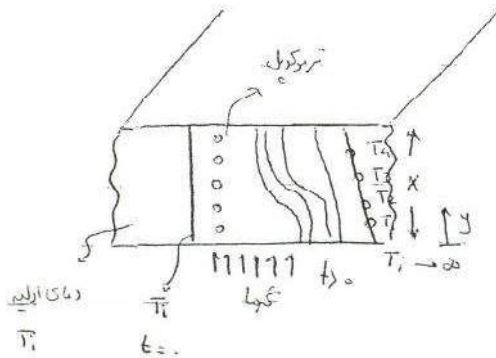
$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{gen} = \dot{E}_{st}$$

یا flux law استفاده می کنند-

انتقال حرارت مسائل را معمولا به صورت خطی نگاه می کند اما این دید باعث به وجود آمدن خطا می شود.

$$\tau = -\mu \frac{du}{dy}$$

Biot با آزمایش هایی که انجام داد نشان داد:



شخص دیگری با استفاده از این نتایج و با استفاده

از قانون نیوتن یا flux law استفاده نمود که نیوتن این رابطه را از قانون هرک گرفته است.

فوریه از این رابطه استفاده نمود و شار حرارتی را تعریف کرد که برابر است با:

قانون فوریه

$$q = -k \frac{dT}{dy} = \frac{q_{\text{حرارتی}}}{A}$$

شار حرارتی / سطح مقطع

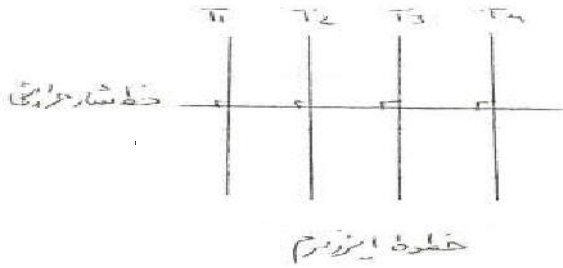
قانون فیک (fick)

$$J = -D \frac{dc}{dy}$$

انتقال جرم / Diffusion

قانون فیک مثلا در مورد خشک کردن انگوری کاربرد دارد با اعمال حرارت باعث انتقال رطوبت و در نهایت انتقال جرم می شود.

در رابطه فوریه مهم است که خطوط شار بر خطوط ایزوترم عمود باشد.



انتقال حرارت ← هدایت ← از مولکولی به مولکول دیگر ماده

$$q_x = -k A \frac{dT}{dx} = k A \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad \text{و} \quad q'' = k \frac{\Delta T}{\Delta x} \rightarrow \text{هدایت}$$

$k = \frac{W}{m \cdot ^\circ C}$

$J_{IS} = W$

ضریب هدایتی خاصیت فیزیکی است که از جدول آخر کتاب به دست می آید.

موادی که دارای خاصیت رسانایی خوبی اند هدایت خوبی هم دارند.

انتقال حرارات در جهت های مختلف صورت می گیرد ولی برداری نیست چون انرژی است با هم جمع پذیرند.

$$k_{Cu} = 386 \quad W/m \cdot ^\circ C$$

$$k_{Al} = 210$$

$$k_{water} = 0.608$$

$$k_{سیمان} = 1.0$$

$$k_{\text{هوا}} = 0.02$$

$$k_{\text{پاروپان}} = 0.05$$

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{تولیدی} = \dot{E}_{زیر$$

بدن انسان را با خاصیت فیزیکی آب در نظر می گیریم. پرتقال و سیب زمینی و گوشت به همین صورت است.

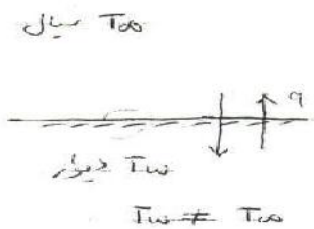
$$q = \frac{\Delta T}{\frac{\Delta x}{kA}} = \frac{\Delta T}{R} \quad \text{مقاومت حرارتی}$$

$R = \frac{\Delta x}{kA}$

انتقال حرارت تا زمانی که تولیدی و ذخیره نباشد خطی است. Q در دو سمت یکی است چون بقای انرژی موجود است. دور تا دور هم عایق است.



### انتقال حرارت ← جابجایی همرفتی



$$q = hA (T_{\infty} - T_w)$$

$$= -hA (T_w - T_{\infty})$$

$h = \frac{w}{m^2 \cdot C}$   
 ضریب جابجایی همرفتی  
 Convection

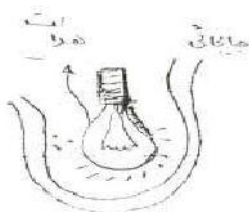
H می تواند از عدد صفر شروع شود و تا حدود 1000 ادامه یابد این اندازه به هندسه، سرعت شکل مسئله و خیایی عوامل دیگر بستگی دارد.

جایی که سیال با نیرو توام است جابجایی از نوع اجباری ست در جایی که سیال با نیرو همراه نیست جابجایی طبیعی ست.

$$q = \frac{\Delta T}{\frac{1}{hA}} = \frac{\Delta T}{R_h}$$

مقاومت جابجایی

بین دیوار و سیال انتقال حرارت از نوع جابجایی ست. لامپ هر دو نوع جابجایی را دارد.





اگر جسم بخواهد انرژی خود را از دست بدهد به صورت  $\epsilon \sqrt{T^4}$  و اگر بخواهد جذب کند به صورت فرمول روبرو است.

در صورتی که جسم کوچک باشد:

$$q_{1-2} = \epsilon \sqrt{A_1} (T_1^4 - T_2^4)$$

$$\epsilon \approx \lambda$$

$$\epsilon = 1.0 \text{ جسم سیاه}$$

$$q_{1-2} = \sqrt{A} (T_1 - T_2) \left( \frac{2T_1}{T_1 + T_2} \right) \left( \frac{2T_1^2}{T_1^2 + T_2^2} \right) \approx 4\sqrt{T_1^3} A \Delta T$$

$$q = 4\sqrt{T_1^3} A \Delta T \Rightarrow q = \frac{\Delta T}{\frac{1}{4\sqrt{T_1^3} A}} = \left( \frac{1}{hr} \right) \text{ ضریب انتقالی}$$

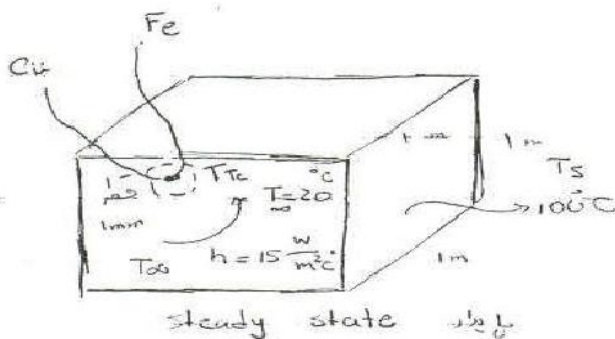
در بی نهایت میل به هم دما شدن دارند اما اختلاف را در نظر نمی گیریم، این ساده سازی برای این است که معادله ی ما خطی شود و این رابطه تنها برای جسم کوچک صادق است.

$$q_{1-2} = F_e F_g \sqrt{A} (T_1^4 - T_2^4)$$

$5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4$  ضریب ثابت استیوان برترین  
 ضریب انتقالی  
 ضریب صدریایی حرارتی

مثال: یک دماسنج ترموکوپل سیاه به قطر ۱ میلی متر برای اندازه گیری دمای کوره سیاهی به ابعاد  $1 \times 1 \times 1 \text{ m}$  به کار رفته است. اگر سطح کوره در درجه حرارت  $100^\circ \text{C}$  و هوای مجاور ترموکوپل  $20^\circ \text{C}$  با ضریب جابجایی  $15 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$  باشد ترموکوپل چه درجه حرارتی را نشان می دهد؟

انتظار می رود که دمای ترموکوپل  $20^\circ \text{C}$  درجه باشد ولی چنین نیست چون ترموکوپل دمای  $100^\circ \text{C}$  درجه را مشاهده می کند..



$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{\text{radiation}} = \dot{E}_{\text{convection}}$$

ترموکوپل

$$\dot{E}_{in} = (5.667 \times 10^{-8}) A ((100 + 273)^4 - T_{TC}^4)$$

$$\dot{E}_{out} = h A (T_{CA} - (20 + 273))$$

مساحت ترموکوپل

ترموکوپل دمایی بالاتر از ۲۰ را نشان می دهد پس مقدار انرژی به دلیل همرفتی بین سیال و ترموکوپل است و مقدار ورودی همان تشعشع حاصل از دیواره است.

$$q_{1-2} = \epsilon \sigma A (T_1^4 - T_2^4)$$

$$\dot{E}_{in} = \dot{E}_{out} \Rightarrow 5.667 \times 10^{-8} [(100 + 273)^4 - T_{TC}^4] =$$

$$15 (T_{TC} - (20 + 273)) \Rightarrow T_{TC} = 51 \text{ } ^\circ\text{C}$$

با استفاده از فرض قبل:

$$q = 4 \sigma T_1^3 A \Delta T \Rightarrow 4 (5.667 \times 10^{-8}) (373)^3 (373 - T_{TC}) = 15 (T_{TC} - 293)$$

$$T_{TC} = 55 \text{ } ^\circ\text{C}$$

مثال: یک قالب یخ  $1 \times 1 \times 1 \text{ m}$  را در نظر می گیریم (بدون تغییر ابعاد)  $T_F = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$

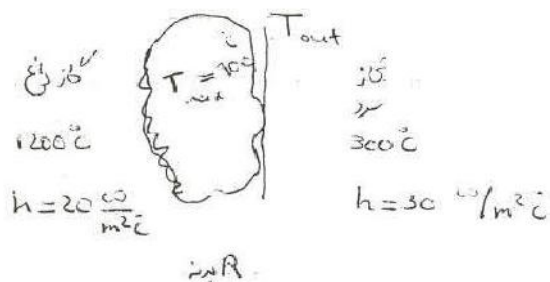
۱. یخ در معرض محیط با  $h = 15 \text{ W/m}^2\text{ } ^\circ\text{C}$  با  $T_\infty = 10 \text{ } ^\circ\text{C}$  است و بدون تشعشع زمان آب شدن چقدر؟

۲. با فرض قسمت الف،  $T_{sky} = -10 \text{ } ^\circ\text{C}$  به همراه تشعشع زمان آب شدن را بیابید.

۳. گونی به ضخامت  $1 \text{ mm}$  به دور یخ پیچیده شده است که در این حالت  $k = 0.06$  و دمای گونی  $10 \text{ } ^\circ\text{C}$  است زمان آب شدن را بیابید، مساله را ۵ وجه در نظر بگیرید

مثال: برای طراحی یک مبدل ماکزیمم درجه حرارت پیش بینی شده  $100 \text{ } ^\circ\text{C}$  درجه است اگر در یک طرف مبدل گاز داغ  $1200 \text{ } ^\circ\text{C}$  با  $h = 20 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{ } ^\circ\text{C}}$  و طرف دیگر گاز  $300 \text{ } ^\circ\text{C}$  درجه با

باشد ماکزیمم ضریب مقاومتی بدنه را بیابید  $h = 30 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{ } ^\circ\text{C}}$





$$A = 1 \text{ m}^2$$

$$\dot{E}_{in} = \dot{q}_{in} = 20 (1200 - 900) \Rightarrow T_{out} = 500^\circ\text{C}$$

$$\dot{E}_{out} = \dot{q}_{out} = 30 (T_{out} - 300)$$

حالت پایا است لذا ورودی با خروجی یکسان است.

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{R} \Rightarrow 20 (1200 - 900) = \frac{(900 - T_{out})}{R} \Rightarrow R = 0.067$$

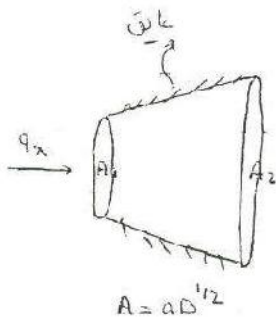
انرژی در هر مقطعی ثابت است.

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{R}$$

$$R = \frac{L}{kA}$$

$$R = \frac{1}{hA}$$

$$R = \frac{1}{hrA}$$



$$q = kA \frac{dT}{dx}$$

$$\int_{A_1}^{A_2} q \frac{dx}{A} = -k \int_{T_1}^{T_2} dT$$

در اینجا تغییرات سطح جسم را داریم

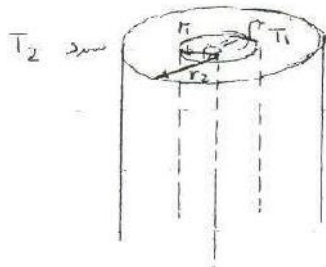
ظریب حرارتی بر حسب دما را هم

داریم.

$$k = f(T) = aT^2 + b \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} q \frac{dx}{A} = - \int_{T_1}^{T_2} k dT$$

در حالت های مقاومتی فقط مسائل را می توانیم یک بعدی حل کنیم.

می خواهیم فقط دما ها را در راستای  $x$  بررسی کنیم.



$$\int_{r_1}^{r_2} q \frac{dr}{2\pi rL} = -k \int_{T_1}^{T_2} dT$$

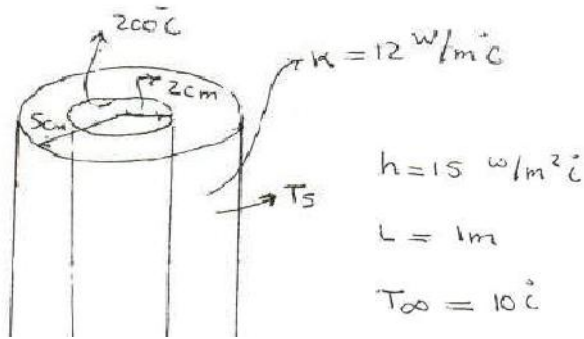
سطحی که شار بر آن عمود است که همان سطح جانبی است را در

نظر می گیریم:

$$\Rightarrow \frac{q}{2\pi L} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -K \int_{T_1}^{T_2} dT \Rightarrow \frac{q \ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi L} = K \Delta T$$

$$\Rightarrow q = \frac{\Delta T}{\frac{\ln r_2/r_1}{2\pi KL}} \quad R \text{ حرارتی استوانه} = \frac{\ln r_2/r_1}{2\pi KL} \quad R \text{ حرارتی کره} = \frac{1/r_1 - 1/r_2}{4\pi K}$$

مثال: لوله ای را در نظر می گیریم:



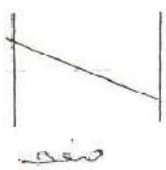
$$200^\circ\text{C} \xrightarrow{R \text{ استوانه}} \overset{? T_s}{\text{---}} \xrightarrow{R \text{ حرارتی}} T_\infty = 10^\circ\text{C} \quad q_1 = \frac{\Delta T}{\frac{\ln r_2/r_1}{2\pi KL}} = \frac{200 - T_s}{\frac{\ln 2.5}{2\pi \times 12 \times 1}}$$

$$q_2 = \frac{\Delta T}{\frac{1}{hA}} = \frac{T_s - 10}{\frac{1}{15 \times 2\pi \times 5 \times 10^{-2} \times 1}}$$

$$q_1 = q_2 \Rightarrow \frac{200 - T_s}{\frac{\ln 5/2}{2\pi \times 12}} = \frac{T_s - 10}{\frac{1}{15(2\pi)(0.05)}} \Rightarrow T_s = 189.7^\circ\text{C}$$

$$q = 846.8 \text{ W}$$

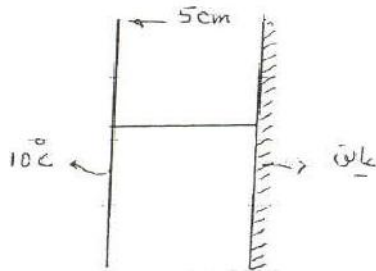
پروفیل دما در صفحه به صورت خطی و در استوانه و کره یک حالت سهمی گونه دارد.



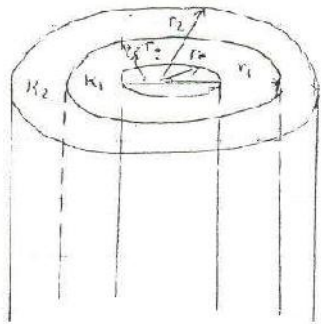
دما داریم

$$q = \frac{\Delta T}{\sum R} \Rightarrow q = \frac{200 - 10}{\frac{1}{15 \times 200 \times \frac{0.05}{100}} + \frac{\ln 5/2}{24 \times 12 \times 1}} = 846.8 \text{ W}$$

برای عایق  $\frac{dt}{dx}$  یا  $\frac{dt}{dr}$  صفر است در مس و آهن پس پروفیل دما خطی است.



در پایا چون در حالت عایق گرمای خروجی نداریم دمای همه ی نقاط به ۱۰ درجه می رسد و پروفیل دما خطی می شود.



$$h_D > T_\infty$$

$$q = \frac{\Delta T}{\sum R}$$

$$T_1 \xrightarrow{\text{کالری}} \xrightarrow{\frac{\ln r_2/r_1}{2\pi k_1 L}} \xrightarrow{\frac{\ln r_2/r_1}{2\pi k L}} \xrightarrow{\text{کالری}} T_2$$

$h_2 T_2$        $h_2 T_2$

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{h_2 A_2} + \frac{\ln r_2/r_1}{2\pi k_1 L} + \frac{\ln r_2/r_1}{2\pi k L} + \frac{1}{h_1 A_1}}$$

$$q = U_i A_i (T_1 - T_2) \quad U_i = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{r_0 \ln r_1/r_0}{k_1} + \frac{r_0 \ln r_2/r_1}{k_2} + \frac{r_0}{r_2} + \frac{1}{h_o}}$$

به  $U_i$  ضریب کلی حرارتی که واحد آن  $\frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$  گویند. ضریب حرارتی کلی از داخل

$$q = U_o A_o (T_2 - T_\infty) \quad U_o = \frac{1}{\frac{r_2}{r_0} \frac{1}{h_i} + \frac{r_2 \ln r_1/r_0}{k_1} + \frac{r_2 \ln r_2/r_1}{k_2} + \frac{1}{h_o}}$$

ضریب حرارتی کلی از خارج

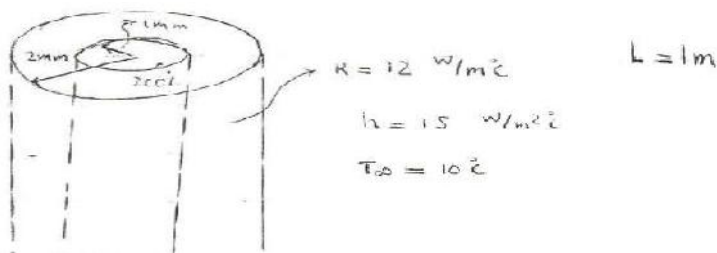
این رابطه ها فقط برای استوانه و لوله ها است.

برای کره هم همین ضرایب را داریم.

$T_\infty$  در سیال همان دمای متوسط در سیال است مانند سرعت در محاسبه ی عدد رینولدز

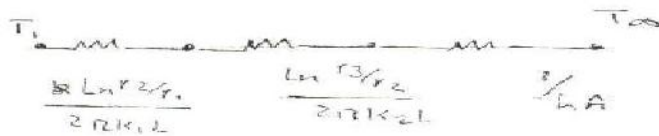
مساله: عایق چقدر باشد

$$\frac{dq}{dr} = 0 \Rightarrow r_{cr} = \frac{kz}{h_o} \begin{matrix} \rightarrow w/m^2 \cdot c \\ \leftarrow w/m^2 \cdot c \end{matrix}$$



مقاومت حرارتی

$\Delta r$	$q$	$T_2$
0.0		
0.01		
...		

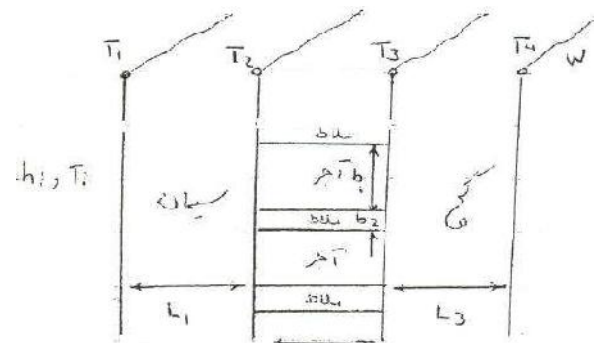


$k = 0.06$  پشم نسوز

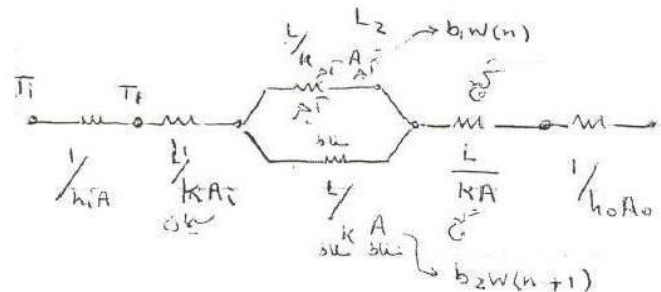
$$q = hA(T_s - T_\infty) \Rightarrow T_s = \frac{q}{hA} + T_\infty$$

شعاع بحرانی برای کره به صورت زیر است:

$$\frac{dq}{dr} = 0 \Rightarrow r_{cr} = \frac{2k}{h}$$

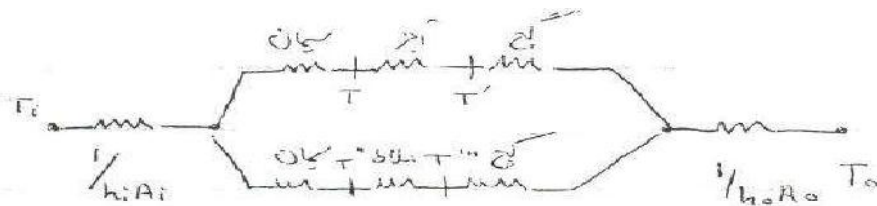


$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{conv1}} + \frac{1}{R_{cond}}$$



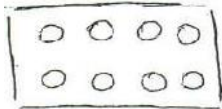
$$q = \frac{\Delta T}{\frac{1}{h_i A_i} + \sum_j \frac{L_j}{k_j A_j} + \frac{R_{\text{عزل}}}{A} + \frac{R_{\text{تاب}}}{A} + \frac{1}{h_o A_o}}$$

$$q = U A \Delta T \Rightarrow U = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \sum_j \frac{L_j}{k} + \frac{R_{\text{عزل}}}{A} + \frac{R_{\text{تاب}}}{A} + \frac{1}{h_o}}$$



بین ملات و اجر چون  $k$  تقریباً یکسانی دارد از مدار بالایی می توان استفاده کرد ولی اگر به جای اجر یک میله ی فلزی می گذاشتیم باید مدار پایین را در نظر می گرفتیم، هر کدام که مقاومت کمتری دارد حرارت را بیشتر انتقال می دهد.

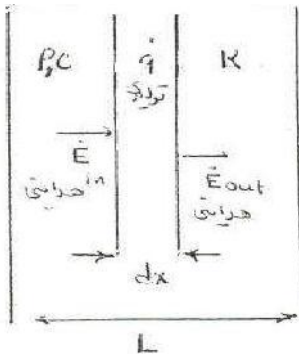
اجر های سوراخ دار با محاسبه ی مساحت های سوراخ و در نظر گرفتن مقاومت های موازی قابل حل است.



حالت دوم مقاومتی که رسم شد جریان شار ثابت و اولی جریان دما ثابت است.

### معادله ی کلی حرارت:

فعلاً معادلات را یک بعدی در نظر می گیریم.



$$\dot{E}_{in} = -kA \frac{dT}{dx}$$

$$\dot{E}_{out} = -kA \frac{dT}{dx} + dx \frac{d(-kA \frac{dT}{dx})}{dx}$$

$$f(x-L) = f(x) + h \frac{df}{dx} + \dots$$

$$\dot{E}_{out} = \dot{q} A \cdot dx$$

$$\dot{E}_{in} = \frac{m c_p \Delta T}{\Delta t} = \frac{\rho A \cdot dx \cdot c \cdot dT}{dt}$$

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{radiation} = \dot{E}_{ST} \quad \dot{q} = \dot{q}''' \text{ w/m}^2 \text{ منبع تابش}$$

$$\frac{\partial (hA dT/dx)}{\partial x} + \dot{q}''' A = \rho A c \frac{\partial T}{\partial t}$$

اگر A ثابت و همچنین K ثابت نسبت به دما باشد:

$$+ KA \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dot{q}''' A = \rho A c \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}'''}{K} = \frac{\rho c}{K} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{q}'''}{K} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad 1-D \quad \alpha = \frac{K}{\rho c} \text{ ضریب نفوذ حرارتی یا}$$

$$\text{ضریب پخش حرارت} \quad \alpha = \frac{m^2}{s} \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

$$\text{حالت سه بعدی} \quad \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{q}'''}{K} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 T + \frac{\dot{q}'''}{K} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad 3-D \quad \text{معادله کلی انتقال حرارت}$$

$$\frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^n \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{q}'''}{K} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{معادله}$$

$$n=0 \quad \text{Slab صاف} \quad r \rightarrow x$$

$$n=1 \quad \text{استوانه} \quad r \rightarrow r$$

$$n=2 \quad \text{کره}$$

بیشتر معادلات را یک بعدی در نظر می گیرند چون در استوانه و کره معمولاً یک بعدی و انتقال حرارت در جهت r است. انتقال حرارت چشم متقارن نیست.

در حالت کامل حداقل به ۷ شرط لازم داریم تا معادلات را حل کنیم.

$$\nabla^2 T = 0 \quad \text{معادله لاپلاس} \quad \text{- منبع تولید انرژی ندارد}$$

- پایدار است

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}'''}{K} = 0 \quad \text{معادله پواسون} \quad \text{- پایدار}$$

$$\nabla^2 T + \frac{\dot{q}'''}{K} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{معادله هرتز} \quad \text{- گذرا}$$

در مورد سیستم های یک بعدی اگر منبع تولید انرژی نداشته باشیم روش مقاومت هاست.

معادله انرژی:  $1-D, q'' = 0$  مقاومت

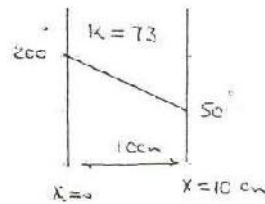
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q''}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow T = ax + b$$

$x=0, T=200$  در صورت مثال:

$x=10, T=50$

$\Rightarrow 200 = 0 + b \Rightarrow b = 200$

$50 = 10/100 \times a + 200 \Rightarrow a = -1500$



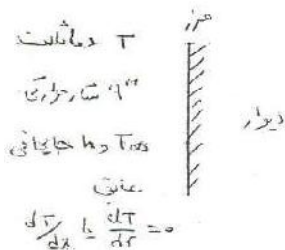
یک مرز می تواند شرایط مختلف داشته باشد:

۱-  $\frac{dT}{dx} = \frac{dT}{dr}$  در حالت

۱- در حالت ثابت

۲- در حالت حرارتی

۳- در حالت  $h$  و  $T_{\infty}$



در مسئله مثال اگر  $h_1 = 10 \text{ W/m}^2\text{C}$  و  $T_{\infty} = 50^\circ$  باشد

$$T = ax + b$$

$x=0, T=200 \Rightarrow b=200$

$x=10 \text{ cm}, q'' = h(T_s - T_{\infty})$

$= 10 ( a(\frac{10}{100}) + 200 - 50 )$

از طرفی  $q'' = -k \frac{dT}{dx} = -ka$

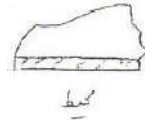
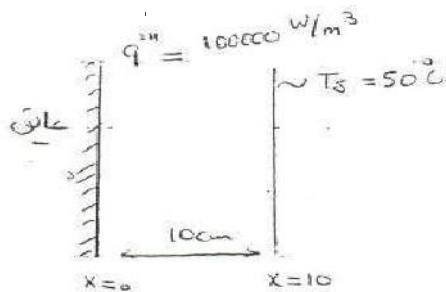
$-73a = a + 2000 - 500 \Rightarrow a = \frac{-1500}{74} = -20.3$

$\Rightarrow T = -20.3x + 200 \xrightarrow{x=10 \text{ cm}} T = 198$

دو طرف دایره را به عنوان شرایط مرزی نمی توان شار حرارتی و یا جابجایی باشد.

مثال: مساله پایدار و دارای منبع تولید انرژی به صورت  $q'''$  است. نمودار تغییرات دما به چه صورت

است؟



مثال اتو

S.S. پایدار

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q'''}{k} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{q'''}{k}$$

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q'''}{k}x + C \Rightarrow T = \frac{-q'''x^2}{2k} + Cx + D$$

$$x=0 \text{ عایق} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{q'''x}{k} + C \Rightarrow C=0$$

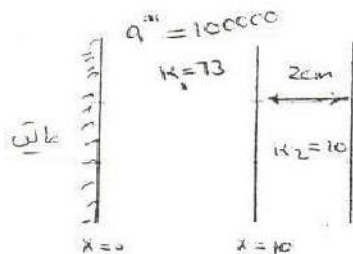
$$x=10 \text{ cm} \Rightarrow 50 = \frac{-10^5 \times 10^2}{2 \times 100^2 \times 73} + D \Rightarrow D = 56.8$$

$$T = \frac{-10^5 x^2}{2 \times 73} + 56.8$$

معادله تغییر دما

داخل جسم

مثال: مسئله پایدار است. شرط مرزی می خواهد.



$$h = 10 \text{ W/m}^2 \text{ C}$$

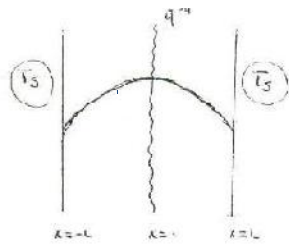
$$T_\infty = 20^\circ \text{ C}$$

$$q''' \cdot L = q'' = h(T_s - T_\infty)$$

$$q'' = \frac{\Delta T}{L/k_1} = 10 \times \frac{10}{100} = \frac{T_1 - T_\infty}{0.02/10}$$



در مرکز کره و یا محور استوانه  $\frac{dT}{dr}$  تقریباً صفر است.



$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{q'''}{k} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = \frac{-q'''x}{k} + C$$

$$T = -\frac{q'''x^2}{2k} + Cx + D$$

شرایط مرزی  $x=0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = 0$

$$x=0 \quad T = T_s$$

$$\Rightarrow T_s = -\frac{q'''L^2}{2k} + D \Rightarrow D = \frac{q'''L^2}{2k} + T_s$$

$$\Rightarrow T = -\frac{q'''x^2}{2k} + \frac{q'''L^2}{2k} + T_s$$

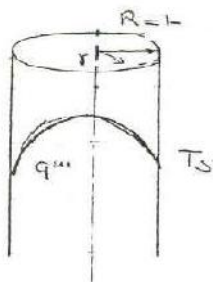
با ساده سازی داریم:

$$T - T_s = \frac{q'''L^2}{2k} \left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{T - T_s}{\left(\frac{q'''L^2}{2k}\right)} = 1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2 \Rightarrow \bar{T} = 1 - \bar{x}^2$$

دامای بی‌بعد

اختلاف دمای max در صفحه است.  $\frac{q'''L^2}{2k}$



$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{q'''}{k} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = \frac{-q'''}{k}$$

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{q'''r^2}{2k} + C$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{-q'''r}{2k} + \frac{C}{r}$$

$$\Rightarrow T = \frac{-q'''r^2}{4k} + C \ln r + D \quad \text{شرایط مرزی} \quad \frac{dT}{dr} = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$r=R \Rightarrow T = T_s$$

در استوانه  $\frac{q''' R^2}{4k}$  اختلاف دمای مرکز است.

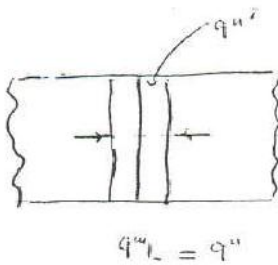
$$\frac{T - T_s}{\frac{q''' R^2}{4k}} = \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

برای کره داریم:

$$\frac{T - T_s}{\frac{q''' R^2}{6k}} = \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

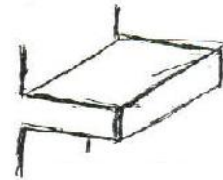
کره > استوانه > صفحه

در قطعات جوشکاری مثل مثال عمل می کنیم...



$$q''' = q_0 (x - x_0) \pm q_0 \delta (x - x_0)$$

فین: دسته لیوان و یا قاشق را داخل لیوان به دلیل افزایش سطح انتقال حرارت را افزایش می دهد.



همه ی این اشکال با اضافه کردن سطح باعث انتقال حرارت بیشتر می شود.

مسائل فین یک بعدی باید در نظر گرفته شود

در حالت یک بعدی از روش های:

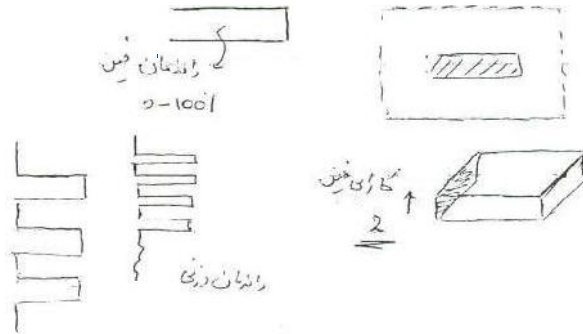


۱. مقاومت

۲. معادله کلی

۳. فین استفاده می شود

به صورت های استوانه یا دیسک هم وجود دارد  
در مورد استفاده از فین ها به موارد زیر باید توجه داشت



(۱) جنس

(۲) ابعاد

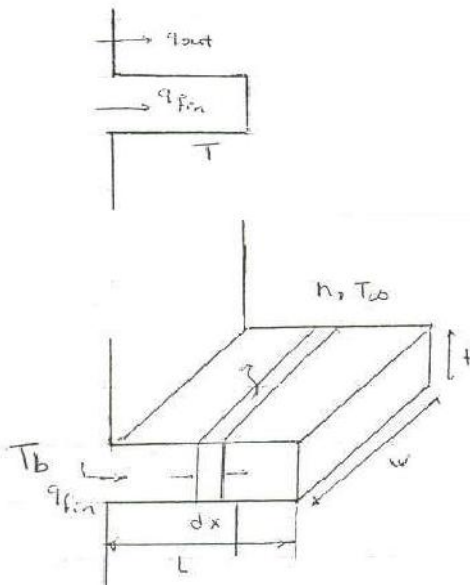
(۳) تعداد

در صورتی که پروفیل ها در فین شناخته شود تمامی مسائل حل شده است. چون با قانون بقا می توان راندمان را محاسبه کرد.

$$q_{fin} = -KA \frac{\partial T}{\partial x}$$

نظری

از تشعشع صرف نظر می شود و خواص ثابت است



$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{con} = \dot{E}_{st}$$

$$\dot{E}_{in} = -KA \frac{dT}{dx}$$

$$\dot{E}_{out} = -KA \frac{dT}{dx} + \left( \frac{d(-KA \frac{dT}{dx})}{dx} \right) dx$$

$$+ h P dx (T - T_{\infty})$$

سطح جانبی  $2w + 2t$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{hP}{KA} (T - T_{\infty}) = 0$$

$$m^2 = \frac{hP}{KA} = \frac{W/m^2 \cdot m}{W/m \cdot C \cdot m^2} = m^{-1}$$

به  $m^2$  ، NTU یا مقدار مشابه انتقال حرارت  
Number of Transport Unit است.

$$(mL)^2 = \frac{hPL^2}{KA} = \frac{\frac{L}{KA}}{\frac{1}{hPL}}$$

$$\Theta = T - T_{\infty}$$

$$\Theta'' - m^2 \Theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - m^2 \Theta = 0$$

شرط مقدار صاف است  
صورت استاندارد  
جابجایی همی

$$\Theta = c_1 e^{-mx} + c_2 e^{mx}$$

$$x=0 \quad \Theta_b = T_b - T_{\infty}$$

$$x=L \quad \Theta_{\infty_i} =$$

$$\frac{d\Theta}{dx} = 0$$

$$L \rightarrow \infty \quad \Theta_{\infty} = 0$$

$$\frac{h_f T_{\infty_c}}{L} \checkmark$$

اگر میانه به اندازه ی نی بلند باشد (چوب-شیشه) ، اگر طول را ندهند و یا طول بلند بگویند اگر مسی یا آهنی باشد از این شرط نمی شود.

شرط عایق به این صورت است که دما در نقطه نزدیک به هم در انتها تقریباً یکی است. بستگی به جنس

مواد دارد.

$$x=L \rightarrow \infty \quad \Theta_b = T_b - T_{\infty}$$

$$\Theta = 0$$

$$x=0$$

$$\theta = c_1 e^{+mx} + c_2 e^{-mx} \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \quad c_1 + c_2 = \theta_b \\ x=L \rightarrow \infty \quad c_1 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \theta = \theta_b e^{-mx} \quad m = \sqrt{\frac{hP}{kA}}$$

$$q_{fin} = kAm\theta_b$$

مقدار انرژی که وارد فین می شود

$$x=L \quad \frac{d\theta}{dx} = 0$$

$$x=0 \Rightarrow \theta_b = T_b - T_{\infty}$$

$$x=0 \Rightarrow c_1 + c_2 = \theta_b$$

$$x=L \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = mc_1 e^{+mx} - mc_2 e^{-mx} /_{x=L} \Rightarrow mc_1 e^{mL} - mc_2 e^{-mL} = 0 \quad 22$$

$$\theta = \theta_b \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} \Rightarrow q_{fin} = kAm\theta_b \tanh mL$$

$$x=L, \quad h_L, T_{\infty L} \quad 3) \quad \text{جایگانی}$$

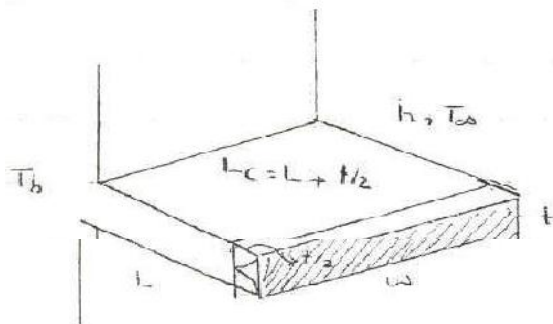
$$x=L, \quad \theta = \theta_L \quad 4)$$

با این چهار حالت بررسی می شود ولی واقعیت حالت سوم است. ولی شرط عایق مهم ترین است.

در حالت عایق L را تصحیح کرده و به جای آن  $L_c = L + \frac{t}{2}$  قرار می دهند.

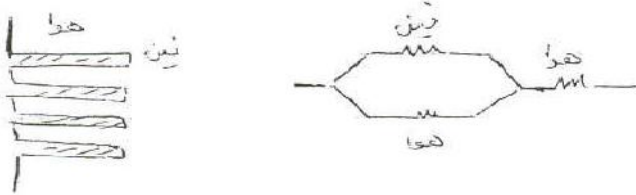
$$\theta = \theta_b \frac{\cosh m(L_c - x)}{\cosh mL_c}$$

$$\text{سزنی} = L_c = L + t/2$$



حال می خواهیم مساله را به روش مقاومتی حل کنیم:

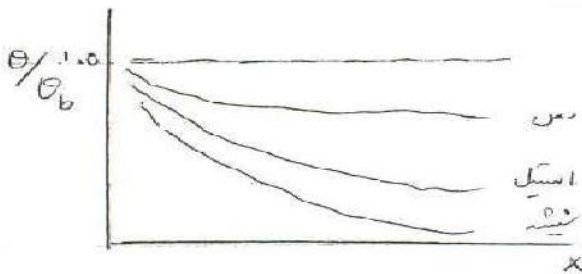
$$q_{fin} = \frac{\Delta T}{R} \Rightarrow R_{fin} = \frac{\theta_b}{kAm\theta_b \tanh mL_c} = \frac{1}{kAm \tanh mL_c}$$



راندمان فین به این صورت تعریف می شود:

$$\eta = \frac{q}{q_{max}} = \frac{kAm\theta_b}{hPL_c\theta_b} = \frac{1}{mL} = \sqrt{\frac{kA}{hPL^2}}$$

فین را با حالتی مقایسه می کنند که تمامی سطوح جانبی با دمای base حالت جابجایی دارد.



$$\eta = \frac{\tanh mL}{mL} \quad m = \sqrt{\frac{hP}{kA}}$$

راندمان فین

کارایی فین:

$$\epsilon = \frac{q_{fin}}{q_{base}} = \frac{kAm\theta_b}{hA\theta_b} = \frac{km}{h} = \frac{k}{h} \sqrt{\frac{hP}{kA}} = \sqrt{\frac{kP}{hA}}$$

$$\epsilon = \sqrt{\frac{kP}{hA}} \cdot \tanh mL$$

می خواهیم ببینیم در صورت بودن یا نبودن فین چقدر گرما منتقل می شود.

$$m = \sqrt{\frac{hp}{kA}} = \sqrt{\frac{h(2w+2t)}{kwt}} = \sqrt{\frac{2h}{kt}}$$

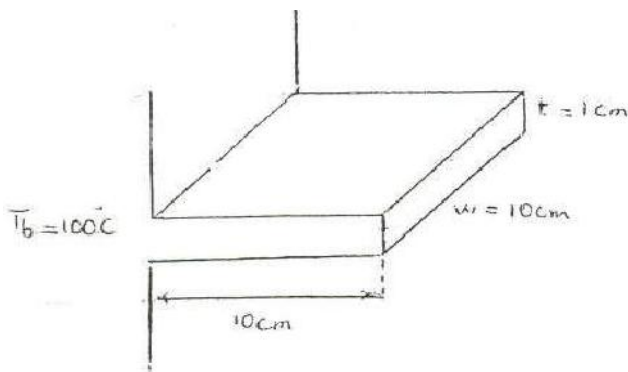
$$\eta = \sqrt{\frac{kwt}{h(2w+2t)L^2}} = \sqrt{\frac{kt}{2hL^2}} \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{2k}{ht}} \tanh mL \quad (r)$$

برای انتخاب فین مناسب با کارایی و راندمان بالا کافی است K را بالا بگیریم ولی این حالت حدی دارد.

یکی دیگر از راه ها کم کردن h است که با تغییر سیال یا هندسه جسم تغییر می دهند. روی ضخامت بتنی نمی توان کرد.

در نهایت k را باید زیاد و h را کاهش داد t, L, W با هم حجم را تشکیل می دهند و برای طراحی مهم است.

راندمان وزنی:



$$k = 210 \text{ W/m}\cdot\text{s}$$

$$h = 25 \text{ W/m}^2\cdot\text{C}$$

$$T_\infty = 20^\circ\text{C}$$

عین آلومینیم

$$A = 1 \text{ m}^2$$

$$h = 20 \text{ fins}$$

فین از نوع حالت کوتاه است چون طول محدود است لذا تنها از فین در حالت عایق می توان استفاده نمود.

$$q_{fin} = KA m \theta_b \operatorname{Tanh} m l_c$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{q_{fin}}{q_{max}} = \frac{\operatorname{Tanh} m l_c}{m l_c}$$

$$q_{max} = h P L_c \theta_b$$

$$m = \sqrt{\frac{hP}{KA}} = \sqrt{\frac{h(2\omega + 2t)}{Kwt}} = \sqrt{\frac{2h}{Kt}} = \sqrt{\frac{2(25)}{210(1/100)}} = 4.88$$

$$L_c = L + t/2 = 10 + 1/2 = 10.5 \text{ cm}$$

$$q_{fin} = (210) \left(\frac{10}{100}\right) \left(\frac{1}{100}\right) (4.88) (100 - 20) \operatorname{Tanh} \left[4.88 \left(\frac{10.5}{100}\right)\right] = 38.7 \text{ W}$$

$$q_{max} = 25 \left(2\left(\frac{10}{100}\right) + 2\left(\frac{1}{100}\right)\right) \left(\frac{10}{100}\right) (100 - 20) = 44 \text{ W}$$

$$\eta = \frac{38.7}{44} = 88 \%$$

$$\varepsilon = \frac{q_{fin}}{q_{base}} = \frac{38.7}{hA\theta_b} = \frac{38.7}{(25)\left(\frac{10}{100}\right)\left(\frac{1}{100}\right)(80)} = 19.35 \gg 2.0$$

حال تعداد فین ها را به ۲۰ افزایش می دهیم درصد افزایش در انتقال حرارت بیابید:



$$q_{\text{total}} = n q_{\text{fin}} + q_{\text{unfin}} =$$

$$q_{\text{unfin}} = h A_b \theta_b = 25(1)(100-20) = 2000 \text{ W} = 2 \text{ kW}$$



$$q_{\text{total}} = 20 \times 38.7 + h A_{\text{unfin}} \theta_b = 20 \times (38.7) + 25 \left[ 1 - n \left( \frac{10}{100} \right) \left( \frac{1}{100} \right) \right] (100-20)$$

$$q_{\text{total}} = 2.7 \text{ kW}$$

بالقرنين اثنين



$$\% \Delta q = \frac{2.7-2}{2} = 35\%$$

$$\eta = \frac{q_{\text{total}}}{q_{\text{max}}} = \frac{2.7 \times 10^3}{44 \times 20} = 3.07 \approx 300\% \quad \text{انها زائدة}$$

fin efficiency  $\eta_f$

Overall surface efficiency  $\Rightarrow \eta_o = \frac{q_T}{q_{\text{max}}} = \frac{q_T}{h A_t \theta_b}$

المساحة الكلية  $A_t$

$$q_{\text{max}} = h A_t \theta_b$$

$$\eta_f = \frac{q_{\text{fin}}}{q_{\text{max}}}$$

$$A_t = A_f + A_b$$

$$q_T = \frac{q_{\text{unfin}}}{h A_b \theta_b} + \frac{q_{\text{fin}}}{h A_f \eta_f \theta_b}$$

$$= h [A_b + \eta_f A_f] \theta_b$$

$$= h A_t \left[ 1 - \frac{A_f}{A_t} (1 - \eta_f) \right] \theta_b$$

$$\eta_o = \frac{h A_t \left[ 1 - \frac{A_f}{A_t} (1 - \eta_f) \right] \theta_b}{h A_t \theta_b} = \left[ 1 - \frac{A_f}{A_t} (1 - \eta_f) \right]$$

$$\eta_o = \left[ 1 - \frac{A_f \left( 20 \left( 2 \left( \frac{10}{100} \right) + 2 \left( \frac{1}{100} \right) \right) \left( \frac{10}{100} \right) + 20 \left( \frac{10}{100} \times \frac{1}{100} \right) \right)}{A_f + \left[ 1 - 20 \left( \frac{10}{100} \right) \left( \frac{1}{100} \right) \right]} \right] (1 - 0.88)$$

$$= 0.96 = 96\%$$

1-D, Unsteady state

دمای بدن انسان ۳۶ درجه است و برای سوختن نوع اول تا دمای ۶۰ درجه می توان تحمل کند.

$$k \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + q''' = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} = \frac{W/m \cdot C}{kg/m^3 \cdot J/kg \cdot C} = \frac{m^2}{s}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$T^* = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

از سرعت تیزی اسم

$$T^* = \frac{T}{T_i}$$

$T^*$  ادلی برتیر است

$$x^* = \frac{x}{L}$$

$$t^* = \frac{t}{t_0}$$

$t$  از تیزی ادلی است

$$\frac{\partial T^* T_i}{\partial t^* t_0} = \alpha \frac{\partial^2 (T^* T_i)}{\partial (x^* L)^2} \Rightarrow \frac{T_i}{t_0} \frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \alpha \frac{T_i}{L^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T^*}{\partial t^*} = \frac{t_0 \cdot \alpha}{L^2} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}}$$

تیزیات  $T^*$  حاین صفر تالی است

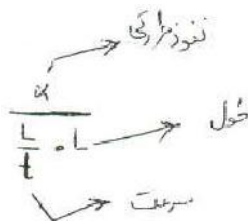
عدد فوریه بقدر

عدد فوریه گویند که سرعت پخش حرارتی را نشان می دهد. که این پخش در

$$Fo = \frac{\alpha \cdot t_0}{L^2}$$

به

واحد طول است.



$$q_{\text{cond}} = q_{\text{conv}} \Rightarrow -kA \frac{dT}{dx} = hA (T - T_{\infty})$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta T}{T - T_{\infty}} = \frac{hA \cdot \Delta x}{kA} \quad \text{یا} \quad \frac{hl}{k} = \frac{\frac{L}{kA}}{\frac{1}{hA}} = Bi \quad \text{عدد بیوت}$$

Biot nom

حال به معادله اولیه بر می گردیم و داریم:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

روش حل سیستم ناپایدار

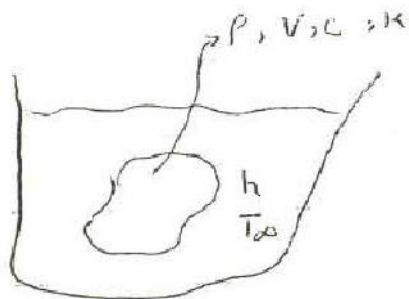
lumped method - جسم تک دما یا جسم فشرده

Heisler chart - روش نمودارها

۳ - روش جسم نیمه گذر

۴ - روش محوری

جسم تک ما می توان مسائل یک ناحیه بعدی را بررسی کند



$T_i$  - دمای اولیه

$T_{\infty}, h$

$T_{\infty} > T$

در جسم تک باید از قانون دما انرژی و شروع و استفاده نمود.

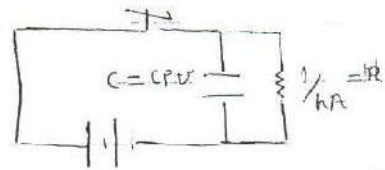
$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{gn} = \dot{E}_{st} \Rightarrow hA(T_{\infty} - T) = \rho CV \frac{dT}{dt}$$

$$\Rightarrow hA(T - T_{\infty}) = -\rho CV \frac{dT}{dt} \Rightarrow \int_{T_i}^T \frac{dT}{T - T_{\infty}} = \int_0^t \frac{-hA}{\rho CV} dt$$

$$\Rightarrow \left( \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right) = e^{\frac{-hA}{\rho CV} t} = e^{(-B_i Fo)}$$

(تکامل بعد)

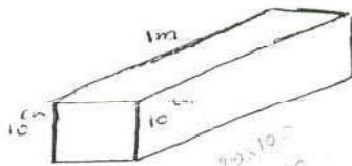
$$= e^{-\frac{t}{RC}} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$



$$\frac{V}{A} = L \quad \frac{h}{\rho C L} \times \frac{L}{L} \times \frac{L}{L}$$

در مثال تک دما باید جسم از لحاظ فیزیکی کوچک باشد یعنی  $B_i < 0.1$

اگر در مثال قبل فرض کنیم که  $T_i = 200^\circ C$  و جسم ما کره‌ای شکل با قطر ۱۲۰ سانتی متر و از جنس آلومینیوم  $k = 210 \frac{W}{m^2 C}$  با  $T_{\infty} = 20^\circ C$  و در محیطی با  $h = 10 \frac{W}{m^2 C}$  قرار داشته باشد، بعد از ۲ دقیقه می‌خواهیم دما را بیابیم:



$$h = 10 \frac{W}{m^2 C}$$

$$k = 75 \frac{W}{m C}$$

$$B_i = \frac{hL}{k}$$

$$L = \frac{V}{A_s} = \frac{10 \times 10 \times 100}{2(10 \times 10) + 4(10 \times 100)} = 2.38 \text{ cm}$$

$$B_i = \frac{10 \times 2.38 \times 10^{-2}}{75} = 3.17 \times 10^{-3} < 0.1$$

Max طول مشخص ۲.۵ است چون اگر طول ما نیز تا بی نهایت ادامه پیدا کند طول مشخصه نهایتاً تا این مقدار پیش می‌رود لذا فرض جسم تک دما برای ریل راه آهن مناسب است.

در مساله گذرا باید اول  $B_i$  چک شود اگر کوچکتر از ۰.۱ نشد باید از روش‌های دیگر به دست آورد.

$$B_i = \frac{hL}{k}$$

$$L = \frac{V}{A_s} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} = \frac{r}{3}$$



$$q'' A - hA(T - T_{\infty}) = \rho c V \frac{dT}{dt} \Rightarrow t \rightarrow T = T_i$$

$$\theta = T - T_{\infty} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} + m^2 \theta = 0$$

$$m^2 = \frac{h}{\rho c L} \quad Q = \frac{q'' A}{\rho c L} \rightarrow \theta = c e^{-mt} + (\theta_f) \frac{Q}{m}$$

$$\Rightarrow \theta = \theta_i e^{-mt} + (1 - e^{-mt}) \frac{q''}{h}$$

بعد از گذشت زمان زیاد سیستم پایدار می شود در نتیجه:

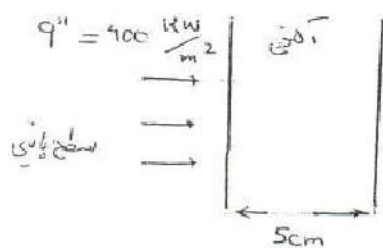
$$\theta = \frac{q''}{h}$$

$$q'' = h(T - T_{\infty}) \Rightarrow q = hA(T - T_{\infty})$$

مثال: تیغه آهنی به ضخامت 5 cm در دمای محیط بوده است ناگهان سطح پایین تیغه مذکور را در معرض

شار حرارتی به میزان  $q'' = 400 \frac{\text{kw}}{\text{m}^2}$  قرار می دهیم و اگر ضریب جابجایی سطح بالای تیغه

باشد زمان رسیدن تیغه به دمای 100 درجه را معلوم نمایید.  $h = 50 \frac{\text{w}}{\text{m}^2 \text{c}}$



$$T_i = 20^\circ \text{C}$$

$$h = 50 \text{ w/m}^2 \text{c}$$

$$T_{\infty} = 20^\circ \text{C}$$

$$Bi = \frac{hL}{k} = 0.034$$

$$m = \frac{h}{\rho c L} = 2.8 \times 10^{-4}$$

$$\rho = 7849 \quad c = 452 \quad k = 73$$

$$\theta = (1 - e^{-mt}) \frac{q''}{h} \Rightarrow (100 - 20) = \frac{400 \times 10^3}{50} (1 - e^{-2.8 \times 10^{-4} t})$$

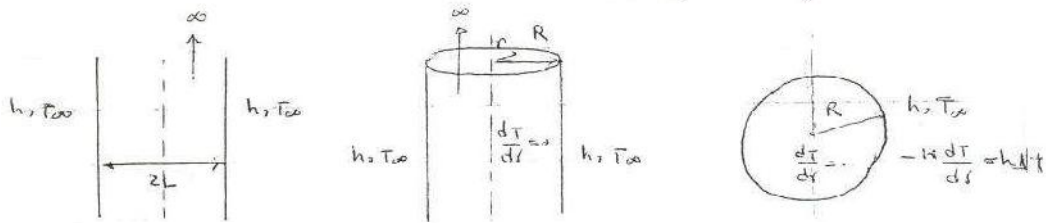
$$\Rightarrow t = 35.65 \text{ s}$$

روش نمودار های هیسلر

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{K} \frac{\partial T}{\partial t}$$

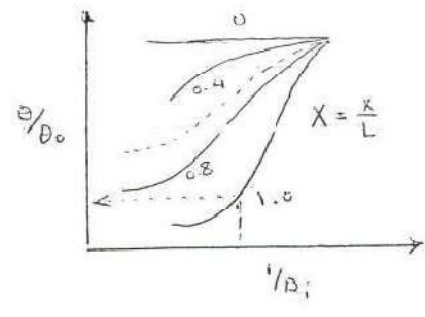
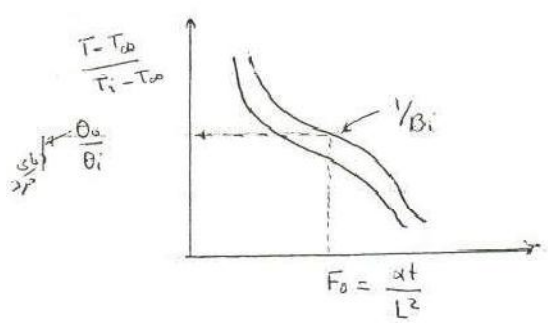
$$\frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^n \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\rho c}{K} \frac{\partial T}{\partial t}$$

- $r=0$       صفت
- $r=1$       استوانه
- $r=2$       کره

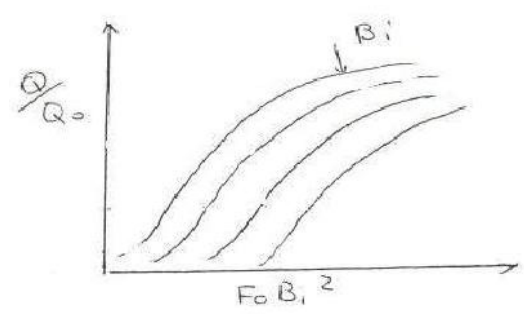


$x = -L, L$   
 $x = 0 \rightarrow \frac{dT}{dx} = 0$  (شرایط عین)   
 $-K \frac{dT}{dx} = h \Delta T$

$$F_0 = \frac{\alpha t}{L^2 L R^2} \quad \boxed{B_i = \frac{hL}{K} \frac{L}{R} = \frac{hR}{K}}$$



در این روش تا مرحله نهایی نباید از حالت بی بعدی خارج شد.

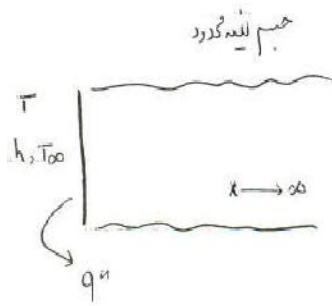


$$Q_0 = \rho c V (T_i - T_\infty)$$

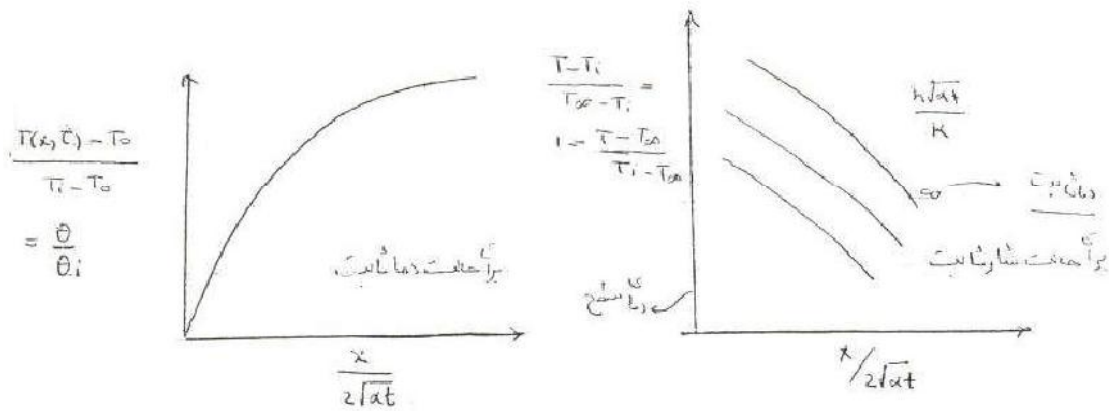
با استفاده از این نمونه ها دو شرط قابل حل است. یکی شرط جابجایی است و دیگری دمای ثابت

### جسم نیمه محدود:

در حالتی که صفحه ما بزرگ بود مثل دیوار اتاق یا کره ی ما شعاع بزرگی داشته باشد:

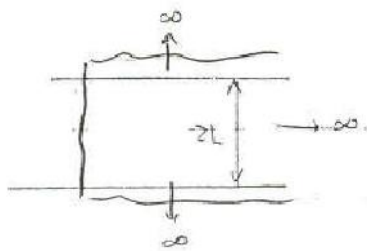


$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\rho c}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \rightarrow \text{روش لاپلاس}$$



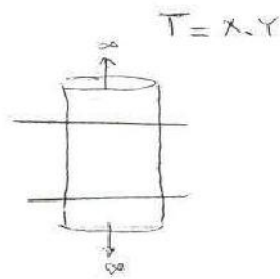
برای حالت سه بعدی کافی است از صفحات گذرنده از هم استفاده کنیم.

با یک صفحه قطع می دهیم.



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$





مثلاً  $T = x, y$  است

برای کره داریم

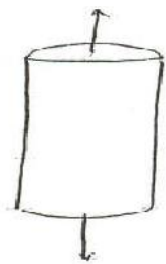
دینگنده یا بی طرف محدود

$$\text{نسبت } I = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0} = \int \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \rightarrow \text{جواب}$$

$$q_0 = \frac{kA(T_0 - T_1)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$

$$\text{نسبت } T - T_1 = \frac{2q_0 \sqrt{\alpha t / \pi}}{kA} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right) - \frac{q_0 x}{kA} \left(1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

مثال: میله نا محدودی به قطر ۵ سانتی متر از جنس چوب در دمای اولیه ۱۰ درجه در معرض محیطی با شرایط جابجایی  $100 \frac{W}{m^2 \cdot C}$  و  $T_{\infty} = 40^{\circ}$  قرار گرفته، معلوم نمایید بعد از چند ساعت دمای سطح آن به  $30^{\circ}$  درجه می رسد.



$$\begin{aligned} \frac{l}{B_i} &= 0.044 \\ \frac{\theta_0}{\theta_i} &= \frac{30-40}{10-40} = \frac{1}{3} = 0.33 \\ F_0 &= 0.5 \rightarrow \frac{\alpha t}{R^2} \rightarrow \\ \frac{0.96 \times 10^{-7} \alpha t}{(2.5)^2} &= 0.5 \Rightarrow t = 0.9 \text{ h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.96 \times 10^{-7} & k &= 0.11 \\ l &= \frac{V}{A} = \frac{\pi r^2 L}{\pi r^2} = \frac{r}{2} \\ B_i &= \frac{h l}{k} = \frac{100 \times 2.5 \times 10^{-2}}{2 \times 0.11} = 11.36 > 0.1 \end{aligned}$$

حجم نامناسب

$$B_i = \frac{h R}{k} = \frac{100 \left(\frac{2.5}{100}\right)}{0.11} = 22.73$$

$$\frac{l}{B_i} = 0.044$$

$$\frac{\theta_0}{\theta_i} = \frac{\theta_1}{\theta_0} \cdot \frac{\theta_0}{\theta_i} \Rightarrow \frac{30-40}{10-40} = \frac{0.05 \times \theta_0}{\theta_i}$$

4.17

$$B = \frac{k}{\alpha} = 1.0 \cdot 10^6$$

$$k = 0.96 \times 10^{-7} \quad R = 0.11$$

$$L = \frac{V}{A} = \frac{r}{2} = \frac{50}{4} = 12.5 \Rightarrow Bi = \frac{hL}{k} = \frac{12.5 \times 10^{-2} \times 100}{0.11} = 113.63 > 0.1$$

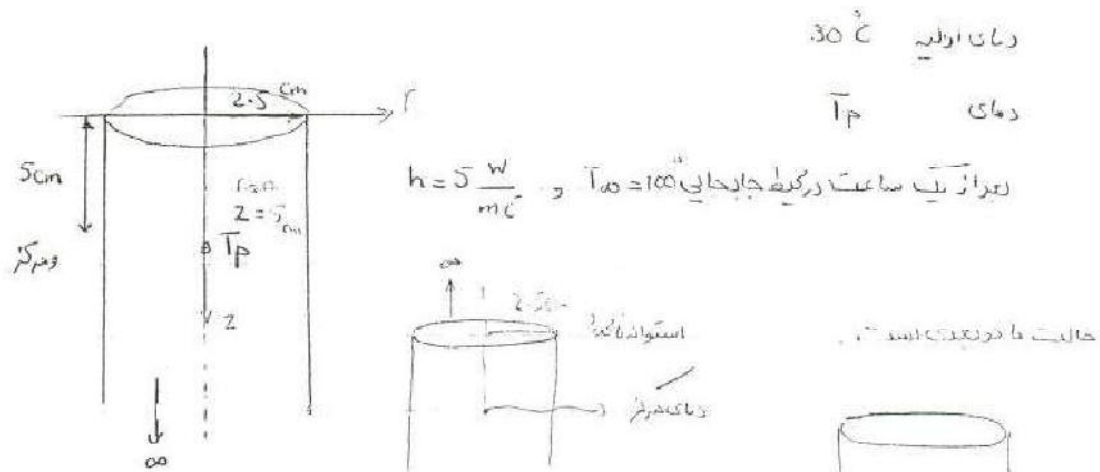
حجم تک‌مستطیک

$$Bi = \frac{hR}{k} = \frac{100 \times 25 \times 10^{-2}}{0.11} = 227.3 \Rightarrow \frac{1}{Bi} = 4.4 \times 10^{-3} \approx 0$$

$$\frac{\theta_s}{\theta_i} = \frac{\theta_s}{\theta_o} \cdot \frac{\theta_o}{\theta_i} \Rightarrow \frac{30-40}{10-40} = \frac{\theta_o}{\theta_i} \times$$

$$R = \frac{R}{R} = 1.0 \quad \text{دمای سطح} \Rightarrow \frac{\theta_o}{\theta_i} =$$

مثال: یک استوانه نیمه محدود را در نظر بگیرید از جنس گوشت (خواص فیزیکی آب)



$$\alpha = \frac{k}{\rho c} = \frac{0.604}{997(4174)} \quad \text{حجم نیمه محدود}$$

$$\alpha = 1.45 \times 10^{-7}$$

$$Bi = \frac{hR}{k} = \frac{5 \left( \frac{2.5}{100} \right)}{0.604} = 0.201$$

$$\frac{1}{Bi} = 4.93$$

$$F_c = \frac{\alpha L}{R^2} = \frac{1.45 \times 10^{-7} (2000)}{\left( \frac{2.5}{100} \right)^2} = 0.535 \Rightarrow - \frac{\theta_o}{\theta_i} = 0.7 = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{5 \times 10^{-2}}{2\sqrt{1.45 \times 10^{-7} \times 3600}} = 1.11$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{\theta_i} = 1$$

$$\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = \frac{5 \times \sqrt{1.45 \times 10^{-7} \times 3600}}{0.609} = 0.19$$

$$\Rightarrow \frac{\theta_0}{\theta_i} = \left( \frac{\theta_0}{\theta_i} \right)_{\text{استر}} \times \left( \frac{\theta}{\theta_i} \right)_{\text{تغییر دند}} = 0.7 \times 1 = 0.7 \Rightarrow T_f = 17^\circ\text{C}$$

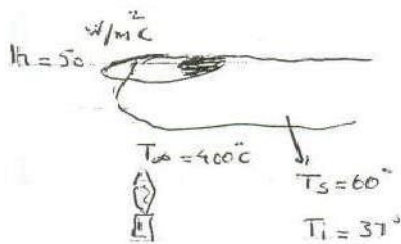
با تغییر  $z=5$  به  $z=1$  سانتی متر داریم:

$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = 0.22$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{\theta_i} = 0.85 \Rightarrow \left. \frac{\theta}{\theta_i} \right|_{T_f} = 0.7 \times 0.85 = 0.595$$

$$\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = 0.19$$

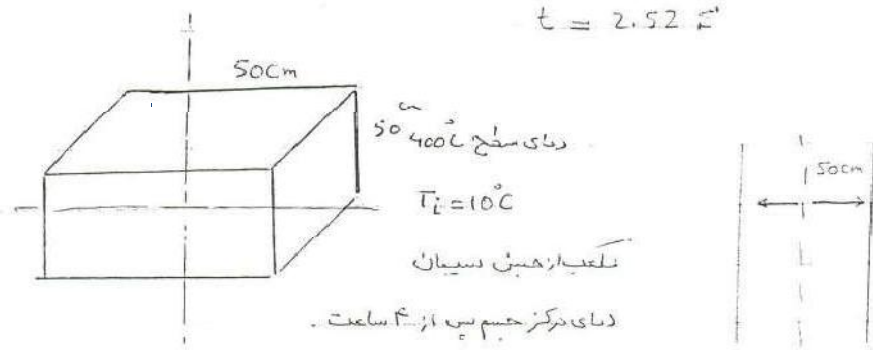
$$\frac{T_f - T_\infty}{T_i - T_\infty} = 0.595 = \frac{T_f - 10}{20 - 10} \Rightarrow T_f = 15.9^\circ\text{C}$$



$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{0.0}{2\sqrt{1.45 \times 10^{-7} (t)}} = 0.0$$

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{60 - 400}{37 - 400} = 0.94$$

$$\Rightarrow \frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = \frac{50 \cdot \sqrt{1.45 \times 10^{-7} (t)}}{0.609} = 0.05$$



$$\alpha = 6.8 \times 10^{-7}$$

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} = \frac{6.8 \times 10^{-7} (4 \times 2500)}{\left(\frac{25}{100}\right)^2} = 0.157 \quad \frac{1}{Bi} = 0$$

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} \Big|_x = 0.7 \quad \frac{\theta_o}{\theta_i} \Big|_y = \frac{\theta_o}{\theta_i} \Big|_z = 0.7 \Rightarrow \frac{\theta_o}{\theta_i} \Big|_{T_p(x,y,z)} = 0.7^3 = 0.343$$

$$\frac{T_p - 400}{10 - 400} = 0.343 \Rightarrow T_p = 266.23^\circ\text{C}$$

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} \Big|_{T_p(x,y,z)} = \frac{\theta_o}{\theta_i} \Big|_x \cdot \frac{\theta_o}{\theta_i} \Big|_y \cdot \frac{\theta_o}{\theta_i} \Big|_z$$

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} \Big|_x \cdot \frac{\theta_o}{\theta_i} \Big|_y \cdot \frac{\theta_o}{\theta_i} \Big|_z$$

جسم گذرا:

- حل تحلیلی ← جداسازی توابع

جسم تکدما ←  $Bi < 0.1$

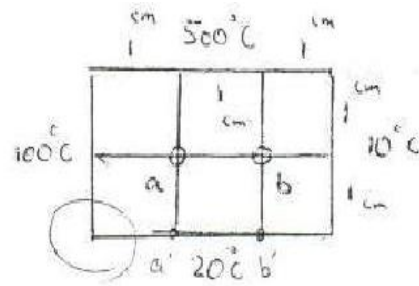
- نمودار های هیسلر - نمودار جسم نیمه محدود

با استفاده از نمودار ها نمی توان منبع تولید انرژی به کاربرد برای این کار باید از انرژی های محاسباتی استفاده کرد.



مسئله

حالت پایدار  
بیرون منبع انرژی  
 $T_a, T_b = ?$



$$\left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0 \xrightarrow{\text{با شرط همبندی در دو طرف}} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T(x+h) - 2T(x) + T(x-h)}{\Delta x^2}$$

$$\left( T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j} \right) \frac{1}{h^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{h^2}$$

اگر  $h=k$  باشد در بیشتر مواقع این گونه است.

اگر منبع انرژی داریم

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0 \quad \left( \frac{-q''''}{k} \right)$$

a)  $T_b + 100 + 500 + 20 - 4T_a = 0$

b)  $T_a + 10 + 500 + 20 - 4T_b = 0$

حاصل این دستگاه خطی است:

$$\begin{cases} T_b - 4T_a = -620 \\ T_a - 4T_b = -530 \end{cases} \Rightarrow T_a = 200.66^\circ\text{C} \quad T_b = 182.46^\circ\text{C}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_a \\ T_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -620 \\ -530 \end{bmatrix}$$

حال اگر به جای دمای ۲۰ ما  $t^{\infty}$  را ۲۰ و  $h = 10$  و در این حالت  $k$  جسم نیز موجود باشد، داریم:

$$a) T_b + 100 + 500 + T_a' - 4T_a = 0$$

$$b) T_a + 10 + 500 + T_b' - 4T_b = 0$$

$$a') -k \left( \frac{dT}{dx} \right) = h(T - T_{\infty}) \Rightarrow -12 \frac{T_a - T_a'}{0.01} = 10(T_a' - 20)$$

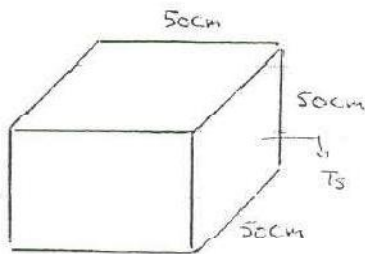
تفاضل دما بر حسب فاصله

$$\frac{\Delta T}{\Delta x}$$

$$b') -12 \frac{T_b - T_b'}{0.01} = 10(T_b' - 20)$$

در مرز ما دیگر منبع ذخیره انرژی و تولید وجود ندارد و فقط کافی است که از ارزش بالا استفاده کنیم.

پروژه: مکعب ۵ سانتی متر از سیمان با دمای اولیه ۱۰ درجه و دمای سطح ۴۰۰ درجه موجود است.



$$T_i = 10^{\circ}\text{C}$$

$$T_s = 400^{\circ}\text{C}$$

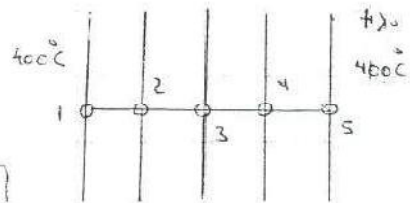
؟ دمای مرکز  $\rightarrow$  S.S

حال سوال تبدیل را در حالت پایا حل می‌کنیم:

$$k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{h^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta t}$$

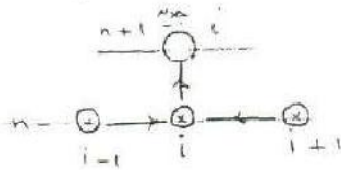
$l = \Delta t \times \alpha$



می توان دمای همه را به صورت دمای اولیه در نظر گرفت:

روش صریح  
explicit

$$\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$



$$\frac{\alpha \Delta t}{h^2} = r \rightarrow \text{فوریه}$$

$$r(T_{i+1}^n + T_{i-1}^n) + (1-2r)T_i^n = T_i^{n+1}$$

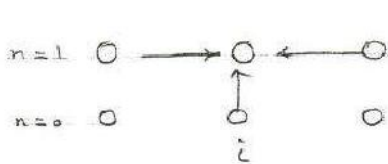
ماتریس

$$\begin{bmatrix} r & 1-2r & r & 0 & \dots \\ r & 1-2r & r & 0 & \dots \\ & & & 1-2r & r \\ & & & & 1-2r \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{i-1}^n \\ T_i^n \\ T_{i+1}^n \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{i-1}^{n+1} \\ T_i^{n+1} \\ T_{i+1}^{n+1} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

برای سیستم یک بعدی باید حتماً  $1-2r > 0$  باشد لذا  $r < \frac{1}{2}$  باشد در غیر این صورت مساله واگرا می شود.

روش صریح

$$\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$



$$r(T_{i+1}^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}) + (1+2r)T_i^{n+1} = T_i^n$$

$$\begin{bmatrix} 1+2r & & & & \\ & 1+2r & & & \\ & & 1+2r & & \\ & & & 1+2r & \\ & & & & 1+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_i^{n+1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_i^n \\ \vdots \end{bmatrix}$$

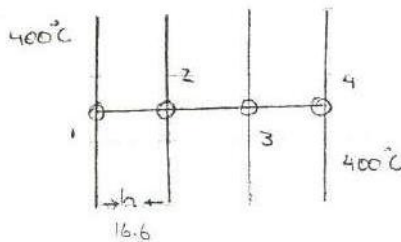
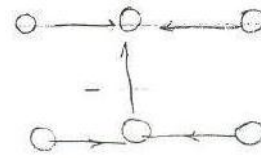


روش کراکول نیلسون

$$(1-\omega) \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \omega \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2}$$

$$= \frac{1}{\alpha} \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t}$$

$$\omega = 1/2$$



$$(2) \frac{T_1^{(n)} - 2T_2^{(n)} + T_3^{(n)}}{h^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_2^{(n+1)} - T_2^{(n)}}{\Delta t}$$

$$(3) \frac{T_2^{(n)} - 2T_3^{(n)} + T_4^{(n)}}{h^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_3^{(n+1)} - T_3^{(n)}}{\Delta t}$$

$$Fo < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha \Delta t}{h^2} < 1/2 \Rightarrow \frac{6.8 \times 10^{-7} \Delta t}{\left(\frac{16.6}{100}\right)^2} < 1/2 \Rightarrow \Delta t < 20000 \text{ sec}$$

$$(2) \frac{400 - 2T_2^{(n)} + T_3^{(n)}}{h^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_2^{(n+1)} - T_2^{(n)}}{\Delta t}$$

$$(3) \frac{T_2^{(n)} - 2T_3^{(n)} + 400}{h^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{T_3^{(n+1)} - T_3^{(n)}}{\Delta t}$$

انتقال حرارت تشعشعی:

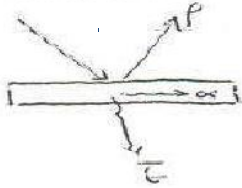
$$q_{1-2} = F_e \cdot F_{e-} \cdot \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

$\leftarrow$   $5.667 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$

هر جسم غریب صدوری دارد که با دما و طول موج تغییر می کند که ما ثابت فرض می کنیم.

با ساده سازی داریم:

$$G = 200 \text{ W/m}^2$$



$$q_{1-2} = \epsilon \sigma A (T_1^4 - T_2^4) \\ = 4 \sigma A T_1^3 \Delta T$$

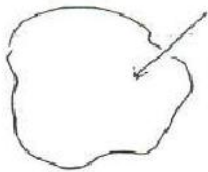
امواج نوری را نیز می توان از این نوع به حساب آورد. امواج تشعشعی طول موجی بین  $0.1 \text{ mm}$  تا  $100 \text{ mm}$  را دارند. امواج نوری جزئی از آن هاست. این امواج با سرعت نور حرکت می کنند.

جسم سیاه جسمی است که هر مقدار انرژی جذب می کند همان مقدار پخش می کند.

$$E_b = \sigma T^4 \rightarrow \text{W/m}^2$$

$\sigma$  ضریب استفان بولتزمن  
 توان پخش جسم سیاه  
 black

یک جسم با روزه یک جسم سیاه حساب می شود.



هر جسم یک ضریب صدور یا پخش تشعشعی

$$\epsilon(\lambda, T)$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha(\lambda, T) \text{ جذب} \\ \tau(\lambda, T) \text{ عبوری نماید} \\ \rho(\lambda, T) \text{ انعکاس} \end{array} \right\} \alpha + \tau + \rho = 1$$

فرض بر این است که این ضرایب مستقل از  $\lambda$  است این ضرایب به نوع سطح ما بستگی دارد.

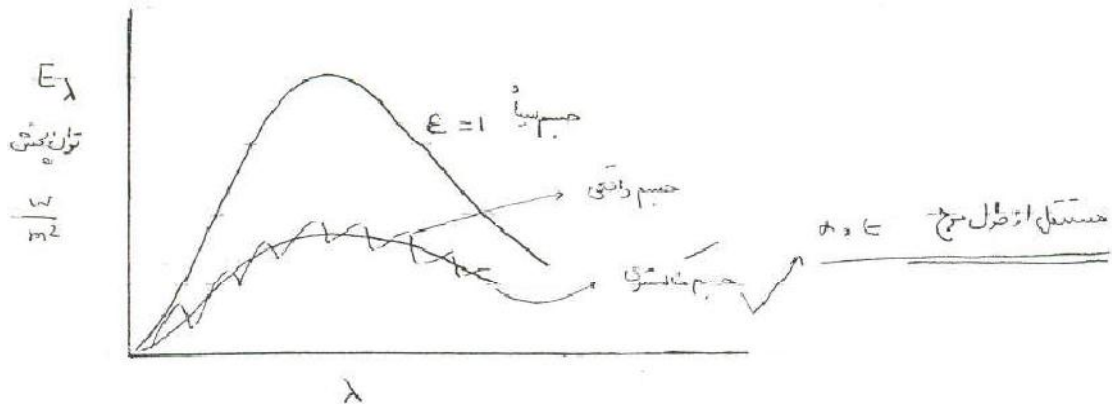
در انتقال ۱ فرضیات ما بر مبنای پخش آینده ای است.



کشنده



تابک



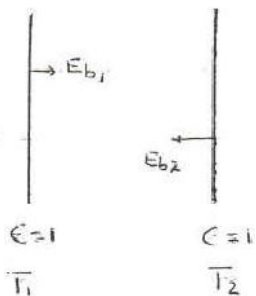
برای حس هایی که جسم سیاه محسوب نمی شود داریم:

$$E_{AI} = \epsilon \sigma T^4 = \epsilon E_b$$

$$\epsilon = 0.09$$

$$\rightarrow E_{AI} = 0.09 (5.669 \times 10^{-8}) (273 + 23)^4$$

مثال: دو صفحه سیاه موازی به سمت بی نهایت میل می کند طول در این حالت مهم نیست



$$q_{1-2} = (E_{b1} - E_{b2}) A$$

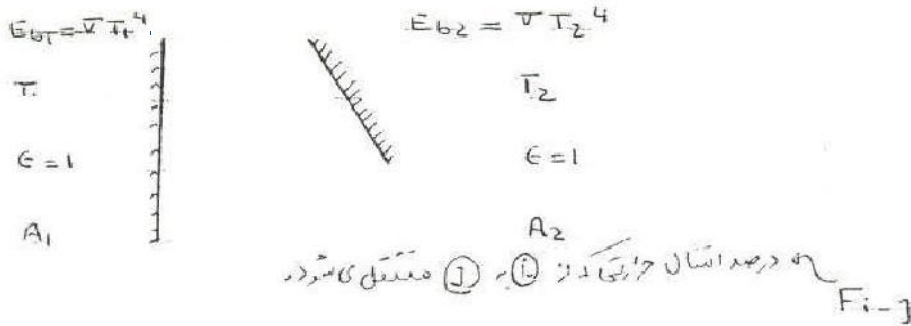
$$A = A_1 = A_2$$

$$q_{1-2} = E_{b1} A - E_{b2} A$$

$$\frac{q_{1-2}}{A} = \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

جسم ها هر دو بزرگ و موازی هم و هر دو سیاه هستند بنابراین نیاز به داشتن ضریب صدور و همنسه نیستیم.

در این حالت سطح ملایل تمامی سطح صفحه ی راست را نمی بیند بنابراین فاکتور دید مطرح می شود.



$$q_{1-2} = E_{b1} F_{1-2} A_1 - E_{b2} A_2 F_{2-1}$$

چون سطح ۱ می تواند تمام سطح ۲ را ببیند ولی لزومی ندارد که سطح ۲ تمام سطح ۱ را ببیند

$$q_{1-2} = \sigma A_1 \underline{F_{1-2}} T_1^4 - \sigma A_2 \underline{F_{2-1}} T_2^4$$

در بی نهایت دمای  $T_1$  و  $T_2$  به هم می رسد. فرضی است که برای فاکتور هندسی مطرح می شود چون در نهایت به تعادل ترمودینامیکی می رسد. در نهایت داریم:

خاصیت متقابل

$$\Rightarrow A_1 F_{1-2} = A_2 F_{2-1} \quad (1)$$

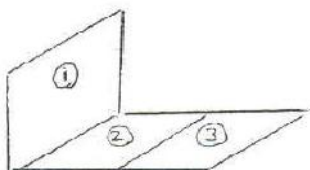
استان حرارتی سفر می شود

$$\longrightarrow q_{1-2} = A_1 F_{1-2} \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

خاصیت جمع بندی

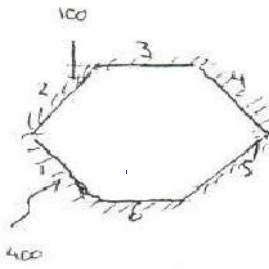
$$A_1 F_{1-2,3} = A_1 F_{1-2} + A_1 F_{1-3} \quad (2)$$

سطوح منحنی مقعر که خودشان را می بینند.

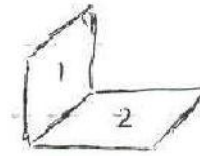
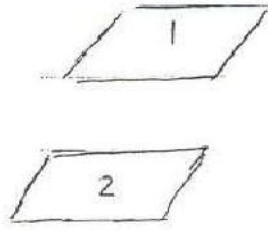
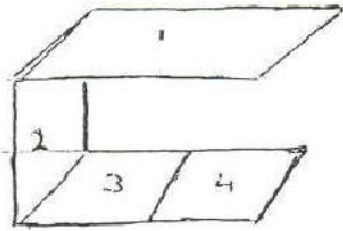


$$\sum_{j=1}^n F_{i,j} = 1 \text{ c.} \quad (3)$$

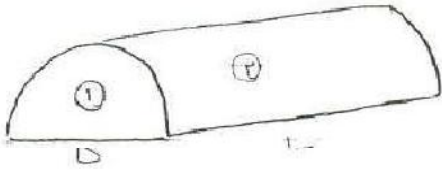
اجسامی که خودشان را نمی بینند.



$$F_{1-1} = F_{2-2} = F_{3-3} = 0$$



در این مدار برای محاسبه فاکتور دید باید از جدول های کتاب استفاده کرد.



$$F_{1-1} = 0.0$$

$$F_{2-2} = ? \text{ یا } F_{1-2} = ?$$

$$\text{یا } F_{2-1} = ?$$

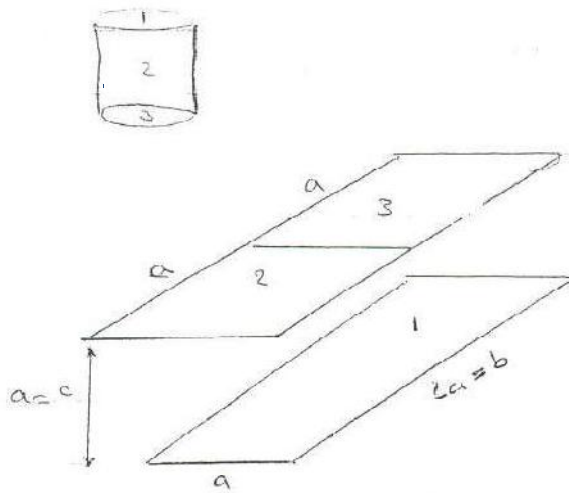
$$A_1 F_{1-2} = A_2 F_{2-1}$$

$$\sum_{j=1}^n F_{i,j} = 1.0 \Rightarrow F_{1,1} + F_{1,2} = 1.0 \Rightarrow F_{1,2} = 1.0$$

$$DL(1.0) = \frac{\pi DL}{2} F_{2-1} \Rightarrow F_{2-1} = \frac{2}{\pi}$$

$$F_{2-1} + F_{2-2} = 1.0 \Rightarrow \frac{2}{\pi} + F_{2-2} = 1.0 \Rightarrow F_{2-2} = 1 - \frac{2}{\pi}$$

مثال:



$$F_{1-2} = ?$$

$$A_2 = A_3 = \frac{1}{2} A_1$$

با استفاده از شکل

$$\beta = \frac{b}{c} = \frac{2a}{a} = 2 = \frac{Y}{D}$$

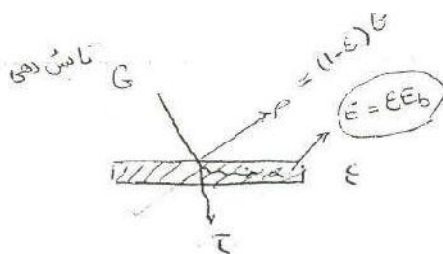
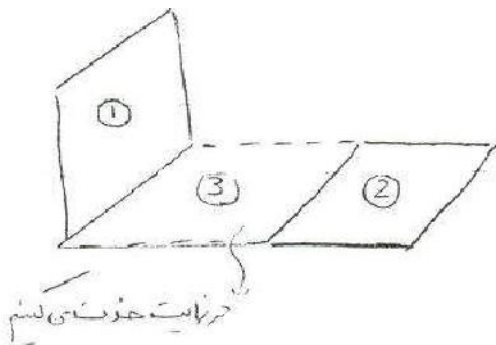
$$\gamma = \frac{a}{c} = \frac{a}{a} = 1 = \frac{X}{D}$$

$$F_{1-2,3} = 0.128 = F_{1-2} + F_{1-3}$$

$$F_{1-2,3} = 2 F_{1-2} \rightarrow F_{1-2} = \frac{0.128}{2} = 0.064$$

$$A_2 F_{2-1} = A_1 F_{1-2} \rightarrow \frac{1}{2} A_1 F_{2-1} = A_1 F_{1-2} \Rightarrow F_{2-1} =$$

$$F_{1-2,3} = F_{1-2} + F_{1-3}$$



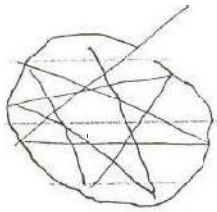
$$\alpha + \rho + \tau = 1.0$$

$$\alpha \approx \epsilon$$

$$\tau = 0.0$$

$$\alpha + \rho = 1.0 \Rightarrow \rho \approx 1 - \epsilon$$

مانند یک دیواره نازک



$\epsilon = *$  ( emissivity of the surface )

$J$  radiosity

برابری :

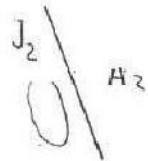
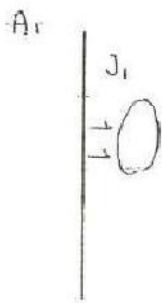
کل مساحتی که یک سطح را ترک می کند اگر  $\tau = 0.0$

$$J = \epsilon E_b + (1 - \epsilon) G$$

رنگ انرژی که سطح را ترک می کند ( فقط ناشی از تابش نیست )

$$\begin{aligned} \frac{q}{A} = J - G &= \epsilon E_b + (1 - \epsilon) G - G = \frac{\epsilon A}{1 - \epsilon} (E_b - J) \\ &= \frac{E_b - J}{\frac{1 - \epsilon}{\epsilon A}} \end{aligned}$$

مانند معادله
تفاوت بین سطح مستطقی و قضا  
است.

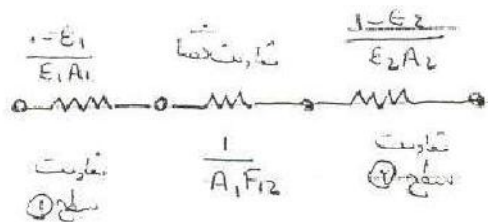
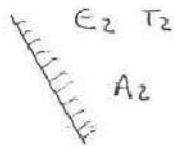


$$q_{1-2} = J_1 A_1 F_{1-2} = J_2 A_2 F_{2-1}$$

$$q_{1-2} = \frac{J_1 - J_2}{\frac{1}{A_1 F_{12}}}$$

معادله قضا

برای یک شبکه کلی بین دو سطح :



$$\textcircled{1} \quad q = \frac{\Delta E}{\Sigma R} = \frac{E_{b1} - E_{b2} = \sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1 A_1} + \frac{1}{A_1 F_{1-2}} + \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2 A_2}} = \frac{q_{1-2}}{A}$$

اگر دو سطح موازی باشند و تماما هم را ببینند:



$$A_1 = A_2 = A$$

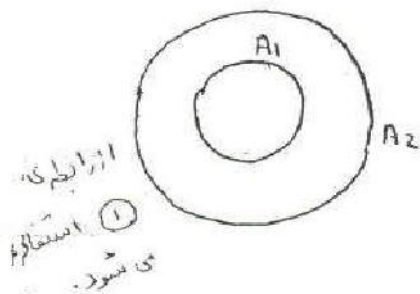
$$\Rightarrow F_{1-2} = 0 \textcircled{1}$$

$$q = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{A} \left[ \frac{1-\epsilon_1}{\epsilon_1} + \frac{1}{F_{1-2}} + \frac{1-\epsilon_2}{\epsilon_2} \right]} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$$

دروستی برزای

برای لوله هم صادق است ولی رابطه ی قبل در دو صفحه ی موازی اگر یکی از اجسام ما سیاه باشد در

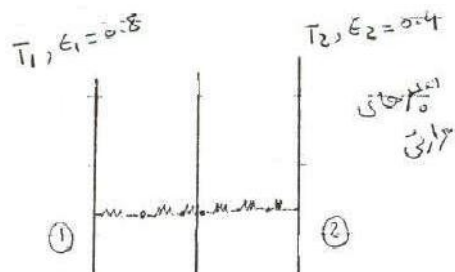
نتیجه:



$$\epsilon_2 = 1 \rightarrow q = \epsilon_1 A \sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

$$\text{if } A_2 \rightarrow \infty \rightarrow q = \epsilon_1 A \sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

$$\Rightarrow F_{1-2} = 1.0$$



$$\frac{q}{A} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{0.8} + \frac{1}{0.4} - 1}$$

$$= 0.3636 \sigma(T_1^4 - T_2^4)$$



حال یک صفحه الومینیومی بین این دو صفحه قرار می دهیم:

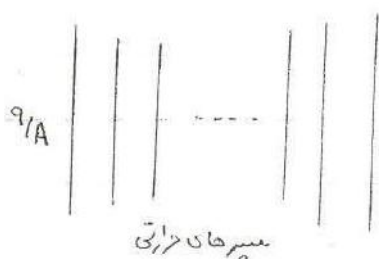
$$\frac{q}{A} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_{Al_1}} - 1\right) + \left(\frac{1}{\epsilon_{Al_2}} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1\right)} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{0.8} + \frac{1}{0.05} - 1 + \frac{1}{0.05} + \frac{1}{0.4} - 1}$$

$$= 0.0239 \sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

از تشعشع این مقدار کاسته می شود.

از تشعشع این مقدار کاسته می شود.

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{0.3636 - 0.0239}{0.3636} = 93.4\%$$



$$\left(\frac{q}{A}\right)_{\text{بسیار}} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{q}{A}\right)_{\text{بزرگ}}$$

مثال: یک جسم خاکستری  $T_1 = S = C$  و  $\epsilon_1 = 0.35$  و  $A_1 = 4 \text{ cm}^2$

است با  $T_2 = 100^\circ \text{C}$  و  $A_2 = 36 \text{ m}^2$  و  $\epsilon_2 = 0.75$  در آن صورت  $Q_{1-2} = ?$

$$\frac{1}{\hat{F}_{1-2}} = \frac{1}{\epsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1\right) \quad q_{1-2} = A_1 \hat{F}_{1-2} \sigma(T_1^4 - T_2^4)$$

$$\left(\frac{q}{A}\right)_{1-3} = \left(\frac{q}{A}\right)_{3-2} = \frac{q}{A} \Rightarrow \frac{\sigma(T_1^4 - T_3^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_3} - 1} = \frac{\sigma(T_3^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} = \frac{q}{A}$$

if  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 \Rightarrow \frac{q}{A} = \frac{1/2 \sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_3} - 1} = \frac{1/2 \sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$

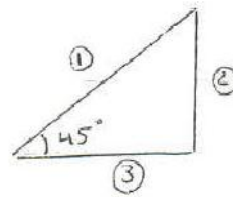
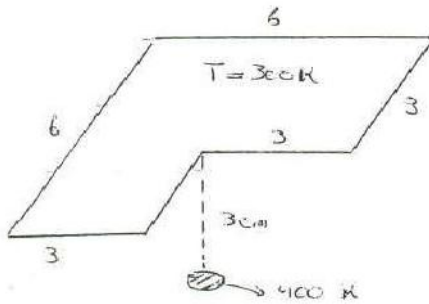
$$\Rightarrow \left(\frac{q}{A}\right)_{\text{بسیار}} = \frac{1}{2} \left(\frac{q}{A}\right)_{\text{بزرگ}} \Rightarrow \left(\frac{q}{A}\right)_{\text{بزرگ}} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} \Rightarrow \left(\frac{q}{A}\right)_{\text{بزرگ}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{0.9}} \left(\frac{q}{A}\right)_{\text{بسیار}}$$

حال به حل مثال قبل می پردازیم:

$$\frac{1}{F_{1-2}} = \frac{1}{0.25} + \frac{4}{3.6} \left( \frac{1}{0.75} - 1 \right) \Rightarrow \tilde{E} = 0.3455$$

$$\Rightarrow q_{1-2} = 4 (0.3455) (5.67 \times 10^{-8}) (773^4 - 373^4) = 26.4 \text{ kW}$$

مثال: هر دو جسم را سیاه در نظر بگیرید:



$$F_{2-1} = ?$$

$$\sum F_{ij} = 0 \Rightarrow F_{1-1} + F_{1-2} + F_{1-3} = 0 \Rightarrow F_{1-2} + F_{1-3} = 0$$

$$F_{2-1} + F_{2-2} + F_{2-3} = 0 \Rightarrow F_{2-1} \checkmark \Rightarrow A_2 F_{2-1} = A_1 F_{1-2} \checkmark$$

$$\Rightarrow F_{1-2} \checkmark \Rightarrow F_{1-3} \checkmark$$

$$\Rightarrow F_{3-1} \checkmark$$

### انتقال حرارت جابجایی: convection

جابجایی ← طبیعی-آزاد free convection (نیروی شناور)

← اجباری forced convection (اینرسی)

اجباری مانند کولر یا فن ها. انتقال حرارت در این جا بین سیال و دیواره است.

$$q = h A (T_s - T_\infty)$$

$$h \rightarrow 5 - 20 \quad \text{آزاد}$$

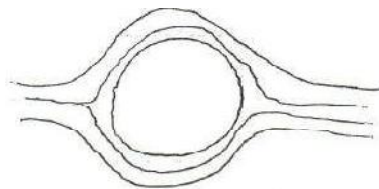
$$h \rightarrow 20 - 100000 \quad \text{اجباری}$$

برای لامپ هر دو نوع جابجایی وجود دارد برای بدن انسان در حالت نشستن یا راه رفتن مقاومت و قسمتی جابجایی اجباری و قسمتی طبیعی است.

سیال  $\rightarrow T_{\infty}$

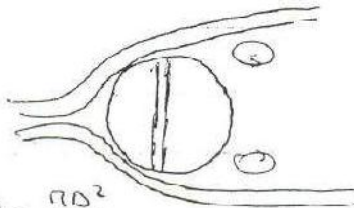
دیوار  $T_s$

جمع زدن  $h$  ها غیر قابل قبول است.



$$A = \pi r^2$$

$q_1$



$$A = \frac{\pi D^2}{4}$$

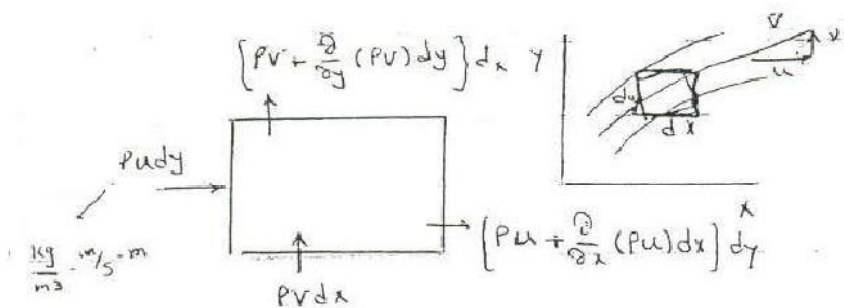
$q_2$

$$\Rightarrow q = q_1 + q_2$$

جابجایی

در لوله ها با وجود جریان اجباری یک جدایش رخ می دهد که باز هم نمی توان  $h$  ها را جمع کرد. در این جا  $h$  ها و هم مساحت ها تغییر کرده است. در  $h$  هندسه و اختلاف دما مهم است.

### پیوستگی جرم - مومنتوم - انرژی





حال می خواهیم معادلات را بی بعد کنیم:

$$u^* = \frac{u}{u_0} \rightarrow v^* = \frac{v}{u_0}, \quad x^* = \frac{x}{L}$$

$$y^* = \frac{y}{L}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

$$\rho (u^* u_0 \frac{\partial u^* u_0}{\partial x^* L} + v^* u_0 \frac{\partial u^* u_0}{\partial y^* L}) = \mu \frac{\partial^2 u^* u_0}{\partial (y^* L)^2} \quad \frac{\partial p}{\partial x} \approx 0$$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \left( \frac{\mu}{\rho u_0 L} \right) \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \rightarrow \frac{1}{Re}$$

$$u \sim u_0$$

$$y \sim \delta$$

در برینگی

$$\frac{u_\infty}{x} + \frac{v}{\delta} \Rightarrow u \sim \frac{u_\infty \delta}{x}$$

now mom. Eq  $\Rightarrow u_\infty \frac{u_\infty}{x} + \frac{u_\infty \delta}{x} \cdot \frac{u_\infty}{\delta} \sim \frac{\nu u_\infty}{\delta^2}$

$$\Rightarrow \delta^2 \sim \frac{\nu x}{u_\infty} \Rightarrow \delta \sim \frac{x}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\tau_p = \mu \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = C_x \rho \frac{u_\infty^2}{2} \Rightarrow C_x = \frac{2\nu}{u_\infty} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \Big|_{y=0}$$

$$\Rightarrow C_m, F = Bl - C_m \frac{\rho u_\infty^2}{2}$$

میزان معنی  
تولید معنی

friction coefficient

$$C_m = \frac{1}{L} \int_0^L c_x dx$$

حال می خواهیم برای انتقال حرارت این رابطه را به دست آوریم.

صافیت رسانایی

$$\frac{KA}{F} \frac{dT}{dy} \Big|_{y=0} = hA (T_w - T_\infty) \Rightarrow h = \frac{-k_F \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}}{T_w - T_\infty}$$

مربوط به رسانایی است

$$\rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho c_p v \frac{\partial T}{\partial y} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

فقط صورت نظر شود

2-D, incompressible, S.S, غیر چسبناک

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

موردی برای شما باشد می توان از آن صورت نظر کرد

نیروی کششی، کشش برقی، ضریب اصطکاک

$$\delta \sim 1 Re^{-1/2} \quad \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad C_f \Rightarrow \bar{C}_f, F$$

پیچیدگی

از بی بعد سازی معادله داریم:

$$\frac{T^*}{T_\infty} = \frac{T}{T_\infty}$$

$$\begin{aligned}
 \rho C_p (u^* u_{\infty} \frac{\partial T^*}{\partial x^* L} + v^* u_{\infty} \frac{\partial T^*}{\partial y^* L}) &= k \frac{\partial^2 T^*}{\partial (y^* L)^2} \\
 u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} &= \frac{k}{\rho C_p u_{\infty} L} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \\
 \frac{k}{\rho C_p} &= \alpha \quad \frac{k \nu}{\rho C_p u_{\infty} L} = \frac{\alpha}{\nu} \cdot \frac{1}{Re} \quad \frac{\alpha}{\nu} = \frac{1}{Pr}
 \end{aligned}$$

پراش برای مایعات بالاست و برای گازها تقریباً ۱ یا ۰.۶ است برای مایعات فازی کوچک است.

چون سرعت سیال نزدیک به این نقطه ثابت است

$$h = \frac{-k_f \frac{\partial T}{\partial y} |_{y=0}}{\Delta T} = Nu = \frac{hL}{k_f} \quad \text{نوسلت} \quad \text{Nusselt}$$

تغییرات در سیال در برهه

$$h = \frac{-k_s \frac{\partial T}{\partial x} |_{x=0}}{\Delta T} = Bi = \frac{hL}{k_s} \quad \text{برای} \quad \text{solid}$$

$$T = f(Re, Pr) \quad h = f(Re, Pr) \Rightarrow Nu = f(Re, Pr)$$

این فرض برای جریان اجباری است.

در جایجایی های اجباری عدد Nu معمولاً به این شکل است.

$$Nu = C Re^m Pr^n$$

در همه حالات می توان h را به  $C_F = C_F$  ضرایب به دست آورد.

$$h \rightarrow \delta, C_f, F$$

می توان ضخامت لایه مرزی حرارتی  $\delta_T$  را از روی معادله ی انرژی به دست آورد.

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \sim \frac{\delta}{\delta_T} \longrightarrow Pr \approx 1 \Rightarrow \delta \sim \delta_T$$

دو پروفیل مثل ہم حرکت می کنند.

پارشیال  
 $\frac{\partial c}{\partial t}$   $\rightarrow$   $\frac{\Delta c}{\Delta t}$  partial Time derivative

کلی  
 $\frac{dc}{dt}$  Total Time derivative

کالیبریشن  
 $\frac{Dc}{Dt}$  Substantial Time derivative

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial c}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$\frac{Dc}{Dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + u_x \frac{\partial c}{\partial x} + u_y \frac{\partial c}{\partial y} + u_z \frac{\partial c}{\partial z}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u_i \frac{\partial c}{\partial x_i} = \frac{\partial c}{\partial t} + u \cdot \nabla c$$

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \eta \rho dV + \int_{cs} \eta \rho v \cdot dA$$

$$\eta = 1 \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho v \cdot dA = 0 \Rightarrow m_{in} = m_{out}$$



$$-P u_1 A_1 + 0 + P u_2 A_2 = 0$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + P \cdot \nabla \phi = S \quad \text{Source Term}$$

$$\phi = P, \quad S = 0 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial t} + P \cdot \nabla P = 0$$



2-D, incompressible, S.S, newtonian

$$\rho \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \rightarrow \rho \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$



S برای حالت جریان است.

حال در مورد سرعت داریم:

$$\tau = \rho \bar{v}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot \rho u \mathbf{v} = S \rightarrow \rho, \tau, F_B, F_G$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot \rho v \mathbf{v} = S$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \omega \mathbf{v} = S$$

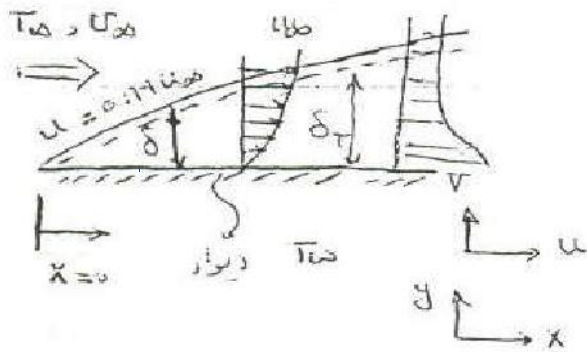
$$\rho = \text{const}, \text{ S.S}, \mu = \text{const}$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot u \mathbf{v} \right) = - \underbrace{\nabla p}_{\text{فشار}} + \underbrace{\mu \nabla^2 \mathbf{v}}_{\text{شیب لزجت}} + \underbrace{\rho \mathbf{g}}_{\text{شیب دبی}}$$

از روی واحد این عبارات اعمال می شود.

2-D, incompressible, newtonian, S.S.

$$\text{no pressure gradient} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$



no-slip condition

$$u_w = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{1}{Re} \Rightarrow \delta \quad Nu = \frac{hL}{k_f} \quad Re = \frac{\rho V L}{\mu}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{1}{Re \cdot Pr} \Rightarrow \delta_t \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

اگر  $\nu = \alpha \Rightarrow \delta = \delta_t$

$$Pr \left( u_\infty \frac{T_\infty}{x} + \frac{u_\infty \delta_t}{x} \frac{T_\infty}{\delta_t} \right) = \frac{k T_\infty}{\delta_t^2} \Rightarrow \delta_t^2 = \frac{k \nu}{Re u_\infty x Pr} = \frac{5x}{Re^{1/2} \cdot Pr^{1/3}}$$

$$Pr \approx 1.0 \rightarrow 0.7$$

$Pr \gg 1.0$  مایعات روغن آب

$Pr \ll 1.0$  مایعات فلزی

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \approx \frac{\delta}{\delta_t}$$

$$\Rightarrow \delta \rightarrow \tau_w = \mu \frac{du}{dy} = C_f \frac{\rho V^2}{2} \Rightarrow \frac{0.664}{Re^{1/2}} = C_f \Rightarrow \bar{C}_f = \frac{1.332}{Re^{1/2}} \quad 5.6$$

$$\delta_t = \frac{5x}{Re^{1/2} \cdot Pr^{1/3}}$$

معمولاً در این مسائل به کار رفتن باید با دقت بسیار

$$T = f(Re, Pr)$$

$$h = f(Re, Pr)$$

$$Nu = f(Re, Pr)$$

$$\Rightarrow Nu = 0.332 Re^{1/2} Pr^{1/3}$$

$$h_x = \frac{k}{x} (0.332) Re^{1/2} Pr^{1/3}$$

این روابط برای عدد رینولدز درست است.

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx \Rightarrow Nu = 0.664 Re^{1/2} Pr^{1/3}$$

خواص فیزیکی ما در دمای FILM محاسبه می شود.

$$\frac{T_w + T_\infty}{2} = T_f$$

H باید حساب شود چون معمولاً نقطه ای نمی توان استفاده کرد. در جدول کتاب فشار اتمسفر است ولی اگر بخواهیم فشار عوض شود باید P را قانون گازهای کامل استفاده کرد فقط P هست که عوض می شود و بقیه عوض نمی شود.

اعداد NU و IRE و PR را داریم:

$$\tau = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$$

رابطه، ارتباط اصطحکاک با ضریب جابجایی ←

$$\tau = c_x \frac{\rho u^2}{2} \Rightarrow \frac{c_x}{2} = 0.332 Re_x^{-1/2}$$

$$Nu_x = 0.332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3}$$

عدد استانتون

$$\Rightarrow St = \frac{Nu}{Re \cdot Pr}$$

نسبت همرفتی به جذب و ذخیره انرژی

$$St = \frac{hL/k}{\frac{\rho V L}{\mu} \cdot \frac{V}{L}} = \frac{h ADT}{\underbrace{\rho C u_\infty}_{\dot{m}} ADT}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = h/\rho c \\ \nu = \mu/\rho \end{array} \right. \quad St_x = Pr^{2/3} = \frac{c_x}{2}$$

این معادله به نام رینولدز کولبورن معروف است که با اندازه گیری کشش سطحی می توان ضریب جابجایی را مشخص کرد.

$$Nu = \frac{hL}{k_f} \quad 1Re = \frac{\rho V L}{\mu} \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad St = \frac{Nu}{1Re \cdot Pr}$$

تولید  
 $Pc = 1Re \cdot Pr$

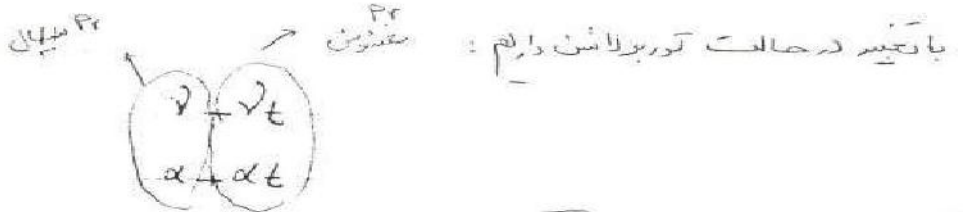
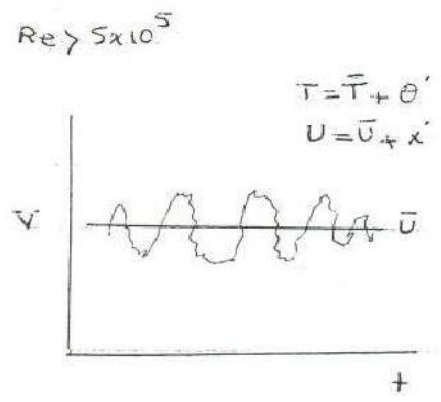
تمامی روابط بالا در جابجایی اجباری است.

حال می خواهیم در مورد جریان مغشوش بحث کنیم.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\rho(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}) = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$



کار خاص هندی پرست می آید.

توربولانس

$$Nu = 0.0296 Re_x^{1/5} Pr^{1/3}$$

Turb

$$\bar{Nu} \approx Nu_x$$

در سیستم برج های خنک کن قطرات آب پایین می ریزد و جریان هوا داریم که با هم انتقال حرارت دارند.

$$St = \frac{Cf/2}{1 + 2.1 Re^{-0.1} (Pr - 1)}$$

$$St Pr^{2/3} = \frac{Cf}{8}$$

برای جریان دوگانه دوار

تغییرات دما در طول لوله ثابت فرض شده

$$q = u_i A_i \Delta T = \dot{m} c_p \Delta T$$

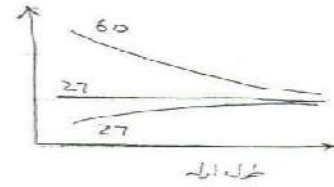
$$q = 8.0 \times (\pi) \left( \frac{2.5}{100} \right) (1.5) (60 - 27)$$

$$= 0.1 (4180) (60 - T_{\text{out}})$$

$$T_{\text{out}} = 59.21 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$Nu = C Re^m Pr^n$$

$Pr \ll 1.0 \quad (Re Pr)^n = Pe^n$

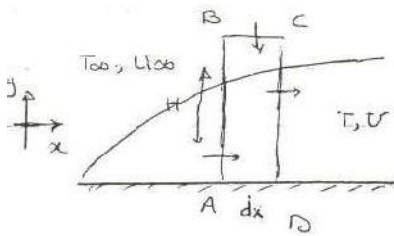


$$\Rightarrow T = f(Re, Pr)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ضریب انتقال حرارت} \\ \text{سرعت} \\ \text{انرژی} \end{array} \right\} \begin{array}{l} U \\ T \end{array}$$

$$\Rightarrow h = \frac{-k_f \frac{\partial T}{\partial y} |_{y=0}}{\Delta T}$$

$$h = f(Re, Pr)$$



if  $Pr = 1$  لایه مرزی حرارتی = لایه مرزی سرعت

$$\frac{\partial P}{\partial x} \approx 0$$

$$2-D$$

$$S.S$$

incompressible -  $\rho = \text{const}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$W = 1.0$$

$$\dot{m}_{AB} = - \left[ \int_0^H \rho u dy \right] W$$

$$\dot{m}_{BC} = \left[ \int_0^H \rho u dy + \left( \frac{\partial}{\partial x} \int_0^H \rho u dy \right) dx \right] W$$

$$\dot{m}_{BC} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_0^H \rho u dy \right] dx W$$

حال همین کار را برای انرژی انجام می دهیم

Energy flow in

$$\dot{E}_{AB} = \int_0^H c_p u T dy$$

$$e = \underline{h} = c_p T$$

Energy flow out

$$\dot{E}_{CD} = \int_0^H c_p u T dy + \frac{d}{dx} \left[ \int_0^H c_p u T dy \right] dx$$

$$\dot{E}_{BC} = \frac{d}{dx} \left[ \int_0^H c_p u T_{\infty} dy \right] dx$$

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_0^H c_p u T dy \right] dx - \frac{d}{dx} \left[ \int_0^H c_p u T_{\infty} dy \right] dx =$$

$$- \frac{d}{dx} \left[ \int_0^H c_p u (T - T_{\infty}) dy \right] dx = S$$

$$S_t \Rightarrow T_{\infty} - T \Rightarrow H = \delta_t \Rightarrow - \frac{d}{dx} \left[ \int_0^{\delta_t} c_p u (T - T_{\infty}) dy \right] dx$$

تولید، تخریب یا کسب

$$= -k_f \frac{dT}{dy} \Big|_{y=0}$$

این پروفیل دما و سرعت حدس زده می شود راجع به شرد

$$u = u_{\infty} \quad \text{for all } y \quad \frac{T - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}} = \frac{y}{\delta} \quad \delta \text{ لایه حرارتی خالص}$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} c_p u_{\infty} (T - T_{\infty}) dy = -k_f \frac{dT}{dy} \Big|_{y=0}$$

با استفاده از معادله بالا داریم

$$\int_0^{\delta} \frac{c_p u_{\infty} (T_w - T_{\infty})}{\delta} y \cdot dy = \frac{c_p u_{\infty} (T_w - T_{\infty}) \delta}{2}$$

$$k \frac{dT}{dy} \Big|_{y=0} = k \frac{T_w - T_{\infty}}{\delta} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left[ \frac{c_p u_{\infty} (T_w - T_{\infty}) \delta}{2} \right] = k \frac{T_w - T_{\infty}}{\delta}$$

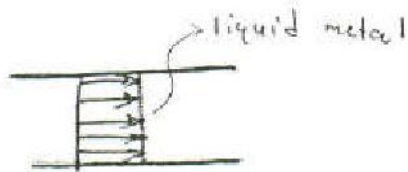
$$\delta d\delta = \frac{2K}{c\rho U_{\infty}} dx \Rightarrow \delta^2 = \frac{4K}{c\rho U_{\infty}} x + C \Rightarrow \delta = 0 \text{ @ } x=0 \Rightarrow C=0$$

$$\Rightarrow \delta^2 = 4x^2 \frac{K}{\rho c} \cdot \frac{\rho}{\mu U_{\infty} x} = \frac{4x^2}{Re Pr} \Rightarrow \delta = \frac{2x}{(Re Pr)^{1/2}}$$

$$h_x(T_w - T_{\infty}) = \frac{K(T_w - T_{\infty})}{2x} (Pe Re)^{0.5}$$

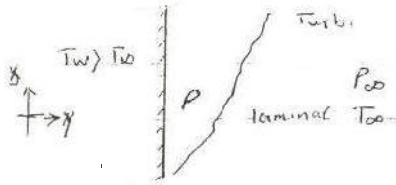
$$\frac{h_x}{K} = Nu = 0.5 (Re Pr)^{1/2} \Rightarrow \boxed{Nu = 0.5 Pe^{1/2}}$$

مساله تقريبا برای حالت روغن کاری است، تقريبا برای سیال فلزی است. در آخر برای محاسبه  $h$  جایجایی با هدایت یکسان قرار می دهیم.



### جایجایی آزاد:

ممکن است که نیروی اینرسی داشته باشیم ولی به گونه ای است که نیروی شناوری قالب بر اینرسی است. بی بعد کردن راه به دست آورید؟



2-D - مستوی - قائم - قائم  
 قائم - قائم - قائم - قائم

$$\beta = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{V_{\infty}} \frac{V - V_{\infty}}{T - T_{\infty}} = \frac{\rho_{\infty} - \rho}{\rho (T - T_{\infty})}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} - \rho g + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = - \rho g \quad \text{که گرافیت}$$

$$Gr = \frac{g \beta (T_w - T_{\infty}) x^3}{\nu^2}$$

Grashof ← از این جدول درست می‌شود

باید جدول درست می‌شود

$$\beta = \frac{1}{T_{\infty}} \frac{\Delta T}{T_{\infty}}$$

$$\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \rightarrow \frac{1}{Pr Re}$$

$$Nu = f(Gr, Re, Pr) \quad \text{کتاب}$$

Re → عدد رینولدز



$$Nu = f(Gr, Pr) \rightarrow \frac{\text{ضریب انتقال حرارت}}{\text{ضریب هدایت مایه}} \times \text{ضریب حرارتی}$$

$$\frac{Gr}{Re^2} = \frac{\text{نیروی شناوری} \times \text{نیروی چسبندگی}}{(\text{نیروی اینرسی})^2}$$

$$Nu = C (Gr Pr)^n$$

$$= C Ra^n$$

در جدول دینولدورها  
 $n = 1/3$  توربولانت  
 $n = 1/4$  آرام

تعریف خاصی ندارد مگر  $(Re)$

$$Ra = Gr \cdot Pr$$

در تمام بودن جریان آزاد عدد رایلی است که باید در صفحات کت  $Ra > 10^9$  باشد.

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2} \begin{cases} \ll 1 & \text{اجباری} \\ \approx 1 & \text{Mixed (0.8 - 1.5) آزاد-اجباری} \\ \gg 1 & \text{آزاد} \end{cases}$$

لامپ هر دو است

Gr نیروی شناوری به لزجت است. ولی در واقع هر سه نیروی شناوری لزجت و اینرسی است.

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2} \rightarrow \text{Richardson number}$$

که در ژرفای های زمانی

$$q = hA\Delta T$$

رابطه انرژی ها است که ادهی شود

h در جریان توربولانس ارتباطی به طول ندارد

مثال: لامپی که قبلاً حل شده است.

40 watt

$T_b = 127^\circ\text{C}$

$T_\infty = 27^\circ\text{C}$

$D = 50\text{ mm}$

% lost by convection

Free?

سؤال: لامپی که قبلاً حل شده است.

$$Gr = \frac{\beta \Delta T (50/1000)^3}{\nu^2} =$$

$$\frac{9.8 \left( \frac{1}{77+273} \right) (100) \left( \frac{50}{1000} \right)^3}{(2.07 \times 10^{-5})^2} \approx 8.1 \times 10^5$$

$\beta$  باید حتماً کلین یا ریلین باشد

$$\frac{Gr}{Re^2} = \frac{8.1 \times 10^5}{(721.5)^2} = 1.55$$

آزاد - اجباری

همان  
آزاد

$$Nu = 2 + 0.43 (Gr Pr)^{1/4}$$

در این حالت باید از معادله  $Nu$  بزرگتر از 2

است

$$Nu = 2 + 0.43 (8.1 \times 10^5 \times 0.7)^{1/4}$$

$Pr = 0.7$  است

$$= 13.8$$

$$\frac{hD}{k_f} = 13.8 \Rightarrow h_{\text{آزاد}} = \frac{13.8 (0.028)}{\frac{50}{1000}} = 7.73 \text{ W/m}^2\text{C}$$

$$q = hA\Delta T = 7.73 \times \pi \left( \frac{50}{100} \right)^2 (100) = 6.07 \text{ W}$$

$$\text{توضیح: } 4\pi r^2 = A \text{ آزاد} \quad (*)$$

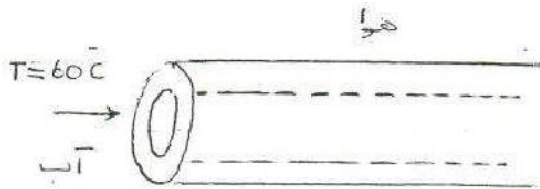
در زیر  
آزاد

$$\text{lost} = \frac{6}{40} = 15\%$$

از تست معادله سیم لایه سبک تر شد و فقط باید در نظر

گرفته شده است. 20% تست 6.0% اجباری

طراحی مبدل ها:



$$D_i = 2.5 \text{ cm}$$

$$D_o = 3 \text{ cm}$$

$$k = 17 \text{ Steel}$$

$$V_{cp} = 3 \text{ m/s}$$

$$U_{\infty} = 0.3 \text{ m/s}$$

$$T_{\infty} = 27^{\circ}\text{C}$$

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{1000 (3) (2.5/100)}{4.71 \times 10^{-4}}$$

$$= 1.6 \times 10^5 \quad \text{کورتولانت}$$

$$Nu = 0.023 Re^{4/5} Pr^m = 0.023 (1.6 \times 10^5)^{4/5} (3)^{0.3} = 465.76$$

$$h_i = \frac{0.659 (465.76)}{0.025} = 60.92 \times 10^3 \approx 1.2 \times 10^4 \quad \text{آب جاری است}$$

$$Gr = \frac{9.8 \left( \frac{1}{27+273} \right) (60-27) \left( \frac{3}{100} \right)^3}{(15.7 \times 10^{-6})^2} = 1.18 \times 10^5 \quad \begin{array}{l} \text{چون سرعت سیال بالا است} \\ \text{دیفرانسیل دما سه است} \end{array}$$

دمای سطح لوله ها دائم در حال تغییر است باید تخمین بزنیم ابتدا فرض می کنیم دمای سطح ما ۶۰ درجه باشد. باید سعی و خطا شود.

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{(0.3) \left( \frac{3}{100} \right)}{15.7 \times 10^{-6}} = 573.2$$

$$\Rightarrow \frac{Gr}{Re^2} = \frac{1.18 \times 10^5}{(573.2)^2} = 0.34 \quad \text{اجباری}$$

$$Nu = C Re^n = 0.615 (573.2)^{0.466} = 11.9$$

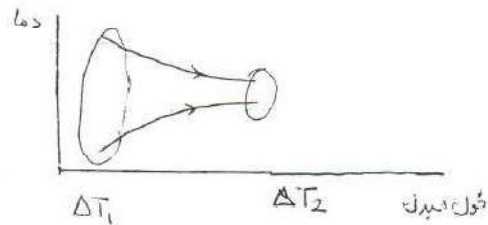
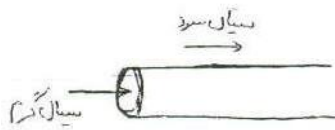
$$h = \frac{11.9 (0.03)}{0.03} = 11.9$$

$$U_o = \frac{1}{\frac{1}{h_i} + \frac{r_i \ln(r_o/r_i)}{k} + \frac{r_i}{r_o} \frac{1}{h_o}} = \frac{1}{\frac{1}{12000} + \frac{0.025 \ln(3/2.5)}{2(1.7)} + \frac{2.5}{3} \cdot \frac{1}{11.9}}$$

$$= 14.6$$

$$q = U_i A_i \Delta T = 14.6 (\pi) \left( \frac{2.5}{100} \right) L (60 - 27) = m C_p \Delta T$$

تأثیر ثابت بودن دمای 60 مشخص دارد.



از روش های مختلف استفاده می کنند که این ثابت بودن دما را در نظر بگیرند.

روش متوسط دما لگاریتمی LMTD

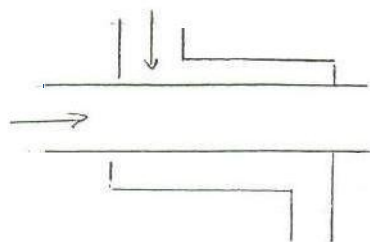
E-NTU

$$q = UA F \Delta T_{\logarithmic}$$

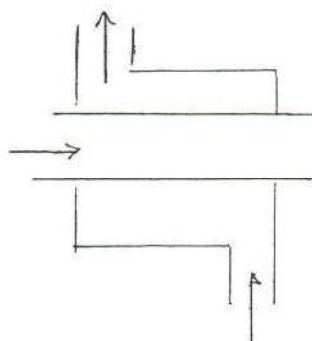
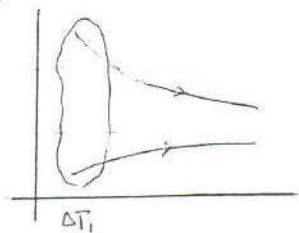
(بتعداد) تصحیح - فاکتور

$$F = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}}$$

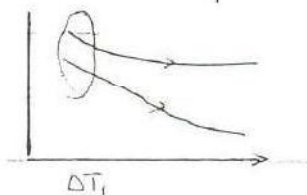
$$\Delta T_{L_{eff}} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}}$$



مستوی-موزون



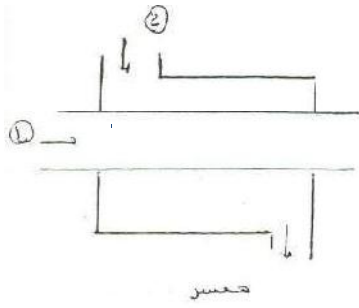
غیرمستوی



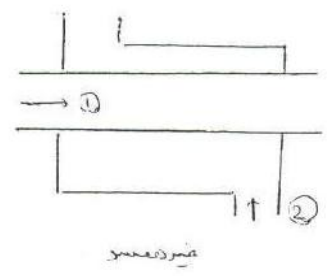
$$U_i A_i F \Delta T_{L_{eff}} = \dot{m} C_p (60 - T_{ow})$$

$$(19.) \quad A_i \cdot F \cdot \frac{(60-27) - (T_{ow}-27)}{\ln \frac{60-27}{T_{ow}-27}} = F A_i U_i C_p (60 - T_{ow})$$

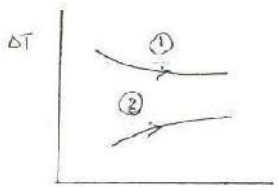
طراحی مبدل ها:



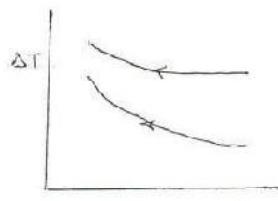
مقارن



مقارن



مقارن

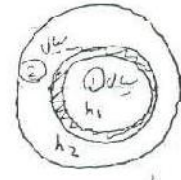


مقارن

1- روش LMTD

2- روش NTU

شیرین کننده  
 $q = UAF\Delta T_{LM}$



$$U_i = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}}{k_1} + \frac{r_2}{h_2}}$$

اثبات  $\Delta T_{log}$

$$dq = \dot{m}_c c_c dT_c = -\dot{m}_h c_h dT_h$$

$$\int_0^L d(T_h - T_c) = -dq \left( \frac{1}{\dot{m}_h c_h} + \frac{1}{\dot{m}_c c_c} \right)$$

$$\Rightarrow \int \frac{d(T_h - T_c)}{T_h - T_c} = - \int U \left( \frac{1}{\dot{m}_h c_h} + \frac{1}{\dot{m}_c c_c} \right) dA$$

$$\Rightarrow \ln \frac{T_{h2} - T_{c2}}{T_{h1} - T_{c2}} = -UA \left( \frac{1}{\dot{m}_h c_h} + \frac{1}{\dot{m}_c c_c} \right)$$

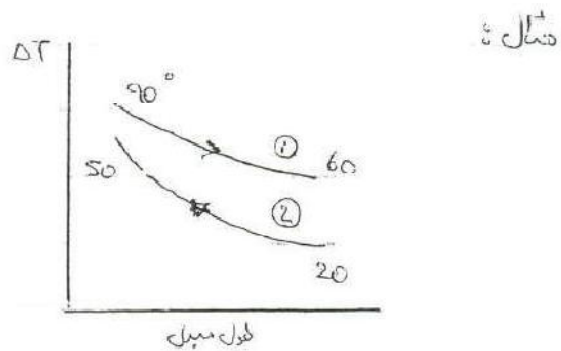
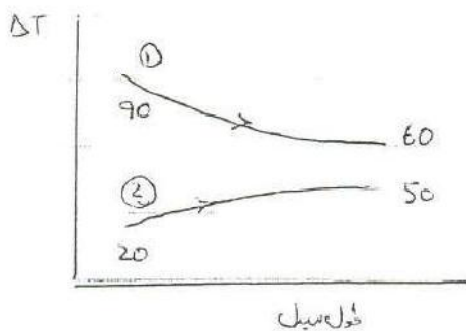
$$q = \dot{m}_h c_h \Delta T = \dot{m}_h c_h (T_{h2} - T_{h1})$$

$$= \dot{m}_c c_c (T_{c2} - T_{c1})$$

$$\Delta T_{lm} = \frac{(T_{h1} - T_{c2}) - (T_{h2} - T_{c1})}{\ln \frac{T_{h1} - T_{c2}}{T_{h2} - T_{c1}}} = \frac{\Delta T_{ سرد } - \Delta T_{ گرمی }}{\ln \frac{\Delta T_{ سرد }}{\Delta T_{ گرمی }}}$$

اگر دماها به صورتی بودند که نزدیک هم بودند و جواب  $\div$  شد باید از رابطه ی زیر استفاده کنیم.

$$\Delta T_{\text{arithmetic}} = \frac{\Delta T_{ سرد } + \Delta T_{ گرمی }}{2}$$



$$Q = 300000 \text{ W}$$

$$U = 300 \text{ W/m}^2\text{C}$$

$$A = ?$$

$$Q = U A F \Delta T_{lm}$$

$$A = ? \quad F = 1.05$$

در مورد همسوز غیر همسو  
زمانی که دماها به یکدیگر نزدیک شوند

$$\Delta T_{\log} = \frac{(90-20) - (60-50)}{\ln \frac{90-20}{60-50}} = 30.8^{\circ}\text{C}$$

$$\Delta T_{\log} = \frac{(90-50) - (60-20)}{\ln \frac{90-20}{60-50}}$$

چون که اختلاف دما 40 است لذا برای غیر همسر داریم:

$$\Delta T_{\min} = 40^{\circ}\text{C} \quad \text{غیر همسر}$$

حال A را محاسبه کرده و هر کدام را که کمتر است چون مواد کمتری مصرف می شود لذا از مبدل غیر همسر استفاده می کنیم.

چون در روش اول نیاز به هر سه دما است و دمای چهارم بدست می آید لذا داشتن این دما ها مشکل است به همین دلیل از روش E-NTU استفاده می شود.

$$\epsilon \rightarrow \text{ضریب موثر بودن} = \frac{q_{\text{واقعی}}}{q_{\text{max}}}$$

$$\dot{m} c_p_{\text{سرد}} = C_{\text{①}}$$

$$\dot{m} c_p_{\text{گرم}} = C_{\text{②}}$$

در این روش دبی ها و دمای ورودی را به ما می دهند. از دو مقدار C بالا یکی کمتر است و min و max در این جا تعریف می شود.

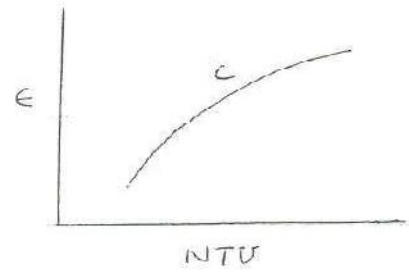
$$C = \frac{C_{\min}}{C_{\max}}$$

بر این اساس E تعریف می شود:



$$\epsilon = \frac{\dot{m}c_p)_1 \Delta T_1}{C_{\min} (\Delta T_{\max})} = \frac{\dot{m}c_p)_2 \Delta T_2}{C_{\min} (\Delta T_{\max})}$$

NTU number of Transfer unit =  $\frac{AU}{C_{\min}}$   
 تعداد واحدهای انتقال حرارت



مثال:

water	$\dot{m} = 0.05 \text{ kg/s}$	$T_i = 400 \text{ K}$	$T_o = 330 \text{ K}$
air	$\dot{m} = 0.75 \text{ kg/s}$	$T_i = 300 \text{ K}$	
	$U = 200 \text{ W/m}^2\text{-K}$	$A = ?$	

۱- مبدل cross-flow دو سیال نیم‌میخته اند (unmixed)

۲- مبدل لوله ای غیر همسر

$$LMTD \rightarrow q = UAF\Delta T_m \Rightarrow q = \dot{m}c_p\Delta T)_{air} = 0.05(4180)(400-330)$$

$$q = 14630$$

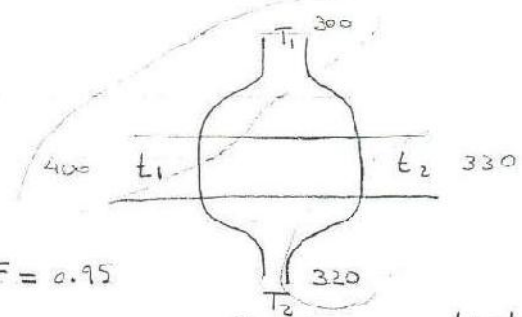
$$14630 = \dot{Q} = \dot{m}c_p\Delta T)_{water} = 0.75(1000)(T_{ao} - 300) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{ao} = 320 \text{ K}$$

$$\left\{ \begin{aligned} R &= \frac{300-320}{330-400} = 0.286 \\ P &= \frac{330-400}{300-400} = 0.7 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow F = 0.95$$

$$R = \frac{T_1 - T_2}{t_2 - t_1}, \quad P = \frac{t_2 - t_1}{T_1 - t_1}$$



$$14630 = 200(0.95)(A)(39.71)$$

(شكل 10-10)

$$\Delta T_{lm} = \frac{(400-300) - (330-320)}{1.4 \frac{400-300}{330-320}} = 39.71 \text{ K}$$

$$\Rightarrow A = 1.9 \text{ m}^2$$

نوع جريان	LMTD A	E-NTU
cross flow	1.9	1.81
غير متساوي الجريان	1.8	1.4
متساوي الجريان		1.67

E-NTU

$$\dot{m}c_p)_{water} = (0.05)(4180) = 209 = C_{min} = \dot{m}c_p)_{air} = (0.75)(1000) = 750 = C_{max}$$

$$C = \frac{209}{750} = 0.28$$

$$NTU = \frac{AU}{C_{min}} = ?$$

$$\Rightarrow 1.75$$

$$\epsilon = \frac{I_{\text{واقعی}}}{I_{\text{max}}} = \frac{(400 - 330)}{400 - 300} = 0.7$$

املاک مورد نیاز max در روزی که آلودگی در آن کمتر خواهد بود  
همین مسئله را حل می‌کنیم آن حالت است.

$$1.75 = \frac{A(200)}{209} \Rightarrow A = 1.81$$

$$\text{NTU غیر همبسته} = 1.3 \Rightarrow 1.3 = \frac{A(200)}{209} \Rightarrow A = 1.4$$

(10-13)

در صورت سعی و خطا بهتر است از جداول (۳ ۱۰) و (۴ ۱۰) استفاده شود

$$\left[ 1.8 \text{ m}^2 \right] \leftarrow \text{به تناسبتی دارد}$$

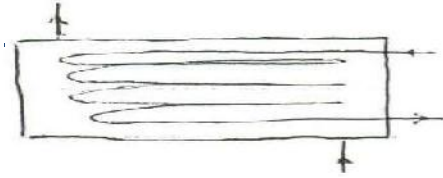
$$\text{NTU} = 1.8 \Rightarrow \pi \left( \frac{2.5}{100} \right) L = 1.8 \Rightarrow L = 23 \text{ m}$$

و غیر منطقی برای توسعه است.

تجزئہ کر لیا گیا ہے

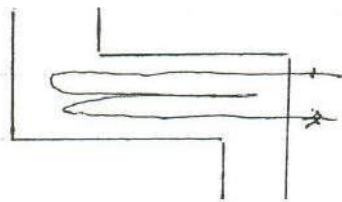
$$0.517 \left( \frac{2.5}{100} \right) n = 1.9 \implies n = 50$$

ہر ایک کو لیا گیا ہے



$$NTU = 1.6 \implies \frac{A(200)}{204} = 1.6 \implies A = 1.67$$

$$0.5 \pi \left( \frac{2.5}{100} \right) n = 1.67 \implies n =$$



مبادلہ پر مشتمل

$$A = 10 \text{ m}^2$$

① To heat water

$$T_{c, in} = 15^\circ \text{C}$$

$$T_{c, out} = ?$$

$$\dot{m}_c = 2 \text{ kg/s}$$

چونکہ ہمیں پتہ نہیں ہے کہ کون سا سیڑھی ہے؛  $\epsilon \cdot NTU$ ۔  
اس لیے اسے استعمال کریں:

② ایک لیٹر:  $c_p = 2600 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$

$$T_{h, in} = 85^\circ \text{C}$$

$$T_{h, out} = ?$$

$$\dot{m}_h = 1 \text{ kg/s}$$

$$U = 500 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$$

$$\dot{m}_h c_p = 1(2600) = 2600 \quad C_{min}$$

$$\dot{m}_c c_p = 2(4180) = 8360 \quad C_{max}$$

$$C = \frac{C_{min}}{C_{max}} = \frac{2600}{8360} = 0.31$$

$$\implies \epsilon = 0.75$$

transfer of heat

$$NTU = \frac{AU}{C_{min}} = \frac{10(500)}{2600} = 1.9$$

$$q_{max} = C_{min} (85 - 15)$$

$$= 182000$$

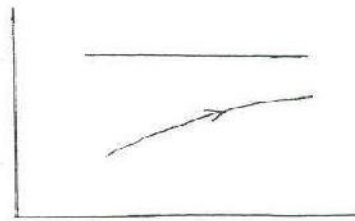
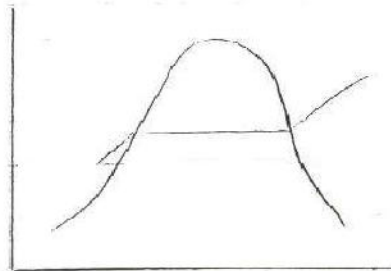
$$\epsilon = \frac{q_{\text{act}}}{q_{\text{max}}} = \frac{26000 (85 - T_{h,\text{out}})}{182000} = \frac{8360 (T_{c,\text{out}} - 15)}{182000}$$

$$T_{h,\text{out}} = 32.5 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T_{c,\text{out}} = 31.3 \text{ } ^\circ\text{C}$$

فکر کنید پارامتر ورودی خانه کار کنند  $C_{\text{max}} \rightarrow \infty$  لذا  $C_{\text{min}} = C_{\text{cold}}$  می شود

$$C = \frac{C_{\text{min}}}{C_{\text{max}}} = 0 \longrightarrow \text{در کنارش نمودار اول را براترین}$$

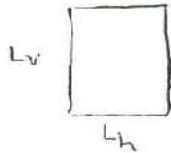


$$\epsilon = 1 - e^{-NTU}$$

در صورتی که  $C$  کمتر باشد یعنی این وسیله

$\epsilon$  خیلی بدست می آید

نکته: بر عتوان سطحی که حساب می شود برای  $Re$  در جریان زیاد باشد



$$Nu = CR^m Pr^n$$

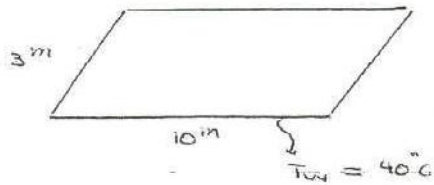
$$Re = \frac{\rho v L}{\mu}$$

$$h = \frac{1}{\frac{1}{L_h} + \frac{1}{L_v}}$$

قطر هیدرولیکی برای اجسام بسته است.

$$D_h = \frac{4A}{P} \quad R_h = \frac{A}{P}$$

مثال:



$$V_o = 0.5 \text{ m/s}$$

$$T_o = 80^\circ\text{C}$$

$$P = 5 \text{ atm}$$

$$T_f = \frac{80 + 40}{2} = 60^\circ\text{C}$$

$$\beta = \frac{1}{T_f} = \frac{1}{60 + 273} = 0.003$$

$$C_p = 1000$$

$$\mu = 2 \times 10^{-5}$$

$$Pr = 0.71$$

$$k = 0.028$$

$$P = \frac{p}{RT} = \frac{5 \times 10^5}{(287)(230)} = 5.3$$

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{5.3(0.5)(10)}{2 \times 10^{-5}} = 1.32 \times 10^6$$

در این جا چون می دانیم آزاد است یا اجسام بسته طولی آن کم است. می توانیم از رابطه ی میل استفاده کنیم (یعنی کمتر از 3m کم)

است. در این جا چون می دانیم آزاد است یا اجسام بسته طولی آن کم است.

میل

$$Gr = \frac{\rho^2 g \beta \Delta T L^3}{\mu^2} = \frac{(5.3)^2 (9.8) (0.003) (80 - 40) (10)^3}{(2 \times 10^{-5})^2}$$

$$= 8.26 \times 10^3$$

$$\frac{Gr}{Re^2} = \frac{8.26 \times 10^3}{(1.32 \times 10^6)^2} = 47.41 \quad \text{آزاد}$$

حالت طبیعی:

$$L = \frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{3}} = 2.31$$

$$Re = \frac{AvL}{\mu} = \frac{(7-3)(0.5)(2.31)}{2 \times 10^{-5}} = 3.1 \times 10^5$$

$$Gr = \frac{\rho^2 g \beta \Delta T L^3}{\mu^2} = \frac{(5.3)^2 (9.8) (0.003) (80-40)(2.31)^3}{(2 \times 10^{-5})^2} = 4.41 \times 10^{11}$$

$$\frac{Gr}{Re^2} = \frac{4.4 \times 10^{11}}{(3.1 \times 10^5)^2} = 4.6 \gg 1 \quad \text{آزاد}$$

$$Nu = C Ra^n$$

$$Ra = Gr \cdot Pr = 4.4 \times 10^{11} \times 0.7 = 0.3 \times 10^{12} > 10^9 \quad \text{توربولانس}$$

$$\Rightarrow h = \frac{1.52(\Delta T)^{1/3}}{101.32} \left( \frac{Pr}{101.32} \right)^{1/3} = 1.52(80-40)^{1/3} \left( \frac{5 \times 10^{-3}}{101.32} \right)^{1/3} = 15.2$$

$$Nu = 0.15 (4.4 \times 10^{11} \times 0.7)^{1/2} \Rightarrow Nu = 1013$$

$$h = \frac{Nu k}{d_{\text{ت}} L} = \frac{1013 (0.028)}{2.31} = 12.3$$

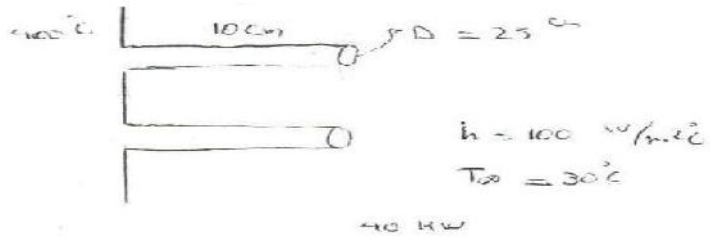
فشار و فقط تاثیرش روی  $p$  است و باید از جدول ها  $m$  را باید انتخاب کنیم چون

$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow \text{در دستا، ما تغییر می ده}$$

مثال: سطحی باد های ۴۰۰ درجه اگر تعدادی فین به قطر ۲،۵ سانتی متر و طول ۱۰ سانتی متر با راندمان

۸۰ درصد استفاده شده باشد اگر دمای محیط ۳۰ درجه با ضریب جابجایی  $\frac{W}{m^2 \cdot C}$  ۱۰۰ و

اتلاف حرارتی کل برابر با  $40 \text{ kW}$  باشد تعداد فین ها را بیابید.



$$q_{fin} = k A_m \theta_b \tanh m L_c$$

$$q_{max} = h P L \theta_b$$

$$L_c = L + r/2 = 1.25 + 10 = 11.25 \text{ cm}$$

$$\eta = \frac{\tanh m L_c}{m L_c} \Rightarrow 0.8 = \frac{\tanh m \times 1.25}{1.25 \times m} \Rightarrow \text{باستفاده از } m \text{ و } k \text{ معلوم می شود}$$

$$\eta_o = \left[ 1 - \frac{A_f}{A_t} (1 - \eta_f) \right] = \left[ 1 - \frac{(\pi D L + \pi D^2/4)}{A_f + [1 - \pi D^2/4]} (1 - \eta_f) \right] = \frac{q_{total}}{h A_t \theta_b}$$

$$\frac{40000}{100 \times [\pi D L + \pi D^2/4] + [1 - \pi D^2/4]} = 1 - \frac{n [\pi D L + \pi D^2/4]}{A_f + [1 - \pi D^2/4]} (1 - \eta_f)$$

با حل این رابطه می توانیم عدد فین ها را محاسبه کنیم.



$$q_{total} = q_{fin} + q_{unfin} = n \eta h A_s \theta_b + (A_t - A_f) h \theta_b$$

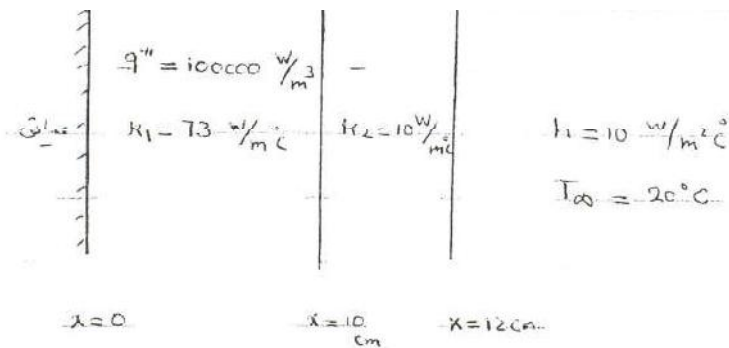
$$n \eta h \theta_b \left( \frac{\pi D^2}{4} + \pi D L \right) + (A_t - n \left( \frac{\pi D^2}{4} + \pi D L \right)) h \theta_b$$

$$= q_{total} \Rightarrow \underline{400 \times 10^3} = n \left[ 0.8 \times 370 \times 100 \left( \frac{\pi}{4} \left( \frac{25}{100} \right)^2 + \pi \left( \frac{25}{100} \right) \left( \frac{10}{100} \right) \right) \right]$$

$$+ \left( 1 - n \left( \frac{\pi}{4} \left( \frac{25}{100} \right)^2 + \pi \left( \frac{25}{100} \right) \left( \frac{10}{100} \right) \right) \right) 100 \times 370$$

$$(1 - 0.13n) \times 100 \times 370 + n \times 3848 = \frac{2848n + 37000}{-4810n}$$

### تمرین انتقال حرارت



فرضیات: ۱- مساله یار ۱  
۲- مساله یار ۲

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{q'''}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{dT}{dt}$$

تست اول:  $\frac{d^2 T_1}{dx^2} + \frac{q'''}{k} = 0 \Rightarrow \frac{dT_1}{dx} = \frac{-q'''}{k_1} x + C$   $\left. \begin{array}{l} x=0 \\ \frac{dT_1}{dx} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C = 0$

$$T_1(x) = \frac{-q'''}{2k_1} x^2 + D$$

فصلت دوم:  $\frac{d^2 T_2}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{dT_2}{dx} = a \Rightarrow T_2(x) = ax + b$

شرایط مرزی:  $x = 10 \text{ cm} \Rightarrow \dot{q}_1 = \dot{q}_2 \quad x = 12 \text{ cm} \Rightarrow \dot{q}_1 = \dot{q}_2$   
 $T_1 = T_2$

$x = 10 \text{ cm} \Rightarrow T_1 = T_2 \Rightarrow -\frac{10^5}{2 \times 73} (0.1)^2 + D = a(0.1) + b \quad (1)$

$\dot{q}_1 = \dot{q}_2 \Rightarrow 73 \times \frac{10^5}{73} (0.1) = a \times 10 \quad (2)$

$\Rightarrow a = -1000$

$x = 12 \text{ cm} \Rightarrow \dot{q}_1 = \dot{q}_2 \Rightarrow h(T_w - T_\infty) = -k \frac{dT}{dx} \Rightarrow$

$-a \times k_2 = h(a(0.12) + b - 20) \Rightarrow$

$1000 \times 10 = 10(-1000 \times 0.12 + b - 20) \Rightarrow b = 1140$

$-\frac{10^5}{2 \times 73} (0.1)^2 + D = -1000 \times (0.1) + 1140 \Rightarrow D = 1046.85$

$T_1(x) = -\frac{10^5}{2 \times 73} x^2 + 1046.85 = -684.9 x^2 + 1046.85$

$T_2(x) = -1000 x + 1140$

یک قالب یخ  $1 \times 1 \times 1 \text{ m}^3$  را در حالتی که دمای  $T_F = 0^\circ \text{C}$  است در نظر می گیریم:

۱- یخ در معرض محیط با  $h = 15 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{C}}$  با  $T_\infty = 10^\circ \text{C}$  است. بدون در نظر گرفتن تشعشع زمان

لازم برای آب شدن یخ را بیابید.

۲ یخ در معرض محیط با  $h = 15 \frac{W}{m^2 C}$  با  $T_{\infty} = 10 C$  است. با در نظر گرفتن

زمان لازم برای آب شدن یخ را بیابید.  $T_{sky} = +10 C$

۳- گونی به ضخامت 1mm به دور یخ پیچیده شده است. که در این حالت  $k = 0.06$  و دمای گونی  $10 C$  است زمان لازم برای آب شدن یخ را بیابید.

۱- فرضیات: از تشعشع صرف نظر می شود با توجه به این که دمای یخ صفر درجه و دمای محیط  $10 C$  است بنابراین انتقال حرارت همرفی بین محیط و یخ در پنج سطح صورت می گیرد و چون انرژی برداری نیست و قابل جمع شدن در جهات مختلف است لذا کافی است انتقال حرارت یک سطح را محاسبه نمود و در پنج ضرب کنیم. (با در نظر گرفتن  $L_f = 333 \frac{kJ}{kg}$ )

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{gen} = \dot{E}_{st} \Rightarrow \dot{E}_{in} = \dot{E}_{store}$$

$$\Rightarrow hA(T_{\infty} - T_w) = \dot{m}L_f \Rightarrow 15 \times 5 \times 1 \times 1 (10 - 0) = \dot{m}L_f$$

$$\rho = 920 \frac{kg}{m^3} \Rightarrow \dot{m} = 2.25 \times 10^{-3} \frac{kg}{s} \Rightarrow t = \frac{10^3 \times 1 \times 1 \times 1 \times 920}{2.25} = 413.6 \text{ h} \checkmark$$

۲ حال با توجه به وجود تشعشع بین محیط و یخ بیشتر از محیط است لذا یک انتقال حرارت تشعشعی از یخ در محیط صورت می گیرد با فرض یخ جسم سیاه داریم: (چون  $\epsilon = 0.99 \sim 1$ )

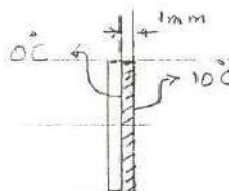
$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{gen} = \dot{E}_{store} \Rightarrow hA(T_{\infty} - T_w) - \epsilon \sigma A (T_1^4 - T_2^4) = \dot{m} L_f$$

$$\Rightarrow 15 \times 5 \times 1 \times 1 \times (-10 - 0) - 1 \times 5.667 \times 10^{-8} \times 5 \times 1 \times 1 \times (273^4 - 263^4) = \dot{m} L_f$$

$$\Rightarrow 750 - 218.24 = \dot{m} L_f \Rightarrow t = 160 \text{ h}$$

با توجه به این که یخ با گونی به ضخامت 1mm پیچیده شده است و دمای گونی 10°C است لذا هیچ گونه انتقال حرارت همرفتی بین سیال هوا و گونی اتفاق نمی افتد دمای هر دو 10°C است همچنین هیچ گونه انتقال حرارت تشعشی نیز وجود ندارد پس داریم:

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} + \dot{E}_{gen} = \dot{E}_{store} \Rightarrow kA \frac{\Delta T}{\Delta x} = \dot{m} L_f$$



$$5 \times 0.06 \times 1 \times 1 \times \frac{(10 - 0)}{10^{-3}} = \dot{m} L_f \Rightarrow 3000 = \dot{m} L_f$$

$$\Rightarrow \dot{m} \approx 9 \times 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{s}} \Rightarrow t = 28.36 \text{ h}$$

مشاهده می شود که با پیچاندن گونی به دور یخ یخ زودتر آب می شود و در حالت اول نیز از حالت دوم یخ سریعتر آب می شود.