بسمه تعالی

« کنترل خطی »

دکتر طالبی

گردآوری : هادی افشاری

(دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران))

سال تحصیلی ۸۲-۸۱

ترم بهار

هادی افشاری

* جلسه نخست: یکشنبه ۲۷/۱۱/۸۱

* منابع:

* Text book:
  - Modern Control Systems
    R.C. Dorf 7th Edition

* References:
  - Moden Control Eng.
    K. Ogata 3rd Ed. 1997
  - Feedback Contorol of dynamical Systems
    Franklin, Emami, Naini, 1997
  - Kuo
  - Nise

* Evaluation:
  - 25% - 35% : Midterm
  - 45% - 55% : Final exam
  - 10% - 20% : Ass. - Project.

* Rules:
  - No entries after 8:10 AM
  - Nobody leaves the classroom once entered

سیستم‌های دینامیکی: سیستم‌های با حافظه

$$y^{(n)}(t) = f\left(y^{(n-1)}(t), \ldots, \dot{y}(t), y(t), u^{(m)}(t), \ldots, \dot{u}(t), u(t)\right)$$

$y(t) = f(u(t)) \longrightarrow$ استاتیکی ← با این معادله کاری نداریم

سیستم‌های مورد استفاده ما دینامیکی هستند. همه سیستم‌های فیزیکی دینامیک دارند.

۷۲/۷/۱۸ مسائل ؛ شبه مسئله *

ادامه فصل اول

در حقیقت تنها یک مدار تعادلی ساده است که دینامیک ندارد که دائماً استعمال هم نمیشود !

• معادله تفاضلی :

$$y(k+n) = g(y(k+n-1), \ldots, y(k), u(k+m), \ldots, u(k))$$

ما با اینگونه معادلات هم سروکاری نداریم.

• مباحث این بخش :

- نمایش سیستمها

- رفتار سیستمها

- تغییرات سیستمها

کنترل { حلقه باز ؛ فیدبک (حلقه بسته)

• مراحل طراحی یک سیستم کنترل :

- Objective (هدف) ⟵ خروجی مطلوب { Tracking : تعقیب ⟵ $y_d(t)$ ؛ Regulation : رگولاسیون ⟵ $y_d(t) = cte$ }

$y_d \rightarrow$ desired

شاخص های برای تعیین میزان نزدیکی خروجی به خروجی مطلوب { شاخصهای سرعت ؛ شاخصهای دقت }

• مدل سازی :

شناخت رفتار سیستم { تغیرهای خروجی ؛ اهرم کنترل (تغیر ورودی) ؛ تغیرهای میانی (که در بعضی مدل سازیها با این تغیر سروکار داریم) }

اعمال قانونهای فیزیکی حاکم بر پروسه .

• رابطه (معادله دیفرانسیل) بین تغیر ورودی و خروجی ⟵ مدل سازی

• نمایش سیستمها :
I/O ← زمان
← فرکانس
فضای حالت

• رفتار سیستمها :
مدل غیرخطی (پیچیده) ← ترجیح برای تحلیل و شبیه سازی
مدل خطی (ساده) ← مثلاً برای محدوده کاری کوچک ← ترجیح برای طراحی

• تغییرات سیستمها
Time Variant
Time invariant

با سیستمهای Linear Time Invariant (LTI) سروکار داریم.

بعضی مواقع ← مدلها بصورت ریاضی در اختیار نیستند. ← بصورت داده های ورودی خروجی در اختیار هستند.

ورودی باید غنی باشد یعنی همه مودهای سیستم را تحریک کرده باشد تا در خروجی مشاهده شود.

یک سری ورودیها که همه مودهای سیستمهای مورد نظر را تحریک می کنند. که به این تحریک، تحریک پایا (persistantly excitation) می گویند ← شناسایی سیستمها

Model Verification (تطبیق مدل) :

بعد از این که یک مدل نامی از سیستم بدست آمد، سراغ کنترل می رویم.

Control :

یافتن اهرم کنترل u(t) طوریکه خروجی سیستم، خروجی مطلوب را دنبال کند

$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \dots, u)$

* تعریف ریاضی کنترل :

Find $u(t)$ s.t. $y(t) \to y_d(t)$
$t \to \infty$

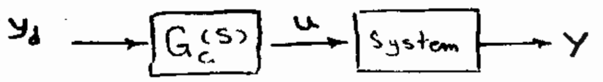
* آنالیز پایداری (کاملاً وابسته به مدل) :

BIBO ← خروجی به ازاء هر ورودی محدود، محدود باشد

Internal (داخلی) ← تمام سیگنال‌های داخل سیستم محدود باشند

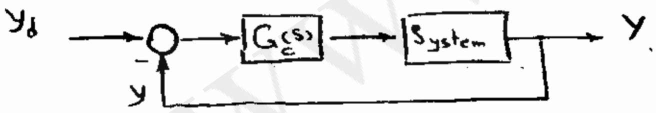
• کنترل حلقه باز : Open Loop Control :

هدف، پیدا کردن u جوری که y به سمت y_d برود.



$u = G_c(s) \cdot y_d$

• کنترل حلقه بسته : (Close Loop Control) :



$u = G_c(s) \cdot \underbrace{(y_d - y)}_{e}$

در این روش، توانایی مقابله با تغییرات (اغتشاشات) را داریم.

* جلسه دوم : سه‌شنبه ۸۱/۱۱/۲۹

* مدل‌های ریاضی سیستمها:

. نمایش ورودی - خروجی

متغیر { ورودی : اهرم کنترل است
خروجی : چیزهایی که قرار است کنترل شود

. مدل خطی سیستمها { اجزاء خطی
محدوده عملکردی
محدوده سرعت

مدل : رابطه ریاضی میان متغیرهای سیستم

که برای سیستم‌های دینامیکی، همان معادله دیفرانسیل است:

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \dots, \dot{y}, y, u^{(m)}, \dots, \dot{u}, u)$$

* مباحث این بخش:

- تعریف سیستم و اجزای آن
- خصیصاتی راجع به عملکرد سیستم و خطی سازی
- اعمال قوانین فیزیکی حاکم بر پروسه
- تبدیل لاپلاس و مفهوم تابع تبدیل

* با دو نوع متغیر سروکار داریم:

1) Variable Across Elements : متغیرهایی که نسبت به دو سر المان اندازه‌گیری می‌شوند:

مانند: اختلاف پتانسیل، اختلاف فشار، اختلاف سرعت

2) Variable Through Elements : متغیرهایی که به شکل عبور از داخل المان اندازه‌گیری می‌شوند.

مانند: جریان، نیرو

* برای هر سیستم ۳ دسته المان مشخص می‌کنیم

۱) المان مصرف‌کننده انرژی ۲) المان ذخیره‌کننده انرژی ۳) المان القاءکننده

۹۶/۱۱/۱۸   جلسه: ۹۶ ...

(a) سیستم الکتریکی:

- متغیر عبوری: جریان $i\,(A)$ متغیر ظرفیتی: $v\,(V)$

- المان تلف کننده انرژی: مقاومت $i = \frac{v}{R}$

المان ذخیره کننده انرژی: خازن $i = C \cdot \frac{dv}{dt}$

المان القاء: سلف: $v = L \cdot \frac{di}{dt}$

- قوانین فیزیکی حاکم: KVL و KCL

(b) سیستم مکانیکی انتقالی (خطی):

- متغیر عبوری: نیرو $F\,(N)$ متغیر ظرفیتی: سرعت $v\,(m.s^{-1})$

المان تلف کننده انرژی (اصطکاک): دمپر: f $F = f.v$

اصطکاک خطی (اصطکاک ویسکوز)

تذکر: اصطکاک دیگری نیز وجود دارد که در جهت سرعت است (اصطکاک کولمب)

المان ذخیره کننده انرژی: جرم M $F = Ma \Rightarrow F = M \cdot \frac{dv}{dt}$

المان القایی: فنر K $v = \frac{1}{K} \cdot \frac{dF}{dt}$ $F = Kx$

- قوانین حاکم: قانونهای نیوتن

تذکر: از مقایسه سیستمهای مکانیکی و الکتریکی نتیجه می‌گیریم:
برای مدلسازی یک سیستم مکانیکی، به کمک سیستم الکتریکی، مقاومت و سلف بکار رفته در مدل الکتریکی، تعدادی برابر با عکس تعداد دمپر و فنر در نظر در سیستم مکانیکی، خواهند داشت.

c) سیستم مکانیکی چرخشی (زاویه‌ای):

متغیر عبوری: گشتاور $T\ (N.m)$ — متغیر طرفی: $\omega\ (rad.s^{-1})$

. المان تلف کننده انرژی: دمپر چرخشی — $T = B\omega$

. المان ذخیره کننده انرژی: ممان اینرسی J — $T = J.\dfrac{d\omega}{dt}$

. المان القایی: فنر چرخشی: K — $\omega = \dfrac{1}{K}.\dfrac{dT}{dt}$

قوانین فیزیکی حاکم: قوانین نیوتن

d) سیستم سیال:

- متغیر عبوری: نرخ شارش حجمی (دبی) $Q\ (m^3.s^{-1})$ — متغیر طرفی: اختلاف فشار $P\ (pascal)$

- . المان تلف کننده انرژی: مقاومت سیال R_p — $Q = \dfrac{1}{R_p}.P$

. المان ذخیره کننده انرژی: ظرفیت سیال C_p — $Q = C_p.\dfrac{dP}{dt}$

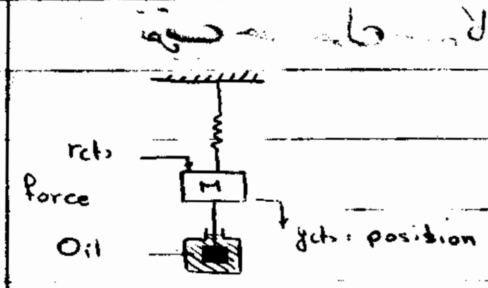
. المان القایی: اینرسی سیال: I — $P = I.\dfrac{dQ}{dt}$

- قوانین حاکم: اصل بقای انرژی (جرم)

(*) ← تفاضل انرژی ورودی و خروجی باعث تغییر فلو می‌شود.

$Q_i - Q_o = A.\dfrac{dh}{dt}$ → Level

. مثال: سیستم ساده جرم - فنر - دمپر (dash-pot).



$$M.\frac{d^2y}{dt^2} = r(t) - f.\frac{dy}{dt} - Ky \rightarrow$$

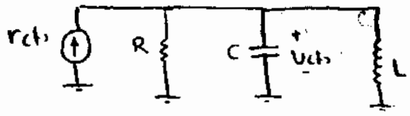
$$r(t) = M.\ddot{y} + f\dot{y} + Ky$$

تذکر: از این به بعد فرض می‌کنیم، نیروی وزن جرم با نیروی اولیه خنثی شده است و اصطلاحاً معادلات را از نقطه تعادل نوشته‌ایم.

تاکنون معادله را برحسب جابجایی نوشته‌ایم. اکنون آن را بر اساس سرعت می‌نویسیم

$$M\frac{dv}{dt} + \beta v + K\int_0^t v\,dt = r(t)$$

اکنون یک سیستم الکتریکی مشابه، مثال می‌زنیم:



$$r(t) = \frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}\int_0^t v\,dt$$

به این، آنالوژی جریان - نیرو گوئیم.

آنالوژی ← شبیه‌سازی ← ساده‌تر شدن تحلیل سیستمهای پیچیده (الف و ب)

• تقریب خطی سیستمهای غیرخطی:

کلیه روابطی که تاکنون نوشتیم در یک محدوده (range) خاص از تغییرات بود.

سیستمهای خطی:

- جمع آثار: $x_1 \to y_1,\ x_2 \to y_2 \} \to x_1 + x_2 \to y_1 + y_2$
- همگنی: $x_1 \to y_1 \Rightarrow ax_1 \to ay_1$

• تمرین (مهلت تحویل: یک هفته)

a) مثالهایی از سیستمهای فیزیکی بزنید که همگن باشد ولی جمع آثار برای آن صادق نباشد.

b) ثابت کنید، اگر جمع آثار صادق باشد، برای همه α های گویا، همگنی هم صادق است.

تقریب خطی حول نقطه کار:

$$y = g(x)$$

$$y = g(x_0) + \frac{\partial g(x)}{\partial x}\Big|_{x=x_0}(x-x_0) + \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2}\Big|_{x=x_0}\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots$$

تعریف خطی زدن یعنی در نظر نگرفتن جملات درجه ۲ به بالا :

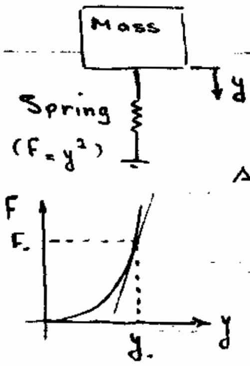
با فرض $x - x_0 \ll 1$: $\Rightarrow y = g(x_0) + \left.\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0) \Rightarrow$

$$y = \underbrace{g(x_0)}_{y_0} + m\underbrace{(x - x_0)}_{\Delta x} \Rightarrow y = m\Delta x + y_0 \Rightarrow \underbrace{y - y_0}_{\Delta y} = m\Delta x \Rightarrow$$

البته تنها حول و حوش نقطه کار معتبر است :

$$\Delta y = m \cdot \Delta x$$

مثال:



$$F_0 = Mg \Rightarrow Mg = y_0^2 \Rightarrow y_0 = \sqrt{Mg}$$

$$\Delta F = K\Delta Y \Rightarrow K = \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=y_0} = 2y_0 = 2\sqrt{Mg}$$

بیان از روی نمودار :

• تبدیل لاپلاس:

سیگنال $f(t)$ تبدیل لاپلاس دارد اگر $\int_0^\infty |f(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$ و α ای وجود دارد که به ازای $\sigma_0 > \alpha$ انتگرال معرفی شده محدود است.

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

تبدیل معکوس لاپلاس:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

در عمل از این تعریف استفاده نمی کنیم

برای عکس تبدیل لاپلاس گرفتن از بسط کسرهای جزئی استفاده می کنیم.

نوع پاسخ زمانی : توسط α_i ها در ریشه های مخرج تابع تبدیل ، مشخص می شود . α_i ها مد (mode)

سیستم نام دارند.

*جلسهٔ سوم: یکشنبه: ۸۱/۱۲/۴

... تبدیل لاپلاس و معکوس آن:

$$\frac{df(t)}{dt} \xrightarrow{L} s\cdot F(s) \qquad \int^{t} f(\lambda)\,d\lambda \xrightarrow{L} \frac{F(s)}{s}$$

*مثال: سیستم مکانیکی درجهٔ ۲:

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + f\frac{dy(t)}{dt} + ky = r(t) \longrightarrow$$

$$M\left(s^2Y(s) - s\,y(0) - \dot{y}(0)\right) + f\left(sY(s) - y(0)\right) + kY(s) = R(s)$$

فرضیات: $y(0) = y_0 \qquad \dot{y}(0) = 0 \qquad r(t) = 0$

$$\Rightarrow Y(s)(Ms^2 + fs + k) = y_0(Ms + f) \Rightarrow Y(s) = \frac{Ms+f}{Ms^2+fs+k}\,y_0 \longrightarrow Y(s) = \frac{s + \frac{f}{M}}{s^2 + \frac{f}{M}s + \frac{k}{M}}\,y_0$$

عبارت فوق تابع تبدیل نیست چون: (۱) نسبت خروجی به ورودی نیست (۲) شرایط اولیه صفر نیست.

بفرض: $\frac{f}{M} = 3 \,,\; \frac{k}{M} = 2 \;\leftarrow$

$$Y(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}\,y_0 = \frac{(s+3)y_0}{(s+1)(s+2)} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \left(\frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2}\right)y_0 \qquad k_1 = (s+1)Y(s)\Big|_{s=-1} = 2 \qquad k_2 = (s+2)Y(s)\Big|_{s=-2} = -1$$

$$\longrightarrow Y(s) = \left(\frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right)y_0 \Rightarrow y(t) = \left(2e^{-t} - e^{-2t}\right)y_0$$

بطور کلی نوع پاسخ زمانی سیستم تاثیر پذیر از ریشه‌های مخرج است.

سیستمهای درجهٔ ۲ اهمیت خاصی دارند. لذا در این قسمت به بررسی آنها می‌پردازیم.

سیستم درجهٔ ۲ استاندارد:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

که به ω_n: فرکانس طبیعی و به ξ: ضریب میرایی گوییم.

فرکانس طبیعی: فرکانسی است که اگر سیستم مذکور میرایی نداشته باشد، با آن فرکانس نوسان خواهد کرد و تنها پاسخ نامیرا

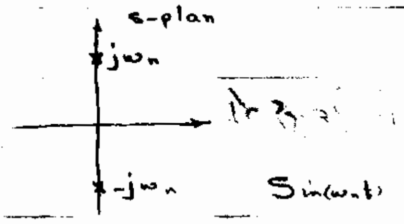
حافظه دار سیستم می باشد.

مثال: سیستم بیان شده در مثال قبل، ω_n و ξ را بیابید:

$$Y(s) = \frac{s+\frac{f}{M}}{s^2+\frac{f}{M}s+\frac{K}{M}}\, y_0 \;\longrightarrow\; \omega_n=\sqrt{\frac{K}{M}} \qquad \xi = \frac{f}{2\sqrt{KM}}$$

تذکر: این سیستم یک سیستم درجه دو استاندارد نیست.

* نوع پاسخ زمانی تحت تأثیر ریشه های مخرج است: $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$



a) $\xi=0$ ← مشخصه میرایی وجود ندارد:

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n$$

در این حالت، پاسخ نوسانی نامیرا است. پاسخ موهومی خالص است $\sin(\omega_n t)$

b) $0<\xi<1$ ← پاسخ نوسانی میرا است (فرومیرا)

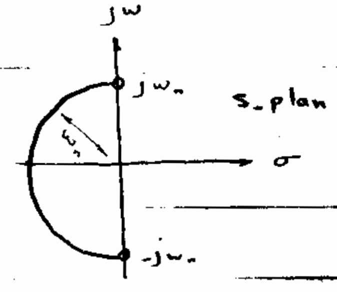
$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

بصورت کلی: $e^{-\xi\omega_n t}\cdot \sin(\omega_n\beta t+\theta)$, $\beta=\sqrt{1-\xi^2}$

مشخص است که قسمت حقیقی مرتبط به بخش نمایی پاسخ زمانی است و بخش موهومی مرتبط با قسمت نوسانی پاسخ زمانی است

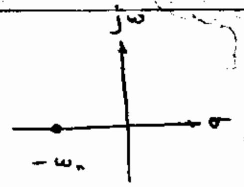
بطور کلی: $s_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$

α: شیب میرایی ($e^{-\alpha t}$) β: فرکانس نوسان



← هرچه به محور $j\omega$ نزدیک شویم میرایی کم می شود.

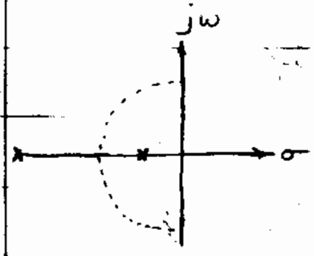
و هرچه از محور افقی دور شویم، فرکانس بیشتر می شود.



(c) $s_{1,2} = -\xi\omega_n = -\omega_n \leftarrow \xi = 1$

← پاسخ زمانی به صورت میرای بحرانی است:

$$k_1 e^{-\omega_n t} + k_2 t e^{-\omega_n t}$$



(d) $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \sqrt{\xi^2-1} \leftarrow \xi > 1$:

پاسخ زمانی بصورت فرامیرا است.

$$k_1 e^{-\alpha_1 t} + k_2 e^{-\alpha_2 t}$$

• مثال: سطح کره‌ای جرمی مخلوط : $y(0)=\dot{y}(0)=0 \quad r(t)=\delta(t)$

$$\to Y(s) = \frac{1}{Ms^2+fs+K} \to Y(s) = \frac{\frac{1}{M}}{s^2+\frac{f}{M}s+\frac{K}{M}} = \frac{P_0}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

(d) $1>\xi>0$ (اینجا تبدیل کردن به فرمی از حالت استاندارد)

فرض: $0<\xi<1 \Rightarrow s_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\underbrace{\sqrt{1-\xi^2}}_{\beta}$

$$s_2 = s_1^* = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

تذکر: برای توابع حقیقی گویا، اگر s_1 یک ریشه باشد، s_1^* نیز ریشه آن خواهد بود.

$$Y(s) = \frac{P_0}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2+\xi^2\omega_n^2-\xi^2\omega_n^2} = \frac{P_0}{(s+\xi\omega_n)^2+(\omega_n\beta)^2}$$

می‌خواهیم پاسخ زمانی را بیابیم:

یادآوری: $Y(s) = \frac{\omega_n}{\omega_n^2+s^2} \Rightarrow y(t) = \sin\omega_n t$

$$Y(s) = \frac{\frac{P_0}{\omega_n\beta}\cdot\omega_n\beta}{(s+\xi\omega_n)^2+(\omega_n\beta)^2} \to y(t) = \frac{P_0}{\omega_n\beta} e^{-\xi\omega_n t}\sin\omega_n\beta t$$

روش دیگر برای رسیدن به $y(t)$ فقط به کمک کسرهای جزئی است:

$$Y(s)=\frac{P_0}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\rightarrow Y(s)=\frac{K_1}{s-s_1}+\frac{K_2}{s-s_1^*}$$

چون ریشه‌ها مزدوج هستند $\Leftarrow K_2=K_1^*$:

$$K_1=(s-s_1)Y(s)\Big|_{s=s_1}=\frac{P_0}{s-s_1^*}\Big|_{s=s_1}=\frac{P_0}{s_1-s_1^*}=\frac{P_0}{-\zeta\omega_n+j\omega_n\beta-(-\zeta\omega_n-j\omega_n\beta)}=\frac{P_0}{2j\omega_n\beta}=\frac{-jP_0}{2\omega_n\beta}$$

$$K_2=K_1^*=\frac{jP_0}{2\omega_n\beta}\rightarrow Y(s)=\frac{-jP_0/2\omega_n\beta}{s-s_1}+\frac{jP_0/2\omega_n\beta}{s-s_1^*}\rightarrow$$

$$y(t)=\left(\frac{-jP_0}{2\omega_n\beta}\right)e^{s_1t}+\frac{jP_0}{2\omega_n\beta}e^{s_1^*t}\rightarrow$$

$$y(t)=\frac{-jP_0}{2\omega_n\beta}e^{-\zeta\omega_n t}e^{j\omega_n\beta t}+\frac{jP_0}{2\omega_n\beta}\cdot e^{-\zeta\omega_n t}e^{-j\omega_n\beta t}\rightarrow$$

$$y(t)=\frac{-jP_0}{2\omega_n\beta}\cdot e^{-\zeta\omega_n t}\underbrace{\left(e^{j\omega_n\beta t}-e^{-j\omega_n\beta t}\right)}_{2j\sin(\omega_n\beta t)}\rightarrow y(t)=\frac{P_0}{\omega_n\beta}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\beta t)$$

* تابع تبدیل:

- تابع تبدیل، نسبت تبدیل لاپلاس خروجی به ورودی است وقتی همهٔ شرایط اولیه صفر باشند

* مثال: برای سیستم مکانیکی درجهٔ ۲ بیان شده:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{Ms^2+fs+K}$$

* تابع تبدیلهای حقیقی گویا: یعنی ضرایب حقیقی باشد

$$Y(s)=\frac{m(s)}{n(s)},\quad \deg(m)\leq\deg(n)$$

• تعاریف و پارامترهایی که بواسطهٔ تابع تبدیل تعریف می‌شوند:

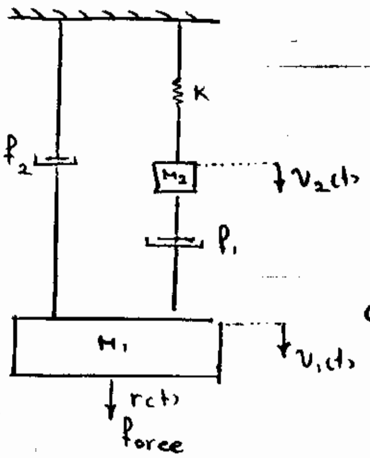
(۱) معادلهٔ مشخصه: معادلهٔ $n(s)=0$

(۲) قطبهای سیستم: ریشه‌های معادله مشخصه است.

(۳) صفرهای سیستم: ریشه‌های معادله $m(s)=0$ (چون $Y(s)$ را صفر می‌کند)

⇦ نوع پاسخ زمانی توسط قطبهای سیستم و شکل آن توسط صفرها صورت می‌گیرد

* مثال: تابع تبدیل سیستم زیر را بیابید:

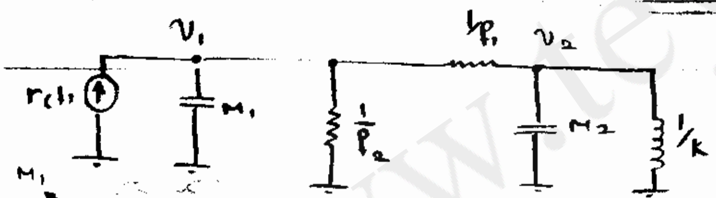


حل: تحلیل مدلسازی با عناصر الکتریکی:

سرعت ≈ ولتاژ   نیرو ≈ جریان

جرم ≈ خازن   فنر ≈ سلف (با مقدار عکس معکوس)

دمپر ≈ مقاومت (با مقدار عکس معکوس)



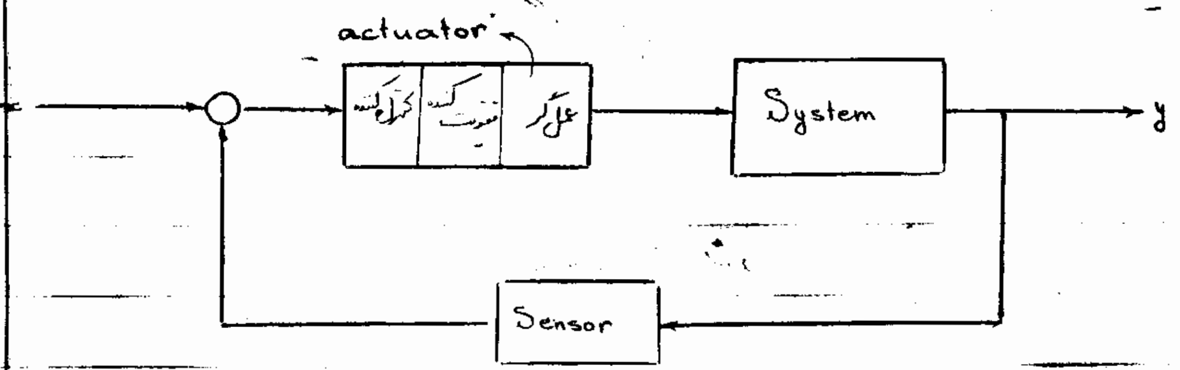
$$r(t) = \underset{M_1}{C}\frac{dV_1}{dt} + f_2V_1 + f_1(V_1-V_2) \Rightarrow R(s) = M_1 s V_1(s) + (f_1+f_2)V_1(s) - f_1V_2(s)$$

$$0 = M_2 s V_2(s) + \frac{K}{s}V_2(s) + (V_2(s) - V_1(s)) f_1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} R(s) \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} M_1s+f_1+f_2 & -f_1 \\ -f_1 & M_2s+\frac{K}{s}+f_1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = A^{-1}B = \frac{adj(A)}{|A|}\cdot B$$

اینجا می‌توان دید پاسخ زمانی ارتباطی به محل در نظر گرفتن ورودی خروجی ندارد. چون $|A|$ بیانگر نحوه اتصالات مدار ثابت است. (یعنی اینکه چگونه عناصر مدار به یکدیگر متصل شده‌اند)

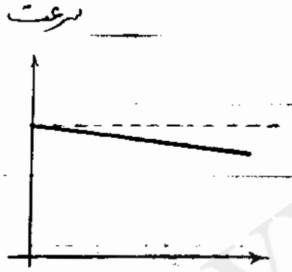
* اهمیت موتور dc :



عملگر: کار تبدیل انواع انرژی را بر عهده دارد - توان لازم برای حرکت سیستم را فراهم می‌آورد.

چون اکثر کنترل کننده های ما الکتریکی و اکثر سیستمهایی که با آن سروکار داریم، مکانیکی هستند، به یک عملگر الکترومکانیکی نیاز داریم. یکی از بهترین عملگرهای الکترومکانیکی، موتور dc است.

* دلایل استفاده از موتور dc بعنوان عملگر الکترومکانیکی :



(۱) قابلیت حمل و نقل

(۲) قابلیت کنترل سرعت

(۳) محدوده گشتاوری مناسب

(۴) مشخصه گشتاور سرعت خوبی دارد.

* الان می‌خواهیم تابع تبدیل موتور dc را بیابیم (نه بعنوان تمرین، بلکه بعنوان یک کاربرد)

فرضیات :

(۱) منحنی مغناطیس شوندگی

(۲) تلفات مکانیکی

(۳) هیسترزیس

(۴) افت ولتاژ روی جاروبکها

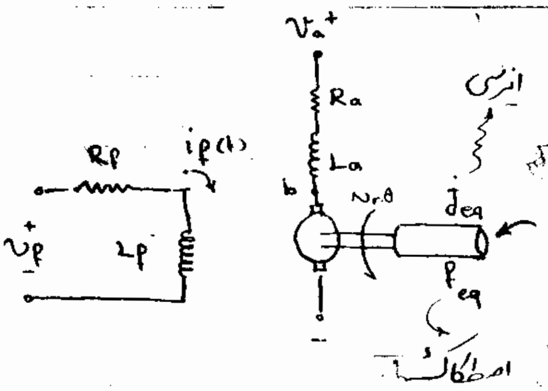
عواملی که سیستم را غیرخطی می‌کند.

• فرضیات اولیه:

- منحنی مغناطیس شوندگی خطی فرض می شود.
- از تلفات مکانیکی صرفنظر می شود.
- از هیسترزیس صرفنظر می شود.
- افت ولتاژ روی جاروبکها صرفنظر می شود.

* جلسه چهارم: سه شنبه ۸۱/۱۲/۶

تابع تبدیل یک موتور DC:



با فرض خطی بودن منحنی مغناطیس شوندگی: $\Phi = K_1 \cdot i_f(t)$

$T_m = K_2 \Phi(t) \cdot i_a(t)$ ← گشتاور موتور

$\rightarrow T_m = K_1 K_2 \cdot i_a(t) \cdot i_f(t)$

این رابطه در حالت کلی خطی نیست. اما اگر یکی از عناصر $i_a(t)$ یا $i_f(t)$ ثابت باشد رابطه خطی خواهد بود:

* کنترل میدان ($i_a(t) = I_a$)

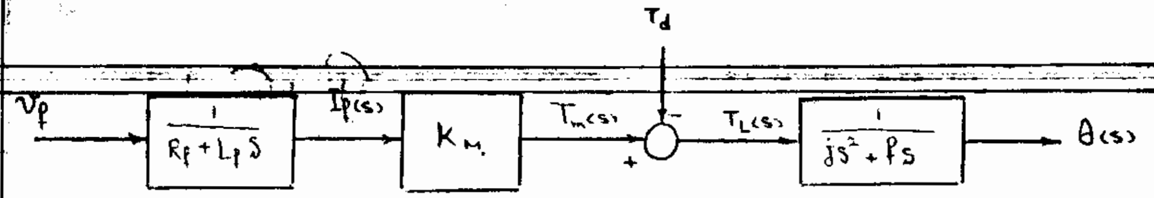
$$\rightarrow T_m = \underbrace{K_1 K_2 I_a}_{K_m} \cdot i_f(t) \rightarrow T_m = K_m \cdot i_f(t)$$

ثابت موتور

$T_m = T_L + T_d$ ← گشتاور اغتشاش

$T_L = J\ddot{\theta} + f\dot{\theta}$

$$I_f(s) = \frac{V_f}{R_f + L_f s} \qquad T_L(s) = (Js^2 + fs)\,\theta(s)$$



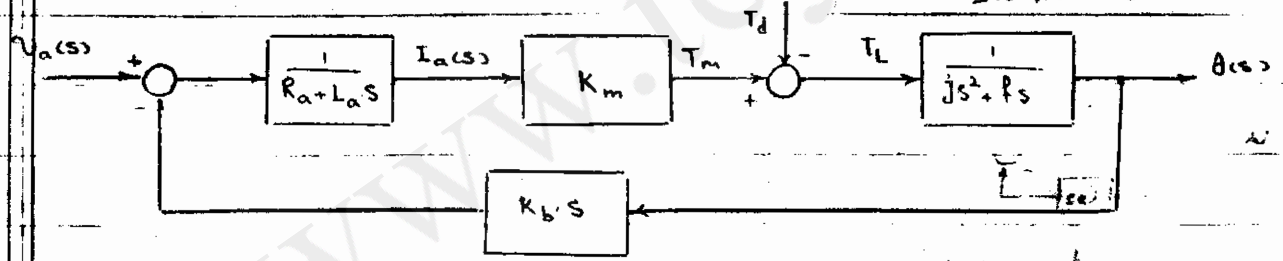
تابع تبدیل سیستم در حالت کنترل میدان :

$$T_d(s)=0 \rightarrow \frac{\theta(s)}{V_f(s)} = \frac{K_m}{s\underbrace{(f+js)}_{\text{ثابت زمانی مکانیکی}}\underbrace{(R_f+L_f s)}_{\text{ثابت زمانی الکتریکی}}}$$

* کنترل آمپر : $(i_f(t) = I_f)$

$$T_m = K_m i_a(t) \qquad K_m = K_1 K_2 I_f$$

$$\left.\begin{aligned} I_a(s) &= \frac{V_a - V_b}{R_a+L_a S} \\ V_b &= K_b\,\omega(s) = K_b S\cdot\theta(s) \end{aligned}\right\} \rightarrow I_a(s) = \frac{V_a(s) - K_b\cdot S\cdot\theta(s)}{R_a+L_a S}$$



یافتن تابع تبدیل بکمک قانون فیدبک :

$$T_d=0 \rightarrow \frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{\dfrac{K_m}{S(R_a+L_a S)(jS+f)}}{1+\dfrac{K_b K_m S}{S(R_a+L_a S)(jS+f)}}$$

$$\rightarrow \frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{S(R_a+L_a S)(jS+f)+K_b K_m S}$$

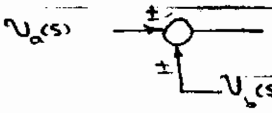
• فیدبک ذاتی در این حالت وجود دارد . • ثابت نگهداشتن جریان میدان راحت است

مدل دیاگرام بلوکی:

(۱) بلوک عملیاتی:

خاصیت عنصر را نشان می‌دهد

(۲) Sumation Point



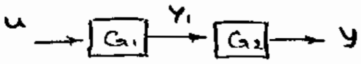
جمع جبری سیگنالهای داخل حلقه.

$E(s) = \pm V_a(s) \pm V_b(s)$

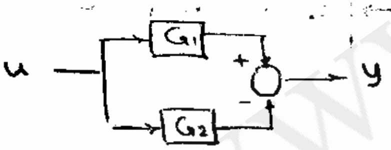
(۳) نقطه انشعاب: (Pick-off Point)

* قواعد کاهش بلوک دیاگرام: (در هر حلقه تابع تبدیل تغییر نمی‌کند)

(۱) قانون سری و پارالل:



$y = G_1 G_2 u$ (اثر بارگذاری نداشته باشیم)

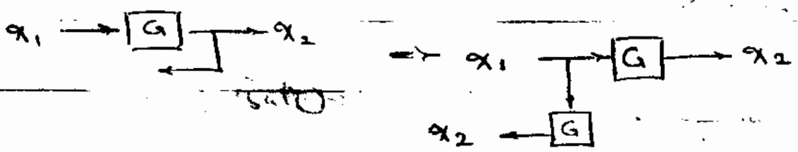


$Y = (G_1 + G_2) Y$

(۲)

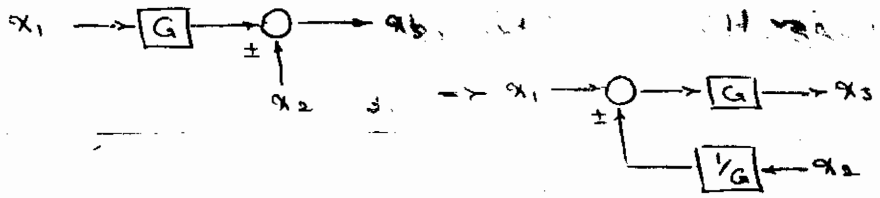
$x_3 = G(x_1 \pm x_2)$ $\qquad$ $x_3 = G x_1 \pm G x_2$

(۳)



(۴)

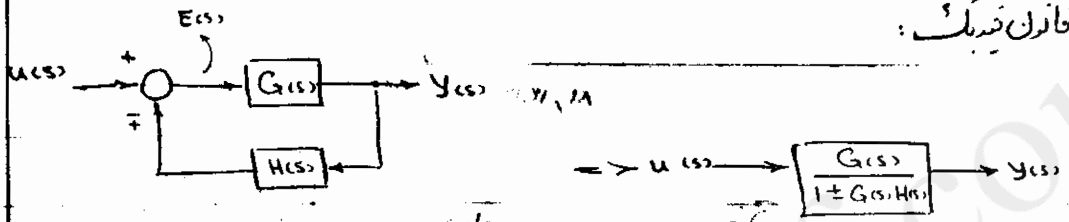
(۵)



$x_3 = G x_1 \pm x_2$

$x_3 = G\left(x_1 \pm \frac{1}{G} x_2\right)$

(۶) قانون فیدبک:



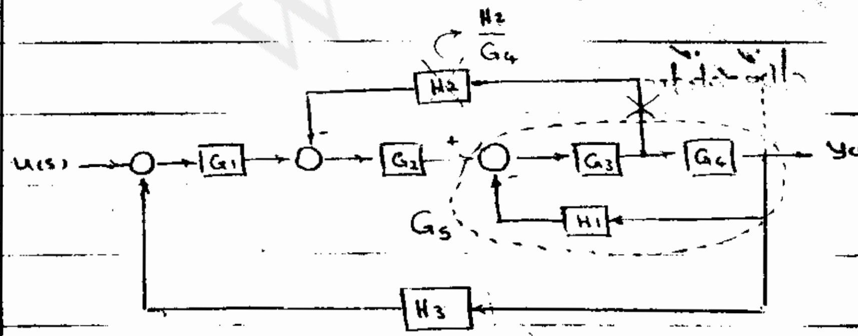
$$\left.\begin{array}{l} E(s) = U(s) \mp H(s)Y(s) \\ Y(s) = G(s)E(s) \end{array}\right\} \Rightarrow Y(s) = G(s)\left(U(s) \mp H(s)Y(s)\right)$$

$$\Rightarrow Y(s)\left(1 \pm G(s)H(s)\right) = G(s)U(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$$

(-) : فیدبک مثبت

(+) : فیدبک منفی

مثال: بلوک دیاگرام را ساده کنید.



$G_5 = \frac{G_3 G_4}{1 + G_3 G_4 H_1}$ $\quad G_6 = G_2 \cdot G_5 \quad$ $G_7 = \frac{G_6}{1 + \frac{G_6 H_2}{G_4}}$

$G_8 = G_1 G_7 \quad$ $G_9 = \frac{G_8}{1 + G_8 H_2}$

$$\Rightarrow T(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{G_1G_2G_3G_4}{1-G_3G_4H_1+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3G_4H_5}$$

* قضیه مقدار نهایی:

اگر $x(t)$ و $\dot{x}(t)$ برای $t>0$ لاپلاس‌پذیر باشد و $sX(s)$ شامل هیچ قطبی روی محور یا در سمت راست آن نباشد، آنگاه داریم:

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=\lim_{s\to 0} sX(s)$$

* جلسه پنجم: سه‌شنبه ۸۱/۱۲/۱۳

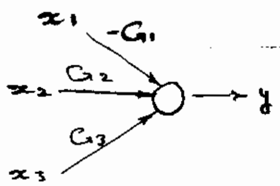
مدل گذر سیگنال: (Signal flow graph)

مزایا: پروسه طولانی و پیچیده نیست. به نقاط خروجی نیاز نیست.

اساس آن: نمایش سیستم توسط یک خط‌هاست ← در مدل گذر سیگنال با دو عنصر سروکار داریم: گره، شاخه (جهت‌دار) و این مدل متشکل از تعدادی گره است که توسط یکسری خط‌های جهت‌دار (شاخه) به یکدیگر متصل شده‌اند.

$u \to \boxed{G} \to y$ $\qquad\qquad \xrightarrow{G}$

مدل دیاگرام بلوکی $\qquad$ مدل گذر سیگنال



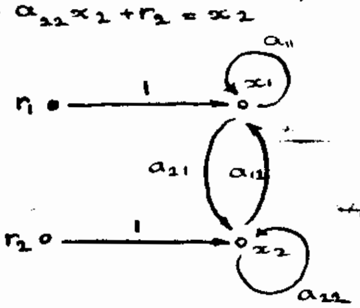
- بهره شاخه روی آن نوشته می‌شود.
- خروجی گره بیانگر متغیری داخل سیستم است.
- خروجی گره، جمع جبری متغیرهای وابسته به آن است.
- هر متغیر با یک گره نشان داده می‌شود.

$$\Rightarrow y=G_2x_2+G_3x_3-G_1x_1$$

- این مدل برای حل معادلات جبری بکار می‌رود.

* مثال: مدل گذر سیگنال را برای معادلات زیر بیابید:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + r_1 = x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + r_2 = x_2 \end{cases}$$



• تعاریفی در نمایش گذر سیگنال:

(۱) - مسیر (path): یک گره را به گره دیگر در جهت یکسان متصل می کند. (میتواند چندین گره نیز پیموده شود)

مثال: $P_1: x_1 \leftarrow r_1$ $P_2: x_2 \leftarrow r_1$ $P_3:$ (با در نظر گرفتن فیدبک) $x_2 \leftarrow r_1$

(۲) - مسیر مستقیم (forward path): یک گره را به گره دیگر متصل می کند (از هر گره بیش از یکبار عبور نمی کنیم)

مثال: P_1 , P_2 $\cancel{P_3}$

(۳) - بهره مسیر (path gain): حاصلضرب بهره تمام شاخه های داخل مسیر

$P_1: 1$ $P_2: 1\times a_{21}$ $P_3: 1\times a_{21}\times a_{22}$

(۴) - بهره مسیر مستقیم: حاصلضرب بهره تمام شاخه های داخل مسیر مستقیم است.

(۵) - حلقه (loop): مسیر مستقیمی است که هر گره را به خودش متصل می کند (از هر گره بیش از یکبار عبور نمی کنیم)

$L_1: x_1 \leftarrow x_1$ $L_2: x_2 \leftarrow x_2$ $L_3: x_2 \leftarrow x_1$ یا $x_1 \leftarrow x_2$

(۶) - حلقه های غیر تماسی (Non-touching Loop): حلقه هایی که با یکدیگر تماس ندارند (همدیگر را قطع نمی کنند): حلقه هایی که گره مشترک ندارند.

* حل دستگاه‌ها به کمک روش کرامر:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + r_1 = x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + r_2 = x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(1-a_{11}) - a_{12}x_2 = r_1 \\ x_2(1-a_{21}) - a_{22}x_2 = r_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{(1-a_{22})r_1}{\Delta} + \dfrac{a_{12}}{\Delta} r_2 \\ x_2 = \dfrac{(1-a_{11})r_2}{\Delta} + \dfrac{a_{21}}{\Delta} r_1 \end{cases}$$

دترمینان دستگاه (گراف):

$$\Delta = 1 - a_{11} - a_{22} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\Delta = 1 - \underbrace{(L_1 + L_2 + L_3)}_{\text{مجموع تمام حلقه‌ها}} + \underbrace{L_1 L_2}$$

حاصلضرب بهره حلقه‌ها که همدیگر را قطع نمی‌کنند

(۱) بهره مسیر مستقیم: $\dfrac{x_1}{r_1} = \dfrac{1-a_{22}}{\Delta} = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$

حلقه‌های داخل این مسیر: دو حلقه داخل این مسیر (L_1, L_3) ←

$\Delta_1 = \Delta \Big| = 1 - L_2$

بهره حلقه‌های داخل مسیر

برای جمع بندی و تکمیل این روش، «فرمول بهره میسون» را بیان می‌کنیم:

* فرمول بهره میسون: (Mason Gain Formula)

به کمک این روش توابع تبدیل از هر گره خروجی (x_j) به هر گره ورودی (x_i) می‌توان به کمک این روش یافت.

- گره خروجی: گره‌ای که سیگنال به جایی ارسال نکند.

- گره ورودی: گره‌ای که سیگنال به آن وارد نشود.

تذکر: هر گره گراف را می‌توان به یک گره خروجی تبدیل کرد (با اضافه کردن یک گره دیگر تحت گره موردنظر به گره جدید) ← به گره خروجی تبدیل می‌شود.

دانا فرمول بهره میسون:

$$T_{ij} = \frac{\sum_{k}^{N} P_k \cdot \Delta_k}{\Delta}$$

* توضیحات:

(a) T_{ij}: تابع تبدیل (transfer function) متغیر خروجی x_j به متغیر ورودی x_i

(b) P_k : بهره مستقیم مسیر K-ام از x_i به x_j

(c) N : تعداد مسیرهای مستقیم بین x_i و x_j

(d) Δ : دترمینان گراف

(e) Δ_k : کوفاکتور مسیر K-ام

فرم کلی Δ :

$$\Delta = 1 - \sum_n L_n + \sum L_m L_q - \sum L_p L_r L_s + \cdots$$

L_n : تمام حلقه‌های سیستم

L_m , L_q : هر دو حلقه‌ای که همدیگر را قطع نمی‌کنند.

L_p , L_r , L_s : هر ۳ حلقه‌ای که همدیگر را قطع نمی‌کنند.

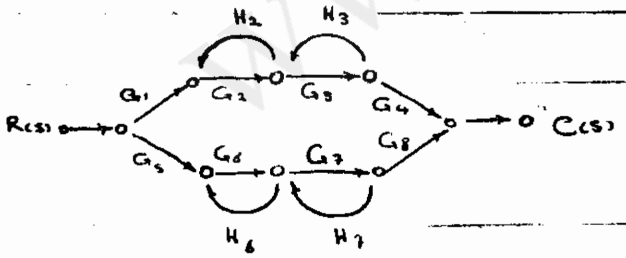
فرم کلی کوفاکتور مسیر K-ام :

$\Delta_K = \Delta \big|$

بهره حلقه‌های داخل مسیر K-ام را صفر قرار می‌دهیم (حلقه‌هایی که حداقل یک گره داخل مسیر دارند).

تذکر: با توجه به فرم بیان شده، مخرج کسر تابع تبدیل، تابع انتخاب ورودی-خروجی نیست و همانطور که در قبل گفته شد تابع interconnection اعضای سیستم است.

مثال: $T(s) = \dfrac{C(s)}{R(s)}$



حل: تعداد مسیرها از ورودی به خروجی: ۲ ← $N = 2$

بهره مسیرها را می‌نامیم:

$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4$

$P_2 = G_5 G_6 G_7 G_8$

تعداد حلقه‌ها: 4 ، بهره حلقه‌ها را می‌نامیم:

$L_1 = G_2 H_2$ $L_2 = G_3 H_3$

$L_3 = G_6 H_6$ $L_4 = G_7 H_7$

ابتدا باید NTL (non-touching loop) را بیابیم:

NTL: L_1 و L_3, L_4

L_2 و L_3, L_4

طبق فرمول داریم:

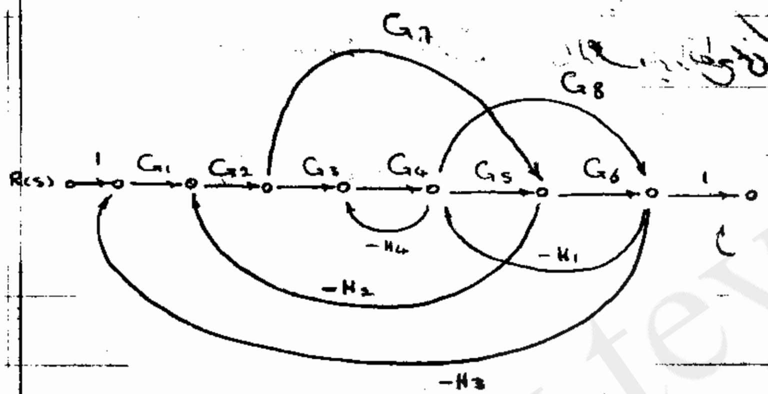
$$T = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta}$$

تنها کافیست Δ ، Δ_1 ، Δ_2 را بیابیم:

$$\Delta = 1-(L_1+L_2+L_3+L_4) + L_1L_3 + L_2L_3 + L_1L_4 + L_2L_4$$

$$\Delta_1 = \Delta\Big|_{L_1=L_2=0} = 1-(L_3+L_4) \qquad \Delta_2 = \Delta\Big|_{L_3=L_4=0} = 1-(L_1+L_2)$$

مثال: $T(s) = \dfrac{C(s)}{R(s)}$



تبدیل کردن به گره خروجی

تعداد مسیر مستقیم از ورودی به خروجی: ۳ ← $N=3$

$P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5G_6 \qquad P_2 = G_1G_2G_7G_6 \qquad P_3 = G_1G_2G_3G_4G_8$

حلقه‌ها:

تذکر: حلقه‌ها توسط عناصر فیدبک ایجاد می‌شوند

مسیر فیدبک H_1 دو حلقه ایجاد می‌کند
$$\begin{cases} L_1: -G_5G_6H_1 \\ L_2: -G_8H_1 \end{cases}$$

مسیر فیدبک H_2 دو حلقه ایجاد می‌کند
$$\begin{cases} L_3 = -G_2G_3G_4G_5H_2 \\ L_4 = -G_2G_7H_2 \end{cases}$$

مسیر فیدبک H_3 سه حلقه ایجاد می‌کند
$$\begin{cases} L_5 = -G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_3 \\ L_6 = -G_1G_2G_3G_4G_8H_3 \\ L_7 = -G_1G_2G_7G_6H_3 \end{cases}$$

H_4 دارای سر فیدبک : $L_8 = -G_4H_4$

می رویم سراغ حلقه های بدون گره مشترک (NTL)

(L_4 , L_8) (L_2 , L_4) (L_7 , L_8)

پس از فراهم آوردن اطلاعات لازم می پردازیم به فرمول :

$$T = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3}{\Delta}$$

تنها کافیست Δ و کوفاکتورها را بیابیم :

$$\Delta = 1-(L_1+L_2+\dots+L_8)+L_2L_4+L_7L_8+L_4L_8$$

$\Delta_1 = 1$ $\Delta_2 = \Delta| = 1-L_8$ $\Delta_3 = 1$

$L_1 = \dots = L_6 = L_7 = 0$

نکته : گفتیم روش میسون برای یافتن تابع تبدیل متغیر خروجی به متغیر ورودی است و ضمناً تعریف متغیر خروجی و ورودی را بیان کردیم. و ضمناً بیان کردیم تبدیل یک گره به گره خروجی کاری ندارد ولی گره ورودی غیر قابل تغییر است. با این تفاصیل برای یافتن تابع تبدیل میان هر دو نقطه دلخواه باید به روش زیر عمل کرد :

$x(s)$: نقطه میانی دلخواه

$$T(s) = \frac{C(s)}{x(s)} \rightarrow T(s) = \frac{C(s)}{x(s)} = \frac{C(s)}{R(s)} \times \frac{R(s)}{x(s)} = \frac{\frac{C(s)}{R(s)}}{\frac{x(s)}{R(s)}}$$

← در این مواقع باید دوبار از روش میسان کمک بگیریم. (۱)

(۲)

نمایش سیستمهای چند ورودی - چند خروجی (MIMO) Multi Input Multi Output

$$\begin{cases} y_1 = G_{11}r_1 + \dots + G_{1n}r_n \\ \vdots \\ y_m = G_{m1}r_1 + \dots + G_{mn}r_n \end{cases}$$

ورودی : n

خروجی : m

$$G_{ij} = \frac{y_i}{r_j}\Big|_{r_k=0 \quad k\neq j}$$

خروجی : $i = 1, \dots, m$

ورودی : $j = 1, \dots, n$

[illegible]

نمایش ماتریسی :

$$\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \qquad G = [G_{ij}] \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{array}$$

$$\mathcal{Y} = G \cdot R$$

ماتریس خروجی ← ماتریس ورودی ← ماتریس تابع تبدیل

... ما در سیستمهای کنترل خطی، با سیستمهای تک ورودی تک خروجی سروکار داریم:

Single Input Single Output (SISO)