



دانشکده مهندسی مکانیک

مکانیک ضربه

شاهرخ حسینی هاشمی

# فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	تئوری کلاسیک ضربه
۳	برخورد دو جسم صلب با حرکت سه بعدی مرکب از انتقال و دوران
۶	برخورد دو جسم در حرکت صفحه‌ای
۱۴	قیود ناگهانی در جسم متحرک
۱۶	معادلات لاگرانژ برای حرکت ضربه‌ای
۱۹	فشار مابین دو جسم کروی در تماس
۲۵	تئوری برخورد دو جسم در حالت کلی
۳۴	روش محاسبه مقادیر $q_k, q_b, q_a$ برای تماس دو کره
۳۷	روش محاسبه مقادیر $q_k, q_b, q_a$ برای تماس دو جسم اختیاری
۳۹	روش تهیه جداول و نمودارها
۴۳	تئوری برخورد هرگز
۴۵	روابط تقریبی تقرب و نیرو
۴۹	تئوری برخورد الاستیک-پلاستیک (تئوری Andrews)
۵۹	مطالعه تغییرات نیرو بر حسب زمان در برخورد الاستیک-پلاستیک
۶۲	تئوری برخورد برای اجسام ویسکوالاستیک
۶۶	ارتعاش خمشی تیرها (معادله اوپلر-برنولی)
۷۳	برخورد عرضی جرم الاستیک روی یک تیر
۷۶	روش محاسبه نیرو در برخورد عرضی جرم الاستیک روی یک تیر
۸۰	جنبه‌های ارتعاشی ضربه
۸۱	انتشار پالس در میله‌ها
۸۲	حل معادله موج (حل دالامبر)
۸۵	توصیف نیرو و پیوستگی سرعت در برخورد محوری دو میله
۹۵	مثال‌ها
۱۱۴	برخورد محوری دو میله با سطوح تماس غیر مسطح
۱۱۹	ضربه طولی یک جرم صلب روی یک میله

## تئوری کلاسیک ضربه

تئوری کلاسیک ضربه که به استریو مکانیک ( Stereomechanics ) نامیده می‌شود بر اساس قانون ضربه و اندازه حرکت ( impulse-momentum ) برای اجسام صلب بوده و فرموله کردن آن از نظر ریاضی شامل دشواریهای کمتری است. با استفاده از این تئوری می‌توان سرعت‌های ابتدایی و نهایی اجسام و ضربه خطی یا زاویه‌ای اعمالی را مورد بررسی قرار داد، لیکن نمی‌توان تنش‌های گذرا ( transient )، نیروها یا تغییر شکل‌های ایجاد شده را توصیف نمود. همچنین در تئوری کلاسیک تغییر شکل‌های مکانی در نقطه تماس بحساب نیامده و بعلاوه فرض می‌شود که کسر ناچیزی از انرژی جنبشی سیستم صرف به ارتعاش در آوردن اجسام برخورد کننده می‌گردد. البته این فرض در مورد برخورد دو کره و یا برخورد یک کره با یک جرم صلب بزرگ صادق است اما در برخوردهایی که شامل میله، تیر و یا ورق نازک می‌باشند صدق نمی‌کند. همانطور که می‌دانید در برخورد کاملاً الاستیک دو جسم قانون اصل بقای انرژی مکانیکی همراه با اصل بقای اندازه حرکت خطی و یا زاویه‌ای جهت تعیین سرعت‌های نهایی اجسام برخورد کننده بکار گرفته می‌شود و در صورتیکه برخورد ایجاد تغییر شکل دائمی نماید رابطه ضریب بازگشت  $e$  ( restitution ) که توصیف کننده درجه پلاستیکی برخورد بوده و عبارتست از نسبت مولفه‌های سرعت نسبی نهایی به سرعت نسبی ابتدایی دو جسم برخورد کننده در امتداد عمود بر سطوح تماس بجای قانون اصل بقای انرژی مکانیکی مورد استفاده واقع می‌شود، مقادیر  $e = 1$  و  $e = 0$  به ترتیب بر مفاهیم ایده‌آلی بر خوردهای کاملاً الاستیک و کاملاً پلاستیک دلالت دارند. خصوصیات اصطکاکی سطوح تماس در تئوری کلاسیک ضربه بوسیله ضریب اصطکاک دینامیکی  $f$  منظور می‌گردند. تماس ضربه‌ای دو سطح کاملاً صیقلی  $f = 0$  نمی‌تواند مولفه‌های مماس سرعت اجسام را تغییر دهد درحالیکه برخورد دو جسم کاملاً زبر با ضریب اصطکاک بی‌نهایت به حذف سرعت نسبی مماسی پایانی نیاز دارد. قوانین ضربه و اندازه حرکت خطی و زاویه‌ای بوسیله معادلات برداری:

$$\vec{L} = \int_0^t \vec{F} dt = m(\vec{v} - \vec{u}) \quad (1)$$

و

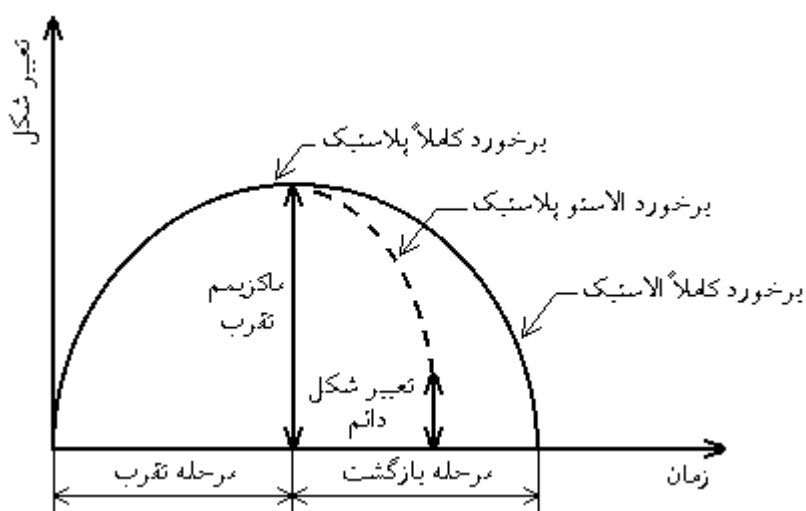
$$\vec{A} = \vec{r} \times \vec{L} = \int_0^t \vec{r} \times \vec{F} dt = \vec{H} - \vec{h} \quad (2)$$

داده می‌شوند که در آنها  $m$  جرم،  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  سرعت خطی،  $\vec{F}$  نیرو،  $\vec{H}$  و  $\vec{h}$  اندازه حرکت زاویه‌ای،  $\vec{r}$  بازوی گشتاور،  $t$  زمان و  $\vec{L}$  ضربه خطی می‌باشند. همچنین اصل بقای اندازه حرکت خطی و زاویه‌ای بشکل برداری برای  $i$  جسم بصورت:

$$\sum_i m_i \vec{v}_i = m \vec{v}_G = cte \quad (3)$$

$$\sum_i m_i (r_i \vec{v}_i) = cte \quad (4)$$

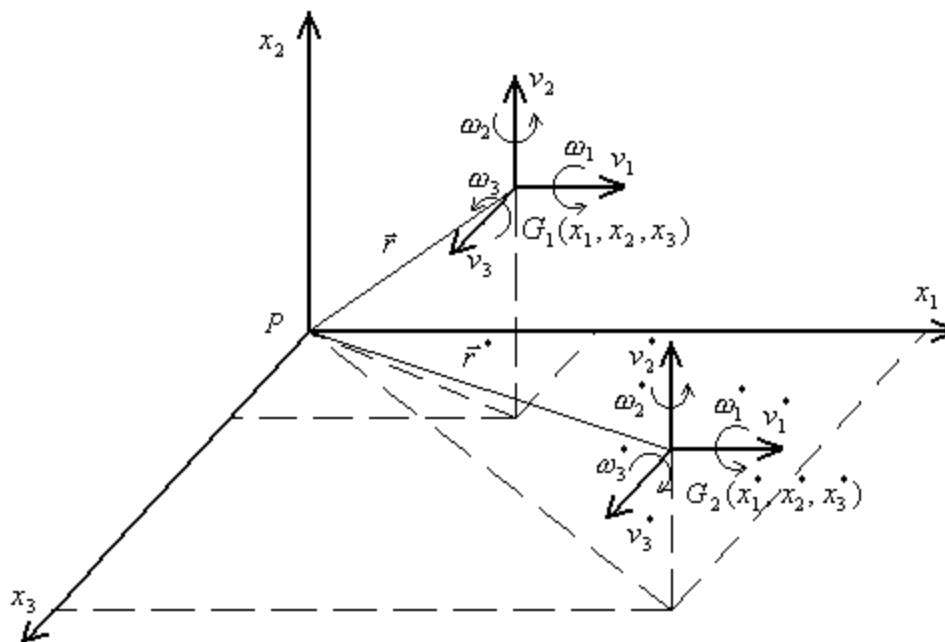
نوشته می‌شوند. از آنجائیکه زمان تماس  $\tau$  در غالب برخوردها کوچک است جهت برقراری معادله (۱) نیروها می‌بایستی بزرگ باشند در نتیجه از نیروهای استاتیکی مازاد مثل نیروی وزن معمولاً صرف نظر می‌گردد. همچنین اصل بقای اندازه حرکت خطی مستلزم این است که نیروهای ایجاد شده بوسیله برخورد اجسام برای کل سیستم داخلی باشند تا روی حرکت مرکز ثقل کل سیستم اثر نگذارند. از اینرو تغییر اندازه حرکت فقط میان اجزاء سیستم رخ می‌دهد اما بواسطه آنکه انتقال انرژی مابین اجسام برخورد کننده ممکن است تلفاتی ایجاد کند که صرف تغییر شکل پلاستیکی شوند ممکن است انرژی بطور محسوسی هدر رود. تغییرات تغییر شکل برحسب زمان، در مدت زمان تماس را می‌توان بصورت دو مرحله تقرب (approach) و بازگشت (restitution) در نظر گرفت. مرحله تقرب از لحظه زمان تماس تا لحظه وقوع ماکزیمم تغییر شکل ادامه یافته و بدنبال آن مرحله بازگشت آغاز می‌گردد که تا لحظه جدا شدن دو جسم استمرار می‌یابد. در برخورد کاملاً الاستیک همانطور که در شکل ۱ نشان داده شده است، منحنی تغییرات تغییر شکل برحسب زمان نسبت به زمان وقوع ماکزیمم تورفتگی متقارن است درحالیکه برای یک برخورد نه کاملاً الاستیک منحنی غیر متقارن است. در برخورد کاملاً پلاستیک مرحله بازگشت موجود نبوده و دو جسم بعد از برخورد از یکدیگر جدا نمی‌شوند.



شکل ۱ - تغییرات فرضی تغییر شکل برحسب زمان در ضربه استریو مکانیکی

### برخورد دو جسم صلب با حرکت سه بعدی مرکب از انتقال و دوران

برخورد دو جسم صلب با مراکز ثقل  $G_1$  و  $G_2$  مطابق شکل ۲ را در فضا در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم  $x_i$  و  $x_i^*$  بترتیب مختصات مراکز ثقل اجسام ۱ و ۲ و  $p$  نقطه برخورد دو جسم باشد.



شکل ۲

چنانچه بردار ضربه خطی برای جسم ۱ را با  $\bar{L}$  نمایش دهیم طبق اصل ضربه و اندازه حرکت خطی می‌توانیم بنویسیم:

$$\bar{L} = m(\bar{v} - \bar{u}) \quad (1)$$

و یا

$$m(v_i - u_i) = L_i \quad (2)$$

که در آن مؤلفه‌های بردار سرعت انتقالی مرکز ثقل جسم ۱ بعد از برخورد می‌باشد. بطریق مشابه از آنجائیکه بردار ضربه خطی برای جسم ۲ مساوی و مختلف علامه با بردار ضربه خطی برای جسم ۱ می‌باشد، چنانچه مؤلفه‌های بردار سرعت انتقالی مرکز ثقل جسم ۲ را بعد از برخورد با  $v_i^*$  نمایش دهیم داریم:

$$m^*(v_i^* - u_i^*) = L_i^* = -L_i \quad (3)$$

حال در صورتیکه بردار ضربه زاویه‌ای حول مرکز ثقل جسم ۱ را با  $\bar{A}$  نمایش دهیم می‌توانیم بنویسیم:

$$\bar{A} = \bar{r} \times \bar{L} = \bar{H} - \bar{h} \quad (4)$$

که در آن بردارهای  $\vec{H}$  و  $\vec{h}$  بترتیب بردارهای اندازه حرکت زاویه‌ای جسم ۱ بعد و قبل از برخورد می‌باشند . چنانچه رابطه ( ۴ ) را با استفاده از علائم اندیسی بنویسیم داریم :

$$A_i = -\varepsilon_{ijk} x_j L_k = H_i - h_i \quad (5)$$

حال از آنجائیکه  $\{h\} = [I]\{\omega\}$  می‌باشد که در آن :

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{12} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \quad (6)$$

است می‌توانیم بنویسیم :

$$h_i = (2\delta_{ij} - 1)I_{ij}\omega_j \quad (7)$$

در نتیجه رابطه ( ۵ ) بصورت :

$$(2\delta_{ij} - 1)I_{ij}(\Omega_j - \omega_j) = -\varepsilon_{ijk} x_j L_k \quad (8)$$

نوشته می‌شود. که در آن  $\Omega_j$  مؤلفه‌های بردار سرعت زاویه‌ای جسم ۱ بعد از برخورد می‌باشند . بطریقی مشابه برای جسم ۲ داریم :

$$(2\delta_{ij} - 1)I_{ij}^*(\Omega_j^* - \omega_j^*) = -\varepsilon_{ijk} x_j^* L_k^* \quad (9)$$

چنانچه در روابط ( ۸ ) و ( ۹ ) برای  $L_k$  و  $L_k^*$  بترتیب از روابط ( ۲ ) و ( ۳ ) جانشین کنیم می‌توانیم بنویسیم :

$$(2\delta_{ij} - 1)I_{ij}(\Omega_j - \omega_j) + m\varepsilon_{ijk} x_j (v_k - u_k) = 0 \quad (10)$$

$$(2\delta_{ij} - 1)I_{ij}^*(\Omega_j^* - \omega_j^*) + m^* \varepsilon_{ijk} x_j^* (v_k^* - u_k^*) = 0 \quad (11)$$

همچنین از جمع روابط ( ۲ ) و ( ۳ ) داریم :

$$m(v_i - u_i) + m^*(v_i^* - u_i^*) = 0 \quad (12)$$

روابط ( ۲ ) و ( ۳ ) و ( ۱۰ ) و ( ۱۱ ) هر یک سه معادله برای (  $i = 1, 2, 3$  ) و در مجموع دوازده معادله برای تحلیل برخورد دو جسم صلب با حرکت سه بعدی مرکب انتقالی و دورانی را بدست می‌دهند. حال چنانچه بردارهای سرعت نسبی قبل و بعد از برخورد دو جسم را در نقطه تماس بترتیب با  $u^{(Rel)}$  و  $v^{(Rel)}$  نمایش دهیم می‌توانیم بنویسیم :

$$\vec{u}^{(Rel)} = \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r} - \vec{u}^* - \vec{\omega}^* \times \vec{r}^* \quad (13)$$

و

$$\vec{v}^{(Rel)} = \vec{v}^* + \vec{\Omega}^* \times \vec{r}^* - \vec{v} - \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (14)$$

شکل اندیسی معادلات ( ۱۳ ) و ( ۱۴ ) با منظور نمودن  $\vec{r} = -x_i \hat{e}_i$  و  $\vec{r}^* = -x_i^* \hat{e}_i$  بصورت :

$$u_i^{(Rel)} = u_i - u_i^* - \varepsilon_{ijk} \omega_j x_k + \varepsilon_{ijk} \omega_j^* x_k^* \quad (15)$$

و

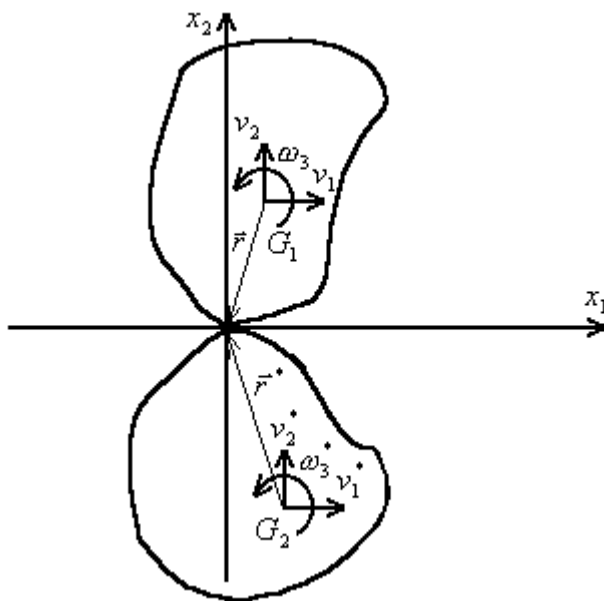
$$v_i^{(Rel)} = v_i^* - v_i - \varepsilon_{ijk} \Omega_j x_k^* + \varepsilon_{ijk} \Omega_j x_k \quad (16)$$

نوشته می شود. چنانچه دو جسم برخورد کننده صیقلی نباشند می توانیم بنویسیم:

$$v_i^{(Rel)} = e_i u_i^{(Rel)} \quad (17)$$

### برخورد دو جسم در حرکت صفحه‌ای

جهت استفاده از معادلات (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) برای تحلیل حرکت صفحه‌ای بعنوان مثال برخورد دو جسم در حرکت صفحه‌ای مطابق شکل ۳ را در نظر بگیرید و فرض کنید مختصات مراکز دو جسم بصورت  $G_1(a, b)$  و  $G_2(a^*, -b^*)$  باشند.



شکل ۳

در این صورت بردارهای سرعت‌های انتقالی و دورانی دو جسم قبل از برخورد بصورت:

$$\bar{u} = u_1 \hat{e}_1 + u_2 \hat{e}_2 \quad \text{و} \quad \bar{\omega} = \omega_3 \hat{e}_3$$

$$\bar{u}^* = u_1^* \hat{e}_1 + u_2^* \hat{e}_2 \quad \text{و} \quad \bar{\omega}^* = \omega_3^* \hat{e}_3$$

نوشته می‌شوند. از آنجائیکه بردارهای سرعت انتقالی دو جسم در امتداد محور  $x_3$  فاقد مؤلفه هستند، لذا اندیس  $k$  در معادلات (۱۰) و (۱۱) مقادیر ۱ و ۲ را بخود اختصاص می‌دهد. نتیجتاً چنانچه معادله (۱۰) را در نظر بگیریم می‌توانیم بنویسیم:

$$(2\delta_{ij} - 1)I_{ij}(\Omega_j - \omega_j) + m\varepsilon_{ij1}x_j(v_1 - u_1) + m\varepsilon_{ij2}x_j(v_2 - u_2) = 0$$

با باز کردن معادله فوق برای جميع مقادیر اندیس  $j$  و در نظر گرفتن این نکته که بردارهای وضعیت  $\bar{r}$  و  $\bar{r}^*$  در امتداد محور  $x_3$  فاقد مؤلفه هستند داریم:

$$(2\delta_{i3} - 1)I_{i3}(\Omega_3 - \omega_3) + m\varepsilon_{i21}x_2(v_1 - u_1) + m\varepsilon_{i12}x_1(v_2 - u_2) = 0$$

بنابر این:

$$I_{33}(\Omega_3 - \omega_3) - mx_2(v_1 - u_1) + mx_1(v_2 - u_2) = 0 \quad (18)$$



بطریق مشابه معادله ( ۱۱ ) بصورت :

$$I_{33}^*(\Omega_3^* - \omega_3^*) - m^* x_2^*(v_1^* - u_1^*) + m^* x_1^*(v_2^* - u_2^*) = 0 \quad ( ۱۹ )$$

نوشته می شود. با جانشین کردن مختصات  $G_1$  و  $G_2$  بترتیب در معادلات ( ۱۳ ) و ( ۱۴ ) داریم :

$$k^2(\Omega_3 - \omega_3) - b(v_1 - u_1) + a(v_2 - u_2) = 0$$

$$k^{*2}(\Omega_3^* - \omega_3^*) + b^*(v_1^* - u_1^*) + a^*(v_2^* - u_2^*) = 0$$

که در آنها  $k$  و  $k^*$  بترتیب شعاع های زیراسیون اجسام ۱ و ۲ می باشند حال چنانچه رابطه ( ۱۵ ) را باز کنیم داریم :

$$u_1^{(ReI)} = u_1 - u_1^* - \varepsilon_{1jk} \omega_j x_k + \varepsilon_{1jk} \omega_j^* x_k^*$$

$$u_1^{(ReI)} = u_1 - u_1^* - \varepsilon_{132} \omega_3 x_2 + \varepsilon_{132} \omega_3^* x_2^*$$

$$u_1^{(ReI)} = u_1 - u_1^* + \omega_3 x_2 - \omega_3^* x_2^* \quad ( ۲۰ )$$

$$u_2^{(ReI)} = u_2 - u_2^* - \varepsilon_{2jk} \omega_j x_k + \varepsilon_{2jk} \omega_j^* x_k^*$$

$$u_2^{(ReI)} = u_2 - u_2^* - \varepsilon_{231} \omega_3 x_1 + \varepsilon_{231} \omega_3^* x_1^*$$

$$u_2^{(ReI)} = u_2 - u_2^* - \omega_3 x_1 + \omega_3^* x_1^* \quad ( ۲۱ )$$

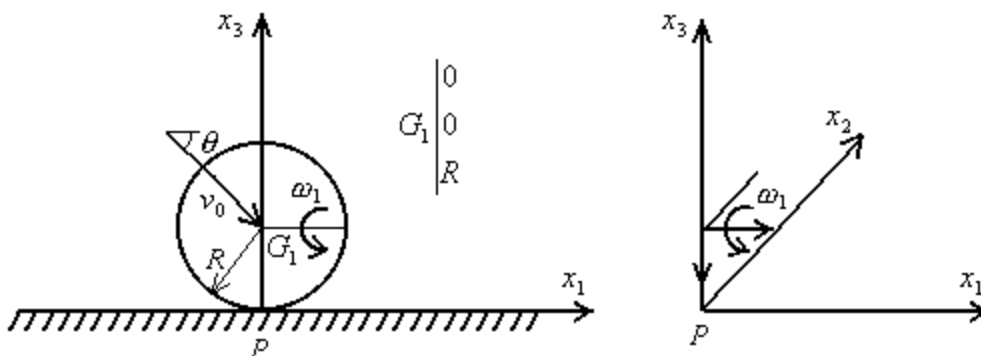
بطریق مشابه :

$$v_1^{(ReI)} = v_1^* - v_1 + \Omega_3^* x_2^* - \Omega_3 x_2 \quad ( ۲۲ )$$

$$v_2^{(ReI)} = v_2^* - v_2 - \Omega_3^* x_1^* + \Omega_3 x_1 \quad ( ۲۳ )$$

مثال :

برای برخورد کاملاً پلاستیک یک کره غیر صیقلی به شعاع  $R$  با یک صفحه صلب مطابق شکل زیر ، بردارهای سرعت خطی و زاویه‌ای کره را بعد از برخورد تعیین کنید .



حل :

با استفاده از رابطه ( ۱۰ ) می‌توانیم بنویسیم :

$$I_{11}(\Omega_1 - \omega_1) - I_{12}(\Omega_2 - \omega_2) - I_{13}(\Omega_3 - \omega_3) - mx_3(v_2 - u_2) + mx_2(v_3 - u_3) = 0$$

$$I_{21}(\Omega_1 - \omega_1) - I_{22}(\Omega_2 - \omega_2) - I_{23}(\Omega_3 - \omega_3) + mx_3(v_1 - u_1) - mx_1(v_3 - u_3) = 0$$

$$I_{31}(\Omega_1 - \omega_1) - I_{32}(\Omega_2 - \omega_2) - I_{33}(\Omega_3 - \omega_3) - mx_2(v_1 - u_1) + mx_1(v_2 - u_2) = 0$$

اما از آنجائیکه در این مورد مثال همه حاصل ضرب‌های اینرسی برابر صفر بوده و همچنین :

$$u_1 = -v_0 \cos \theta \quad \text{و} \quad u_2 = 0 \quad \text{و} \quad u_3 = -v_0 \sin \theta \quad \text{و} \quad \omega_2 = \omega_3 = 0$$

می‌باشد داریم :

$$\left. \begin{aligned} I_{11}(\Omega_1 - \omega_1) - mRv_2 &= 0 \\ I_{22}\Omega_2 + mR(v_1 - v_0 \cos \theta) &= 0 \\ I_{33}\Omega_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

حال با استفاده از رابطه ( ۱۶ ) می‌توانیم بنویسیم :

$$v_1^{(Rel)} = v_1^* - v_1 - \Omega_2^* x_3^* + \Omega_3^* x_2^* - \Omega_3 x_2 + \Omega_2 x_3$$

$$v_2^{(Rel)} = v_2^* - v_2 - \Omega_3^* x_1^* + \Omega_1^* x_3^* + \Omega_3 x_1 - \Omega_1 x_3$$

$$v_3^{(Rel)} = v_3^* - v_3 + \Omega_2^* x_1^* - \Omega_1^* x_2^* - \Omega_2 x_1 + \Omega_1 x_2$$

اما :

$$\Omega_1^* = \Omega_2^* = \Omega_3^* = 0 \quad \text{و} \quad v_1^* = v_2^* = v_3^* = 0$$

پس :

$$v_1^{(Rel)} = -v_1 + R\Omega_2$$

$$v_2^{(Rel)} = -v_2 - R\Omega_1$$

$$v_3^{(Rel)} = -v_3$$

همچنین از آنجائیکه برخورد کاملاً پلاستیک است داریم :

$$e_1 = e_2 = e_3 = 0$$

پس با استفاده از رابطه ( ۱۷ ) :

$$v_1^{(Rel)} = v_2^{(Rel)} = v_3^{(Rel)} = 0$$

در نتیجه :

$$\left. \begin{array}{l} v_1 - R\Omega_2 = 0 \\ v_2 - R\Omega_1 = 0 \\ v_3 = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{II})$$

از حل دسته معادلات ( I ) و ( II ) داریم :

$$\Omega_1 = \frac{2}{7}\omega_1 \quad \text{و} \quad \Omega_2 = \frac{5}{7}\frac{v_0}{R}\cos\theta \quad \text{و} \quad \Omega_3 = 0$$

$$v_1 = \frac{5}{7}v_0\cos\theta \quad \text{و} \quad v_2 = -\frac{2}{7}R\omega_1 \quad \text{و} \quad v_3 = 0$$

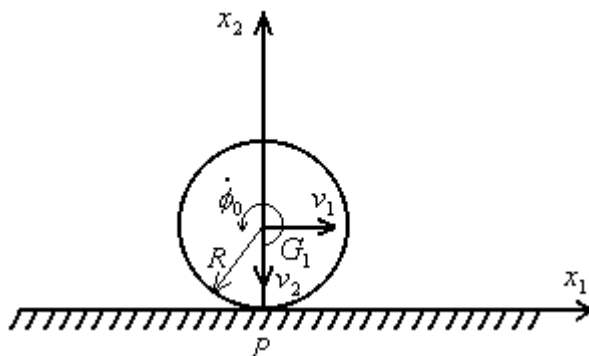
پس :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{7}(2\omega_1\hat{e}_1 + 5\frac{v_0}{R}\cos\theta\hat{e}_2)$$

$$\vec{v} = \frac{1}{7}(5v_0\cos\theta\hat{e}_1 - 2R\omega_1\hat{e}_2)$$

مثال :

برای برخورد یک کره به شعاع  $R$  با یک صفحه صلب غیر صیقلی مطابق شکل زیر چنانچه ضرایب برگشت  $e_1$  و  $e_2$  فرض شوند، سرعت‌های انتقالی و دورانی بعد از برخورد را تعیین کنید.



حل :

داریم :

$$\begin{aligned} \vec{u} = u_1 \hat{e}_1 - u_2 \hat{e}_2 & \quad \text{و} & \quad \vec{r} = -R \hat{e}_2 & \quad \text{و} & \quad \vec{\omega} = \dot{\phi}_0 \hat{e}_3 \\ \vec{L} = L_1 \hat{e}_1 + L_2 \hat{e}_2 & \quad \text{و} & \quad \vec{v} = v_1 \hat{e}_1 + v_2 \hat{e}_2 & \quad \text{و} & \quad \vec{\Omega} = \Omega_3 \hat{e}_3 \end{aligned}$$

طبق اصل ضربه و اندازه حرکت زاویه‌ای می‌توانیم بنویسیم :

$$\vec{A} = \vec{r} \times \vec{L} = \vec{H} - \vec{h}$$

پس :

$$\vec{A} = (-R \hat{e}_2) \times (L_1 \hat{e}_1 + L_2 \hat{e}_2) = RL_1 \hat{e}_3 = \vec{H} - \vec{h}$$

اما :

$$\{h\} = [I]\{\omega\}$$

از آنجائیکه همه حاصل ضرب‌های اینرسی در این مورد مثال صفر بوده و همچنین  $\omega_1 = \omega_2 = 0$  است. لذا :

$$\vec{h} = I_{33} \omega_3 \hat{e}_3$$

و بطریق مشابه :

$$\vec{H} = I_{33} \Omega_3 \hat{e}_3$$

در نتیجه :

$$\vec{A} = RL_1 \hat{e}_3 = I_{33} (\Omega_3 - \omega_3) \hat{e}_3$$

پس :

$$RL_1 = I_{33} (\Omega_3 - \omega_3)$$

اما طبق اصل ضربه و اندازه حرکت خطی :

$$\vec{L} = m(\vec{v} - \vec{u}) = m(v_1 - u_1)\hat{e}_1 + m(v_2 + u_2)\hat{e}_2$$

بنابر این :

$$Rm(v_1 - u_1) = I_{33}(\Omega_3 - \dot{\phi}_0) \quad (\text{I})$$

حال چنانچه سرعت نسبی خطی قبل از برخورد در نقطه تماس را با  $\vec{u}^{(Rel)}$  نمایش دهیم می توانیم بنویسیم :

$$\vec{u}^{(Rel)} = (\vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r}) = u_1\hat{e}_1 - u_2\hat{e}_2 + (\dot{\phi}_0\hat{e}_3) \times (-R\hat{e}_2)$$

$$\vec{u}^{(Rel)} = u_1\hat{e}_1 - u_2\hat{e}_2 + \dot{\phi}_0 R\hat{e}_1 = (u_1 + \dot{\phi}_0 R)\hat{e}_1 - u_2\hat{e}_2$$

بطریق مشابه بردار سرعت نسبی خطی بعد از برخورد در نقطه تماس بصورت :

$$\vec{v}^{(Rel)} = -(\vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) = -[v_1\hat{e}_1 + v_2\hat{e}_2 + (\Omega_3\hat{e}_3) \times (-R\hat{e}_2)]$$

$$\vec{v}^{(Rel)} = -(v_1 + \Omega_3 R)\hat{e}_1 - v_2\hat{e}_2$$

نوشته می شود . پس :

$$e_i = \frac{v_i^{(Rel)}}{u_i^{(Rel)}} \Rightarrow -(v_1 + R\Omega_3) = e_1(u_1 + R\dot{\phi}_0) \quad (\text{II})$$

$$-v_2 = -e_2 u_2 \quad (\text{III})$$

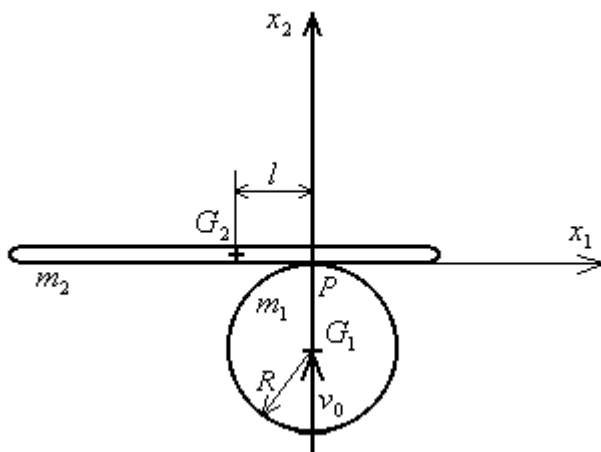
بنابر این از حل معادلات (I) و (II) داریم :

$$\Omega_3 = \frac{(I_{33} - mR^2 e_1)\dot{\phi}_0 - mRu_1(1 + e_1)}{mR^2 + I_{33}}$$

$$v_1 = \frac{(mR^2 - e_1 I_{33})u_1 - I_{33}R\dot{\phi}_0(1 + e_1)}{mR^2 + I_{33}} \quad \text{و} \quad v_2 = e_2 u_2$$

مثال :

برای برخورد کاملاً الاستیک یک کره با جرم  $m_1$  با یک میله در حال سکون به جرم  $m_2$  مطابق شکل زیر، سرعت‌های انتقالی و دورانی بعد از برخورد را تعیین کنید .



حل :

داریم :

$$\begin{aligned} \vec{u} = v_0 \hat{e}_2 \quad \text{و} \quad \vec{\omega} = 0 & \quad \vec{u}^* = 0 \quad \text{و} \quad \vec{\omega}^* = 0 \quad \text{و} \quad \vec{r}^* = l \hat{e}_1 \\ \vec{v} = v_2 \hat{e}_2 \quad \text{و} \quad \vec{\Omega} = 0 & \quad \vec{v}^* = v_2^* \hat{e}_2 \quad \text{و} \quad \vec{\Omega}^* = \Omega_3^* \hat{e}_3 \quad \text{و} \quad \vec{L} = L_2 \hat{e}_2 \end{aligned}$$

طبق اصل بقای اندازه حرکت خطی :

$$\vec{L} + \vec{L}^* = m_1(\vec{v} - \vec{u}) + m_2(\vec{v}^* - \vec{u}^*) = 0$$

پس :

$$m_1(v_2 - v_0) + m_2 v_2^* = 0 \quad \text{(I)}$$

با استفاده از اصل ضربه و اندازه حرکت زاویه‌ای برای میله می‌توانیم بنویسیم :

$$\vec{A}^* = \vec{r}^* \times \vec{L}^* = \vec{H}^* - \vec{h}^*$$

اما :

$$\vec{h}^* = 0 \quad \text{و} \quad \vec{H}^* = I_{33}^* \Omega_3^* \hat{e}_3 \quad \text{و} \quad \vec{L}^* = m_2 v_2^* \hat{e}_2$$

پس :

$$\vec{A}^* = (l \hat{e}_1) \times (m_2 v_2^* \hat{e}_2) = I_{33}^* \Omega_3^* \hat{e}_3$$

و یا :

$$l m_2 v_2^* = I_{33}^* \Omega_3^* \quad \text{(II)}$$

همچنین :

$$\vec{u}^{(Rel)} = \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r} - \vec{u}^* - \vec{\omega}^* \times \vec{r}^* = v_0 \hat{e}_2$$

$$\vec{v}^{(Rel)} = \vec{v}^* + \vec{\Omega}^* \times \vec{r}^* - \vec{v} - \vec{\Omega} \times \vec{r} = v_2^* \hat{e}_2 + \Omega_3^* l (\hat{e}_3 \times \hat{e}_1) - v_2 \hat{e}_2$$

$$\vec{v}^{(Rel)} = (v_2^* + \Omega_3^* l - v_2) \hat{e}_2$$

اما :

$$e_i = \frac{v_i^{(Rel)}}{u_i^{(Rel)}} \Rightarrow 1 = \frac{v_2^* + \Omega_3^* l - v_2}{v_0}$$

پس :

$$v_0 = v_2^* + \Omega_3^* l - v_2$$

( III )

بنابر این از حل معادلات ( I ) و ( II ) و ( III )

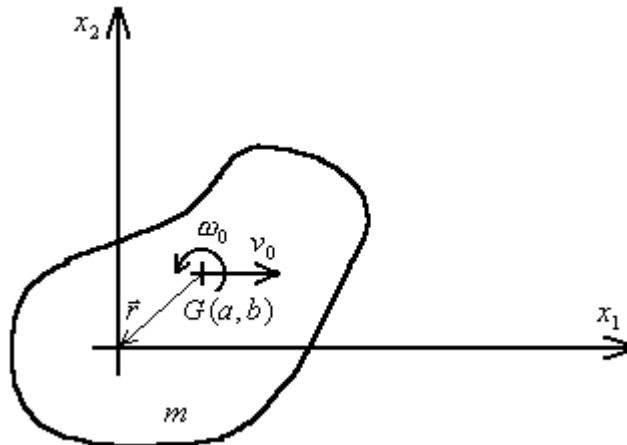
$$v_2^* = \frac{2m_1 v_0 I_{33}^*}{(m_1 + m_2) I_{33}^* + m_1 m_2 l^2}$$

$$\Omega_3^* = \frac{2l m_1 m_2 v_0}{(m_1 + m_2) I_{33}^* + m_1 m_2 l^2}$$

$$v_2 = \frac{(m_1 - m_2) I_{33}^* + m_1 m_2 l^2}{(m_1 + m_2) I_{33}^* + m_1 m_2 l^2} v_0$$

### قیود ناگهانی بر جسم متحرک

اعمال قیود ناگهانی روی یک جسم شرایط حرکتی آنرا را تغییر داده و ایجاد ضربه می‌نماید. جسم متحرکی را در صفحه  $(x_1, x_2)$  را مطابق شکل ۴ در نظر بگیرید و فرض کنید سرعت‌های خطی و زاویه‌ای اولیه جسم بترتیب  $v_0$  و  $\omega_0$  باشند.



شکل ۴

چنانچه بطور ناگهانی نقطه  $O$  از جسم را از حرکت بازداریم حرکت نهایی جسم یک چرخش حول  $O$  خواهد بود. جهت تعیین سرعت زاویه‌ای نهایی جسم حول  $O$  با استفاده از اصل ضربه و اندازه حرکت زاویه‌ای می‌توانیم بنویسیم:

$$\vec{A} = \vec{r} \times \vec{L} = \vec{H} - \vec{h} = -(a\hat{e}_1 + b\hat{e}_2) \times (L_1\hat{e}_1 + L_2\hat{e}_2)$$

$$\vec{A} = (-aL_2 + bL_1)\hat{e}_3 = I_{33}(\Omega_3 - \omega_0)\hat{e}_3$$

پس:

$$I_{33}(\Omega_3 - \omega_0) = bL_1 - aL_2 \quad (\text{I})$$

همچنین با استفاده از اصل ضربه و اندازه حرکت خطی داریم:

$$\vec{L} = m(\vec{v} - \vec{u}) = m[\vec{\Omega} \times (-\vec{r}) - \vec{u}]$$

$$\vec{L} = m[(\Omega_3\hat{e}_3) \times (a\hat{e}_1 + b\hat{e}_2) - v_0\hat{e}_1]$$

$$\vec{L} = m[\Omega_3 a\hat{e}_2 - \Omega_3 b\hat{e}_1 - v_0\hat{e}_1]$$

بنابراین:

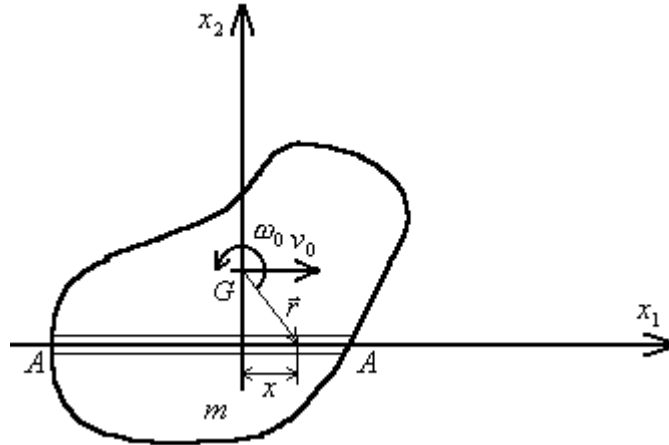
$$L_1 = -m(\Omega_3 b + v_0) \quad \text{و} \quad L_2 = m\Omega_3 a \quad (\text{II})$$

با جانشین کردن روابط (II) برای  $L_1$  و  $L_2$  در رابطه (I)، سرعت زاویه‌ای نهایی جسم حول  $O$  بصورت:

$$\Omega_3 = \frac{\omega_0 k^2 - b v_0}{k^2 + a^2 + b^2}$$



داده می شود که در آن  $k$  شعاع ژیراسیون جسم حول  $G$  می باشد.  
 چنانچه بجای نقطه  $O$  خط  $AA$  از جسم را مطابق شکل بطور ناگهانی از حرکت باز داریم سرعت  
 زاویه ای نهایی جسم برابر صفر خواهد بود.



شکل ۵

مکانیزمی که سبب این نوع قید می گردد معمولاً یک راهنمای خطی صیقلی است. نتیجتاً بردار ضربه خطی  
 بر امتداد  $AA$  عمود می باشد. در صورتیکه فاصله امتداد بردار ضربه خطی را از محور مار بر  $G$ ،  $x$  فرض  
 کنیم با استفاده از اصل ضربه و اندازه حرکت زاویه ای می توانیم بنویسیم:

$$\vec{A} = \vec{r} \times \vec{L} = \vec{H} - \vec{h} = (x\hat{e}_1 - b\hat{e}_2) \times (L_2\hat{e}_2)$$

$$\vec{A} = xL_2\hat{e}_3 = 0 - I_{33}\omega_0\hat{e}_3$$

پس:

$$xL_2 = -I_{33}\omega_0$$

همچنین با استفاده از اصل ضربه و اندازه حرکت خطی داریم:

$$\vec{L} = m(\vec{v} - \vec{u}) = m[v_1\hat{e}_1 - v_0\cos\theta\hat{e}_1 - v_0\sin\theta\hat{e}_2] = L_2\hat{e}_2$$

بنابر این:

$$L_1 = m(v_1 - v_0\cos\theta) = 0 \quad \text{و} \quad L_2 = -mv_0\sin\theta$$

در نتیجه:

$$v_1 = v_0\cos\theta \quad \text{و} \quad x = \frac{I_{33}\omega_0}{mv_0\sin\theta}$$

## معادلات لاگرانژ برای حرکت ضربه‌ای

معادلات لاگرانژی حرکت همانطور که می‌دانید بصورت :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

نوشته می‌شوند که در آن  $T$  انرژی جنبشی،  $V$  انرژی پتانسیل،  $q_i$  مختصات عام و  $Q_i$  نیروی خارجی عام متناظر با مختصات عام  $q_i$  می‌باشد. چنانچه  $\tau$  مدت زمان ضربه فرض شود با انتگرال گیری از معادله ( ۱ ) در فاصله زمانی  $t$  تا  $t + \tau$  داریم.

$$\int_t^{t+\tau} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) dt - \int_t^{t+\tau} \frac{\partial T}{\partial q_i} dt + \int_t^{t+\tau} \frac{\partial V}{\partial q_i} dt = \int_t^{t+\tau} Q_i dt$$

جمله اول در این معادله بطور مستقیم قابل انتگرال گیری بوده و می‌توانیم بنویسیم :

$$\int_t^{t+\tau} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) dt = \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)_{t+\tau} - \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)_t = \Delta \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

همچنین از آنجائیکه  $\tau$  مدت زمان ضربه کوتاه می‌باشد می‌توان از تغییرات جملات  $\frac{\partial V}{\partial q_i}$  و  $\frac{\partial T}{\partial q_i}$  در این

فاصله کوتاه صرفنظر کرد. لذا داریم :

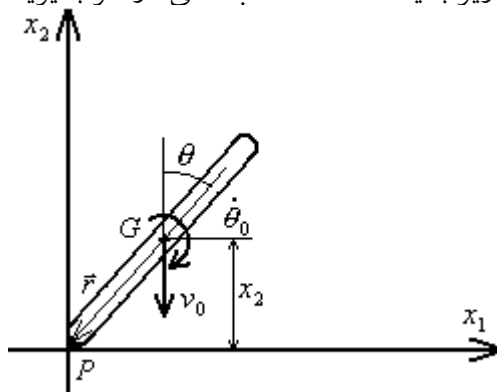
$$\Delta \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \tau + \frac{\partial V}{\partial q_i} \tau = \int_t^{t+\tau} Q_i dt \quad (2)$$

بنابر این از آنجائیکه جمله طرف راست معادله ( ۲ ) نمایشگر ضربه عام متناظر با مختصات عام  $q_i$  بوده که آنرا با  $G_i^{(imp)}$  نمایش می‌دهیم و جملات دوم و سوم در طرف چپ معادله بعلت کوچک بودن  $\tau$  ناچیز می‌باشند می‌توانیم بنویسیم :

$$\Delta \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = G_i^{(imp)} \quad (3)$$

مثال :

جهت استفاده از معادله (۳) در تحلیل ضربه، برخورد غیر الاستیک و فاقد اصطکاک یک میله صلب بطول  $l$  و جرم  $m$  را مطابق شکل زیر با یک صفحه صلب افقی در نظر بگیرید.



چنانچه مختصات عام برای میله  $x_2$  و  $\theta$  فرض شوند داریم :

$$q_1 = \theta \quad \text{و} \quad q_2 = x_2$$

در نتیجه معادلات (۳) بصورت :

$$\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = G_1^{(imp)} \quad \text{و} \quad \Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = G_2^{(imp)}$$

نوشته می شوند. اما از آنجائیکه  $\theta$  زاویه چرخش حول محور  $x_3$  است ضربه عام متناظر با مختصات عام  $\theta$  مؤلفه ضربه زاویه ای در امتداد محور  $x_3$  و ضربه عام متناظر با مختصات عام  $x_2$  مؤلفه ضربه خطی در امتداد محور  $x_2$  می باشد. بنابر این داریم :

$$\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = G_1^{(imp)} = A_3 \quad \text{و} \quad \Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = G_2^{(imp)} = L_2$$

همچنین انرژی جنبشی برحسب مختصات عام  $x_2$  و  $\theta$  بصورت :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} I_{33} \dot{\theta}^2$$

نوشته می شود. در نتیجه :

$$\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \Delta(I_{33} \dot{\theta}) = I_{33} [\dot{\theta}|_f - \dot{\theta}|_i] = I_{33} (\Omega_3 + \dot{\theta}_0) = A_3 \quad (4)$$

و

$$\Delta\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = \Delta(m \dot{x}_2) = m [\dot{x}_2|_f - \dot{x}_2|_i] = m(v_2 + v_0) = L_2 \quad (5)$$

اما :

$$\vec{A} = \vec{r} \times \vec{L} = -\frac{l}{2} (\sin \theta \hat{e}_1 + \cos \theta \hat{e}_2) \times (L_2 \hat{e}_2) = -\frac{l}{2} L_2 \sin \theta \hat{e}_3$$

پس :

$$A_3 = -\frac{l}{2}L_2 \sin \theta$$

حال با استفاده از معادلات ( ۴ ) و ( ۵ ) می توانیم بنویسیم :

$$I_{33}(\Omega_3 + \dot{\theta}_0) = -\frac{ml}{2}(v_2 + v_0)\sin \theta = \frac{1}{12}ml^2(\Omega_3 + \dot{\theta}_0)$$

پس :

$$6(v_2 + v_0)\sin \theta = -l(\Omega_3 + \dot{\theta}_0) \quad (6)$$

همانطور که ملاحظه می کنید جهت تعیین مجهولات  $\Omega_3$  و  $v_2$  علاوه بر معادله فوق نیاز به معادله دیگری است . چنانچه بردار سرعت خطی نقطه تماس را بلافاصله بعد از برخورد با  $\vec{v}^{(L)}$  نمایش دهیم داریم :

$$\vec{v}^{(L)} = \vec{v} + \vec{\Omega} \times \vec{r} = (v_2 - \Omega_3 \frac{l}{2} \sin \theta) \hat{e}_2 + \Omega_3 \frac{l}{2} \cos \theta \hat{e}_1$$

از آنجائیکه برخورد غیر الاستیک می باشد می توانیم فرض کنیم میله بلافاصله بعد از برخورد نقطه تماس خود را با صفحه صلب افقی حفظ کرده و از آن جدا نمی شود بعبارت دیگر می بایست نقطه تماس میله با صفحه در امتداد  $x_2$  جابجا نشود . جهت ارضاء چنین فرضی لازم است مؤلفه بردار سرعت خطی نقطه تماس در امتداد محور  $x_2$  برابر صفر باشد . بنابر این می توانیم بنویسیم :

$$v_2 - \Omega_3 \frac{l}{2} \sin \theta = 0 \quad (7)$$

از حل معادلات ( ۶ ) و ( ۷ ) داریم :

$$\Omega_3 = -\frac{\dot{\theta}_0 + \frac{6v_0}{l} \sin \theta}{1 + 3 \sin^2 \theta}$$

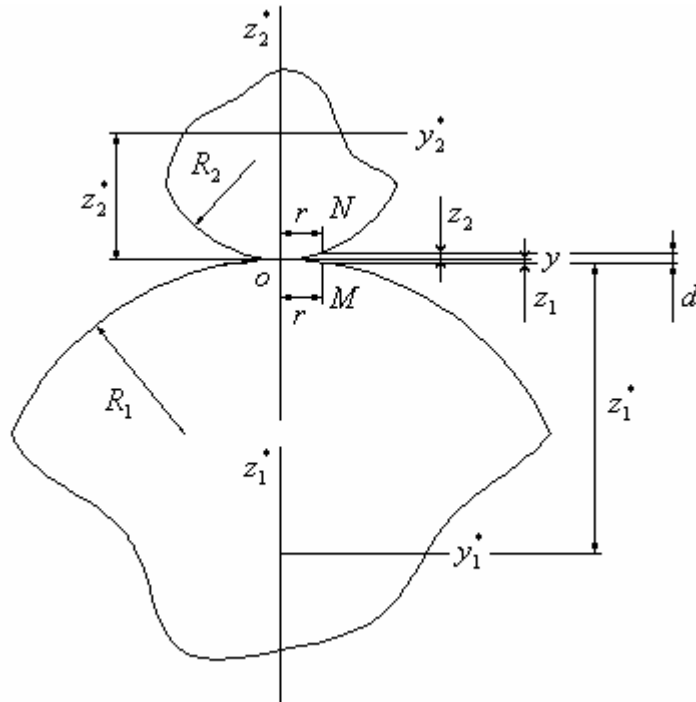
$$v_2 = -\frac{l \sin \theta (\frac{3v_0}{l} \sin \theta + \frac{1}{2} \dot{\theta}_0)}{1 + 3 \sin^2 \theta}$$

همچنین با استفاده از معادله ( ۵ ) می توانیم بنویسیم :

$$L_2 = -\frac{m(v_0 - \frac{1}{2}l\dot{\theta}_0 \sin \theta)}{1 + 3 \sin^2 \theta}$$

## فشار مابین دو جسم کروی در تماس

دو جسم در تماس مطابق شکل را در نظر بگیرید و فرض کنید این اجسام دارای سطوح کروی با شعاعهای  $R_1, R_2$  در نقطه تماس باشند .



چنانچه مختصات نقاطی مثل  $N, M$  از دو جسم را که در صفحه  $(y, z)$  قرار دارند با  $r$  نمایش دهیم جهت تعیین مختصات  $z_1, z_2$  این نقاط معادلات دایره نشان دهنده مقاطع دو کره در تماس ، در صفحه  $(y, z)$  را در دستگاه مختصات محلی مربوط به هریک می نویسیم . معادله دایره مقطع کره ۱ در صفحه  $(y, z)$  در دستگاه مختصات محلی  $(y_1^*, z_1^*)$  بصورت :

$$y_1^{*2} + z_1^{*2} = R_1^2$$

می باشد در نتیجه مختص  $z_1^*$  نقطه ای مثل  $M$  از این دایره که دارای مختص  $y_1^* = r$  است بصورت :

$$z_1^* = R_1 \sqrt{1 - \frac{r^2}{R_1^2}} = R_1 \left(1 - \frac{r^2}{R_1^2}\right)^{1/2}$$

می باشد . حال چنانچه بسط تیلور  $\left(1 - \frac{r^2}{R_1^2}\right)^{1/2}$  را بنویسیم داریم :

$$\left(1 - \frac{r^2}{R_1^2}\right)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R_1^2} + \dots$$

در نتیجه  $z_1^*$  با تقریب کافی می تواند بصورت :

$$z_1^* = R_1 - \frac{1}{2} \frac{r^2}{R_1}$$

نوشته شود پس :

$$z_1 = R_1 - z_1^* = \frac{1}{2} \frac{r^2}{R_1}$$

بطریق مشابه می توان نشان داد :

$$z_2 = \frac{1}{2} \frac{r^2}{R_2}$$

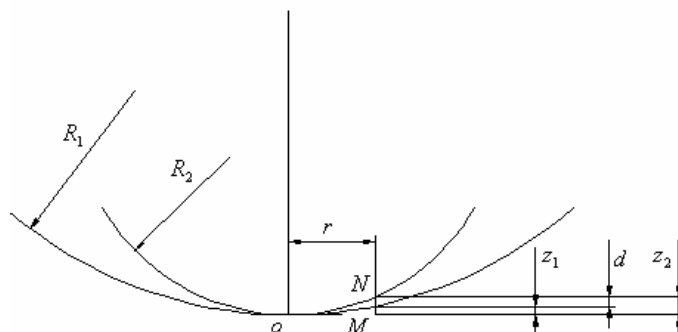
بنابر این :

$$d = z_1 + z_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) r^2 = \frac{(R_1 + R_2)}{2R_1R_2} r^2$$

با استفاده از این رابطه بعنوان مثال در تماس یک سطح تخت و یک سطح کروی بشعاع  $R_2$  با قرار دادن  $R_1 = \infty$  فاصله ما بین نقاط  $N, M$  بصورت :

$$d = \frac{r^2}{2R_2}$$

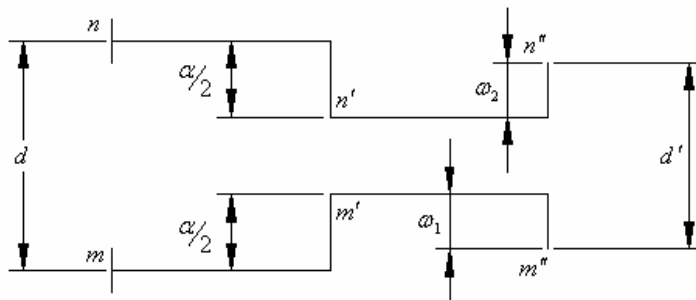
داده می شود . همچنین در تماس یک سطح کروی که در داخل سطح کروی دیگری مطابق شکل قرار گرفته است ، داریم :



$$d = z_2 - z_1 = \frac{(R_1 - R_2)}{2R_1R_2} r^2$$

حال اگر دو جسم تحت تاثیر نیروی  $F$  در امتداد محور  $z$  بیکدیگر فشرده شوند . دو کره در بیکدیگر فرو رفته و تشکیل یک سطح تماس دایره ای شکل خواهند داد . با فرض بزرگ بودن شعاعهای انحنای  $R_2, R_1$  در مقایسه با شعاع دایره مرزی سطح تماس می توان از جابجایی بواسطه تغییر شکل نقاطی از دو کره که در امتداد محور  $z$  قرار داشته و در فاصله دور از  $o$  می باشند صرفنظر نمود . در نتیجه چنانچه فرض کنیم مراکز دو کره که در فاصله دور از  $o$  قرار دارند باندازه  $\alpha$  که آنرا تقرب ( approach ) می نامیم بیکدیگر نزدیک شوند ، نقاطی از دو کره که در نزدیکی  $o$  قرار دارند علاوه بر آنکه در امتداد قائم به اندازه  $\alpha$  بیکدیگر نزدیک می شوند ، تحت تاثیر جابجایی در امتداد قائم بواسطه تغییر شکل محلی نیز قرار می گیرند

. بنابر این می توان تصور کرد دو نقطه  $n, m$  بفاصله  $d$  از یکدیگر ، که در نزدیکی نقطه تماس قرار دارند . هر یک باندازه  $\frac{\alpha}{2}$  بطرف یکدیگر حرکت کرده و در عین حال همانطور که در دیاگرام نشان داده شده است بواسطه تغییر شکل محلی از یکدیگر دور می شوند .



در نتیجه چنانچه جابجایی بواسطه تغییر شکل برای نقاط  $n, m$  را به ترتیب  $\omega_2, \omega_1$  فرض کنیم داریم :

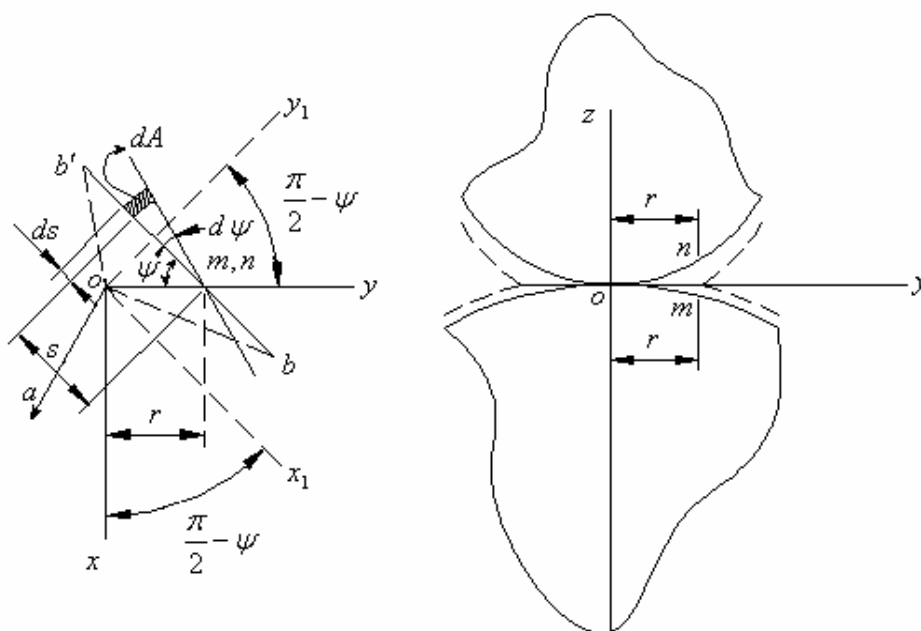
$$d - d' = \frac{\alpha}{2} - \omega_1 + \frac{\alpha}{2} - \omega_2 = \alpha - (\omega_1 + \omega_2)$$

بنابر این برای نقاطی مثل  $n, m$  از دو جسم که بعد از فشرده شدن روی سطح تماس قرار می گیرند  $d' = 0$  بوده و می توانیم بنویسیم :

$$\alpha - (\omega_1 + \omega_2) = d = \beta r^2 \quad (1) (a)$$

که در آن  $\beta = \frac{(R_1 + R_2)}{2R_1R_2}$  است .

حال جهت تعیین جابجایی های  $\omega_2, \omega_1$  المان  $dA$  از سطح تماس را که بفاصله  $s$  از  $n, m$  قرار دارد مطابق شکل در نظر می گیریم .



چنانچه شدت فشار وارد بر المان  $dA$  از سطح تماس را با  $q$  نمایش دهیم ، با استفاده از تئوری الاستیسیته برای جابجایی بواسطه اعمال نیروی توزیعی روی قسمتی از مرز محیط نیمه بی نهایت می توانیم بنویسیم :

$$\omega = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_S \frac{q}{s} dA$$

که در آن  $\nu$  ضریب پواسن و  $E$  مدول الاستیسیته است . در نتیجه رابطه ( ۱ ) بصورت :

$$\alpha - \beta r^2 = \omega_1 + \omega_2 = (\delta_1 + \delta_2) \iint_S \frac{q}{s} dA \quad (b)(2)$$

نوشته می شود که در آن :

$$\delta_1 = \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} \quad \text{و} \quad \delta_2 = \frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2}$$

است . اما با استفاده از شکل :

$$dA = s ds \cdot d\psi$$

پس :

$$\frac{q dA}{s} = q ds \cdot d\psi$$

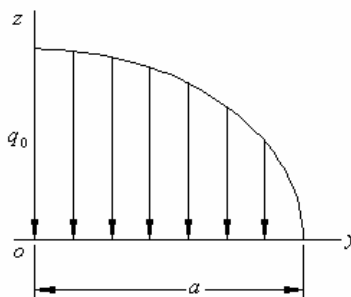
بنابر این رابطه ( ۲ ) بصورت :

$$\alpha - \beta r^2 = (\delta_1 + \delta_2) \iint_S q ds \cdot d\psi \quad (3)$$

نوشته می شود . حال چنانچه فرض کنیم  $q_0$  فشار در مرکز سطح تماس باشد ، می توانیم توزیع فشار روی سطح تماس را بصورت :

$$q = \frac{q_0}{a} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

در نظر بگیریم که در واقع نمایش تغییرات آن در محدوده سطح تماس ، حجم حاصل از دوران یک ربع بیضی حول محور  $z$  مطابق شکل را می پوشاند .



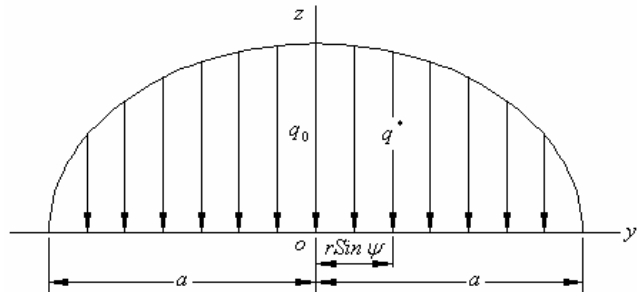
چنانچه دستگاه مختصات  $(x, y)$  را حول  $o$  در جهت مخالف عقربه های ساعت باندازه زاویه  $\psi - \frac{\pi}{2}$

بچرخانیم ، معادله توزیع فشار در دستگاه مختصات جدید بصورت :



$$q = \frac{q_0}{a} \sqrt{a^2 - x_1^2 - y_1^2}$$

نوشته می شود. در نتیجه نمایش توزیع فشار در صفحه  $(y_1, z)$  مطابق شکل خواهد بود.



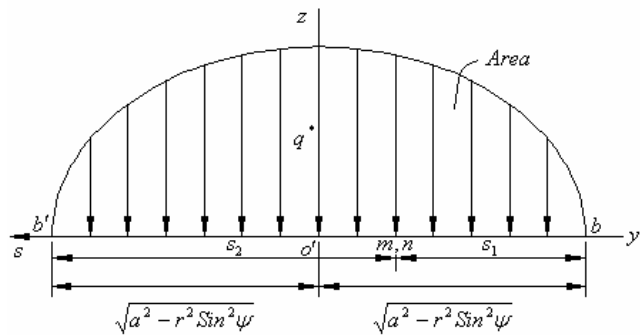
با استفاده از این دیاگرام:

$$q^* = q|_{y_1=r \sin \psi} = \frac{q_0}{a} \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \psi}$$

حال چنانچه وتر  $bb'$  را در نظر بگیریم از آنجائیکه این وتر با محور  $ox_1$  موازی بوده و توسط محور  $oy_1$  نصف می شود لذا

$$o'b' = o'b = \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \psi}$$

بنابر این نمایش تغییرات فشار در امتداد  $bb'$  که همان امتداد  $s$  می باشد مطابق شکل خواهد بود.



در نتیجه:

$$Area = \int_{-s_1}^{s_2} q ds = \frac{\pi}{2} q^* \sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \psi} = \frac{\pi q_0}{2a} (a^2 - r^2 \sin^2 \psi)$$

پس رابطه (۳) بصورت:

$$\alpha - \beta r^2 = \frac{\pi(\delta_1 + \delta_2)q_0}{2a} \left[ 2 \int_0^{\pi/2} (a^2 - r^2 \sin^2 \psi) d\psi \right]$$

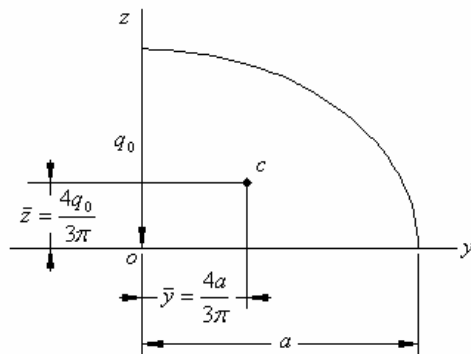
نوشته می شود. بنابر این:

$$\alpha = \frac{\pi(\delta_1 + \delta_2)q_0}{a} \int_0^{\pi/2} a^2 d\psi = (\delta_1 + \delta_2) \frac{\pi^2}{2} q_0 a \quad (4)$$

و

$$\beta = \frac{\pi(\delta_1 + \delta_2)q_0}{a} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \psi d\psi = (\delta_1 + \delta_2) \frac{\pi^2 q_0}{4a} \quad (5)$$

جهت تعیین نیروی فشاری  $F$  می بایستی حجم حاصل از دوران ربع بیضی نشان داده شده در شکل ۳ را حول محور  $z$  محاسبه کنیم. در نتیجه با استفاده از قضیه پاپوس گلدینوس:



$$V = 2\pi \bar{y} A = 2\pi \left(\frac{4a}{3\pi}\right) \left(\frac{\pi}{4} q_0 a\right) = F = \frac{2}{3} \pi q_0 a^2$$

و یا:

$$q_0 = \frac{3F}{2\pi a^2}$$

این رابطه نمایشگر این مطلب است که فشار ماکزیمم یک و نیم برابر فشار متوسط در روی سطح تماس است. حال با استفاده از رابطه (۵) شعاع سطح تماس بصورت:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3\pi F (\delta_1 + \delta_2) R_1 R_2}{4(R_1 + R_2)}}$$

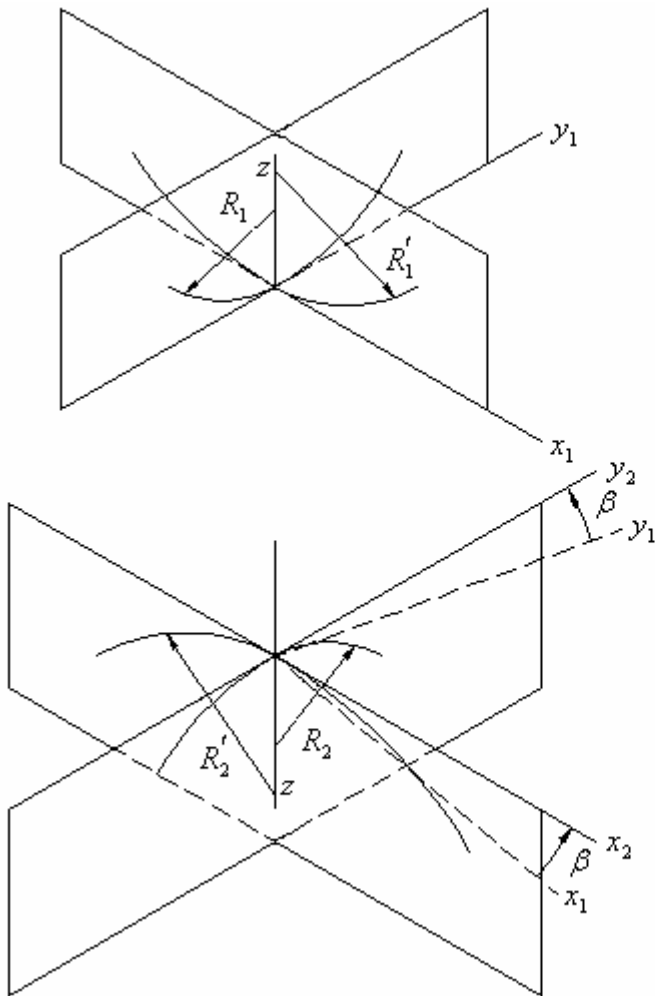
داده می شود. همچنین با استفاده از رابطه (۴) تقرب بوسیله رابطه:

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2 F^2 (\delta_1 + \delta_2)^2 (R_1 + R_2)}{16R_1 R_2}}$$

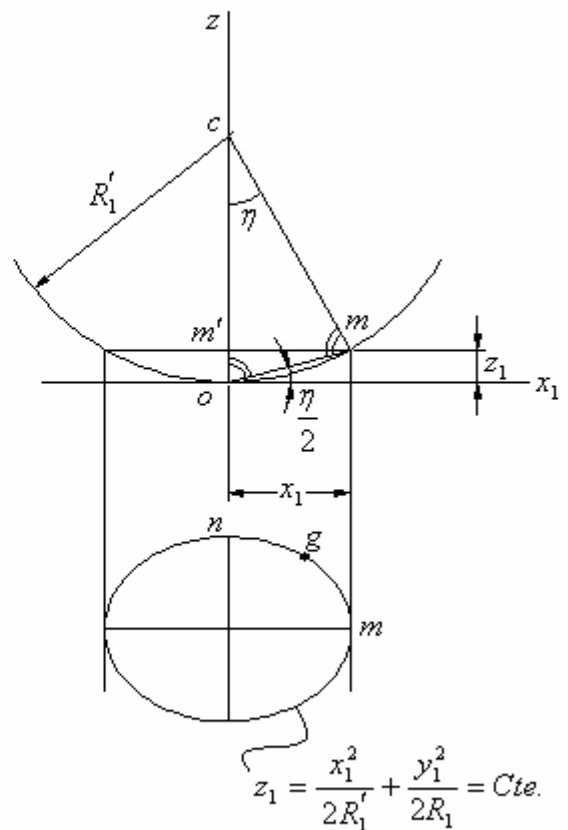
داده می شود.

## تئوری برخورد دو جسم در حالت کلی

جهت بررسی تئوری برخورد دو جسم در حالت کلی فرض می‌کنیم شعاعهای اصلی انحناء در نقطه تماس برای جسم ۱،  $R_1, R_1'$  و برای جسم ۲،  $R_2, R_2'$  باشند. بدیهی است که شعاعهای اصلی مربوط به هر یک از دو جسم مطابق شکل ۱ در دو صفحه عمود برهم قرار دارند.



شکل ۲



شکل ۱

حال نقطه ای مثل  $m$  از جسم ۱ را که روی شعاع اصلی انحنای  $R_2'$  قرار دارد مطابق شکل ۲ در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که فاصله قائم آن از محور  $x_1$  برابر  $z_1$  باشد در این صورت می‌توانیم بنویسیم:

$$z_1 = x_1 \tan \frac{\eta}{2} = \frac{1}{2} x_1 \eta \quad (1)$$

اما:

$$\tan \eta = \eta = \frac{mm'}{cm'} = \frac{x_1}{R_1'} \quad (2)$$

در نتیجه:

$$z_1 = \frac{1}{2} \frac{x_1^2}{R_1'} \quad (3)$$

بطریق مشابه برای نقطه ای مثل  $n$  از جسم  $1$  که روی شعاع اصلی انحنای  $R_1$  قرار داشته و فاصله قائمش از محور  $y_1$  همان  $z_1$  می باشد داریم :

$$z_1 = \frac{1}{2} \frac{y_1^2}{R_1} \quad (4)$$

بر اساس این نتایج فرض می کنیم که فاصله  $z_1$  هر نقطه دیگری مثل  $g$  از جسم  $1$  که نه روی  $R_1'$  و نه روی  $R_1$  قرار دارد بوسیله رابطه :

$$z_1 = \frac{x_1^2}{2R_1'} + \frac{y_1^2}{2R_1} \quad (5)$$

تقریب زده شود . این فرض با در نظر گرفتن این واقعیت که معادله ( ۵ ) به ازای  $y_1 = 0$  تبدیل به معادله ( ۳ ) و به ازای  $x_1 = 0$  تبدیل به معادله ( ۴ ) می گردد و همچنین معادله ( ۵ ) به ازای مقادیر ثابت  $z_1$  نمایشگر یک بیضی است ، بنظر قابل قبول می آید . بطریق مشابه فاصله  $z_2$  هر نقطه از جسم ( ۲ ) در نزدیکی نقطه تماس بوسیله رابطه :

$$z_2 = \frac{x_2^2}{2R_2'} + \frac{y_2^2}{2R_2} \quad (6)$$

داده می شود . بنابر این برای فاصله  $z$  مابین نقاط واقع بر روی سطوح دو جسم در نزدیکی نقطه تماس می توانیم بنویسیم :

$$z = z_1 + z_2 = \frac{x_1^2}{2R_1'} + \frac{y_1^2}{2R_1} + \frac{x_2^2}{2R_2'} + \frac{y_2^2}{2R_2} \quad (7)$$

حال از آنجائیکه محورهای مختصات  $(x_2, y_2)$  از دوران دستگاه مختصات  $(x_1, y_1)$  حول محور  $z$  به اندازه زاویه  $\beta$  نتیجه می گردند داریم :

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 \cos \beta + y_1 \sin \beta \\ y_2 &= -x_1 \sin \beta + y_1 \cos \beta \end{aligned} \quad (8)$$

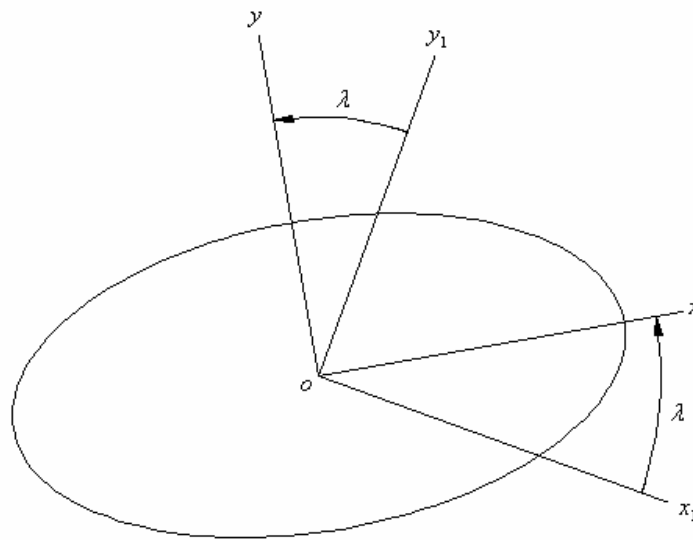
بنابر این رابطه ( ۷ ) با استفاده از روابط تبدیل ( ۸ ) بصورت :

$$z = A^* x_1^2 + B^* y_1^2 + C^* x_1 y_1 \quad (9)$$

نوشته می شود که در آن :

$$\begin{aligned}
 A^* &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1'} + \frac{\cos^2 \beta}{R_2'} + \frac{\sin^2 \beta}{R_2} \right) \\
 B^* &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{\sin^2 \beta}{R_2'} + \frac{\cos^2 \beta}{R_2} \right) \\
 C^* &= \left( \frac{1}{R_2'} - \frac{1}{R_2} \right) \sin \beta \cos \beta
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

است. معادله (۹) در صفحه محورهای  $(x_1, y_1)$  نمایشگر یک بیضی مطابق شکل (۳) است که مرکز آن بر  $O$  منطبق بوده و محورهای اطول و اقصرش در راستاهای  $x_1, y_1$  نیستند.



شکل ۳

چنانچه راستای محور اطول و راستای محور اقصر این بیضی را به ترتیب با محورهای  $x, y$  نمایش دهیم و فرض کنیم زاویه گردشی که محورهای  $(x_1, y_1)$  را بر محورهای  $(x, y)$  منطبق می کند برابر  $\lambda$  باشد داریم

:

$$\begin{aligned}
 x &= x_1 \cos \lambda + y_1 \sin \lambda \\
 y &= -x_1 \sin \lambda + y_1 \cos \lambda
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

پس:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x \cos \lambda - y_1 \sin \lambda \\
 y_1 &= x \sin \lambda + y \cos \lambda
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

با جانشین کردن رابطه تبدیل (۱۲) در معادله (۹) می توان زاویه  $\lambda$  را به ترتیبی تعیین نمود که جمله حاصل ضرب  $x_1 y_1$  در معادله (۹) حذف گردد. در نتیجه:

$$\tan 2\lambda = \frac{C^*}{A^* - B^*}
 \tag{13}$$

و

$$z = Ax^2 + By^2 \quad (14)$$

که در آن :

$$A = A^* \cos^2 \lambda + B^* \sin^2 \lambda + C^* \sin \lambda \cos \lambda \quad (15)$$

و

$$B = A^* \sin^2 \lambda + B^* \cos^2 \lambda - C^* \sin \lambda \cos \lambda \quad (16)$$

است . چنانچه رابطه ( ۱۵ ) را یکبار با رابطه ( ۱۶ ) جمع و بار دیگر از آن تفریق کنیم داریم :

$$\begin{aligned} A + B &= A^* + B^* = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_2} \right) \\ B - A &= (B^* - A^*) \cos 2\lambda - C^* \sin 2\lambda = \sqrt{(B^* - A^*)^2 + C^{*2}} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[ \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right) + \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right) \cos 2\beta \right]^2 + \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right)^2 \sin^2 2\beta \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

بنابر این :

$$2(A + B) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_2} \quad (17)$$

و

$$2(B - A) = \left[ \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right)^2 + \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right) \cos 2\beta \right]^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

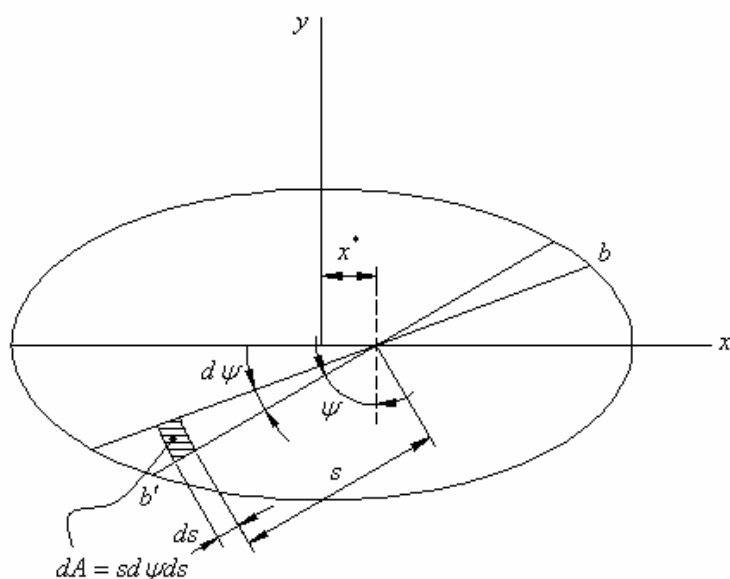
حال همانطور که قبلاً دیدیم برای نقاط روی سطح تماس طبق معادله ( a ) می توانیم بنویسیم :

$$\alpha - (\omega_1 + \omega_2) = d = z_1 + z_2 = z \quad (19)$$

در نتیجه با استفاده از معادلات ( ۱۹ ) و ( b ) داریم :

$$\alpha - Ax^2 - By^2 = \omega_1 + \omega_2 = (\delta_1 + \delta_2) \iint_S \frac{q}{s} dA \quad (20)$$

که در آن  $q$  فشار وارد بر المان  $dA$  از سطح تماس و  $s$  فاصله المان از نقطه مورد بررسی است .



شکل ۴

چنانچه نقطه مورد بررسی در صفحه تماس مطابق شکل ۴ بر محور  $x$  منطبق بوده و فاصله اش از محور  $y$  برابر  $x^*$  فرض شود با استفاده از رابطه (۲۰) داریم:

$$\alpha - Ax^{*2} = (\delta_1 + \delta_2) \iint q ds d\psi \quad (21)$$

حال چنانچه  $q_0$  فشار در مرکز سطح تماس فرض شود، می توانیم توزیع فشار روی سطح تماس را بصورت:

$$q = q_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (22)$$

در نظر بگیریم که در واقع نمایش تغییرات آن در محدوده سطح تماس (یعنی بیضی با قطر اطول  $2a$  و قطر اقصر  $2b$ ) حجم یک نیم بیضوی به معادله:

$$\frac{q^2}{q_0^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (23)$$

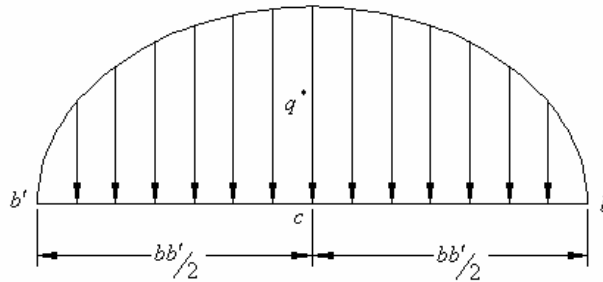
را می پوشاند. بنابر این نیروی فشاری  $F$  بصورت:

$$F = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{3} \pi ab q_0 \right) = \frac{2}{3} \pi ab q_0 \quad (24)$$

داده می شود. جهت تعیین  $\int q ds$  چنانچه وتر  $bb'$  از بیضی سطح تماس (مطابق شکل ۴) را در نظر بگیریم از آنجائیکه این انتگرال برابر با سطح زیر منحنی تغییرات توزیع فشار در امتداد وتر  $bb'$  می باشد می بایستی مساحت یک نیم بیضی با قطر اطول  $bb'$  و قطر اقصر  $2q^*$  را تعیین کنیم. لذا داریم:

$$\int q ds = \frac{1}{2} (\pi q^* \frac{bb'}{2}) \quad (25)$$

که در آن  $q^*$  مطابق شکل (۵) فشار در وسط وتر  $bb'$  است.



شکل ۵

بنابر این چنانچه مختصات نقاط  $b, b'$  را بترتیب  $(x_b, y_b)$  و  $(x_{b'}, y_{b'})$  فرض کنیم داریم:

$$bb' = [(x_b - x_{b'})^2 + (y_b - y_{b'})^2]^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

و

$$x_c = \frac{x_b + x_{b'}}{2} \quad \text{و} \quad y_c = \frac{y_b + y_{b'}}{2} \quad (27)$$

در نتیجه رابطه (۲۵) بصورت:

$$\int q ds = \frac{\pi}{4} [(x_b - x_{b'})^2 + (y_b - y_{b'})^2]^{\frac{1}{2}} q_0 \left(1 - \frac{x_c^2}{a^2} - \frac{y_c^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (28)$$

نوشته می شود. حال جهت تعیین مختصات نقاط  $b, b'$  کافی است معادله وتر  $bb'$  را نوشته و مختصات

نقاط تلاقی آن با بیضی سطح تماس را پیدا کنیم. بدین منظور معادله وتر  $bb'$  با در نظر گرفتن شکل ۴

بصورت:

$$y = (x - x^*) \text{Cotg} \psi \quad (29)$$

نوشته می شود. با جانشین کردن معادله (۲۹) برای  $y$  در معادله بیضی سطح تماس داریم:

$$x_b = \frac{a^2 x^* \text{Cotg}^2 \psi + ab \sqrt{b^2 + a^2 \text{Cotg}^2 \psi - x^{*2} \text{Cotg}^2 \psi}}{b^2 + a^2 \text{Cotg}^2 \psi} \quad (30a)$$

و

$$x_{b'} = \frac{a^2 x^* \text{Cotg}^2 \psi - ab \sqrt{b^2 + a^2 \text{Cotg}^2 \psi - x^{*2} \text{Cotg}^2 \psi}}{b^2 + a^2 \text{Cotg}^2 \psi} \quad (30b)$$

در نتیجه با استفاده از معادله (۲۹) می توانیم بنویسیم:



$$y_b = \frac{ab\sqrt{b^2 + a^2 \text{Cotg}^2 \psi - x^{*2} \text{Cotg}^2 \psi - x^* b^2}}{b^2 + a^2 \text{Cotg}^2 \psi} \text{Cotg} \psi \quad (31a)$$

و

$$y_{b'} = -\frac{ab\sqrt{b^2 + a^2 \text{Cotg}^2 \psi - x^{*2} \text{Cotg}^2 \psi + x^* b^2}}{b^2 + a^2 \text{Cotg}^2 \psi} \text{Cotg} \psi \quad (31b)$$

پس :

$$bb' = \frac{2ab}{b^2 + a^2 \text{Cotg}^2 \psi} \sqrt{(b^2 + a^2 \text{Cotg}^2 \psi - x^{*2} \text{Cotg}^2 \psi)(1 + \text{Cotg}^2 \psi)} \quad (32a)$$

و

$$x_c = \frac{x^* a^2 \text{Cotg}^2 \psi}{b^2 + a^2 \text{Cotg}^2 \psi} \quad \text{و} \quad y_c = -\frac{x^* b^2}{b^2 + a^2 \text{Cotg}^2 \psi} \text{Cotg} \psi \quad (32b)$$

و

$$q^* = \frac{q_0}{b^2 + a^2 \text{Cotg}^2 \psi} \sqrt{(b^2 + a^2 \text{Cotg}^2 \psi - x^{*2} \text{Cotg}^2 \psi)(b^2 + a^2 \text{Cotg}^2 \psi)} \quad (31c)$$

بنابر این با استفاده از رابطه ( ۲۵ )

$$\int q ds = \frac{\pi ab q_0}{2} \frac{b^2 + a^2 \text{Cotg}^2 \psi - x^{*2} \text{Cotg}^2 \psi}{\sqrt{(b^2 + a^2 \text{Cotg}^2 \psi)^3}} \sqrt{1 + \text{Cotg}^2 \psi} \quad (33)$$

حال چنانچه در رابطه ( ۳۳ ) بجای  $q_0$  از رابطه ( ۲۴ ) جانشین کرده و سپس از رابطه ( ۲۱ ) استفاده کنیم

داریم :

$$\alpha - Ax^{*2} = \frac{3}{2} (\delta_1 + \delta_2) F \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b^2 + a^2 \text{Cotg}^2 \psi - x^{*2} \text{Cotg}^2 \psi}{\sqrt{(b^2 + a^2 \text{Cotg}^2 \psi)^3}} (\sqrt{1 + \text{Cotg}^2 \psi}) d\psi \quad (34)$$

رابطه ( ۳۴ ) با فرض  $\text{Tan} \psi = \frac{\sqrt{\zeta}}{b}$  بصورت :

$$\alpha - Ax^{*2} = \frac{3}{4} (\delta_1 + \delta_2) F \int_0^{\infty} \frac{1 - \frac{x^{*2}}{a^2 + \zeta}}{\sqrt{\zeta(a^2 + \zeta)(b^2 + \zeta)}} d\zeta \quad (35)$$

نوشته می شود . با برابر قرار دادن ضرایب مشابه از طرفین رابطه ( ۳۵ ) می توانیم بنویسیم :

$$\alpha = \frac{3}{4} (\delta_1 + \delta_2) F \int_0^{\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(a^2 + \zeta)(b^2 + \zeta)}} \quad (36)$$

$$A = \frac{3}{4} (\delta_1 + \delta_2) F \int_0^{\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(a^2 + \zeta)^3 (b^2 + \zeta)}} \quad (37)$$

حال چنانچه نقطه مورد بررسی در صفحه تماس، نه بر محور  $x$  و نه بر محور  $y$  منطبق باشد با بررسی معادله (۳۵) می توانیم نتیجه گیری کنیم که:

$$\alpha - Ax^{*2} - By^{*2} = \frac{3}{4}(\delta_1 + \delta_2)F \int_0^\infty \frac{1 - \frac{x^{*2}}{a^2 + \zeta} - \frac{y^{*2}}{b^2 + \zeta}}{\sqrt{\zeta(a^2 + \zeta)(b^2 + \zeta)}} d\zeta \quad (38)$$

است. این نتیجه گیری با در نظر گرفتن این واقعیت که معادله (۳۸) بازای  $y^* = 0$  منجر به نتایج ارایه شده بوسیله روابط (۳۶) و (۳۷) می گردد و همچنین صورت کسر در انتگرال ارایه شده بوسیله رابطه (۳۸) نمایشگر یک بیضی است بنظر قابل قبول می آید.

بنابر این با برابر قرار دادن ضرایب مشابه می توانیم بنویسیم:

$$B = \frac{3}{4}(\delta_1 + \delta_2)F \int_0^\infty \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(a^2 + \zeta)(b^2 + \zeta)^3}} \quad (39)$$

حال چنانچه  $k = \frac{a}{b}$  و  $\zeta^* = \frac{\zeta}{a^2}$  اختیار گردد معادلات (۳۶) و (۳۷) و (۳۹) بصورت:

$$\alpha = \frac{3}{4}(\delta_1 + \delta_2) \frac{F}{a} \int_0^\infty \frac{d\zeta^*}{\sqrt{\zeta^*(1 + \zeta^*)(k^{-2} + \zeta^*)}} \quad (40a)$$

$$A = \frac{3}{4}(\delta_1 + \delta_2) \frac{F}{a^3} \int_0^\infty \frac{d\zeta^*}{\sqrt{\zeta^*(1 + \zeta^*)^3(k^{-2} + \zeta^*)}} = \frac{3}{4}(\delta_1 + \delta_2) \frac{F}{a^3} \phi_1 \quad (40b)$$

$$B = \frac{3}{4}(\delta_1 + \delta_2) \frac{F}{a^3} \int_0^\infty \frac{d\zeta^*}{\sqrt{\zeta^*(1 + \zeta^*)(k^{-2} + \zeta^*)^3}} = \frac{3}{4}(\delta_1 + \delta_2) \frac{F}{a^3} \phi_2 \quad (40c)$$

نوشته می شوند. جهت تعیین اقطار بیضی سطح تماس چنانچه روابط (۴۰b) و (۴۰c) را با هم جمع کنیم داریم:

$$a = (\phi_1 + \phi_2)^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{\frac{3F(\delta_1 + \delta_2)}{4(A+B)}} = q_a \sqrt[3]{\frac{3F(\delta_1 + \delta_2)}{4(A+B)}} \quad (41a)$$

$$b = \frac{a}{k} = \frac{(\phi_1 + \phi_2)^{\frac{1}{3}}}{k} \sqrt[3]{\frac{3F(\delta_1 + \delta_2)}{4(A+B)}} = q_b \sqrt[3]{\frac{3F(\delta_1 + \delta_2)}{4(A+B)}} \quad (41b)$$

همچنین با استفاده از معادله (۴۰a) می توانیم بنویسیم:

$$F = \frac{4\alpha a}{3(\delta_1 + \delta_2)\phi_3} \quad (42)$$

که در آن:

$$\phi_3 = \int_0^\infty \frac{d\zeta^*}{\sqrt{\zeta^*(1 + \zeta^*)(k^{-2} + \zeta^*)}} \quad (43)$$

است . با جانشین کردن برای  $a$  در معادله ( ۴۲ ) ، از معادله ( ۴۱ a ) داریم :

$$F = \frac{4\alpha q_a}{3(\delta_1 + \delta_2)\phi_3} \left( \frac{3F(\delta_1 + \delta_2)}{4(A+B)} \right)^{\frac{1}{3}} \quad ( ۴۴ )$$

در نتیجه :

$$F = k_2 \alpha^{\frac{3}{2}} \quad ( ۴۵ )$$

که در آن :

$$k_2 = \frac{4}{3} \frac{q_a^{\frac{3}{2}}}{(\delta_1 + \delta_2)\sqrt{A+B}(\phi_3)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{3} \frac{q_k}{(\delta_1 + \delta_2)\sqrt{A+B}} \quad ( ۴۶ )$$

است .

### روش محاسبه مقادیر $q_k, q_b, q_a$ برای تماس دو کره

دو کره در تماس به شعاعهای  $R_1, R_2$  را در نظر گرفته و فرض کنید که بخواهیم تحت تاثیر نیروی فشاری  $F$  ابعاد سطح تماس و مقادیر تقرب و  $k_2$  را تعیین کنیم. بدین منظور لازم است که ابتدا نسبت  $\frac{A}{B}$  را تعیین کرده و سپس با استفاده از نمودار یا جدول مقدار متناظر  $k$  را برای نسبت  $\frac{A}{B}$  تعیین شده پیدا کنیم.

بنابر این با استفاده از معادلات (۱۷) و (۱۸) می توانیم بنویسیم:

$$2(A+B) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_2}$$

و

$$2(B-A) = \left[ \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right)^2 + \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right) \cos 2\beta \right]^{\frac{1}{2}}$$

از آنجائیکه برای کره یک  $R_1 = R'_1$  و برای کره دو  $R_2 = R'_2$  است داریم:

$$2(A+B) = \frac{2}{R_1} + \frac{2}{R_2}$$

$$2(B-A) = 0$$

پس:

$$A = B = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2}$$

در نتیجه:

$$\frac{A}{B} = 1$$

است. با استفاده از جدول یا نمودار که نمایشگر تغییرات  $k$  بر حسب نسبت  $\frac{A}{B}$  می باشد ملاحظه خواهیم

کرد که برای نسبت  $\frac{A}{B} = 1$  مقدار  $k$  نیز برابر واحد است. پس:

$$k = \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b$$

بنابر این در تماس دو کره سطح مقطع تماس به دایره تبدیل می گردد. حال از آنجائیکه:

$$\phi_1 = \int_0^{\infty} \frac{d\zeta^*}{\sqrt{\zeta^* (1+\zeta^*)^3 (k^{-2} + \zeta^*)}}$$

است داریم:

$$\phi_1 = \int_0^{\infty} \frac{d\zeta^*}{(1+\zeta^*)^2 \sqrt{\zeta^*}}$$

با فرض  $\zeta^* = \tan^2 \gamma$  می توانیم بنویسیم :

$$\phi_1 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \gamma d\gamma = \frac{\pi}{2}$$

چنانچه روابط (  $\epsilon \cdot b$  ) و (  $\epsilon \cdot c$  ) را بر یکدیگر تقسیم کنیم داریم :

$$\frac{A}{B} = \frac{\phi_1}{\phi_2} \Rightarrow \phi_2 = \phi_1 \frac{B}{A}$$

پس :

$$\phi_1 = \phi_2 = \frac{\pi}{2}$$

می باشد . حال با استفاده از رابطه (  $\epsilon 1 a$  ) :

$$q_a = (\phi_1 + \phi_2)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow q_a = \sqrt[3]{\pi}$$

پس :

$$a = q_a \sqrt[3]{\frac{3F(\delta_1 + \delta_2)}{4(A+B)}} = \sqrt[3]{\frac{3\pi F(\delta_1 + \delta_2)R_1R_2}{4(R_1 + R_2)}}$$

جهت تعیین تقرب از آنجائیکه :

$$\phi_3 = \int_0^{\infty} \frac{d\zeta^*}{\sqrt{\zeta^*(1+\zeta^*)(k^{-2} + \zeta^*)}}$$

است داریم :

$$\phi_3 = \int_0^{\infty} \frac{d\zeta^*}{(1+\zeta^*)\sqrt{\zeta^*}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\gamma = \pi$$

در نتیجه با استفاده از رابطه (  $\epsilon 2$  ) :

$$\alpha = \frac{3}{4} \frac{F(\delta_1 + \delta_2)}{a} \phi_3 = \sqrt{\frac{q\pi^2 F^2 (\delta_1 + \delta_2)^2 (R_1 + R_2)}{16R_1R_2}}$$

همچنین با استفاده از رابطه (  $\epsilon 6$  ) :

$$q_k = \left(\frac{q_a}{\phi_3}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\pi}$$

پس :

$$k_2 = \frac{4}{3\pi(\delta_1 + \delta_2)} \sqrt{\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}}$$

لازم است در این مقطع متذکر شویم که همچنین می توان مقادیر  $q_k, q_b, q_a$  را با در دست داشتن نسبت  $\frac{A}{B}$  و یا زاویه  $\theta$  که آنرا بصورت :

$$\cos \theta = \frac{B - A}{B + A}$$

تعریف می کنیم از روی جداول و یا نمودارها مربوط تعیین نمود . بدیهی است که برای تماس دو کره زاویه  $\theta = 90^\circ$  است .

جهت تعیین فشار ماکزیمم یعنی  $q_0$  ، با استفاده از معادله ( ۲۴ ) می توانیم بنویسیم :

$$q_0 = \frac{3}{2} \frac{F}{\pi a^2} = \sqrt[3]{\frac{6F}{\pi^5} \frac{(R_1 + R_2)^2}{(\delta_1 + \delta_2)^2 R_1^2 R_2^2}}$$

### روش محاسبه مقادیر $q_k, q_b, q_a$ برای تماس دو جسم اختیاری

دو جسم در تماس با شعاعهای اصلی انحنا  $R'_1, R_1$  برای جسم یک و  $R'_2, R_2$  برای جسم دو را در نظر گرفته و فرض می کنیم زاویه مابین صفحات شامل شعاع اصلی کوچکتر دو جسم برابر  $\beta$  باشد. در این صورت با استفاده از روابط (۱۷) و (۱۸) مقادیر  $B, A$  را بدست آورده و نسبت  $\frac{A}{B}$  را تعیین می کنیم. با استفاده از این نسبت از روی جدول یا نمودار مقدار  $k$  مشخص می گردد. در قدم بعدی انتگرال های  $\phi_3, \phi_1$  را با استفاده از روشهای عددی مثل روشهای ذوزنقه و سیمپسون جهت تعیین مقادیر  $q_k, q_b, q_a$  محاسبه می کنیم. سپس با استفاده از این مقادیر می توانیم ابعاد سطح تماس مقادیر تقرب،  $k_2$  و فشار ماکزیم را تعیین کنیم. بعنوان مثال تماس دو جسم چنبره ای فولادی با مدول الاستیسیته  $E_1 = E_2 = 200Gpa$  و ضریب پواسن  $\nu_1 = \nu_2 = 0.29$  را در نظر بگیرید که تحت تاثیر نیروی فشاری  $F = 4.5kN$  قرار گرفته باشند و فرض کنید شعاعهای انحنا دو جسم بصورت:

$$R_1 = 60mm \quad \text{و} \quad R'_1 = 130mm \quad \text{و} \quad R_2 = 80mm \quad \text{و} \quad R'_2 = 200mm$$

داده شده باشند. همچنین زاویه مابین صفحات شامل شعاع اصلی کوچکتر دو جسم یعنی صفحات شامل  $R_2, R_1$  را  $\beta = 60^\circ$  فرض کنید. در این صورت با استفاده از روابط (۱۷) و (۱۸) می توانیم بنویسیم:

$$2(A+B) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_2} = 0.04186mm^{-1}$$

$$2(B-A) = \left[ \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right)^2 + \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right) \cos 2\beta \right]^{\frac{1}{2}} = 0.00834mm^{-1}$$

پس:

$$A = 0.00838mm^{-1} \quad \text{و} \quad B = 0.01255mm^{-1}$$

در نتیجه:

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{B-A}{B+A} \right) = 78.5^\circ \quad \text{و} \quad \frac{A}{B} = 0.667$$

از روی جدول یا نمودار برای نسبت  $\frac{A}{B}$  فوق  $k = 1.3$  است. حال می بایستی انتگرال های  $\phi_3, \phi_1$  را با جانشین کردن  $k = 1.3$  با استفاده از یکی از روشهای عددی محاسبه کنیم. چنانچه این محاسبه را انجام دهیم داریم:

$$\phi_1 = \int_0^{\infty} \frac{d\zeta^*}{\sqrt{\zeta^* (1+\zeta^*)^3 (1.3^{-2} + \zeta^*)}} \approx 1.843$$

و

$$\phi_3 = \int_0^{\infty} \frac{d\zeta^*}{\sqrt{\zeta^*(1+\zeta^*)(1.3^{-2} + \zeta^*)}} \approx 3.64$$

بنابر این می توانیم بنویسیم :

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{A}{B} = 0.667 \Rightarrow \phi_2 = 2.763$$

$$q_a = (\phi_1 + \phi_2)^{\frac{1}{3}} = 1.66$$

$$\frac{q_a}{q_b} = k = 1.3 \Rightarrow q_b = 1.277$$

$$q_k = \left(\frac{q_a}{\phi_3}\right)^{\frac{3}{2}} = 0.308$$

همچنین :

$$\frac{\delta_1 + \delta_2}{A + B} = \frac{2(1 - \nu^2)}{\pi(A + B)E} = 139 \times 10^{-6} \text{mm}^3 / N$$

$$a = q_a \sqrt[3]{\frac{3F(\delta_1 + \delta_2)}{4(A + B)}} = 1.29 \text{mm}$$

$$\frac{a}{b} = k \Rightarrow b = 0.99 \text{mm}$$

$$\alpha = \frac{3F(\delta_1 + \delta_2)}{4a} \phi_3 = \frac{3F(\delta_1 + \delta_2)}{4a} \frac{q_a}{q_k^{\frac{2}{3}}} = 0.028 \text{mm}$$

$$k_2 = \frac{4}{3} \frac{q_k}{(\delta_1 + \delta_2)\sqrt{A + B}} = 0.976 \times 10^6 \text{N} \cdot \text{mm}^{-3/2}$$

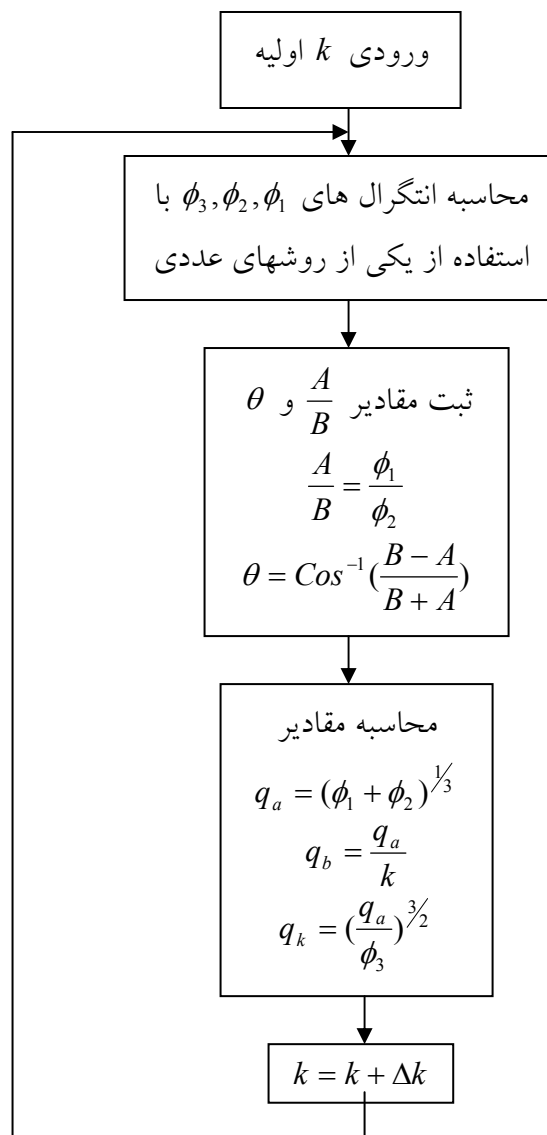
$$F = k_2 \alpha^{\frac{3}{2}} = 4.57 \text{kN} \quad (\text{check : ok})$$

$$q_0 = \frac{3}{2} \frac{F}{\pi ab} = 1.68 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2}$$



## روش تهیه جداول یا نمودارها

فرض کنید بعنوان مثال بخواهیم برای مقادیر مختلف  $k$  در فاصله  $1 \leq k \leq 100$  مقادیر  $\frac{A}{B}$ ،  $q_k, q_b, q_a$  را معین کرده در ستونهایی از یک جدول درج نمائیم. بدیهی است که می توانیم بجای تهیه جدول نمودارهای تغییرات  $k$ ،  $q_k, q_b, q_a$  را برحسب نسبت  $\frac{A}{B}$  ارایه کنیم، بدین منظور با انتخاب یک  $k$  مناسب برای  $k$  مثل  $\Delta k$  در هر قدم مقادیر  $q_k, q_b, q_a$  را طبق فلوجارت ذیل با استفاده از کامپیوتر محاسبه کنیم.



مثال :

مطلوبست تعیین ضرایب  $A, B$  و نسبت  $\frac{A}{B}$  برای برخورد های ذیل :

( a ) کره به شعاع  $R_1$  با یک کره به شعاع  $R_2$  .

( b ) کره به شعاع  $R_1$  با یک صفحه یا سطح مسطح .

( c ) استوانه به شعاع  $R_1$  با یک استوانه به شعاع  $R_2$  که محورش عمود بر امتداد محور استوانه به شعاع  $R_1$  است . (  $R_2 > R_1$  )

( d ) کره به شعاع  $R_1$  با یک استوانه به شعاع  $R_2$  .

( e ) کره به شعاع  $R_1$  با سطح درونی یک پوسته استوانه شکل به شعاع  $R_2$  . (  $R_2 > R_1$  )

( f ) کره به شعاع  $R_1$  با سطح درونی یک پوسته کروی شکل به شعاع  $R_2$  . (  $R_2 > R_1$  )

حل :

داریم :

$$2(A+B) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_2}$$

$$2(B-A) = \left[ \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right)^2 + \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right) \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right) \cos 2\beta \right]^{\frac{1}{2}}$$

( a )

$$R'_1 = R_1 \quad \text{و} \quad R'_2 = R_2$$

بنابر این :

$$2(A+B) = \frac{2}{R_1} + \frac{2}{R_2}$$

$$2(B-A) = 0$$

پس :

$$A = B = \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} \quad \text{و} \quad \frac{A}{B} = 1$$

( b )

$$R'_1 = R_1 \quad \text{و} \quad R'_2 = R_2 = \infty$$

بنابر این :

$$2(A+B) = \frac{2}{R_1}$$

$$2(B-A) = 0$$

پس :

$$A = B = \frac{1}{2R_1} \quad \text{و} \quad \frac{A}{B} = 1$$

( c )

$$R'_1 = \infty \quad \text{و} \quad R'_2 = \infty \quad \text{و} \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

بنابر این :

$$2(A + B) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$2(B - A) = \left[ \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$$

پس :

$$A = \frac{1}{2R_2} \quad \text{و} \quad B = \frac{1}{2R_1} \quad \text{و} \quad \frac{A}{B} = \frac{R_1}{R_2}$$

( d )

$$R'_1 = R_1 \quad \text{و} \quad R'_2 = \infty$$

بنابر این :

$$2(A + B) = \frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$2(B - A) = \frac{1}{R_2}$$

پس :

$$A = \frac{1}{2R_1} \quad \text{و} \quad B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{و} \quad \frac{A}{B} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

( e )

$$R'_1 = R_1 \quad \text{و} \quad R'_2 = \infty$$

بنابر این :

$$2(A + B) = \frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2}$$

$$2(B - A) = \frac{1}{R_2}$$

پس :

$$A = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{و} \quad B = \frac{1}{2R_1} \quad \text{و} \quad \frac{A}{B} = \frac{R_2 - R_1}{R_2}$$

( f )

$$R'_1 = R_1 \quad \text{و} \quad R'_2 = R_2$$

بنابر این :

$$2(A + B) = \frac{2}{R_1} - \frac{2}{R_2}$$

$$2(B - A) = 0$$

پس :

$$A = B = \frac{1}{2R_1} - \frac{1}{2R_2} \quad \text{و} \quad \frac{A}{B} = 1$$

### تئوری برخورد هرتز

در تئوری برخورد دو جسم الاستیک دیدیم که رابطه مابین نیرو و تقرب بصورت :

$$F = k_2 \alpha^{\frac{3}{2}} \quad (a)$$

داده می شود که در آن :

$$k_2 = \frac{4}{3} \frac{q_k}{(\delta_1 + \delta_2) \sqrt{A+B}}$$

است حال فرض کنید دو جسم الاستیک با سرعت های اولیه  $v_2^*, v_1^*$  بیکدیگر نزدیک شده و در نتیجه برخورد نمایند . در این صورت به محض تماس دو جسم نیروهای فشاری  $F$  شروع به عمل کرده و سبب تغییر سرعت هر یک از دو جسم می گردند . لذا طبق قانون دوم نیوتن می توانیم بنویسیم :

$$m_1 \frac{dv_1}{dt} = -F \quad \text{و} \quad m_2 \frac{dv_2}{dt} = -F \quad (b)$$

که در آنها  $m_2, m_1$  نمایشگر اجرام دو جسم می باشد . همچنین از آنجائیکه  $\alpha$  مسافت نزدیکی دو جسم است سرعت تقرب در هر لحظه ، سرعت نسبی لحظه ای حرکت دو جسم بوده و داریم :

$$\dot{\alpha} = v_1 + v_2$$

بنابر این با استفاده از رابطه (b) می توانیم بنویسیم :

$$\ddot{\alpha} = \dot{v}_1 + \dot{v}_2 = -k_1 F = -k_1 k_2 \alpha^{\frac{3}{2}} \quad (c)$$

که در آن :

$$k_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$$

است . اما از آنجائیکه :

$$\dot{\alpha} d\alpha = \ddot{\alpha} d\alpha$$

است . لذا رابطه (c) بصورت :

$$\ddot{\alpha} = \dot{\alpha} \frac{d\dot{\alpha}}{d\alpha} = -k_1 k_2 \alpha^{\frac{3}{2}} \quad (d)$$

نوشته می شود . با انتگرال گیری از طرفین رابطه (d) داریم :

$$\int_{v_0}^{\alpha} \dot{\alpha} d\dot{\alpha} = -k_1 k_2 \int_0^{\alpha} \alpha^{\frac{3}{2}} d\alpha$$

ویا :

$$\dot{\alpha}^2 - v_0^2 = -\frac{4}{5} k_1 k_2 \alpha^{\frac{5}{2}} \quad (e)$$

که در آن  $v_0$  سرعت نسبی اولیه برخورد دو جسم در لحظه  $t = 0$  و یا بعبارت دیگر در شروع برخورد می باشد. بهنگامیکه تقرب ماکزیمم است، سرعت نسبی  $\dot{\alpha}$  برابر صفر است. لذا با استفاده از رابطه (e) داریم:

$$\alpha_{\max} = \left( \frac{5}{4} \frac{v_0^2}{k_1 k_2} \right)^{\frac{2}{5}}$$

همچنین با استفاده از رابطه (a):

$$F_{\max} = k_2 \alpha_{\max}^{\frac{3}{2}} = k_2 \left( \frac{5}{4} \frac{v_0^2}{k_1 k_2} \right)^{0.6}$$

جهت تعیین رابطه مابین تقرب و زمان با استفاده از رابطه (e) داریم:

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = \sqrt{v_0^2 - \frac{4}{5} k_1 k_2 \alpha^{\frac{5}{2}}} = v_0 \sqrt{1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_{\max}} \right)^{\frac{5}{2}}}$$

پس:

$$t = \frac{1}{v_0} \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_{\max}} \right)^{\frac{5}{2}}}} \quad (f)$$

در نتیجه مدت زمان تماس بصورت:

$$\begin{aligned} d &= \frac{2}{v_0} \int_0^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha_{\max}} \right)^{\frac{5}{2}}}} = \frac{2\alpha_{\max}}{v_0} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^{\frac{5}{2}}}} \\ &= \frac{4}{5} \frac{\alpha_{\max}}{v_0} \int_0^1 x^{-\frac{3}{5}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{4}{5} \frac{\alpha_{\max}}{v_0} B\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{4}{5} \frac{\alpha_{\max}}{v_0} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)} = \frac{4}{5} \sqrt{\pi} \frac{\alpha_{\max}}{v_0} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)} = 2.94 \frac{\alpha_{\max}}{v_0} \end{aligned} \quad (g)$$

داده می شود که در آن  $\Gamma, B$  به ترتیب توابع بتا و گاما می باشند.

## روابط تقریبی تقرب و نیرو

یک رابطه تقریبی معقول مابین تقرب و زمان توسط شخصی بنام Hunter بصورت :

$$\alpha = \alpha_{\max} \text{Sin} \frac{1.068v_0 t}{\alpha_{\max}} \quad (\text{h})$$

پیشنهاد شده است . در نتیجه چنانچه از رابطه ( h ) دو بار نسبت به زمان مشتق گرفته و در رابطه ( c ) برای  $\ddot{\alpha}$  جانشین کنیم داریم :

$$F = -\frac{\ddot{\alpha}}{k_1} = \frac{1.14v_0^2}{k_1 \alpha_{\max}} \text{Sin} \frac{1.068v_0 t}{\alpha_{\max}} \quad (\text{i})$$

حال اگر آرگومان تابع سینوسی در رابطه ( h ) را بصورت :

$$\frac{1.068v_0 t}{\alpha_{\max}} = \frac{1.068 \times 2.9432v_0 t}{2.9432\alpha_{\max}} = \frac{\pi v_0 t}{2.9432\alpha_{\max}} = \frac{\pi t}{d}$$

بنویسیم ، می توانیم نتیجه گیری کنیم :

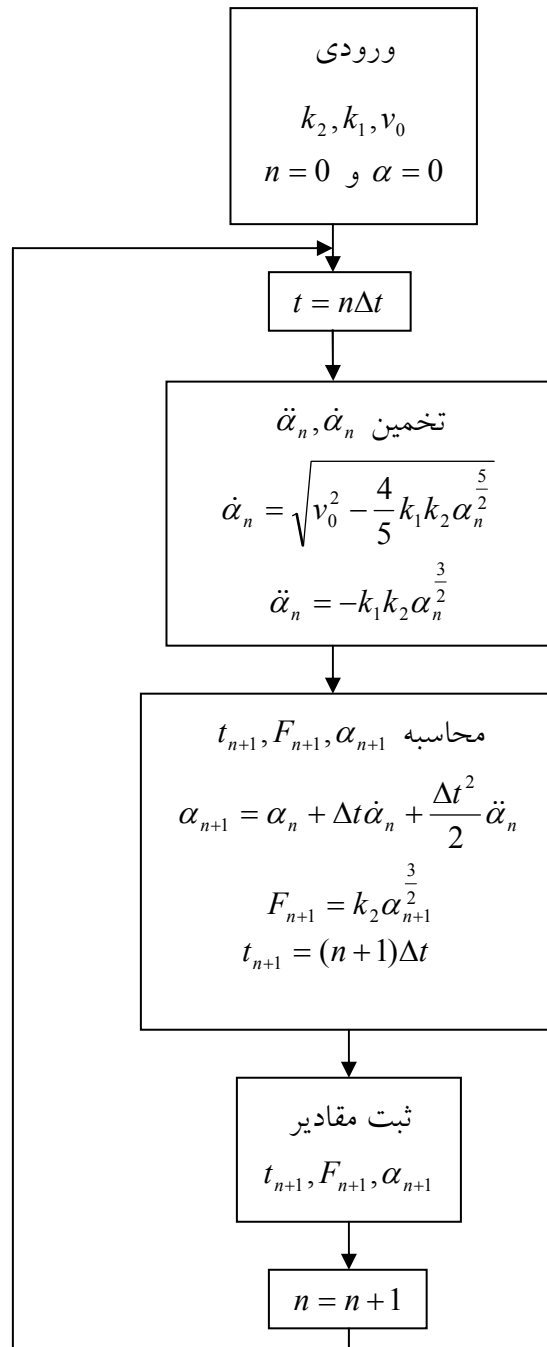
$$\alpha = \alpha_{\max} \text{Sin} \frac{\pi t}{d} \quad (\text{j})$$

و

$$\begin{aligned} F &= \frac{\pi^2}{k_1 d^2} \alpha_{\max} \text{Sin} \frac{\pi t}{d} = \frac{\pi^2 v_0^2}{k_1 (2.94)^2 \alpha_{\max}} \text{Sin} \frac{\pi t}{d} \\ &= k_2 \left( \frac{v_0^2}{k_1 k_2} \right)^{0.6} \frac{\pi^2}{2.94^2} \left( \frac{4}{5} \right)^{0.4} \text{Sin} \frac{\pi t}{d} \quad (\text{k}) \\ &= k_2 \left( \frac{5}{4} \frac{v_0^2}{k_1 k_2} \right)^{0.6} \text{Sin} \frac{\pi t}{d} = F_{\max} \text{Sin} \frac{\pi t}{d} \end{aligned}$$

پس می توان تقرب و نیرو را با تقریب خوبی بصورت پالس نصف سینوسی ارایه نمود .

جهت حل معادله ( c ) بصورت عددی می توانیم با استفاده از شرط اولیه  $\alpha = 0$  در لحظه  $t = 0$  و بکارگیری روابط ( c ) و ( e ) همراه با فرمول تیلور طبق فلوجارت ذیل مقادیر تقرب و نیروی متناظر با آن را در هر لحظه  $t = n\Delta t$  تعیین کرده و نتیجه نهایی را با تقریب پالس نصف سینوسی مقایسه کنیم .





مثال :

مطلوبست تعیین مقادیر پارامترهای ضربه برای حالات دیل :

( a ) برخورد کره بشعاع  $R_1$  با یک کره بشعاع  $R_2$  .

( b ) برخورد کره بشعاع  $R_1$  با یک صفحه مسطح وزین .

( c ) برخورد کره بشعاع  $R_1$  با یک صفحه مسطح کاملاً صلب و وزین .

حل :

فبلاً دیدیم برای برخورد کره بشعاع  $R_1$  با یک کره بشعاع  $R_2$  داریم :

$$A = B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{و} \quad \frac{A}{B} = 1$$

همچنین در روش محاسبه مقادیر  $q_k, q_b, q_a$  برای تماس دو کره دیدیم از آنجائیکه  $\frac{A}{B} = 1$  می باشد مقدار

$$k = \frac{a}{b} \quad \text{نیز برابر واحد است و نتیجه گرفتیم :$$

$$a = b \quad \text{و} \quad q_a = q_b = \sqrt[3]{\pi} \quad \text{و} \quad q_k = \frac{1}{\pi}$$

در برخورد کره بشعاع  $R_1$  با یک صفحه مسطح نیز دیدیم :

$$A = B = \frac{1}{2R_1} \quad \text{و} \quad \frac{A}{B} = 1$$

در نتیجه برای این حالت نیز از آنجائیکه  $\frac{A}{B} = 1$  می باشد می توانیم بنویسیم :

$$k = \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b \quad \text{و} \quad q_a = q_b = \sqrt[3]{\pi} \quad \text{و} \quad q_k = \frac{1}{\pi}$$

حال جهت تعیین پارامترهای ضربه برای حالت ( a ) داریم .

$$k_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \quad \text{و} \quad k_2 = \frac{4}{3} \frac{q_k}{(\delta_1 + \delta_2) \sqrt{A+B}} = \frac{4}{3\pi} \left( \frac{1}{\delta_1 + \delta_2} \right) \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

$$a = b = q_a \sqrt[3]{\frac{3p(\delta_1 + \delta_2)}{4(A+B)}} = \sqrt[3]{\frac{3\pi F(\delta_1 + \delta_2) R_1 R_2}{4(R_1 + R_2)}}$$

$$\alpha = \left( \frac{p}{k_2} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{a^2 (R_1 + R_2)}{R_1 R_2} = \frac{3}{4} \frac{F(\delta_1 + \delta_2)}{a} \phi_3 = \frac{3\pi}{4} \frac{F(\delta_1 + \delta_2)}{a}$$

$$\alpha_{\max} = \left( \frac{5}{4} \frac{v_0^2}{k_1 k_2} \right)^{\frac{2}{5}} = \left[ \frac{15\pi v_0^2 m_1 m_2 (\delta_1 + \delta_2)}{16(m_1 + m_2)} \right]^{\frac{2}{5}} \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)^{\frac{1}{5}}$$

$$d = 2.94 \frac{\alpha_{\max}}{v_0} = 4.53 \left[ \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} (\delta_1 + \delta_2) \right]^{\frac{2}{5}} \left( \frac{R_1 + R_2}{v_0 R_1 R_2} \right)^{\frac{1}{5}}$$

$$\begin{aligned}
q_{\max} &= \frac{2 F_{\max}}{3 \pi \alpha_m^2} = \frac{3 F_{\max}}{2 \pi \alpha_{\max}} \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right) = \frac{3 k_2 \alpha_{\max}^{\frac{3}{2}}}{2 \pi \alpha_{\max}} \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right) \\
&= \frac{3}{2 \pi} k_2 \alpha_{\max}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right) = \frac{3}{2 \pi} \left( \frac{4}{3 \pi} \right) \left( \frac{1}{\delta_1 + \delta_2} \right) \alpha_{\max}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{3}{2 \pi} \left( \frac{4}{3 \pi} \right) \left( \frac{1}{\delta_1 + \delta_2} \right) \left[ \frac{15 \pi v_0^2 m_1 m_2 (\delta_1 + \delta_2)}{16 (m_1 + m_2)} \right]^{\frac{1}{5}} \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)^{\frac{1}{10}} \cdot \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2}{\pi^2} \left[ \frac{15 \pi v_0^2 m_1 m_2}{16 (m_1 + m_2) (\delta_1 + \delta_2)^4} \right]^{\frac{1}{5}} \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)^{\frac{3}{5}} = 0.25 \left[ \frac{v_0^2 m_1 m_2}{(m_1 + m_2) (\delta_1 + \delta_2)^4} \right]^{\frac{1}{5}} \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)^{\frac{3}{5}}
\end{aligned}$$

بطریق مشابه برای حالت (b) :

$$k_1 = \frac{1}{m_1} \quad \text{و} \quad k_2 = \frac{4}{3 \pi} \frac{\sqrt{R_1}}{\delta_1 + \delta_2} \quad \text{و} \quad a = b = \sqrt[3]{\frac{3 \pi}{4} F (\delta_1 + \delta_2) R_1}$$

$$\alpha = \frac{a^2}{R_1} = \frac{3 \pi F (\delta_1 + \delta_2)}{4 a} \quad \text{و} \quad \alpha_{\max} = \left[ \frac{15 \pi v_0^2 m_1 (\delta_1 + \delta_2)}{16 \sqrt{R_1}} \right]^{\frac{2}{5}}$$

$$d = 4.53 \left[ \frac{m_1 (\delta_1 + \delta_2)}{\sqrt{v_0 R_1}} \right]^{\frac{2}{5}} \quad \text{و} \quad q_{\max} = \left[ \frac{v_0^2 m_1}{(\delta_1 + \delta_2)^4 R_1^3} \right]^{\frac{1}{5}}$$

(c) از آنجائیکه در این حالت صفحه علاوه بر وزین بودن کاملاً صلب نیز می باشد لذا داریم :

$$E_2 = \infty \Rightarrow \delta_2 = \frac{1 - v_2^2}{\pi E_2} = 0$$

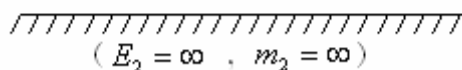
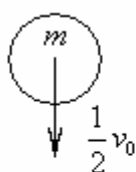
بنابر این کافی است که در روابط بدست آمده برای حالت (b) ،  $\delta_2$  را برابر صفر قرار دهیم . پس :

$$k_1 = \frac{1}{m} \quad \text{و} \quad k_2 = \frac{4}{3 \pi} \frac{\sqrt{R_1}}{\delta_1} \quad \text{و} \quad a = b = \sqrt[3]{\frac{3 \pi}{4} F \delta_1 R_1} \quad \text{و} \quad \alpha = \frac{a^2}{R_1} = \frac{3 \pi F \delta_1}{4 a}$$

$$\alpha_{\max} = \left[ \frac{15 \pi v_0^2 m_1 \delta_1}{16 \sqrt{R_1}} \right]^{\frac{2}{5}} \quad \text{و} \quad d = 4.53 \left[ \frac{m_1 \delta_1}{\sqrt{v_0 R_1}} \right]^{\frac{2}{5}} \quad \text{و} \quad q_{\max} = \left[ \frac{v_0^2 m_1}{\delta_1^4 R_1^3} \right]^{\frac{1}{5}}$$

### تئوری برخورد الاستیک پلاستیک ( تئوری Andrews )

بواسطه محدودیت کاربرد معادله  $F = k_2 \alpha^{\frac{3}{2}}$  در تحلیل برخوردهای شامل تغییر شکلهای الاستیک و پلاستیک برخورد دو کره نرم و یکسان با شعاع  $R$  و سرعت نسبی برخورد  $v_0$  را مورد بررسی قرار می دهیم . بر اساس تئوری برخورد Andrews ، فرض می شود که هر یک از دو کره به تنهایی با سرعت نصف سرعت نسبی برخورد یعنی  $\frac{1}{2}v_0$  با صفحه کاملاً صلب و وزینی ( $E_2 = \infty$  و  $m_2 = \infty$ ) مطابق شکل a برخورد نمایند .



شکل a

در این صورت همانطور که در تعیین مقادیر پارامترهای ضربه برای برخورد الاستیک کره با صفحه مسطح کاملاً صلب و وزین دیدیم داریم :

$$\delta_1 = \frac{1-v^2}{\pi E} \quad \text{و} \quad \delta_2 = 0 \quad \text{و} \quad k_1 = \frac{1}{m} \quad \text{و} \quad k_2 = \frac{4}{3} \frac{E}{1-v^2} \sqrt{R}$$

$$a = b = \sqrt[3]{\frac{3F(1-v^2)}{4E}} \quad \text{و} \quad \alpha = \frac{a^2}{R}$$

همچنین بر اساس این تئوری فرض می شود که مدت زمان تماس شامل سه مرحله باشد .

۱- فشردگی الاستیک اولیه که از قانون هرتز تبعیت می کند بعبارت دیگر در این مرحله رابطه  $F = k_2 \alpha^{\frac{3}{2}}$  صادق است . این مرحله تا ایجاد یک تنش یا فشار بحرانی مفروض مثل  $q_0^*$  در مرکز سطح تماس ادامه می یابد ..

۲- فشردگی که از پایان مرحله اول آغاز می شود و در خلال آن یک منطقه پلاستیک محاصره شده بوسیله یک حلقه الاستیک از مرکز سطح تماس بطرف بیرون آن تحت فشار ثابت  $q_0^*$  رشد می یابد

۳- بازگشت که با به صفر رسیدن سرعت نسبی برخورد دو جسم آغاز می گردد و در خلال آن دایره پلاستیک ایجاد شده در پایان مرحله دوم که بوسیله حلقه الاستیک محاصره شده است بصورت الاستیکی تحت فشار ثابت الاستیکی پایانی مرحله دوم به ترتیبی بازگشت می نماید که شعاع دهانه دائمی تغییر شکل در پایان این مرحله برابر با شعاع دایره پلاستیک ایجاد شده در پایان مرحله دوم باشد .

حال همانطور که قبلاً دیدیم برای یک سطح تماس دایره ای به شعاع  $a$  توزیع فشار الاستیکی بوسیله رابطه :

$$q = \frac{q_0}{a} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

داده می شود . چنانچه فاصله نقطه به مختصات  $(x, y)$  واقع در داخل محدوده سطح تماس را از مرکز سطح تماس با  $r$  نمایش دهیم می توانیم بنویسیم :

$$q = \frac{q_0}{a} \sqrt{a^2 - r^2} \quad (a)$$

اما :

$$q_0 = \frac{3F}{2\pi a^2} \quad \text{و} \quad a = \sqrt[3]{\frac{3F(1-\nu^2)R}{4E}} \quad (b)$$

پس فشار الاستیکی در فاصله  $r$  از مرکز یک سطح تماس دایره ای به شعاع  $a$  با استفاده از روابط ( a ) و ( b ) برای برخورد الاستیک یک کره با صفحه مسطح کاملاً صلب و وزین بصورت :

$$q = \frac{2E\sqrt{a^2 - r^2}}{\pi(1-\nu^2)R} \quad (c)$$

داده می شود . از آنجائیکه در خلال مدت زمان دوام مرحله اول قانون هرتز صادق است و این مرحله بهنگامی خاتمه می یابد که فشار در مرکز سطح تماس برابر فشار بحرانی  $q_0^*$  شود ، لذا چنانچه شعاع سطح تماس در پایان مرحله اول را با  $a_1$  نمایش دهیم با استفاده از رابطه ( c ) می توانیم بنویسیم :

$$a_1 = \frac{\pi R q_0^* (1-\nu^2)}{2E} \quad (d)$$

همچنین از آنجائیکه :

$$\alpha = \frac{a^2}{R}$$

است . لذا چنانچه فاصله تقرب در لحظه پایانی مرحله اول را با  $\alpha_1$  نمایش دهیم داریم :

$$\alpha_1 = \frac{a_1^2}{R} = R \frac{\pi^2 q_0^{*2} (1-\nu^2)^2}{4E^2} \quad (e)$$

جهت تعیین سرعت تقرب می توانیم بنویسیم :

$$\dot{\alpha}d\dot{\alpha} = \ddot{\alpha}d\alpha = -k_1k_2\alpha^{\frac{3}{2}}d\alpha$$

پس :

$$\int_{\frac{1}{2}v_0}^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha}d\dot{\alpha} = -k_1k_2 \int_0^{\alpha} \alpha^{\frac{3}{2}}d\alpha$$

در نتیجه :

$$\dot{\alpha} = \frac{v_0}{2} \sqrt{1 - \frac{16k_1k_2}{5v_0^2} \alpha^{\frac{5}{2}}}$$

و یا :

$$\dot{\alpha} = \frac{v_0}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\varphi}\right)^{\frac{5}{2}}} \quad (f)$$

که در آن :

$$\varphi = \left(\frac{5v_0^2}{16k_1k_2}\right)^{\frac{2}{5}}$$

اختیار شده است . بنابر این چنانچه سرعت تقرب در لحظه پایانی مرحله اول را با  $\dot{\alpha}_1$  نمایش دهیم با استفاده از رابطه ( f ) داریم :

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{v_0}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\varphi}\right)^{\frac{5}{2}}} \quad (g)$$

همچنین جهت تخمین مدت زمان دوام مرحله اول با استفاده از رابطه ( f ) داریم :

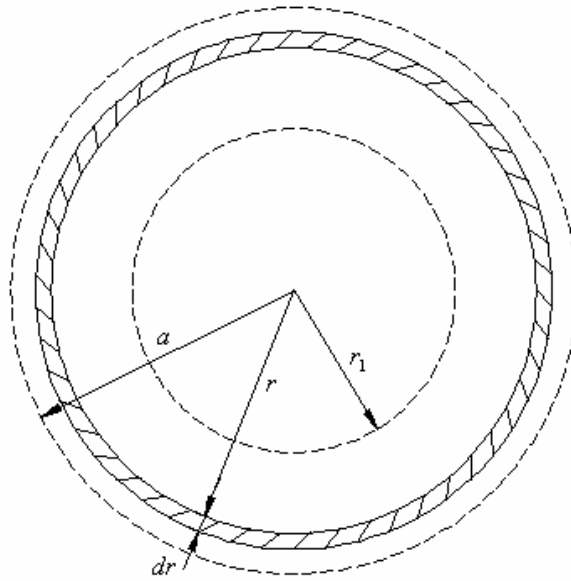
$$\int_0^{t_1} dt = \frac{2}{v_0} \int_0^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\varphi}\right)^{\frac{5}{2}}}}$$

که با جانشین کردن  $z = \frac{\alpha}{\varphi}$  بصورت :

$$t_1 = \frac{2\varphi}{v_0} \int_0^{\frac{\alpha_1}{\varphi}} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^{\frac{5}{2}}}} \quad (h)$$

داده می شود .

حال چنانچه شعاع لحظه ای سطح تماس در مرحله دوم را با  $a$  نمایش دهیم این سطح تماس همانطور که در شکل **b** نشان داده شده است دارای دو منطقه پلاستیک و الاستیک خواهد بود .



شکل b

چنانچه بهنگامیکه شعاع لحظه ای سطح تماس برابر  $a$  است شعاع منطقه پلاستیک را  $r_1$  فرض کنیم از آنجائیکه منطقه پلاستیک تحت تاثیر فشار ثابت  $q_0^*$  می باشد لذا نیرو در منطقه پلاستیک بصورت :

$$F_p = \pi r_1^2 q_0^* \quad (i)$$

نوشته می شود . جهت تعیین نیرو در حلقه الاستیک به ضخامت  $a - r_1$  با استفاده از رابطه (c) داریم :

$$F_E = \int_{r_1}^a 2\pi r q dr = \frac{4E}{(1-\nu^2)R} \int_{r_1}^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr \quad (j)$$

$$= \frac{4E}{(1-\nu^2)R} \left[ -\frac{1}{3} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{r_1}^a = \frac{4}{3} \frac{4E(a^2 - r_1^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-\nu^2)R}$$

همچنین از آنجائیکه در  $r = r_1$  ،  $q$  می بایستی برابر  $q_0^*$  باشد با استفاده از رابطه (c) می توانیم بنویسیم :

$$a^2 - r_1^2 = \frac{\pi^2 (1-\nu^2)^2 R^2}{4E^2} q_0^{*2} \quad (k)$$

که با استفاده از رابطه (e) برحسب  $\alpha_1$  بصورت :

$$a^2 - r_1^2 = R\alpha_1 \quad (l)$$

نوشته می شود . بنابر این نیرو در هر لحظه در منطقه پلاستیک با جانشین کردن برای  $r_1$  در معادله (i) از

معادله (l) بوسیله رابطه :

$$F_p = \pi (a^2 - R\alpha_1) q_0^* \quad (m)$$

داده می شود . همچنین نیرو در هر لحظه در منطقه الاستیک با جانشین کردن رابطه (k) در معادله (j)

بصورت :

$$F_E = \frac{1}{6} \frac{\pi^3 (1 - v^2)^2}{E^2} R^2 q_0^{*3} \quad (n)$$

نوشته می شود . چنانچه معادله ( n ) را با استفاده از رابطه ( e ) بر حسب  $\alpha_1$  ارایه کنیم داریم :

$$F_E = \frac{2}{3} \pi R \alpha_1 q_0^{*3}$$

بنابر این کل نیرو در هر لحظه در مرحله دوم بصورت :

$$F = F_P + F_E = \pi \left( a^2 - \frac{1}{3} R \alpha_1 \right) q_0^*$$

داده می شود . اما از آنجائیکه در هر لحظه  $a^2 = R \alpha$  است می توانیم بنویسیم :

$$F = \pi R \left( \alpha - \frac{1}{3} \alpha_1 \right) q_0^* \quad (o)$$

در نتیجه معادله حرکت در مرحله دوم بوسیله رابطه :

$$F = -m \ddot{\alpha} = \pi R \left( \alpha - \frac{1}{3} \alpha_1 \right) q_0^*$$

ویا :

$$\ddot{\alpha} = \frac{1}{3} \eta^2 \alpha_1 - \eta^2 \alpha \quad (p)$$

داده می شود که در آن  $\eta^2 = \frac{\pi R}{m} q_0^*$  است . جواب معادله دیفرانسیل ( p ) بصورت :

$$\alpha = c_1 \sin(\eta t + \varphi) + c_2$$

نوشته می شود . با جانشین کردن این جواب در معادله دیفرانسیل ( p ) داریم :

$$c_2 = \frac{1}{3} \alpha_1$$

پس :

$$\alpha = c_1 \sin(\eta t + \varphi) + \frac{1}{3} \alpha_1$$

همچنین :

$$\dot{\alpha} = c_1 \eta \cos(\eta t + \varphi) \quad (q)$$

از آنجائیکه شرایط انتهایی مرحله اول بعنوان شرایط ابتدایی مرحله دوم بکار گرفته می شوند ، لذا می بایستی

در شروع مرحله دوم (  $t = 0$  )  $\alpha = \alpha_1$  و  $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_1$  باشد . بنابر این :

$$\alpha = c_1 \sin(\varphi) + \frac{1}{3} \alpha_1$$

$$\dot{\alpha} = c_1 \eta \cos(\varphi)$$

پس :

$$c_1 = \left( \frac{4}{9} \alpha_1^2 + \frac{\dot{\alpha}_1^2}{\eta^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{2}{3} \eta \frac{\alpha_1}{\dot{\alpha}_1}$$

بنابر این :

$$\alpha = \left( \frac{4}{9} \alpha_1^2 + \frac{\dot{\alpha}_1^2}{\eta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sin(\eta t + \varphi) + \frac{1}{3} \alpha_1 \quad (r)$$

همچنین در پایان مرحله دوم می بایستی سرعت نسبی برخورد دو جسم برابر صفر باشد در نتیجه با جانشین کردن  $\dot{\alpha} = 0$  در رابطه (q) مدت زمان دوام مرحله دوم بصورت :

$$t_2 = \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \frac{1}{\eta} \quad (s)$$

داده می شود . همچنین چنانچه تقرب در لحظه پایانی مرحله دوم را با  $\alpha_2$  نمایش دهیم با استفاده از معادله (r) داریم :

$$\alpha_2 = \left( \frac{4}{9} \alpha_1^2 + \frac{\dot{\alpha}_1^2}{\eta^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \alpha_1 \quad (t)$$

در نتیجه شعاع سطح تماس در پایان مرحله دوم بوسیله رابطه :

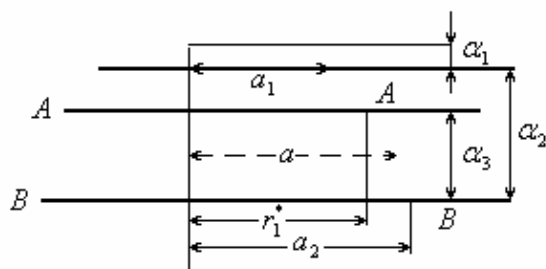
$$a^2 = R \alpha_2 = R \left[ \left( \frac{4}{9} \alpha_1^2 + \frac{\dot{\alpha}_1^2}{\eta^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \alpha_1 \right] \quad (u)$$

داده می شود . جهت تعیین شعاع منطقه پلاستیک در پایان مرحله دوم با استفاده از رابطه (I) می توانیم بنویسیم :

$$r_1^{*2} = a^2 - R \alpha_1 = R \left[ \left( \frac{4}{9} \alpha_1^2 + \frac{\dot{\alpha}_1^2}{\eta^2} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} \alpha_1 \right] \quad (v)$$

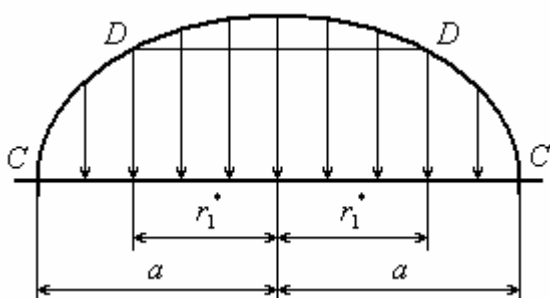
حال قبل از بررسی مرحله سوم با توجه به شکل c مراحل مختلف برخورد الاستیک پلاستیک را مجدداً مرور می کنیم . همانطور که در شکل ملاحظه می شود . در پایان مرحله فشردگی الاستیک اولیه مقدار تقرب برابر  $\alpha_1$  و شعاع سطح تماس برابر  $a_1$  است در پایان فشردگی بعدی که از پایان مرحله اول آغاز می شود مقدار تقرب برابر  $\alpha_2$  و شعاع سطح تماس برابر  $a_2$  است . در روی این سطح تماس منطقه ای بشعاع  $r_1^*$  بصورت پلاستیک و حلقه ای به ضخامت  $a_2 - r_1^*$  بصورت الاستیک می باشد .



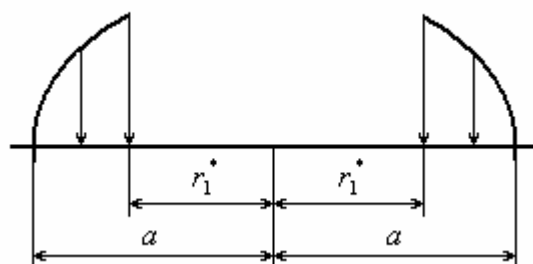


شکل c

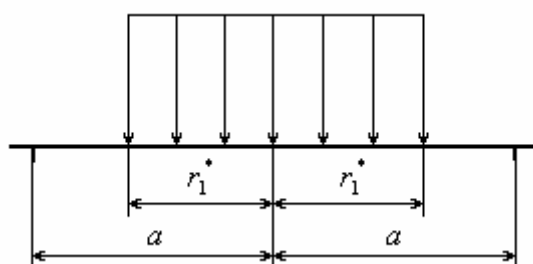
در مرحله آخر فرض بر این است که این منطقه حاوی دایره پلاستیک و حلقه الاستیک دور آن بصورت الاستیکی به موقعیت  $A-A$  باز می گردد که در این موقعیت شعاع تماس برابر شعاع منطقه پلاستیک در پایان مرحله دوم یعنی  $r_1^*$  می باشد در نتیجه شعاع دهانه تغییر شکل دائمی ایجاد شده برابر  $r_1^*$  خواهد بود. چنانچه با استفاده از رابطه (c) نمایش تغییرات فشار الاستیکی در روی سطح تماس به شعاع  $a$  را که مابین موقعیت های  $A-A$  و  $B-B$  واقع شده است رسم کنیم (شکل d)



شکل d



شکل e



شکل f

ملاحظه خواهیم کرد که جهت عودت موقعیت  $C-C$  به  $D-D$  می بایستی از روی حلقه الاستیک نیرویی ناشی از توزیع فشار مطابق شکل e و از روی دایره پلاستیک نیروی ناشی از توزیع فشار مطابق شکل f را مرتفع نمود. بنابر این در مرحله بازگشت نیرو بواسطه حلقه الاستیک با استفاده از رابطه (c) بصورت:

$$F_E)_{\text{بازگشت}} = \int_{r_1^*}^a 2\pi r q dr = \frac{4E}{(1-\nu^2)R} \int_{r_1^*}^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr$$

$$= \frac{4}{3} \frac{E(a^2 - r_1^{*2})^{\frac{3}{2}}}{(1-\nu^2)R}$$

داده می شود . همچنین نیرو بواسطه دایره پلاستیک بصورت :

$$F_P)_{\text{بازگشت}} = \pi r_1^{*2} q \Big|_{r=r_1^*} = \frac{2Er_1^{*2}}{(1-\nu^2)R} \sqrt{a^2 - r_1^{*2}}$$

ارایه می گردد . در نتیجه کل نیرو در هر لحظه در مرحله سوم بوسیله رابطه :

$$F = \frac{2E}{(1-\nu^2)R} \left[ \frac{2}{3} (a^2 - r_1^{*2})^{\frac{3}{2}} + r_1^{*2} \sqrt{a^2 - r_1^{*2}} \right]$$

داده می شود . جهت تعیین معادله حرکت در این مرحله می توانیم بنویسیم :

$$F = -m\ddot{\alpha} = \frac{2E}{(1-\nu^2)R} \left[ \frac{2}{3} (a^2 - r_1^{*2})^{\frac{3}{2}} + r_1^{*2} \sqrt{a^2 - r_1^{*2}} \right]$$

اما از آنجائیکه در هر لحظه  $a^2 = R\alpha$  است داریم :

$$\ddot{\alpha} = -\frac{2E}{m(1-\nu^2)R} \left[ \frac{2}{3} (R\alpha - r_1^{*2})^{\frac{3}{2}} + r_1^{*2} \sqrt{R\alpha - r_1^{*2}} \right]$$

و یا با فرض  $v = R\alpha - r_1^{*2}$  :

$$\ddot{v} = -\frac{2E}{m(1-\nu^2)} \left[ \frac{2}{3} v^{\frac{3}{2}} + r_1^{*2} v^{\frac{1}{2}} \right]$$

حال از آنجائیکه :

$$\dot{v} dv = \ddot{v} dv$$

است داریم :

$$\int_{\dot{v}_0}^{\dot{v}} \dot{v} dv = -\frac{2E}{m(1-\nu^2)} \int_{v_0}^v \left( \frac{2}{3} v^{\frac{3}{2}} + r_1^{*2} v^{\frac{1}{2}} \right) dv$$

اما شرایط اولیه در مرحله سوم همان شرایط پایانی در مرحله دوم است لذا در شروع مرحله سوم ( $t = 0$ )

$\alpha = \alpha_2$  و  $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_2 = 0$  است . بنابر این :

$$v_0 = R\alpha_2 - r_1^{*2} = R\alpha_2 - a_2^2 + R\alpha_2 = R\alpha_2 - R\alpha_2 + R\alpha_1 = R\alpha_1$$

و از آنجائیکه  $\dot{v} = R\dot{\alpha}$  است داریم :

$$\dot{v}_0 = R\dot{\alpha}_2 = 0$$

پس :

$$\frac{1}{2} \dot{v}^2 = -\frac{2E}{m(1-\nu^2)} \left[ \frac{4}{15} v^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} r_1^{*2} v^{\frac{3}{2}} \right]_{v_0}^v$$

و یا :

$$\begin{aligned} \dot{v}^2 &= -\frac{8E}{3m(1-\nu^2)} \left[ \frac{2}{5} (v^{\frac{5}{2}} - v_0^{\frac{5}{2}}) + r_1^{*2} (v^{\frac{3}{2}} - v_0^{\frac{3}{2}}) \right] \\ &= \frac{8E}{3m(1-\nu^2)} \left\{ \frac{2}{5} v_0^{\frac{5}{2}} \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^{\frac{5}{2}} \right] + r_1^{*2} v_0^{\frac{3}{2}} \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \right\} \\ &= \frac{8E v_0^{\frac{3}{2}}}{3m(1-\nu^2)} \left\{ \frac{2}{5} v_0 \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^{\frac{5}{2}} \right] + r_1^{*2} \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \right\} \\ \dot{v} &= \lambda^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2}{5} v_0 \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^{\frac{5}{2}} \right] + r_1^{*2} \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (w)$$

پس :

$$\int_0^{t_3} dt = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{v_0}^{v_f} \frac{dv}{\left\{ \frac{2}{5} v_0 \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^{\frac{5}{2}} \right] + r_1^{*2} \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

که در آن :

$$\lambda = \frac{8E v_0^{\frac{3}{2}}}{3m(1-\nu^2)}$$

است . در اینجا می بایست در نظر داشت باشیم که در پایان مرحله سوم شعاع سطح تماس که آنرا  $a_3$  فرض می کنیم برابر با شعاع منطقه پلاستیک در پایان مرحله دوم یعنی  $r_1^*$  می باشد . در نتیجه چنانچه مسافت تقرب در پایان مرحله سوم را  $\alpha_3$  فرض کنیم با استفاده از رابطه  $a^2 = R\alpha$  داریم :

$$a_3^2 = R\alpha_3 = r_1^{*2}$$

اما با استفاده از رابطه (v) :

$$r_1^{*2} = a_2^2 - R\alpha_1 = R(\alpha_2 - \alpha_1)$$

پس :

$$\alpha_3 = \alpha_2 - \alpha_1$$

همچنین از آنجائیکه برای انتگرال گیری

$$v = R\alpha - r_1^{*2}$$

اختیار شده است لذا چنانچه مقدار  $v$  در پایان مرحله سوم را با  $v_f$  نمایش دهیم داریم :

$$v_f = R\alpha_3 - r_1^{*2} = r_1^{*2} - r_1^{*2} = 0$$

حال چنانچه  $z = \frac{v}{v_0}$  اختیار گردد می توانیم بنویسیم :

$$t_3 = \frac{v_0}{\sqrt{\lambda}} \int_1^0 \frac{dz}{\left\{ \frac{2}{5}v_0(1-z^2) + r_1^{*2}(1-z^2) \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

همچنین با استفاده از رابطه ( W ) با جانشین کردن مقدار  $v$  در پایان مرحله سوم می توانیم مقدار  $\dot{v}$  در

پایان این مرحله که آنرا با  $\dot{v}_f$  نمایش می دهیم محاسبه کنیم بنابر این :

$$\dot{v}_f = \lambda^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2}{5}v_0 + r_1^{*2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

اما ،  $v_0 = R\alpha_1$  و  $r_1^{*2} = R(\alpha_2 - \alpha_1)$  در نتیجه :

$$\begin{aligned} \dot{v}_f &= \lambda^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2}{5}\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \right)^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}} = \lambda^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}} \left( \alpha_2 - \frac{3}{5}\alpha_1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[ \frac{8E}{3m(1-\nu^2)} \right]^{\frac{1}{2}} v_0^{\frac{3}{4}} R^{\frac{1}{2}} \left( \alpha_2 - \frac{3}{5}\alpha_1 \right)^{\frac{1}{2}} = \beta R^{\frac{5}{4}} \alpha_1^{\frac{3}{4}} \left( \alpha_2 - \frac{3}{5}\alpha_1 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

پس :

$$\dot{\alpha}_3 = \frac{\dot{v}_3}{R} = \beta R^{\frac{1}{4}} \alpha_1^{\frac{3}{4}} \left( \alpha_2 - \frac{3}{5}\alpha_1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

که در آن :

$$\beta = \left[ \frac{8E}{3m(1-\nu^2)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

## مطالعه تغییرات نیرو برحسب زمان در برخورد الاستیک - پلاستیک

جهت بررسی تغییرات نیرو برحسب زمان در مرحله اول می بایستی ابتدا مدت زمان دوام مرحله اول را با استفاده از رابطه :

$$t_1 = \frac{2\varphi}{v_0} \int_0^{\frac{\alpha_1}{\varphi}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

محاسبه کنیم . بدین منظور چنانچه تابع  $f(z)$  را بصورت :

$$f(z) = \frac{2\varphi}{v_0 \sqrt{1-z^2}}$$

اختیار کنیم داریم :

$$t_1 = \int_0^{\frac{\alpha_1}{\varphi}} f(z) dz$$

پس کافیست که فاصله 0 تا  $\frac{\alpha_1}{\varphi}$  را به  $n$  قسمت تقسیم کرده با استفاده از قانون ذوزنقه یا سیمپسون سطح زیر منحنی تغییرات  $f(z)$  برحسب  $z$  را در فاصله 0 تا  $\frac{\alpha_1}{\varphi}$  تخمین بزنیم . بدین ترتیب مدت زمان دوام مرحله اول تعیین می گردد . در قدم بعدی چنانچه مدت زمان دوام مرحله اول یعنی  $t_1$  را به  $n_1$  قسمت تقسیم کنیم داریم :

$$\Delta t = \frac{t_1}{n_1}$$

در نتیجه جهت تخمین  $\ddot{\alpha}$  و نیروی متناظر با آن در هر لحظه از زمان  $0 \leq \tau \leq t_1$  با استفاده از بسط تیلور می توانیم بنویسیم :

$$\alpha|_{t=n\Delta t} = \alpha|_{t=(n-1)\Delta t} + \Delta t \dot{\alpha}|_{t=(n-1)\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{2!} \ddot{\alpha}|_{t=(n-1)\Delta t} + \dots$$

و

$$F|_{t=(n-1)\Delta t} = -\frac{1}{k_1} \ddot{\alpha}|_{t=(n-1)\Delta t}$$

که در آنها :

$$\dot{\alpha}|_{t=(n-1)\Delta t} = \frac{v_0}{2} \left[ 1 - \varphi^{\frac{5}{2}} \alpha|_{t=(n-1)\Delta t}^{\frac{5}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

و

$$\ddot{\alpha}|_{t=(n-1)\Delta t} = -k_1 k_2 \alpha|_{t=(n-1)\Delta t}^{\frac{3}{2}}$$

است بنابر این در لحظه شروع (  $n=1$  ) کافیت مقدار  $\alpha$  در لحظه  $t=0$  مشخص باشد . بدیهی است چنانچه جهت تخمین  $\alpha$  نیاز به منظور کردن جملات با مشتقات بالاتر از مرتبه دوم در بسط تیلور باشد می توانیم با مشتق گیری متوالی از رابطه :

$$\ddot{\alpha} = -k_1 k_2 \alpha^{\frac{3}{2}}$$

جملات با مشتقات بالاتر را نیز در بسط تیلور منظور کنیم . در برخی موارد از آنجائیکه  $\Delta t$  کوچک است ممکن است منظور نمودن فقط سه جمله از بسط تیلور در محاسبات جهت بدست آوردن نتایج قابل قبول کفایت کند .

در مرحله دوم داریم :

$$\alpha = \left(\frac{4}{9}\alpha_1^2 + \frac{\dot{\alpha}_1^2}{\eta^2}\right)^{\frac{1}{2}} \text{Sin}(\eta t + \varphi) + \frac{1}{3}\alpha_1 \quad (a)$$

و

$$t_2 = (\eta t - \varphi) + \frac{1}{\eta}$$

بنابر این نیرو در این مرحله در هر لحظه از زمان  $t_1 \leq \tau \leq t_1 + t_2$  بصورت تحلیلی با استفاده از رابطه :

$$F = -\frac{\ddot{\alpha}}{k}$$

قابل محاسبه است . از آنجائیکه لحظه  $t=0$  در شروع مرحله دوم مطابق لحظه زمان  $\tau=t_1$  است می توانیم بنویسیم :

$$t = \tau - t_1$$

در نتیجه رابطه ( a ) برای هر لحظه  $\tau$  در فاصله  $t_1 \leq \tau \leq t_1 + t_2$  می تواند بصورت :

$$\alpha = \left(\frac{4}{9}\alpha_1^2 + \frac{\dot{\alpha}_1^2}{\eta^2}\right)^{\frac{1}{2}} \text{Sin}[\eta(\tau - t_1) + \varphi] + \frac{1}{3}\alpha_1$$

نوشته شود .

در مرحله سوم داریم :

$$t_3 = \frac{v_0}{\sqrt{\lambda}} \int_1^0 \frac{dz}{\left\{ \frac{2}{5}v_0(1-z^2) + r_1^{*2}(1-z^2) \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

بنابر این می توانیم با تخمین سطح زیر منحنی تغییرات تابع :

$$g(z) = \frac{v_0}{\sqrt{\lambda} \left\{ \frac{2}{5} v_0 (1 - z^{\frac{5}{2}}) + r_1^{*2} (1 - z^{\frac{3}{2}}) \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

برحسب  $z$  در فاصله 0 تا 1 به همانگونه که برای تخمین  $t_1$  عمل کردیم مدت زمان دوام مرحله سوم ( $t_3$ ) را محاسبه کنیم. همچنین از آنجائیکه:

$$\dot{v} = \lambda^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2}{5} v_0 \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^{\frac{5}{2}} \right] + r_1^{*2} \left[ 1 - \left( \frac{v}{v_0} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

و

$$\ddot{v} = -\frac{2E}{m(1-v^2)} \left[ \frac{2}{3} v^{\frac{3}{2}} + r_1^{*2} v^{\frac{1}{2}} \right]$$

است. می توانیم با استفاده از بسط تیلور با در دست داشتن مقدار  $v$  در شروع مرحله سوم در هر فاصله  $t_1 + t_2 \leq \tau \leq t_3$  به همانگونه که برای تخمین  $\alpha$  در مرحله اول عمل کردیم نیرو در هر قدم را با استفاده از رابطه:

$$F|_{t=(n-1)\Delta t} = -\frac{1}{k_1 R} \dot{v}|_{t=(n-1)\Delta t}$$

تعیین کنیم. بدیهی است از آنجائیکه لحظه  $t=0$  در شروع مرحله سوم مطابق لحظه زمان  $\tau = t_1 + t_2$  است. داریم:

$$t = \tau - (t_1 - t_2)$$

بنابر این می توانیم با استفاده از این رابطه مقادیر نیروی متناظر با هر لحظه زمان  $\tau$  را محاسبه کنیم.

## تئوری برخورد برای اجسام ویسکوالاستیک

در تئوری برخورد دو جسم الاستیک دیدیم که بر طبق قانون هرتز رابطه مابین نیرو و تقرب بصورت :

$$F = k_2 \alpha^{\frac{3}{2}}$$

داده می شود که در آن :

$$k_2 = \frac{4}{3} \frac{q_k}{(\delta_1 + \delta_2) \sqrt{A+B}}$$

است . بنا بر این :

$$F = \frac{4}{3} \frac{q_k}{\sqrt{A+B}} \left( \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2} \right)^{-1} \alpha^{\frac{3}{2}}$$

در برخورد یک جسم فلزی با جرم  $m_2$  و یک جسم ویسکوالاستیک با جرم  $m_1$  ، (  $E_2 \gg E_1$  ) بوده و در نتیجه می توان از  $\delta_2$  در مقابل  $\delta_1$  صرف نظر نمود . همچنین از آنجائیکه  $E$  مدول الاستیسیته و  $\nu$  ضریب پواسن بر حسب ثوابت لامه بصورت :

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad \text{و} \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

نوشته می شود لذا داریم :

$$\frac{1-\nu^2}{E} = \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)} = \frac{k^* + \frac{4}{3}\mu}{4\mu(k^* + \frac{2}{3}\mu)}$$

که در آن :

$$k^* = \lambda + \frac{2}{3}\mu$$

مدول بالک است . پس :

$$F = \frac{4\pi}{3} \frac{q_k}{\sqrt{A+B}} \left( \frac{k^*}{4\mu(k^* + \frac{1}{3}\mu)} + \frac{1}{3(k^* + \frac{1}{3}\mu)} \right)^{-1} \alpha^{\frac{3}{2}} \quad \text{( a )}$$

حال جهت بدست آوردن رابطه مابین نیرو و تقرب برای حالت ویسکوالاستیک روابط مابین تنش و کرنش را برای ویسکوالاستیسیته سه بعدی مورد بررسی قرار داده و با روابط نظیرش در الاستیسیته مقایسه می کنیم .



در تئوری ویسکو الاستیسیته سه بعدی متداول است که رفتار جسم ویسکوالاستیک را تحت شرایط برش خالص و انبساط خالص مورد بررسی قرار می دهند بدین منظور تانسورهای تنش و کرنش را برحسب مؤلفه های انحرافی هیدرواستاتیک بصورت :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^* + \frac{\sigma_{kk}}{3} \delta_{ij} \quad \text{و} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^* + \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \delta_{ij} \quad (b)$$

ارائه می کنند. مؤلفه های انحرافی و هیدرواستاتیک کرنش یعنی  $\varepsilon_{ij}^*$  و  $\varepsilon_{kk}$  به ترتیب به مؤلفه های انحرافی و هیدرواستاتیک تنش یعنی  $\sigma_{ij}^*$  و  $\sigma_{kk}$  بوسیله انتگرال تابع خزش مربوط می شوند. بطریق مشابه مؤلفه های انحرافی و هیدرواستاتیک تنش یعنی  $\sigma_{ij}^*$  و  $\sigma_{kk}$  به ترتیب به مؤلفه های انحرافی و هیدرواستاتیک کرنش یعنی  $\varepsilon_{ij}^*$  و  $\varepsilon_{kk}$  بوسیله انتگرال تابع آسودگی مربوط می گردند. حال فرض کنیم برای یک جسم ویسکوالاستیک مؤلفه های انحرافی تانسور تنش به مؤلفه های انحرافی تانسور کرنش بوسیله رابطه :

$$\sigma_{ij}^* = 2\mu \left[ \varepsilon_{ij}^* - \int_0^t \psi(t-\eta) d\varepsilon_{ij}^*(\eta) \right] \quad (c)$$

مربوط شوند. که در آن  $\psi(t)$  تابع آسودگی بوده و داریم :

$$\psi(\infty) = 1 \quad \text{و} \quad \psi(0) = 0$$

در این صورت چنانچه از طرفین رابطه (c) تبدیل لاپلاس بگیریم می توانیم بنویسیم :

$$\sigma_{ij}^* = 2\mu \left\{ L\varepsilon_{ij}^* - L \left[ \int_0^t \psi(t-\eta) \frac{d}{d\eta} \varepsilon_{ij}^*(\eta) d\eta \right] \right\}$$

اما طبق قضیه کانولوشن اگر

$$Lf(t) = F(s) \quad \text{و} \quad Lg(t) = G(s)$$

باشد داریم :

$$L \left[ \int_0^t g(t-\eta) f(\eta) d\eta \right] = F(s)G(s)$$

پس :

$$L \left[ \int_0^t \psi(t-\eta) \frac{d}{d\eta} \varepsilon_{ij}^*(\eta) d\eta \right] = L\psi(t) L \frac{d}{dt} \varepsilon_{ij}^*(t)$$

بنابر این :

$$L\sigma_{ij}^* = 2\mu [L\varepsilon_{ij}^* - L\psi(t)L\varepsilon_{ij}^*] = 2\mu [1 - L\psi(t)]L\varepsilon_{ij}^* \quad (d)$$

حال چنانچه رابطه تنش و کرنش برای اجسام الاستیک را در نظر بگیریم می توانیم بنویسیم :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} = (k^* - \frac{2}{3}\mu) \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (e)$$

با جانشین کردن روابط (b) در رابطه (e) داریم :

$$\sigma_{ij}^* + \frac{\sigma_{kk}}{3} \delta_{ij} = (k^* - \frac{2}{3}\mu) \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu(\varepsilon_{ij}^* + \frac{\varepsilon_{kk}}{3} \delta_{ij}) = 2\mu\varepsilon_{ij}^* + k^* \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$$

پس :

$$\sigma_{ij}^* = 2\mu\varepsilon_{ij}^* \quad \text{و} \quad \sigma_{kk} = 3k^* \varepsilon_{kk} \quad (f)$$

چنانچه از رابطه (f) تبدیل لاپلاس بگیریم داریم :

$$L\sigma_{ij}^* = 2\mu L\varepsilon_{ij}^* \quad (g)$$

با مقایسه روابط (d) و (g) نتیجه می گیریم که چنانچه روابط الاستیک برحسب  $k^*$  و  $\mu$  ارایه شوند جهت بررسی حالت ویسکوالاستیک کافی است در تبدیل لاپلاس معادلات الاستیک  $\mu$  را با  $\mu[1-L\psi]$  تعویض کنیم. بنابر این چنانچه تبدیل لاپلاس طرفین رابطه (a) را بنویسیم داریم :

$$LF = \frac{4\pi}{3} \frac{q_k}{\sqrt{A+B}} \left( \frac{k^*}{4\mu(k^* + \frac{1}{3}\mu)} + \frac{1}{3(k^* + \frac{1}{3}\mu)} \right)^{-1} L\alpha^{\frac{3}{2}}$$

حال چنانچه  $\mu$  را با  $\mu[1-L\psi]$  تعویض کنیم خواهیم داشت :

$$LF = \frac{4\pi}{3} \frac{q_k}{\sqrt{A+B}} \left\{ \frac{k^*}{4\mu(1-L\psi) \left[ k^* + \frac{1}{3}\mu(1-L\psi) \right]} + \frac{1}{3 \left[ k^* + \frac{1}{3}\mu(1-L\psi) \right]} \right\}^{-1} L\alpha^{\frac{3}{2}}$$

اما برای غالب اجسام ویسکوالاستیک جمله دوم در طرف راست معادله در مقایسه با جمله اول قابل اغماض است همچنین  $k^* \gg \frac{1}{3}\mu$  می باشد و می توان از  $\frac{1}{3}\mu(1-L\psi)$  در مقابل  $k^*$  صرف نظر نمود. پس :

$$LF = \frac{16\pi}{3} \frac{q_k}{\sqrt{A+B}} \mu(L\alpha^{\frac{3}{2}} - L\alpha^{\frac{3}{2}}L\psi)$$

در نتیجه با پیدا کردن تبدیل معکوس داریم :

$$F = \frac{16\pi}{3} \frac{q_k}{\sqrt{A+B}} \mu \left[ \alpha^{\frac{3}{2}} - \int_0^t \psi(t-\eta) \alpha^{\frac{3}{2}}(\eta) d\eta \right]$$

همچنین معادله حرکت با استفاده از رابطه (c) ارایه شده در قسمت تئوری برخورد هرتز بصورت :

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\alpha} = -\frac{16\pi}{3} \frac{q_k}{\sqrt{A+B}} \mu \left[ \alpha^{\frac{3}{2}} - \int_0^t \psi(t-\eta) \alpha^{\frac{3}{2}}(\eta) d\eta \right]$$

نوشته می شود. چنانچه تابع آسودگی در شکل اسپکتروم (Spectrum) بصورت :

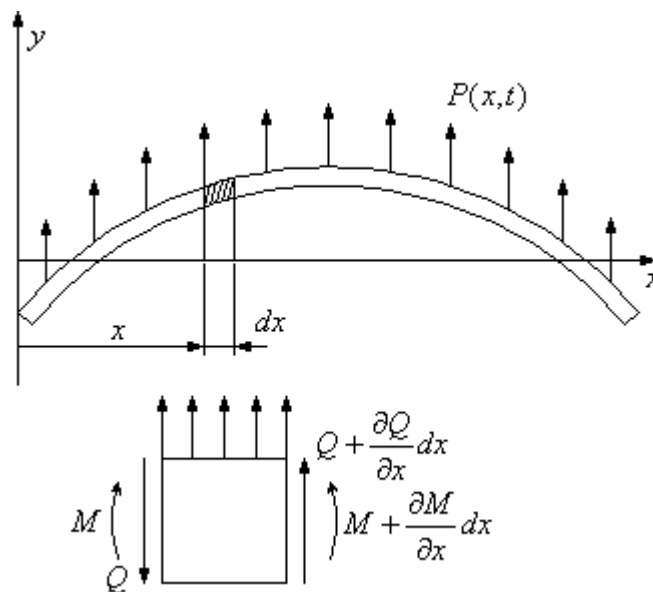
$$\mu\psi = \sum_i \mu_i (1 - e^{-t/\tau_i})$$

تعریف شود که در آن زمان آسودگی متناظر با  $\mu_i$  است می توانیم بنویسیم :

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\alpha} = -\frac{16\pi}{3} \frac{q_k}{\sqrt{A+B}} \left[ \mu \alpha^{\frac{3}{2}} - \int_0^t \sum \frac{\mu_i}{\tau_i} e^{-\frac{t-\eta}{\tau_i}} \alpha^{\frac{3}{2}}(\eta) d\eta \right]$$

### ارتعاش خمشی تیرها ( معادله اویلر- برنولی )

تیر غیر یکنواختی بطول  $l$  را در حالت ارتعاش عرضی مطابق شکل در نظر بگیرید و فرض کنید  $\bar{m}(x)$  ،  $A(x)$  و  $I(x)$  به ترتیب جرم بر واحد طول ، سطح مقطع و ممان اینرسی حول محور خنثی در محل  $x$  از تیر باشند . یک المان بطول  $dx$  و بفاصله  $x$  از محور قائم را اختیار کرده و دیاگرام آزاد برای این المان را رسم می کنیم . در این دیاگرام  $M(x,t)$  ،  $Q(x,t)$  و  $y(x,t)$  به ترتیب عبارتند از گشتاور ، نیروی برشی و انحراف عرضی تیر در محل  $x$  و در زمان  $t$  .



حال با استفاده از دیاگرام آزاد و قانون دوم نیوتون می توانیم بنویسیم :

$$Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx - Q + P dx = \bar{m}(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx$$

و یا :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + P = \bar{m}(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1)$$

همچنین برای ابقای تعادل دورانی داریم :

$$M + \frac{\partial M}{\partial x} dx - M + \frac{P}{2} (dx)^2 + (Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx) dx = 0$$

و یا :

$$Q = -\frac{\partial M}{\partial x} \quad (2)$$

اما همانطور که در مقاومت مصالح دیده آید می توانیم بنویسیم :

$$M = EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (3)$$

بنابر این :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] \quad (4)$$

در نتیجه معادله (۱) بصورت :

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + P = \bar{m}(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

نوشته می شود. این معادله بنام معادله تیر اوایلر- برنولی نامیده می شود و در آن از اثرات تغییر شکل برشی و اینرسی چرخشی صرف نظر شده است.

جهت بررسی ارتعاشات آزاد تیر با قرار دادن  $P = 0$  داریم :

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] = \bar{m}(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (5)$$

با در نظر گرفتن  $y(x,t) = Y(x)T(t)$  و جانشین کردن این جواب در معادله دیفرانسیل حرکت (۵)

می توانیم بنویسیم :

$$-T \frac{d^2}{dx^2} [EI(x)Y''] = \bar{m}(x)Y\ddot{T}$$

و یا :

$$\frac{1}{\bar{m}(x)Y} \frac{d^2}{dx^2} [EI(x)Y''] = -\frac{\ddot{T}}{T} = \omega^2$$

در نتیجه :

$$\ddot{T} = -\omega^2 T \quad (6a)$$

و

$$\frac{d^2}{dx^2} [EI(x)Y''] = \omega^2 \bar{m}(x)Y \quad (6b)$$

چنانچه فرض کنیم تیر یکنواخت باشد معادله دیفرانسیل (6b) بصورت :

$$Y^{IV} = \frac{\bar{m}\omega^2}{EI} Y = \beta^4 Y \quad (7)$$

نوشته می شود در نتیجه با فرض :

$$Y = e^{\lambda x}$$

داریم :

$$\lambda^4 = \beta^4 \Rightarrow \lambda = \beta, -\beta, i\beta, -i\beta$$

پس جواب معادله دیفرانسیل (۷) بصورت :

$$Y(x) = c_1 \sin \beta x + c_2 \cos \beta x + c_3 \sinh \beta x + c_4 \cosh \beta x \quad (8)$$

نوشته می شود که در آن ثابت های  $c_4, c_3, c_2, c_1$  با استفاده از شرایط مرزی تعیین می گردند. بعنوان مثال برای تیری که در  $x=0$  گیردار و در  $x=l$  آزاد است داریم:

$$Y(x)|_{x=0} \quad \text{و} \quad \left. \frac{dY(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{و} \quad M|_{x=l} = EI \left. \frac{d^2 Y}{dx^2} \right|_{x=l} = 0$$

$$Q|_{x=l} = -EI \left. \frac{d^3 y}{dx^3} \right|_{x=l} = 0$$

بعبارت دیگر در انتهای گیردار ( $x=0$ )، جابجایی و شیب برابر صفر و در انتهای آزاد ( $x=l$ )، گشتاور خمشی و نیروی برشی برابر صفر می باشند. حال فرض کنیم تیر در دو انتها روی تکیه گاههای ساده قرار داشته باشد در این صورت در هر یک از دو انتهای تیر می بایستی جابجایی و گشتاور خمشی برابر صفر باشد بنابر این با استفاده از رابطه (8) می توانیم بنویسیم:

$$c_2 + c_4 = 0 \quad \text{و} \quad -c_2 + c_4 = 0$$

$$c_1 \sin \beta l + c_2 \cos \beta l + c_3 \sinh \beta l + c_4 \cosh \beta l = 0 \quad (9a)$$

$$-c_1 \sin \beta l - c_2 \cos \beta l + c_3 \sinh \beta l + c_4 \cosh \beta l = 0 \quad (9b)$$

در نتیجه:

$$c_2 = c_4 = 0$$

و

$$\begin{bmatrix} \sin \beta l & \sinh \beta l \\ -\sin \beta l & \sinh \beta l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

با قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب برابر با صفر داریم:

$$\sin \beta l \sinh \beta l = 0$$

از آنجائیکه  $\sinh(\beta l)$  فقط با  $\beta l = 0$  می تواند صفر باشد لذا معادله فرکانس بصورت:

$$\sin \beta l = 0 \Rightarrow \beta l = n\pi$$

نوشته می شود. بنابر این فرکانس های طبیعی ارتعاش تیر که در دو انتها روی تکیه گاههای ساده قرار گرفته عبارتند از:

$$\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

حال از آنجائیکه  $c_2 = c_4 = 0$  است لذا روابط (9a) و (9b) بصورت:

$$c_1 \sin \beta l + c_3 \sinh \beta l = 0$$

$$-c_1 \sin \beta l + c_3 \sinh \beta l = 0$$

نوشته می شوند . با استفاده از این دو رابطه می توان بسادگی نتیجه گیری کرد که بواسطه آنکه  $Sinh(\beta l) \neq 0$  و  $Sin(\beta l) = 0$  است لذا برای ارضاء این دو رابطه می بایست  $c_3 = 0$  باشد . در نتیجه با استفاده از رابطه ( ۸ ) مودهای طبیعی متناظر با فرکانسهای طبیعی  $\omega_n$  ارتعاشات تیر بصورت :

$$Y_n(x) = c_n Sin \beta_n x = c_n Sin \frac{n\pi}{l} x \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

نوشته می شوند . جهت بررسی خاصیت تعامدی مودهای ارتعاش چنانچه  $Y_n(x)$  و  $Y_m(x)$  بترتیب توابع ویژه یا مودهای متناظر با مقادیر ویژه  $\beta_m$  و  $\beta_n$  باشند می بایستی داشته باشیم :

$$\begin{aligned} \int_0^l \bar{m} Y_n(x) Y_m(x) dx &= \bar{m} c_n c_m \int_0^l Sin \beta_n x Sin \beta_m x dx \\ &= \frac{1}{2} \bar{m} c_n c_m \int_0^l [Cos(\beta_n - \beta_m)x - Cos(\beta_n + \beta_m)x] \\ &= \frac{1}{2} \bar{m} c_n c_m \left[ \frac{Sin(\beta_n - \beta_m)x}{\beta_n - \beta_m} - \frac{Sin(\beta_n + \beta_m)x}{\beta_n + \beta_m} \right]_0^l \\ &= \frac{1}{2} \bar{m} c_n c_m \left[ \frac{Sin(n-m)\frac{\pi x}{l}}{\beta_n - \beta_m} - \frac{Sin(n+m)\frac{\pi x}{l}}{\beta_n + \beta_m} \right]_0^l = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

همچنین جهت نرمالیزه کردن مودهای طبیعی ارتعاش می بایستی داشته باشیم :

$$\begin{aligned} \int_0^l \bar{m} Y_n^2(x) dx &= \bar{m} c_n^2 \int_0^l \bar{m} Sin^2 \beta_n x dx = \frac{\bar{m} c_n^2}{2} \int_0^l (1 - Cos 2\beta_n x) dx \\ &= \frac{\bar{m} c_n^2}{2} \left[ x - \frac{1}{2\beta_n} Sin 2\beta_n x \right]_0^l = \frac{\bar{m} c_n^2 l}{2} = 1 \end{aligned} \quad (13)$$

پس :

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{\bar{m}l}}$$

در نتیجه مودهای نرمال ارتعاش بصورت :

$$Y_n^*(x) = \sqrt{\frac{2}{\bar{m}l}} Sin \beta_n x \quad (14)$$

داده می شوند . حال فرض کنید نیروی متمرکز  $P(t)$  در موقعیت  $x = x^*$  به تیر اعمال شود . در این صورت معادله دیفرانسیل حرکت چنانچه تیر یکنواخت باشد بصورت :

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P(t) \delta(x - x^*) \quad (15)$$

نوشته می شود که در آن  $\delta(x - x^*)$  تابع دلتای دیرک است و داریم :

$$\delta(x - x^*) = 0 \quad x \neq x^*$$

$$\int_0^l \delta(x - x^*) dx = 1$$

حال اگر پاسخ تیر را بصورت :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n^*(x) \eta_n(t) \quad (16)$$

فرض کنیم که در آن مختصات عام زمانی متناظر با مودهای نرمال  $Y_n^*(x)$  است معادله (15) بصورت :

$$EI \sum_{n=1}^{\infty} Y_n^{*IV}(x) \eta_n(t) + m \sum_{n=1}^{\infty} Y_n^*(x) \ddot{\eta}_n(t) = P(t) \delta(x - x^*) \quad (17)$$

نوشته می شود. چنانچه طرفین معادله (16) را در  $Y_m^*(x)$  ضرب کرده و در روی قلمرو  $x$  انتگرال بگیریم داریم :

$$\begin{aligned} EI \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \int_0^l Y_n^{*IV}(x) Y_m^*(x) dx + m \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\eta}_n(t) \int_0^l Y_n^*(x) Y_m^*(x) dx \\ = P(t) \int_0^l Y_m^*(x) \delta(x - x^*) dx \end{aligned} \quad (18)$$

اما طبق رابطه (7) :

$$Y_n^{*IV}(x) = \frac{m \omega_n^2}{EI} Y_n^*(x)$$

پس :

$$\int_0^l Y_n^{*IV}(x) Y_m^*(x) dx = \frac{m \omega_n^2}{EI} \int_0^l Y_n^*(x) Y_m^*(x) dx = 0 \quad n \neq m$$

در نتیجه رابطه (18) بصورت :

$$m \omega_n^2 \eta_n(t) \int_0^l Y_n^{*2}(x) dx + m \ddot{\eta}_n(t) \int_0^l Y_n^{*2}(x) dx = P(t) Y_n^*(x^*) \quad (19)$$

نوشته می شود. پس :

$$\ddot{\eta}_n(t) + \omega_n^2 \eta_n(t) = P(t) Y_n^*(x^*) \quad (20)$$

چنانچه از طرفین این رابطه تبدیل لاپلاس بگیریم داریم :

$$L \ddot{\eta}_n(t) + \omega_n^2 L \eta_n(t) = Y_n^*(x^*) LP(t)$$

ویا :

$$(s^2 + \omega_n^2) L \eta_n(t) - s \eta_n(0) - \dot{\eta}_n(0) = Y_n^*(x^*) LP(t)$$



پس :

$$L\eta_n(t) = Y_n^*(x^*) \frac{LP(t)}{s^2 + \omega_n^2} + \frac{s}{s^2 + \omega_n^2} \eta_n(0) + \frac{1}{s^2 + \omega_n^2} \dot{\eta}_n(0) \quad (21)$$

اما :

$$\frac{1}{s^2 + \omega_n^2} = \frac{1}{\omega_n} L\sin \omega_n t$$

و

$$\frac{s}{s^2 + \omega_n^2} = L\cos \omega_n t$$

در نتیجه رابطه ( ۲۱ ) بصورت

$$L\eta_n(t) = \frac{Y_n^*(x^*)}{\omega_n} LP(t)L\sin \omega_n t + \eta_n(0)L\cos \omega_n t + \frac{\dot{\eta}_n(0)}{\omega_n} L\sin \omega_n t$$

نوشته می شود . و یا :

$$\eta_n(t) = \frac{Y_n^*(x^*)}{\omega_n} \int_0^t P(\zeta) \sin \omega_n(t - \zeta) d\zeta + \eta_n(0) \cos \omega_n t + \dot{\eta}_n(0) \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} \quad (22)$$

همچنین با استفاده از رابطه ( ۱۶ ) می توانیم بنویسیم :

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n^*(x) \eta_n(0) \quad (23)$$

چنانچه طرفین رابطه ( ۲۳ ) را در  $Y_m^*(x)$  ضرب کرده و در روی قلمرو  $x$  انتگرال بگیریم داریم :

$$\int_0^l Y_m^*(x) y(x,0) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(0) \int_0^l Y_n^*(x) Y_m^*(x) dx$$

و یا :

$$\int_0^l Y_n^*(x) y(x,0) dx = \eta_n(0) \int_0^l Y_n^{*2}(x) dx = \frac{\eta_n(0)}{\bar{m}}$$

پس :

$$\eta_n(0) = \bar{m} \int_0^l Y_n^*(x) y(x,0) dx \quad (24)$$

بطریق مشابه :

$$\dot{\eta}_n(0) = \bar{m} \int_0^l Y_n^*(x) \dot{y}(x,0) dx \quad (25)$$

بنابر این رابطه ( ۲۲ ) بصورت :

$$\eta_n(t) = \frac{Y_n^*(x^*)}{\omega_n} \int_0^t P(\zeta) \sin \omega_n(t - \zeta) d\zeta + \bar{m} \cos \omega_n t \int_0^l Y_n^*(x) y(x, 0) dx$$

$$+ \frac{\bar{m} \sin \omega_n t}{\omega_n} \int_0^l Y_n^*(x) \dot{y}(x, 0) dx \quad (26)$$

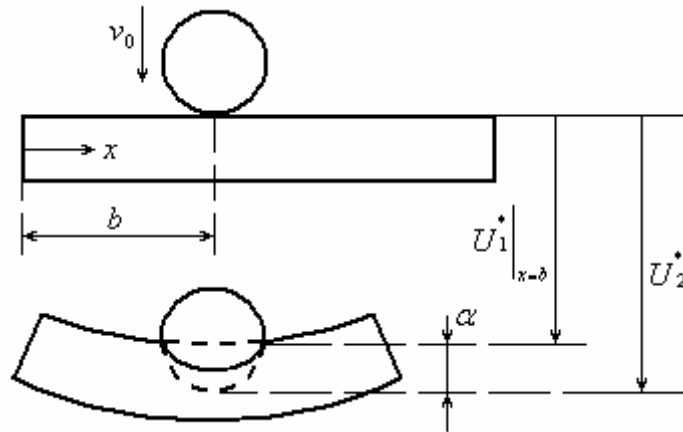
نوشته می شود . در نتیجه با استفاده از رابطه ( ۱۶ ) داریم :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n^*(x) \left[ \frac{Y_n^*(x^*)}{\omega_n} \int_0^t P(\zeta) \sin \omega_n(t - \zeta) d\zeta \right.$$

$$\left. + \bar{m} \cos \omega_n t \int_0^l Y_n^*(x) y(x, 0) dx + \frac{\bar{m} \sin \omega_n t}{\omega_n} \int_0^l Y_n^*(x) \dot{y}(x, 0) dx \right] \quad (27)$$

### برخورد عرضی جرم الاستیک روی یک تیر

تیری بطول  $l$  مطابق شکل را در نظر بگیرید و فرض کنید این تیر در موقعیت  $x = b$  تحت تاثیر ضربه یک جسم الاستیک به جرم  $m$  که در لحظه برخورد دارای سرعت  $v_0$  است قرار بگیرد.



در این صورت چنانچه جابجایی جرم  $m$  در محل تماس را  $U_2^*$  و خمش تیر را در همین موقعیت با  $U_1^*|_{x=b}$  نمایش دهیم می توانیم بنویسیم:

$$\alpha = U_2^* - U_1^*|_{x=b}$$

اما طبق قانون دوم نیوتن برای جرم  $m$  داریم:

$$m \frac{d^2 U_2^*}{dt^2} = -F \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{dU_2^*}{dt} \right) = -\frac{F}{m}$$

و یا:

$$\int_{v_0}^{\frac{dU_2^*}{dt}} d\left(\frac{dU_2^*}{dt}\right) = -\frac{1}{m} \int_0^t F dt \Rightarrow \frac{dU_2^*}{dt} = v_0 - \frac{1}{m} \int_0^t F dt$$

پس:

$$\int_0^{U_2^*} dU_2^* = v_0 \int_0^t dt - \frac{1}{m} \int_0^t dt \int_0^t F dt$$

در نتیجه:

$$U_2^* = v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t dt \int_0^t F dt$$

همچنین جابجایی دینامیکی خمش تیر برای تیری که در دو انتها روی تکیه گاههای ساده قرار گرفته در موقعیت  $x = x^* = b$  با جانشین کردن:

$$y(x,0)|_{x=b} = \dot{y}(x,0)|_{x=b} = 0$$

در رابطه ( ۲۷ ) بصورت :

$$U_1^*|_{x=b} = y(x,t)|_{x=x^*=b} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n^{*2}(b)}{\omega_n} \int_0^t F(\zeta) \sin \omega_n(t-\zeta) d\zeta$$

داده می شود . که در آن با استفاده از رابطه ( ۱۴ ) :

$$Y_n^*(b) = \sqrt{\frac{2}{ml}} \sin \beta_n b = \sqrt{\frac{2}{ml}} \sin \frac{n\pi}{l} b \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

است . در نتیجه :

$$\alpha = U_2^* - U_1^*|_{x=b} = v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t dt \int_0^t F dt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{ml\omega_n} \sin^2 \frac{n\pi b}{l} \int_0^t F(\zeta) \sin \omega_n(t-\zeta) d\zeta$$

اما :

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} = \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2}$$

که در آن :

$$a^2 = \sqrt{\frac{EI}{m}} = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

اختیار شده است . پس :

$$\alpha = v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t dt \int_0^t F dt - \frac{2l}{\rho A \pi^2 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2 \frac{n\pi b}{l} \int_0^t F(\zeta) \sin \omega_n(t-\zeta) d\zeta$$

حال چنانچه فرض کنیم ضربه بر وسط تیر یعنی موقعیت  $x = b = \frac{l}{2}$  وارد شود داریم :

$$\sin \frac{n\pi b}{l} = \sin \frac{n\pi}{2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

همانطور که ملاحظه می کنید برای مقادیر زوج  $n$  داریم :

$$\sin \frac{n\pi}{2} = 0$$

در نتیجه :

$$\alpha = v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t dt \int_0^t F dt - \frac{2l}{\rho A \pi^2 a^2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} \int_0^t F(\zeta) \sin \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} (t-\zeta) d\zeta$$

همچنین جابجایی خمشی تیر در هر وضعیت  $x$  از طول تیر با استفاده از رابطه ( ۲۷ ) بصورت :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{m^* \rho \omega_n} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{2} \int_0^t F(\zeta) \sin \omega_n(t-\zeta) d\zeta$$

$$= \frac{2l}{\rho A \pi^2 a^2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^2} \sin \frac{n\pi}{l} x \int_0^t F(\zeta) \sin \omega_n(t-\zeta) d\zeta$$

نوشته می شود . جهت تعیین تنش دینامیکی تیر در لبه های بالایی و پایینی چنانچه ارتفاع سطح مقطع تیر را  $2h$  فرض کنیم می توانیم بنویسیم :

$$\begin{aligned} \sigma(x,t) &= \pm \frac{Mh}{I} = \pm Eh \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\ &= \mp \frac{2Eh}{\rho A l a^2} \sum_{n=1,3,5,\dots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \text{Sin} \frac{n\pi}{l} x \int_0^t F(\zeta) \text{Sin} \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} (t - \zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (28)$$

### روش محاسبه نیرو در برخورد عرضی جرم الاستیک روی یک تیر

قبلاً دیدیم که در برخورد عرضی جرم الاستیک روی وسط یک تیر بطول  $l$  تقرب بوسیله رابطه:

$$\alpha = U_2^* - U_1^* \Big|_{x=l} \quad (1)$$

داده می شود که در آن:

$$U_2^* = v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t dt \int_0^t F dt \quad (2)$$

و

$$U_1^* \Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{2l}{\rho A \pi^2 a^2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} \int_0^t F(\zeta) \sin \omega_n (t - \zeta) d\zeta \quad (3)$$

برای جابجایی  $U_2^*$  جرم الاستیک همچین می توانیم بنویسیم:

$$m \ddot{U}_2^* = -F \quad (4)$$

چنانچه از طرفین رابطه تبدیل لاپلاس بگیریم داریم:

$$m L \ddot{U}_2^* = -LF \Rightarrow m [s^2 L U_2^* - s U_2^*(0) - \dot{U}_2^*(0)] = -LF$$

اما:

$$U_2^*(0) = 0 \quad \text{و} \quad \dot{U}_2^*(0) = v_0$$

پس:

$$L U_2^* = \frac{v_0}{s^2} - \frac{1}{ms^2} LF = v_0 L t - \frac{1}{m} L t L F$$

و یا:

$$U_2^* = v_0 t - \frac{1}{m} \int_0^t (t - \zeta) F(\zeta) d\zeta \quad (5)$$

حال چنانچه نمو زمانی  $\Delta t$  را کسر کوچکی از دوره تناوب فرکانس اصلی تیر اختیار کرده و نیرو را در هر فاصله زمانی  $\Delta t$  ثابت فرض کنیم رابطه (5) بصورت:

$$U_2^* \Big|_{t=\Delta t} = v_0 \Delta t - \frac{1}{m} \int_0^{\Delta t} (\Delta t - \zeta) F_1 d\zeta \quad (6a)$$

$$= v_0 \Delta t - \frac{(\Delta t)^2}{m} \left(1 - \frac{1}{2}\right) F_1 = v_0 \Delta t - \frac{(\Delta t)^2}{m} \left(1 - 1 + \frac{1}{2}\right) F_1$$

نوشته می شود. جهت تعیین  $U_2^*$  در لحظه زمانی  $t = 2\Delta t$  با تکرار عملیات مشابه داریم:

$$\begin{aligned}
U_2^* \Big|_{t=2\Delta t} &= 2v_0\Delta t - \frac{1}{m} \int_0^{2\Delta t} (2\Delta t - \zeta) F(\zeta) d\zeta \\
&= 2v_0\Delta t - \frac{1}{m} \left[ \int_0^{\Delta t} (2\Delta t - \zeta) F_1 d\zeta + \int_{\Delta t}^{2\Delta t} (2\Delta t - \zeta) F_2 d\zeta \right] \\
&= 2v_0\Delta t - \frac{1}{m} \left[ (2\Delta t\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2) \Big|_0^{\Delta t} F_1 + (2\Delta t\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2) \Big|_{\Delta t}^{2\Delta t} F_2 \right] \\
&= 2v_0\Delta t - \frac{1}{m} \left[ (2\Delta t^2 - \frac{1}{2}\Delta t^2) F_1 + (4\Delta t^2 - 2\Delta t^2 - 2\Delta t^2 + \frac{1}{2}\Delta t^2) F_2 \right] \quad (7b) \\
&= 2v_0\Delta t - \frac{1}{m} \left[ (2 - \frac{1}{2})\Delta t^2 F_1 + \frac{1}{2}\Delta t^2 F_2 \right] \\
&= 2v_0\Delta t - \frac{(\Delta t)^2}{m} \left[ (2 - \frac{1}{2}) F_1 + \frac{1}{2} F_2 \right] \\
&= 2v_0\Delta t - \frac{(\Delta t)^2}{m} \left[ (2 - 1 + \frac{1}{2}) F_1 + (2 - 2 + \frac{1}{2}) F_2 \right]
\end{aligned}$$

با بررسی روابط (7a) و (7b) می توانیم بنویسیم :

$$U_2^* \Big|_{t=k\Delta t} = v_0 k \Delta t - \frac{(\Delta t)^2}{m} \sum_{j=1}^k (k - j + \frac{1}{2}) F_j \quad (7)$$

همچنین با استفاده از رابطه (3) می توانیم بنویسیم :

$$\begin{aligned}
U_1^* \Big|_{t=\Delta t} &= B \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} \int_0^{\Delta t} F_1 \sin \omega_n (t - \zeta) d\zeta \\
&= B \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{F_1}{\omega_n n^2} [\cos \omega_n (t - \zeta)]_0^{\Delta t} \\
&= B \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{F_1}{\omega_n n^2} [\cos \omega_n (1-1)\Delta t - \cos \omega_n (1-0)\Delta t] \\
&= B \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{F_1}{\omega_n n^2} [\cos \omega_n (1-1)\Delta t - \cos \omega_n (1-1+1)\Delta t]
\end{aligned} \quad (8a)$$

که در آن  $B = \frac{2l}{\rho A \pi^2 a^2}$  اختیار شده است .

جهت تعیین  $u_1^*$  در لحظه زمان  $t = 2\Delta t$  با تکرار عملیات مشابه داریم :

$$\begin{aligned}
U_1^*|_{t=2\Delta t} &= B \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} \int_0^{2\Delta t} F(\zeta) \sin \omega_n (2\Delta t - \zeta) d\zeta \\
&= B \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} \left[ \int_0^{\Delta t} F_1 \sin \omega_n (2\Delta t - \zeta) d\zeta + \int_{\Delta t}^{2\Delta t} F_2 \sin \omega_n (2\Delta t - \zeta) d\zeta \right] \\
&= B \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} \left[ \frac{F_1}{\omega_n} \cos \omega_n (2\Delta t - \zeta) \Big|_0^{\Delta t} + \frac{F_2}{\omega_n} \cos \omega_n (2\Delta t - \zeta) \Big|_{\Delta t}^{2\Delta t} \right] \\
&= B \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{F_1}{\omega_n} [\cos \omega_n (2-1)\Delta t - \cos \omega_n (2-0)\Delta t] \right. \\
&\quad \left. + \frac{F_2}{\omega_n} [\cos \omega_n (2-2)\Delta t - \cos \omega_n (2-1)\Delta t] \right\} \tag{۸b} \\
&= B \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{\omega_n n^2} \{ F_1 [\cos \omega_n (2-1)\Delta t - \cos \omega_n (2-1+1)\Delta t] \\
&\quad + F_2 [\cos \omega_n (2-2)\Delta t - \cos \omega_n (2-2+1)\Delta t] \}
\end{aligned}$$

با بررسی روابط (۸a) و (۸b) می توانیم بنویسیم :

$$U_1^*|_{t=k\Delta t} = B \sum_{j=1}^k F_j \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{\omega_n n^2} [\cos \omega_n (k-j)\Delta t - \cos \omega_n (k-j+1)\Delta t] \tag{۹}$$

حال از آنجائیکه برای برخورد الاستیک طبق تئوری برخورد هرگز رابطه مابین نیرو و تقرب بصورت :

$$F = k_2 \alpha^{\frac{3}{2}} \tag{۱۰}$$

می باشد . داریم :

$$\begin{aligned}
\alpha|_{t=k\Delta t} &= \left( \frac{F_k}{k_2} \right)^{\frac{2}{3}} = v_0 k \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{m} \sum_{j=1}^k \left( k-j + \frac{1}{2} \right) F_j \\
&\quad - B \sum_{j=1}^k F_j \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{\omega_n n^2} [\cos \omega_n (k-j)\Delta t - \cos \omega_n (k-j+1)\Delta t]
\end{aligned} \tag{۱۱}$$

با استفاده از رابطه (۱۱) می توان نیرو را در لحظات زمانی  $t = k\Delta t$  ،  $k = 1, 2, 3, \dots$  با در دست داشتن مقدار نیرو در لحظه زمان  $t = 0$  قدم به قدم محاسبه نمود . از آنجائیکه مقدار تقرب در لحظه زمانی  $t = 0$  برابر صفر است لذا با استفاده از رابطه (۱۰) مقدار نیرو در لحظه زمان  $t = 0$  برابر صفر می باشد . همچنین با استفاده از رابطه (۱۰) می توان بعد از تعیین مقدار نیرو در هر قدم ، مقدار تقرب را نیز در همان قدم تعیین نمود . جهت تعیین جابجایی جرم الاستیک  $U_2^*$  و جابجایی خمشی تیر  $U_1^*$  می توان بعد از تعیین مقدار نیرو در هر قدم به ترتیب از روابط (۷) و (۹) استفاده کرد . بمنظور تعیین تنش در لبه های بالایی و پائینی تیر با استفاده از رابطه (۲۸) داریم :



$$\sigma(x,t)\Big|_{x=\frac{l}{2}} = \mp \frac{2Eh}{\rho A l a^2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \int_0^t F(\zeta) \sin \omega_n (t - \zeta) d\zeta$$

در نتیجه با تکرار روش مشابه با آنچه که جهت تعیین  $U_1^*$  ارائه دادیم می توانیم بنویسیم :

$$\sigma\left(\frac{l}{2}, t\right)\Big|_{t=k\Delta t} = \mp \frac{2Eh}{\rho A l a^2} \sum_{j=1}^k F_j \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{\omega_n} [\cos \omega_n (k - j) \Delta t - \cos \omega_n (k - j + 1) \Delta t] \quad (12)$$

با استفاده از رابطه ( ۱۲ ) می توان بعد از تعیین مقدار نیرو در هر قدم ، مقادیر تنش در لبه های بالایی و

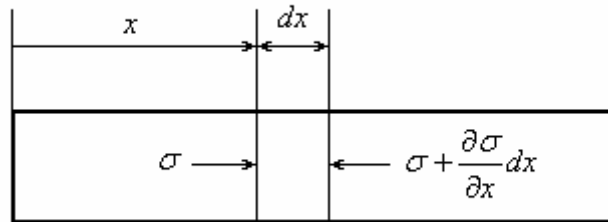
پائینی تیر را در موقعیت  $x = \frac{l}{2}$  در همان قدم تعیین نمود .

## جنبه های ارتعاشی ضربه

در تئوری کلاسیک ضربه ، اجسام برخورد کننده بصورت اجرام نقطه ای در نظر گرفته شده و فرض می شود که اجزاء متشکله هر جسم بصورت صلب به یکدیگر مرتبط بوده و در نتیجه بطور آنی تحت تاثیر تغییر حرکت بواسطه ضربه قرار می گیرند . اما در حقیقت واقعیت این است که آشفتگی ( disturbance ) ایجاد شده در نقطه تماس از طریق نقطه یا سطح تماس دو جسم برخورد کننده به داخل آنها انتشار یافته و بعد از انعکاس در سطوح مرزی آنها سبب ارتعاش می گردد . بنابر این همه مقاطع هریک از دو جسم برخورد کننده بطور همزمان تحت تاثیر نیروی یکسان واقع نمی شوند و همچنین تغییر شکلهای محلی گذرا ( transient ) و تنشهای ایجاد شده بوسیله این آشفتگی با استفاده از تئوری کلاسیک ضربه قابل تحلیل نیستند و می بایست با استفاده از پدیده های انتشار امواج مورد بررسی قرار گیرند . پیش بینی های انجام شده بر اساس تئوری کلاسیک ضربه بهنگامیکه درصد قابل توجهی از کل انرژی صرف ارتعاش جسم می گردد دارای خطای فاحش خواهد بود . این خطا چنانچه مدت زمان تماس در مقایسه با پیروی کوچکترین فرکانس طبیعی هر یک از دو جسم برخورد کننده بزرگ باشد کاهش می یابد . در چنین حالتی بعلت طولانی بودن مدت زمان تماس فرصت کافی برای بوقوع پیوستن چندین انعکاس موجود بوده و می توان فرض کرد که دو جسم برخورد کننده در وضعیت شبه تعادلی ( quasi-equilibrium ) قرار می گیرد . عبارت دیگر هرچه کوچکترین فرکانس دو جسم برخورد کننده بالاتر باشد اجسام صلب تر بوده و در نتیجه پیروی کوچکترین فرکانس طبیعی در مقایسه با مدت زمان تماس کوچک است . این صلب تر بودن بنوبه خود با اساس فرضیات تئوری کلاسیک ضربه هماهنگی بیشتر داشته و سبب کاهش خطای پیش بینی می گردد . بعنوان مثال در برخورد دو کره بعلت بالا بودن کوچکترین فرکانس طبیعی پیش بینی بر اساس تئوری کلاسیک ضربه دارای خطای کم و بالعکس برای میله ها و تیرها که کوچکترین فرکانس طبیعی آنها پائین است دارای خطای فوق العاده خواهد بود .

## انتشار پالس در میله ها

جهت بررسی انتشار پالس در طول یک میله یکنواخت ایزوتروپیک المانی بطول  $dx$  و به فاصله  $x$  از انتهای سمت چپ میله را مطابق شکل در نظر می گیریم و فرض می کنیم سطح مقطع و جرم مخصوص میله به ترتیب برابر  $A$  و  $\rho$  باشند.



در این صورت چنانچه تنش در طرف چپ المان برابر  $\sigma$  و در طرف راست آن برابر  $\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx$  اختیار گردد معادله حرکت بصورت:

$$-A\left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx\right) + A\sigma = \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx$$

نوشته می شود. پس:

$$-\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1)$$

حال اگر جابجایی در  $x$  و  $x + dx$  را به ترتیب  $v$  و  $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$  فرض کنیم کرنش در المان بطول  $dx$  بوسیله رابطه:

$$\varepsilon = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

داده می شود. در نتیجه از آنجائیکه:

$$\sigma = E\varepsilon = -E \frac{\partial v}{\partial x}$$

است معادله (1) بصورت:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} E\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2)$$

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

نوشته می شود که در آن:

سرعت امواج طولی (longitudinal) در طول میله است.

### حل معادله موج ( حل دالامبر )

جهت حل معادله دیفرانسیل حاکم بر انتشار امواج در طول یک میله چنانچه  $v$  را بصورت :

$$v = f^*(\zeta, \eta)$$

فرض کنیم که در آن  $\zeta = ct - x$  و  $\eta = ct + x$  باشد داریم :

$$dv = \frac{\partial f^*}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial f^*}{\partial \eta} d\eta$$

و یا با تقسیم طرفین رابطه بر  $dt$  می توانیم بنویسیم :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial f^*}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dt} + \frac{\partial f^*}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} = c \left( \frac{\partial f^*}{\partial \zeta} + \frac{\partial f^*}{\partial \eta} \right)$$

با مشتق گیری مجدد نسبت به  $t$  داریم :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dv}{dt} \right) = c \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f^*}{\partial \zeta} + \frac{\partial f^*}{\partial \eta} \right) = c \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial f^*}{\partial \zeta} + \frac{\partial f^*}{\partial \eta} \right) \frac{d\zeta}{dt} \\ &+ c \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial f^*}{\partial \zeta} + \frac{\partial f^*}{\partial \eta} \right) \frac{d\eta}{dt} = c^2 \left( \frac{\partial^2 f^*}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial^2 f^*}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{\partial^2 f^*}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

بطریق مشابه :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dv}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( -\frac{\partial f^*}{\partial \zeta} + \frac{\partial f^*}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( -\frac{\partial f^*}{\partial \zeta} + \frac{\partial f^*}{\partial \eta} \right) \frac{d\zeta}{dx} \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( -\frac{\partial f^*}{\partial \zeta} + \frac{\partial f^*}{\partial \eta} \right) \frac{d\eta}{dx} = \left( \frac{\partial^2 f^*}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{\partial^2 f^*}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{\partial^2 f^*}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

با جانشین کردن روابط (3) و (4) در معادله (2) می توانیم بنویسیم :

$$\frac{\partial^2 f^*}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial^2 f^*}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{\partial^2 f^*}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 f^*}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{\partial^2 f^*}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{\partial^2 f^*}{\partial \eta^2}$$

پس :

$$\frac{\partial^2 f^*}{\partial \zeta \partial \eta} = 0 \quad (5)$$

با انتگرال گیری از رابطه (5) نسبت به  $\eta$  داریم :

$$\frac{\partial f^*}{\partial \zeta} = h(\zeta)$$

و با انتگرال گیری مجدد :

$$f^* = \int h(\zeta) d\zeta + g(\eta) = f(\zeta) + g(\eta)$$

و یا :

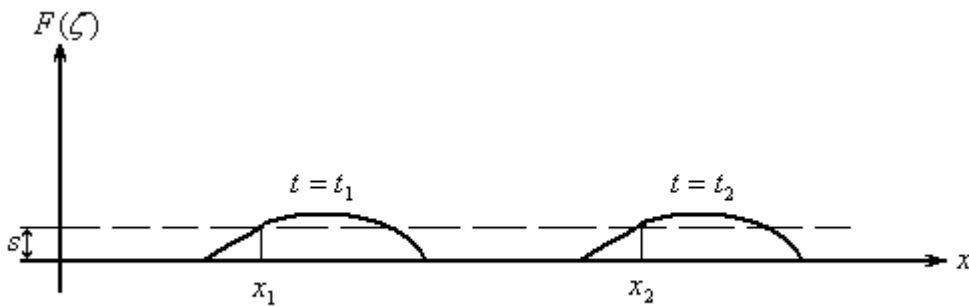
$$v = f^*(\zeta, \eta) = f(\zeta) + g(\eta) = f(ct - x) + g(ct + x)$$

بنابر این می توان نتیجه گیری کرد که جواب معادله دیفرانسیل حاکم بر انتشار امواج یک بعدی بصورت :

$$v = f(\zeta) + g(\eta) \quad (6)$$

است که در آن  $f(\zeta)$  و  $g(\eta)$  توابع اختیاری با آرگومنت های  $\zeta = ct - x$  و  $\eta = ct + x$  می باشند . این جواب بنام حل دالامبر برای امواج یک بعدی نامیده می شود .

حال تابع  $f(\zeta) = f(ct - x)$  را در نظر بگیرید و فرض کنید نمایش تغییرات این تابع در لحظه زمان  $t_1$  مطابق شکل a باشد .



شکل a

در این صورت در لحظه  $t = t_1$  و در وضعیت  $x = x_1$  داریم :

$$s = f(\zeta) = f(ct_1 - x_1)$$

همچنین چنانچه در لحظه  $t = t_2$  در وضعیت  $x = x_2$  ،  $f(\zeta) = s$  ، می توانیم بنویسیم :

$$s = f(ct_1 - x_1) = f(ct_2 - x_2)$$

پس :

$$ct_1 - x_1 = ct_2 - x_2$$

و یا :

$$c = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

از آنجائیکه  $c$  یک کمیت مثبت می باشد و  $t_2 > t_1$  است لذا می بایست  $x_2 > x_1$  باشد و این بدان معنی است که امواج از نوع  $f$  با آرگومنت  $ct - x$  در جهتی که  $x$  افزایش می یابد حرکت می کنند . بطریق مشابه برای امواج  $g$  می توانیم بنویسیم :

$$s = g(ct_1 + x_1) = g(ct_2 + x_2)$$

پس :

$$ct_1 + x_1 = ct_2 + x_2$$

و یا :

$$c = \frac{x_1 - x_2}{t_2 - t_1}$$

این رابطه نمایشگر این مطلب است که  $x_2$  می بایستی از  $x_1$  کوچکتر باشد . بنابر این امواج از نوع  $g$  با آرگومن  $ct+x$  در جهتی که  $x$  کاهش می یابد حرکت می کنند .

جهت تعیین سرعت ، شتاب ، کرنش و تنش بواسطه انتشار پالس در میله ها با استفاده از حل دالامبر معادله دیفرانسیل حاکم بر انتشار امواج یک بعدی می توانیم بنویسیم :

$$v = f(ct - x) + g(ct + x)$$

$$\dot{v} = \frac{\partial v}{\partial t} = c\dot{f}(ct - x) + c\dot{g}(ct + x)$$

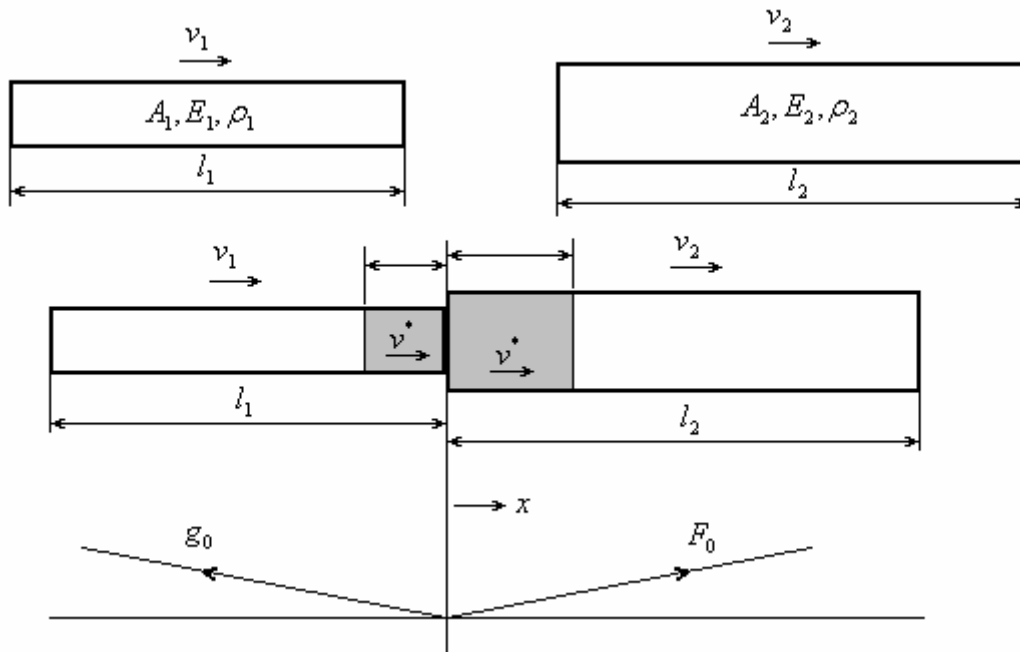
$$a = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \ddot{f}(ct - x) + c^2 \ddot{g}(ct + x)$$

$$\varepsilon = \frac{\partial v}{\partial x} = -f'(ct - x) + g'(ct + x)$$

$$\sigma = -E\varepsilon = Ef'(ct - x) - Eg'(ct + x)$$

### توصیف نیرو و پیوستگی سرعت در برخورد محوری دو میله

برخورد محوری دو میله با سطوح تماس مسطح مطابق شکل را در نظر بگیرید .



$$g_0 = g_0(c_1 t + x) \quad \text{و} \quad f_1 = f_1(c_1 t - x - 2l_1)$$

$$F_0 = F_0(c_2 t - x) \quad \text{و} \quad G_1 = G_1(c_2 t + x - 2l_2)$$

بلافاصله بعد از برخورد موج  $g_0$  در امتداد منفی محور  $x$  در طول میله یک و موج  $F_0$  در امتداد مثبت محور  $x$  در طول میله دو شروع به انتشار می کنند . موج  $g_0$  بعد از طی مسافت  $l_1$  در امتداد طول میله یک در برخورد با انتهای آزاد میله منعکس شده و بصورت موج انعکاسی  $f_1$  به محل تماس باز می گردد . بطریق مشابه موج  $F_0$  بعد از طی مسافت  $l_2$  در امتداد طول میله دو در برخورد با انتهای آزاد میله بصورت موج انعکاسی  $G_1$  به محل تماس باز می گردد . از آنجائیکه امواج انعکاسی  $f_1$  و  $G_1$  به ترتیب در لحظات زمانی  $t = \frac{l_1}{c_1}$  و  $t = \frac{l_2}{c_2}$  از انتهای آزاد میله ها شروع به انتشار می یابند لذا آرگومنت های امواج انعکاسی  $f_1$  و  $G_1$  بترتیب می بایستی بصورت  $c_1 t - x - 2l_1$  و  $c_2 t - x - 2l_2$  انتخاب گردند . بدیهی است بعد از برخورد در تمامی مدت زمانی که دو میله در تماس با یکدیگر می باشند سرعت دو میله در محل تماس تا زمان جدایی دو میله برابر است . این سرعت در شکل با  $v^*$  مشخص شده است . چنانچه جابجایی ناشی از انتشار امواج  $g_0$  و  $F_0$  را در میله های یک و دو برتیب با  $v_1$  و  $v_2$  نمایش دهیم داریم :

$$v_1 = g_0(c_1 t + x) \quad (1)$$

$$v_2 = F_0(c_2 t - x) \quad (2)$$

در نتیجه جهت ارضاء پیوستگی سرعت در محل تماس دو میله می توانیم بنویسیم :

$$v^* - v_1 = \left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{x=0} \quad (۳)$$

و

$$v^* - v_2 = \left. \frac{\partial u_2}{\partial t} \right|_{x=0} \quad (۴)$$

و یا :

$$v_1 + \left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{x=0} = v_2 + \left. \frac{\partial u_2}{\partial t} \right|_{x=0} \quad (۵)$$

جهت بررسی درستی روابط (۳) و (۴) چنانچه فرض کنیم میله دو ساکن باشد داریم :

$$v_2 = 0 \Rightarrow v^* = \left. \frac{\partial u_2}{\partial t} \right|_{x=0}$$

و بالعکس در صورتیکه میله یک ساکن باشد می توانیم بنویسیم :

$$v_1 = 0 \Rightarrow v^* = \left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{x=0}$$

همچنین در صورتیکه نیرو در  $x = 0$  را با  $P$  نمایش دهیم داریم :

$$P = A_1 \sigma_1 \Big|_{x=0} = A_2 \sigma_2 \Big|_{x=0} = -A_1 E_1 \left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{x=0} = -A_2 E_2 \left. \frac{\partial u_2}{\partial t} \right|_{x=0}$$

و یا :

$$A_1 E_1 \left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{x=0} = A_2 E_2 \left. \frac{\partial u_2}{\partial t} \right|_{x=0} \quad (۶)$$

حال چنانچه در روابط (۵) و (۶) برای  $v_2, v_1$  از روابط (۱) و (۲) جانشین کنیم می توانیم بنویسیم :

$$v_1 + c_1 g'_0(c_1 t) = v_2 + c_2 F'_0(c_2 t) \quad (۷)$$

و

$$z_1 c_1 g'_0(c_1 t) = -z_2 c_2 F'_0(c_2 t) \quad (۸)$$

که در آن  $z_1 = \frac{E_1 A_1}{c_1} = \rho_1 A_1 c_1$  و  $z_2 = \frac{E_2 A_2}{c_2} = \rho_2 A_2 c_2$  است . از حل روابط (۷) و (۸) داریم :

$$g'_0(c_1 t) = -\frac{z_2(v_1 - v_2)}{c_1(z_1 + z_2)} H(c_1 t) \quad \text{و} \quad F'_0(c_2 t) = -\frac{z_1(v_2 - v_1)}{c_2(z_1 + z_2)} H(c_2 t)$$

که در آن ها  $H(c_1 t)$  و  $H(c_2 t)$  تابع پله ای واحد یا تابع ( Heaviside ) واحد می باشند . بنابراین

شکل کلی توابع  $g'_0$  و  $F'_0$  می بایستی بصورت :



$$g'_0(c_1t + x) = -\frac{z_2(v_1 - v_2)}{c_1(z_1 + z_2)} H(c_1t + x) \quad (9)$$

و

$$F'_0(c_2t - x) = -\frac{z_1(v_2 - v_1)}{c_2(z_1 + z_2)} H(c_2t - x) \quad (10)$$

باشد. همچنین با استفاده از رابطه (۳) سرعت  $v^*$  بوسیله رابطه:

$$v^* = v_1 + c_1 g'_0(c_1t + x) = v_1 + \frac{z_2(v_1 - v_2)}{z_1 + z_2} H(c_1t + x) \quad (11)$$

داده می شود. این رابطه نمایشگر این مطلب است که هر ذره در وضعیت  $x$  از میله یک واقع در فاصله

$$-l \leq x \leq 0 \quad \text{در لحظه زمان } t = \frac{x}{c_1} \quad \text{دارای سرعت:}$$

$$v^* = \frac{z_1 v_1 - z_2 v_2}{z_1 + z_2} \quad (12)$$

بوده و این سرعت را تا لحظه زمان رسیدن موج انعکاسی از انتهای آزاد میله به موقعیت  $x$  حفظ خواهد کرد. بعنوان مثال چنانچه دو میله دارای سطوح مقطع یکسان بوده و هم جنس باشند داریم:

$$z_1 = z_2 \Rightarrow v^* = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \quad (13)$$

همچنین از آنجائیکه در این مورد مثال با استفاده از رابطه (۹) می توانیم بنویسیم:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = c_1 g'_0(c_1t + x) = \frac{1}{2}(v_2 - v_1) H(c_1t + x) \quad (14)$$

لذا می توان نتیجه گیری کرد که انتشار موج فشاری  $g_0$  سرعتی برابر با  $\frac{1}{2}(v_2 - v_1)$  روی حرکت مناطق تنش آزاد میله اعمال می کند. بطریق مشابه سرعت  $v^*$  در ارتباط با میله دو می تواند بوسیله رابطه:

$$v^* = v_2 + c_2 F'_0(c_2t - x) = v_2 + \frac{z_1(v_1 - v_2)}{z_1 + z_2} H(c_2t - x) \quad (15)$$

ارایه گردد. این رابطه نمایشگر این مطلب است که هر ذره در وضعیت  $x$  از میله دو واقع در فاصله

$$0 \leq x \leq l \quad \text{در لحظه زمان } t = \frac{x}{c_2} \quad \text{دارای سرعت:}$$

$$v^* = \frac{z_1 v_1 + z_2 v_2}{z_1 + z_2} \quad (16)$$

بوده و این سرعت را تا لحظه زمان رسیدن موج انعکاسی از انتهای آزاد میله به موقعیت  $x$  حفظ خواهد کرد. برای میله دو نیز درحالتی که دو میله دارای سطوح مقطع یکسان بوده و هم جنس باشند داریم:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = c_2 F'_0(c_2t - x) = \frac{1}{2}(v_1 - v_2) H(c_2t - x) \quad (17)$$

بنابر این می توان نتیجه گیری کرد که انتشار موج فشاری  $F_0$  سرعتی برابر با  $\frac{1}{2}(v_2 - v_1)$  روی حرکت مناطق تنش آزاد این میله اعمال می کند. تنش در میله های یک و دو با استفاده از روابط (۹) و (۱۰) بوسیله روابط:

$$\sigma_1 = -E_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} = -E_1 g'_0(c_1 t + x) = \frac{E_1 z_2 (v_1 - v_2)}{c_1 (z_1 + z_2)} H(c_1 t + x) \quad (18)$$

$$\sigma_2 = -E_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} = E_2 F'_0(c_2 t - x) = \frac{E_2 z_1 (v_1 - v_2)}{c_2 (z_1 + z_2)} H(c_2 t - x) \quad (19)$$

داده می شوند. بنابر این هر ذره در وضعیت  $x$  از میله یک واقع در فاصله  $-l \leq x \leq 0$  در لحظه زمانی  $t = \frac{x}{c_1}$  تحت تاثیر تنش فشاری:

$$\sigma_1 = \frac{z_1 z_2 (v_1 - v_2)}{A_1 (z_1 + z_2)} \quad (20)$$

و هر ذره در وضعیت  $x$  از میله دو واقع در فاصله  $0 \leq x \leq l$  در لحظه زمان  $t = \frac{x}{c_2}$  تحت تاثیر تنش فشاری:

$$\sigma_2 = \frac{z_1 z_2 (v_1 - v_2)}{A_2 (z_1 + z_2)} \quad (21)$$

واقع می شود. با استفاده از روابط (۲۰) و (۲۱) می توان نتیجه گیری کرد که چنانچه سطح مقطع دو میله برابر باشد، تنش در دو میله یکسان خواهد بود. نیروی فشاری وارده بر دو میله در موقعیت  $x=0$  با استفاده از روابط (۱۸) و (۱۹) بصورت:

$$P = A_1 \sigma_1|_{x=0} = \frac{z_1 z_2 (v_1 - v_2)}{(z_1 + z_2)} H(c_1 t) \quad \text{برای میله یک} \quad (22)$$

و

$$P = A_2 \sigma_2|_{x=0} = \frac{z_1 z_2 (v_1 - v_2)}{A_2 (z_1 + z_2)} H(c_2 t) \quad \text{برای میله دو} \quad (23)$$

داده می شود.

چنانچه دو میله دارای سطوح مقطع یکسان بوده و هم جنس باشند می توانیم با استفاده از روابط (۲۰)، (۲۱)، (۲۲) و (۲۳) بنویسیم:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{2} \rho c (v_1 - v_2) = \frac{E}{2c} (v_1 - v_2) \quad (24)$$

و

$$P = \frac{EA}{2c} (v_1 - v_2) H(ct) \quad (25)$$

حال از آنجائیکه موج  $g_0$  بعد از طی مسافت  $l_1$  در امتداد طول میله یک در برخورد با انتهای آزاد میله منعکس شده و بصورت موج انعکاسی  $f_1$  به محل تماس باز می گردد لذا هر ذره از ذرات میله واقع در وضعیت  $-l \leq x \leq 0$  که قبلاً تحت تاثیر موج  $g_0$  قرار گرفته تحت تاثیر موج  $f_1$  نیز واقع می شود. بنابراین این چنانچه جابجایی ناشی از اثر این دو موج در میله یک  $v_1$  فرض شود می توانیم بنویسیم:

$$v_1 = g_0(c_1 t + x) + f_1(c_1 t - x - 2l_1) \quad (26)$$

از آنجائیکه میله یک در انتهای  $x = -l_1$  آزاد است لذا کرنش در این موقعیت می بایستی برابر صفر باشد پس داریم:

$$\varepsilon \Big|_{x=-l_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=-l_1} = g'_0(c_1 t - l_1) - f'_1(c_1 t - l_1) = 0 \quad (27)$$

در نتیجه:

$$f'_1(c_1 t - l_1) = g'_0(c_1 t - l_1) = \frac{z_2(v_2 - v_1)}{c_1(z_1 + z_2)} H(c_1 t - l_1) \quad (28)$$

پس شکل کلی تابع  $f'_1$  می بایستی بصورت:

$$f'_1(c_1 t - x - 2l_1) = \frac{z_2(v_2 - v_1)}{c_1(z_1 + z_2)} H(c_1 t - x - 2l_1) \quad (29)$$

باشد. از آنجائیکه در لحظه زمان  $t = \frac{l_1}{c_1}$  همه ذرات میله یک دارای سرعت  $v^*$  می باشند لذا انتشار موج انعکاسی  $f'_1$  سرعتی برابر با  $c_1 f'_1(c_1 t - x - 2l_1)$  روی حرکت مناطقی که دارای سرعت  $v^*$  هستند اعمال می کند در نتیجه چنانچه سرعت جدید این مناطق را با  $v$  نمایش دهیم داریم:

$$\begin{aligned} v &= v^* + c_1 f'_1(c_1 t - x - 2l_1) = v_1 + c_1 g'_0(c_1 t + x) + c_1 f'_1(c_1 t - x - 2l_1) \\ &= v_1 + \frac{z_2(v_2 - v_1)}{(z_1 + z_2)} [H(c_1 t + x) + H(c_1 t - x - 2l_1)] \end{aligned} \quad (30)$$

بعنوان مثال در لحظه  $t = 3\frac{l_1}{c_1}$  موج  $f'_1$  به موقعیت  $x = -\frac{l_1}{2}$  وارد می شود که تا این لحظه دارای سرعت  $v^*$  است، با ورود موج  $f'_1$  به این موقعیت می توانیم بنویسیم:

$$v = v_1 + \frac{2z_2(v_2 - v_1)}{z_1 + z_2} = \frac{v_1(z_1 - z_2) + 2v_2 z_2}{z_1 + z_2} \quad (31)$$

و یا اگر دو میله دارای سطوح مقطع یکسان بوده و هم جنس باشند داریم:

$$z_1 = z_2 \Rightarrow v = v_2$$

و این بدان معنی است که در لحظه  $t = \frac{3}{2} \frac{l_1}{c_1}$  کلیه نقاطی از میله یک که در فاصله  $-\frac{l}{2} \leq x \leq -l$  قرار دارند سرعتشان برابر  $v_2$  و بقیه نقاط واقع در فاصله  $-\frac{l}{2} \leq x \leq 0$  سرعتشان برابر  $v^*$  است . جهت تعیین تنش در میله یک برای زمانهای  $t > \frac{l_1}{c_1}$  با استفاده از روابط ( ۲۶ ) و ( ۲۹ ) می توانیم بنویسیم :

$$\begin{aligned} \sigma &= -E_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = -E_1 [g'_0(c_1 t + x) - f'_1(c_1 t - x - 2l_1)] \\ &= -\frac{E_1 z_2 (v_2 - v_1)}{c_1 (z_1 + z_2)} [H(c_1 t + x) - H(c_1 t - x - 2l_1)] = 0 \end{aligned} \quad (۳۲)$$

این رابطه بدان معنی است که مناطق تحت تاثیر تنش ناشی از انتشار موج  $g_0$  با ورود موج  $f_1$  به منطقه ، تبدیل به مناطق تنش آزاد می گردند . چنانچه فرض کنیم طول میله دوم بزرگتر از طول میله اول باشد در لحظه زمان  $t = \frac{2l_1}{c_1}$  موج انعکاسی  $f_1$  به محل تماس وارد می شود در این لحظه همه نقاط میله یک فاقد تنش بوده و دارای سرعت  $v$  که بوسیله رابطه ( ۳۱ ) داده می شود می باشند . در نتیجه جهت ارضاء پیوستگی سرعت در محل تماس دو میله داریم :

$$\begin{aligned} v^{**} &= v + c_1 g'_1(c_1 t - 2l_1) = v^* + c_1 f'_1(c_1 t - 2l_1) + c_1 g'_1(c_1 t - 2l_1) \\ &= v_1 + c_1 g'_1(c_1 t) + c_1 f'_1(c_1 t - 2l_1) + c_1 g'_1(c_1 t - 2l_1) \\ &= v_2 + c_2 F'_0(c_2 t) + c_2 F'_1(c_2 t - 2l_2) \end{aligned} \quad (۳۳)$$

و یا :

$$c_1 f'_1(c_1 t - 2l_1) + c_1 g'_1(c_1 t - 2l_1) = c_2 F'_1(c_2 t - 2l_2) \quad (۳۴)$$

همچنین :

$$P = A_1 \sigma_1^* \Big|_{x=0} = A_1 \sigma_2^* \Big|_{x=0}$$

پس :

$$\begin{aligned} A_1 E_1 [g'_0(c_1 t) - f'_1(c_1 t - 2l_1) + g'_1(c_1 t - 2l_1)] \\ = A_2 E_2 [-F'_0(c_2 t) - F'_1(c_2 t - 2l_2)] \end{aligned} \quad (a)$$

که با استفاده از رابطه ( ۸ ) بصورت :

$$-z_1 c_1 f'_1(c_1 t - 2l_1) + z_1 c_1 g'_1(c_1 t - 2l_1) = z_2 c_2 F'_1(c_2 t - 2l_2) \quad (۳۵)$$

نوشته می شود . از حل معادلات ( ۳۴ ) و ( ۳۵ ) داریم :

$$g'_1(c_1 t - 2l_1) = -\frac{(z_2 - z_1)}{z_1 + z_2} f'_1(c_1 t - 2l_1) = \frac{z_2 (v_2 - v_1)(z_1 - z_2)}{c_1 (z_1 + z_2)^2} H(c_1 t - 2l_1)$$

و

$$F_1'(c_2t - 2l_2) = \frac{2z_1c_1}{c_2(z_1 + z_2)} f_1'(c_1t - 2l_1) = \frac{2z_1z_2(v_2 - v_1)}{c_1(z_1 + z_2)^2} H(c_2t - 2l_2)$$

پس شکل کلی توابع  $F_1'$  و  $g_1'$  بصورت :

$$g_1'(c_1t + x - 2l_1) = \frac{z_2(v_2 - v_1)(z_1 - z_2)}{c_1(z_1 + z_2)^2} H(c_1t + x - 2l_1) \quad (36)$$

و

$$F_1'(c_2t - x - 2l_2) = \frac{2z_1z_2(v_2 - v_1)}{c_1(z_1 + z_2)^2} H(c_2t - x - 2l_2) \quad (37)$$

نوشته می شود در نتیجه سرعت  $v^{**}$  میله های یک و دو در فاصله زمانی  $\frac{2l_1}{c_1} \leq t \leq \frac{2l_2}{c_2}$  با استفاده از رابطه

(33) بصورت :

$$v^{**} = v + c_1 g_1'(c_1t + x - 2l_1) = \frac{v_1(z_1 - z_2) + 2v_2z_2}{(z_1 + z_2)} + \frac{z_2(v_2 - v_1)(z_1 - z_2)}{(z_1 + z_2)^2} H(c_1t + x - 2l_1) \quad (38)$$

نوشته می شود. همچنین جهت تعیین تنش در میله های یک و دو با استفاده از رابطه (a) می توانیم بنویسیم :

$$\begin{aligned} \sigma_1^* &= -E_1 [g_0'(c_1t + x) - f_1'(c_1t - x - 2l_1) + g_1'(c_1t + x - 2l_1)] \\ &= -E_1 g_1'(c_1t + x - 2l_1) = -\frac{z_1z_2(v_2 - v_1)(z_1 - z_2)}{A_1(z_1 + z_2)^2} H(c_1t + x - 2l_1) \end{aligned} \quad (39)$$

و

$$\begin{aligned} \sigma_2^* &= -E_2 [-F_0'(c_2t - x) - F_1'(c_2t - x - 2l_2)] \\ &= E_2 \left[ \frac{z_1(v_1 - v_2)}{c_2(z_1 + z_2)} + \frac{2z_1z_2(v_2 - v_1)}{c_2(z_1 + z_2)^2} \right] H(c_2t - x - 2l_2) \\ &= -\frac{z_1z_2(v_2 - v_1)(z_1 - z_2)}{A_2(z_1 + z_2)^2} H(c_2t - x - 2l_2) \end{aligned} \quad (40)$$

بهنگامیکه دو میله دارای سطوح مقطع یکسان بوده و همجنس باشند با استفاده از روابط (36) و (37) داریم :

$$g_1'(c_1t + x - 2l_1) = 0$$

و

$$F_1'(c_2t + x - 2l_2) = \frac{v_2 - v_1}{2c} H(c_2t - x - 2l_2) \quad (41)$$

و این بدان معنی است که در این حالت موج انعکاسی  $f_1$  با ورود به موقعیت محل تماس دیگر منعکس نشده و تماماً به میله دوم انتقال می یابد. همچنین با استفاده از رابطه (۳۳) سرعت مشترک دو میله بوسیله رابطه:

$$v^{**} = v = v_2 \quad (۴۲)$$

داده می شود. از آنجائیکه طبق روابط (۳۹) و (۴۰) در این مورد مثال مقادیر:

$$\sigma_1^* = \sigma_2^* = 0 \quad (۴۳)$$

است می توان نتیجه گیری کرد که در پایان زمان  $t = \frac{2l_1}{c_1}$  تمامی نقاط میله یک فاقد تنش بوده و دارای سرعت  $v_2$  می باشند. انتشار موج  $F_1'$  در میله دوم سبب می شود که مناطقی از این میله که تحت تاثیر ورود موج انعکاس  $G_1$  که از انتهای آزاد میله دوم در لحظه زمان  $t = \frac{l_2}{c_2}$  شروع به انتشار می یابد واقع نشده اند. فاقد تنش شده و دارای سرعت  $v_2$  شوند. قسمتی از میله دوم که تحت تاثیر موج  $F_0$  قرار دارد طبق رابطه (۱۳) دارای سرعت:

$$v^* = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \quad (۴۴)$$

می باشد. حال از آنجائیکه در لحظه زمان  $t = \frac{l_2}{c_2}$  موج  $F_0$  در برخورد با انتهای آزاد میله دوم بصورت موج انعکاسی  $G_1$  منعکس می شود داریم:

$$\varepsilon|_{x=l_2} = -F_0'(c_2t - l_2) + G_1'(c_2t - l_2) \quad (۴۵)$$

بنابر این:

$$G_1'(c_2t - l_2) = F_0'(c_2t - l_2) = \frac{z_1(v_1 - v_2)}{c_2(z_1 + z_2)} H(c_2t - l_2) \quad (۴۶)$$

در نتیجه شکل کلی تابع  $G_1'$  بصورت:

$$G_1'(c_2t + x - 2l_2) = \frac{z_1(v_1 - v_2)}{c_2(z_1 + z_2)} H(c_2t + x - 2l_2) \quad (۴۷)$$

می باشد. از آنجائیکه در لحظه زمان  $t = \frac{l_2}{c_2}$  مناطقی از میله دوم که تحت تاثیر موج  $F_1$  قرار نگرفته اند دارای سرعت  $v^*$  می باشند لذا انتشار موج انعکاسی  $G_1$  سرعتی برابر با  $c_2 G_1'(c_2t + x - 2l_2)$  روی حرکت مناطقی که دارای سرعت  $v^*$  هستند اعمال می کند. بنابر این چنانچه سرعت جدید این مناطق را با  $\bar{v}$  نمایش دهیم داریم:

$$\begin{aligned}\bar{v} &= v^* + c_2 G_1'(c_2 t + x - 2l_2) \\ &= v_1 + \frac{(v_1 - v_2)}{z_1 + z_2} [z_1 H(c_2 t + x - 2l_2) - z_2 H(c_1 t + x)]\end{aligned}\quad (48)$$

چنانچه دو میله دارای سطوح مقطع یکسان بوده و همجنس باشند می توانیم بنویسیم:

$$z_1 = z_2 \Rightarrow \bar{v} = v_1 \quad (49)$$

و این بدان معنی است که در این مورد مثال مناطقی از میله دوم که تحت تاثیر موج  $F_1$  قرار نگرفته اند با ورود موج انعکاسی  $G_1$  سرعتشان برابر  $v_1$  می شود. تنش در مناطقی از میله دوم که تحت تاثیر موج  $F_1'$  قرار نگرفته اند بوسیله رابطه:

$$\begin{aligned}\sigma_2^{**} &= -E_2 [-F_0'(c_2 t - x) - G_1'(c_2 t + x - 2l_1)] \\ &= \frac{E_2 z_1 (v_1 - v_2)}{c_2 (z_1 + z_2)} [H(c_2 t - x) - H(c_2 t + x - 2l_1)] = 0\end{aligned}\quad (50)$$

داده می شود. این رابطه بدان معنی است که مناطق تحت تاثیر تنش ناشی از انتشار موج  $F_0$  که تحت تاثیر موج  $F_1$  قرار نگرفته اند با ورود موج انعکاسی  $G_1$  به منطقه، تبدیل به مناطق تنش آزاد می گردند. بنابراین این در لحظه زمان قبل از تلاقی امواج  $F_1'$  و  $G_1$  قسمتی از میله دوم فاقد تنش و قسمتی دیگر دارای تنش  $\sigma_2^*$  است که با تداخل امواج  $F_1$  و  $G_1$  منطقه ای از میله دوم که قبلاً تحت تاثیر امواج  $F_0$  و  $F_1'$  قرار گرفته تحت تاثیر موج  $G_1$  نیز واقع شده و دارای تنش:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma} &= -E_2 [-F_0'(c_2 t - x) - F_1'(c_2 t - x - 2l_2) + G_1'(c_2 t + x - 2l_2)] \\ &= -\frac{z_1 z_2 (v_2 - v_1)(z_1 - z_2)}{A_2 (z_1 + z_2)^2} H(c_2 t - x - 2l_2) - \frac{z_1 z_2 (v_2 - v_1)}{A_2 (z_1 + z_2)} H(c_2 t + x - 2l_2)\end{aligned}$$

می گردد. همچنین منطقه ای از میله دوم که قبلاً تحت تاثیر امواج  $F_0$  و  $G_1$  قرار گرفته تحت تاثیر موج  $F_1$  نیز واقع شده و دارای تنش:

$$\bar{\sigma} = -E_2 [-F_0'(c_2 t - x) + G_1'(c_2 t + x - 2l_2) - F_1'(c_2 t - x - 2l_2)]$$

می گردد. از آنجائیکه مناطق تحت تاثیر امواج  $F_0$  و  $F_1'$  دارای سرعت  $v^{**}$  هستند لذا ورود موج انعکاسی  $G_1$  به این مناطق سرعت آنها را تغییر می دهد. چنانچه سرعت جدید این مناطق را با  $\hat{v}$  نمایش دهیم داریم:

$$\begin{aligned}\hat{v} &= v^{**} + c_2 G_1'(c_2 t + x - 2l_2) = \frac{v_1 (z_1 - z_2) + 2v_2 z_2}{z_1 + z_2} \\ &+ \frac{z_2 (v_2 - v_1)(z_1 - z_2)}{(z_1 + z_2)^2} H(c_1 t + x - 2l_1) + \frac{z_1 (v_1 - v_2)}{(z_1 + z_2)} H(c_2 t + x - 2l_2)\end{aligned}$$

بطریق مشابه مناطق تحت تاثیر امواج  $F_0$  و  $G_1$  که دارای سرعت  $\bar{v}$  می باشند با ورود موج  $F_1$  سرعتی برابر:

$$\begin{aligned}\hat{v} &= \bar{v} + c_2 F_1' = v_1 + \frac{z_1(v_1 - v_2)}{z_1 + z_2} H(c_2 t + x - 2l_2) \\ &\quad - \frac{z_1(v_1 - v_2)}{z_1 + z_2} H(c_1 t + x) + \frac{2z_1 z_2 (v_2 - v_1)}{(z_1 + z_2)^2} H(c_2 t - x - 2l_2) \\ &= \frac{z_2 v_2 (2z_1 + z_2) + z_1^2 (2v_1 - v_2)}{(z_1 + z_2)^2}\end{aligned}$$

پیدا می کنند . بدین ترتیب برای برخورد عمودی دو میله با سطوح مقطع مختلف و جنس های متفاوت می بایست روش تحلیل را به همین منوال تا لحظه زمان جدایی دو میله دنبال کرد . در لحظه ای که یکی از میله ها فاقد تنش بوده ، و موجی را در محل تماس به میله دیگر منتقل نکند ، موج برگشتی از طریق میله دیگر در محل تماس با سطح آزاد مواجه شده و در نتیجه به میله دیگر منتقل نمی شود و طبق شرایط مرزی موجود منعکس می گردد . چنانچه دو میله دارای سطوح مقطع یکسان بوده و همجنس باشند می توانیم بنویسیم :

$$z_1 = z_2 \Rightarrow \bar{\sigma} = -\frac{z(v_1 - v_2)}{2A} = \frac{1}{2} \rho c (v_1 - v_2) = -\frac{E}{2c} (v_1 - v_2)$$

و

$$\hat{v} = \frac{1}{2} (v_1 - v_2)$$



مثال :

برخورد محوری دو میله هم جنس با سطوح مقطع یکسان از طریق ترسیم نمودارهای سرعت و تنش در طول دو میله برخورد کننده در لحظات زمانی  $n = 0, 1, 2, \dots$  و  $t = \frac{nl_1}{c}$  برای حالات ذیل مورد تحلیل قرار

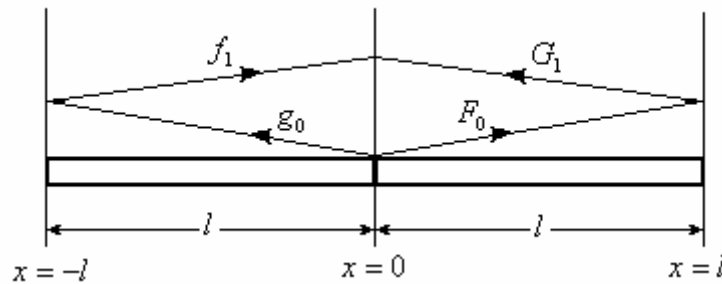
دهید :

$$v_1 = 2v_2 \quad \text{و} \quad l_1 = l_2 = l \quad \text{(a)}$$

$$v_1 = 2v_2 \quad \text{و} \quad l_2 = 2l_1 \quad \text{(b)}$$

حل :

(a)



$$g_0 = g_0(ct + x) \quad \text{و} \quad F_0 = F_0(ct - x) \quad \text{و} \quad F_1 = F_1(ct - x - 2l)$$

$$G_1 = G_1(ct + x - 2l)$$

در  $x = 0$  :

$$\begin{cases} v_1 + cg'_0 = v_2 + cF'_0 & \text{پیوستگی سرعت} \\ AEG'_0 = -AEF'_0 & \text{نیروی تماس} \end{cases}$$

$$v_1 + 2cg'_0 = v_2 \Rightarrow g'_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{v_2 - v_1}{c} \right) = -\frac{v_2}{2c}$$

$$F'_0 = -g'_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{v_1 - v_2}{c} \right) = \frac{v_2}{2c}$$

در  $x = -l$  :

$$\varepsilon = g'_0 - f'_1 = 0 \quad \text{شرط مرزی}$$

$$\therefore f'_1 = g'_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{v_2 - v_1}{c} \right) = -\frac{v_2}{2c}$$

در  $x = l$  :

$$\varepsilon = -F'_0 + G'_1 = 0 \quad \text{شرط مرزی}$$

$$\therefore G_1 = F_0' = \frac{1}{2} \left( \frac{v_1 - v_2}{c} \right) = \frac{v_2}{2c}$$

سرعت مشترک :

$$v^* = v_1 + cg_0' = v_2 + cF_0' = v_1 + \frac{1}{2}(v_2 - v_1) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = \frac{3}{2}v_2$$

جابجایی قبل از تشکیل امواج انعکاسی  $F_1$  و  $G_1$  :

$$u_1 = g_0 \quad \text{و} \quad u_2 = F_0$$

تنش :

$$\sigma_1 = -E \frac{\partial u_1}{\partial x} = -Eg_0' = -\rho c^2 g_0' = -\frac{\rho c}{2}(v_2 - v_1) = \frac{\rho c}{2}v_2$$

$$\sigma_2 = -E \frac{\partial u_2}{\partial x} = -EF_0' = -\rho c^2 F_0' = -\frac{\rho c}{2}(v_1 - v_2) = \frac{\rho c}{2}v_2$$

جابجایی بعد از تشکیل امواج انعکاسی  $F_1$  و  $G_1$  :

$$u_1 = g_0 + F_1 \quad \text{و} \quad u_2 = F_0 + G_1$$

تنش :

$$\sigma_1 = -E \frac{\partial u_1}{\partial x} = -E(g_0' - f_1') = -E(g_0' - g_0') = 0$$

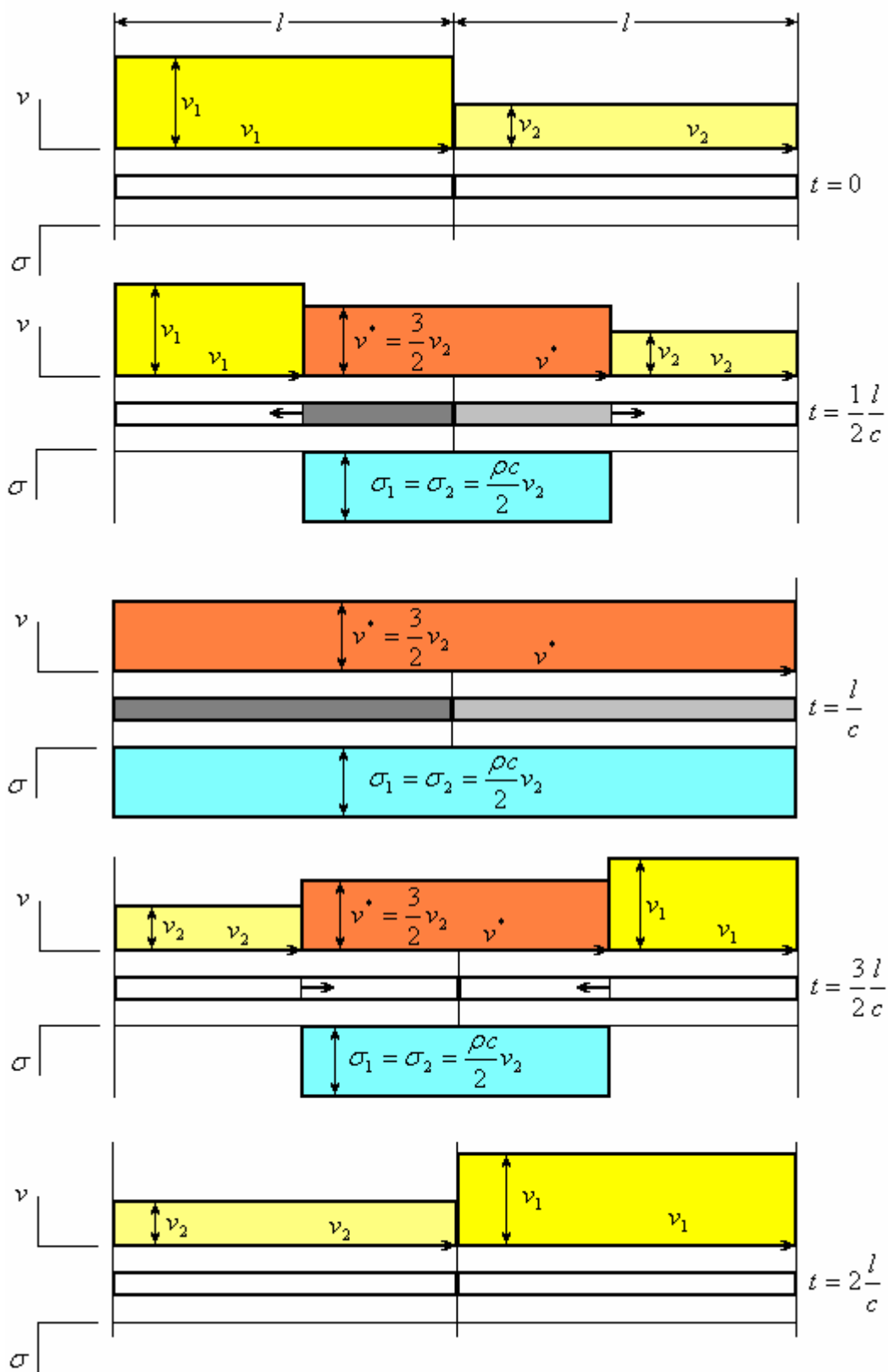
$$\sigma_2 = -E \frac{\partial u_2}{\partial x} = -E(-F_0' + G_1') = -E(-F_0' + F_0') = 0$$

سرعت :

$$v = v^* + cf_1' = \frac{3}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_2 = v_2$$

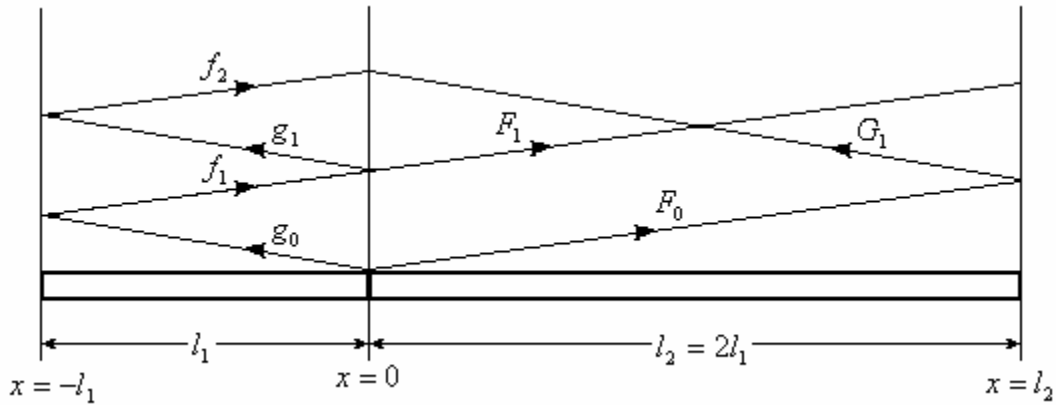
$$v = v^* + cG_1' = \frac{3}{2}v_2 + \frac{v_2}{2} = 2v_2 = v_1$$

همانطور که ملاحظه می کنیم در حالتیکه طول دو میله یکسان است موجهای  $F_0$  و  $g_0$  در دو میله به طور همزمان در لحظه  $t = \frac{\rho}{c}$  به انتهای آزاد میله ها می رسند و در این لحظه همه نقاط هر دو میله دارای سرعت یکسان  $v^* = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = \frac{3}{2}v_2$  و تنش فشاری یکنواخت  $\sigma = \frac{1}{2}\rho c(v_1 - v_2) = \frac{1}{2}\rho c v_2$  می باشند . همچنین موجهای انعکاسی  $F_1$  و  $G_1$  بطور همزمان در لحظه  $t = \frac{2l}{c}$  به نقطه تماس بازگشته و در محل تماس هر یک با سطح آزاد از تنش مواجه شده و به یکدیگر انتقال نمی یابند در نتیجه مدت زمان تماس دو میله خاتمه یافته و دو میله در حالتیکه سرعت های اولیه خود را با یکدیگر تعویض نموده اند بدون ارتعاش از یکدیگر جدا می شوند .



(b) داریم:

$$l_2 = 2l_1 \quad \text{و} \quad v_1 = 2v_2$$



$$g_0 = g_0(ct+x) \quad \text{و} \quad F_0 = F_0(ct-x) \quad \text{و} \quad f_1 = f_1(ct-x-2l_1)$$

$$F_1 = F_1(ct-x-2l_2) \quad \text{و} \quad G_1 = G_1(ct+x-2l_2) \quad \text{و} \quad g_1 = g_1(ct+x-2l_1)$$

$$f_2 = f_2(ct-x-4l_1)$$

در  $x=0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 + cg'_0 = v_2 + cF'_0 \quad \text{پیوستگی سرعت} \\ AEG'_0 = -AEF'_0 \quad \text{نیروی تماس} \end{array} \right.$$

$$v_1 + 2cg'_0 = v_2 \Rightarrow g'_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{v_2 - v_1}{c} \right) = -\frac{v_2}{2c}$$

$$F'_0 = -g'_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{v_1 - v_2}{c} \right) = \frac{v_2}{2c}$$

در  $x = -l_1$ :

$$\varepsilon = g'_0 - f'_1 = 0 \quad \text{شرط مرزی}$$

$$\therefore f'_1 = g'_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{v_2 - v_1}{c} \right) = -\frac{v_2}{2c}$$

در  $x = l_2$ :

$$\varepsilon = -F'_0 + G'_1 = 0 \quad \text{شرط مرزی}$$

$$\therefore G'_1 = F'_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{v_1 - v_2}{c} \right) = \frac{v_2}{2c}$$

سرعت مشترک:

$$v^* = v_1 + cg'_0 = v_2 + cF'_0 = v_1 + \frac{1}{2}(v_2 - v_1) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = \frac{3}{2}v_2$$

جابجایی قبل از تشکیل امواج انعکاسی  $F_1$  و  $G_1$  :

$$u_1 = g_0 \quad \text{و} \quad u_2 = F_0$$

تنش :

$$\sigma_1 = -E \frac{\partial u_1}{\partial x} = -E g'_0 = -\rho c^2 g'_0 = -\frac{\rho c}{2} (v_2 - v_1) = \frac{\rho c}{2} v_2$$

$$\sigma_2 = -E \frac{\partial u_2}{\partial x} = E F'_0 = \rho c^2 F'_0 = \frac{\rho c}{2} (v_1 - v_2) = \frac{\rho c}{2} v_2$$

جابجایی بعد از تشکیل موج انعکاسی  $F_1$  و قبل از تشکیل موج انعکاسی  $G_1$  :

$$u_1 = g_0 + F_1 \quad \text{و} \quad u_2 = F_0$$

تنش :

$$\sigma_1 = -E \frac{\partial u_1}{\partial x} = -E (g'_0 - f'_1) = -E (g'_0 - g'_0) = 0$$

$$\sigma_2 = -E \frac{\partial u_2}{\partial x} = E F'_0 = \rho c^2 F'_0 = \frac{\rho c}{2} (v_1 - v_2) = \frac{\rho c}{2} v_2$$

سرعت :

$$v = v^* + c f'_1 = \frac{1}{2} (v_1 + v_2) - \frac{1}{2} v_2 = \frac{1}{2} v_1 = v_2$$

در  $x = 0$  به هنگام تشکیل موج انعکاسی  $g_1$  و موج منتقله  $F_1$  :

$$v_1 + c g'_0 + c f'_0 + c g'_0 = v_2 + c F'_0 + c F'_1$$

و یا :

$$\left\{ \begin{array}{ll} c f'_1 + c g'_1 = c F'_1 & \text{پیوستگی سرعت} \\ AE(-f'_1 + g'_1) = AE(-F'_1) & \text{نیروی تماس} \end{array} \right.$$

$$\therefore \quad g'_1 = 0 \quad \text{و} \quad F'_1 = f'_1 = -\frac{v_2}{2c}$$

بنابراین تمام موج  $f_1$  به میله دوم منتقل می شود .

جابجایی بعد از تشکیل موج انتقالی  $F_1$  و موج انعکاسی  $G_1$  :

$$u_1 = g_0 + f_1 \quad \text{برای میله یک :}$$

$$u_2 = F_0 + F_1 \quad \text{برای منطقه ای از میله دو که تحت تاثیر موج } G_1 \text{ قرار نگرفته :}$$

$$u_2 = F_0 + G_1 \quad \text{برای منطقه ای از میله دو که تحت تاثیر موج } F_1 \text{ قرار نگرفته :}$$

تنش :

برای میله یک :

$$\sigma_1 = -E \frac{\partial u_1}{\partial x} = -E(g'_0 - f'_1) = -E(g'_0 - g'_0) = 0$$

برای منطقه ای از میله دو که تحت تاثیر موج  $G_1$  قرار نگرفته :

$$\sigma_2 = -E \frac{\partial u_2}{\partial x} = -E(-F'_0 - F'_1) = -E\left(-\frac{v_2}{2c} + \frac{v_2}{2c}\right) = 0$$

برای منطقه ای از میله دو که تحت تاثیر موج  $F_1$  قرار نگرفته :

$$\sigma_2 = -E \frac{\partial u_2}{\partial x} = -E(-F'_0 - G'_1) = -E(-F'_0 + F'_0) = 0$$

سرعت :

برای میله یک :

$$v = v^* + cf'_1 = v_1 + cg'_0 + cf'_1 = v_2$$

برای منطقه ای از میله دو که تحت تاثیر موج  $G_1$  قرار نگرفته :

$$v = v_2 + cF'_0 + cF'_1 = v^* + cF'_1 = \frac{3}{2}v_2 - \frac{v_2}{2} = v_2$$

برای منطقه ای از میله دو که تحت تاثیر موج  $F_1$  قرار نگرفته :

$$v = v_2 + cF'_0 + cG'_1 = v^* + cG'_1 = \frac{3}{2}v_2 + \frac{v_2}{2} = 2v_2 = v_1$$

جابجایی در میله دو بعد از تلاقی امواج  $F_1$  و  $G_1$  :

برای منطقه ای از میله که تحت تاثیر امواج  $F_0$  و  $G_1$  و  $F_1$  واقع شده :

$$u_2 = F_0 + F_1 + G_1$$

تنش :

$$\sigma_2 = -E(-F'_0 - F'_1 + G'_1) = -EG'_1 = EF'_1 = -\frac{Ev_2}{2c} = -\frac{\rho c}{2}v_2$$

سرعت :

$$v = v_2 + cF'_0 + cF'_1 + cG'_1 = v_2 + cG'_1 = v_2 + \frac{v_2}{2} = \frac{3}{2}v_2 = v^*$$

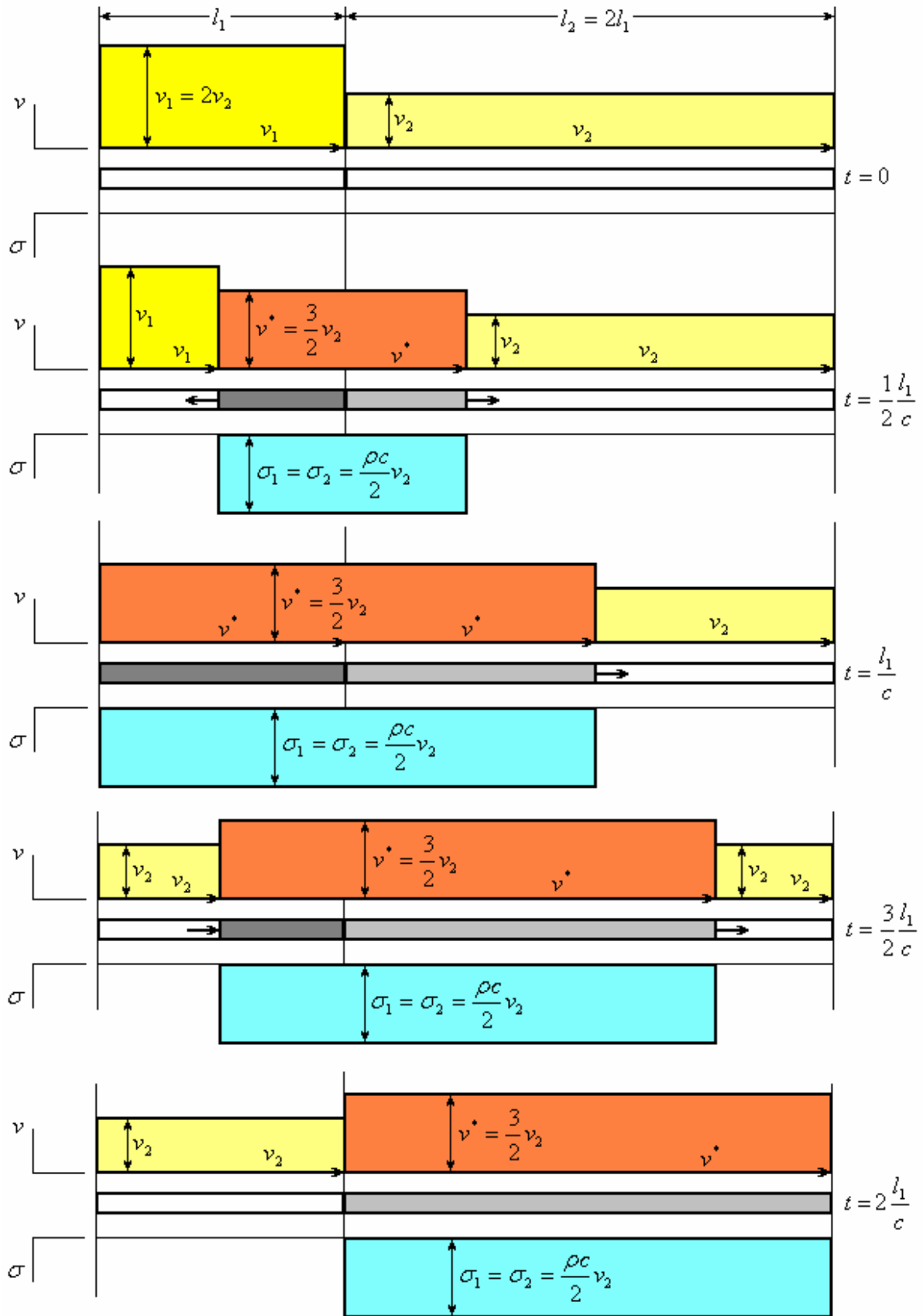
همانطور که ملاحظه می کنیم به هنگامیکه طول دو میله متفاوت است موج انعکاسی در میله کوتاه تر  $l_1$  قبل از موج انعکاسی مربوط به میله طویل تر به محل تماس وارد می شود . در این لحظه یعنی لحظه زمان

$t = \frac{2l_1}{c}$  همه نقاط میله یک دارای سرعت  $v_2$  و همه نقاط میله دو دارای سرعت  $v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = \frac{3}{2}v_2$

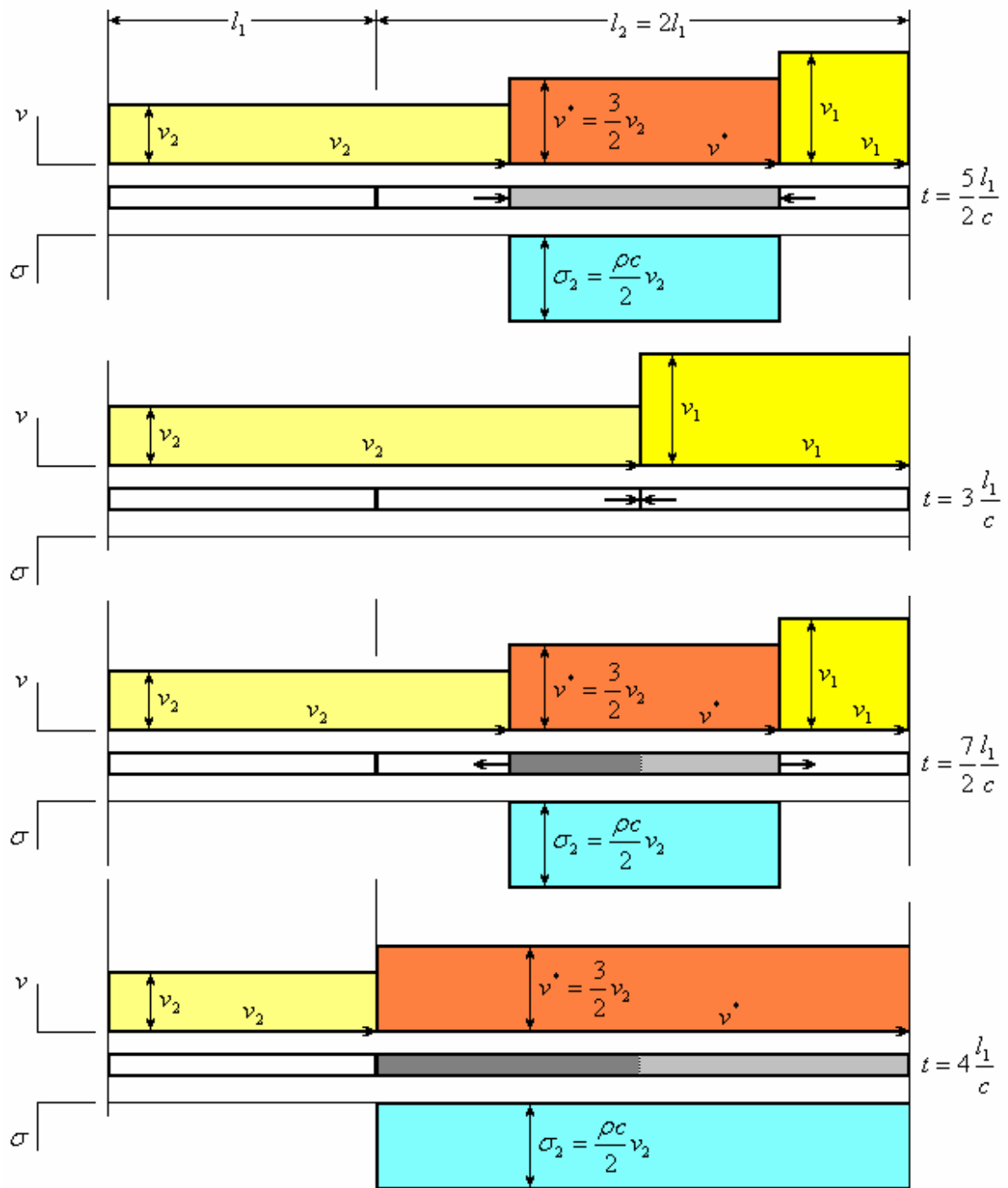
می باشند . میله کوتاه تر در این حالت فاقد تنش بوده در حالی که قسمتی از میله طویل تر هنوز تحت تاثیر

موج متحرک قرار دارد . دو میله تا زمان  $t = \frac{4l_1}{c} = \frac{2l_2}{c}$  یعنی زمانی که موج انعکاسی تشکیل شده در

انتهای آزاد میله طویل تر به محل تماس می رسد ، در تماس باقی می ماند . این موج در محل تماس با سطح آزاد از تنش مواجه شده و از اینرو به میله کوتاه تر انتقال نمی یابد بلکه بر طبق شرایط مرزی موجود انعکاس می یابد .





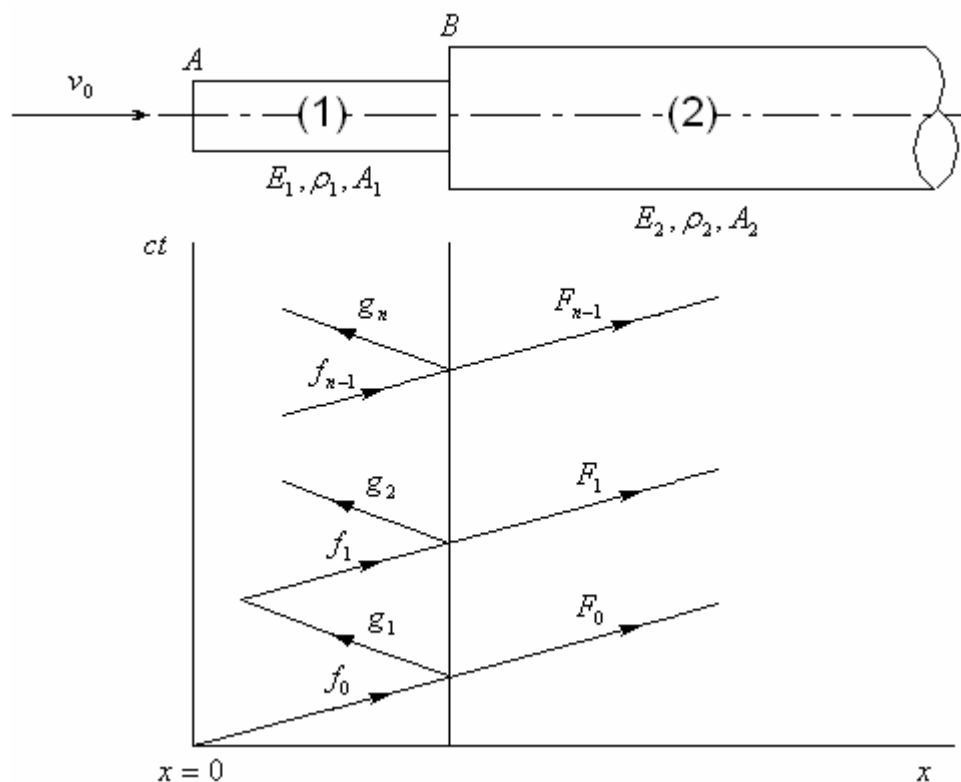


مثال :

یک میله یکنواخت طویل مطابق شکل به یک میله کوتاه با جنس متفاوت وصل شده است . چنانچه انتهای  $A$  تحت تاثیر پالس سرعت که به طور ثابت و محوری برای مدت زمان  $\tau$  اعمال می گردد قرار گیرد نشان دهید که نیرو در میله طویل بوسیله رابطه :

$$v_0 z_2 \left[ 1 - \left( \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} \right)^n \right]$$

داده می شود که در آن  $z = \frac{EA}{c}$  برای هر میله و  $n$  تعداد انعکاسات در فصل مشترک  $B$  دو میله در خلال زمان  $\tau$  می باشد .



حل :

با در نظر گرفتن دیاگرام انتشار امواج چنانچه  $u_1$  نمایشگر جابجایی در میله یک ، در موقعیت  $x = 0$  و برای فواصل  $2nl < ct < 2(n+1)l$  باشد می توانیم بنویسیم :

$$u_1 = F_n(c_1 t - x - 2nl) \Big|_{x=0} + g_n(c_1 t + x - 2nl) \Big|_{x=0}$$

$$= F_n(c_1 t - 2nl) + g_n(c_1 t - 2nl)$$

( ۱ )

در فاصله

$$2nl < ct < 2(n+1)l$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$x = 0$$

$$u_1 = f_0(c_1 t - x) \Big|_{x=0} = f_0(c_1 t) \quad \left| \begin{array}{l} \text{در فاصله} \\ 0 < ct < 2l \\ x = 0 \\ n = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

هم چنین در صورتیکه  $u_1^*$  و  $u_2$  به ترتیب نمایشگر جابجایی در میله های یک و دو، در موقعیت  $x = l$  و برای فواصل  $(2n-1)l < ct < (2n+1)l$  باشند داریم:

$$u_1^* = f_{n-1}[c_1 t - x - 2(n-1)l] \Big|_{x=l} + g_n(c_1 t + x - 2nl) \Big|_{x=l} \quad \left| \begin{array}{l} \text{در فواصل} \\ (2n-1)l < ct < (2n+1)l \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right. \quad (3)$$

$$u_2 = F_{n-1}[c_2 t - x - 2(n-1)l] \Big|_{x=l} = F_{n-1}[c_2 t - (2n-1)l] \quad \left| \begin{array}{l} x = l \end{array} \right. \quad (4)$$

حال جهت ارضا پیوستگی سرعت در  $x = 0$  می توانیم بنویسیم:

$$v \Big|_{x=0} = \frac{\partial u_1}{\partial t} \Big|_{x=0} = v_0$$

و یا با استفاده از روابط (1) و (2):

$$c_1 f'_n + c_1 g'_n = v_0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{برای} \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right.$$

و

$$c_1 f'_0 = v_0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{برای} \\ n = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

هم چنین در صورتیکه نیرو در  $x = 0$  را با  $P$  نمایش دهیم داریم:

$$P \Big|_{x=0} = A_1 \sigma \Big|_{x=0} = -E_1 A_1 \varepsilon_1 \Big|_{x=0} = -E_1 A_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

و یا با استفاده از روابط (1) و (2):

$$P \Big|_{x=0} = -E_1 A_1 (-f'_n + g'_n) = -z_1 c_1 (-f'_n + g'_n) \quad \left| \begin{array}{l} \text{برای} \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right.$$

و

$$P \Big|_{x=0} = -E_1 A_1 f'_0 = z_1 c_1 f'_0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{برای} \\ n = 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

به طریق مشابه جهت ارضاء پیوستگی سرعت در  $x=l$  داریم :

$$v|_{x=l} = \frac{\partial u_2}{\partial t} \Big|_{x=l} = \frac{\partial u_1^*}{\partial t} \Big|_{x=l}$$

و یا با استفاده از روابط (۳) و (۴) :

$$c_1(f'_{n-1} + g'_n) = c_2 F'_{n-1} \quad (۷)$$

هم چنین در صورتیکه نیرو در  $x=l$  را با  $P^*$  نمایش دهیم می توانیم بنویسیم :

$$P|_{x=l} = A_1 \sigma_1^* \Big|_{x=l} = A_2 \sigma_2 \Big|_{x=l} = -E_1 A_1 \varepsilon_1^* = -E_1 A_1 \frac{\partial u_1^*}{\partial x} \Big|_{x=l} = -E_2 A_2 \varepsilon_2 \Big|_{x=l} = -E_2 A_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=l}$$

و یا با استفاده از روابط (۳) و (۴) :

$$P^* \Big|_{x=l} = -c_1 z_1 (-f'_{n-1} + g'_n) = c_2 z_2 F'_{n-1} \quad (۸)$$

حال چنانچه بین روابط (۷) و (۸) یکبار  $g'_n$  و بار دیگر  $F'_{n-1}$  را حذف کنیم داریم :

$$F'_{n-1} = \frac{2c_1 z_1}{c_2(z_1 + z_2)} f'_{n-1} \quad (۹)$$

$$g'_n = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2} f'_{n-1} \quad (۱۰)$$

با جانشین کردن رابطه (۱۰) در (۵) می توانیم بنویسیم :

$$f'_n = \frac{v_0}{c_1} + \frac{z_2 - z_1}{z_1 + z_2} f'_{n-1} \quad (۱۱)$$

با فرض  $r = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1}$  رابطه (۱۱) به صورت :

$$f'_n = \frac{v_0}{c_1} + r f'_{n-1} \quad (۱۲)$$

نوشته می شود . بنابراین با استفاده از رابطه (۱۲) :

$$f'_0 = \frac{v_0}{c_1} \quad , \quad f'_1 = \frac{v_0}{c_1} (1+r) \quad , \quad f'_2 = \frac{v_0}{c_1} (1+r+r^2) \quad , \quad \dots \quad ,$$

$$f'_n = \frac{v_0}{c_1} (1+r+r^2+\dots+r^n) \quad (۱۳)$$

حال در صورتیکه :

$$S_n = 1+r+r^2+\dots+r^n$$

باشد داریم :

$$rS_n = r+r^2+r^3+\dots+r^{n+1} = S_n - 1 + r^{n+1}$$

پس :

$$S_n = \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \quad (14)$$

در نتیجه رابطه (۱۳) به صورت :

$$f'_n = \frac{v_0}{c_1} \left( \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1} \right) \quad (15)$$

نوشته می شود و یا :

$$f'_{n-1} = \frac{v_0}{c_1} \left( \frac{r^n - 1}{r - 1} \right) \quad (16)$$

با جانشین کردن رابطه (۱۶) در رابطه (۹) داریم :

$$\begin{aligned} F'_{n-1} &= -\frac{2c_1z_1}{c_2(z_1+z_2)} \frac{v_0}{c_1} \left[ \left( \frac{z_2-z_1}{z_2+z_1} \right)^n - 1 \right] \left( \frac{z_2+z_1}{2z_1} \right) \\ &= \frac{z_0}{c_2} \left[ 1 - \left( \frac{z_2-z_1}{z_2+z_1} \right)^n \right] \end{aligned} \quad (17)$$

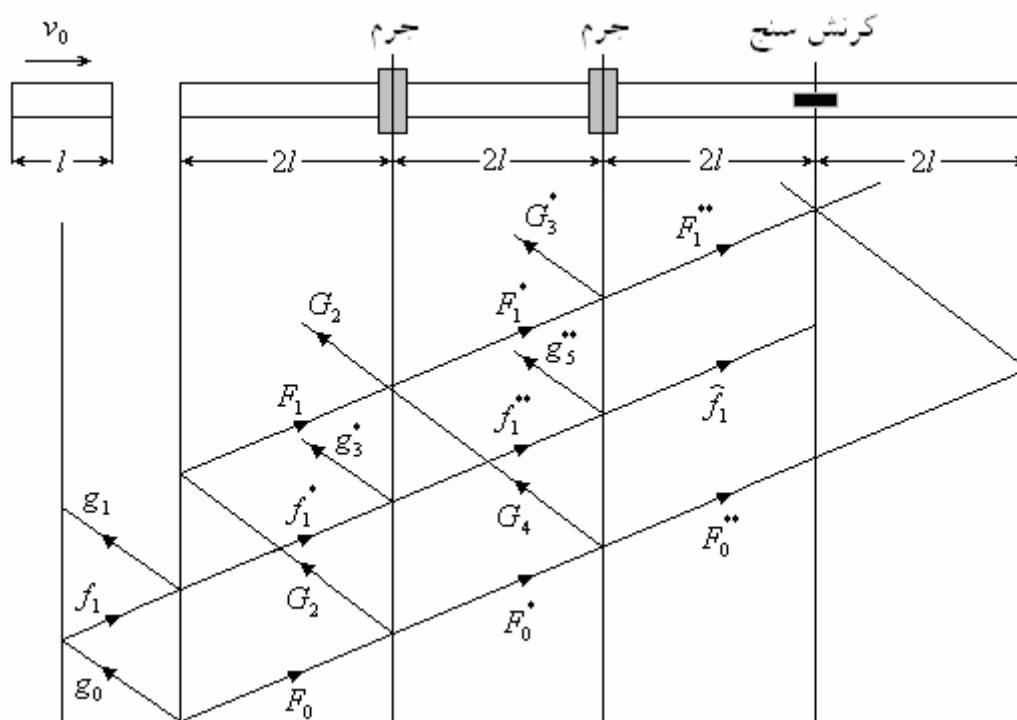
بنابراین نیرو در میله طویل با جانشین کردن رابطه (۱۷) در رابطه (۸) به صورت :

$$P^* \Big|_{x=l} = c_2 z_2 F'_{n-1} = c_2 z_2 \frac{v_0}{c_2} \left[ 1 - \left( \frac{z_2-z_1}{z_2+z_1} \right)^n \right] = v_0 z_2 \left[ 1 - \left( \frac{z_2-z_1}{z_2+z_1} \right)^n \right]$$

داده می شود .

مثال :

یک میله طویل در حال سکون به طول  $8l$  مطابق شکل بوسیله یک میله کوتاه بطول  $l$  که دارای سرعت  $2m/sec$  است ضربه می خورد. جنس هر دو میله یکسان و دارای سطوح مقطع مساوی هستند. اجرامی معادل دو برابر جرم میله کوتاه به صورت صلب در فواصل  $2l$  و  $4l$  از انتهای محل ضربه به میله طویل متصل شده اند. یک کرنش سنج (Strain Gage) به منظور ثبت کرنش محوری در موقعیت  $6l$  از محل ضربه روی میله طویل نصب شده است. شکل نمایش تغییرات کرنش بر حسب زمان را در محل نصب کرنش سنج قبل از ورود هیچ موج انعکاسی در میله طویل رسم کنید. سرعت موج طولی را برابر  $5000m/sec$  فرض نمائید.



حل :

با در نظر گرفتن دیاگرام انتشار امواج چنانچه  $u_1$  نمایشگر جابجایی در میله یک برای فواصل  $0 \leq ct \leq l$  و  $u_2$  نمایشگر جابجایی در میله دو برای فواصل  $0 \leq ct \leq 2l$  باشد داریم :

$$u_1 = g_0(ct + x) \quad \text{و} \quad u_2 = F_0(ct - x)$$

بنابراین جهت ارضاء پیوستگی سرعت در  $x = 0$  می توانیم بنویسیم :

$$v_0 + \left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u_2}{\partial t} \right|_{x=0}$$

و یا :

$$v_0 + cg'_0(ct) = cF'_0(ct) \quad (1)$$

هم چنین چنانچه نیرو در  $x = 0$  را با  $P$  نمایش دهیم داریم :

$$P|_{x=0} = -EA \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = -EA \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

و یا :

$$g'_0(ct) = -F'_0(ct) \quad (2)$$

از حل روابط (1) و (2) داریم :

$$g'_0(ct) = -\frac{v_0}{2c} \quad \text{و} \quad F'_0(ct) = \frac{v_0}{2c}$$

هم چنین از آنجائیکه کرنش در انتهای سمت چپ میله کوتاه برابر صفر است می توانیم بنویسیم :

$$\varepsilon|_{x=-l} = g'_0(ct+x)|_{x=-l} - f'_1(ct-x-2l)|_{x=-l} = 0$$

و یا :

$$f'_1(ct-l) = g'_0(ct-l) = -\frac{v_0}{2c} \quad (3)$$

حال همانطور که در دیاگرام انتشار امواج نشان داده شده است در موقعیت  $x = 0$  علاوه بر انتشار موج  $F_0$

در میله طویل از لحظه زمان  $t = 0$  ، موج  $f_1^*$  نیز از لحظه زمان  $t = \frac{2l}{c}$  در میله طویل شروع به انتشار

می کند . بنابراین جهت ارضاء پیوستگی سرعت و نیرو برای این موج داریم :

$$cf'_1(ct-x-2l)|_{x=0} + cg'_1(ct+x-2l)|_{x=0} = cf_1^*(ct-x-2l)|_{x=0}$$

و

$$EAf'_1(ct-x-2l)|_{x=0} - EAg'_1(ct+x-2l)|_{x=0} = EAf_1^*(ct-x-2l)|_{x=0}$$

پس :

$$f'_1(ct-2l) + g'_1(ct-2l) = f_1^*(ct-2l) \quad (4)$$

$$f'_1(ct-2l) - g'_1(ct-2l) = f_1^*(ct-2l) \quad (5)$$

از حل معادلات (4) و (5) :

$$g'_1(ct-2l) = 0 \quad \text{و} \quad f_1^*(ct-2l) = f'_1(ct-2l) = -\frac{v_0}{2c} \quad (6)$$

حال چنانچه موقعیت  $x = 2l$  را در نظر بگیریم جهت ارضاء پیوستگی سرعت می توانیم بنویسیم :

$$cF'_0(ct-x)|_{x=2l} + cG'_2(ct+x-4l)|_{x=2l} = cF_0^*(ct-x)|_{x=2l}$$

و

$$cf_1^*(ct-x-2l)|_{x=2l} + cg_3^*(ct+x-6l)|_{x=2l} = cf_1^{**}(ct-x-2l)|_{x=2l}$$

و یا :

$$F_0'(ct-2l) + G_2'(ct-2l) = F_0^*(ct-2l) \quad (7)$$

و

$$f_1^*(ct-4l) + g_3^*(ct-4l) = f_1^{**}(ct-4l) \quad (8)$$

همچنین چنانچه معادله حرکت را در  $x = 2l$  بنویسیم داریم :

$$\begin{aligned} & -EAF_0^*(ct-x)|_{x=2l} - EA[-F_0'(ct-x)|_{x=2l} + G_2'(ct+x-4l)|_{x=2l}] \\ & = Mc^2 F_2^{**}(ct-x)|_{x=2l} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} & -Eaf_1^{**}(ct-x-2l)|_{x=2l} - EA[-f_1^*(ct-x-2l)|_{x=2l} + g_3^*(ct+x-6l)|_{x=2l}] \\ & = Mc^2 f_1^{**}(ct-x-2l)|_{x=2l} \end{aligned}$$

و یا :

$$-F_0^*(ct-2l) + F_0'(ct-2l) - G_2'(ct-2l) = \frac{Mc^2}{EA} F_0^{**}(ct-2l) \quad (9)$$

و

$$-f_1^{**}(ct-4l) + f_1^*(ct-4l) - g_3^*(ct-4l) = \frac{Mc^2}{EA} f_1^{**}(ct-4l) \quad (10)$$

با استفاده از روابط (7)، (8)، (9)، (10) می توانیم بنویسیم :

$$\frac{Mc^2}{EA} F_0^{**}(ct-2l) + 2F_0^*(ct-2l) = 2F_0'(ct-2l)$$

و

$$\frac{Mc^2}{EA} f_1^{**}(ct-4l) + 2f_1^*(ct-4l) = 2f_1'(ct-4l)$$

در نتیجه با فرض  $\lambda = \frac{2EA}{Mc^2}$  داریم :

$$F_0^{**} + \lambda F_0^* = \lambda F_0' \quad (11) \quad \text{و} \quad f_1^{**} + \lambda f_1^* = \lambda f_1' \quad (12)$$

چنانچه طرفین معادله (11) را در  $e^{\lambda\zeta}$  ضرب کنیم داریم :

$$\frac{d}{d\zeta} \left( F_0^* e^{\lambda\zeta} \right) = \lambda F_0' e^{\lambda\zeta} = \lambda \frac{v_0}{2c} e^{\lambda\zeta}$$

و یا :



$$F_0^*{}' = e^{-\lambda\zeta} \left[ \left( \frac{v_0}{2c} e^{\lambda\zeta} \right) + B \right]$$

که در آن  $\zeta = ct - 2l$  و  $B$  مقدار ثابتی است. جهت تعیین ثابت  $B$  با فرض:

$$F_0^*{}' \Big|_{\zeta=ct-2l=0} = 0$$

می توانیم بنویسیم:

$$B = -\frac{v_0}{2c}$$

پس:

$$F_0^*{}'(ct - 2l) = \frac{v_0}{2c} [1 - e^{-\lambda(ct-2l)}]$$

و یا:

$$F_0^*{}'(ct - x) = \frac{v_0}{2c} [1 - e^{-\lambda(ct-x)}] \quad (13)$$

با تکرار عملیات مشابه برای معادله (12) داریم:

$$f_1^{**}{}'(ct - 4l) = -\frac{v_0}{2c} [1 - e^{-\lambda(ct-4l)}]$$

و یا:

$$f_1^{**}{}'(ct - x) = -\frac{v_0}{2c} [1 - e^{-\lambda(ct-x)}] \quad (14)$$

به طریق مشابه چنانچه پیوستگی سرعت و معادله حرکت را در  $x = 4l$  بنویسیم داریم:

$$\begin{aligned} cF_0^*{}'(ct-x) \Big|_{x=4l} + cG_4'(ct+x-8l) \Big|_{x=4l} &= cF_0^{**}{}'(ct-x) \Big|_{x=4l} \\ -EAF_0^{**}{}'(ct-x) \Big|_{x=4l} - EA \left[ -F_0^*{}'(ct-x) \Big|_{x=4l} + G_4'(ct+x-8l) \Big|_{x=4l} \right] \\ &= Mc^2 F_0^{**}{}''(ct-x) \Big|_{x=4l} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} cf_1^{**}{}'(ct-x-2l) \Big|_{x=4l} + cg_5^{**}{}'(ct+x-10l) \Big|_{x=4l} &= c\widehat{f}_1'(ct-x-2l) \Big|_{x=4l} \\ -EA\widehat{f}_1'(ct-x-2l) \Big|_{x=4l} - EA \left[ -f_1^{**}{}'(ct-x-2l) \Big|_{x=4l} + g_5^{**}{}'(ct+x-10l) \Big|_{x=4l} \right] \\ &= Mc^2 \widehat{f}_1'(ct-x-2l) \Big|_{x=4l} \end{aligned}$$

و یا:

$$F_0^*{}'(ct-4l) + G_4'(ct-4l) = F_0^{**}{}'(ct-4l) \quad (15)$$

$$-F_0^{**'}(ct-4l) + F_0^{*'}(ct-4l) - G_4'(ct-4l) = Mc^2 F_0^{**''}(ct-4l) \quad (16)$$

$$f_1^{**'}(ct-6l) + g_5^{**'}(ct-6l) = \widehat{f}_1'(ct-6l) \quad (17)$$

$$-\widehat{f}_1'(ct-6l) + f_1^{**'}(ct-6l) - g_5^{**'}(ct-6l) = Mc^2 \widehat{f}_1''(ct-6l) \quad (18)$$

با استفاده از معادلات (۱۳) و (۱۴) و همچنین (۱۵) و (۱۶) داریم:

$$F_0^{**''}(ct-4l) + \lambda F_0^{**'}(ct-4l) = \lambda F_0^{*'}(ct-4l) \quad (19)$$

و

$$\widehat{f}_1'(ct-6l) + \lambda \widehat{f}_1''(ct-6l) = \lambda f_1^{**'}(ct-6l) \quad (20)$$

حال چنانچه طرفین معادله (۱۹) را در  $e^{\lambda\zeta}$  ضرب کنیم می توانیم بنویسیم:

$$\frac{d}{d\zeta} \left( F_0^{**'} e^{\lambda\zeta} \right) = \lambda e^{\lambda\zeta} F_0^{*'} = \frac{\lambda v_0}{2c} e^{\lambda\zeta} (1 - e^{-\lambda\zeta}) = \frac{\lambda v_0}{2c} (e^{\lambda\zeta} - 1)$$

و یا:

$$F_0^{**'} = \frac{v_0}{2c} e^{-\lambda\zeta} (e^{\lambda\zeta} - \lambda\zeta) + B e^{-\lambda\zeta}$$

که در آن  $\zeta = ct - 4l$  و  $B$  مقدار ثابتی است. جهت تعیین ثابت  $B$  با فرض:

$$F_0^{**'} \Big|_{\zeta=ct-4l=0} = 0$$

داریم:

$$B = -\frac{v_0}{2c}$$

پس:

$$F_0^{**'} = \frac{v_0}{2c} (1 - e^{-\lambda\zeta} - \lambda\zeta e^{-\lambda\zeta})$$

و یا:

$$F_0^{**'}(ct-x) = \frac{v_0}{2c} [1 - e^{-\lambda(ct-x)} - (ct-x)\lambda e^{-\lambda(ct-x)}] \quad (21)$$

با تکرار عملیات مشابه برای معادله (۲۰) می توانیم بنویسیم:

$$\widehat{f}_1'(ct-x-2l) = -\frac{v_0}{2c} [1 - e^{-\lambda(ct-x-2l)} - (ct-x-2l)\lambda e^{-\lambda(ct-x-2l)}] \quad (22)$$

حال چنانچه در معادلات (۲۱) و (۲۲)  $x = 6l$  اختیار گردد داریم:

$$F_0^{**'}(ct-6l) = \frac{v_0}{2c} [1 - e^{-\lambda(ct-6l)} - (ct-6l)\lambda e^{-\lambda(ct-6l)}]$$

$$\widehat{f}_1'(ct-8l) = -\frac{v_0}{2c} [1 - e^{-\lambda(ct-8l)} - (ct-8l)\lambda e^{-\lambda(ct-8l)}]$$

در نتیجه کرنش در موقعیت  $x = 6l$  به صورت :

$$\varepsilon_1 = -F_0^{**'}(\alpha) = -\frac{v_0}{2c} (1 - e^{-\lambda\alpha} - \alpha\lambda e^{-\lambda\alpha})$$

$$\varepsilon_2 = -\widehat{f}_1'(\beta) = -\frac{v_0}{2c} (1 - e^{-\lambda\beta} - \beta\lambda e^{-\lambda\beta})$$

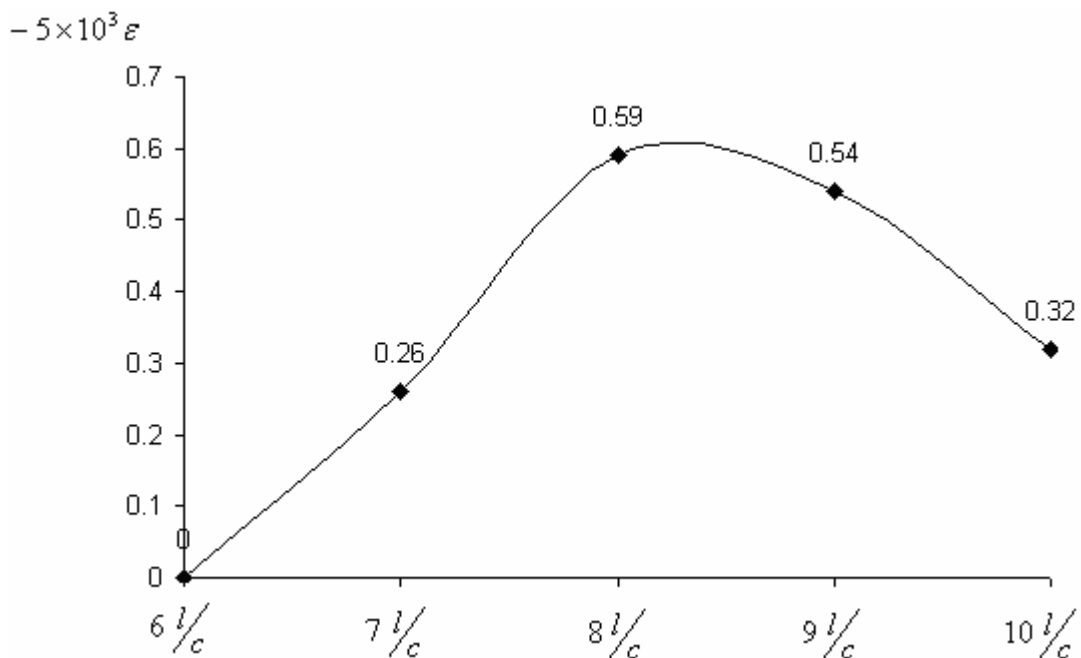
داده می شود که در آنها  $\alpha = ct - 6l$  و  $\beta = ct - 8l$  است . بنابراین جهت رسم نمایش تغییرات کرنش بر حسب زمان از آنجائیکه :

$$\lambda = \frac{2EA}{Mc^2} = \frac{2\rho c^2 A}{Mc^2} = \frac{2\rho A}{2\rho Al} = \frac{1}{\rho} \quad \varepsilon$$

است داریم :

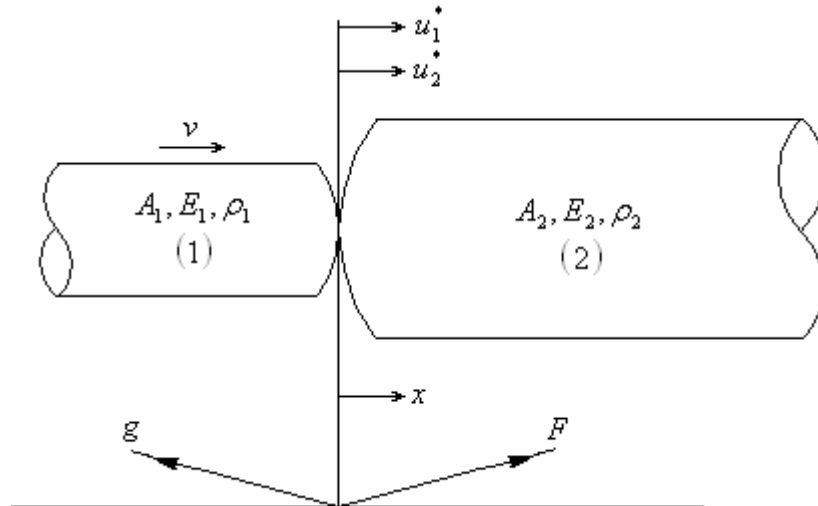
$\lambda\alpha$	$t$	$5 \times 10^3 \varepsilon_1$
0	$6l/c$	0
1	$7l/c$	-0.26
2	$8l/c$	-0.59
3	$9l/c$	-0.8
4	$10l/c$	-0.91

$\lambda\beta$	$t$	$5 \times 10^3 \varepsilon_2$
0	$8l/c$	0
1	$9l/c$	0.26
2	$10l/c$	0.59



### برخورد محوری دو میله با سطوح تماس غیر مسطح

دو میله یک و دو را مطابق شکل در وضعیت تماس در نظر بگیرید و فرض کنید میله یک قبل از برخورد با سرعت  $v$  به میله دو نزدیک شود.



در این صورت چنانچه جابجایی های میله های یک و دو به ترتیب با  $u_1^*$  و  $u_2^*$  نمایش دهیم می توانیم بنویسیم:

$$\alpha = u_1^* - u_2^* \quad (1)$$

که در آن  $\alpha$  مسافت نزدیکی دو جسم (تقرب) می باشد. چنانچه از رابطه (1) نسبت به زمان دیفرانسیل بگیریم داریم:

$$\dot{\alpha} = \dot{u}_1^* - \dot{u}_2^* \quad (2)$$

هم چنین در محل تماس دو میله می توانیم بنویسیم:

$$\dot{u}_1^* - v = \left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{x=0} \quad (3)$$

$$\dot{u}_2^* = \left. \frac{\partial u_2}{\partial t} \right|_{x=0} \quad (4)$$

که در آنها:

$$u_1 = g_0(c_1 t + x) \quad \text{و} \quad u_2 = F_0(c_2 t - x)$$

است. بنابراین با استفاده از روابط (2)، (3) و (4) داریم:

$$\dot{\alpha} = v + \left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{x=0} - \left. \frac{\partial u_2}{\partial t} \right|_{x=0} = v + c_1 g_0'(c_1 t) - F_0'(c_2 t) \quad (5)$$

حال چنانچه نیروی فشاری در محل تماس را با  $P$  نمایش دهیم می توانیم بنویسیم:

$$P = A_1 \sigma_1 \Big|_{x=0} = A_2 \sigma_2 \Big|_{x=0} = -A_1 E_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = -A_2 E_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

و یا :

$$P = -z_1 c_1 g'_0(c_1 t) = z_2 c_2 F'_0(c_2 t) \quad (6)$$

چنانچه در قیاس با تئوری برخورد هرتز برای برخورد محوری دو میله با سطوح تماس غیر مسطح شکل کلی نیروی تماس را به صورت :

$$P = K \alpha^n \quad (7)$$

فرض کنیم رابطه (6) می تواند به صورت :

$$P = -z_1 c_1 g'_0(c_1 t) = z_2 c_2 F'_0(c_2 t) = K \alpha^n \quad (8)$$

نوشته شود . پس :

$$g'_0(c_1 t) = -\frac{K}{z_1 c_1} \alpha^n \quad \text{و} \quad F'_0(c_2 t) = \frac{K}{z_2 c_2} \alpha^n \quad (9)$$

با جانشین کردن توابع  $g'_0$  و  $F'_0$  در رابطه (5) داریم :

$$\dot{\alpha} = v - \frac{K}{z_1} \alpha^n - \frac{K}{z_2} \alpha^n \quad (10)$$

و یا :

$$\dot{\alpha} + \lambda \alpha^n = v \quad (11)$$

که در آن :

$$\lambda = K \left( \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \quad (12)$$

است . انتخاب شکل کلی نیرو به صورت ارائه شده بوسیله رابطه (7) امکان مطالعه برخورد محوری دو میله با سطوح تماس غیر مسطح را برای مقادیر مختلف  $n$  ممکن می سازد . چنانچه  $n=1$  اختیار گردد ، با استفاده از رابطه (7) می توانیم بنویسیم :

$$P = K \alpha \quad (13)$$

در این حالت نیرو از قانون هوک تبعیت می کند و این بدان معنی است که فاصله سطوح مسطح دو میله را از یکدیگر در محل تماس بوسیله یک فنر خطی بدون جرم با ضریب الاستیکی  $K$  مدول کنیم . در این حالت معادله دیفرانسیل (11) به صورت :

$$\frac{d\alpha}{dt} = v - \lambda \alpha \quad (14)$$

نوشته می شود . در نتیجه :

$$\int_0^t dt = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{v - \lambda\alpha} \quad (15)$$

پس :

$$\alpha = \frac{v}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) \quad (16)$$

بنابراین نیروی تماس در این حالت به صورت :

$$P = K\alpha = \frac{Kv}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t}) \quad (17)$$

نوشته می شود چنانچه  $n = 2$  اختیار گردد داریم :

$$P = K\alpha^2$$

بنابراین :

$$\frac{d\alpha}{dt} = v - \lambda\alpha^2$$

و یا :

$$\int_0^t dt = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{v - \lambda\alpha^2}$$

پس :

$$\alpha = \sqrt{\frac{v}{\lambda}} \tanh(\sqrt{\lambda vt}) \quad (18)$$

در نتیجه نیروی تماس در این حالت به صورت :

$$P = K\alpha^2 = \frac{Kv}{\lambda} \tanh^2(\sqrt{\lambda vt}) \quad (19)$$

داده می شود . چنانچه  $n = \frac{3}{2}$  اختیار گردد ، داریم :

$$P = K\alpha^{\frac{3}{2}}$$

که همان نیروی تماس هرتزی می باشد . در این حالت معادله دیفرانسیل ( ۱۱ ) به صورت :

$$\int dt = \int \frac{d\alpha}{v - \lambda\alpha^{\frac{3}{2}}}$$

نوشته می شود . با فرض  $\frac{\lambda}{v}\alpha^{\frac{3}{2}} = \beta^3$  می توانیم بنویسیم :

$$\frac{d\alpha}{v - \lambda\alpha^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{v}\left(\frac{v}{\lambda}\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\beta d\beta}{\beta^3 - 1}$$

و یا :

$$t = -\frac{2}{v} \left( \frac{v}{\lambda} \right)^{\frac{2}{3}} \int_0^{\beta} \frac{\beta d\beta}{\beta^3 - 1} = -\frac{2}{3v} \left( \frac{v}{\lambda} \right)^{\frac{2}{3}} \left[ \int_0^{\beta} \frac{2-\beta}{\beta-1} d\beta + \int_0^{\beta} \frac{\beta^2+2}{\beta^2+\beta+1} d\beta \right]$$

اما :

$$\begin{aligned} \frac{\beta^2+2}{\beta^2+\beta+1} &= 1 - \frac{\beta-1}{\beta^2+\beta+1} = 1 - \frac{1}{2} \left[ \frac{2\beta+1}{\beta^2+\beta+1} - \frac{3}{\beta^2+\beta+1} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left[ \frac{2\beta+1}{\beta^2+\beta+1} - \frac{3}{\left(\beta+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right] \end{aligned}$$

و

$$\frac{2-\beta}{\beta-1} = -\frac{\beta-2}{\beta-1} = -\frac{\beta-1-1}{\beta-1} = -\left(1 - \frac{1}{\beta-1}\right)$$

پس :

$$\int_0^{\beta} \frac{2-\beta}{\beta-1} d\beta = -\int_0^{\beta} \left(1 - \frac{1}{\beta-1}\right) d\beta = -[\beta - \text{Ln}(\beta-1)]_0^{\beta}$$

و

$$\begin{aligned} \int_0^{\beta} \frac{\beta^2+2}{\beta^2+\beta+1} d\beta &= \int_0^{\beta} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[ \frac{2\beta+1}{\beta^2+\beta+1} - \frac{3}{\left(\beta+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right] \right\} d\beta \\ &= \left[ \beta - \frac{1}{2} \text{Ln}(\beta^2+\beta+1) + \frac{3}{2} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left( \frac{\beta+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) \right) \right]_0^{\beta} \end{aligned}$$

در نتیجه :

$$\int_0^{\beta} \frac{\beta^2+2}{\beta^2+\beta+1} d\beta + \int_0^{\beta} \frac{2-\beta}{\beta-1} d\beta = -\left[ \frac{1}{2} \text{Ln} \left( \frac{\beta^2+\beta+1}{(\beta-1)^2} \right) - \frac{3}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left( \frac{2\beta+1}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^{\beta}$$

بنابراین :

$$t = \frac{2}{3v} \left( \frac{v}{\lambda} \right)^{\frac{2}{3}} \left[ \frac{1}{2} \text{Ln} \left( \frac{\beta^2+\beta+1}{(\beta-1)^2} \right) - \sqrt{3} \tan^{-1} \left( \frac{2\beta+1}{\sqrt{3}} \right) + \sqrt{3} \frac{\pi}{6} \right] \quad (20)$$

پس :

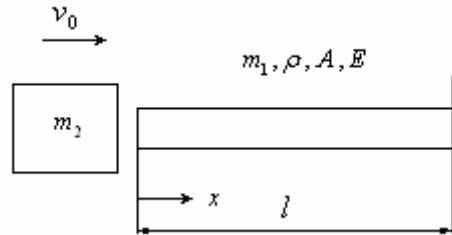
$$P = K\alpha^{\frac{3}{2}} = \frac{Kv}{\lambda} \beta^3 \quad (21)$$

با استفاده از رابطه ( ۲۰ ) می توان مقادیر  $\beta$  در لحظات زمانی مختلف را تعیین کرده و سپس با استفاده از رابطه ( ۲۱ ) نیرو را محاسبه کرد . هم چنین می توان به سادگی نتیجه گیری کرد که چنانچه  $\beta = 1$  باشد ،  $t$  به سمت بی نهایت میل کرده و در این حالت نیرو  $P = P_{\max} = \frac{Kv}{\lambda}$  خواهد بود .

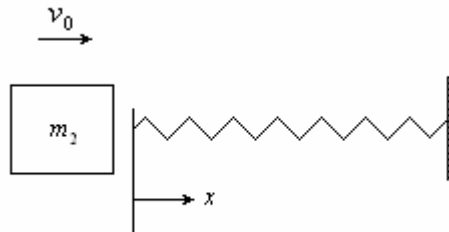


### ضربه طولی یک جرم صلب روی یک میله

جهت بررسی ضربه فشاری طولی یک جرم ضربه زننده به جرم  $m_2$  به یک میله به جرم  $m_1 = \rho Al$  فرض کنید جرم  $m_2$  مطابق شکل با سرعت اولیه  $v_0$  به میله ساکنی به طول  $l$  که در انتهای  $x = l$  گیر دار است برخورد کند .



در این صورت یک روش مقدماتی برای تحلیل این مسئله مدل کردن میله با یک فنر بدون جرم خواهد بود که ثابت آن فنر بر اساس تعیین نیروی لازم برای ایجاد جابجایی واحد در میله به صورت  $K = \frac{EA}{l}$  داده می شود .



چنانچه ماکزیمم جابجایی در فنر  $\delta_m$  فرض شود با استفاده از اصل بقای انرژی مکانیکی می توانیم بنویسیم :

$$T_0 = \frac{1}{2} m_2 v_0^2 = V_m = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} \delta_m^2$$

پس :

$$\varepsilon_m = -\frac{\delta_m}{l} = -v_0 \sqrt{\frac{m_2}{EA}} = -v_0 \sqrt{\frac{\rho m_2}{Em_1}} = -\frac{v_0}{c_0} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

که در آن  $c_0^2 = \frac{E}{\rho}$  است . بدیهی است که نقص این تحلیل بواسطه چشم پوشی از اثرات اینرسی میله است . در صورتیکه بخواهیم مسئله را بر اساس انتشار موج یک بعدی در طول میله مورد بررسی قرار دهیم همانطور که قبلا دیدیم معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت میله به صورت :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

نوشته می شود که دارای جواب :

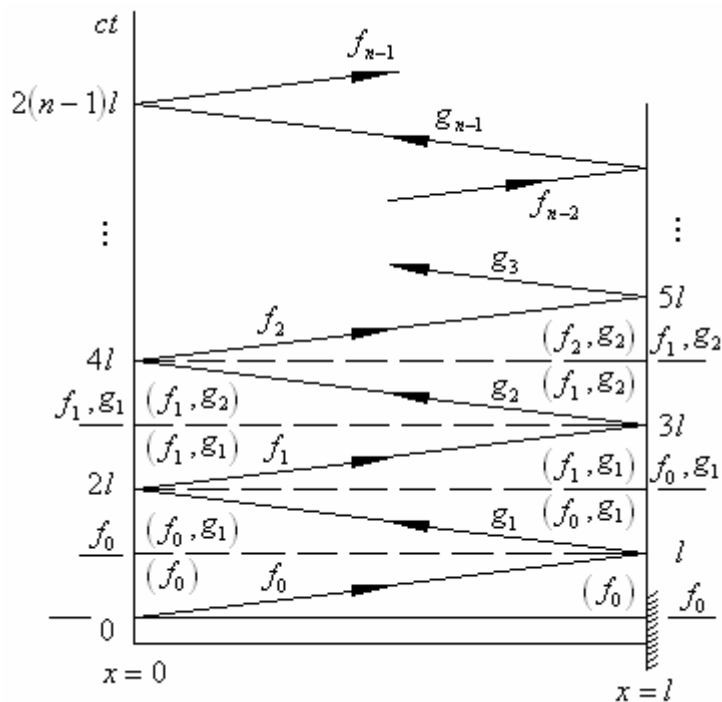
$$u = f(c_0t - x) + g(c_0t + x) \quad (a)$$

است .

حال چنانچه دیاگرامی مطابق شکل را در نظر بگیریم همانطور که ملاحظه می کنیم امواج از نوع  $f$  یعنی امواجی که آرگومننت آنها شامل  $ct - x$  می باشد و در امتداد مثبت محور  $x$  انتشار می یابند ، از محل  $x = 0$  و در فواصل مساوی  $ct = 2l$  از موج  $f$  قبلی خود شروع می شوند . در نتیجه می توان آنها را به صورت :

$$f_n = f_n(ct - x - 2nl)$$

ارائه کرد . به عنوان مثال :



$$\begin{array}{llll}
 n=0 & f_0 = f_0(ct - x) & \Rightarrow & t = \frac{x}{c}, \quad x=0 \Rightarrow t=0 \\
 n=1 & f_1 = f_1(ct - x - 2l) & \Rightarrow & t = \frac{x+2l}{c}, \quad x=0 \Rightarrow t = \frac{2l}{c} \\
 n=2 & f_2 = f_2(ct - x - 4l) & \Rightarrow & t = \frac{x+4l}{c}, \quad x=0 \Rightarrow t = \frac{4l}{c} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 n=n & f_n = f_n(ct - x - 2nl) & \Rightarrow & t = \frac{x+2nl}{c}, \quad x=0 \Rightarrow t = \frac{2nl}{c}
 \end{array}$$

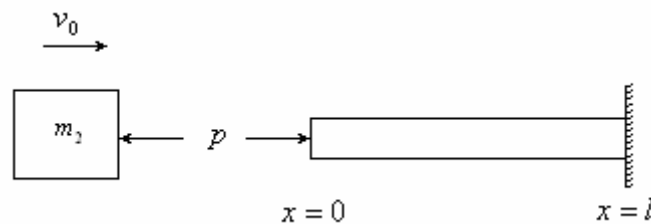
به طریق مشابه امواج از نوع  $g$  یعنی امواجی که آرگومننت آنها شامل  $ct+x$  است و در امتداد منفی محور  $x$  انتشار می یابند از محل  $x=l$  و در فواصل مساوی  $ct=2l$  از موج  $g$  قبلی خود شروع می شوند . بنابراین برای آنها می توانیم بنویسیم :

$$g_n = g_n(ct+x-2nl)$$

به عنوان مثال :

$$\begin{array}{llllllll} n=1 & g_1 = g_1(ct+x-2l) & \Rightarrow & t = \frac{2l-x}{c} & , & x=l & \Rightarrow & t = \frac{l}{c} \\ n=2 & g_2 = g_2(ct+x-4l) & \Rightarrow & t = \frac{4l-x}{c} & , & x=l & \Rightarrow & t = \frac{3l}{c} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n=n & g_n = g_n(ct+x-2nl) & \Rightarrow & t = \frac{2nl-x}{c} & , & x=l & \Rightarrow & t = (2n-1)\frac{l}{c} \end{array}$$

در آغاز ضربه فشاری ، نیروهای وارد بر جرم  $m_2$  و میله ناشی از اثر کرنش آنی ایجاد شده در محل تماس می باشند لذا چنانچه مطابق شکل نیروی وارده بر جرم  $m_2$  را  $F_2$  فرض کنیم .



معادله حرکت برای جرم  $m_2$  به صورت :

$$P = -m_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=0}$$

نوشته می شود . همچنین :

$$P = A\sigma \Big|_{x=0} = -EA\varepsilon \Big|_{x=0} = -EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

پس :

$$m_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=0} = EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (1)$$

اما در فاصله  $0 < ct < 2l$  جابجایی در موقعیت  $x=0$  همانطور که از روی دیاگرام می توان ملاحظه نمود ، بوسیله رابطه :

$$u \Big|_{x=0} = f_0(ct-x) \Big|_{x=0} = f_0(\zeta) \quad (2)$$

داده می شود . که در آن  $\zeta = ct$  است . بنابراین رابطه ( ۱ ) به صورت :

$$f_0''(\zeta) = -\frac{EA}{m_2 c^2} f_0'(\zeta) = -\frac{M}{\rho} f_0'(\zeta) \quad (3)$$

نوشته می شود که در آن :

$$M = \frac{\rho A l}{m_2} = \frac{EA l}{m_2 c^2}$$

است . با ضرب طرفین رابطه (۲) در  $e^{\frac{M\zeta}{l}}$  داریم :

$$e^{\frac{M\zeta}{l}} \left[ f_0''(\zeta) + \frac{M}{l} f_0'(\zeta) \right] = \frac{d}{d\zeta} \left[ f_0'(\zeta) e^{\frac{M\zeta}{l}} \right] = 0$$

پس :

$$f_0'(\zeta) = B e^{-\frac{M\zeta}{l}} \quad (4)$$

جهت تعیین ثابت  $B$  با استفاده از رابطه (۲) می توانیم بنویسیم :

$$v|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=0} = c f_0'(\zeta)$$

لذا برای ارضا پیوستگی سرعت در  $ct = \zeta = 0$  می بایست داشته باشیم :

$$v|_{x=0} = c f_0'(0) = v_0 \Rightarrow f_0'(0) = \frac{v_0}{c}$$

هم چنین با جانشین کردن  $\zeta = 0$  در رابطه (۴) داریم :

$$f_0'(0) = B$$

پس :

$$B = \frac{v_0}{c}$$

در نتیجه رابطه (۴) به صورت :

$$f_0'(\zeta) = \frac{v_0}{c} e^{-\frac{M}{l}\zeta} \quad (5)$$

نوشته می شود . با انتگرال گیری از طرفین رابطه (۵) داریم :

$$f_0(\zeta) = \frac{v_0}{c} \int e^{-\frac{M}{l}\zeta} d\zeta + A = -\frac{v_0}{c} \frac{l}{M} e^{-\frac{M}{l}\zeta} + A \quad (6)$$

هم چنین جهت ارضا پیوستگی جابجایی در  $ct = \zeta = 0$  می بایست داشته باشیم :

$$u|_{x=0} = f_0(0) = -\frac{v_0}{c} \frac{l}{M} + A = 0$$

پس :

$$A = \frac{v_0}{c} \frac{l}{M}$$

در نتیجه رابطه (۶) به صورت :

$$f_0(\zeta) = \frac{v_0}{c} \frac{l}{M} \left( 1 - e^{-\frac{M}{l}\zeta} \right) \quad (۷)$$

نوشته می شود. به منظور تعیین جابجایی در هر وضعیت  $0 \leq x < l$  که تحت پوشش موج  $f_0$  واقع می شود کافیست که در رابطه (۷)،  $\zeta = ct - x$  اختیار گردد. بنابر این :

$$u = f_0(ct - x) = \frac{v_0}{c} \frac{l}{M} \left[ 1 - e^{-\frac{M}{l}(ct-x)} \right] \quad (۸)$$

حال همانطور که از روی دیاگرام می توان ملاحظه نمود در فاصله  $l \leq ct \leq 3l$  موقعیت  $x = l$  از میله تحت تاثیر موج های  $f_0$  و  $g_1$  قرار دارد لذا می توانیم بنویسیم :

$$u|_{x=l} = f_0(ct - x)|_{x=l} + g_1(ct + x - 2l)|_{x=l} = f_0(ct - l) + g_1(ct - l)$$

اما از آنجائیکه میله در  $x = l$  گیردار است. لذا می بایست جابجایی در  $x = l$  برابر صفر باشد، در نتیجه :

$$u|_{x=l} = f_0(ct - l) + g_1(ct - l) = 0$$

و یا :

$$g_1(ct - l) = -f_0(ct - l) = \frac{v_0}{c} \frac{l}{M} \left[ e^{-\frac{M}{l}(ct-l)} - 1 \right] \quad (۹)$$

پس موج  $g_1$  با آرگومن  $ct + x - 2l$  به صورت :

$$g_1(ct + x - 2l) = \frac{v_0}{c} \frac{l}{M} \left[ e^{-\frac{M}{l}(ct+x-2l)} - 1 \right] \quad (۱۰)$$

نوشته می شود. در این مقطع جهت خلاصه نمودن نتایج با اشاره به دیاگرام می توان ملاحظه نمود که در فاصله  $x \leq ct \leq 2l - x$  هر وضعیت  $x$  از میله واقع در فاصله  $0 < x < l$  فقط می تواند تحت تاثیر موج  $f_0$  قرار گیرد در نتیجه با استفاده از رابطه (۸) می توانیم بنویسیم :

$u = f_0(ct - x) = \frac{l}{M} \frac{v_0}{c} \left[ 1 - e^{-\frac{M}{l}(ct-x)} \right]$	در فاصله
$v = \frac{\partial u}{\partial t} = v_0 e^{-\frac{M}{l}(ct-x)}$	$x \leq ct \leq 2l - x$
$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{v_0}{c} e^{-\frac{M}{l}(ct-x)}$	$0 < x < l$
(۱۱)	

به طریق مشابه در فاصله  $2l - x \leq ct \leq 2l + x$  هر وضعیت  $x$  از میله واقع در فاصله  $0 < x < l$  علاوه بر آنکه تحت تاثیر موج  $f_0$  قرار گرفته می تواند تحت تاثیر موج  $g_1$  نیز قرار گیرد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} u &= f_0(ct - x) + g_1(ct + x - 2l) \\ &= \frac{l}{M} \frac{v_0}{c} \left[ 1 - e^{-\frac{M}{l}(ct-x)} \right] - \frac{l}{M} \frac{v_0}{c} \left[ 1 - e^{-\frac{M}{l}(ct+x-2l)} \right] \\ v &= \frac{\partial u}{\partial t} = v_0 \left[ -e^{-\frac{M}{l}(ct+x-2l)} + e^{-\frac{M}{l}(ct-x)} \right] \\ \varepsilon &= \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{v_0}{c} \left[ e^{-\frac{M}{l}(ct+x-2l)} + e^{-\frac{M}{l}(ct-x)} \right] \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{در فاصله} \\ 2l - x \leq ct \leq 2l + x \\ 0 < x < l \end{array} \right\} (12)$$

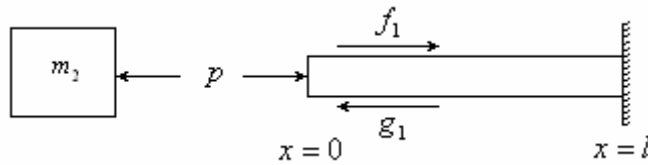
هم چنین از آنجائیکه میله در موقعیت  $x = 0$  در فاصله  $0 \leq ct \leq 2l$  فقط تحت تاثیر موج  $f_0$  قرار دارد با استفاده از روابط (11) داریم:

$$\begin{aligned} u &= f_0(ct) = \frac{l}{M} \frac{v_0}{c} \left[ 1 - e^{-\frac{M}{l}(ct)} \right] \\ v &= v_0 e^{-\frac{M}{l}(ct)} \\ \varepsilon &= -\frac{v_0}{c} e^{-\frac{M}{l}(ct)} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} 0 \leq ct \leq 2l \\ x = 0 \end{array} \right\} (13)$$

به طریق مشابه با استفاده از روابط (12) برای موقعیت  $x = l$  از میله و در فاصله  $l \leq ct \leq 3l$  می توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} u &= \frac{l}{M} \frac{v_0}{c} \left[ e^{-\frac{M}{l}(ct-l)} - e^{-\frac{M}{l}(ct-l)} \right] = 0 \\ v &= v_0 \left[ -e^{-\frac{M}{l}(ct-l)} + e^{-\frac{M}{l}(ct-l)} \right] = 0 \\ \varepsilon &= -\frac{2v_0}{c} e^{-\frac{M}{l}(ct-l)} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{در فاصله} \\ l \leq ct \leq 3l \\ x = l \end{array} \right\} (14)$$

حال برای نوشتن معادله حرکت در فاصله  $2l < ct < 4l$  موقعیت  $x = 0$  از میله را در نظر می گیریم چنانچه مطابق شکل نیروی وارده بر جرم  $m_2$  را  $F_2$  فرض کنیم:



معادله حرکت برای جرم  $m_2$  به صورت :

$$P = -m_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=0}$$

نوشته می شود . همچنین :

$$P = A\sigma \Big|_{x=0} = -EA\varepsilon \Big|_{x=0} = -EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0}$$

پس :

$$m_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=0} = EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (15)$$

اما در فاصله  $2l < ct < 4l$  جابجایی در موقعیت  $x=0$  همانطور که از روی دیاگرام می توان ملاحظه نمود بوسیله رابطه :

$$\begin{aligned} u \Big|_{x=0} &= f_1(ct-x-2l) \Big|_{x=0} + g_1(ct+x-2l) \Big|_{x=0} \\ &= f_1(ct-2l) + g_1(ct-2l) = f_1(\zeta) + g_1(\zeta) \end{aligned} \quad (16)$$

داده می شود که در آن  $\zeta = ct - 2l$  است . بنابراین رابطه ( ۱۵ ) به صورت :

$$m_2 c^2 [f_1'(\zeta) + g_1''(\zeta)] = -EA [f_1'(\zeta) - g_1'(\zeta)]$$

و یا :

$$f_1''(\zeta) + \frac{M}{l} f_1'(\zeta) = -g_1''(\zeta) + \frac{M}{l} g_1'(\zeta) \quad (17)$$

نوشته می شود که در آن :

$$M = \frac{\rho A l}{m_2} = \frac{EA l}{m_2 c^2}$$

است . با ضرب طرفین رابطه ( ۱۷ ) در  $e^{\frac{M}{l}\zeta}$  داریم :

$$\frac{d}{d\zeta} \left[ f_1'(\zeta) e^{\frac{M}{l}\zeta} \right] = e^{\frac{M}{l}\zeta} \left[ -g_1''(\zeta) + \frac{M}{l} g_1'(\zeta) \right] \quad (18)$$

هم چنین با استفاده از رابطه ( ۱۰ ) می توانیم بنویسیم :

$$g_1'(ct+x-2l) = -\frac{v_0}{c} e^{-\frac{M}{l}(ct+x-2l)} \quad (19a)$$

و

$$g_1''(ct+x-2l) = \frac{M}{l} \frac{v_0}{c} e^{-\frac{M}{l}(ct+x-2l)} \quad (19b)$$

در نتیجه :

$$g_1'(ct+x-2l)|_{x=0} = g_1'(\zeta) = -\frac{v_0}{c} e^{-\frac{M}{l}\zeta} \quad (20a)$$

و

$$g_1''(ct+x-2l)|_{x=0} = g_1''(\zeta) = \frac{M}{l} \frac{v_0}{c} e^{-\frac{M}{l}\zeta} \quad (20b)$$

با جانشین کردن روابط (20a) و (20b) در رابطه (18) داریم :

$$\frac{d}{d\zeta} \left[ f_1'(\zeta) e^{\frac{M}{l}\zeta} \right] = -2 \frac{v_0}{c} \frac{M}{l} \quad (21)$$

پس :

$$f_1'(\zeta) = e^{-\frac{M}{l}\zeta} \left( -2 \frac{v_0}{c} \frac{M}{l} \zeta + B \right) \quad (22)$$

جهت تعیین ثابت  $B$  با استفاده از رابطه (16) می توانیم بنویسیم :

$$v|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = cf_1'(\zeta) + cg_1'(\zeta)$$

لذا برای ارضا پیوستگی سرعت در  $ct-2l = \zeta = 0$  می بایست داشته باشیم :

$$v|_{x=0} = cf_1'(0) + cg_1'(0) = cf_1'(2l)$$

هم چنین با جانشین کردن  $\zeta = 0$  در رابطه (22) داریم :

$$f_1'(0) = B$$

پس :

$$B = \frac{v_0}{c} (e^{-2M} + 1)$$

در نتیجه رابطه (22) به صورت :

$$f_1'(\zeta) = \frac{v_0}{c} \left( e^{-2M} - 2 \frac{M}{l} \zeta + 1 \right) e^{-\frac{M}{l}\zeta} \quad (23)$$

نوشته می شود . با انتگرال گیری از طرفین رابطه (23) داریم :

$$\begin{aligned} f_1(\zeta) &= -\frac{2M}{l} \frac{v_0}{c} \int e^{-\frac{M}{l}\zeta} d\zeta + (1 + e^{-2M}) \frac{v_0}{c} \int e^{-\frac{M}{l}\zeta} d\zeta + A \\ &= \frac{v_0}{c} \left( 2\zeta + \frac{l}{M} - \frac{l}{M} e^{-2M} \right) e^{-\frac{M}{l}\zeta} + A \end{aligned} \quad (24)$$



هم چنین جهت ارضا پیوستگی جابجایی در  $ct - 2l = \zeta = 0$  می بایست داشته باشیم :

$$u|_{\substack{x=0 \\ ct=2l}} = f_1(0) + g_1(0) = f_0(2l)$$

پس :

$$\frac{v_0}{c} \frac{l}{M} (1 - e^{-2M}) + A + 0 = \frac{v_0}{c} \frac{l}{M} (1 - e^{-2M})$$

و یا :

$$A = 0$$

در نتیجه رابطه (۲۴) به صورت :

$$f_1(\zeta) = \frac{v_0}{c} \left( 2\zeta + \frac{l}{M} (1 - e^{-2M}) \right) e^{-\frac{M}{l}\zeta} \quad (25)$$

نوشته می شود . به منظور تعیین جابجایی در هر وضعیت  $0 \leq x < l$  که تحت پوشش موجهای  $f_1$  و  $g_1$  واقع می شود کفایت که در رابطه ( ۲۵ ) ،  $\zeta = ct - x - 2l$  اختیار گردد . بنابراین :

$$\begin{aligned} u &= f_1(ct - x - 2l) + g_1(ct + x - 2l) \\ &= \frac{v_0}{c} \left\{ \left[ 2(ct - x - 2l) + \frac{l}{M} (1 - e^{-2M}) \right] e^{-\frac{M}{l}(ct - x - 2l)} + \frac{l}{M} \left[ e^{-\frac{M}{l}(ct + x - 2l)} - 1 \right] \right\} \quad (26) \end{aligned}$$

حال همانطور که از روی دیاگرام می توان ملاحظه نمود در فاصله  $3l \leq ct \leq 5l$  موقعیت  $x = l$  از میله تحت تاثیر موجهای  $f_1$  و  $g_2$  قرار دارد . لذا می توانیم بنویسیم :

$$u|_{x=l} = f_1(ct - x - 2l)|_{x=l} + g_2(ct + x - 4l)|_{x=l} = f_1(ct - 3l) + g_2(ct - 3l)$$

اما از آنجائیکه میله در  $x = l$  گیردار است لذا می بایست جابجایی در  $x = l$  برابر صفر باشد در نتیجه :

$$u|_{x=l} = f_1(ct - 3l) + g_2(ct - 3l) = 0$$

و یا :

$$g_2(ct - 3l) = -f_1(ct - 3l) = -\frac{v_0}{c} \left[ 2(ct - 3l) + \frac{l}{M} (1 - e^{-2M}) \right] e^{-\frac{M}{l}(ct - 3l)}$$

پس موج  $g_2$  با آرگومن  $ct + x - 4l$  به صورت :

$$g_2(ct + x - 4l) = -\frac{v_0}{c} \left[ (ct + x - 4l) + \frac{l}{M} (1 - e^{-2M}) \right] e^{-\frac{M}{l}(ct + x - 4l)}$$

نوشته می شود . حال جهت خلاصه نمودن نتایج با اشاره به دیاگرام می توان ملاحظه کرد که در فاصله  $2l + x \leq ct \leq 4l - x$  هر وضعیت  $x$  از میله واقع در فاصله  $0 < x < l$  تحت تاثیر موجهای  $f_1$  و  $g_1$  قرار می گیرد . در نتیجه با استفاده از رابطه ( ۲۶ ) می توانیم بنویسیم :

$$\begin{aligned}
u &= f_1(ct - x - 2l) + g_1(ct + x - 2l) \\
&= \frac{v_0}{c} \left\{ \left[ 2(ct - x - 2l) + \frac{l}{M}(1 - e^{-2M}) \right] e^{\frac{M}{l}(ct - x - 2l)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{l}{M} \left[ e^{\frac{M}{l}(ct + x - 2l)} - 1 \right] \right\} \\
v &= \frac{\partial u}{\partial t} \\
&= v_0 \left\{ \left[ 1 + e^{-2M} - \frac{2M}{l}(ct - x - 2l) \right] e^{\frac{M}{l}(ct - x - 2l)} - e^{\frac{M}{l}(ct + x - 2l)} \right\} \\
\varepsilon &= \frac{\partial u}{\partial x} = \\
&= -\frac{v_0}{c} \left\{ \left[ 1 + e^{-2M} - 2\frac{M}{l}(ct - x - 2l) \right] e^{\frac{M}{l}(ct - x - 2l)} + e^{\frac{M}{l}(ct + x - 2l)} \right\}
\end{aligned}$$

در فاصله  $2l + x \leq ct \leq 4l - x$

( ۲۷ )

به طریق مشابه در فاصله  $4l - x \leq ct \leq 4l + x$  هر وضعیت  $x$  از میله واقع در فاصله  $0 < x < l$  علاوه بر آنکه تحت تاثیر موج  $f_1$  قرار گرفته می تواند تحت تاثیر موج  $g_2$  نیز قرار گیرد ، بنابراین داریم :

$$\begin{aligned}
u &= f_1(ct - x - 2l) + g_2(ct + x - 4l) \\
&= \frac{v_0}{c} \left\{ \left[ 2(ct - x - 2l) + \frac{l}{M}(1 - e^{-2M}) \right] e^{\frac{M}{l}(ct - x - 2l)} \right. \\
&\quad \left. - \left[ 2(ct + x - 4l) + \frac{l}{M}(1 - e^{-2M}) \right] e^{\frac{M}{l}(ct + x - 4l)} \right\} \\
v &= \frac{\partial u}{\partial t} = v_0 \left\{ \left[ 1 + e^{-2M} - \frac{2M}{l}(ct - x - 2l) \right] e^{\frac{M}{l}(ct - x - 2l)} \right. \\
&\quad \left. - \left[ 1 + e^{-2M} - \frac{2M}{l}(ct + x - 4l) \right] e^{\frac{M}{l}(ct + x - 4l)} \right\} \\
\varepsilon &= \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{v_0}{c} \left\{ \left[ 1 + e^{-2M} - \frac{2M}{l}(ct - x - 2l) \right] e^{\frac{M}{l}(ct - x - 2l)} \right. \\
&\quad \left. + \left[ 1 + e^{-2M} - \frac{2M}{l}(ct + x - 4l) \right] e^{\frac{M}{l}(ct + x - 4l)} \right\}
\end{aligned}$$

در فاصله  $4l - x \leq ct \leq 4l + x$

$0 < x < l$

( ۲۸ )

هم چنین از آنجائیکه میله در موقعیت  $x = 0$  در فاصله  $2l \leq ct \leq 4l$  تحت تاثیر موج های  $f_1$  و  $g_1$  قرار دارد با استفاده از روابط ( ۲۷ ) داریم :

$$\begin{aligned}
 u &= f_1(ct - 2l) + g_1(ct - 2l) \\
 &= \frac{v_0}{c} \left[ 2(ct - 2l) + \frac{l}{M} (2 - e^{-2M}) \right] e^{-\frac{M}{l}(ct-2l)} - \frac{v_0}{c} \frac{l}{M} \\
 v &= v_0 \left[ e^{-2M} - \frac{2M}{l} (ct - 2l) \right] e^{-\frac{M}{l}(ct-2l)} \\
 \varepsilon &= -\frac{v_0}{c} \left[ 2 + e^{-2M} - \frac{2M}{l} (ct - 2l) \right] e^{-\frac{M}{l}(ct-2l)}
 \end{aligned}
 \quad \left| \begin{array}{l} \text{در فاصله} \\ 2l \leq ct \leq 4l \\ x = 0 \\ (28) \end{array} \right.$$

به طریق مشابه با استفاده از روابط ( ۲۸ ) برای موقعیت  $x = l$  از میله و در فاصله  $3l \leq ct \leq 5l$  می توانیم بنویسیم :

$$\begin{aligned}
 u &= 0 \\
 v &= 0 \\
 \varepsilon &= -\frac{2v_0}{c} \left[ 1 + e^{-2M} - \frac{2M}{l} (ct - 3l) \right] e^{-\frac{M}{l}(ct-3l)}
 \end{aligned}
 \quad \left| \begin{array}{l} \text{در فاصله} \\ 3l \leq ct \leq 5l \\ x = l \\ (29) \end{array} \right.$$

از آنچه که گذشت می توان نتیجه گیری کرد که با تکرار قدم به قدم عملیاتی مشابه آنچه که در فواصل  $x \leq ct \leq 2l + x$  و  $2l + x \leq ct \leq 4l + x$  انجام گردید ، می توان جابجایی ، سرعت و کرنش را در هر فاصله  $2nl + x \leq ct \leq 2(n+1)l + x$  برای  $n = 2, 3, 4, \dots$  تعیین کرد . با بررسی روابط به دست آمده برای جابجایی ، سرعت و کرنش می توان نتیجه گیری کرد که برای هر مقدار  $x$  واقع در فاصله  $0 < x < l$  نمایش تغییرات جابجایی برحسب  $ct$  یک منحنی پیوسته خواهد بود . اما منحنی تغییرات سرعت و کرنش پیوسته نبوده و در موقعیت های  $ct = 2(n+1)l - x$  و  $ct = 2(n+1)l + x$  که مصادف با ورود موج های برگشتی از دو انتهای میله است غیر پیوسته می باشند . هم چنین در موقعیت  $x = 0$  به علت ارضای پیوستگی سرعت فقط منحنی تغییرات کرنش برحسب  $ct$  به صورت غیر پیوسته خواهد بود . پایان ضربه به هنگامی صورت می پذیرد که تنش در نقطه تماس به صفر تقلیل یابد . بررسی روابط ( ۱۳ ) نمایشگر این مطلب است که در موقعیت  $x = 0$  و در فاصله  $0 \leq ct \leq 2l$  کرنش و در نتیجه تنش نمی تواند به صفر تقلیل یابد ، لذا مدت زمان تماس یا ضربه حتماً بزرگتر از  $\frac{2l}{c}$  می باشد . با بررسی روابط ( ۲۴ ) می توان نتیجه گیری کرد که زودترین زمان امکان به صفر تقلیل یافتن کرنش و در نتیجه تنش در نقطه تماس زمانی مثل  $\tau$  واقع در فاصله  $\frac{2l}{c} < \tau < \frac{4l}{c}$  است . جهت تخمین نسبت جرم  $M$  که به ازای آن کرنش و در نتیجه

تنش در محل تماس در فاصله زمانی  $\frac{2l}{c} < \tau < \frac{4l}{c}$  به صفر تقلیل می یابد ، کافیسیت در رابطه کرنش ارائه شده بوسله روابط ( ۲۹ )  $t = \frac{4l}{c}$  و  $\varepsilon = 0$  اختیار گردد . در نتیجه داریم :

$$0 = -\frac{v_0}{c} \left[ 2 + e^{-2M} - \frac{2M}{l} (4l - 2l) \right] e^{-\frac{M}{l}(4l-2l)}$$

و یا :

$$2 + e^{-2M} - 4M = 0$$

پس :

$$M = 0.5786$$

بنابراین مدت زمان تماس یا ضربه بستگی به نسبت جرم  $M$  داشته و چنانچه به عنوان مثال این نسبت کوچکتر از ۰/۵۷۸۶ باشد ضربه در فاصله زمانی  $\frac{2l}{c} < \tau < \frac{4l}{c}$  خاتمه می پذیرد . مقادیر جابجایی و کرنش در میله در پایان مدت زمان ضربه به عنوان شرایط اولیه برای بررسی ارتعاش آزاد میله به دنبال ضربه به کار گرفته می شوند .

1- Impact

by W. Goldsmith

1960, Edward Arnold (Publishers) Ltd. London

2- Impact Strength of Materials

by W. Johnson

1972, Edward Arnold (Publishers) Ltd. London