حل المسائل پژوهش عملیاتی (تحقیق در عملیات)

برنامه ریزی خطی و کاربردهای آن

محمد رضا مهرگان

هیلیر و لیبرمن

بردلی، هکس و مگننتی

حمدی طه

موسسه علمی پژوهشی نصیر

www.nasir-institute.com

Nasir.institute.research@gmail.com

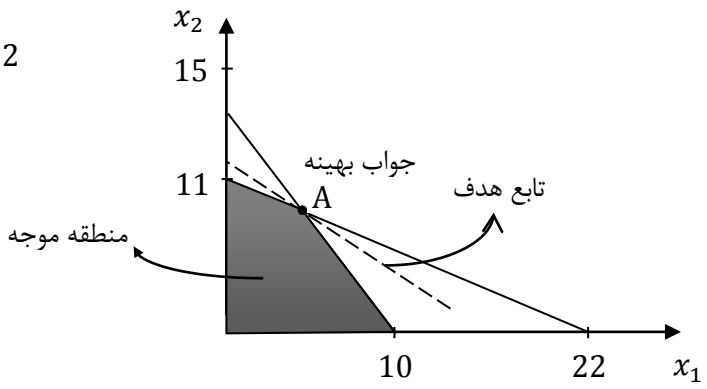
شماره های تماس:

09153147887 – 09196695566 – 09396672534

فصل دوم

1)

$$Max\ Z = 6x_1 + 8x_2$$
$$x_1 + 3x_2 \le 6$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 12$$
$$4x_1 + x_2 \le 8$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

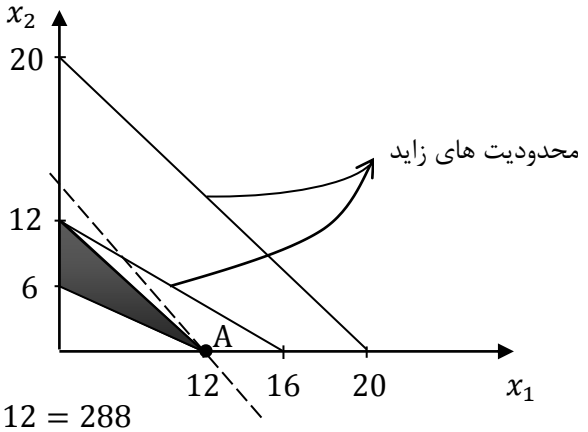


$$A \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 30 \\ x_1 + 2x_2 = 22 \end{cases} \longrightarrow 2x_1 = 8 \longrightarrow x_1 = 4 \longrightarrow x_2 = 9 \Rightarrow Max\ Z = 6 \times 4 + 8 \times 9 = 96$$

2) مسأله تبهگن؛ نقطه A محل تقاطع سه محدودیت است.

$$Max\ Z = 24x_1 + 20x_2$$

$$x_1 + x_2 \le 12$$
$$x_1 + x_2 \le 20$$
$$2x_1 + 4x_2 \ge 24$$
$$3x_1 + 4x_2 \le 48$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

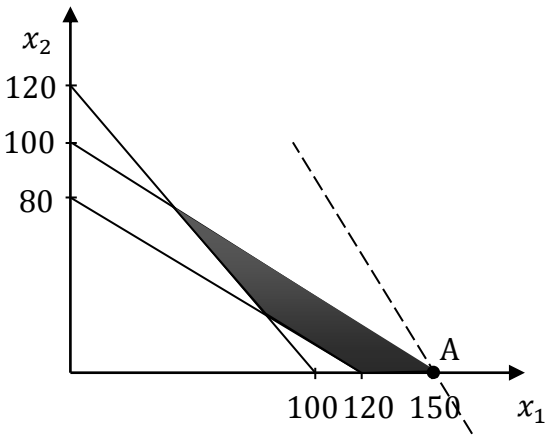


$$A \begin{cases} x_1 = 12 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow Max\ Z = 24 \times 12 = 288$$

3)

$$Max\ Z = 18x_1 + 10x_2$$

$$4x_1 + 6x_2 \ge 480$$
$$12x_1 + 10x_2 \ge 1200$$
$$10x_1 + 15x_2 \le 1500$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

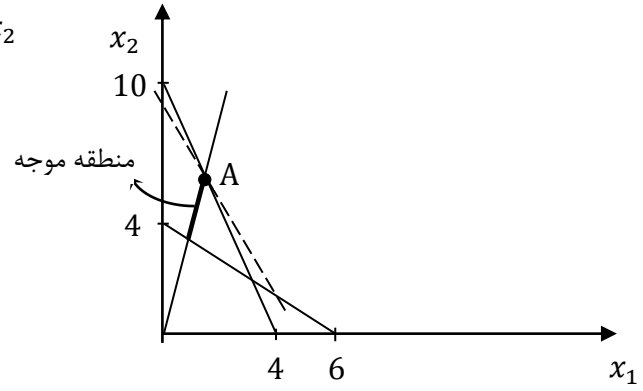


$$A\begin{cases}x_1 = 150\\ x_2 = 0\end{cases} \Rightarrow Max\ Z = 18 \times 150 = 2700$$

4)

$$Max\ Z\ = 4x_1 + 2x_2$$

$$5x_1 + 2x_2 \le 20$$
$$2x_1 + 3x_2 \ge 12$$
$$4x_1 - x_2 = 0$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



$$A\begin{cases}5x_1 + 2x_2 = 20\\ 8x_1 - 2x_2 = 0\end{cases} \longrightarrow 13x_1 = 20 \longrightarrow x_1 = \frac{20}{13} \longrightarrow x_2 = 4x_1 = \frac{80}{13}$$

$$\Rightarrow Max\ Z = 4 \times \frac{20}{13} + 2 \times \frac{80}{13} = \frac{240}{13} = 18.46$$

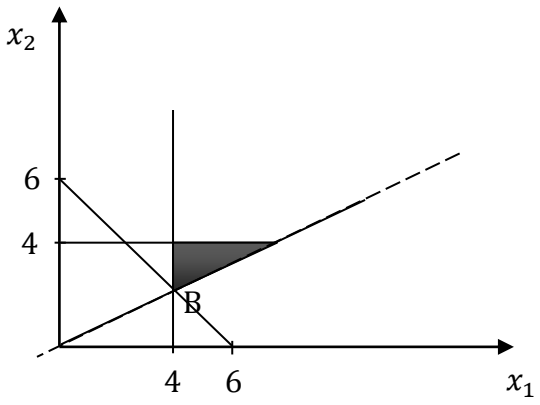
5) ب- 1 **جواب بهینه چندگانه**؛ به علت قرار گرفتن تابع هدف روی محدویت دربرگیرنده جواب بهینه

ب- 2 **مسأله تبهگن**؛ نقطه B محل تقاطع سه محدودیت است.

$$Max\ Z\ = 3x_1 - 6x_2$$

$$3x_1 + 3x_2 \ge 18$$
$$x_1 - 2x_2 \le 0$$
$$x_1 \ge 4$$
$$x_2 \le 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

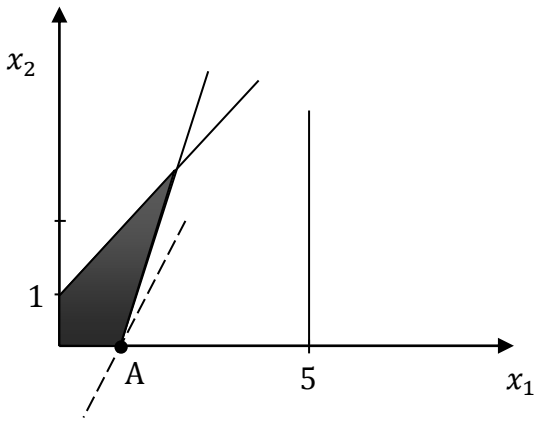
$$Max\ Z\ = 3x_1 - 6x_2 = 0$$



6) بیانگر هیچ حالت خاصی نیست.

$$Max\ Z\ = x_1 - \frac{1}{2}x_2$$

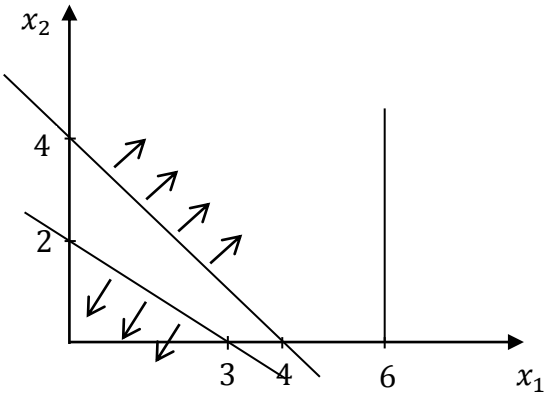
$$3x_1 - x_2 \le 4$$
$$-x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1 \le 5$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$
$$A\begin{cases}x_1 = \frac{4}{3}\\ x_2 = 0\end{cases} \Rightarrow Max\ Z = \frac{4}{3}$$



7) نبود منطقه موجه

$$Min\ Z\ = 4x_1 + 6x_2$$

$$x_1 + x_2 \geq 4$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$x_1 = 6$$
x_1, x_2 آزاد در علامت



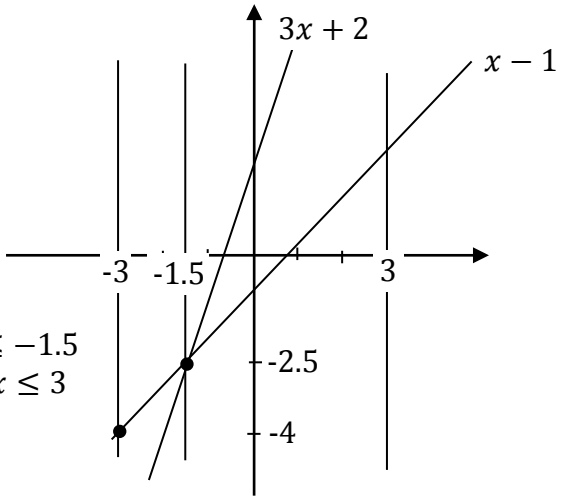
8)

$$Min\ Z\ = Max(x-1, 3x+2)$$
$$-3 \leq x \leq 3$$

$$x - 1 = 3x + 2 \rightarrow x = -1.5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 1 > 3x + 2 & -3 \leq x \leq -1.5 \\ x - 1 < 3x + 2 & -1.5 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

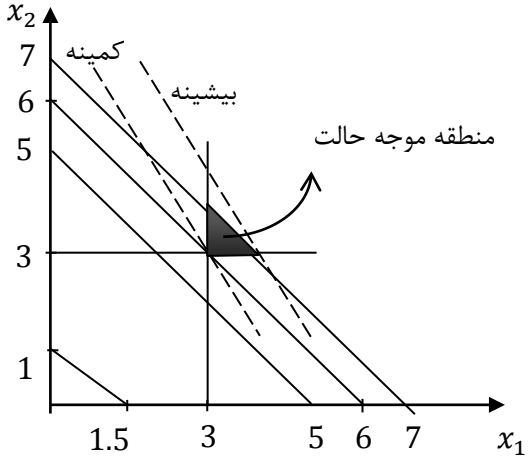
$$\Rightarrow \begin{cases} Min\ Z = x - 1 = -4 & -3 \leq x \leq -1.5 \\ Min\ Z = 3x + 2 = -2.5 & -1.5 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



9)

$$Max\ Z\ = 5x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 \geq 3$$
$$x_2 \geq 3$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



9- الف- 1 : منطقه موجه، نقطه (3 و3) است

الف- 2 : منطقه موجه نداریم

الف- 3 : منطقه موجه، ناحیه مثلثی مشخص شده روی شکل است.

ب- 1 : منطقه موجه، یک نقطه (گوشه) است.

ب- 2 : نقطه گوشه موجه نداریم

ب- 3 : سه نقطه گوشه موجه داریم.

ج- 1 : مقدار تابع هدف برابر $Z = 5 \times 3 + 3 \times 3 = 24$ است.

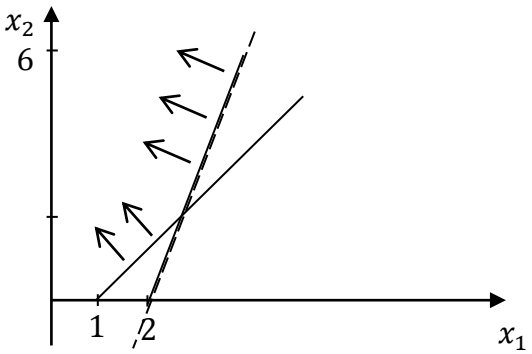
ج- 3 : مقدار بیشینه و کمینه تابع هدف به ترتیب برابر $Z_{max} = 5 \times 4 + 3 \times 3 = 29$ و $Z_{min} = 24$ است.

10) تابع هدف روی محدودیت دوم قرار می گیرد که جواب بهینه چندگانه است. مقدار جواب بهینه ثابت است؛ زیرا با حرکت در منطقه موجه به سمت چپ مقدار تابع هدف کمتر می شود.

11)

$$Max\ Z = 6x_1 - 2x_2 = 12$$

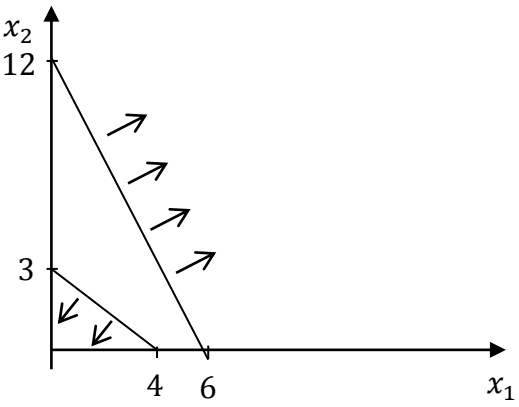
$$x_1 - x_2 \le 1$$
$$3x_1 - x_2 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



12)

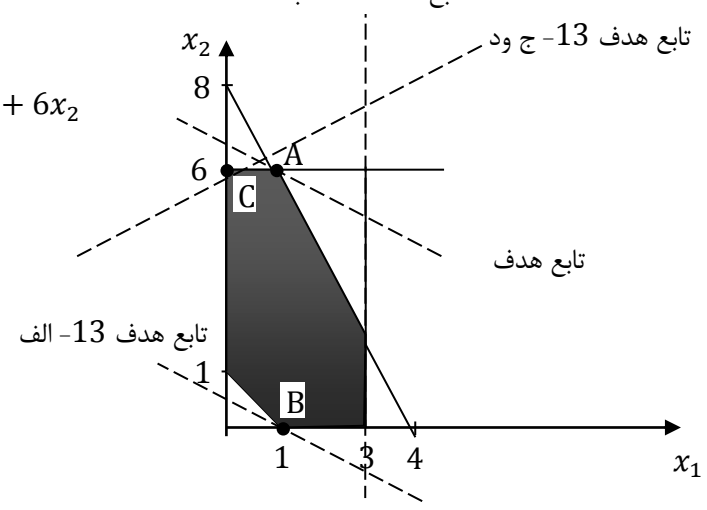
$$Max\ Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$2x_1 + x_2 \ge 12$$
$$3x_1 + 4x_2 \le 12$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



$$Max\ Z = 3x_1 + 6x_2$$

$$x_1 + x_2 \ge 1$$
$$2x_1 + x_2 \le 8$$
$$x_1 \le 3$$
$$x_2 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



$$A \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow Max\ Z = 3 \times 1 + 6 \times 6 = 39$$

13)

$$Z = 3x_1 + 6x_2$$

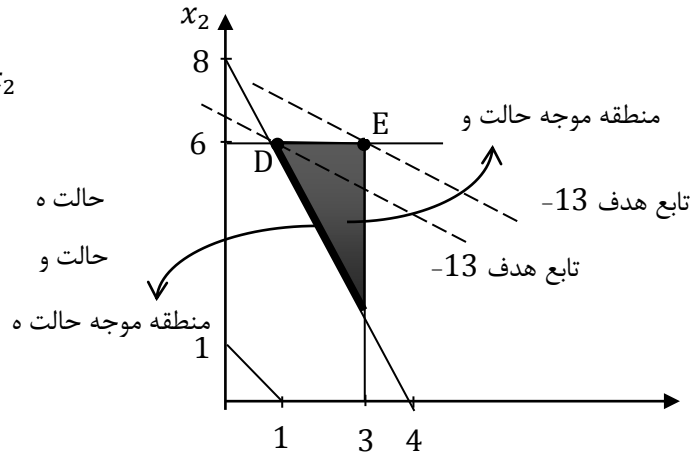
$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$2x_1 + x_2 \begin{cases} = 8 & \text{حالت ه} \\ \geq 8 & \text{حالت و} \end{cases}$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



13- الف-

$$B \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow Min\ Z = 3 \times 1 = 3$$

13- ب-

$$Max\ Z = x_1 = 3$$

13- ج-

$$C \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow Max\ Z = 2 \times 6 = 12$$

13- د-

$$C \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow Min\ Z = -2 \times 6 = -12$$

13- ه-

$$D \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow Max\ Z = 3 \times 1 + 6 \times 6 = 39$$

13- و-

$$E \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow Max\ Z = 3 \times 3 + 6 \times 6 = 45$$

فصل سوم

1)

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 14$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5$$
$$x_1 - 2x_3 - 2x_5 = -10$$

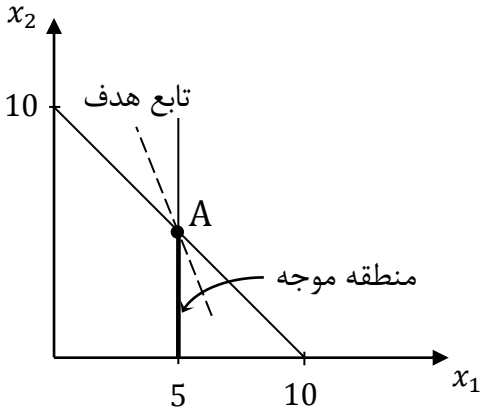
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
2	-1	2	-1	3	14
1	2	3	1	0	5
1	0	-2	0	-2	-10
1	-0.5	1	-0.5	1.5	7
-2	3.5	0	2.5	-4.5	-16
3	-1	0	-1	1	4
-3.5	1	1	1	0	1
11.5	-1	0	-2	0	2
3	-1	0	-1	1	4
2.25	0.5	1	0	0	2
-5.75	0.5	0	1	0	-1
-2.75	-0.5	0	0	1	3

$$2.25x_1 + 0.5x_2 + x_3 = 2$$
$$-5.75x_1 + 0.5x_2 + x_4 = -1$$
$$-2.75x_1 - 0.5x_2 + x_5 = 3$$

$$x_3 = 2 - 2.25x_1 - 0.5x_2$$
$$x_4 = -1 + 5.75x_1 - 0.5x_2$$
$$x_5 = 3 + 2.75x_1 + 0.5x_2$$

2)

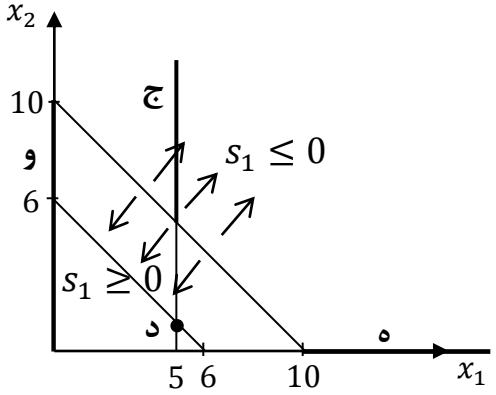
$$Max\ Z = 5x_1 + 2x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 10$$
$$x_1 = 5$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



$$A \begin{cases} x_1 + x_2 = 10 \\ x_1 = 5 \end{cases} \longrightarrow x_2 = 5$$

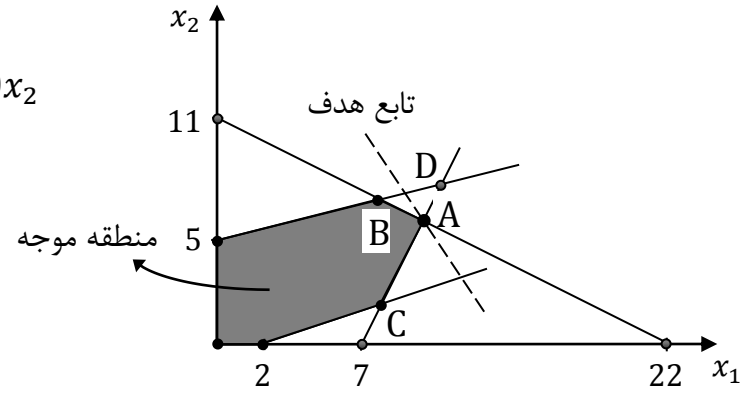
$$\Rightarrow Max\ Z = 5 \times 5 + 2 \times 5 = 35$$

$$x_1 + x_2 + s_1 = 10$$



(3

$$Max\ Z = 15x_1 + 10x_2$$
$$2x_1 + 4x_2 \le 44$$
$$-x_1 + 4x_2 \le 20$$
$$2x_1 - x_2 \le 14$$
$$x_1 - 3x_2 \le 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



$$\text{A}\begin{cases}2x_1 + 4x_2 = 44\\ 2x_1 - x_2 = 14\end{cases} \longrightarrow x_2 = 6 \rightarrow x_1 = 10$$

$$\Rightarrow Max\ Z = 15 \times 10 + 10 \times 6 = 210$$

$$\text{B}\begin{cases}2x_1 + 4x_2 = 44\\ -x_1 + 4x_2 = 20\end{cases} \longrightarrow x_1 = 8 \rightarrow x_2 = 7 \rightarrow \text{Z} = 15 \times 8 + 10 \times 7 = 190$$

$$\text{C}\begin{cases}2x_1 - x_2 = 14\\ x_1 - 3x_2 = 2\end{cases} \longrightarrow x_2 = 2 \rightarrow x_1 = 8 \rightarrow \text{Z} = 15 \times 8 + 10 \times 2 = 140$$

$2)\ x_1 = 2\ ,\ x_2 = 0 \rightarrow \text{Z} = 15 \times 2 = 30$
$0)\ x_1 = x_2 = 0 \rightarrow \text{Z} = 0$
$5)\ x_1 = 0\ ,\ x_2 = 5 \rightarrow \text{Z} = 10 \times 5 = 50$

$7)\ x_1 = 7\ ,\ x_2 = 0 \rightarrow \text{Z} = 15 \times 7 = 105$
$22)\ x_1 = 22\ ,\ x_2 = 0 \rightarrow \text{Z} = 15 \times 22 = 330$

$$\text{D}\begin{cases}-x_1 + 4x_2 = 20\\ 2x_1 - x_2 = 14\end{cases} \longrightarrow x_2 = 54/7 \rightarrow x_1 = 76/7 \rightarrow \text{Z} = 240$$

$11)\ x_1 = 0\ ,\ x_2 = 11 \rightarrow \text{Z} = 10 \times 11 = 110$

(4

$$Max\ Z = 6x_1 + 8x_2 \qquad Max\ Z - 6x_1 - 8x_2 = 0$$
$$4x_1 + x_2 \le 20 \qquad 4x_1 + x_2 + s_1 = 20$$
$$x_1 + 4x_2 \le 40 \qquad x_1 + 4x_2 + s_2 = 40$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	1	-6	-8	0	0	0
s_1	0	4	1	1	0	20

s_2	0	1	4	0	1	40
Z	1	-4	0	0	2	80
s_1	0	3.75	0	1	-0.25	10
x_2	0	0.25	1	0	0.25	10
Z	1	0	0	16/15	26/15	272/3
x_1	0	1	0	0.8/3	-0.2/3	8/3
x_2	0	0	1	-1/15	4/15	28/3

$$Z = \frac{272}{3}$$
$$x_1 = \frac{8}{3} \quad x_2 = \frac{28}{3}$$
$$s_1 = s_2 = 0$$

(5

$$Max\ Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 \qquad Max\ Z - 4x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 0$$
$$3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30 \qquad 3x_1 + x_2 + 3x_3 + s_1 = 30$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 40 \qquad 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_2 = 40$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
Z	1	-4	-3	-6	0	0	0
s_1	0	3	1	3	1	0	30
s_2	0	2	2	3	0	1	40
Z	1	6	-1	0	2	0	60
x_3	0	1	1/3	1	1/3	0	10
s_2	0	-1	1	0	-1	1	10
Z	1	5	0	0	1	1	70
x_3	0	4/3	0	1	2/3	-1/3	20/3
x_2	0	-1	1	0	-1	1	10

$$Z = 70$$
$$x_2 = 10 \quad x_3 = \frac{20}{3}$$
$$x_1 = s_1 = s_2 = 0$$

(6

$$Max\ Z = 3x_1 + x_2 + 3x_3 \qquad Max\ Z - 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \qquad 2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 2$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \qquad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_2 = 5$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \qquad 2x_1 + 2x_2 + x_3 + s_3 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	1	-3	-1	-3	0	0	0	0

$Z = 5.4$
$x_1 = 0.2\ ,\ x_3 = 1.6\ ,\ s_3 = 4$
$s_1 = s_2 = x_2 = 0$

s_1	0	2	1	1	1	0	0	2
s_2	0	1	2	3	0	1	0	5
s_3	0	2	2	1	0	0	1	6
Z	1	0	0.5	-1.5	1.5	0	0	3
x_1	0	1	0.5	0.5	0.5	0	0	1
s_2	0	0	1.5	2.5	-0.5	1	0	4
s_3	0	0	1	0	-1	0	1	4
Z	1	0	1.4	0	1.2	0.6	0	5.4
x_1	0	1	0.2	0	0.6	-0.2	0	0.2
x_3	0	0	0.6	1	-0.2	0.4	0	1.6
s_3	0	0	1	0	-1	0	1	4

(7

$Max\ Z = 4x_1 + 2x_2$
$x_1 \leq 7$
$x_2 \leq 5$
$-8x_1 + 4x_2 \leq 10$
$x_1 \geq 0,\ x_2$ آزاد در علامت

$Max\ Z - 4x_1 - 2\ x'_2 + 2x''_2 = 0$
$x_1 + s_1 = 7$
$x'_2 - x''_2 + s_2 = 5$
$-8x_1 + 4\ x'_2 - 4x''_2 + s_3 = 10$
$x_2 = x'_2 - x''_2$

	Z	x_1	x'_2	x''_2	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	1	-4	-2	2	0	0	0	0
s_1	0	1	0	0	1	0	0	7
s_2	0	0	1	-1	0	1	0	5
s_3	0	-8	4	-4	0	0	1	10
Z	1	0	-2	2	4	0	0	28
x_1	0	1	0	0	1	0	0	7
s_2	0	0	1	-1	0	1	0	5
s_3	0	0	4	-4	8	0	1	66
Z	1	0	0	0	4	2	0	38
x_1	0	1	0	0	1	0	0	7
x'_2	0	0	1	-1	0	1	0	5
s_3	0	0	0	0	8	-4	1	46

$Z = 38 \quad x_1 = 7 \ , \ x_2 = x'_2 = 5 \quad , s_3 = 46 \quad , s_1 = s_2 = x''_2 = 0$

(8

$Min\ Z = 2x_1 + x_2$
$x_1 + x_2 \leq 100$
$x_2 \leq 70$
$x_1 \geq 20$
$x_1, x_2 \geq 0$

$Max - Z + 2x_1 + x_2 + \mathrm{MR} = 0$
$x_1 + x_2 + \mathrm{s}_1 = 100$
$x_2 + \mathrm{s}_2 = 70$
$x_1 - \mathrm{s}_3 + R = 20$

$Z = 40$
$x_1 = 20 \quad s_1 = 80 \quad s_2 = 70$
$x_2 = s_3 = 0$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	R	RHS
Z	-1	2	1	0	0	0	M	0
s_1	0	1	1	1	0	0	0	100
s_2	0	0	1	0	1	0	0	70
R	0	1	0	0	0	-1	1	20
Z	-1	2-M	1	0	0	M	0	-20M
s_1	0	1	1	1	0	0	0	100
s_2	0	0	1	0	1	0	0	70
R	0	1	0	0	0	-1	1	20
Z	-1	0	1	0	0	2	M-2	-40
s_1	0	0	1	1	0	1	-1	80
s_2	0	0	1	0	1	0	0	70
x_1	0	1	0	0	0	-1	1	20

(9

$Max\ Z = 4x_1 - 2x_2 + 2x_3$
$x_1 - 3x_2 \leq 3$
$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 10$
$3x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 24$
$x_1 - x_3 \geq 2$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$Max\ Z - 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + \mathrm{M}R_1 + \mathrm{M}R_2 = 0$
$x_1 - 3x_2 + \mathrm{s}_1 = 3$
$2x_1 - x_2 + x_3 + \mathrm{s}_2 = 10$
$3x_1 + 4x_2 + x_3 - \mathrm{s}_3 + R_1 = 24$
$x_1 - x_3 - \mathrm{s}_4 + R_2 = 2$

$Z = 20 \quad x_1 = 4.625 \ , x_2 = 1.875 \quad , x_3 = 2.625 \quad , s_1 = 4$
$s_2 = s_3 = s_4 = 0$

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	R_1	R_2	RHS
Z	1	-4	2	-2	0	0	0	0	M	M	0
s_1	0	1	-3	0	1	0	0	0	0	0	3
s_2	0	2	-1	1	0	1	0	0	0	0	10
R_1	0	3	4	1	0	0	-1	0	1	0	24
R_2	0	1	0	-1	0	0	0	-1	0	1	2
Z	1	-4-4M	2-4M	-2	0	0	M	M	0	0	-26M
s_1	0	1	-3	0	1	0	0	0	0	0	3
s_2	0	2	-1	1	0	1	0	0	0	0	10
R_1	0	3	4	1	0	0	-1	0	1	0	24
R_2	0	1	0	-1	0	0	0	-1	0	1	2
Z	1	0	2-4M	-4M-6	0	0	M	-3M-4	0	4M+4	8-18M
s_1	0	0	-3	1	1	0	0	1	0	-1	1
s_2	0	0	-1	3	0	1	0	2	0	-2	6
R_1	0	0	4	4	0	0	-1	3	1	-3	18
x_1	0	1	0	-1	0	0	0	-1	0	1	2
Z	1	0	-16M-16	0	4M+6	0	M	M+2	0	-2	14-14M
x_3	0	0	-3	1	1	0	0	1	0	-1	1
s_2	0	0	8	0	-3	1	0	-1	0	1	3
R_1	0	0	16	0	-4	0	-1	-1	1	1	14
x_1	0	1	-3	0	1	0	0	0	0	0	3
Z	1	0	0	0	-2M	2M+2	M	-M	0	2M	20-8M
x_3	0	0	0	1	-0.125	0.375	0	0.625	0	-0.625	2.125
x_2	0	0	1	0	-0.375	0.125	0	-0.125	0	0.125	0.375
R_1	0	0	0	0	2	-2	-1	1	0	-1	8
x_1	0	1	0	0	-0.125	0.375	0	-0.375	0	0.375	4.125
Z	1	0	0	0	0	2	0	0	0	M	20
x_3	0	0	0	1	0	0.25	-1/16	0.687	0	-0.687	2.625
x_2	0	0	1	0	0	-0.25	-0.187	1/16	0	-1/16	1.875
s_1	0	0	0	0	1	-1	-0.5	0.5	0	-0.5	4
x_1	0	1	0	0	0	0.25	-1/16	-0.312	0	0.312	4.625

(10

$Max\ Z = 4x_1 + 3x_2 + 7x_3$ $\quad Max\ Z - 4x_1 - 3x_2 - 7x_3 + \mathrm{MR} = 0$
$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 120$ $\quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 + \mathrm{s} = 120$
$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 120$ $\quad x_1 + 3x_2 + 2x_3 + \mathrm{R} = 120$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$Z = \frac{2040}{7}$
$x_2 = \frac{120}{7}$
$x_3 = \frac{240}{7}$
$s = 0$

	Z	x_1	x_2	x_3	s	R	RHS
Z	1	-4	-3	-7	0	M	0
s	0	2	1	3	1	0	120
R	0	1	3	2	0	1	120
Z	1	-4-M	-3-3M	-7-2M	0	0	-120M
s	0	2	1	3	1	0	120
R	0	1	3	2	0	1	120
Z	1	-3	0	-5	0	M+1	120
s	0	5/3	0	7/3	1	-1/3	80
x_2	0	1/3	1	2/3	0	1/3	40
Z	1	4/7	0	0	15/7	M+2/7	2040/7
x_3	0	5/7	0	1	3/7	-1/7	240/7
x_2	0	-1/7	1	0	-2/7	3/7	120/7

(11

$Min\ Z = 20x_1 + 15x_2$ $\quad Max - Z + 20x_1 + 15x_2 + \mathrm{MR}_1 + \mathrm{MR}_2 = 0$
$2x_1 + x_2 \geq 5$ $\quad 2x_1 + x_2 - \mathrm{s}_1 + \mathrm{R}_1 = 5$
$-3x_1 + 2x_2 \leq 3$ $\quad -3x_1 + 2x_2 + \mathrm{s}_2 = 3$
$x_1 + x_2 \geq 3$ $\quad x_1 + x_2 - \mathrm{s}_3 + \mathrm{R}_2 = 3$
$x_1, x_2 \geq 0$

$Z = 55 \quad x_1 = 2 \quad x_2 = 1 \quad s_2 = 7$
$s_1 = s_3 = 0$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	R_1	R_2	RHS
Z	-1	20	15	0	0	0	M	M	0
R_1	0	2	1	-1	0	0	1	0	5
s_2	0	-3	2	0	1	0	0	0	3
R_2	0	1	1	0	0	-1	0	1	3

Z	-1	20-3M	15-2M	M	0	M	0	0	-8M
R_1	0	2	1	-1	0	0	1	0	5
s_2	0	-3	2	0	1	0	0	0	3
R_2	0	1	1	0	0	-1	0	1	3
Z	-1	0	5-0.5M	10-0.5M	0	M	1.5M-10	0	-0.5M-50
x_1	0	1	0.5	-0.5	0	0	0.5	0	2.5
s_2	0	0	3.5	-1.5	1	0	1.5	0	10.5
R_2	0	0	0.5	0.5	0	-1	-0.5	1	0.5
Z	-1	0	0	5	0	10	M-5	M-10	-55
x_1	0	1	0	-1	0	1	1	-1	2
s_2	0	0	0	-5	1	7	5	-7	7
x_2	0	0	1	1	0	-2	-1	2	1

(12

$Max\ Z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$
$x_1 + x_2 + x_3 = 7$
$2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$Max\ Z - 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + MR_1 + MR_2 = 0$
$x_1 + x_2 + x_3 + R_1 = 7$
$2x_1 - 5x_2 + x_3 - s + R_2 = 10$

	Z	x_1	x_2	x_3	s	R_1	R_2	RHS
Z	1	-2	-3	5	0	M	M	0
R_1	0	1	1	1	0	1	0	7
R_2	0	2	-5	1	-1	0	1	10
Z	1	-2-3M	-3+4M	5-2M	M	0	0	-17M
R_1	0	1	1	1	0	1	0	7
R_2	0	2	-5	1	-1	0	1	10
Z	1	0	-8-3.5M	6-0.5M	-1-0.5M	0	1+1.5M	10-2M
R_1	0	0	3.5	0.5	0.5	1	-0.5	2
x_1	0	1	-2.5	0.5	-0.5	0	0.5	5
Z	1	0	0	50/7	1/7	16/7+M	M-1/7	102/7
x_2	0	0	1	1/7	1/7	2/7	-1/7	4/7
x_1	0	1	0	6/7	-1/7	5/7	1/7	45/7

$$Z = \frac{102}{7} \quad , x_1 = \frac{45}{7} \quad , x_2 = \frac{4}{7} \quad , x_3 = s = 0$$

(13

$Max\ Z = 5x_1 - 6x_2 - 7x_3$

$Min\ W = R_1 + R_2$ $\qquad$ $\text{Max} - \text{W} + R_1 + R_2 = 0$

$x_1 + 5x_2 - 3x_3 \geq 15$ $\qquad$ $x_1 + 5x_2 - 3x_3 - s_1 + \text{R}_1 = 15$

$5x_1 - 6x_2 + 10x_3 \leq 20$ $\qquad$ $5x_1 - 6x_2 + 10x_3 + s_2 = 20$

$x_1 + x_2 + x_3 = 5$ $\qquad$ $x_1 + x_2 + x_3 + \text{R}_2 = 5$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

	W	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	R_1	R_2	RHS
W	-1	0	0	0	0	0	1	1	0
R_1	0	1	5	-3	-1	0	1	0	15
s_2	0	5	-6	10	0	1	0	0	20
R_2	0	1	1	1	0	0	0	1	5
W	-1	-2	-6	2	1	0	0	0	-20
R_1	0	1	5	-3	-1	0	1	0	15
s_2	0	5	-6	10	0	1	0	0	20
R_2	0	1	1	1	0	0	0	1	5
W	-1	-0.8	0	-1.6	-0.2	0	1.2	0	-2
x_2	0	0.2	1	-0.6	-0.2	0	0.2	0	3
s_2	0	6.2	0	6.4	-1.2	1	1.2	0	38
R_2	0	0.8	0	1.6	0.2	0	-0.2	1	2
W	-1	0	0	0	0	0	1	1	0
x_2	0	0.5	1	0	-0.125	0	0.125	0.375	3.75
s_2	0	3	0	0	-2	1	2	-4	30
x_3	0	0.5	0	1	0.125	0	-0.125	0.625	1.25

$Max\ Z - 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 0$

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
Z	1	-5	6	7	0	0	0
x_2	0	0.5	1	0	-0.125	0	3.75
s_2	0	3	0	0	-2	1	30

x_3	0	0.5	0	1	0.125	0	1.25
Z	1	-11.5	0	0	-0.125	0	-31.25
x_2	0	0.5	1	0	-0.125	0	3.75
s_2	0	3	0	0	-2	1	30
x_3	0	0.5	0	1	0.125	0	1.25
Z	1	0	0	22	2.75	0	-2.5
x_2	0	0	1	-1	-0.25	0	2.5
s_2	0	0	0	-6	-2.75	1	22.5
x_1	0	1	0	2	0.25	0	2.5

$Z = -2.5 \quad , x_1 = x_2 = 2.5 \quad , s_2 = 22.5 \quad , x_3 = s_1 = 0$

(14

$Max\ Z = x_1 + x_2$

$Min\ W = \mathrm{R}$ $\qquad\qquad$ $\mathrm{Max} - \mathrm{W} + \mathrm{R} = 0$

$3x_1 + 2x_2 \leq 20$ $\qquad\qquad$ $3x_1 + 2x_2 + s_1 = 20$

$2x_1 + 3x_2 \leq 20$ $\qquad\qquad$ $2x_1 + 3x_2 + s_2 = 20$

$x_1 + 2x_2 \geq 2$ $\qquad\qquad$ $x_1 + 2x_2 - \mathrm{s}_3 + \mathrm{R} = 2$

$x_1, x_2 \geq 0$

	W	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	R	RHS
W	-1	0	0	0	0	0	1	0
s_1	0	3	2	1	0	0	0	20
s_2	0	2	3	0	1	0	0	20
R	0	1	2	0	0	-1	1	2
W	-1	-1	-2	0	0	1	0	-2
s_1	0	3	2	1	0	0	0	20
s_2	0	2	3	0	1	0	0	20
R	0	1	2	0	0	-1	1	2
W	-1	0	0	0	0	0	1	0
s_1	0	2	0	1	0	1	-1	18
s_2	0	0.5	0	0	1	1.5	-1.5	17
x_2	0	0.5	1	0	0	-0.5	0.5	1

$Max\ Z = x_1 + x_2$ $\qquad\qquad$ $Max\ Z - x_1 - x_2 = 0$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	1	-1	-1	0	0	0	0
s_1	0	2	0	1	0	1	18
s_2	0	0.5	0	0	1	1.5	17
x_2	0	0.5	1	0	0	-0.5	1
Z	1	-0.5	0	0	0	-0.5	1
s_1	0	2	0	1	0	1	18
s_2	0	0.5	0	0	1	1.5	17
x_2	0	0.5	1	0	0	-0.5	1
Z	1	0	1	0	0	-1	2
s_1	0	0	-4	1	0	3	14
s_2	0	0	-1	0	1	2	16
x_1	0	1	2	0	0	-1	2
Z	1	0	-1/3	1/3	0	0	20/3
s_3	0	0	-4/3	1/3	0	1	14/3
s_2	0	0	5/3	-2/3	1	0	20/3
x_1	0	1	2/3	1/3	0	0	20/3
Z	1	0	0	0.2	0.2	0	8
s_3	0	0	0	-0.2	0.8	1	10
x_2	0	0	1	-0.4	0.6	0	4
x_1	0	1	0	0.6	-0.4	0	4

$Z = 8 \quad , x_1 = x_2 = 4 \quad , s_3 = 10 \quad , s_1 = s_2 = 0$

(15

$Min\ Z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$
$Min\ W = \mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_3$
$x_1 + x_2 + x_3 = 6$
$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$
$2x_2 + 3x_3 = 10$
$x_3 \leq 2$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$Max - Z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$
$\mathrm{Max} - \mathrm{W} + \mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_3 = 0$
$x_1 + x_2 + x_3 + R_1 = 6$
$-x_1 + x_2 + 2x_3 + R_2 = 4$
$2x_2 + 3x_3 + R_3 = 10$
$x_3 + s = 2$

	W	x_1	x_2	x_3	s	R_1	R_2	R_3	RHS
W	-1	0	0	0	0	1	1	1	0
R_1	0	1	1	1	0	1	0	0	6
R_2	0	-1	1	2	0	0	1	0	4
R_3	0	0	2	3	0	0	0	1	10
s	0	0	0	1	1	0	0	0	2
W	-1	0	-4	-6	0	0	0	0	-20
R_1	0	1	1	1	0	1	0	0	6
R_2	0	-1	1	2	0	0	1	0	4
R_3	0	0	2	3	0	0	0	1	10
s	0	0	0	1	1	0	0	0	2
W	-1	-3	-1	0	0	0	3	0	-8
R_1	0	1.5	0.5	0	0	1	-0.5	0	4
x_3	0	-0.5	0.5	1	0	0	0.5	0	2
R_3	0	1.5	0.5	0	0	0	-1.5	1	4
s	0	0.5	-0.5	0	1	0	-0.5	0	0
W	-1	0	0	0	0	2	2	0	0
x_1	0	1	1/3	0	0	2/3	-1/3	0	8/3
x_3	0	0	2/3	1	0	1/3	1/3	0	10/3
R_3	0	0	0	0	0	-1	-1	1	0
s	0	0	-2/3	0	1	-1/3	-1/3	0	-4/3

$Max - Z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$ $\qquad$ $Max - Z - x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$

	Z	x_1	x_2	x_3	s	RHS
Z	-1	-1	2	-3	0	0
x_1	0	1	1/3	0	0	8/3
x_3	0	0	2/3	1	0	10/3
s	0	0	-2/3	0	1	-4/3
Z	-1	0	13/3	0	0	38/3
x_1	0	1	1/3	0	0	8/3
x_3	0	0	2/3	1	0	10/3
s	0	0	-2/3	0	1	-4/3

$Z = -\frac{38}{3}$ $\quad , x_1 = \frac{8}{3}$ $\quad , x_3 = \frac{10}{3}$ $\quad , s = -\frac{4}{3}$

(16

$Max\ Z = x_1 + 5x_2 + 3x_3$

$Min\ W = R_1 + R_2$ $\quad\quad$ $\mathrm{Max} - \mathrm{W} + R_1 + R_2 = 0$

$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$ $\quad\quad$ $x_1 + 2x_2 + x_3 + R_1 = 3$

$2x_2 - x_3 = 4$ $\quad\quad$ $2x_2 - x_3 + R_2 = 4$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

	W	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	RHS
W	-1	0	0	0	1	1	0
R_1	0	1	2	1	1	0	3
R_2	0	0	2	-1	0	1	4
W	-1	-1	-4	0	0	0	-7
R_1	0	1	2	1	1	0	3
R_2	0	0	2	-1	0	1	4
W	-1	1	0	2	2	0	-1
x_2	0	0.5	1	0.5	0.5	0	1.5
R_2	0	-1	0	-2	-1	1	1

حضور متغیر اساسی مصنوعی $R_2 = 1$ در جواب بهینه مسأله نشان می دهد که مسأله دارای منطقه موجه نیست یعنی با افزودن این متغیرها که باعث بزرگتر شدن منطقه موجه مسأله شده، جریمه های اعمال شده نتوانسته منطقه موجه اضافه شده را دوباره به منطقه موجه واقعی مسأله برگرداند. اگر همین مسأله را به روش M بزرگ هم حل کنیم به جدول پایانی زیر می رسیم که مؤید همین مطلب است:

	Z	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	RHS
Z	1	M+1.5	0	2M-0.5	2M+2.5	0	-M+7.5
x_2	0	0.5	1	0.5	0.5	0	1.5
R_2	0	-1	0	-2	-1	1	1

(17

$Min\ Z = x_1 + x_2 + x_3$ $\quad\quad$ $Max - Z = -x_1 - x_2 - x_3$

$Min\ W = \mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2$ $\quad\quad$ $\mathrm{Max} - \mathrm{W} + \mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2 = 0$

$2x_1 - x_2 + x_3 = 2$ $\quad\quad$ $2x_1 - x_2 + x_3 + R_1 = 2$

$4x_1 + x_2 + x_3 = 6$ $\quad\quad$ $4x_1 + x_2 + x_3 + R_2 = 6$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

	W	x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	RHS
W	-1	0	0	0	1	1	0
R_1	0	2	-1	1	1	0	2
R_2	0	4	1	1	0	1	6
W	-1	-6	0	-2	0	0	-8
R_1	0	2	-1	1	1	0	2
R_2	0	4	1	1	0	1	6
W	-1	0	-3	1	3	0	-2
x_1	0	1	-0.5	0.5	0.5	0	1
R_2	0	0	3	-1	-2	1	2
W	-1	0	0	0	1	1	0
x_1	0	1	0	1/3	1/6	1/6	4/3
x_2	0	0	1	-1/3	-2/3	1/3	2/3

$Max - Z = -x_1 - x_2 - x_3$ $\quad$ $Max - Z + x_1 + x_2 + x_3 = 0$

	Z	x_1	x_2	x_3	RHS
Z	-1	1	1	1	0
x_1	0	1	0	1/3	4/3
x_2	0	0	1	-1/3	2/3
Z	-1	0	0	1	-2
x_1	0	1	0	1/3	4/3
x_2	0	0	1	-1/3	2/3

$Z = 2 \quad , x_1 = \frac{4}{3} \quad , x_2 = \frac{2}{3} \quad , x_3 = 0$

(18

$Min\ Z = x_1 + 2x_2$ $\quad$ $Max - Z = -x_1 - 2x_2$

$Min\ W = \mathrm{R}$ $\quad$ $\mathrm{Max} - \mathrm{W} + \mathrm{R} = 0$

$4x_1 + 6x_2 \leq 24$ $\quad$ $4x_1 + 6x_2 + s_1 = 24$

$-2x_1 + 2x_2 \geq 4$ $\quad$ $-2x_1 + 2x_2 - s_2 + \mathrm{R} = 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

	W	x_1	x_2	s_1	s_2	R	RHS
W	-1	0	0	0	0	1	0
s_1	0	4	6	1	0	0	24
R	0	-2	2	0	-1	1	4
W	-1	2	-2	0	1	0	-4
s_1	0	4	6	1	0	0	24
R	0	-2	2	0	-1	1	4
W	-1	0	0	0	0	1	0
s_1	0	10	0	1	3	-3	12
x_2	0	-1	1	0	-0.5	0.5	2

$Max - Z = -x_1 - 2x_2$ $\quad$ $Max - Z + x_1 + 2x_2 = 0$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	-1	1	2	0	0	0
s_1	0	10	0	1	3	12
x_2	0	-1	1	0	-0.5	2
Z	-1	3	0	0	1	-4
s_1	0	10	0	1	3	12
x_2	0	-1	1	0	-0.5	2

$Z = 4 \quad , x_2 = 2 \quad , s_1 = 12 \quad , x_1 = s_2 = 0$

$Min\ Z = x_1 + 2x_2$ $\quad$ $Max - Z + x_1 + 2x_2 + \mathrm{MR} = 0$

$4x_1 + 6x_2 \leq 24$ $\quad$ $4x_1 + 6x_2 + \mathrm{s}_1 = 24$

$-2x_1 + 2x_2 \geq 4$ $\quad$ $-2x_1 + 2x_2 - \mathrm{s}_2 + R = 4$

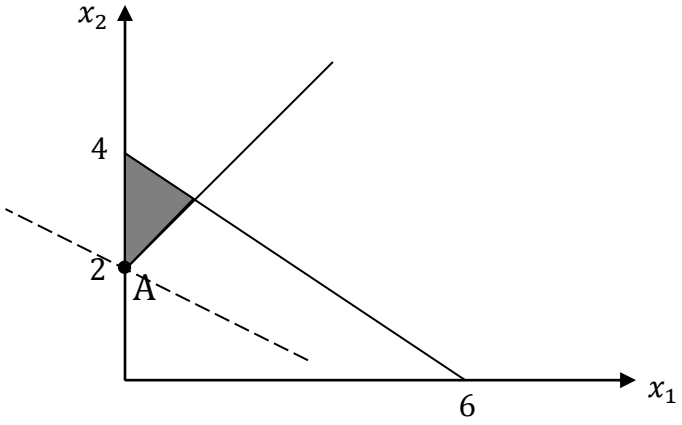
$x_1, x_2 \geq 0$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	R	RHS
Z	-1	1	2	0	0	M	0
s_1	0	4	6	1	0	0	24
R	0	-2	2	0	-1	1	4
Z	-1	1+2M	2-2M	0	M	0	-4M
s_1	0	4	6	1	0	0	24
R	0	-2	2	0	-1	1	4

Z	-1	3	0	0	1	M-1	-4
s_1	0	10	0	1	3	-3	12
x_2	0	-1	1	0	-0.5	0.5	2

$Z = 4 \quad , x_2 = 2 \quad , s_1 = 12 \quad , x_1 = s_2 = 0$

$Min\ Z = x_1 + 2x_2$
$4x_1 + 6x_2 \leq 24$
$-2x_1 + 2x_2 \geq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$



$A \begin{cases} x_2 = 2 \\ x_1 = 0 \end{cases} \longrightarrow Min\ Z = 2 \times 2 = 4$

20) منطقه موجه نامحدود با جواب بهینه نامحدود

$Max\ Z = 2x_1 + 3x_2$
$x_1 + x_2 \geq 3$
$x_1 - 2x_2 \leq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$

$Max\ Z - 2x_1 - 3x_2 + \mathrm{MR} = 0$
$x_1 + x_2 - \mathrm{s}_1 + R = 3$
$x_1 - 2x_2 + \mathrm{s}_2 = 4$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	R	RHS
Z	1	-2	-3	0	0	M	0
R	0	1	1	-1	0	1	3
s_2	0	1	-2	0	1	0	4
Z	1	-2-M	-3-M	M	0	0	-3M
R	0	1	1	-1	0	1	3
s_2	0	1	-2	0	1	0	4
Z	1	1	0	-3	0	M+3	9
x_2	0	1	1	-1	0	1	3
s_2	0	3	0	-2	1	2	10

در ستون s_1 در آخرین جدول، ضرایب لولا منفی است، یعنی متغیر ورودی وجود دارد ولی متغیر خروجی وجود ندارد. این حالت بیانگر نامحدود بودن مقدار تابع هدف است.

21)

$Max\ Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3$
$2x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 12$
$6x_1 + 8x_2 \leq 22$
$x_2, x_3 \geq 0,\ x_1$ آزاد در علامت

$Max\ Z - 3x'_1 + 3x''_1 - 2x_2 - x_3 = 0$
$2x'_1 - 2x''_1 + 5x_2 + x_3 + s_1 = 12$
$6x'_1 - 6x''_1 + 8x_2 + s_2 = 22$
$x_1 = x'_1 - x''_1$

	Z	x'_1	x''_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
Z	1	-3	3	-2	-1	0	0	0
s_1	0	2	-2	5	1	1	0	12
s_2	0	6	-6	8	0	0	1	22
Z	1	0	0	2	-1	0	0.5	11
s_1	0	0	0	7/3	1	1	-1/3	14/3
x'_1	0	1	-1	4/3	0	0	1/6	22/6
Z	1	0	0	13/3	0	1	1/6	47/3
x_3	0	0	0	7/3	1	1	-1/3	14/3
x'_1	0	1	-1	4/3	0	0	1/6	22/6

$Z = \frac{47}{3}$
$x_3 = \frac{14}{3} \quad x_1 = x'_1 = \frac{22}{6}$
$s_1 = s_2 = x''_1 = 0$

22) جواب بهینه چندگانه

$Max\ Z = 4x_1 - 2x_2 + 6x_3$
$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 36$
$5x_1 - x_3 \leq 2$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$Max\ Z - 4x_1 + 2x_2 - 6x_3 + MR = 0$
$2x_1 + x_2 + 3x_3 + R = 36$
$5x_1 - x_3 + s = 2$

	Z	x_1	x_2	x_3	s	R	RHS
Z	1	-4	2	-6	0	M	0
R	0	2	1	3	0	1	36
s	0	5	0	-1	1	0	2
Z	1	-4-2M	2-M	-6-3M	0	0	-36M
R	0	2	1	3	0	1	36
s	0	5	0	-1	1	0	2
Z	1	0	4	0	0	M+2	72

x_3	0	2/3	1/3	1	0	1/3	12
s	0	17/3	1/3	0	1	1/3	14
Z	1	0	4	0	0	M+2	72
x_3	0	0	15/51	1	-2/17	1/17	176/17
x_1	0	1	1/17	0	3/17	1/17	42/17
Z	1	0	4	0	0	M+2	72
x_3	0	2/3	1/3	1	0	1/3	12
s	0	17/3	1/3	0	1	1/3	14

دو جواب بهینه$A(x_1 = 0\ , x_2 = 0, x_3 = 12)$و $B(x_1 = 42/17, x_2 = 0, x_3 = 176/17)$ داریم. جواب رویهم مسأله مانند زیر خواهد بود:

$$\overline{x_1} = \frac{42}{17}(1-\lambda) \qquad ,\overline{x_2} = 0$$

$$\overline{x_3} = 12\lambda + \frac{176}{17}(1-\lambda) = \frac{176}{17} + \frac{28}{17}\lambda \qquad ,s = 14\lambda$$

23) جواب بهینه چندگانه

$Max\ Z = 3x_1 + 6x_2$ $\qquad$ $Max\ Z - 3x_1 - 6x_2 = 0$

$-x_1 + 2x_2 \le 12$ $\qquad$ $-x_1 + 2x_2 + s_1 = 12$

$2x_1 + 4x_2 \le 14$ $\qquad$ $2x_1 + 4x_2 + s_2 = 14$

$x_1, x_2 \ge 0$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	1	-3	-6	0	0	0
s_1	0	-1	2	1	0	12
s_2	0	2	4	0	1	14
Z	1	0	0	0	1.5	21
s_1	0	-2	0	1	-0.5	5
x_2	0	0.5	1	0	0.25	3.5
Z	1	0	0	0	1.5	21
s_1	0	0	4	1	0.5	19
x_1	0	1	2	0	0.5	7

دو جواب بهینه $A(x_1 = 0\ , x_2 = 3.5)$ و $B(x_1 = 7, x_2 = 0)$ داریم. جواب رویهم مسأله مانند زیر خواهد بود:

$$\overline{x_1} = 7(1-\lambda) \qquad ,\overline{s_1} = 5\lambda + 19(1-\lambda)$$

$\overline{x_2} = 3.5\ \lambda \qquad , \overline{s_2} = 0$

(24

$Max\ Z = 3x_1 + x_2$
$x_1 + 2x_2 \leq 5$
$x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$
$7x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 20$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$Max\ Z - 3x_1 - x_2 = 0$
$x_1 + 2x_2 + s_1 = 5$
$x_1 + x_2 - x_3 + s_2 = 2$
$7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + s_3 = 20$

$Z = 15$
$x_1 = 5 \quad x_3 = 3$
$x_2 = 0$
$s_1 = s_2 = s_3 = 0$

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	1	-3	-1	0	0	0	0	0
s_1	0	1	2	0	1	0	0	5
s_2	0	1	1	-1	0	1	0	2
s_3	0	7	3	-5	0	0	1	20
Z	1	0	2	-3	0	3	0	6
s_1	0	0	1	1	1	-1	0	3
x_1	0	1	1	-1	0	1	0	2
s_3 ← متغیر تبهگن	0	0	-4	2	0	-7	1	6
Z	1	0	5	0	3	0	0	15
x_3	0	0	1	1	1	-1	0	3
x_1	0	1	2	0	1	0	0	5
s_3	0	0	-6	0	-2	-5	1	0

(25

$Max\ Z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$
$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$
$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$Max\ Z - 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + \mathrm{MR} = 0$
$2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 2$
$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - s_2 + \mathrm{R} = 8$

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	R	RHS
Z	1	-3	-2	-3	0	0	M	0
s_1	0	2	1	1	1	0	0	2
R	0	3	4	2	0	-1	1	8
Z	1	-3-3M	-2-4M	-3-2M	0	M	0	-8M
s_1	0	2	1	1	1	0	0	2

$Z = 4 \quad x_2 = 2$
$s_1 = s_2 = x_1 = x_3 = 0$

R	0	3	4	2	0	-1	1	8
Z	1	M+3	1-2M	0	3+2M	M	0	6-4M
x_3	0	2	1	1	1	0	0	2
R	0	-1	2	0	-2	-1	1	4
Z	1	5M+1	0	2M-1	4M+2	M	0	4
x_2	0	2	1	1	1	0	0	2
R	0	-5	0	-2	-4	-1	1	0

(**26**

$Max\ Z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$
$Min\ W = R_1 + R_2$ $\quad \text{Max} - \text{W} + R_1 + R_2 = 0$
$x_1 + x_2 + x_3 = 7$ $\quad x_1 + x_2 + x_3 + \text{R}_1 = 7$
$2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10$ $\quad 2x_1 - 5x_2 + x_3 - s_2 + \text{R}_2 = 10$

	W	x_1	x_2	x_3	s_2	R_1	R_2	RHS
W	-1	0	0	0	0	1	1	0
R_1	0	1	1	1	0	1	0	7
R_2	0	2	-5	1	-1	0	1	10
W	-1	-3	4	-2	1	0	0	-17
R_1	0	1	1	1	0	1	0	7
R_2	0	2	-5	1	-1	0	1	10
W	-1	0	-3.5	-0.5	-0.5	0	1.5	-2
R_1	0	0	3.5	0.5	0.5	1	-0.5	2
x_1	0	1	-2.5	0.5	-0.5	0	0.5	5
W	-1	0	0	0	0	1	1	0
x_2	0	0	1	1/7	1/7	2/7	-1/7	4/7
x_1	0	1	0	6/7	-1/7	5/7	1/7	45/7

(**27**

$y_1 = x_1 - 100 \quad \rightarrow \quad x_1 = y_1 + 100$
$y_2 = x_1 - x_2 \quad \rightarrow \quad x_2 = y_1 - y_2 + 100$

$\boldsymbol{Max\ Z = 7x_1 + 5x_2} = 7(y_1 + 100) + 5(y_1 - y_2 + 100)$

$Max\ Z = 12y_1 - 5y_2 + 1200$

$\boldsymbol{4x_1 + 3x_2 \leq 2400}$ $\rightarrow$ $4(y_1 + 100) + 3(y_1 - y_2 + 100) \leq 2400$

$7y_1 - 3y_2 \leq 1700$

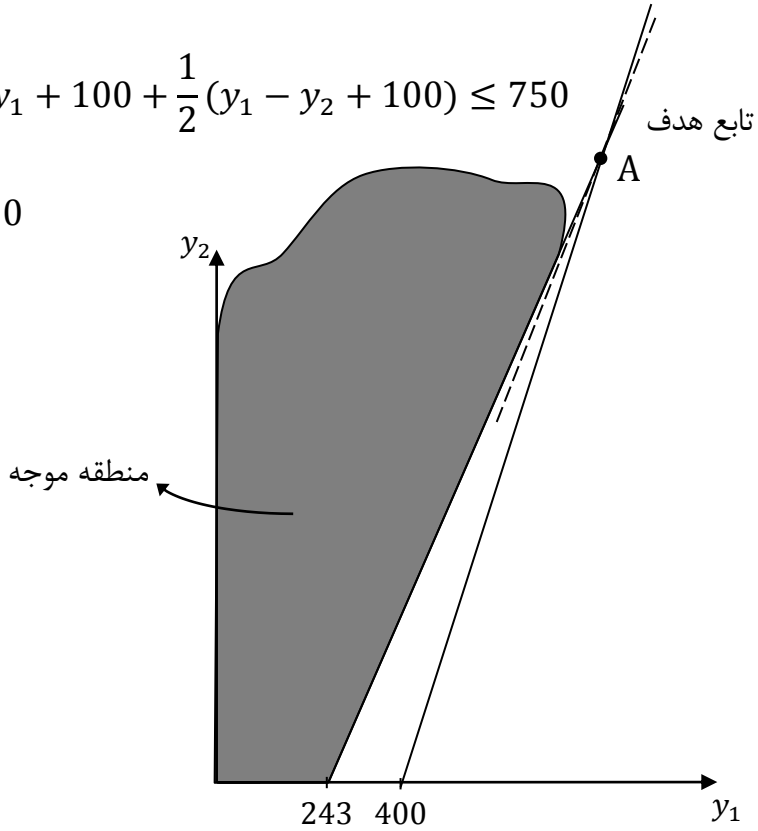
$\boldsymbol{x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 750}$ $\rightarrow$ $y_1 + 100 + \frac{1}{2}(y_1 - y_2 + 100) \leq 750$

$3y_1 - y_2 \leq 1200$

$\boldsymbol{x_1 - x_2 \geq 0}$ $\rightarrow$ $y_2 \geq 0$

$\boldsymbol{x_1 \geq 100}$ $\rightarrow$ $y_1 \geq 0$

$x_1, x_2 \geq 0$



$$A \begin{cases} 7y_1 - 3y_2 = 1700 \\ 3y_1 - y_2 = 1200 \end{cases} \longrightarrow y_1 = 950 \rightarrow y_2 = 1650$$

$Max\ Z = 12y_1 - 5y_2 + 1200 = 12 \times 950 - 5 \times 1650 + 1200 = 4350$

28)

$Max\ Z = 2x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4$ $\quad$ $Max\ Z - 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0$

$8x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 240$ $\quad$ $8x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 + s_1 = 240$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	RHS
Z	1	-2	3	6	-5	0	0
s_1	0	8	4	2	6	1	240
Z	1	14/3	19/3	23/3	0	5/6	200
x_4	0	4/3	2/3	1/3	1	1/6	40

چون مسأله یک محدودیت دارد، یک متغیر اساسی خواهد داشت یعنی تنها یک متغیر مقدار غیر صفر دارد و دیگر متغیرها صفر اند. از آنجا که تنها ضرایب x_1 و x_4 مثبت اند، برای بیشینه کردن تنها باید روی مقدار

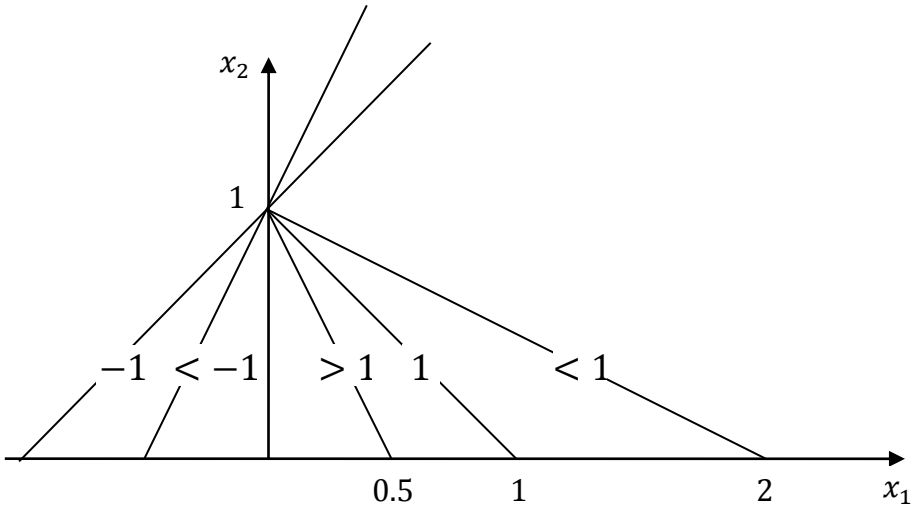
آنها حساب کرد. در نابرابری محدودیت، x_1 می تواند حداکثر مقدار 30 و x_4، 40 را انتخاب کند. با در نظر گرفتن ضرایب آنها در رابطه بیشینه، مقدار $5 \times 40 = 200$ مقدار بیشینه Z خواهد بود.

29)

$$Max\ Z = c_1x_1 + c_2x_2$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

روشن است که با افزایش مقدار c_1 و c_2 (مثبت) مقدار Z بیشتر می شود. با افزایش مقدار b_1 و b_2 منطقه موجه بزرگتر می شود پس مقدار Z بیشتر می شود. در مورد ضرایب متغیرها در محدودیت ها، با افزایش هر یک از ضرایب (مثبت) منطقه موجه کوچک تر می شود. این موضوع، برای نمونه در محدودیت اول، با فرض ثابت ماندن ضریب x_2 $(a_{12} = 1)$ و مقدار b_1 $(b_1 = 1)$ ، با تغییر ضریب x_1 (a_{11}) در شکل زیر پیداست:

$$(< 1)\ \ 0.5\,x_1 + x_2 \leq 1$$
$$(= 1)\ \ x_1 + x_2 \leq 1$$
$$(> 1)\ \ 2x_1 + x_2 \leq 1$$



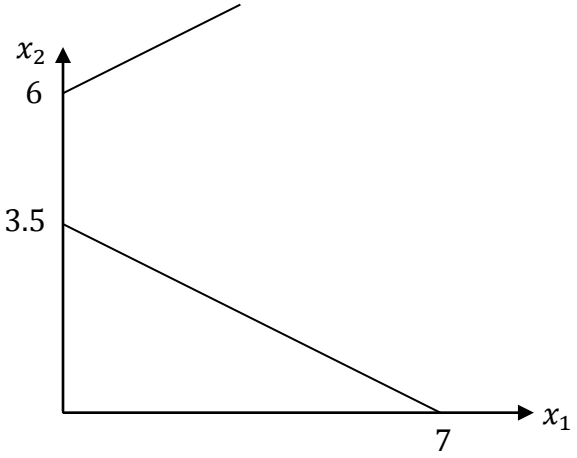
افزایش ضریب ← کاهش منطقه موجه

برای $a_{11} < 0$ (با فرض مثبت بودن دیگر ضرایب و زاید نبودن محدودیت) منطقه موجه بزرگتر از حالت مثبت است. البته با افزایش ضریب a_{11} منفی نیز، منطقه موجه کوچک تر می شود

اگر ضرایب a_{11} و a_{21} یا a_{22} و a_{12} منفی و دیگر ضرایب مثبت باشند، منطقه موجه نامحدود است. در دیگر صورت منطقه موجه محدود است.

با این اوصاف حد بالای مقدار بهینه Z مانند زیر بدست می آید:

$$Max\ Z = 3x_1 + 6x_2$$
$$-x_1 + 2x_2 \leq 12$$
$$2x_1 + 4x_2 \leq 14$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

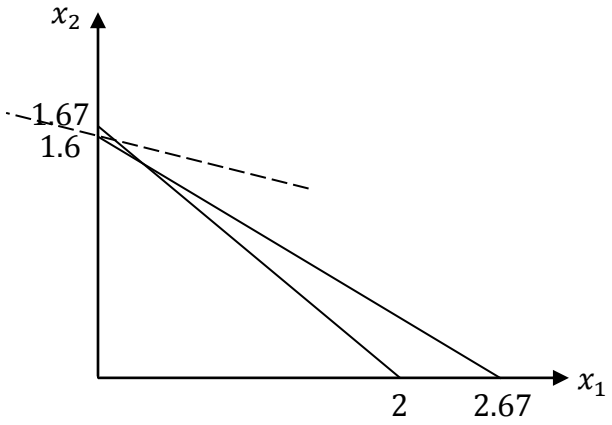


جواب بهینه چندگانه داریم و تابع هدف روی محدودیت دوم قرار دارد:

$$Max\ Z = 3x_1 + 6x_2 = 3 \times 7 = 21$$

حد پایین مقدار بهینه Z مانند زیر بدست می آید:

$$Max\ Z = x_1 + 4x_2$$
$$3x_1 + 5x_2 \leq 8$$
$$5x_1 + 6x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



$$Max\ Z = x_1 + 4x_2 = 4 \times 1.6 = 6.4$$

فصل چهارم

4)

$\text{Max Z} = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3$
$x_1 + x_2 \geq 2 \quad \rightarrow \quad -x_1 - x_2 \leq -2$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 15$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$\text{Min Y} = -2y_1 + 15y_2$
$-y_1 + y_2 \geq 4$
$-y_1 + 2y_2 \geq 2$
$3y_2 \geq 5$
$y_1, y_2 \geq 0$

5)

$\text{Max Z} = 9x_1 + 12x_2 + 15x_3$

$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 \leq -10 \end{cases}$

$2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 12 \rightarrow \quad -2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq -12$
$x_1 + x_2 - 5x_3 \leq 14$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$\text{Min Y} = 10y'_1 - 10y''_1 - 12y_2 + 14y_3 \rightarrow \quad \text{Min Y} = 10y_1 - 12y_2 + 14y_3$
$2y'_1 - 2y''_1 - 2y_2 + y_3 \geq 9 \quad \rightarrow \quad 2y_1 - 2y_2 + y_3 \geq 9$
$2y'_1 - 2y''_1 + 3y_2 + y_3 \geq 12 \quad \rightarrow \quad 2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 12$
$y'_1 - y''_1 - y_2 - 5y_3 \geq 15 \quad \rightarrow \quad y_1 - y_2 - 5y_3 \geq 15$
y_1 آزاد در علامت, $y_2, y_3 \geq 0$

6)

$\text{Max Z} = 4x_1 + x_2 + 7x_3$

$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \\ -x_1 - x_2 - x_3 \leq -10 \end{cases}$

$5x_1 - x_2 + x_3 = 12 \rightarrow \begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 \leq 12 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 \geq 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 \leq 12 \\ -5x_1 + x_2 - x_3 \leq -12 \end{cases}$

$x_1 + 7x_2 - 3x_3 \leq 4$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$\text{Min Y} = 10y_1 + 12y_2 + 4y_3$
$y_1 + 5y_2 + y_3 \geq 4$
$y_1 - y_2 + 7y_3 \geq 1$
$y_1 + y_2 - 3y_3 \geq 7$
y_1, y_2 آزاد در علامت, $y_3 \geq 0$

(7

$\text{Max Z} = 5x_1 + 2x_2 \quad \rightarrow \quad \text{Max Z} = -5x_1 + 2x_2$
$x_1 - 6x_2 \geq 2 \quad \rightarrow \quad -x_1 - 6x_2 \geq 2 \quad \rightarrow x_1 + 6x_2 \leq -2$
$5x_1 + 7x_2 = -4 \rightarrow -5x_1 + 7x_2 = -4 \rightarrow \begin{cases} 5x_1 - 7x_2 \leq 4 \\ -5x_1 + 7x_2 \leq -4 \end{cases}$
$x_1 \leq 0, x_2 \geq 0 \quad \rightarrow x_1, x_2 \geq 0$

$\text{Min Y} = -2y_1 + 15y_2$
$y_1 + 5y_2 \geq -5$
$6y_1 - 7y_2 \geq 2$
$y_1 \geq 0$, y_2 آزاد در علامت

(8

$\text{Min Z} = 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 4x_1 + 2x_2 - x'_3 + x''_3$
$x_1 + x_2 + x_3 = 20 \rightarrow x_1 + x_2 + x'_3 - x''_3 = 20 \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x'_3 - x''_3 \geq 20 \\ -x_1 - x_2 - x'_3 + x''_3 \geq -20 \end{cases}$
$2x_1 - x_2 \geq 6$
$x_3 \leq 4 \quad \rightarrow x'_3 - x''_3 \leq 4 \quad \rightarrow \; -x'_3 + x''_3 \geq -4$
$x_1, x_2 \geq 0$, x_3 آزاد در علامت

$\text{Max Y} = 20y_1 + 6y_2 - 4y_3$
$y_1 + 2y_2 \leq 4$
$y_1 - y_2 \leq 2$
$y_1 - y_3 \leq -1 \quad \rightarrow \quad y_1 - y_3 = -1$
$-y_1 + y_3 \leq 1 \quad \rightarrow \quad y_1 - y_3 \geq -1 \quad \uparrow$
y_1 آزاد در علامت, $y_2, y_3 \geq 0$

(9

$\text{Max Z} = -5x_1 + 5x_2 + 13x_3$
$-x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 20$

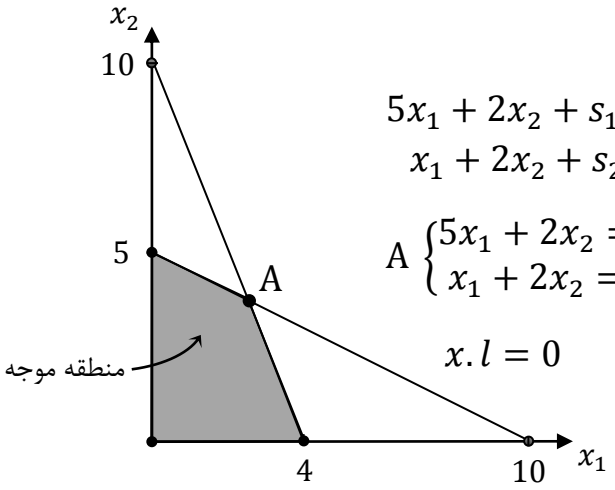
$12x_1 + 4x_2 + 10x_3 \geq 90 \;\rightarrow\; -12x_1 - 4x_2 - 10x_3 \leq -90$
$4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 50$

$x_1, x_3 \geq 0$, x_2 آزاد در علامت

$\text{Min Y} = 20y_1 - 90y_2 + 50y_3$
$-y_1 - 12y_2 + 4y_3 \geq -5$
$y_1 - 4y_2 + 2y_3 = 5$
$3y_1 - 10y_2 - 3y_3 \geq 13$
$y_1, y_2 \geq 0$, آزاد در علامت y_3

(10

$\text{Max Z} = 6x_1 + 8x_2 \quad \rightarrow \quad \text{Min Y} = 20y_1 + 10y_2$
$5x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad \rightarrow \quad 5y_1 + y_2 \geq 6$
$x_1 + 2x_2 \leq 10 \quad \rightarrow \quad 2y_1 + 2y_2 \geq 8$
$x_1, x_2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad y_1,\ y_2 \geq 0$



$5x_1 + 2x_2 + s_1 = 20 \;\;,\;\; 5y_1 + y_2 - l_1 = 6$
$x_1 + 2x_2 + s_2 = 10 \;\;,\;\; 2y_1 + 2y_2 - l_2 = 8$

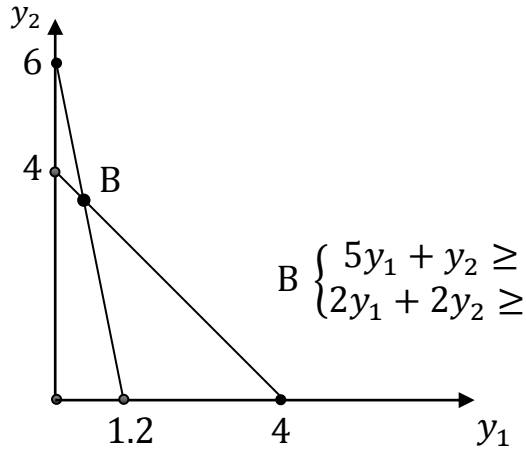
$\text{A} \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 20 \\ x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases} \rightarrow x_1 = 2.5 \;\rightarrow x_2 = 3.75$

$x.l = 0 \qquad y.s = 0$

• نقطه گوشه ناموجه • نقطه گوشه موجه • جواب بهینه

	مسأله اولیه						مسأله ثانویه				
ردیف	x_1	x_2	s_1	s_2	موجه؟	$\text{Z} = \text{Y}$	موجه؟	y_1	y_2	l_1	l_2
1	0	0	2	10	بله	0	خیر	0	0	-6	-8
2	4	0	0	6	بله	24	خیر	1.2	0	0	-5.6
3	10	0	-30	0	خیر	60	بله	0	6	0	4
4	0	5	10	0	بله	40	خیر	0	4	-2	0
5	0	10	0	-10	خیر	80	بله	4	0	14	0
6	2.5	3.75	0	0	موجه	45*	بله	0.5	3.5	0	0

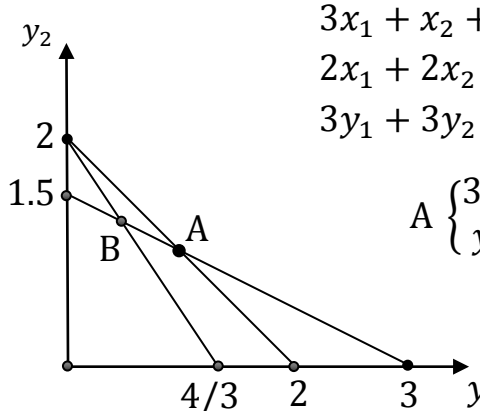
تنها در نقطه 6، هم جواب مسأله اولیه و هم جواب مسأله ثانویه موجه هستند. در دیگر نقاط، یکی موجه و دیگری ناموجه است. پس می توان گفت که نقطه 6 جواب بهینه است.



$$B\begin{cases}5y_1+y_2\geq 6\\ 2y_1+2y_2\geq 8\end{cases}\rightarrow y_1=0.5\ \rightarrow y_2=3.5$$

(11

$$\text{Min Y}=30y_1+40y_2 \quad\rightarrow\quad \text{Max Z}=4x_1+3x_2+6x_3$$
$$3y_1+2y_2\geq 4 \quad\rightarrow\quad 3x_1+x_2+3x_3\leq 30$$
$$y_1+2y_2\geq 3 \quad\rightarrow\quad 2x_1+2x_2+3x_3\leq 40$$
$$3y_1+3y_2\geq 6$$
$$y_1,y_2\geq 0 \quad\rightarrow\quad x_1,x_2,x_3\geq 0$$



$$3x_1+x_2+3x_3+s_1=30\ ,\ 3y_1+2y_2-l_1=4$$
$$2x_1+2x_2+3x_3+s_2=40\ ,\ y_1+2y_2-l_2=3$$
$$3y_1+3y_2-l_3=6 \qquad x.l=0 \qquad y.s=0$$

$$A\begin{cases}3y_1+3y_2=6\\ y_1+2y_2=3\end{cases}\rightarrow y_1=y_2=1$$

$$B\begin{cases}3y_1+2y_2=4\\ y_1+2y_2=3\end{cases}\rightarrow y_1=0.5\ \rightarrow\ y_2=1.25$$

•نقطه گوشه ناموجه •نقطه گوشه موجه •جواب بهینه

تعداد نقاط گوشه مسأله اولیه و ثانویه از رابطه زیر بدست می آید:

$$\binom{n+m}{n}=\binom{n+m}{m}=\binom{3+2}{3}=10$$

در شکل بالا که مربوط به مسأله ثانویه است 8 نقطه گوشه پیداست. دو نقطه گم شده مربوط به مسأله تبهگن است. این مسأله در جدول زیر در ردیف 6، با صفر شدن متغیر اساسی l_3 دیده می شود. اگر چنین

نبود خطی که اکنون محور y_1 را در 4/3 و محور y_2 را در2 قطع کرده کمی به سمت راست می آمد و خط سمت راستش (خط 2 و2) و محور y_2 را در نقطه ای بالاتر از 2 قطع می کرد و دو نقطه پیدا می شد.

	مسأله اولیه							مسأله ثانویه					
ردیف	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	موجه؟	$Z = Y$	موجه؟	y_1	y_2	l_1	l_2	l_3
1	0	0	0	30	40	بله	0	خیر	0	0	4	-3	-6
2	10	0	0	0	20	بله	40	خیر	1.33	0	0	1.67	-2
3	0	0	10	0	10	بله	60	خیر	2	0	2	-1	0
4	0	30	0	0	-20	خیر	90	بله	3	0	5	0	3
5	0	20	0	10	0	بله	60	خیر	0	1.5	1	0	-1.5
6	0	0	13.33	-10	0	خیر	80	بله	0	2	0	1	0
7	5	15	0	0	0	بله	65	خیر	0.5	1.25	0	0	0.75
8	0	10	6.67	0	0	بله	70^*	بله	1	1	1	0	0

نشانه موجه بودن یک نقطه گوشه، نامنفی بودن همه متغیرهای کمکی است. تنها در جواب بهینه است که هم جواب مسأله اولیه و هم جواب مسأله ثانویه موجه هستند. پس نقطه گوشه ردیف 8 جواب بهینه با مقدار $Z^* = Y^* = 70$ است.

(12

$$\text{Min } Z = 10x_1 + 4x_2 + 5x_3 \quad \rightarrow \quad \text{Max } Y = 50y_1$$
$$5x_1 - 7x_2 + 3x_3 \geq 50 \quad \rightarrow \quad 5y_1 \leq 10\,,\ -7y_1 \leq 4\,, 3y_1 \leq 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad \rightarrow \quad y_1 \geq 0$$

$$y_1 = 2 \ \rightarrow \text{Max } Y = 50 \times 2 = 100$$

(13

$$\text{Max } Z = 0x_1 + 0x_2 \quad \rightarrow \quad \text{Min } Y = 12y_1 - 4y_2 + 2y_3$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 12 \quad \rightarrow \quad 2y_1 - 3y_2 + 3y_3 = 0$$
$$-3x_1 + 2x_2 \leq -4 \quad \rightarrow \quad 3y_1 + 2y_2 - 5y_3 \geq 0$$
$$3x_1 - 5x_2 \leq 2$$

x_1 آزاد در علامت , $x_2 \geq 0$ → $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

$\text{Max} - \text{Y} + 12y_1 - 4y_2 + 2y_3 = 0$
$2y_1 - 3y_2 + 3y_3 + R_1 = 0$
$3y_1 + 2y_2 - 5y_3 - l_2 + R_2 = 0$

$\text{Max W} = R_1 + R_2 \rightarrow \text{Min} - \text{W} + R_1 + R_2 = 0$

	W	y_1	y_2	y_3	l_2	R_1	R_2	RHS
W	-1	0	0	0	0	1	1	0
R_1	0	2	-3	3	0	1	0	0
R_2	0	3	2	-5	-1	0	1	0
W	-1	-5	1	2	1	0	0	0
R_1	0	2	-3	3	0	1	0	0
R_2	0	3	2	-5	-1	0	1	0
W	-1	0	-6.5	9.5	1	2.5	0	0
y_1	0	1	-1.5	1.5	0	0.5	0	0
R_2	0	0	6.5	-9.5	-1	-1.5	1	0
W	-1	0	0	0	0	1	1	0
y_1	0	1	0	-9/13	-3/13	2/13	3/13	0
y_2	0	0	1	-19/13	-2/13	-3/13	2/13	0

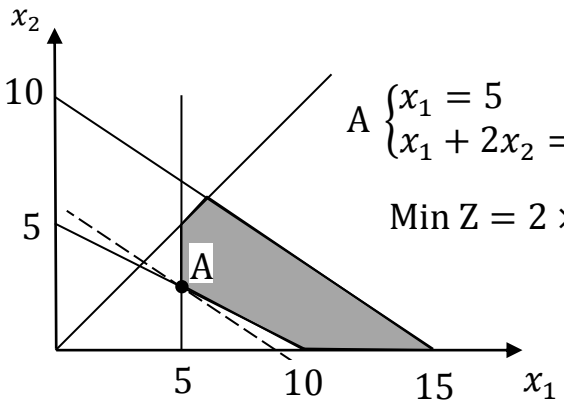
$\text{Max} - \text{Y} + 12y_1 - 4y_2 + 2y_3 = 0$

	Y	y_1	y_2	y_3	l_2	RHS
Y	-1	12	-4	2	0	0
y_1	0	1	0	-9/13	-3/13	0
y_2	0	0	1	-19/13	-2/13	0
Y	-1	0	0	58/13	28/13	0
y_1	0	1	0	-9/13	-3/13	0
y_2	0	0	1	-19/13	-2/13	0

پاسخ ؟؟؟؟

(14

$\text{Min Z} = 2x_1 + 3x_2 \quad \rightarrow \quad \text{Max Y} = -30y_1 + 10y_2 + 5y_4$
$-2x_1 - 3x_2 \geq -30 \quad \rightarrow \quad -2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 2$
$x_1 + 2x_2 \geq 10 \quad \rightarrow \quad -3y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 3$
$x_1 - x_2 \geq 0$
$x_1 \geq 5$
$x_1, x_2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4 \geq 0$



$$\text{A} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases} \rightarrow x_2 = 2.5$$

$$\text{Min Z} = 2 \times 5 + 3 \times 2.5 = 17.5$$

با توجه به روابط $y.s = 0$ و $x.l = 0$ ، از آنجا که متغیرهای x_1 و x_2 مقدار دارند، $l_1 = l_2 = 0$ و از آنجا که نقطه بهینه A محل تقاطع محدودیت های دوم و چهارم است پس $s_2 = s_4 = 0$. بنابراین متغیرهای ثانویه y_2 و y_4 در جواب پایانی مقدار دارند و جزء متغیرهای اساسی هستند.

(15

$\text{Max Z} = 8x_1 + 6x_2 \quad \rightarrow \quad \text{Min Y} = -30y_1 + 10y_2 + 5y_4$
$x_1 - x_2 \leq 0.6 \quad \rightarrow \quad y_1 - y_2 \geq 8$
$x_1 - x_2 \geq 2 \ \rightarrow \ -x_1 + x_2 \leq -2 \ \rightarrow \ -y_1 + y_2 \geq 6 \rightarrow \ y_1 - y_2 \leq -6$
$x_1, x_2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad y_1,\ y_2 \geq 0$

همان گونه که $x_1 - x_2$ نمی تواند کوچکتر از 0.6 و بزرگتر از 2 باشد، $y_1 - y_2$ هم نمی تواند کوچکتر از $6-$ و بزرگتر از 8 باشد. پس هر دو مسأله منطقه موجه ندارند.

(16

$\text{Max Z} = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \ \text{Min Y} = 500y_1 + 460y_2 + 420y_3$
$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 500 \quad \rightarrow \quad y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 4$
$3x_1 + 2x_3 \leq 460 \quad \rightarrow \quad 2y_1 + 4y_3 \geq 2$
$x_1 + 4x_2 \leq 420 \quad \rightarrow \quad y_1 + 2y_2 \geq 5$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad \rightarrow \quad y_1, y_2, y_3 \geq 0$

$\text{Max} - \text{Y} + 500y_1 + 460y_2 + 420y_3 = 0$
$y_1 + 3y_2 + y_3 - s_1 + R_1 = 4$
$2y_1 + 4y_3 - s_2 + R_2 = 2$
$y_1 + 2y_2 - s_3 + R_3 = 5$

$\text{Min W} = R_1 + R_2 + R_3 \rightarrow \quad \text{Max} - \text{W} + R_1 + R_2 + R_3 = 0$

	W	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	R_1	R_2	R_3	RHS
W	-1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
R_1	0	1	3	1	-1	0	0	1	0	0	4
R_2	0	2	0	4	0	-1	0	0	1	0	2
R_3	0	1	2	0	0	0	-1	0	0	1	5
W	-1	-4	-5	-5	1	1	1	0	0	0	-11
R_1	0	1	3	1	-1	0	0	1	0	0	4
R_2	0	2	0	4	0	-1	0	0	1	0	2
R_3	0	1	2	0	0	0	-1	0	0	1	5
W	-1	-7/3	0	-10/3	-2/3	1	1	5/3	0	0	-13/3
y_2	0	1/3	1	1/3	-1/3	0	0	1/3	0	0	4/3
R_2	0	2	0	4	0	-1	0	0	1	0	2
R_3	0	1/3	0	-2/3	2/3	0	-1	-2/3	0	1	7/3
W	-1	-2/3	0	0	-2/3	1/6	1	5/3	5/6	0	-8/3
y_2	0	1/6	1	0	-1/3	1/12	0	1/3	-1/12	0	7/6
y_3	0	0.5	0	1	0	-0.25	0	0	0.25	0	0.5
R_3	0	2/3	0	0	2/3	-1/6	-1	-2/3	1/6	1	8/3
W	-1	0	0	0	0	0	0	1	2	1	0
y_2	0	0.5	1	0	0	0	-0.5	0	0	0.5	2.5
y_3	0	0.5	0	1	0	-0.25	0	0	0.25	0	0.5
s_1	0	1	0	0	1	-0.25	-1.5	-1	0.25	1.5	4

$\text{Max} \ - \text{Y} + 500y_1 + 460y_2 + 420y_3 = 0$

	Y	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	RHS
Y	-1	500	460	420	0	0	0	0
y_2	0	0.5	1	0	0	0	-0.5	2.5
y_3	0	0.5	0	1	0	-0.25	0	0.5
s_1	0	1	0	0	1	-0.25	-1.5	4

Y	-1	60	0	420	0	105	230	-1360
y_2	0	0.5	1	0	0	0	-0.5	2.5
y_3	0	0.5	0	1	0	-0.25	0	0.5
s_1	0	1	0	0	1	-0.25	-1.5	4

$$Y^* = 1360 \ , y_2^* = 2.5 \ , y_3^* = 0.5 \ , s_1^* = 4, \ y_1^* = s_2^* = s_3^* = 0$$

$$x_1^* = 0 \ , x_2^* = 105 \ , x_3^* = 230 \ \rightarrow \ \text{Max } Z = 2 \times 105 + 5 \times 230 = 1360$$

(17

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 \ \rightarrow \ \text{Min } Y = 8y_1 + 12y_2$$
$$2x_1 + x_3 + x_4 \leq 8 \ \rightarrow \ 2y_1 + 2y_2 \geq 2$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 12 \ \rightarrow \ 2y_2 \geq 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \qquad y_1 + y_2 \geq 5 \ , \ y_1 + 2y_2 \geq 6 \ , \ y_1, y_2 \geq 0$$

چون دو محدودیت داریم پس دو متغیر اساسی داریم. با توجه به ضرایب x_3 و x_4 در تابع هدف این دو باید متغیرهای اساسی در جواب پایانی باشند (این روشن با حل مسأله به روش سیمپلکس و جدول پایانی زیر دیده می شود:)

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	RHS
Z	1	8	1	0	0	4	1	44
x_3	0	2	-2	1	0	2	-1	4
x_4	0	0	2	1	1	-1	1	4

چون x_3 و x_4 متغیرهای اساسی هستند، متغیرهای کمکی برابر صفرند $s_1 = s_2 = 0$ و دو متغیر دیگر نیز برابر صفر اند پس جواب پایانی (بهینه) مانند زیر بدست می آید:

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 8 \\ x_3 + 2x_4 = 12 \end{cases} \rightarrow \ x_4 = 4 \ \rightarrow x_3 = 4 \ \rightarrow \ Z^* = 5 \times 4 + 6 \times 4 = 44$$

اما برای بدست آوردن جواب مسأله ثانویه باید به رابطه بین جواب های اساسی مسأله اولیه و ثانویه و روابط کلیدی $y.s = 0$ و $x.l = 0$ پرداخت. چون x_3 و x_4 مقدار دارند پس $l_3 = l_4 = 0$ و چون s_1 و s_2 برابر صفرند پس y_1 و y_2 مقدار دارند. بنابر این:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 5 \\ y_1 + 2y_2 = 6 \end{cases} \rightarrow \ y_2 = 1 \ \rightarrow y_1 = 4 \ \rightarrow \ Y^* = 8 \times 4 + 12 \times 1 = 44$$

(**18**

$\text{Max Z} = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \;\rightarrow\; Max\ Z - 5x_1 - 12x_2 - 4x_3 + \text{MR} = 0$

$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \;\rightarrow\; x_1 + 2x_2 + x_3 + \text{s} = 5$

$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \;\rightarrow\; 2x_1 - x_2 + 3x_3 + R = 2$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

	Z	x_1	x_2	x_3	s	R	RHS
Z	1	-5	-12	-4	0	M	0
s	0	1	2	1	1	0	5
R	0	2	-1	3	0	1	2
Z	1	-5-2M	-12+M	-4-3M	0	0	-2M
s	0	1	2	1	1	0	5
R	0	2	-1	3	0	1	2
Z	1	-7/3	-40/3	0	0	M+4/3	8/3
x_1	0	1/3	7/3	0	1	-1/3	13/3
x_3	0	2/3	-1/3	1	0	1/3	2/3
Z	1	-3/7	0	0	40/7	M-4/7	192/7
x_2	0	1/7	1	0	3/7	-1/7	13/7
x_3	0	5/7	0	1	1/7	2/7	9/7
Z	1	0	0	0.6	5.8	M-0.4	28.2
x_2	0	0	1	-0.2	0.4	-0.2	1.6
x_1	0	1	0	1.4	0.2	0.4	1.8

$\text{Z}^* = 28.2 \;\; , x_1^* = 1.8 \;\; , x_2^* = 1.6 \;\; , \text{s} = 0$

$\text{Min Y} = 5y_1 + 2y_2 \;\rightarrow\; Max - Y = -5y_1 - 2y_2$

$y_1 + 2y_2 \geq 5 \;\rightarrow\; y_1 + 2y'_2 - 2y''_2 - l_1 + R_1 = 5$

$2y_1 - y_2 \geq 12 \;\rightarrow 2y_1 - y'_2 + y''_2 - l_2 + R_2 = 12$

$y_1 + 3y_2 \geq 4 \;\rightarrow\; y_1 + 3y'_2 - 3y''_2 - l_3 + R_3 = 4$

$y_1 \geq 0$, y_2 آزاد در علامت

$\text{Min W} = R_1 + R_2 + R_3 \;\rightarrow\; \text{Max} - \text{W} + R_1 + R_2 + R_3 = 0$

	W	y_1	y'_2	y''_2	l_1	l_2	l_3	R_1	R_2	R_3	RHS
W	-1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
R_1	0	1	2	-2	-1	0	0	1	0	0	5
R_2	0	2	-1	1	0	-1	0	0	1	0	12
R_3	0	1	3	-3	0	0	-1	0	0	1	4
W	-1	-4	-4	4	1	1	1	0	0	0	-21
R_1	0	1	2	-2	-1	0	0	1	0	0	5
R_2	0	2	-1	1	0	-1	0	0	1	0	12
R_3	0	1	3	-3	0	0	-1	0	0	1	4
W	-1	0	8	-8	1	1	-3	0	0	4	-5
R_1	0	0	-1	1	-1	0	1	1	0	-1	1
R_2	0	0	-7	7	0	-1	2	0	1	-2	4
y_1	0	1	3	-3	0	0	-1	0	0	1	4
W	-1	0	0	0	1	-1/7	-5/7	0	8/7	12/7	-3/7
R_1	0	0	0	0	-1	1/7	5/7	1	-1/7	-5/7	3/7
y''_2	0	0	-1	1	0	-1/7	2/7	0	1/7	-2/7	4/7
y_1	0	1	0	0	0	-3/7	-1/7	0	3/7	1/7	40/7
W	-1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
s_3	0	0	0	0	-1.4	0.2	1	1.4	-0.2	-1	0.6
y''_2	0	0	-1	1	0.4	-0.2	0	-0.4	0.2	0	0.4
y_1	0	1	0	0	-0.2	-0.4	0	0.2	0.4	0	5.8

$$Max - Y + 5y_1 + 2y'_2 - 2y''_2 = 0$$

	Y	y_1	y'_2	y''_2	l_1	l_2	l_3	RHS
Y	-1	5	2	-2	0	0	0	0
s_3	0	0	0	0	-1.4	0.2	1	0.6
y''_2	0	0	-1	1	0.4	-0.2	0	0.4
y_1	0	1	0	0	-0.2	-0.4	0	5.8
Y	-1	0	0	0	1.8	1.6	0	-28.2
s_3	0	0	0	0	-1.4	0.2	1	0.6
y''_2	0	0	-1	1	0.4	-0.2	0	0.4
y_1	0	1	0	0	-0.2	-0.4	0	5.8

$Y^* = 28.2 \;\; , y_1^* = 5.8 \;\; , y_2^* = -0.4 \;\; , l_3 = 0.6 \;\; , l_1 = l_2 = 0$

(19

$\text{Min } Z = 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 \;\; \rightarrow \;\; Max - Z + 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 0$

$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 3 \;\rightarrow\; -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq -3 \;\rightarrow\; -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + s_1 = -3$

$4x_1 + 2x_3 \geq 10 \;\; \rightarrow \;\; -4x_1 - 2x_3 \leq -10 \;\rightarrow\; -4x_1 - 2x_3 + s_2 = -10$

$x_1, x_2, x_3 \geq$

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
Z	-1	10	5	4	0	0	0
s_1	0	-3	-2	3	1	0	-3
s_2	0	-4	0	-2	0	1	-10
Z	-1	2	5	0	0	2	-20
s_1	0	-9	-2	0	1	1.5	-18
x_3	0	2	0	1	0	-0.5	5
Z	-1	0	41/9	0	2/9	7/3	-24
x_1	0	1	2/9	0	-1/9	-1/6	2
x_3	0	0	-4/9	1	2/9	1/6	1

$\text{Max } Z = 3y_1 + 10y_2 \;\; \rightarrow \; Max\, Z - 3y_1 - 10y_2 = 0$

$3y_1 + 4y_2 \leq 10 \;\; \rightarrow \; 3y_1 + 4y_2 + s_1 = 10$

$2y_1 \leq 5 \;\;\; \rightarrow 2y_1 + s_2 = 5$

$-3y_1 + 2y_2 \leq 4 \;\; \rightarrow \;\; -3y_1 + 2y_2 + s_3 \leq 4$

$y_1, y_2 \geq 0$

	Z	y_1	y_2	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	1	-3	-10	0	0	0	0
s_1	0	3	4	1	0	0	10
s_2	0	2	0	0	1	0	5
s_3	0	-3	2	0	0	1	4
Z	1	-18	0	0	0	5	20
s_1	0	9	0	1	0	-2	2

s_2	0	2	0	0	1	0	5
y_2	0	-1.5	1	0	0	0.5	2
Z	1	0	0	2	0	1	24
y_1	0	1	0	1/9	0	-2/9	2/9
s_2	0	0	0	-2/9	0	4/9	41/9
y_2	0	0	1	1/6	0	1/6	7/3

(20

$\text{Min Z} = 2x_1 + x_2 \quad \rightarrow \text{ Max } -\text{Z} + 2x_1 + x_2 = 0$

$3x_1 + x_2 \geq 3 \quad \rightarrow \quad -3x_1 - x_2 \leq -3 \rightarrow \quad -3x_1 - x_2 + s_1 = -3$

$4x_1 + 3x_2 \geq 6 \quad \rightarrow \quad -4x_1 - 3x_2 \leq -6 \quad \rightarrow \quad -4x_1 - 3x_2 + s_2 = -6$

$x_1 + 2x_2 \leq 3 \quad \rightarrow \quad x_1 + 2x_2 + s_3 = 3$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	-1	2	1	0	0	0	0
s_1	0	-3	-1	1	0	0	-3
s_2	0	-4	-3	0	1	0	-6
s_3	0	1	2	0	0	1	3
Z	-1	2/3	0	0	1/3	0	-2
s_1	0	-5/3	0	1	-1/3	0	-1
x_2	0	4/3	1	0	-1/3	0	2
s_3	0	-5/3	0	0	2/3	1	-1
Z	-1	0	0	0.4	0.2	0	-2.4
x_1	0	1	0	-0.6	0.2	0	0.6
x_2	0	0	1	0.8	-0.6	0	1.2
s_3	0	0	0	-1	1	1	0

$$\text{Z}^* = 2.4 \quad , x_1^* = 0.6 \quad , x_2^* = 1.2 \quad , s_1 = s_2 = s_3 = 0$$

(21

$\text{Max Z} = -2x_1 - 2x_2 \quad \rightarrow \text{ Max Z} + 2x_1 + 2x_2 = 0$

$2x_1 + x_2 \geq 6 \quad \rightarrow \quad -2x_1 - x_2 \leq -6 \quad \rightarrow \quad -2x_1 - x_2 + s_1 = -6$

$x_1 + 2x_2 \geq 6 \quad \rightarrow \quad -x_1 - 2x_2 \leq -6 \quad \rightarrow \quad -x_1 - 2x_2 + s_2 = -6$

$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	1	2	2	0	0	0
s_1	0	-2	-1	1	0	-6
s_2	0	-1	-2	0	1	-6
Z	1	0	1	1	0	-6
x_1	0	1	0.5	-0.5	0	3
s_2	0	0	-1.5	-0.5	1	-3
Z	1	0	0	2/3	2/3	-8
x_1	0	1	0	-2/3	1/3	2
x_2	0	0	1	1/3	-2/3	2

$Z^* = -8 \quad , x_1 = x_2 = 2 \quad , s_1 = s_2 = 0$

فصل پنجم

فرموله کردن، مدل سازی، کاربرد مدل های برنامه ریزی خطی

کتاب هیلیر و لیبرمن

1)

$Max\ Z = 30x_1 + 12x_2 + 15x_3$ $\qquad$ $Max\ Z - 30x_1 - 12x_2 - 15x_3 = 0$

$9x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 500$ $\qquad$ $9x_1 + 3x_2 + 5x_3 + s_1 = 500$

$5x_1 + 4x_2 \leq 350$ $\qquad$ $5x_1 + 4x_2 + s_2 = 350$

$3x_1 + 2x_3 \leq 150$ $\qquad$ $3x_1 + 2x_3 + s_3 = 150$

$x_3 \leq 20$ $\qquad$ $x_3 + s_4 = 20$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
Z	1	-30	-12	-15	0	0	0	0	0
s_1	0	9	3	5	1	0	0	0	500
s_2	0	5	4	0	0	1	0	0	350
s_3	0	3	0	2	0	0	1	0	150
s_4	0	0	0	1	0	0	0	1	20
Z	1	0	-12	5	0	0	10	0	1500
s_1	0	0	3	-1	1	0	-3	0	50
s_2	0	0	4	-10/3	0	1	-5/3	0	100
x_1	0	1	0	2/3	0	0	1/3	0	50
s_4	0	0	0	1	0	0	0	1	20
Z	1	0	0	1	4	0	-2	0	1700
x_2	0	0	1	-1/3	1/3	0	-1	0	50/3
s_2	0	0	0	-2	-4/3	1	7/3	0	100/3
x_1	0	1	0	2/3	0	0	1/3	0	50
s_4	0	0	0	1	0	0	0	1	20
Z	1	0	0	-5/7	20/7	6/7	0	0	12100/7
x_2	0	0	1	-25/21	-5/21	3/7	0	0	650/21
s_3	0	0	0	-6/7	-4/7	3/7	1	0	100/7
x_1	0	1	0	20/21	4/21	-1/7	0	0	950/21

s_4	0	0	0	1	0	0	0	1	20
Z	1	0	0	0	20/7	6/7	0	5/7	12200/7
x_2	0	0	1	0	-5/21	3/7	0	25/21	1150/21
s_3	0	0	0	0	-4/7	3/7	1	6/7	220/7
x_1	0	1	0	0	4/21	-1/7	0	-20/21	550/21
x_3	0	0	0	1	0	0	0	1	20

$$x_1 = \frac{550}{21} \ , x_2 = \frac{1150}{21} \ , x_3 = 20 \ , s_3 = \frac{220}{7} \quad , \mathrm{Z} = \frac{61000}{21}$$
$$s_1 = s_2 = s_4 = 0$$

(2

$Min\ Z = 21x_1 + 18x_2 + 15x_3$ $\quad$ $Max - Z = -21x_1 - 18x_2 - 15x_3$

$Min\ W = R_1 + R_2 + R_3$ $\quad$ $Max - W + R_1 + R_2 + R_3 = 0$

$90x_1 + 20x_2 + 40x_3 \geq 200$ $\quad$ $90x_1 + 20x_2 + 40x_3 - s_1 + R_1 = 200$

$30x_1 + 80x_2 + 60x_3 \geq 180$ $\quad$ $30x_1 + 80x_2 + 60x_3 - s_2 + R_2 = 180$

$10x_1 + 20x_2 + 60x_3 \geq 150$ $\quad$ $10x_1 + 20x_2 + 60x_3 - s_3 + R_3 = 150$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

	W	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	R_1	R_2	R_3	RHS
W	-1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
R_1	0	90	20	40	-1	0	0	1	0	0	200
R_2	0	30	80	60	0	-1	0	0	1	0	180
R_3	0	10	20	60	0	0	-1	0	0	1	150
W	-1	-130	-120	-160	1	1	1	0	0	0	-530
R_1	0	90	20	40	-1	0	0	1	0	0	200
R_2	0	30	80	60	0	-1	0	0	1	0	180
R_3	0	10	20	60	0	0	-1	0	0	1	150
W	-1	-310/3	-200/3	0	1	1	-5/3	0	0	8/3	-130
R_1	0	250/3	20/3	0	-1	0	2/3	1	0	-2/3	100
R_2	0	20	60	0	0	-1	1	0	1	-1	30
x_3	0	1/6	1/3	1	0	0	-1/60	0	0	1/60	2.5
W	-1	0	-58.4	0	0.876	1	-0.84	0.124	0	1.84	-6
x_1	0	1	0.08	0	-0.0012	0	0.008	0.0012	0	-0.008	1.2
R_2	0	0	58.4	0	0.024	-1	0.84	-0.024	1	-0.84	6

x_3	0	0	0.32	1	0.0002	0	-0.018	-0.0002	0	0.018	2.3
W	-1	0	0	0	0.9	0	0	0.1	1	1	0
x_1	0	1	0	0	-0.0012	0.0014	0.0068	0.0012	-0.0014	-0.0068	1.1918
x_2	0	0	1	0	0.0004	-0.0171	0.0144	0.0004	0.0171	-0.0144	0.1027
x_3	0	0	0	1	0.0001	0.0055	-0.0226	-0.0003	-0.0055	0.0226	2.267

$$Max - Z + 21x_1 + 18x_2 + 15x_3 = 0$$

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	-1	21	18	15	0	0	0	0
x_1	0	1	0	0	-0.0012	0.0014	0.0068	1.1918
x_2	0	0	1	0	0.0004	-0.0171	0.0144	0.1027
x_3	0	0	0	1	0.0001	0.0055	-0.0226	2.267
Z	-1	0	0	0	0.0165	0.1959	-0.063	-60.85
x_1	0	1	0	0	-0.0012	0.0014	0.0068	1.1918
x_2	0	0	1	0	0.0004	-0.0171	0.0144	0.1027
x_3	0	0	0	1	0.0001	0.0055	-0.0226	2.267
Z	-1	9.26	0	0	0.0054	0.21	0	-49.82
s_3	0	147	0	0	-0.1765	0.2059	1	175
x_2	0	-2.12	1	0	0.0029	-0.02	0	-2.417
x_3	0	3.32	0	1	-0.0039	0.01	0	6.222

$x_2 = -2.417$,$x_3 = 6.222$,$s_3 = 175$,$\mathrm{Z} = 49.82$
$x_1 = s_1 = s_2 = 0$

(3

$Max\ Z = 140x_1 + 120x_2 + 100x_3$

x_1 محصول کوچک, x_2 محصول متوسط, x_3 محصول بزرگ , $x_i \geq 0, \forall\, i = 1,2,3$

$x_1 \leq 900$, $x_2 \leq 1200$, $x_3 \leq 750$

$x_{ij} = j$ محصول i در کارخانه , $x_{ij} \geq 0$

$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 750$ $\quad$ $12x_{11} + 15x_{21} + 20x_{31} \leq 13000$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 900$ $\quad$ $12x_{12} + 15x_{22} + 20x_{32} \leq 12000$

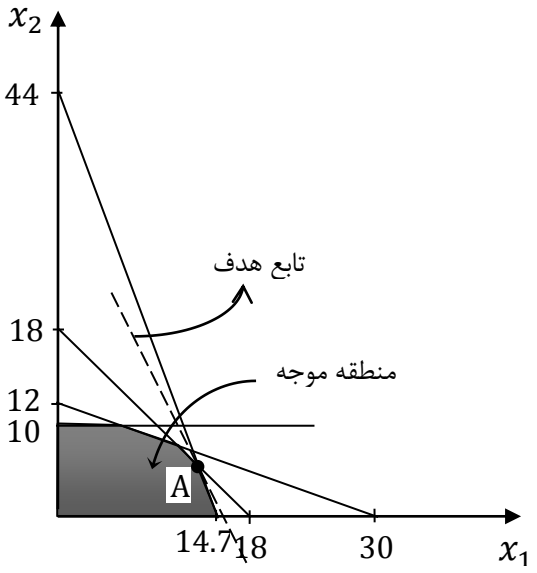
$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 450$ $\quad\quad$ $12x_{13} + 15x_{23} + 20x_{33} \leq 5000$

$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 900$, $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1200$, $x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 750$

(4

$Max\ Z = 2x_1 + x_2$

$x_2 \leq 10$
$2x_1 + 5x_2 \leq 60$
$x_1 + x_2 \leq 18$
$3x_1 + x_2 \leq 44$
$x_1, x_2 \geq 0$

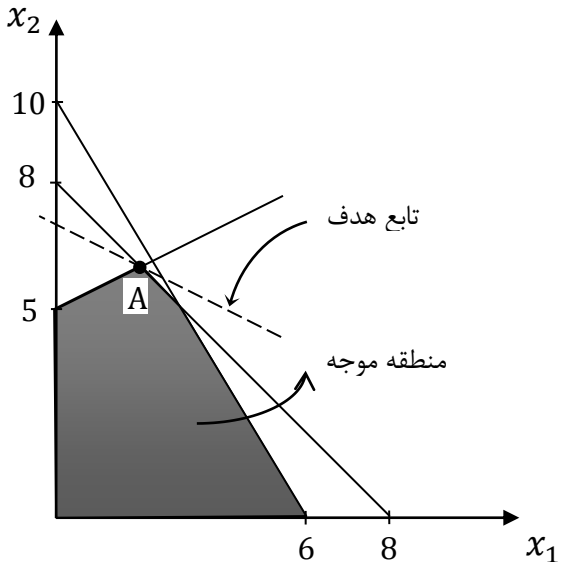


$A \begin{cases} x_1 + x_2 = 18 \\ 3x_1 + x_2 = 44 \end{cases} \longrightarrow 2x_1 = 26 \longrightarrow x_1 = 13 \longrightarrow x_2 = 18 - x_1 = 5$

$\Rightarrow Max\ Z = 2 \times 13 + 5 = 31$

$Max\ Z = 10x_1 + 20x_2$

$-x_1 + 2x_2 \leq 10$
$x_1 + x_2 \leq 8$
$5x_1 + 3x_2 \leq 30$
$x_1, x_2 \geq 0$



$A \begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 = 10 \end{cases} \longrightarrow 3x_1 = 18 \longrightarrow x_1 = 6 \longrightarrow x_2 = 2$

$\Rightarrow Max\ Z = 10 \times 6 + 20 \times 2 = 100$

(5

$$Min\ Z = 8.5x_1 + 6x_2 + 8.9x_3 + 5.7x_4 + 8.8x_5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$
$$30x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 10x_4 + 50x_5 = 40$$
$$60x_1 + 20x_2 + 20x_3 + 10x_4 + 10x_5 = 35$$
$$10x_1 + 70x_2 + 30x_3 + 80x_4 + 40x_5 = 25$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

(6

$$Max\ Z = 800x_1 + 5x_2 + 375x_3 + 550x_4 + 250x_5$$

x_1 ↓ گاو — x_2 ↓ مرغ — x_3 ↓ جریب سویا — x_4 ↓ جریب ذرت — x_5 ↓ جریب جو

$$900x_1 + 7x_2 \leq 30000$$
$$1.5x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 100$$
$$100x_1 + 0.6x_2 + 20x_3 + 30x_4 + 10x_5 \leq 3500$$
$$50x_1 + 0.3x_2 + 50x_3 + 75x_4 + 40x_5 \leq 4000$$
$$x_1 \leq 32\ ,\ x_2 \leq 3000$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

(7

$x_{ij} = j$ در روز i ساعت کار دانشجوی $i =$ الف, ب, ج, د, ه و $j =$ د, س, چ, پ, ج , $x_{ij} \geq 0$

$$Min\ Z = 4.2\ x_{\text{الف}} + 4.3\ x_{\text{ب}} + 4.1\ x_{\text{چ}} + 4\ x_{\text{د}} + 5\ x_{\text{ه}} + 5.5\ x_{\text{و}}$$

$$x_{\text{الف د}} + x_{\text{چ د}} + x_{\text{د د}} + x_{\text{ه د}} = 14$$
$$x_{\text{ب س}} + x_{\text{چ س}} + x_{\text{د س}} = 14$$
$$x_{\text{الف چ}} + x_{\text{چ چ}} + x_{\text{د چ}} + x_{\text{ه چ}} = 14$$
$$x_{\text{الف پ}} + x_{\text{چ پ}} + x_{\text{د پ}} + x_{\text{و پ}} = 14$$
$$x_{\text{ب چ}} + x_{\text{ه چ}} + x_{\text{و چ}} = 14$$

$$x_{\text{الف}} = x_{\text{الف د}} + x_{\text{الف چ}} + x_{\text{الف پ}} \geq 8 \qquad x_{\text{الف د}} \leq 6\ , x_{\text{الف چ}} \leq 6\ , x_{\text{الف پ}} \leq 6$$
$$x_{\text{ب}} = x_{\text{ب س}} + x_{\text{ب چ}} \geq 8 \qquad x_{\text{ب س}} \leq 6\ , x_{\text{ب چ}} \leq 6$$
$$x_{\text{چ}} = x_{\text{چ د}} + x_{\text{چ س}} + x_{\text{چ چ}} + x_{\text{چ پ}} \geq 8 \qquad x_{\text{چ د}} \leq 4\ , x_{\text{چ س}} \leq 8\ , x_{\text{چ چ}} \leq 4\ , x_{\text{چ پ}} \leq 4$$

$x_{۵} = x_{۵۵} + x_{۵س} + x_{۵چ} + x_{۵پ} \geq 8 \quad x_{۵۵} \leq 5 \quad , x_{۵س} \leq 5 \quad , x_{۵چ} \leq 5 \quad , x_{۵پ} \leq 5$

$x_{۰} = x_{۰۵} + x_{۰چ} + x_{۰ج} \geq 7 \quad x_{۰۵} \leq 3 \quad , x_{۰چ} \leq 3 \quad , x_{۰ج} \leq 8$

$x_{و} = x_{وپ} + x_{وج} \geq 7 \quad x_{وپ} \leq 2 \quad , x_{وج} \leq 6$

(8

$Max\ Z = 100x_1 + 130x_2 + 115x_3 + 90x_4 \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

محموله 1 محموله 2 محموله 3 محموله 4

$x_{ij} = j$ محموله i در محفظه , $i = 1,2,3,4$, $j = 1$ (جلو), 2 (وسط), 3 (عقب) , $x_{ij} \geq 0$

$14x_{11} + 11x_{21} + 18x_{31} + 9x_{41} \leq 8$
$14x_{12} + 11x_{22} + 18x_{32} + 9x_{42} \leq 12$
$14x_{13} + 11x_{23} + 18x_{33} + 9x_{43} \leq 7$

$500x_{11} + 700x_{21} + 600x_{31} + 400x_{41} \leq 5000$
$500x_{12} + 700x_{22} + 600x_{32} + 400x_{42} \leq 7000$
$500x_{13} + 700x_{23} + 600x_{33} + 400x_{43} \leq 3000$

$x_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13}$, $x_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23}$, $x_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33}$

(9

$x_1 =$ موجودی چوب منبع اول , $x_2 =$ موجودی چوب منبع دوم , $x_3 =$ موجودی چوب منبع سوم
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$
$x_{ij} = j$ چوب منبع i به بازار , $i = 1,2,3$, $j = 1,2,3,4,5$, $x_{ij} \geq 0$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{حمل با راه آهن} \\ 0 & \text{حمل با کشتی} \end{cases}$$

$x_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 10$
$x_2 = x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 20$
$x_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 15$

$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 7$
$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 12$
$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 9$
$x_{14} + x_{24} + x_{34} \leq 10$

$x_{15} + x_{25} + x_{35} \leq 8$

$110x_{11} + 121x_{12} + 95x_{13} + 114x_{15} \leq 2500 + MY$
$117x_{21} + 127x_{22} + 108x_{23} + 100x_{24} + 106x_{25} \leq 2500 + MY$
$113x_{32} + 110x_{33} + 107x_{34} + 96x_{35} \leq 2500 + MY$
$\boldsymbol{Min\ C} = [24.1\ Y + (12.2 + 11)\ (1 - Y)]\ x_{11} + [18.5\ Y + (14.8 + 12.1)\ (1 - Y)]\ x_{12} + [17.7\ Y + (9.5 + 9.5)\ (1 - Y)]\ x_{13} + 22\ x_{14} + [26.3\ Y + (14 + 11.4)\ (1 - Y)]\ x_{15} + [27.4\ Y + (14.4 + 11.7)\ (1 - Y)]\ x_{21} + [30.8\ Y + (17.2 + 12.7)\ (1 - Y)]\ x_{22} + [33.6\ Y + (10.9 + 10.8)\ (1 - Y)]\ x_{23} + [19.5\ Y + (9.3 + 10)\ (1 - Y)]\ x_{24} + [22.4\ Y + (12.2 + 10.6)\ (1 - Y)]\ x_{25} + 23.5\ x_{31} + [26.4\ Y + (13.2 + 11.3)\ (1 - Y)]\ x_{32} + [25\ Y + (14.3 + 11)\ (1 - Y)]\ x_{33} + [24.2\ Y + (12.5 + 10.7)\ (1 - Y)]\ x_{34} + [18.5\ Y + (10.4 + 9.6)\ (1 - Y)]\ x_{35}$

$\boldsymbol{Min\ C} = (0.9\ Y + 23.2)\ x_{11} + (-8.4\ Y + 26.9)\ x_{12} + (-1.3\ Y + 19)\ x_{13} + 22\ x_{14} + (0.9\ Y + 25.4)\ x_{15} + (1.3\ Y + 26.1)\ x_{21} + (0.9\ Y + 29.9)\ x_{22} + (11.9\ Y + 21.7)\ x_{23} + (0.2\ Y + 19.3)\ x_{24} + (-0.4\ Y + 22.8)\ x_{25} + 23.5\ x_{31} + (1.9\ Y + 24.5)\ x_{32} + (-0.3\ Y + 25.3)\ x_{33} + (Y + 23.2)\ x_{34} + (-1.5\ Y + 20)\ x_{35}$

(10

x_{A} = نسبت چدن A از (پوند1000) ماده ریخته گری

x_{B} = نسبت چدن B از (پوند1000) ماده ریخته گری

x_{C} = نسبت چدن C از (پوند1000) ماده ریخته گری

x_{D} = نسبت منگنز خالص از (پوند1000) ماده ریخته گری

$x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}} + x_{\mathrm{C}} + x_{\mathrm{D}} = 1 \quad , x_A, x_B, x_C, x_D \geq 0$

$0.45\ x_{\mathrm{A}} + 0.5\ x_{\mathrm{B}} + 0.4\ x_{\mathrm{C}} + 100\ x_{\mathrm{D}} \geq 0.45$
$3.25 \leq 4x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}} + 0.6\ x_{\mathrm{C}} \leq 5.5$

$Max\ Z = (450-21-5)\ x_A + (450-25-5)\ x_B + (450-15-5)\ x_C + (450-8)\ x_D = 424\ x_A + 420\ x_B + 430\ x_C + 442\ x_D$

روش حل سیمپلکس دو مرحله ای:

$\mathrm{Max\ Z} = 424\ x_A + 420\ x_B + 430\ x_C + 442\ x_D$

$\mathrm{Min\ W} = \mathrm{R_1} + \mathrm{R_2} + \mathrm{R_3} \quad \rightarrow \quad Max - W + \mathrm{R_1} + \mathrm{R_2} + \mathrm{R_3} = 0$

$4x_A + x_B + 0.6\,x_C \leq 5.5$ $\quad$ $4x_A + x_B + 0.6\,x_C + s_1 = 5.5$

$x_A + x_B + x_C + x_D = 1$ $\quad$ $x_A + x_B + x_C + x_D + R_1 = 1$

$0.45\,x_A + 0.5\,x_B + 0.4\,x_C + 100\,x_D \geq 0.45$

$0.45\,x_A + 0.5\,x_B + 0.4\,x_C + 100\,x_D - s_2 + R_2 = 0.45$

$4x_A + x_B + 0.6\,x_C \geq 3.25$ $\quad$ $4x_A + x_B + 0.6\,x_C - s_3 + R_3 = 3.25$

	W	x_A	x_B	x_C	x_D	s_1	s_2	s_3	R_1	R_2	R_3	RHS
W	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
s_1	0	4	1	0.6	0	1	0	0	0	0	0	5.5
R_1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1
R_2	0	0.45	0.5	0.4	100	0	-1	0	0	1	0	0.45
R_3	0	4	1	0.6	0	0	0	-1	0	0	1	3.25
W	-1	-5.45	-2.5	-2	-101	0	1	1	0	0	0	-4.7
s_1	0	4	1	0.6	0	1	0	0	0	0	0	5.5
R_1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1
R_2	0	0.45	0.5	0.4	100	0	-1	0	0	1	0	0.45
R_3	0	4	1	0.6	0	0	0	-1	0	0	1	3.25
W	-1	-4.9955	-1.995	-1.596	0	0	-0.01	1	0	1.01	0	-4.2455
s_1	0	4	1	0.6	0	1	0	0	0	0	0	5.5
R_1	0	0.9955	0.995	0.996	0	0	0.01	0	1	0.99	0	0.9955
x_D	0	0.0045	0.005	0.004	1	0	-0.01	0	0	0.01	0	0.0045
R_3	0	4	1	0.6	0	0	0	-1	0	0	1	3.25
W	-1	0	-0.7461	-0.8467	0	0	-0.01	-0.2489	0	1.01	1.2489	-0.1867
s_1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	-1	2.25
R_1	0	0	0.7461	0.8467	0	0	0.01	0.2489	1	0.99	-0.2489	0.1867
x_D	0	0	0.0039	0.0033	1	0	-0.01	0.0011	0	0.01	-0.0011	0.0008
x_A	0	1	0.25	0.15	0	0	0	-0.25	0	0	0.25	0.8125
W	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	0
s_1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	-1	2.25
x_C	0	0	0.8812	1	0	0	0.0118	0.294	1.1811	1.1692	-0.294	0.2205
x_D	0	0	0.001	0	1	0	-0.01	0.0001	-0.0039	0.0061	-0.0001	0.0001
x_A	0	1	0.1178	0	0	0	-0.0018	-0.2941	-0.1772	-0.1754	0.2941	0.7794

$$\text{Max } Z - 424\,x_A - 420\,x_B - 430\,x_C - 442\,x_D = 0$$

	Z	x_A	x_B	x_C	x_D	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	1	-240	-420	-430	-442	0	0	0	0
s_1	0	0	0	0	0	1	0	-1	2.25
x_C	0	0	0.8812	1	0	0	0.0118	0.294	0.2205
x_D	0	0	0.001	0	1	0	-0.01	0.0001	0.0001
x_A	0	1	0.1178	0	0	0	-0.0018	-0.2941	0.7794
Z	1	0	-12.37	0	0	0	0.222	55.88	281.915
s_1	0	0	0	0	0	1	0	-1	2.25
x_C	0	0	0.8812	1	0	0	0.0118	0.294	0.2205
x_D	0	0	0.001	0	1	0	-0.01	0.0001	0.0001
x_A	0	1	0.1178	0	0	0	-0.0018	-0.2941	0.7794
Z	1	12370	0	0	12370	0	-123.5	57.117	283.152
s_1	0	0	0	0	0	1	0	-1	2.25
x_C	0	-881.2	0	1	-881	0	8.824	0.206	0.1324
x_B	0	1000	1	0	1000	0	-10	0.1	0.1
x_A	0	-116.8	0	0	-118	0	1.1762	-0.306	0.7676
Z	1	36.8	0	14	39.6	0	0	60	423
s_1	0	0	0	0	0	1	0	-1	2.25
s_2	0	-99.86	0	0.1133	-99.84	0	1	0.0233	0.015
x_B	0	1.36	1	1.1333	1.587	0	0	0.3335	0.25
x_A	0	0.66	0	-0.1333	-0.567	0	0	-0.3335	0.75

$x_B = 0.25$,$x_A = 0.75$, $s_1 = 2.25$,$s_2 = 0.015$, $Z = 423$

$x_C = x_D = s_3 = 0$

(11

$x_{1j} = j$ طول مصرف توپ 10 دسی متری در سفارش

$x_{2j} = j$ طول مصرف توپ 20 دسی متری در سفارش

$c_{ij} = j$ ضایعات (عرض) مصرف توپ i در سفارش

$c_{11} = c_{21} = 0$, $c_{12} = 3$, $c_{13} = 1$, $c_{22} = 6$, $c_{23} = 2$

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}\, x_{ij} = 3x_{12} + x_{13} + 6x_{22} + 2x_{23}$$

$$x_{12} + x_{22} = 30000$$

$$x_{13} + x_{23} = 20000 \quad \Rightarrow \quad Min\ Z = 11000 + 3x_{22} + x_{23}$$

روشن است که برای کمینه کردن مقدار Z باید x_{22} و x_{23} برابر صفر باشند و در نتیجه:

$$MinZ = 11000\ \ , x_{12} = 30000\ \ , x_{13} = 20000$$

این روشن را از راه سیمپلکس روش دو مرحله ای هم می توان نشان داد. با توجه به اینکه تنها دو محدودیت داریم تنها دو متغیر اساسی خواهیم داشت. جدول های پایانی مراحل اول و دوم مانند زیر اند:

	W	x_{12}	x_{13}	x_{22}	x_{23}	R_1	R_2	RHS
W	-1	0	0	0	1	1	1	0
x_{12}	0	1	0	1	0	1	0	30000
x_{13}	0	0	1	0	1	0	1	20000

	Z	x_{12}	x_{13}	x_{22}	x_{23}	RHS
Z	-1	0	0	3	1	-11000
x_{12}	0	1	0	1	0	30000
x_{13}	0	0	1	0	1	20000

فصل ششم

مسائل همزادی و روش حل سیمپلکس ثانویه

فصل چهارم کتاب بردلی، هکس و مگنتی

(a (1

$\text{Min Z} = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \quad \rightarrow \quad \text{Min Z} = 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4$

$-x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 \geq -3 \quad \rightarrow \quad -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 \geq -3$

$x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq -5 \quad \rightarrow \quad x_2 + 3x_3 - 4x_4 \geq -5$

$2x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 4x_4 = 2 \quad \rightarrow \quad 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 + 4x_4 = 2$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \ , x_4 \leq 0 \quad \rightarrow \quad x_4 \geq 0$

$\text{Max Y} = -3y_1 - 5y_2 + 2y_3$

$-y_1 + 2y_3 \leq 3$

$2y_1 + y_2 - 3y_3 \leq 2$

$-3y_1 + 3y_2 - 7y_3 \leq -3$

$4y_1 - 4y_2 + 4y_3 \leq -4$

$y_1, y_2 \geq 0 \ , y_3$ آزاد در علامت

(b

$\text{Max Z} = 3x_1 + 2x_2 \quad \rightarrow \quad \text{Min Y} = 3y_1 + 4y_2 + 2y_3$

$x_1 + 3x_2 \leq 3 \quad \rightarrow \quad y_1 + 6y_2 + y_3 \geq 3$

$6x_1 - x_2 = 4 \quad \rightarrow \quad 3y_1 - y_2 + 2y_3 \geq 2$

$x_1 + 2x_2 \leq 2 \quad y_1, y_3 \geq 0 \ , y_2$ آزاد در علامت

$x_1, x_2 \geq 0$

(2

$\text{Max Z} = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 5$

$2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4$

$x_1 - x_3 + x_4 \geq 1 \quad \rightarrow -x_1 + x_3 - x_4 \leq -1$

$x_1, x_3 \geq 0 \quad , \quad x_2, x_4$ آزاد در علامت

$$\text{Max Z} = 2x_1 + x'_2 - x''_2 + 3x_3 + x'_4 - x''_4$$
$$x_1 + x'_2 - x''_2 + x_3 + x'_4 - x''_4 \le 5$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le -4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge -4 \end{cases} \quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le -4 \rightarrow 2x_1 - x'_2 + x''_2 + 3x_3 \le -4$$
$$\rightarrow -2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 4 \rightarrow -2x_1 + x'_2 - x''_2 + 3x_3 \le 4$$
$$-x_1 + x_3 - x'_4 + x''_4 \le -1$$

$$y_1 + 2y'_2 - 2y''_2 - y_3 \ge 2$$
$$\begin{cases} y_1 - y'_2 + y''_2 \ge 1 \\ -y_1 + y'_2 - y''_2 \ge -1 \end{cases} \rightarrow y_1 - y'_2 + y''_2 \le 1 \rightarrow y_1 - y'_2 + y''_2 = 1$$

$$y_1 + 3y'_2 - 3y''_2 + y_3 \ge 3$$

$$\begin{cases} y_1 - y_3 \ge 1 \\ -y_1 + y_3 \ge -1 \end{cases} \rightarrow y_1 - y_3 \le 1 \rightarrow y_1 - y_3 = 1$$

$$\text{Min Y} = 5y_1 - 4y_2 - y_3$$
$$y_1 + 2y_2 - y_3 \ge 2$$
$$y_1 - y_2 = 1$$
$$y_1 + 3y_2 + y_3 \ge 3$$
$$y_1 - y_3 = 1$$
$$y_1, y_3 \ge 0 \quad , \quad y_2$$ آزاد در علامت

(3

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
Z	1	0	20/3	10/3	0	44/15	4/15	56/3
x_1	0	1	7/3	5/3	0	4/15	-1/15	4/3
x_4	0	0	-1/30	1/30	1	-1/150	2/75	1/15

$$y_1^* = 44/15 \quad , y_2^* = 4/15 \quad , \text{Y}^* = \text{Z}^* = 56/3$$

این مطلب را با نوشتن مسأله ثانویه و بهره گیری از رابطه کمکی مکمل $x.l = 0$ می توان به روشنی دید:

$$\text{Max Z} = 12x_1 + 20x_2 + 18x_3 + 40x_4$$

$$4x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 10x_4 + x_5 \le 6$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 40x_4 + x_6 \le 4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0$$

$$x_1^* = 4/3 \quad , x_4^* = 1/15 \quad , \text{Z}^* = 12 \times 4/3 + 40 \times 1/15 = 56/3$$

$\text{Min Y} = 6y_1 + 4y_2$

$4y_1 + y_2 \geq 12$
$9y_1 + y_2 \geq 20$
$7y_1 + 3y_2 \geq 18$
$10y_1 + 4y_2 \geq 40$
$y_1, y_2 \geq 0$

چون x_1 و x_4 مقدار دارند با توجه به رابطه کمکی مکمل، $l_1 = l_4 = 0$. یعنی جواب بهینه مسأله ثانویه محل تقاطع محدودیت های اول و چهارم است:

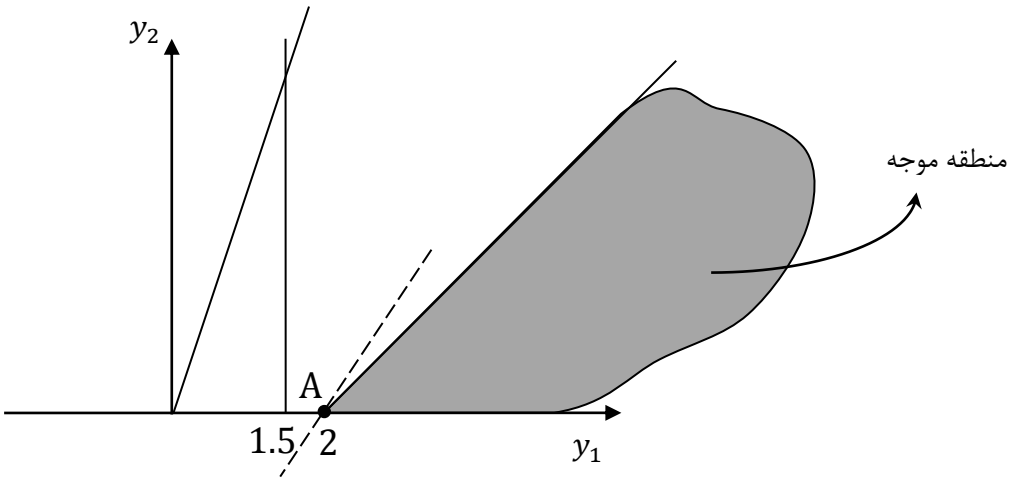
$$\begin{cases} 4y_1 + y_2 = 12 \\ 10y_1 + 4y_2 = 40 \end{cases} \rightarrow y_1 = 44/15 \rightarrow y_2 = 4/15$$

$\text{Y}^* = 6 \times 44/15 + 4 \times 4/15 = 56/3$

(5

$\text{Max Z} = -4x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 8x_5 \rightarrow \text{Min Y} = 3y_1 - 2y_2$

$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \rightarrow 3y_1 - y_2 \geq 0 \ , y_1 + y_2 \geq -4 \ , 2y_1 \geq 3$
$-x_1 + x_2 - x_4 + x_5 \leq -2 \rightarrow y_1 - y_2 \geq 2 \ , y_2 \geq -8$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \rightarrow y_1$ آزاد در علامت $, y_2 \geq 0$



$\text{y}_1^* = 2 \ , \text{y}_2^* = 0 \ , \ \text{Y}^* = 3 \times 2 = 6$

از روی رابطه $x.l = 0$ ؛ با توجه به مقدارهای بهینه y_1 و y_2 می توان مقادیر l را مانند زیر بدست آورد:

$3 \times 2 - l_1 = 0 \rightarrow l_1 = 6 \rightarrow x_1 = 0$
$2 - l_2 = -4 \rightarrow l_2 = 6 \rightarrow x_2 = 0$
$2 \times 2 - l_3 = 3 \rightarrow l_3 = 1 \rightarrow x_3 = 0$
$0 - l_5 = -8 \rightarrow l_5 = 8 \rightarrow x_5 = 0$

چون نقطه بهینه A روی محدودیت چهارم است پس $l_4 = 0$. بنابراین متغیر اولیه x_4 در جواب پایانی مقدار دارد و تنها متغیرهای اساسی است. پس با توجه به جواب بهینه $Z^* = Y^* = 6$ داریم:

$$\text{Max Z} = 2x_4 = 6 \;\rightarrow\; x_4 = 3$$

(6

$$\text{Min Z} = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n \geq b_3$$
$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \cdots + a_{4n}x_n \geq b_4$$
$$a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + \cdots + a_{5n}x_n \geq b_5$$
$$a_{61}x_1 + a_{62}x_2 + \cdots + a_{6n}x_n \geq b_6$$

$$x_i \geq 0 \quad , i = 1,2, \dots, n$$

$$\text{Max Y} = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 + b_4y_4 + b_5y_5 + b_6y_6$$

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + a_{41}y_4 + a_{51}y_5 + a_{61}y_6 \leq c_1$$
$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + a_{42}y_4 + a_{52}y_5 + a_{62}y_6 \leq c_2$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + a_{3n}y_3 + a_{4n}y_4 + a_{5n}y_5 + a_{6n}y_6 \leq c_n$$

$$y_i \geq 0 \quad , i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

در مسأله اولیه می خواهیم با صرف حداقل هزینه، حداقل احتیاجات روزانه 6 نوع ماده غذایی را فراهم کنیم. برای تفسیر اقتصادی مسأله ثانویه و اندازه گیری ارزش اقتصادی منابع از قیمت های سایه، y_i ها بهره می گیریم. چون 6 محدودیت داریم پس 6 قیمت سایه داریم. قیمت سایه هر محدودیت نشان دهنده میزان بهبود مقدار بهینه تابع هدف، یعنی کاهش هزینه تهیه داروها برای داروساز، به ازای کاهش عدد سمت راست، یعنی میزان منابع داروی لازم، b_i ها به میزان یک واحد است. در مسأله ثانویه، هدف بیشینه کردن این قیمت های سایه است. یعنی با تأمین حداقل منابع (اقلام) داروی لازم و صرف حداقل هزینه برای تهیه آنها، بیشترین مقدار مواد غذایی را فراهم آوریم.

(14

در روش سیمپلکس ثانویه، شرط بهینگی در شروع و در همه تکرارها با نامنفی ماندن مقادیر سطر صفر برقرار می ماند. اما شرط موجه بودن تنها در جواب بهینه پایانی که تمام اعداد سمت راست نامنفی هستند برقرار می شود. در جدول ارائه شده متغیرهای کمکی وجود ندارد، اما با توجه به اینکه هزینه های کاهنده متغیرهای غیر اساسی (شامل متغیرهای کمکی) شرایط بهینگی مسأله اولیه را برهم نمی زند نیازی به وجود آنها در روش سیمپلکس ثانویه نیست.

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
Z	1	0	0	0	1	4	2	40
x_1	0	1	0	0	2	3	-2	14
x_2	0	0	1	0	1	-2	-2	6
x_3	0	0	0	1	-1	-2	0	-10
Z	1	0	0	1	0	2	2	30
x_1	0	1	0	2	0	-1	-2	-6
x_2	0	0	1	1	0	-4	-2	-4
x_4	0	0	0	-1	1	2	0	10
Z	1	1	0	3	0	1	0	24
x_6	0	-0.5	0	-1	0	0.5	1	3
x_2	0	-1	1	-1	0	-3	0	2
x_4	0	0	0	-1	1	2	0	10

$$Z^* = 24 \quad , x_6^* = 3 \quad , x_2^* = 2 \quad , x_4^* = 10, \quad x_1^* = x_3^* = x_5^* = 0$$

(16

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
Z	1	0	0	1	5	6	5
x_1	0	1	0	-1	2	-2	-3
x_2	0	0	1	3	-4	8	7
Z	1	1	0	0	7	4	2
x_3	0	-1	0	1	-2	2	3
x_2	0	3	1	0	2	2	-2

چون همه اعداد سطر لولا نامنفی اند، به دیگر سخن متغیر ورودی نداریم، مسأله منطقه موجه ندارد.

(17

$$\text{Min Z} = 2x_1 + x_2 \quad \rightarrow \quad \text{Max Y} = 16y_1 + 12y_2$$
$$-4x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 16 \quad \rightarrow \quad -4y_1 + y_2 \leq 2$$
$$x_1 + 6x_2 + 3x_3 \geq 12 \quad \rightarrow \quad 3y_1 + 6y_2 \leq 1 \ , \ -y_1 + 3y_2 \leq 0$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad \rightarrow \quad y_1, \ y_2 \geq 0$$

$$\text{Max} - \text{Z} + 2x_1 + x_2 = 0$$
$$4x_1 - 3x_2 + x_3 \leq -16 \quad \rightarrow \quad 4x_1 - 3x_2 + x_3 + s_1 = -16$$
$$-x_1 - 6x_2 - 3x_3 \leq -12 \quad \rightarrow \quad -x_1 - 6x_2 - 3x_3 + s_2 = -12$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
Z	-1	2	1	0	0	0	0
s_1	0	4	-3	1	1	0	-16
s_2	0	-1	-6	-3	0	1	-12
Z	-1	10/3	0	1/3	1/3	0	-16/3
x_2	0	-4/3	1	-1/3	-1/3	0	16/3
s_2	0	-9	0	-5	-2	1	20

$$\text{Z}^* = 5.33 \ , x_2^* = 5.33 \ , \text{s}_2^* = 20, \ x_1^* = x_3^* = \text{s}_1^* = 0$$
$$y_1^* = 0.33 \quad , y_2^* = 0 \quad , \text{Y}^* = 5.33$$

(18

در فرم استاندارد، مقادیر سمت راست و اعداد سطر صفر نامنفی هستند.

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
Z	1	0	0	$\theta - 3$	$\theta - 4$	6	20
x_1	0	1	0	-1	2	-3	$\theta - 2$
x_2	0	0	1	1	0	1	1

بنابراین باید : $\theta \geq 4$

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
Z	1	0	0	-3	-4	6	20
x_1	0	1	0	-1	2	-3	-2
x_2	0	0	1	1	0	1	1

چنانکه از جدول دیده می شود، نه اعداد سطر صفر، نا منفی اند و نه اعداد سمت راست یعنی نه می توان از روش سیمپلکس استفاده کرد و نه از روش سیمپلکس ثانویه. بنابر این از روش سیمپلکس تعمیم یافته استفاده می کنیم:

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
Z	1	0	0	-3	-4	6	20
x_1	0	1	0	-1	2	-3	-2
x_2	0	0	1	1	0	1	1
Z	1	-3	0	0	-10	15	26
x_3	0	-1	0	1	-2	3	2
x_2	0	1	1	0	2	-2	-1
Z	1	4.5	7.5	0	5	0	18.5
x_3	0	0.5	1.5	1	1	0	0.5
x_5	0	-0.5	-0.5	0	-1	1	0.5

$$Z^* = 18.5 \ , x_3^* = x_5^* = 0.5 \ , \ x_1^* = x_2^* = x_4^* = 0$$

فصل یازدهم

سیمپلکس اولیه- ثانویه و سیمپلکس تجدید نظر شده

7)

$\text{Max Z} = x_1 - 3x_2 \quad \rightarrow \quad \text{Max Z} - x_1 + 3x_2 = 0$

$x_1 - x_2 \leq 2 \quad \rightarrow \quad x_1 - x_2 + s_1 = 2$
$x_1 + x_2 \geq 4 \quad \rightarrow \quad -x_1 - x_2 + s_2 = -4$
$2x_1 - 2x_2 \geq 3 \quad \rightarrow \quad -2x_1 + 2x_2 + s_3 = -3$
$x_1, x_2 \geq 0$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	1	-1	3	0	0	0	0
s_1	0	1	-1	1	0	0	2
s_2	0	-1	-1	0	1	0	-4
s_3	0	-2	2	0	0	1	-3
Z	1	0	2	1	0	0	2
x_1	0	1	-1	1	0	0	2
s_2	0	0	-2	1	1	0	-2
s_3	0	0	0	2	0	1	1
Z	1	0	0	2	1	0	0
x_1	0	1	0	0.5	-0.5	0	3
s_2	0	0	1	-0.5	-0.5	0	1
s_3	0	0	0	2	0	1	1

$\text{Z}^* = 0 \ , x_1^* = 3 \ , x_2^* = 1 \ , \text{s}_3^* = 1, \ s_1^* = \text{s}_2^* = 0$

8)

$\text{Max Z} = 6x_1 + 4x_2 \rightarrow \text{Max Z} - 6x_1 - 4x_2 = 0$
$x_1 + x_2 \leq 10 \rightarrow x_1 + x_2 + s_1 = 10$
$2x_1 + x_2 \geq 4 \rightarrow -2x_1 - x_2 + s_2 = -4$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	1	-6	-4	0	0	0

$x_1, x_2 \geq 0$

s_1	0	1	1	1	0	10
s_2	0	-2	-1	0	1	-4
Z	1	0	2	6	0	60
x_1	0	1	1	1	0	10
s_2	0	0	1	2	1	16

$$Z^* = 60 \ , x_1^* = 10 \ , s_2^* = 16 \ , s_1^* = x_2^* = 0$$

9)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ \rightarrow \text{Max } Z - 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \quad \rightarrow \quad 2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 2$$
$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8 \ \rightarrow \ -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 + s_2 = -8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
Z	1	-3	-2	-3	0	0	0
s_1	0	2	1	1	1	0	2
s_2	0	-3	-4	-2	0	1	-8
Z	1	0	-0.5	-1.5	1.5	0	3
x_1	0	1	0.5	0.5	0.5	0	1
s_2	0	0	-2.5	-0.5	1.5	1	-5
Z	1	3	1	0	3	0	6
x_3	0	2	1	1	1	0	2
s_2	0	1	-2	0	2	1	-4
Z	1	3.5	0	0	4	0.5	4
x_3	0	2.5	0	1	2	0.5	0
x_2	0	-0.5	1	0	-1	-0.5	2

$$Z^* = 4 \ , x_2^* = 2 \ , x_1^* = x_3^* = s_1^* = s_2^* = 0$$

جدول زیر نشان می دهد می توان حل را با سیمپلکس ثانویه ای شروع کرد که در آن نیازی نیست اعداد سطر صفر مثبت باشند (البته عدد لولا باید منفی باشد) و متغیر ورودی متغیری است که دارای بزرگترین نسبت است ($x_3: -3/-2 = 1.5$)

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
Z	1	-3	-2	-3	0	0	0
s_1	0	2	1	1	1	0	2
s_2	0	-3	-4	-2	0	1	-8
Z	1	3	1	0	3	0	6
s_1	0	0.5	-1	0	1	0.5	-2
x_3	0	1.5	2	1	0	-0.5	4
Z	1	3.5	0	0	4	0.5	4
x_2	0	-0.5	1	0	-1	-0.5	2
x_3	0	2.5	0	1	2	0.5	0

(10

$\text{Max Z} = x_1 + x_2 \;\rightarrow\; \text{Max Z} - x_1 - x_2 = 0$

$x_1 + 2x_2 \leq 6 \;\rightarrow\; x_1 + 2x_2 + s_1 = 6$
$2x_1 + x_2 \geq 9 \;\rightarrow\; -2x_1 - x_2 + s_2 = -9$
$x_1, x_2 \geq 0$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	1	-1	-1	0	0	0
s_1	0	1	2	1	0	6
s_2	0	-2	-1	0	1	-9
Z	1	0	1	1	0	6
x_1	0	1	2	1	0	6
s_2	0	0	3	2	1	3

$\text{Z}^* = 6 \;, x_1^* = 6 \;, x_2^* = s_1^* = \text{s}_2^* = 0$

(11

$\text{Min Z} = -x_1 + x_2 \;\rightarrow \text{Max} - \text{Z} - x_1 + x_2 = 0$

$x_1 - 4x_2 \geq 5 \;\rightarrow\; -x_1 + 4x_2 + s_1 = -5$
$x_1 - 3x_2 \leq 1 \;\rightarrow\; x_1 - 3x_2 + s_2 = 1$
$2x_1 - 5x_2 \geq 1 \;\rightarrow\; -2x_1 + 5x_2 + s_3 = -1$
$x_1, x_2 \geq 0$

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	-1	-1	1	0	0	0	0
s_1	0	-1	4	1	0	0	-5

s_2	0	1	-3	0	1	0	1
s_3	0	-2	5	0	0	1	-1
Z	-1	0	-2	0	1	0	1
s_1	0	0	1	1	1	0	-4
x_1	0	1	-3	0	1	0	1
s_3	0	0	-1	0	2	1	1

در سطر اول (s_1) برای $4-$ ، همه اعداد سطر لولا مثبت هستند یعنی امکان سیمپلکس ثانویه وجود ندارد. برای عدد $2-$ در سطر صفر، تنها عدد مثبت ستون لولا 1 است که عدد سمت راست آن منفی است پس امکان سیمپلکس اولیه نیز وجود ندارد. پس مسأله جواب بهینه ندارد. توجه داریم که اگر بجای 1، صفر یا عددی منفی در ستون لولا داشتیم با حالت ویژه جواب بهینه نامحدود روبرو بودیم.

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	-1	-1	1	0	0	0	0
s_1	0	-1	4	1	0	0	-5
s_2	0	1	-3	0	1	0	1
s_3	0	-2	5	0	0	1	-1
Z	-1	0	-3	-1	0	0	5
x_1	0	1	-4	-1	0	0	5
s_2	0	0	1	1	1	0	-4
s_3	0	0	-3	-2	0	1	9

(12

$$\text{Max } Z = 2x_3 \;\rightarrow\; \text{Max } Z - 2x_3 = 0$$

$$-x_1 + 3x_2 - 7x_3 \geq 5 \;\rightarrow\; x_1 - 3x_2 + 7x_3 + s_1 = -5$$
$$-x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \;\rightarrow\; -x_1 + x_2 - x_3 + s_2 = 1$$
$$3x_1 + x_2 - 10x_3 \leq 8 \;\rightarrow\; 3x_1 + x_2 - 10x_3 + s_3 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

	Z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	1	0	0	-2	0	0	0	0
s_1	0	1	-3	7	1	0	0	-5
s_2	0	-1	1	-1	0	1	0	1
s_3	0	3	1	-10	0	0	1	8

در سطر اول (s_1) برای 5- ، تنها عدد منفی سطر لولا 3- است که عدد سطر صفر ستون لولا صفر است یعنی امکان سیمپلکس ثانویه وجود ندارد. برای عدد 2- در سطر صفر، تنها عدد مثبت ستون لولا 7 است که عدد سمت راست آن منفی است پس امکان سیمپلکس اولیه نیز وجود ندارد. پس مسأله جواب بهینه ندارد.

14) الف)

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 8x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 4 \quad \rightarrow \quad x_1 + x_2 + s_1 = 4$$
$$2x_1 + x_2 \le 3 \quad \rightarrow \quad 2x_1 + x_2 + s_2 = 3$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0$$

$$X_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}, X_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_N = [4 \quad 8], \ C_B = [0 \quad 0]$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \ C_B B^{-1} N - C_N = [-4 \quad -8] \quad \rightarrow \text{ متغیر ورودی } x_2$$
$$X_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = B^{-1}\bar{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \ , \ a_2 = B^{-1}\overline{a_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\min\left\{\frac{4}{1}, \frac{3}{1}\right\} = 3 \quad \rightarrow \text{ متغیر خروجی } s_2$$

$$X_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, X_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ s_2 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_N = [4 \quad 0], \ C_B = [0 \quad 8]$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ \rightarrow \ C_B B^{-1} N - C_N = [0 \quad 8]\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - [4 \quad 0]$$
$$= [12 \quad 8] \ \rightarrow \text{ جواب بهینه } \Rightarrow X_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \ Z^* = C_B X_B = [0 \quad 8]\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 24$$

ب)

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2$$
$$x_1 + 2x_2 \le 10 \quad \rightarrow \quad x_1 + 2x_2 + s_1 = 10$$
$$3x_1 + x_2 \le 15 \quad \rightarrow \ 3x_1 + x_2 + s_2 = 15$$
$$x_2 \le 4 \quad \rightarrow \quad x_2 + s_3 = 4$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \ge 0$$

$$X_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}, \quad X_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_N = [2 \quad 3],\ C_B = [0 \quad 0 \quad 0]$

$C_B B^{-1} N - C_N = [-2 \quad -3] \quad \rightarrow$ متغیر ورودی x_2

$X_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = B^{-1}\bar{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 4 \end{bmatrix},\ a_2 = B^{-1}\overline{a_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\min\left\{\frac{10}{2}, \frac{15}{1}, \frac{4}{1}\right\} = 4 \quad \rightarrow$ متغیر خروجی s_3

$X_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ x_2 \end{bmatrix},\quad X_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ s_3 \end{bmatrix},\quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$C_N = [2 \quad 0],\ C_B = [0 \quad 0 \quad 3]\ , B^{-1} = E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$C_B B^{-1} N - C_N = [0 \quad 0 \quad 3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - [2 \quad 0] = [-2 \quad 3]$

$\rightarrow$ متغیر ورودی x_1 , $X_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix}$

$a_1 = B^{-1}\overline{a_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} : \min\left\{\frac{2}{1}, \frac{11}{3}, \frac{4}{0}\right\} = 2 \rightarrow$ متغیر خروجی s_1

$X_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ s_2 \\ x_2 \end{bmatrix},\quad X_N = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_3 \end{bmatrix},\quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$C_N = [0 \quad 0],\ C_B = [2 \quad 0 \quad 3]\ , E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$C_B B^{-1} N - C_N = [2 \quad 0 \quad 3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - [0 \quad 0] = [2 \quad -1]$

$\rightarrow$ متغیر ورودی s_3 , $X_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ s_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$a_{s_3} = B^{-1}\overline{a_{s_3}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\min\left\{\frac{2}{-2}, \frac{5}{5}, \frac{4}{1}\right\} = 1 \rightarrow \text{متغیر خروجی } s_2$$

$$X_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ s_3 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad X_N = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_N = [0 \quad 0], \quad C_B = [2 \quad 0 \quad 3] \quad , E = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & -0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & -0.2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.4 & 0 \\ -0.6 & 0.2 & 1 \\ 0.6 & -0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_B B^{-1} N - C_N = [2 \quad 0 \quad 3]\begin{bmatrix} -0.2 & 0.4 & 0 \\ -0.6 & 0.2 & 1 \\ 0.6 & -0.2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - [0 \quad 0] = [1.4 \quad 0.2]$$

$$\rightarrow \text{ جواب بهینه } \Rightarrow X_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ s_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}\bar{b} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.4 & 0 \\ -0.6 & 0.2 & 1 \\ 0.6 & -0.2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Z^* = C_B X_B = [2 \quad 0 \quad 3]\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 17$$

ج)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + x_2 + 3x_3$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \quad \rightarrow \quad 2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 2$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \quad \rightarrow \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_2 = 5$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \quad \rightarrow \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 + s_3 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

$$X_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}, \quad X_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_N = [3 \quad 1 \quad 3], \quad C_B = [0 \quad 0 \quad 0]$$

$$C_B B^{-1} N - C_N = [-3 \quad -1 \quad -3] \quad \rightarrow \quad \text{متغیر ورودی } x_1$$

$$X_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = B^{-1}\bar{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad , \quad a_1 = B^{-1}\bar{a_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\min\left\{\frac{2}{2}, \frac{5}{1}, \frac{6}{2}\right\} = 1 \quad \rightarrow \text{متغیر خروجی } s_1$$

$$X_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}, \quad X_N = \begin{bmatrix} s_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_N = [0 \quad 1 \quad 3] \quad , \quad C_B = [3 \quad 0 \quad 0] \quad , B^{-1} = \; E = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_B B^{-1} N - C_N = [3 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} - [0 \quad 1 \quad 3] =$$

$$[1.5 \quad 0.5 \quad -1.5] \rightarrow \text{متغیر ورودی } x_3$$

$$X_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = B^{-1}\bar{b} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$a_3 = B^{-1}\overline{a_3} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2.5 \\ 0 \end{bmatrix} : \min\left\{\frac{1}{0.5}, \frac{4}{2.5}\right\} = \frac{8}{5}$$

$$\rightarrow \text{متغیر خروجی } s_2$$

$$X_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ s_3 \end{bmatrix}, \quad X_N = \begin{bmatrix} s_1 \\ x_2 \\ s_2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_N = [0 \quad 1 \quad 0] \quad , \quad C_B = [3 \quad 3 \quad 0], \; E = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & 0.4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_B B^{-1} N - C_N = [3 \quad 3 \quad 0] \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & 0.4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} - [0 \quad 1 \quad 0]$$

$$= [1.2 \quad 1.4 \quad 0.6] \rightarrow \text{جواب بهینه}$$

$$\Rightarrow X_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ s_3 \end{bmatrix} = B^{-1}\bar{b} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & 0.4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1.6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$Z^* = C_B X_B = [3 \quad 3 \quad 0] \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1.6 \\ 4 \end{bmatrix} = 5.4$$

د)

$$\text{Max } Z = 20x_1 + 25x_2 - 5x_3 + 30x_4$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 45 \quad \rightarrow \quad 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + s_1 = 45$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \leq 30 \quad \rightarrow \quad x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 + s_2 = 30$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2 \geq 0$$

$$X_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}, \quad X_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad , N = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \quad , B = B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_N = [20 \quad 25 \quad -5 \quad 30] \ , \quad C_B = [0 \quad 0]$$

$$C_B B^{-1} N - C_N = [-20 \quad -25 \quad 5 \quad -30] \rightarrow \text{ متغیر ورودی } x_4$$

$$X_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = B^{-1}\bar{b} = \begin{bmatrix} 45 \\ 30 \end{bmatrix} \ , \ a_4 = B^{-1}\overline{a_4} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\min\left\{\frac{45}{3}, \frac{30}{3}\right\} = 10 \quad \rightarrow \text{ متغیر خروجی } s_2$$

$$X_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad X_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ s_2 \end{bmatrix} \quad , N = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad , B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C_N = [20 \quad 25 \quad -5 \quad 0] \ , \quad C_B = [0 \quad 30] \ , B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$C_B B^{-1} N - C_N = [0 \quad 30] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} - [20 \quad 25 \quad -5 \quad 0]$$

$$= [-10 \quad -5 \quad -25 \quad 10] \rightarrow \text{ متغیر ورودی } x_3$$

$$X_B = \begin{bmatrix} s_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 45 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$a_3 = B^{-1}\overline{a_3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{ متغیر خروجی } s_1$$

$$X_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad X_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \quad , N = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C_N = [20 \quad 25 \quad 0 \quad 0] \ , \quad C_B = [-5 \quad 30] \ , B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/12 \end{bmatrix}$$

$$C_B B^{-1} N - C_N = [-5 \quad 30] \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} - [20 \quad 25 \quad 0 \quad 0]$$

$$= [2.5 \quad 1.25 \quad 6.25 \quad 3.75] \quad \rightarrow \text{جواب بهینه}$$

$$\Rightarrow X_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}\bar{b} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 45 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.75 \\ 13.75 \end{bmatrix}$$

$$Z^* = C_B X_B = [-5 \quad 30] \begin{bmatrix} 3.75 \\ 13.75 \end{bmatrix} = 393.75$$

فصل دوازدهم

فرمول بندی مسائل برنامه ریزی خطی عدد صحیح

کتاب حمدی طه

1)

$$\text{Max Z} = 20x_1 + 10x_2 + 10x_3 \;\rightarrow\; \text{Max Z} - 20x_1 - 10x_2 - 10x_3 + \text{MR} = 0$$

$$2x_1 + 20x_2 + 4x_3 \le 15 \;\rightarrow\; 2x_1 + 20x_2 + 4x_3 + s = 15$$
$$6x_1 + 20x_2 + 4x_3 = 20 \;\rightarrow\; 6x_1 + 20x_2 + 4x_3 + R = 20$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0 \text{ , عدد صحیح}$$

	Z	x_1	x_2	x_3	s	R	RHS
Z	1	-20	-10	-10	0	M	0
s	0	2	20	4	1	0	15
R	0	6	20	4	0	1	20
Z	1	-20-6M	-10-20M	-10-4M	0	0	-20M
s	0	2	20	4	1	0	15
R	0	6	20	4	0	1	20
Z	1	-19-4M	0	-8	M+0.5	0	-5M+7.5
x_2	0	0.1	1	0.2	0.05	0	0.75
R	0	4	0	0	-1	1	5
Z	1	0	0	-8	0.75M-0.6875	M+4.75	31.25
x_2	0	0	1	0.2	0.075	-0.025	0.625
x_1	0	1	0	0	-0.25	0.25	1.25
Z	1	0	40	0	0.75M+2.3125	M+3.75	56.25
x_3	0	0	5	1	0.375	-0.125	3.125
x_1	0	1	0	0	-0.25	0.25	1.25

جواب گرد شده $x_1 = 1 , x_3 = 3$ است که در محدودیت اول صدق می کند اما در محدودیت دوم صدق نمی کند:

$2 \times 1 + 4 \times 3 = 14 \leq 15$
$6 \times 1 + 4 \times 3 = 18 \neq 20$

بهترین روش برای حل چنین مسائلی روش شاخه و کران است.

5)

الف-

$$x_1 + x_2 \leq 3 \ , \begin{cases} x_1 \geq 2 \\ \text{یا} \\ x_1 \leq 1 \ , x_2 \leq 2 \end{cases}$$

ب-

$$x_1 + x_2 \leq 3 \ , \begin{cases} x_1 \geq 1 \\ \text{یا} \\ x_2 \geq 1 \end{cases}$$

ج-

$$2 \leq x_1 + x_2 \leq 3 \text{ یا } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ \text{و} \\ x_1 \leq 1 \end{cases}$$

$Max\ Z = 2x_1 + 3x_2$

ناحیه شکل(الف) از دو ناحیه تشکیل شده است که در ناحیه سمت راست نقطه بیشینه $x_1 = 2 \ , x_2 =$ 1 و ناحیه سمت چپ نقطه بیشینه $x_1 = 1 \ , x_2 = 2$ است که روشن است جواب بهینه برابر است با:

$\text{Max Z} = 2 \times 1 + 3 \times 2 = 8$

6)

$x_1 + x_2 \leq 4 \qquad x_1 + x_2 \geq 3 - My_1 \qquad x_1 + x_2 \geq 3 - My_2$

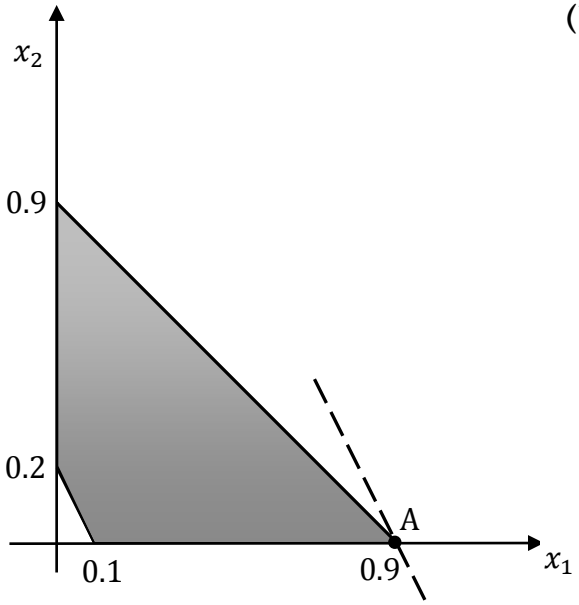
$x_1 \leq 1 + My_1 \qquad x_2 \leq 2 + My_2 \qquad x_1 \leq 2 + My_2$
$x_1 + x_2 \geq 3 - My_3 \qquad x_2 \leq 1 - My_3 \qquad x_2 \leq 2 + My_4$
$x_1 \leq 1 + My_4 \qquad x_1 \geq 1 - My_5 \qquad x_1 \leq 2 + My_5 \qquad x_2 \leq 2 + My_5$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = 1$$

(14

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2$$

$$10x_1 + 10x_2 \leq 9$$
$$10x_1 + 5x_2 \geq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ , عدد صحیح}$$



از روی شکل واضح است که هیچ نقطه ای با مختصات عدد صحیح در منطقه موجه نیست. این مطلب را به راحتی به روش شاخه و کران هم می توان نشان داد:

$$\text{A} \begin{cases} x_1 = 0.9 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow Z = 1.8$$

x_2 صحیح است پس x_1 متغیر شاخه است پس دو حالت $x_1 \leq 0$ و $x_1 \geq 1$ باید بررسی شود اما از روی شکل روشن است که برای هر دو حالت منطقه موجه وجود ندارد یعنی نمی توان به جواب شدنی عدد صحیح رسید.

(18

$x_i =$ تعداد قلم i در محموله کشتی $\quad i = 1,2,3,4,5$

$$Max\ Z = 4x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5$$

$$x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 \leq 109$$
$$5x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 7x_5 \leq 112$$
$$x_i \geq 0 \text{ , عدد صحیح}$$

(21

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{طرح } i \text{ در دوره سه ساله اجرا شود} \\ 0 & \text{... نشود} \end{cases}$$

$$Max\ Z = 20x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 15x_4 + 30x_5$$

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8x_5 \leq 25$$
$$x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 6x_5 \leq 25$$
$$8x_1 + 10x_2 + x_3 + x_4 + 10x_5 \leq 25$$

(24

$x_i =$ i میزان تولید ماشین

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{از ماشین } i \text{ استفاده شود} \\ 0 & \text{... نشود} \end{cases}$$

$$Min\ Z = 10x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 100y_1 + 300y_2 + 200y_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2000$$

$$x_1 \leq 600 \qquad x_2 \leq 800 \qquad x_3 \leq 1200 \qquad x_i \leq 1200y_i$$

$x_i \geq 0$, عدد صحیح

(25

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{حفاری در محل } i \text{ برای رسیدن به هدف } j \text{ انجام شود} \\ 0 & \text{... نشود} \end{cases}$$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{حفاری در محل } i \text{ انجام شود} \\ 0 & \text{... نشود} \end{cases}$$

$$Min\ Z = 2x_{11} + x_{12} + 8x_{13} + 5x_{14} + 5x_1 + 4x_{21} + 6x_{22} + 3x_{23} + x_{24} + 6x_2$$

$$x_{11} + x_{21} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} = 1$$
$$x_{14} + x_{24} = 1$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 4x_1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 4x_2$$