بسمه تعالی

« کنترل خطی »

دکتر طالبی

گردآوری : مهدی افشاری

دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)

سال تحصیلی ۸۲-۸۱

ترم بهار

* جلسه نخست : یکشنبه ۸۱/۱۱/۲۷

* منابع :

* Text book:
  - Modern Control Systems
    R. C. Dorf   7th Edition

* References :
  - Moden Control Eng.
    K. Ogata   3rd Ed. 1997
  - Feedback Contorol of dynamical Systems
    Franklin, Emami, Naini, 1997
  - Kuo
  - Nise

* Evaluation :

  25% - 35% : Midterm

  45% - 55% : Final exam

  10% - 20% : Ass. - Project.

* Rules :
  - No entries after 8:10' AM
  - Nobody leaves the classroom once entered

سیستم‌های دینامیکی :

$$y^{(n)}(t) = f\left(y^{(n-1)}(t), \dots, \dot{y}(t), y(t), u^{(m)}(t), \dots, u(t), u(t)\right)$$

$y(t) = f(u(t))$ ⟵ استاتیکی ⟵ با این معادلات کاری نداریم

سیستم‌های مورد استفاده ما دینامیکی هستند. همه سیستم‌های فیزیکی دینامیک دارند.

در وی تنها یک معادله تفاضلی ساده است که دینامیک ندارد که با آن استفاده هم نیست :

• معادله تفاضلی : $y(k+n) = g(y(k+n-1), \dots, y(k), u(k+m), \dots, u(k))$

با اینگونه معادلات هم سر و کاری نداریم.

• مباحث این بخش :
- نمایش سیستمها
- رفتار سیستمها
- تغییرات سیستمها

کنترل { حلقه باز
فیدبک (حلقه بسته)

• مراحل طراحی یک سیستم کنترل :

- Objective (هدف) ← خروجی مطلوب { Tracking : تعقیب ← $y_d(t)$
Regulation : رگولاسیون ← $y_d(t) = cte$

$y_d \to$ desired

شاخص های برای تعیین میزان نزدیکی خروجی به خروجی مطلوب { شاخصهای سرعت
شاخصهای دقت

• مدل سازی :
شناخت رفتار سیستم { متغیرهای خروجی
اهرم کنترل (متغیر ورودی)
متغیرهای میانی (که در بعضی مدل سازیها با این متغیر سروکار داریم)

اعمال قانونهای فیزیکی حاکم بر پروسه.

رابطه (معادله دیفرانسیل) بین متغیر ورودی و خروجی ← مدل سازی

• نمایش سیستمها : T.F : زمان / فرکانس ؛ فضای حالت

• رفتار سیستمها :
- مدل غیرخطی (پیچیده) ← مرجع برای تحلیل و شبیه سازی
- مدل خطی (ساده) ← مثلاً برای محدوده کاری کوچک ← مرجع برای طراحی

• تغییرات سیستمها :
- Time Variant
- Time invariant

با سیستمهای Linear Time Invariant (LTI) سروکار داریم.

بعضی مواقع ← مدلها بصورت ریاضی در اختیار نیستند. ← بصورت داده‌های ورودی خروجی در اختیار هستند.

good

ورودی باید غنی باشد یعنی همه مودهای سیستم را تحریک کرده باشد تا در خروجی مشاهده شود.

یک سری ورودی‌ها که همه مودهای سیستمهای مورد نظر را تحریک می‌کنند، که به این تحریک، تحریک پایا (persistently excitation) می‌گویند ← شناسایی سیستمها

Model Verification (تطبیق مدل) :

بعد از این که یک مدل ناشی از سیستم بدست آمد، سراغ کنترل می‌رویم.

Control :

یافتن اهرم کنترل u(t) طوریکه خروجی سیستم، خروجی مطلوب را دنبال کند

* تعریف ریاضی کنترل :

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \dots, u)$$

Find $u(t)$ s.t. $y(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} y_d(t)$

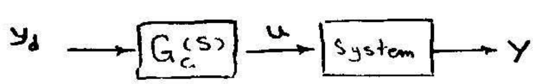
* آنالیز پایداری (کاملاً وابسته به مدل) :

BIBO ← خروجی به ازاء همه ورودیهای محدود، محدود باشد

Internal (داخلی) ← تمام سیگنالهای داخلی سیستم محدود باشند

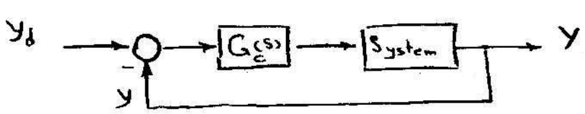
• کنترل حلقه باز : Open Loop Control :

هدف، پیدا کردن u جوری که y به سمت y_d برود.



$$u = G_c(s) \cdot y_d$$

• کنترل حلقه بسته : (Close Loop Control) :



$$u = G_c(s) \cdot \underbrace{(y_d - y)}_{e}$$

در این روش، توانایی مقابله با تغییرات (اغتشاشات) را داریم.

* جلسه دوم : سه‌شنبه ۲۹/۱۱/۸۱

* مدل‌های ریاضی سیستمها:

(۷)

. نمایش ورودی - خروجی

. مدل خطی سیستمها { اجزاء خطی ، محدوده عملکردی ، محدوده سرعت

متغیر { ورودی : اهرم کنترل است ، خروجی : چیزها یا بستاری که قرار است کنترل شود.

مدل : رابطه ریاضی میان متغیرهای سیستم :

که برای سیستمهای دینامیکی ، همان معادله دیفرانسیل است :

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \dots, \dot{y}, y, u^{(m)}, \dots, \dot{u}, u)$$

* مباحث این بخش :

- تعریف سیستم و اجزای آن
- فرضیاتی راجع به عملکرد سیستم و خطی سازی
- اعمال قوانین فیزیکی حاکم بر پروسه
- تبدیل لاپلاس و مفهوم تابع تبدیل.

* با دو نوع متغیر سروکار داریم:

(1) Variable Across Elements : متغیرهایی که نسبت به دو سر المان اندازه‌گیری می‌شوند:

مانند: اختلاف پتانسیل، اختلاف فشار، اختلاف سرعت

(2) Variable Through Elements : متغیرهایی که به شکل عبور از داخل المان اندازه‌گیری می‌شوند.

مانند: جریان، نیرو

* برای هر سیستم سه دسته المان مشخص می‌کنیم:

(۱) المان مصرف‌کننده انرژی (۲) المان ذخیره‌کننده انرژی (۳) المان القاءکننده

(a) سیستم الکتریکی :

- متغیر عبوری : جریان : $i\ (A)$ متغیر طرفینی : $v\ (v)$

. المان تلف کننده انرژی : مقاومت $i = \frac{v}{R}$

. المان ذخیره کننده انرژی : خازن $i = C \cdot \frac{dv}{dt}$

. المان القاء : سلف : $v = L \cdot \frac{di}{dt}$

- قوانین فیزیکی حاکم : KCL , KVL

(b) سیستم مکانیکی انتقالی (خطی) :

- متغیر عبوری : نیرو : $F\ (N)$ متغیر طرفینی : سرعت $v\ (m.s^{-1})$

. المان تلف کننده انرژی (اصطکاک) : دمپر : f $F = f.v$

اصطکاک خطی (اصطکاک ویسکوز) ←

تذکر : اصطکاک دیگری نیز وجود دارد که ایجاد جهت سرعت است (اصطکاک کولمب)

. المان ذخیره کننده انرژی : جرم M $F = Ma \Rightarrow F = M \cdot \frac{dv}{dt}$

. المان القائی : فنر k $F = kx \rightarrow v = \frac{1}{k} \cdot \frac{dF}{dt}$

- قوانین حاکم : قانونهای نیوتون

تذکر : از مقایسه سیستمهای مکانیکی و الکتریکی نتیجه می‌گیریم :

برای مدلسازی یک سیستم مکانیکی ، به کمک سیستم الکتریکی ، مقاومت و سلف بکار رفته در مدل الکتریکی ، مقداری برابر با عکس مقدار دمپر و فنر مورد نظر در سیستم مکانیکی ، خواهند داشت .

(c) سیستم مکانیکی چرخشی (زاویه‌ای):

متغیر عبوری: گشتاور $T\ (N.m)$ متغیر طرفی: $\omega\ (rad.s^{-1})$

. المان تلف کننده انرژی: دمپر چرخشی $T = B\omega$

. المان ذخیره کننده انرژی: ممان اینرسی J $T = J.\frac{d\omega}{dt}$

. المان القایی: فنر چرخشی: K $\omega = \frac{1}{K}.\frac{dT}{dt}$

قوانین فیزیکی حاکم: قوانین نیوتن

(d) سیستم سیال:

- متغیر عبوری: نرخ تلاطم حجمی (دبی): $Q\ (m^3.s^{-1})$ متغیر طرفی: اختلاف فشار $P\ (pascal)$

- . المان تلف کننده انرژی: مقاومت سیال: R_P $Q = \frac{1}{R_P}.P$

. المان ذخیره کننده انرژی: ظرفیت سیال: C_P $Q = C_P.\frac{dP}{dt}$

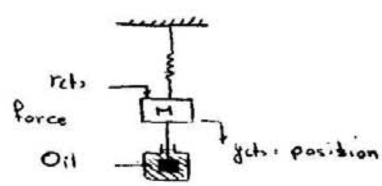
. المان القایی: اینرسی سیال: I $P = I.\frac{dQ}{dt}$

- قوانین حاکم: اصل بقای انرژی و جرم

← تفاضل انرژی ورودی و خروجی باعث تغییر فلو می‌شود.

$$Q_i - Q_o = A.\frac{dh}{dt} \rightarrow \text{Level}$$

. مثال: سیستم سادهٔ جرم - فنر - دمپر (dash-pot):



$$M.\frac{d^2y}{dt^2} = r(t) - f.\frac{dy}{dt} - Ky \rightarrow$$

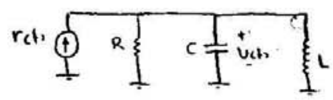
$$r(t) = M.\ddot{y} + f\dot{y} + Ky$$

تذکر: از این به بعد فرض می‌کنیم، نیروی وزن جرم با نیروی اولیه فنر خنثی شده است و اصطلاحا معادلات را از نقطه تعادل نوشته‌ایم.

تا الان معادله را برحسب جابجایی نوشته‌ایم. اکنون آن را براساس سرعت می‌نویسیم:

$$M\frac{dv}{dt} + Bv + K\int_0^t v\,d\tau = r(t)$$

اکنون یک سیستم الکتریکی مشابه، مثال می‌زنیم:



$$r(t) = \frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}\int_0^t v\,d\tau$$

به این، آنالوژی جریان - نیرو گوییم.

آنالوژی ← شبیه‌سازی ← ساده‌تر شدن تحلیل سیستمهای پیچیده

• تقریب خطی سیستمهای غیرخطی:

کلیه روابطی که تا الان نوشتیم در یک محدوده (range) خاص از تغییر بود.

سیستمهای خطی:
- جمع آثار: $x_1 \to y_1,\ x_2 \to y_2 \Rightarrow x_1 + x_2 \to y_1 + y_2$
- همگنی: $x_1 \to y_1 \Rightarrow ax_1 \to ay_1$

• تمرین (مهلت تحویل: یک هفته)

(a) مثالهایی از سیستمهای فیزیکی بزنید که همگن باشد ولی جمع آثار برای آن صادق نباشد.

(b) ثابت کنید، اگر جمع آثار صادق باشد، برای همه α های گویا، همگنی هم صادق است.

تقریب خطی حول نقطه کار:

$$y = g(x)$$

$$y = g(x_0) + \left.\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0}(x-x_0) + \left.\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2}\right|_{x=x_0}\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots$$

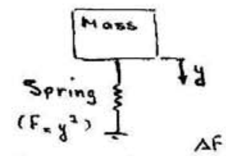
تقریب خطی زدن یعنی در نظر نگرفتن جملات درجه ۲ به بالا :

با فرض $x-x_0 \ll 1$: $\Rightarrow y = g(x_0) + \left.\frac{\partial g(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0} \cdot (x-x_0) \Rightarrow$

$$y = \underbrace{g(x_0)}_{y_0} + m\underbrace{(x-x_0)}_{\Delta x} \Rightarrow y = m\Delta x + y_0 \Rightarrow \underbrace{y-y_0}_{\Delta y} = m\Delta x \Rightarrow$$

البته تنها حول و حوش نقطه کار معتبر است : $\Delta y = m \cdot \Delta x$

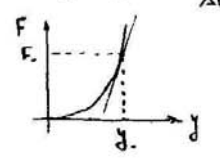
مثال:



$$F_0 = Mg \Rightarrow Mg = y_0^2 \Rightarrow y_0 = \sqrt{Mg}$$

$$\Delta F = K\Delta Y \Rightarrow K = \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=y_0} = 2y_0 = 2\sqrt{Mg}$$

بیان از روی نمودار:



• تبدیل لاپلاس:

سیگنال $f(t)$ تبدیل لاپلاس دارد اگر $\int_0^\infty |f(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < \infty$ و α ای وجود داشته باشد که به ازای $\sigma_1 > \alpha$ انتگرال معرفی شده محدود است.

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

تبدیل معکوس لاپلاس:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

در عمل از این تعریف استفاده نمی‌کنیم.

برای عکس تبدیل لاپلاس گرفتن از بسط کسرهای جزئی استفاده می‌کنیم.

نوع پاسخ زمانی : توسط αها ریشه‌های مخرج تابع تبدیل مشخص می‌شود . αها مد (mode) سیستم نام دارند.

* جلسهٔ سوم: یکشنبه: ۸۱/۱۲/۴

تبدیل لاپلاس و معکوس آن:

$$\frac{df(t)}{dt} \xrightarrow{L} s.F(s) \qquad \int_0^t f(\lambda)\,d\lambda \xrightarrow{L} \frac{F(s)}{s}$$

* مثال: سیستم مکانیکی درجهٔ ۲:

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + f\frac{dy(t)}{dt} + Ky = r(t) \rightarrow$$

$$M(s^2Y(s) - s\,y(0) - \dot{y}(0)) + f(sY(s) - y(0)) + KY(s) = R(s)$$

فرضیات: $r(t)=0 \qquad \dot{y}(0)=0 \qquad y(0)=y_0$

$$\Rightarrow Y(s)(Ms^2+fs+K) = y_0(Ms+f) \Rightarrow Y(s) = \frac{Ms+f}{Ms^2+fs+K}\,y_0 \rightarrow Y(s) = \frac{s+\frac{f}{M}}{s^2+\frac{f}{M}s+\frac{K}{M}}\,y_0$$

عبارت فوق تابع تبدیل نیست چون: (۱) نسبت خروجی به ورودی نیست (۲) شرایط اولیه صفر نیست.

با فرض: $\frac{f}{M}=3 \,,\, \frac{K}{M}=2 \leftarrow$

$$Y(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}\,y_0 = \frac{(s+3)y_0}{(s+1)(s+2)} \Rightarrow$$

$$Y(s) = \left(\frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2}\right)y_0 \qquad K_1 = (s+1)Y(s)\big|_{s=-1} = 2 \qquad K_2 = (s+2)Y(s)\big|_{s=-2} = -1$$

$$\rightarrow Y(s) = \left(\frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right)y_0 \Rightarrow y(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})\,y_0$$

بطور کلی نوع پاسخ زمانی سیستم تأثیرپذیر از ریشه‌های مخرج است

سیستمهای درجهٔ ۲ اهمیت خاصی دارند. لذا در این قسمت به بررسی آنها می‌پردازیم:

سیستم درجهٔ ۲ استاندارد:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

که به ω_n: فرکانس طبیعی و به ξ: ضریب میرایی گوییم.

فرکانس طبیعی: فرکانسی است که اگر سیستم هیچگونه میرایی نداشته باشد، با آن فرکانس نوسان خواهد کرد و تنها تابع عامل

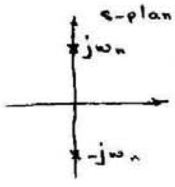
حافظه دار سیستم می باشند .

مثال : و سیستم بیان شده در مثال قبل ، ω_n و ξ را بیابید :

$$y(s) = \frac{s+\frac{f}{M}}{s^2+\frac{f}{M}s+\frac{K}{M}} \cdot y_0 \quad \longrightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \qquad \xi = \frac{f}{2\sqrt{KM}}$$

تذکر : این سیستم ، یک سیستم درجه دو استاندارد نیست .

* نوع پاسخ زمانی تحت تأثیر ریشه های مخرج است : $\quad S_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$



(a) $\xi = 0$ ← هیچگونه میرایی وجود ندارد :

$$S_{1,2} = \pm j\omega_n$$

در این حالت ، پاسخ نوسانی نامیرا است . پاسخ موهومی خالص است $\quad \sin(\omega_n t)$

(b) $0 < \xi < 1$ ← پاسخ نوسانی میرا است (فرومیرا)

$$S_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

بصورت کلی : $\quad e^{-\xi\omega_n t} \cdot \sin(\omega_n \beta t + \theta)\ , \quad \beta = \sqrt{1-\xi^2}$

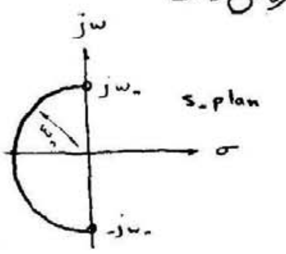
مشخص است که قسمت حقیقی مرتبط به بخش نمایی پاسخ زمانی است و بخش موهومی مرتبط با قسمت نوسانی پاسخ زمانی است

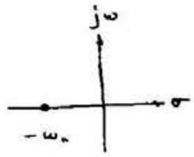
بطور کلی : $\quad S_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$

α : شیب میرایی ($e^{-\alpha t}$) $\qquad \beta$: فرکانس نوسان

← هر چه به محور $j\omega$ نزدیک شویم میرایی کم می شود .

و هر چه از محور افقی دور شویم ، فرکانس بیشتری شود .

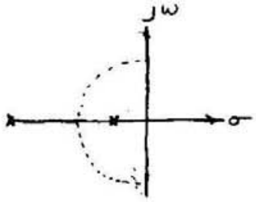




(c) $\xi = 1 \rightarrow \quad s_{1,2} = -\xi\omega_n = -\omega_n$

← پاسخ زمانی به صورت میرای بحرانی است:

$$k_1 e^{-\omega_n t} + k_2 t e^{-\omega_n t}$$



(d) $\xi > 1 \rightarrow \quad s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \sqrt{\xi^2 - 1}$:

پاسخ زمانی به صورت فرامیرا است.

$$k_1 e^{-\alpha_1 t} + k_2 e^{-\alpha_2 t}$$

• مثال: سیستم جرمی خطی مخلوط :

$y(0) = \dot{y}(0) = 0 \qquad r(t) = \delta(t)$

$$\rightarrow Y(s) = \frac{1}{Ms^2 + Ps + K} \rightarrow Y(s) = \frac{\frac{1}{M}}{s^2 + \frac{P}{M}s + \frac{K}{M}} = \frac{P_0}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

(d) $\quad 1 > \xi > n$ ← تبدیل کردن به فرمی از حالت استاندارد

فرض: $0 < \xi < 1 \rightarrow \quad s_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n \underbrace{\sqrt{1-\xi^2}}_{\beta}$

$$s_2 = s_1^* = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

تذکر: برای توابع حقیقی گویا، اگر s_1 یک ریشه باشد، s_1^* نیز یک ریشه آن خواهد بود.

$$Y(s) = \frac{P_0}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 + \xi^2\omega_n^2 - \xi^2\omega_n^2} = \frac{P_0}{(s+\xi\omega_n)^2 + (\omega_n\beta)^2}$$

می‌خواهیم پاسخ زمانی را بیابیم:

یادآوری (مهم):

$$Y(s) = \frac{\omega_n}{\omega_n^2 + s^2} \Rightarrow y(t) = \sin\omega_n t$$

$$Y(s) = \frac{\frac{P_0}{\omega_n\beta} \cdot \omega_n\beta}{(s+\xi\omega_n)^2 + (\omega_n\beta)^2} \rightarrow y(t) = \frac{P_0}{\omega_n\beta} e^{-\xi\omega_n t} \sin\omega_n\beta t$$

روش دیگر برای رسیدن به $y(t)$ بسط به کسرهای جزئی است :

$$Y(s)=\frac{P_0}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \longrightarrow Y(s)=\frac{K_1}{s-s_1}+\frac{K_2}{s-s_1^*}$$

چون ریشه‌ها مزدوج هستند $\Rightarrow$ $K_2=K_1^*$

$$K_1=(s-s_1)Y(s)\Big|_{s=s_1}=\frac{P_0}{s-s_1^*}\Big|_{s=s_1}=\frac{P_0}{s_1-s_1^*}=\frac{P_0}{-\xi\omega_n+j\omega_n\beta-(-\xi\omega_n-j\omega_n\beta)}=\frac{P_0}{2j\omega_n\beta}=\frac{-jP_0}{2\omega_n\beta}$$

$$K_2=K_1^*=\frac{jP_0}{2\omega_n\beta} \longrightarrow Y(s)=\frac{-jP_0/2\omega_n\beta}{s-s_1}+\frac{jP_0/2\omega_n\beta}{s-s_1^*} \longrightarrow$$

$$y(t)=\left(\frac{-jP_0}{2\omega_n\beta}\right)e^{s_1 t}+\frac{jP_0}{2\omega_n\beta}e^{s_1^* t} \longrightarrow$$

$$y(t)=\frac{-jP_0}{2\omega_n\beta}e^{-\xi\omega_n t}e^{j\omega_n\beta t}+\frac{jP_0}{2\omega_n\beta}e^{-\xi\omega_n t}e^{-j\omega_n\beta t} \longrightarrow$$

$$y(t)=\frac{-jP_0}{2\omega_n\beta}\cdot e^{-\xi\omega_n t}\underbrace{\left(e^{j\omega_n\beta t}-e^{-j\omega_n\beta t}\right)}_{2j\sin(\omega_n\beta t)} \longrightarrow y(t)=\frac{P_0}{\omega_n\beta}e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_n\beta t)$$

* تابع تبدیل :

- تابع تبدیل، نسبت تبدیل لاپلاس خروجی به ورودی است وقتی همهٔ شرایط اولیه صفر باشند.

* مثال: برای سیستم مکانیکی درجهٔ ۲ بیان شده:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{1}{Ms^2+fs+K}$$

* تابع تبدیلهای حقیقی گویا : یعنی ضرایب حقیقی باشد.

$$Y(s)=\frac{m(s)}{n(s)}, \quad \deg(m)<\deg(n)$$

• تعاریف و پارامترهایی که بواسطهٔ تابع تبدیل تعریف می‌شوند:

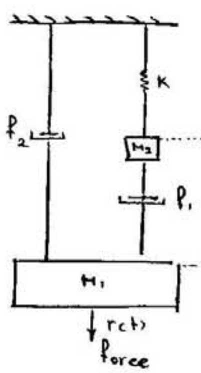
(1) معادله مشخصه : معادلهٔ $n(s)=0$

(۲) قطبهای سیستم: ریشه‌های معادله مشخصه است.

(۳) صفرهای سیستم: ریشه‌های معادله $m(s)=0$ (چون $Y(s)$ را صفر می‌کند)

⇦ نوع پاسخ زمانی توسط قطبهای سیستم و شکل آن توسط صفرها صورت می‌گیرد

* مثال: تابع تبدیل سیستم زیر را بیابید:

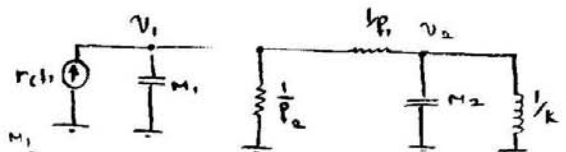


حل: به کمک مدلسازی با عناصر الکتریکی:

سرعت ≈ ولتاژ نیرو ≈ جریان

جرم ≈ خازن فنر ≈ سلف (با مقدار عکس)

دمپر ≈ مقاومت (با مقدار عکس)

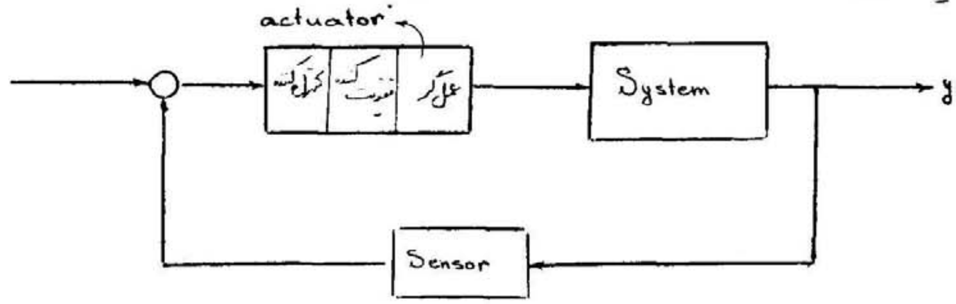


$$\begin{cases} r(t) = C\frac{dv_1}{dt} + f_2 v_1 + f_1(v_1 - v_2) \Rightarrow R(s) = M_1 s V_1(s) + (f_1+f_2)V_1(s) - f_1 V_2(s) \\ 0 = M_2 s V_2(s) + \frac{K}{s}V_2(s) + (V_2(s) - V_1(s))f_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} R(s) \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} M_1 s + f_1 + f_2 & -f_1 \\ -f_1 & M_2 s + \frac{K}{s} + f_1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = A^{-1}B = \frac{adj(A)}{|A|} \cdot B$$

اینجا می‌توان دید پاسخ زمانی ارتباطی به محل قرار گرفتن ورودی و خروجی ندارد. چون $|A|$ با ساختار نحوه اتصالات مدار ثابت است. (یعنی اینکه چگونه عناصر مدار به یکدیگر متصل شده‌اند)

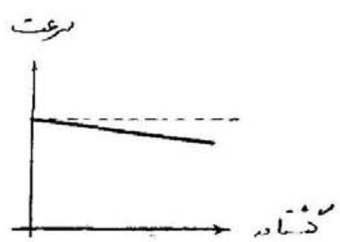
* اهمیت موتور dc :



عملگر: که تبدیل انواع انرژی را بر عهده دارد - توان لازم برای حرکت سیستم را فراهم می آورد.

چون بیشتر کنترل کننده های ما الکتریکی و بیشتر سیستمهایی که با آن سروکار داریم، مکانیکی هستند، پس به یک عملگر الکترومکانیکی نیاز داریم. یکی از مهمترین عملگرهای الکترومکانیکی، موتور dc است.

* دلایل استفاده از موتور dc بعنوان عملگر الکترومکانیکی :



(۱) قابلیت حمل نقل
(۲) قابلیت کنترل سرعت
(۳) محدوده گشتاوری مناسب
(۴) مشخصه گشتاور-سرعت خوبی دارد.

* الان می خواهیم تابع تبدیل موتور dc را بیابیم (نه بعنوان تمرین ... بلکه بعنوان یک کاربرد)

فرضیات :

عواملی که سیستم را غیر خطی می کنند:

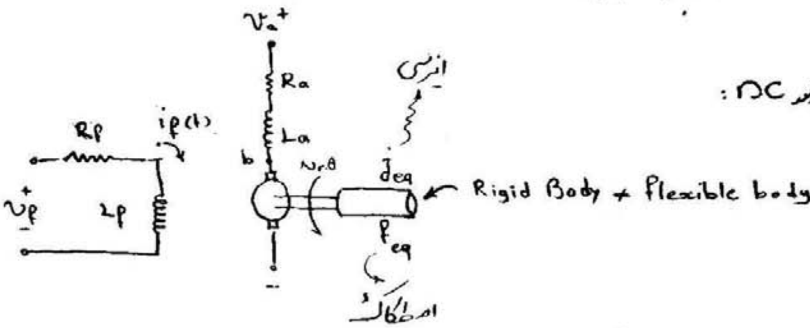
(۱) منحنی مغناطیس شوندگی
(۲) تلفات مکانیکی
(۳) هیسترزیس
(۴) افت ولتاژ روی جاروبکها

• فرضیات اولیه:

- منحنی مغناطیس شوندگی خطی فرض می شود.
- از تلفات مکانیکی صرفنظر می شود.
- از هیسترزیس صرفنظر می شود.
- افت ولتاژ روی جاروبکها صرفنظر می شود.

* جلسه چهارم: سه شنبه ۸۱/۱۲/۶

تابع تبدیل یک موتور DC:



با فرض خطی بودن منحنی مغناطیس شوندگی:

$$\Phi = K_1 \cdot i_f(t)$$

$$T_m = K_2 \cdot \Phi(t) \cdot i_a(t)$$

که گشتاور تولیدی

$$\rightarrow \quad T_m = K_1 \cdot K_2 \cdot i_a(t) \cdot i_f(t)$$

این رابطه در حالت کلی خطی نیست. اما اگر یکی از عناصر $i_a(t)$ یا $i_f(t)$ ثابت باشد رابطه خطی خواهد بود:

* کنترل میدان $\quad (i_a(t) = I_a)$

$$\rightarrow \quad T_m = \underbrace{K_1 K_2 I_a}_{K_m} \cdot i_f(t) \quad \rightarrow \quad T_m = K_m \cdot i_f(t)$$

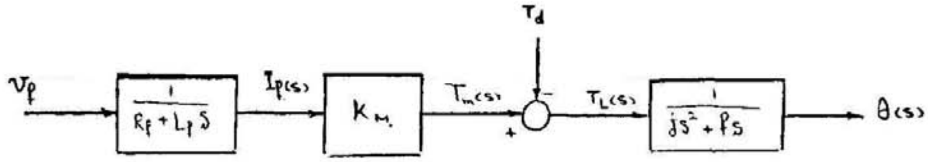
که ثابت موتور

$$T_m = T_L + T_d$$

گشتاور اغتشاشی

$$T_L = J\ddot{\theta} + f\dot{\theta}$$

$$I_f(s) = \frac{V_f}{R_f + L_f s} \quad , \quad T_L(s) = (J s^2 + f s)\,\theta(s)$$



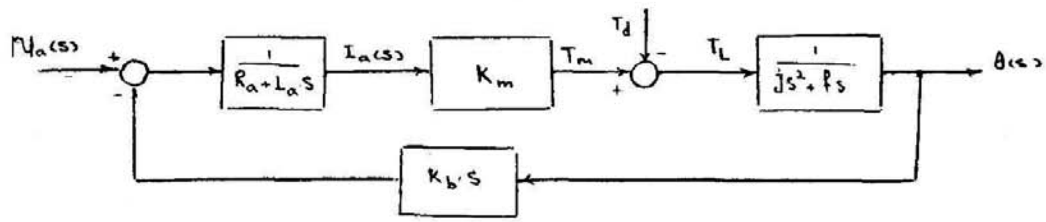
تابع تبدیل سیستم در حالت کنترل میدان :

$$T_d(s)=0 \rightarrow \quad \frac{\theta(s)}{V_f(s)}=\frac{K_m}{s\underbrace{(f+js)}_{\text{ثابت زمانی مکانیکی}}\underbrace{(R_f+L_f s)}_{\text{ثابت زمانی الکتریکی}}}$$

* کنترل آرمیچر : $(i_f(t)=I_f)$

$$T_m=K_m i_a(t) \qquad\qquad K_m=K_1K_2I_f$$

$$\left.\begin{aligned} I_a(s)&=\frac{V_a-V_b}{R_a+L_aS} \rightarrow \\ V_b&=k_b\,\omega(s)=k_b S\cdot\theta(s) \rightarrow \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad I_a(s)=\frac{V_a(s)-K_b\cdot S\cdot\theta(s)}{R_a+L_a S}$$



یافتن تابع تبدیل کمک دیاگرام فیدبک :

$$T_d=0 \;\hookrightarrow\; \frac{\theta(s)}{V_a(s)}=\frac{\dfrac{K_m}{S(R_a+L_aS)(js+f)}}{1+\dfrac{K_bK_mS}{S(R_a+L_aS)(js+f)}}$$

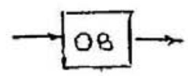
$$\rightarrow \frac{\theta(s)}{V_a(s)}=\frac{K_m}{S(R_a+L_aS)(js+f)+K_bK_mS}$$

• فیدبک ذاتی در این حالت موجود است

• ثابت نگه داشتن جریان میدان راحت تر است

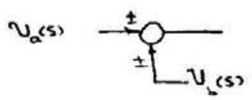
مدل دیاگرام بلوکی :

(۱) بلوک عملیاتی:



خاصیت عنصر را نشان می‌دهد.

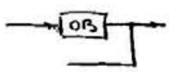
(۲) Sumation Point



جمع جبری سیگنالهای داخل حلقه :

$E(s) = \pm V_a(s) \pm V_b(s)$

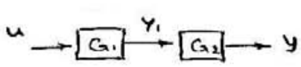
(۳) نقطه انشعاب : (Pick-off Point)



$(q1 = 1)$

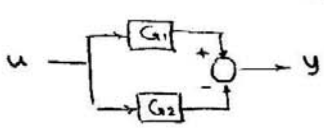
* قواعد کاهش بلوک دیاگرامی : (در هر حلقه تابع تبدیل تغییر نکند)

(۱) قانون سری و پارالل:



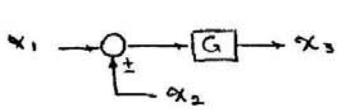
$y = G_1 G_2 u$ (اثر بارگذاری نداشته باشیم)

و

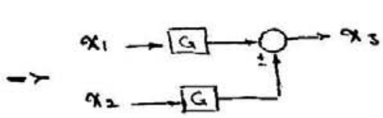


$y = (G_1 + G_2) y$

(۲)



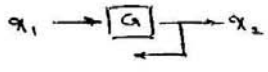
⟶



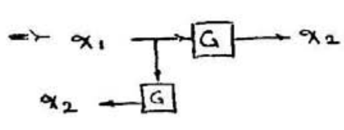
$x_3 = G(x_1 \pm x_2)$

$x_3 = Gx_1 \pm Gx_2$

(۳)

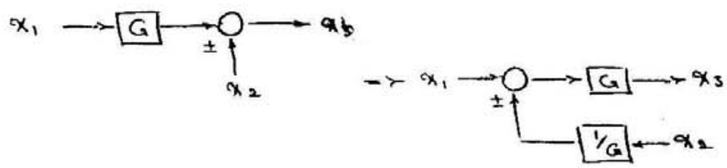


⟶



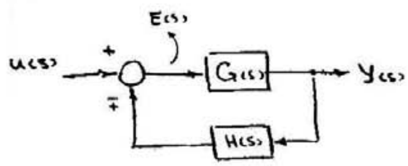
(۴)

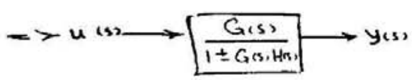
(۵)



$x_3 = Gx_1 \pm x_2$ $\qquad$ $x_3 = G(x_1 \pm \frac{1}{G}x_2)$

(٦) قانون فیدبک:





$$E(s) = U(s) \mp H(s)Y(s)$$

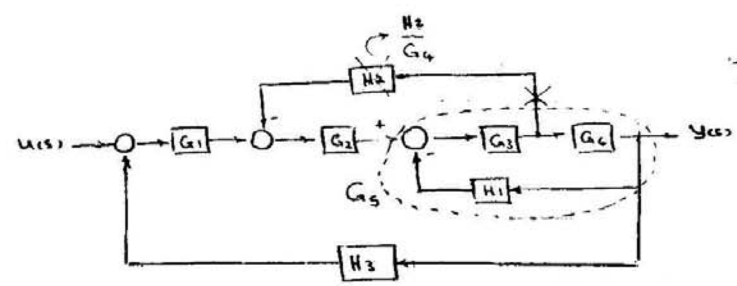
$$\left.\begin{array}{l} E(s) = U(s) \mp H(s)Y(s) \\ Y(s) = G(s)E(s) \end{array}\right\} \Rightarrow Y(s) = G(s)(U(s) \mp H(s)Y(s))$$

$$\rightarrow Y(s)(1 \pm G(s)H(s)) = G(s)U(s) \rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$$

(-): فیدبک مثبت
(+): فیدبک منفی

٢٠

مثال: بلوک دیاگرام را ساده کنید.



$$G_5 = \frac{G_3G_4}{1+G_3G_4H_1} \qquad G_6 = G_2 \cdot G_5 \qquad G_7 = \frac{G_6}{1+\frac{G_6H_2}{G_4}}$$

$$G_8 = G_1G_7 \qquad G_9 = \frac{G_8}{1+G_8H_2}$$

$$\rightarrow T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1G_2G_3G_4}{1 - G_3G_4H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3G_4H_3}$$

* تعیین مقدار نهایی:

اگر $x(t)$ برای $t>0$ پایدار باشد و شامل هیچ قطبی روی محور یا در سمت راست (مشتقات آن) نباشد، آنگاه داریم:

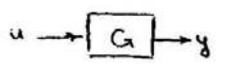
$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

* جلسه پنجم: سه‌شنبه: ۸۱/۱۲/۱۳

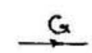
مدل گذر سیگنال: (Signal flow graph)

مزایا: پروسه طولانی و پیچیده نیست   به نقطه خروجی نیاز نیست

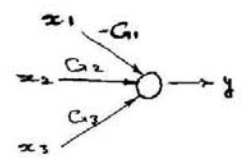
اساس آن: نمایش سیستم توسط پاره‌خط‌هاست ← در مدل گذر سیگنال با دو عنصر سروکار داریم: گره، شاخه جهت‌دار. و این مدل متشکل از تعدادی گره است که توسط پاره‌خط‌های جهت‌دار (شاخه) به یکدیگر متصل شده‌اند.



مدل دیاگرام بلوکی



مدل گذر سیگنال



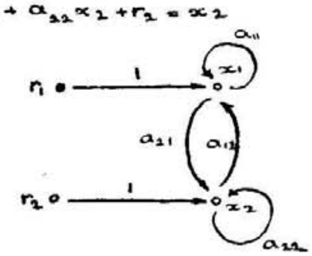
$\hookrightarrow \quad y = G_2x_2 + G_3x_3 - G_1x_1$

- بهره شاخه روی آن نوشته می‌شود.
- خروجی گره بیانگر متغیری داخل سیستم است.
- خروجی گره، جمع جبری متغیرهای وابسته به آن است.
- هر متغیر با یک گره نشان داده می‌شود.

- این مدل برای حل معادلات جبری کمک می‌کند.

* مثال: مدل گذر سیگنال را برای معادلات زیر بیابید:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + r_1 = x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + r_2 = x_2 \end{cases}$$



• تعاریف در نمایش گذر سیگنال:

(۱) - مسیر (path): یک گره را به گره دیگر در جهت پیکان متصل می‌کند. (میتواند چندین گره در مسیر پیموده شود)

مثال: r_1 به x_2 (با در نظر گرفتن فیدبک) : P_3 $\quad$ $P_2: r_1$ به x_2 $\quad$ $P_1: r_1$ به x_1

(۲) - مسیر مستقیم (forward path): یک گره را به گره دیگر متصل می‌کند و از هر گره بیش از یکبار عبور نمی‌کنیم.

$P_1 \quad P_2 \quad \cancel{P_3}$

(۳) - بهره مسیر (path gain): حاصلضرب بهره تمام شاخه‌های داخل مسیر

$P_2: 1\times a_{21} \qquad P_3: 1\times a_{21}\times a_{22}$

(۴) - بهره مسیر مستقیم: حاصلضرب بهره تمام شاخه‌های داخل مسیر مستقیم است.

(۵) - حلقه (loop): مسیر مستقیمی است که هر گره را به خودش متصل می‌کند (از هر گره بیش از یکبار عبور نکنیم)

$L_1: x_1$ به x_1 $\qquad$ $L_2: x_2$ به x_2 $\qquad$ $L_3: x_1$ به x_2 یا x_2 به x_1

(۶) - حلقه‌های غیر متماس (Non-touching Loops): حلقه‌هایی که با یکدیگر تماس ندارند (همدیگر را قطع نمی‌کنند): حلقه‌هایی که گره مشترک ندارد.

* حل دستگاه‌ها به کمک روش کرامر:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + r_1 = x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + r_2 = x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(1-a_{11}) - a_{12}x_2 = r_1 \\ x_2(1-a_{21}) - a_{22}x_2 = r_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{(1-a_{22})r_1}{\Delta} + \dfrac{a_{12}}{\Delta} r_2 \\ x_2 = \dfrac{(1-a_{11})r_2}{\Delta} + \dfrac{a_{21}}{\Delta} r_1 \end{cases}$$

$$\Delta = 1 - a_{11} - a_{22} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

در بیان دستگاه گراف:

$$\Delta = 1 - \underbrace{(L_1 + L_2 + L_3)}_{\text{مجموع تمام حلقه‌ها}} + \underbrace{L_1 L_2}$$

حاصلضرب هر دو حلقه‌ای که همدیگر را قطع نمی‌کنند

- بهره مسیر مستقیم (1):

$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{1-a_{22}}{\Delta} = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

حلقه‌ای که داخل این مسیر دیگر قطع نشده این مسیر: (L_1, L_3) ←

$$\Delta_1 = \Delta \Big|_{\text{بهره حلقه‌های داخل مسیر = 0}} = 1 - L_2$$

برای جمع‌بندی و تکمیل این بخش، «فرمول بهره میسون» را بیان می‌کنیم:

* فرمول بهره میسون: (Mason Gain Formula)

به کمک این روش توابع تبدیل از هر گره خروجی (j) به هر گره ورودی (i) می‌توان به کمک این روش یافت.

- گره خروجی: گره‌ای که سیگنال به جایی ارسال نکند.

- گره ورودی: گره‌ای که سیگنال به آن وارد نشود.

تذکر: هر گره گراف را می‌توان به یک گره خروجی تبدیل کرد (با اضافه کردن یک گره دیگر تحت گره موردنظر به گره جدید ← به گره خروجی تبدیل می‌شود.

و اما فرمول بهره میسون:

$$T_{ij} = \frac{\sum_{k}^{N} P_k \Delta_k}{\Delta}$$

* توضیحات:

(a) T_{ij}: تابع تبدیل (transfer function) متغیر خروجی x_j به متغیر ورودی x_i

(b) P_K : بهره مستقیم مسیر K-ام از x_i به x_j

(c) N : تعداد مسیرهای مستقیم بین x_i و x_j

(d) Δ : دترمینان گراف

(e) Δ_K : کوفاکتور مسیر K-ام

فرم کلی Δ :

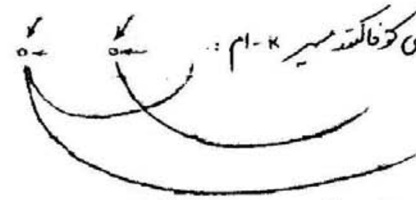
$$\Delta = 1-\sum_n L_n + \sum L_m L_q - \sum L_p L_r L_s + \cdots$$

L_n : تمام حلقه‌های سیستم

L_m , L_q : هر دو حلقه‌ای که همدیگر را قطع نمی‌کنند.

L_p , L_r , L_s : هر ۳ حلقه‌ای که همدیگر را قطع نمی‌کنند.

فرم کلی کوفاکتور مسیر K-ام :

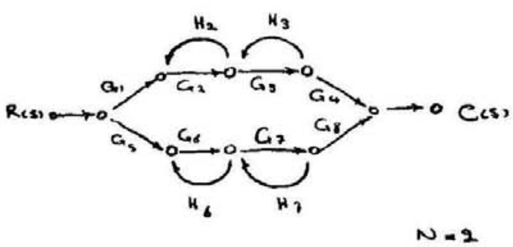


$\Delta_K = \Delta \Big|$ بهره حلقه‌های داخل مسیر K-ام را صفر قرار می‌دهیم (حلقه‌هایی که حداقل یک گره در این مسیر دارند).

تذکر: با توجه به فرم بیان شده، مخرج کسر تابع تبدیل، تابع انتخاب ورودی-خروجی نیست و همانطور که قبلاً گفته شد تابع interconnection اعضای سیستم است.

مثال:

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$$



حل: تعداد مسیرها از ورودی به خروجی: ۲ ← $N=2$

بهره مسیرها را می‌نامیم:

$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4$

$P_2 = G_5 G_6 G_7 G_8$

تعداد حلقه‌ها: 4 ← بهره حلقه‌ها را می‌نامیم:

$L_1 = G_2 H_2 \qquad L_2 = G_3 H_3$

$L_3 = G_6 H_6 \qquad L_4 = G_7 H_7$

اکنون باید NTL ها (non-touching loop) را یابیم:

NTL: L_1 با L_3, L_4

L_2 با L_3, L_4

طبق فرمول داریم:

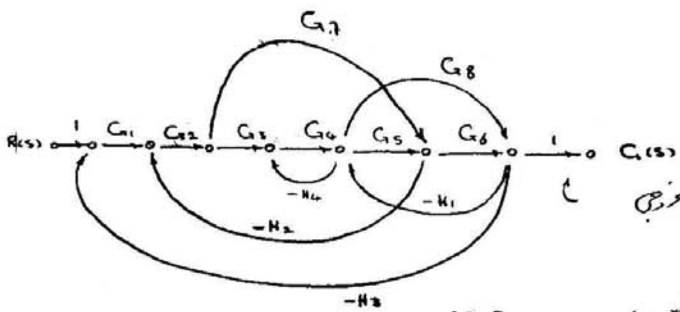
$$T = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta}$$

تنها کافیست Δ و Δ_1 و Δ_2 را یابیم:

$$\Delta = 1-(L_1+L_2+L_3+L_4) + L_1L_3 + L_2L_3 + L_1L_4 + L_2L_4$$

$$\Delta_1 = \Delta\Big|_{L_1=L_2=0} = 1-(L_3+L_4) \qquad \Delta_2 = \Delta\Big|_{L_3=L_4=0} = 1-(L_1+L_2)$$

مثال: $T(s) = \dfrac{C(s)}{R(s)}$



تبدیل کردن به گره خروجی

تعداد مسیر مستقیم از ورودی به خروجی: ۳ ← $N=3$

$P_1 = G_1G_2G_3G_4G_5G_6 \qquad P_2 = G_1G_2G_7G_6 \qquad P_3 = G_1G_2G_3G_4G_8$

حلقه‌ها:

- نکته: حلقه‌ها توسط عناصر فیدبک ایجاد می‌شوند.

مسیر فیدبک H_1 دو حلقه ایجاد می‌کند:
$$\begin{cases} L_1: -G_5G_6H_1 \\ L_2: -G_8H_1 \end{cases}$$

مسیر فیدبک H_2 دو حلقه ایجاد می‌کند:
$$\begin{cases} L_3 = -G_2G_3G_4G_5H_2 \\ L_4 = -G_2G_7H_2 \end{cases}$$

مسیر فیدبک H_3 سه حلقه ایجاد می‌کند:
$$\begin{cases} L_5 = -G_1G_2G_3G_4G_5G_6H_3 \\ L_6 = -G_1G_2G_3G_4G_8H_3 \\ L_7 = -G_1G_2G_7G_6H_3 \end{cases}$$

H_4 دارای فیدبک : $L_8 = -G_4H$

می رویم سراغ حلقه های بدون گره مشترک (NTL)

$(L_4 , L_8) \quad (L_2 , L_4) \quad (L_7 , L_8)$

پس از انجام ادامه اطلاعات لازم می پردازیم به فرمول :

$$T = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 + P_3\Delta_3}{\Delta}$$

تنها کافیست Δ و کوفاکتورها را بیابیم :

$$\Delta = 1-(L_1+L_2+\dots+L_8)+L_2L_4+L_7L_8+L_4L_8$$

$$\Delta_1 = 1 \qquad \Delta_2 = \Delta\Big|_{L_1=\dots=L_6=L_7=0} = 1-L_8 \qquad \Delta_3 = 1$$

نکته : گفتیم روش میسون برای یافتن تابع تبدیل متغیر خروجی به متغیر ورودی است و ضمناً تعریف متغیر خروجی و ورودی را بیان کردیم. و ضمناً بیان کردیم تبدیل یک گره به گره خروجی کاری ندارد ولی گره ورودی غیرقابل تغییر است. با این تفاصیل برای یافتن تابع تبدیل میان هر دو نقطه دلخواه باید به روش زیر عمل کرد :

$x(s)$: نقطه میانی دلخواه

$$T(s) = \frac{C(s)}{x(s)} \quad \longrightarrow \quad T(s) = \frac{C(s)}{x(s)} = \frac{C(s)}{R(s)} \times \frac{R(s)}{x(s)} = \frac{\frac{C(s)}{R(s)}}{\frac{x(s)}{R(s)}}$$

$\rightarrow$ در این مواقع باید دوبار از روش میسون کمک بگیریم.

نمایش سیستمهای چند ورودی - چند خروجی : MIMO Multi Input - Multi Output

$$\begin{cases} y_1 = G_{11}r_1 + \dots + G_{1n}r_n \\ \vdots \\ y_m = G_{m1}r_1 + \dots + G_{mn}r_n \end{cases}$$

ورودی : n

خروجی : m

$$G_{ij} = \frac{y_i}{r_j}\Bigg|_{r_k = 0 \quad k \neq j}$$

خروجی : $i = 1, \dots, m$

ورودی : $j = 1, \dots, n$

نمایش ماتریسی :

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \qquad G = [G_{ij}] \quad \begin{matrix} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{matrix}$$

$$\underbrace{Y}_{\text{ماتریس خروجی}} = \underbrace{G}_{\text{ماتریس تابع تبدیل}} \cdot \underbrace{R}_{\text{ماتریس ورودی}}$$

... ما در درسهای کنترل خطی، با سیستمهای تک ورودی تک خروجی سروکار داریم:

Single Input Single Output (SISO)

* نمایش فضای حالت :

- تاکنون تنها در مورد رابطهٔ میان ورودی و خروجی بحث کردیم و کاری به متغیرهای درون سیستم نداشتیم.

- فرم تابع تبدیل تنها برای سیستم های LTI کاربرد داشت. ما نیاز به فرم کلی داریم.

- برای رهایی از این دو قید، فضای حالت مطرح می شود:

* ویژگیهای نمایش فضای حالت :

(۱) اطلاعات بیشتری از داخل سیستم به ما می دهد. (متغیرهای داخلی)

(۲) برای نمایش تمام سیستمها می تواند به کار رود (خطی یا غیرخطی ، TI یا TV)

(۳) برای شبیه سازی مناسب تر است (چون به فرم زمانی است)

(۴) پایه تئوری کنترل مدرن است (که در مبنای سیستم سازی لپ تابع تبدیل بر پایه شکل گرفته است).

* تعریف حالت یک سیستم: ($x(t)$)

مینیمم اطلاعاتی که اگر در زمان t_0 موجود باشد، (به همراه $u(t) , t \geq t_0$) ، بتوان خروجی سیستم را به ازای $t \geq t_0$ می توانیم داشته باشیم.

متغیرهای حالت یک سیستم یکتا (unique) نیست.

شکل کلی نمایش متغیرهای حالت:

بطور کلی، معادله حالت، نمایش n معادله دیفرانسیل مرتبه یک است. که n تعداد متغیرهای حالت است.

کلی ترین فرم معادلات حالت:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = h(x, u, t) \end{cases}$$

پروسه تبدیل فرم کلی به فرم مناسب برای سیستم های LTI:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u, t) \\ y = h(x, u, t) \end{cases} \xrightarrow{\text{حذف وابستگی به زمان}} \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \longrightarrow$$

(در اینجا برای سیستم های TI)

$$\xrightarrow{\text{خطی سازی}} \underbrace{\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}}$$

$$\underbrace{U[\cdot]}_{a} + \begin{bmatrix} \cdot x \\ 2x \end{bmatrix} \underbrace{[\cdot \quad 1]}_{d} = E$$

نمایش متغیرهای حالت برای سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان

• جلسه ششم: ۸۱/۱۲/۱۸ یکشنبه:

• مدل سازی فضای حالت:

با مثال به ادامه بحث می پردازیم:

سیستم جرم و فنر و دمپر

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + f\frac{dy}{dt} + ky = f(t)$$

• هرگاه فرم معادله دیفرانسیل بایستی اینگونه باشد (یعنی ورودی یک طرف و در طرف دیگر خروجی و مشتقاتش باشند) پس خروجی کاندید مناسبی برای متغیر حالت است.

برای سیستم درجه دو، با دو متغیر حالت می توان سیستم را مدل کرد:

در مثال اخیر:
$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \end{cases}$$

معادله حالت: $\dot{x} = Ax + B$

معادله خروجی: $y = Cx + D$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \rightarrow \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \rightarrow \dot{x}_2(t) = ? \end{cases}$$

$$m\ddot{y} + ky + b\dot{y} = f(t) \rightarrow \ddot{y} = \frac{1}{m}(f - b\dot{y} - ky) \rightarrow$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{m}(u - bx_2(t) - kx_1(t)) \rightarrow$$

بیان به فرم ماتریسی:

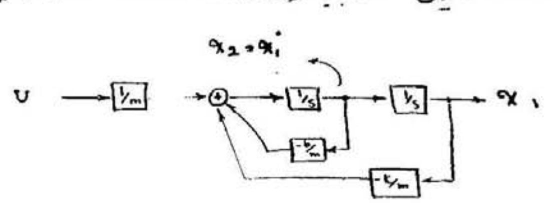
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}}^{A} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}^{B} u$$

$$y = \underbrace{[1 \quad 0]}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{[0]}_{D} u$$

* توضیح در مورد ماتریسهای چهارگانه استفاده شده در معادلات حالت:

بافرض: $x \in R^n$ ، $y \in R^p$ ، $u \in R^m$

(a) ماتریس A: ماتریس حالت سیستم است. ماتریس حالت بیانگر interconnection حالتهای سیستم است و ماتریس n×n است.



برای مثال اخیر:

ماتریس B:

(b) ماتریس ورودی نامیده می شود (یعنی نشان می دهد ورودیها چگونه روی حالتها اثر می گذارند) و n×m است

تنها عامل کنترل کننده u است ← اگر B=0 ← هیچ کنترلی نداریم.

ماتریسهای A و B کنترل پذیری سیستم را نشان می‌دهند.

(ج) ماتریس C: ماتریس خروجی است که از متغیرهای حالت، خروجی را نشان می‌دهد. و از مرتبه $p \times n$ است.

این ماتریس «رؤیت پذیری» (مشاهده پذیری) (Observability) سیستم را بیان می‌کند.
به این معنی که در بعضی موارد می‌توان با دیدن خروجی، تغییر حالت سیستم را تخمین زد. (برای مثال در مواردیکه متغیر حال اندازه‌گیری نباشد و یا وسیله اندازه‌گیری هزینه‌ای را طلب کند، از این حالت استفاده می‌شود).
این بخش تنها با این شرط مفید است که متغیرهای حالت در خروجی تاثیر داشته باشند و ماتریس C این اثر را بیان می‌کند.

(د) ماتریس D: ماتریس کوپلینگ مستقیم ورودی - خروجی است. و از مرتبه $p \times m$ است.

جمع بندی:

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n \\ Y \in \mathbb{R}^p \\ U \in \mathbb{R}^m \end{array} \right. \Longrightarrow \text{ابعاد ماتریسهای معادله حالت:} \left\{ \begin{array}{l} A \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ B \in \mathbb{R}^{n \times m} \\ C \in \mathbb{R}^{p \times n} \\ D \in \mathbb{R}^{p \times m} \end{array} \right.$$

* تذکر: در تابع تبدیل به فرم $\frac{S^m + \dots}{S^n + \dots}$، اگر $n < m$ ← حقیقی نیست و معادله حالت ندارد.
$n > m$ ← ماتریس D صفر است.
$n = m$ ← ماتریس D صفر نیست.

کوییز: معادله حالت مربوطه $G(s) = s$ را بیابید.

در صورت بزرگتر از مخرج است ← معادله حالت ندارد. $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s}{1}$

* مثال: معادلات حالت را بیابید:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{y}_1 + k_1 \dot{y}_1 + k_2 y_1 = u_1 + k_3 u_2 \\ \dot{y}_2 + k_4 y_2 + k_5 \dot{y}_1 = k_0 \cdot u_1 \end{array} \right.$$

حل: ورودیها: u_1, u_2 خروجیها: y_1, y_2 ← $p = 2$

نیاز به ۳ متغیر حالت داریم: $(n=3)$ $\quad x_1(t)=y_1(t) \quad x_2(t)=\dot{y}_1(t) \quad x_3(t)=y_2(t)$

$$\dot{x}_1 = x_2 \qquad \dot{x}_2=\ddot{y}_1(t)=u_1+k_3u_2-k_1\dot{y}_1-k_2y_1=u_1+k_3u_2-k_1x_2-k_2x_1$$

$$\dot{x}_3=\dot{y}_2=-k_4y_2-k_5\dot{y}_1+k_0u_1=k_0u_1-k_4x_3-k_5x_2$$

$$\left.\begin{array}{l} A\in\mathbb{R}^{n\times n} \\ n=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{3\times3}{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k_2 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_5 & -k_4 \end{bmatrix} \qquad \underset{3\times2}{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & k_0 \\ k_0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underset{2\times3}{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underset{2\times2}{D}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ← هیچگونه کوپلینگ مستقیمی بین ورودی و خروجی وجود ندارد.

• حل معادلات حالت و ماتریس انتقال حالت: (State Transition Matrix)

حل معادلات حالت در واقع حل دسته معادلات دیفرانسیل است.

$$\dot{x}=Ax+Bu$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} sX(s)-x(0)=AX(s)+BU(s) \rightarrow (sI-A)X(s)=x(0)+BU(s) \Rightarrow X(s)=(sI-A)^{-1}[x(0)+BU(s)]$$

تعریف ماتریس انتقال حالت: $\quad \Phi(s)=(sI-A)^{-1} \qquad \phi(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$

$$\Rightarrow X(s)=\Phi(s)x(0)+\Phi(s).BU(s) \longrightarrow$$ عکس لاپلاس می‌گیریم →

$$x(t)=\underbrace{\phi(t)x(0)}_{\text{پاسخ ورودی صفر}}+\underbrace{\int_0^t \phi(t-\lambda)B.u(\lambda)d\lambda}_{\text{پاسخ حالت صفر (شرایط اولیه صفر)}}$$

تذکر: آن چیزی که رفتار سیستم را مشخص می‌کند، $\phi(t)$ است و بدیهی است $\phi(t)$ تنها به ماتریس A بستگی دارد.

• مثال: $x\in\mathbb{R}$ ، $u\in\mathbb{R}$ ، $y\in\mathbb{R}$

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} \dot{x}=Ax+Bu \\ y=Cx \end{cases}$$

$$C=[1 \quad 0]$$

• ماتریس انتقال حالت را بیابید:

$$sI-A=\begin{bmatrix} s+3 & -1 \\ +2 & s \end{bmatrix} \to |sI-A| = s(s+3)+2 \to (sI-A)^{-1} = \frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} s & +1 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$s^2+3s+2=(s+1)(s+2)$$

$$\to \quad (sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = \Phi(s) \to \Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\} \Rightarrow$$

فرم کلی: $\Phi(t) = \left[k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-t} \right]_{2\times 2}$

• نکته: رفتار زمانی سیستم توسط ریشه‌های $\det(sI-A)=0$ مشخص می‌شود. $\Rightarrow$ $\Phi(s) = (sI-A)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(sI-A)}{|sI-A|}$

به عبارت دیگر، رفتار سیستم توسط $\lambda_i(A)$ (مقادیر ویژه ماتریس A) و v_i مشخص می‌شود.

.. روشی دیگر برای یافتن $\Phi(t)$: «روش سری بی‌نهایت»

$$\dot{x} = Ax + B \qquad \Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$$

$$x(t) = (K_0 + K_1 t + \frac{K^2}{2!}t^2 + \cdots)x_0 = A(K_0 + K_1 t + \frac{K_2}{2!}t^2 + \cdots)x_0 \qquad \begin{matrix} K_1 = AK_0 \\ K_2 = AK_1 \\ \vdots \end{matrix}$$

با انتقال در صفر داریم:

$$K_0 = I \qquad K_1 = A \qquad K_2 = \frac{A^2}{2!}$$

$$\to \Phi(t) = (I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \cdots) \triangleq e^{At}$$

* ارتباط بردارهای ویژه ماتریس انتقال حالت با مدهای ویژه ماتریس A:

در مثال اخیر $\underbrace{e^{-2t}, e^{-t}}_{\text{مدهای ماتریس انتقال}}$ $\left\{ \begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix} \right.$ مقادیر ویژه ماتریس حالت

v_i بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ_i باشد:

$$\begin{cases} A v_i = \lambda_i v_i \\ \phi(t) v_i = e^{At} v_i = e^{\lambda_i t} \cdot v_i \end{cases} \qquad e^{At} = (I + At + \frac{A^2}{2!} t^2 + \dots)$$

$$A v_i = \lambda_i v_i$$

$$A^2 v_i = A(A v_i) = A \lambda_i v_i = \lambda_i^2 v_i$$

$$\vdots$$

$$A^n v_i = \lambda_i^n v_i$$

$$\rightarrow e^{At} v_i = (I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots) v_i = \underbrace{(1 + \lambda_i t\, v_i + \frac{\lambda_i^2 t^2}{2!} + \dots)}_{e^{\lambda_i t}} v_i = e^{\lambda_i t} v_i$$

بردار ویژه ماتریس A و ماتریس انتقال حالت $\phi(t)$ باهم برابرند. و بردار ویژه متناظر آن نیز $e^{\lambda t}$ می باشد.

$$e^{At} v_i = e^{\lambda_i t} \cdot v_i$$

* پاسخ ورودی صفر را در نظر بگیرید:

$$x_{ZI}(t) = e^{AT} x_0 \searrow e^{\lambda_i t} x_0$$

x_0 بردار ویژه متناظر با λ_i می باشد.

یعنی در تمام خروجی ها، فقط مود (مقدار ویژه) λ_i ظاهر می شود.

برای آنکه بخواهیم سیستم استیشنری بماند. شرایط اولیه را برابر بردار ویژه یکی از مقادیر ویژه ماتریس قرار می دهیم. (۱۵)

* جلسه نهم: سه شنبه: ۸۱,۱۲,۲۰

. دستیابی به تابع تبدیل از معادلات حالت:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BU \\ y = Cx + DU \end{cases} \xrightarrow{\text{Laplace}} \begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = C \cdot X(s) + DU(s) \end{cases} \rightarrow (sI - A)X(s) = B \cdot U(s) \Rightarrow$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} \cdot B \cdot U(s)$$

$$\rightarrow Y(s) = C(sI - A)^{-1} B U(s) + D U(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

یادآوری: تابع تبدیل نسبت لاپلاس خروجی به ورودی تحت شرایط اولیه صفر است.

اکنون می‌خواهیم رابطه‌ی تابع تبدیل را به معادله حالت نسبت دهیم:

$$G(s) = C \cdot \frac{adj(sI-A)}{|sI-A|} \cdot B + D$$

* قطبهای تابع تبدیل:

- ریشه‌های مخرج $G(s)$، ریشه‌های $\underbrace{\det(sI-A)=0}_{\text{معادله مشخصه سیستم}}$ است.

یا به عبارت دیگر قطبهای تابع تبدیل، همان مقادیر ویژه‌ی ماتریس A هستند.

تمام قطبهای تابع تبدیل جزو مقادیر ویژه‌ی ماتریس A هستند، اما عکس این مطلب لزوماً درست نیست.

* صفرهای تابع تبدیل:

صفرهای تابع تبدیل، ریشه‌های معادله‌ی $C \cdot adj(sI-A) \cdot B = A - I \cdot 2$ است.

* نتیجه: صفرهای تابع تبدیل به نحوه‌ی انتخاب ورودی و خروجی وابسته است. اما قطبها مستقل از ورودی و خروجی است.

- تذکر: ممکن است در یک مسیر ورودی - خروجی، بعضی قطبها با صفرها حذف شوند که در این صورت تمامی مقادیر ویژه جزو قطبهای کل تابع تبدیل خاص نخواهد بود. در اصطلاح به این، حذف صفر و قطب گویند.

(pole-zero canellation)

* پایداری:

* پایداری BIBO:

$$y(s) = \frac{s^m + \cdots}{s^n + \cdots} \cdot u(s) \rightarrow y(s) = \left(\frac{k_1}{s+\alpha_1} + \frac{k_2}{s+\alpha_2} + \cdots + \frac{k_n}{s+\alpha_n}\right) \cdot u(s)$$

$$\rightarrow y(t) = k_1 e^{-\alpha_1 t} + \cdots + k_n e^{-\alpha_n t} + \underbrace{\cdots}_{\text{وابسته به ورودی}}$$

برای پایداری، ترمهای نمایی باید میرا باشند:

$\rightarrow$ α_iها باید منفی نباشند $\Leftarrow$ α_iها باید اکیداً مثبت باشند یعنی ریشه‌های مخرج تابع تبدیل (قطبها) باید اکیداً منفی باشند.

* پایداری داخلی :

- در این نوع پایداری، همهٔ سیگنالهای داخل سیستم bounded هستند.

به عبارت دیگر توابع تبدیل از همهٔ خروجیها به همهٔ ورودیها باید BIBO باشد.

توضیح : $y = cx + Du$ ← با ورودی محدود، اگر x هم محدود باشد ← خروجی هم محدود می‌شود.

از طرفی $x(t) = \Phi(t)x_0 + \int \Phi(\tau) B u(t-\tau) d\tau$

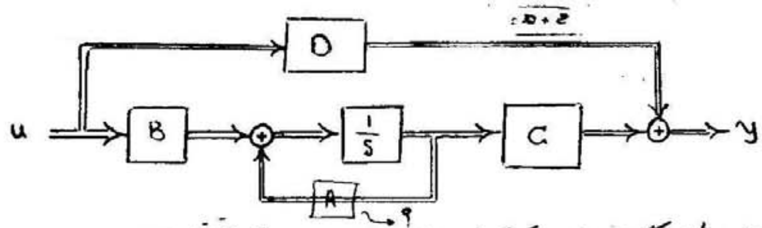
← برای محدود بودن $x(t)$ باید $\Phi(t)$ هم محدود باشد و داریم: $\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$

← ریشه‌های $\det(sI-A)=0$ باید اکیداً منفی باشند تا قطبهای همهٔ توابع تبدیل از هر خروجی به هر ورودی، BIBO باشد. به عبارت دیگر ماتریس انتقال حالت ($\Phi(t)$) محدود باشد.

.. اگر حذف صفر و قطب سمت راست صفحه s (RHP) نداشته باشیم، این دو پایداری معادلند اما اگر این امر حادث شود، بعضی از مقادیر ویژه ماتریس A که در RHP است ممکن است با انتخاب بعضی ورودی - خروجیها حذف شوند و در تابع تبدیل ظاهر نشوند ولی بعضی از ورودی - خروجی‌های دیگر ظاهر نشوند. بنابراین سیستم پایدار داخلی نخواهد بود.

* تحقق یک تابع تبدیل : (یافتن معادلات حالت از روی تابع تبدیل)

منظور از تحقق آن است که چگونه تابع تبدیل مورد نظر خود را بسازیم (بحث اصلی درس فیلتر و سنتز می‌باشد)



اگر معادلات حالت موجود باشند، دیاگرام فوق به راحتی قابل ساخت است. (قابل تحقق است)

← می‌خواهیم معادلات حالت را از روی تابع تبدیل مورد نظر خود بسازیم:

• شرط آنکه بتوان از روی تابع تبدیل، معادلات حالت را یافت (تحقق حالت داشته باشیم)، آنست که :

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \qquad : m \leq n$$

تذکر: البته در حالت $m=n$ باید به روش زیر عمل کرد:

مثال:

$$G(s) = \frac{s^3+3s^2+4s-1}{s^3+5s^2+4s+1} = 1 + \underbrace{\frac{-2s^2-2s}{s^3+5s^2+4s+1}}_{m<n}$$

در اینجا عدد ثابت، ماتریس D دیاگرام صفحه پیش را تغییر می‌دهد.

نتیجه: در حالت $m=n$ تابع تبدیل را تفکیک می‌کنیم به یک عدد ثابت و یک کسر با درجه صورت کمتر که عدد ثابت ایجاد شده با ایجاد تغییر در کوپلینگ مستقیم ورودی خروجی (D) تأثیر بر سیستم می‌گذارد.

پس از توضیحات فوق، از این پس تنها تحقق‌های توابع تبدیل با درجه صورت کمتر از مخرج را بررسی می‌کنیم؛ یعنی به فرم زیر:

$$G(s) = \frac{b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{چند جمله‌ای صورت} \\ \leftarrow \text{چند جمله‌ای مخرج} \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow a(s)\cdot Y(s) = b(s)\cdot X(s)$$

الآن معادله دیفرانسیل این تابع تبدیل را می‌نویسیم:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_{n-1} u^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1 u'(t) + b_0$$

(a) حالت $b(s)=1 \leftarrow$

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = u$$

• انتخاب متغیرهای حالت مناسب:

$$\begin{cases} x_1 = y(t) \\ x_2 = \dot{y}(t) \\ \quad \vdots \\ x_n = y^{(n-1)}(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = -a_{n-1}x_n \cdots - a_1 x_2 - a_0 x_1 + u \end{cases}$$

$$y^{(n)}(t) = u - a_{n-1}y^{(n-1)}(t) \cdots - a_1 y'(t) - a_0 y(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = [1 \; 0 \; 0 \; \cdots \; 0]$$

(ج)

د) فرم کانونیکال کنترل پذیر :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{a(s)} \cdot b(s)$$

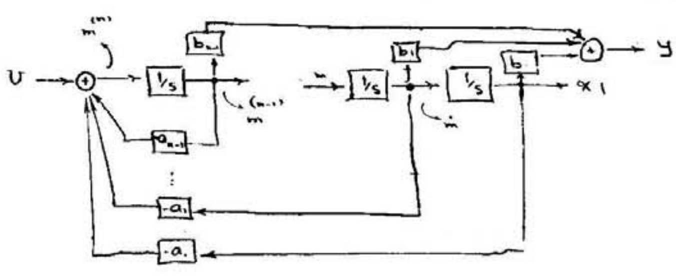
در این روش ابتدا $\frac{M(s)}{U(s)}$ را محقق می‌کنیم :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \underbrace{\frac{Y(s)}{M(s)}}_{b(s)} \cdot \underbrace{\frac{M(s)}{U(s)}}_{\frac{1}{a(s)}}$$

برای تحقق $\frac{M(s)}{U(s)}$ از حالت (a) عمل می‌کنیم

$$m^{(n)}(t) + a_{n-1}m^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 m'(t) + a_0 m(t) = u(t)$$

$$\begin{cases} x_1 = m(t) \\ x_2 = \dot{m}(t) \\ \vdots \\ x_n = m^{(n-1)}(t) \end{cases} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 \; \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$



تحقق $\frac{Y(s)}{M(s)}$:

$$\frac{Y(s)}{M(s)} = b(s) \Rightarrow y(t) = b_{n-1}m^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1 m'(t) + b_0 m(t)$$

$$= b_{n-1}x_n + \cdots + b_1 x_2 + b_0 x_1 \rightarrow$$

$$y(t) = [b_0 \; b_1 \; \cdots \; b_{n-1}]\, x$$

به این تحقق به این علت کانونیکال گوییم که فرم ماتریسها مشخص است ؛

$$A=\left[\begin{array}{c|ccc} 0_{n-1} & & I_{(n-1)} & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \cdots & -a_{n-1}\end{array}\right] \qquad B=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix} \qquad C=[b_0 \;\; b_1 \;\; \cdots \;\; b_{n-1}]$$

۹ . ۱ (ب) تحقق کانونیکال رؤیت پذیر :

یادآوری : تحقق یعنی مشخص کردن ارتباط y و u بدون آنکه به مشتق گیری از u نیاز باشد .

برای بیان مطلب از تابع تبدیل با مخرج درجه ۳ به عنوان مثال کمک می‌گیریم :

$$G(s)=\frac{b_2 s^2+b_1 s+b_0}{s^3+a_2 s^2+a_1 s+a_0}$$

$$\Rightarrow \quad y^{(3)}(t)+a_2\ddot{y}(t)+a_1\dot{y}(t)+a_0 y(t)=b_2\ddot{u}(t)+b_1\dot{u}(t)+b_0 u(t)$$

$$b_0 u-a_0 y=y^{(3)}(t)+a_2\ddot{y}(t)+a_1\dot{y}(t)-b_2\ddot{u}(t)-b_1\dot{u}(t)$$

با انتگرال گیری : $\ddot{y}(t)+a_2\dot{y}(t)+a_1 y(t)-b_2\dot{u}(t)-b_1 u(t)$

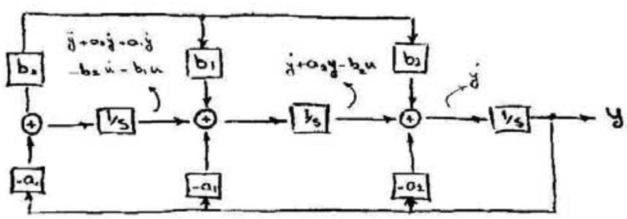
با اضافه کردن $b_1 u-a_1 y \rightarrow$

$$\ddot{y}(t)+a_2\dot{y}(t)-b_2\dot{u}(t)$$

با انتگرال گیری :

$$\dot{y}(t)+a_2 y(t)-b_2 u(t)$$

با اضافه کردن $-a_2 y+b_2 u$ و ...



بهترین انتخاب برای متغیرهای حالت از دید کلاسیک در اینجاها ، خروجی انتگرال گیرهاست .

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2-a_2x_1+b_2u\\ \dot{x}_2=x_3-a_1x_1+b_1u\\ \dot{x}_3=-a_0x_1+b_0u\\ y=x_1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad A=\begin{bmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} \qquad C=[1 \;\; 0 \;\; 0]$$

* در حالت کلی، فرم ماتریسهای تحقق کانونیکال رویت پذیر بصورت زیر است:

$$A=\left[\begin{array}{c|c} -a_{n-1} & \\ -a_{n-2} & I_{n-1} \\ \vdots & \\ -a_0 & 0_{n-1} \end{array}\right] \qquad B=\begin{bmatrix} b_{n-1} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} \qquad C=[1 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0]$$

رویت پذیری یعنی، تمام حالتها در خروجی مشاهده شوند.

* جلسه هشتم :　　　　　یکشنبه : ۸۲/۱/۱۷

* کوییز : تحقق کنترل پذیر را بیابید و در مورد پایداری بحث کنید

$$G(s) = \frac{s^2 - s - 2}{s^2 + s - 6}$$

$$G(s) = 1 + \frac{-2s + 4}{s^2 + s - 6} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \multicolumn{2}{c}{\text{منفی ضرایب مخرج}} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = [\text{ضرایب صورت}] \; , \; D = 1$$

$$G(s) = \frac{(s+1)(s-2)}{(s-2)(s+3)} \longrightarrow$$ پایدار داخلی نیست ولی پایدار BIBO می باشد .

۱ — به عبارت دیگر : پایدار داخلی نیست ← $2 > 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -3 \end{matrix}$$

* تبدیل تشابهی : Similarity Transform

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad \underbrace{x = Pv}_{\text{متغیر حالت جدید}}$$

معادلات حالت v را می خواهیم بدست آوریم .

$$x = Pv \to \dot{x} = P\dot{v} \qquad \to \begin{cases} P\dot{v} = APv + Bu \\ y = CPv + Du \end{cases} \to \begin{cases} \dot{v} = P^{-1}AP\,v + P^{-1}Bu \\ y = CPv + Du \end{cases}$$

$$\hookrightarrow v = P^{-1}x$$

← ماتریسهای حالت متغیر جدید v عبارتند از :

$$A_v = P^{-1}AP$$

$$B_v = P^{-1}B$$

$$C_v = CP$$

$$D_v = D$$

تذکر : پایداری سیستم ارتباطی به نوع انتخاب متغیر حالت ندارد ← چون پایداری باید دست نخورد ← باید میان A و A_v ارتباطی باشد : مقادیر ویژه ماتریس A و A_v برابر است : یعنی : $\det(sI - A) = \det(sI - P^{-1}AP)$

• اثبات ریاضی :

$$\det(sI - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}sIP - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(sI - A)P) =$$

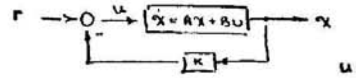
$$\det(P^{-1}) \cdot \det(sI - A) \cdot \det(P) = \det(sI - A)$$

← با تغییر متغیر حالت، پایداری سیستم تغییری نمی‌کند (مقادیر ویژه A و A_v یکی است)، اما بقیه خصوصیات سیستم ممکن است تغییر کند.

. کنترل پذیری و رویت پذیری :

ماتریسهای A و B در کنترل پذیری سیستم نقش دارند و ماتریسهای A و C در رویت پذیری سیستم نقش دارند.

ابتدا می‌پردازیم به اهمیت کنترل پذیری و رویت پذیری :



$$u = -Kx + r$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \end{array}\right\} \rightarrow \dot{x} = Ax + B(-Kx + r)$$

$$\rightarrow \dot{x} = \underbrace{(A - BK)}x + Br$$

A_c : ماتریس حالت سیستم حلقه بسته : $A_c = A - BK$

مشخصات سیستم (A, B) در اختیار ما نیست. تنها اهرم کنترل، K است. منظور از کنترل پذیری این است که ماتریس K ای بیابیم که مقادیر ویژه را در جای دلخواه سیستم قرار دهیم.

_ یعنی : . یافتن K برای تخصیص مقادیر ویژه ماتریس $A_c = A - BK$.

کنترل پذیری یعنی ماتریس K ای وجود دارد که مقادیر ویژه ماتریس $A - BK$ را به دلخواه در صفحه S قرار دهیم (pole - assignment placement)

$qA^{-1}q = vA$

Matlab Code: place (A, B, P)

* سیستمی کنترل پذیر است که ماتریس کنترل پذیری آن، Full Rank باشد.

rank (مرتبه) : تعداد سطرهای ماتریس که مستقل خطی اند.

Full rank بودن : یعنی معکوس پذیر بودن، یعنی دترمینان صفر نشدن (برای ماتریسهای مربعی)

- تعریف ماتریس کنترل پذیری سیستم : $C_v = [B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \dots \;\; A^{n-1}B]$

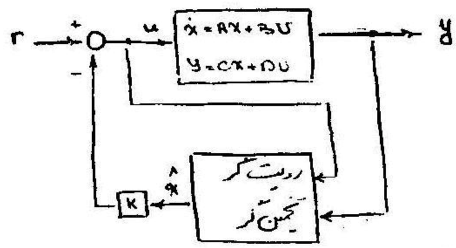
• همیشه حالتهای سیستم در دسترس نیست (یا اقتصادی نیست)، یعنی همیشه کنترل کردن به روش $u = -Kx + r$ ،

مقصود نمی باشد. در این محل مفهومی به نام «رویت پذیری» ارائه می کنیم.

بنابراین با اندازه گیری ورودی و خروجی، x را تخمین زد:

$u = -K\hat{x} + r$

که تخمین x



برای آنکه بتوانیم x را تخمین بزنیم، باید ماتریسهای C و A، ویژگی خاصی داشته باشند:

برای آنکه بتوانیم x را تخمین بزنیم (یعنی سیستم رویت پذیر باشد) باید ماتریس رویت پذیری، Full Rank باشد.

(A)

- تعریف ماتریس رویت پذیری سیستم:

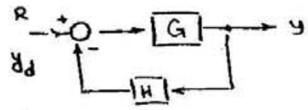
$$C_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

* Matlab Code: >> Rank

>> CTRB (A, B) → Cv

OBSV(C, A) → Co

مشخصات سیستم کنترل فیدبک:



مفاهیمی که در این بخش بحث خواهد شد:

- مفهوم سیگنال خطا (در حالت حلقه باز هیچ حسی (sens) از خروجی داریم تا آن را با خروجی مطلوب مقایسه کنیم)
- تعیین پاسخ حالت گذرا
- حساسیت سیستم به تغییر پارامترها
- اثر سیگنال اغتشاش
- هزینه فیدبک.

(A) سیگنال خطا:

هدف آن است که U مناسب را بیابیم که y به y_d (خروجی مطلوب) ترکیب شود:

Find U s.t. $y \to y_d$ desired

خطای تعقیب: Tracking Error : $e = y_d(t) - y(t)$

خطای عملگر : Actuator Error: $e_a(t) = y_d(t) - Hy(t)$

اگر سیستم فیدبک واحد باشد $(H=1) \Rightarrow$ $e(t) = e_a(t)$

$E(s) = \mathcal{L}\{e(t)\}$

$$\frac{E_a(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+GH} \qquad H=1 \Rightarrow \frac{E_a(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G}$$

واضح است که برای کاهش E، باید GH بزرگ باشد.

GH : گین حلقه (loop gain)

تذکر: البته برای کاهش خطا، G را تا بینهایت نمی‌توانیم بزرگ کنیم: به دو دلیل، (1) الزامات عملی در ساخت
(2) زیاد کردن G ممکن است موجب ناپایداری شود.

B) حساسیت سیستم کنترل به تغییر پارامترها :

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G}{1+GH} \rightarrow Y(s) = \frac{G}{1+GH} \cdot R(s)$$

$$Y(s) \approx \frac{1}{H(s)} \cdot R(s) \leftarrow GH \gg 1$$

که در این حالت پارامترهای سیستم هیچ تأثیری ندارند (G تأثیری ندارد)

← برای فراهم آوردن حساسیت کمتر به تغییر پارامترها ، باید G بزرگ باشد .

الان به بررسی کمی حساسیت می پردازیم :

بر فرض $G(s)$ تغییراتی به شکل ΔG دارد :

حلقه باز : $R(s) \rightarrow \boxed{G} \rightarrow Y(s)$

$$\rightarrow Y(s) = R(s) \cdot [G(s) + \Delta G(s)] = G(s)R(s) + \Delta G(s)R(s)$$

$$\rightarrow \Delta Y(s) = \Delta G(s) \cdot R(s)$$

حلقه بسته :

$$Y(s) + \Delta Y(s) = \frac{G + \Delta G}{1 + H(s)(G(s) + \Delta G(s))} \cdot R(s)$$

$$\Delta Y(s) = \left(\frac{G + \Delta G}{1 + (G + \Delta G)H} - \frac{G}{\underbrace{1 + GH}_{\Delta(s) = 1 + GH}} \right) \cdot R(s)$$

$$\Rightarrow \Delta Y(s) = \left[\frac{G + \Delta G}{\Delta(s) + \Delta G \cdot H(s)} - \frac{G}{\Delta(s)} \right] \cdot R(s) = \frac{\Delta(s)G(s) + \Delta(s)\Delta G(s) - [\Delta(s) + \Delta G \cdot H]G}{[\Delta(s) + \Delta G \cdot H(s)]\Delta(s)} \cdot R(s)$$

$$\rightarrow \Delta Y(s) = \frac{\Delta(s)\Delta G - \Delta G \cdot H \cdot G}{[\Delta(s) + \Delta G H]\Delta} \rightarrow \Delta Y(s) = \frac{\Delta G}{[\Delta(s) + \Delta G H(s)][1 + GH(s)]}$$

$$(\Delta = 1 + GH)$$

بر فرض : $H(s) \cdot G(s) \gg \Delta G H(s)$ ←

$$\Delta Y(s) = \frac{\Delta G}{(1 + GH(s))^2} \cdot R(s)$$

← با افزایش گین حلقه ← $\Delta Y(s)$ کم می شود .

* تعریف کلی حساسیت :

حساسیت : درصد تغییرات سیستم حلقه بسته به درصد تغییرات در سیستم حلقه باز

$T(s)$: سیستم حلقه بسته $G(s)$: سیستم حلقه باز

$$S_G^T = \frac{\Delta T/T}{\Delta G/G}$$

در حالت حدی : $\Delta G \to 0 \Rightarrow S_G^T = \frac{\partial T/T}{\partial G/G} = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln G} = \frac{\partial T}{\partial G} \cdot \frac{G}{T}$

$T = \frac{G}{1+GH} \rightarrow S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G} \cdot \frac{G}{T} = \frac{(1+GH)-GH}{(1+GH)^2} \rightarrow$ تابع تبدیل حساسیت سیستم: $S_G^T(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)}$

در سیستم حلقه باز : $T=G$ ← حساسیت $=1$

* حساسیت نسبت به المان فیدبک :

$T = \frac{G}{1+GH} \qquad S_H^T = \frac{\partial T}{\partial H} \cdot \frac{H}{T} \rightarrow$

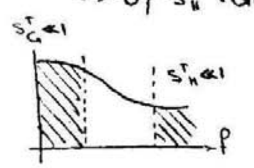
$S_H^T = \frac{-G^2}{(1+GH)^2} \cdot H \cdot \frac{(1+GH)}{G} \rightarrow$ تابع تبدیل کامل حساسیت سیستم: $S_H^T = \frac{-GH}{1+GH}$

* به این دلیل متحمل گردیم که : $S_G^T - S_H^T = 1$

$GH \gg 1 \rightarrow S_H^T = -1$

$GH \ll 1 \rightarrow$

(با کمتر شدن GH ، S_H^T کم می شود)



$H \rightarrow$

* جلسهٔ دهم : سه‌شنبه : ۸۲/۱/۱۹

یادآوری :

$$e = y_d - y \qquad \frac{e}{y_d} = \frac{1}{1+GH} \qquad S_G^T = \frac{1}{1+GH} \qquad S_H^T = \frac{-GH}{1+GH}$$

$$S_G^T - S_H^T = 1$$

c) تنظیم پاسخ حالت گذرا :

Find u s.t $y \to y_d$

$$\lim_{t \to t_f} y = y_d \qquad t_f \neq \infty$$

$$u \to \boxed{G} \to y$$

$$y = Gu \qquad u = y_d$$

$$\Rightarrow y = G y_d$$

⇐ به G بستگی دارد که چگونه y به y_d نزدیک شود

مثال:

$$G(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s^2 + 2s + 4}$$

در نهایت y به $\frac{1}{4}$ می‌رسد (گین dc سیستم ۱/۴ است)

در سیستم Open loop ، برای رسیدن به y_d (خروجی مطلوب) ، G در اختیار ما نیست و نمی‌توانیم آن را تغییر دهیم.

یک روش Invers dynamic است:

$$u = C(s) \cdot y_d \qquad y_d \to \boxed{C(s)} \xrightarrow{u} \boxed{G} \to y$$

$$C(s) = G^{-1}(s)$$

* اشکالات این روش:

(۱) $G(s)$ دقیقاً شناخته شده نیست.

(۲) $G(s)$ تغییر می‌کند.

(۳) ممکن است معکوس سیستم G ، ناپایدار باشد (G دارای صفر سمت راست باشد)

(۴) ممکن است درجه صورت G از مخرج آن کمتر باشد (مشتق‌گیر داشته باشیم) (G اگر اکیداً سره باشد : Strictly Proper)

به غیر از تنها بعضی کنترلهای مشابه، کنترل Open Loop کاربردی ندارد ← بیشتر کنترل حلقه بسته صحبت می‌کند.

* مثال: موتور dc با کنترل آرمیچر:

فرض: مدل کوچک است:

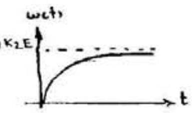
$$G(s)=\frac{\omega(s)}{V_a(s)}=\frac{K_1}{1+\tau_1 S}$$

$$K_1=\frac{K_m}{R_a f+K_b K_m} \quad \text{و} \quad \tau_1=\frac{R_a J}{R_a f+K_b K_m}$$

به فرض V_a ولتاژ پله است:

$$V_a=\frac{K_2 E}{S}$$

$$\Rightarrow \omega(t)=K_1 K_2 E\left(1-e^{-t/\tau_1}\right)$$



فرض می‌خواهیم این نمودار را تغییر دهیم: مثلاً تندتر به مقدار نهایی برسد:

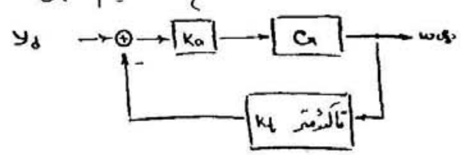
تنها اهرم ما τ_1 است، $\tau_1=\frac{R_a J}{R_a f+K_b K_m}$. اما پارامترها را در اختیار نیست که تغییر دهیم. و تنها

J (ممان اینرسی بار) تغییرش تأثیر زیادی روی τ می‌گذارد.

الان مشاهده می‌کنیم که سیستم حلقه بسته چگونه مشکل را حل می‌کند:

(۱) چون تقویت کننده

(۲) تنظیم کننده پاسخ گذرا



کنترل فیدبک سرعت:

الان قصد داریم پاسخ زمانی این سیستم را ببینیم (برای ω) و ببینیم چه پارامترهایی در اختیار ماست تا کمک آنها پاسخ گذرا را تغییر دهیم:

$$\frac{\omega(s)}{y_d(s)}=\frac{K_a G}{1+K_a K_t G}=\frac{\frac{K_a K_1}{1+\tau_1 S}}{1+\frac{K_a K_t K_1}{1+\tau_1 S}}=\frac{K_a K_1}{1+\tau_1 S+K_a K_t K_1}=\frac{\left.\frac{K_a K_1}{1+K_a K_t K_1}\right\} K_2}{1+\frac{\tau_1 S}{1+K_a K_t K_1}}$$

$$\tau_c=\frac{\tau_1}{1+K_a K_t K_1}$$

Closed Loop

واضح است که $\tau_1>\tau_c$

و از طرف اهرم K_a در اختیار ماست که می‌توانیم ثابت زمانی سیستم را تغییر دهیم.

بفرض: $y_d = \frac{K_2 E}{S}$ ← $\omega(t) = K_c \cdot K_2 \cdot E(1-e^{-t/\tau_c})$

تذکر: K_t نیز بر مقدار τ_c اثر دارد اما از آن استفاده نمی‌کنیم: چون:

$$\frac{\omega(s)}{y_d(s)} = \frac{\frac{K_a K_1}{1+K_a K_1 K_t}}{1+\frac{\tau_1 s}{1+K_a K_t K_1}}$$

← افزایش K_t، گین را کم می‌کند.

اما K_a (چون هم در مخرج است و هم در صورت) اثری بر گین ندارد.

تذکر: $P_c = -\frac{1+K_a K_t K_1}{\tau_1}$

تذکر: K_a را خیلی نمی‌توان زیاد کرد که τ_c کم شود چون:

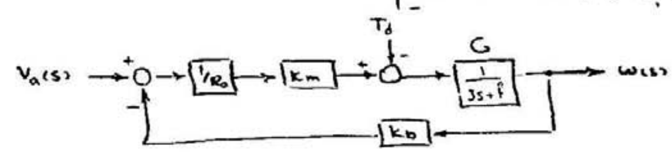
(۱) هزینه بالا می‌رود

(۲) افزایش K_a ⟸ افزایش V_a ← ممکن سیستم زود به ناحیه اشباع برود

معمولاً با این روش، تا ۱۰۰ برابر حلقه باز، سیستم را بهبود می‌بخشیم.

(D) اثر سیگنالهای اغتشاش بر سیستم فیدبک:

در اینجا هم از همان موتور dc با فرض کوچک بودن L_a استفاده می‌کنیم:



می‌خواهیم اثر T_d را ببینیم: چون سیستم LTI است ← از جمع آثار کمک می‌گیریم:

$V_a(s)=0$ تا فقط اثر T_d را ببینیم. فرض $T_L(s) = \frac{D}{S}$ (ورودی پله‌ای)

$$\frac{\omega}{T_d} = \frac{-G}{1+\frac{K_m K_b}{R_a}\cdot G} = \frac{-\frac{1}{Js+f}}{1+\frac{K_b K_m}{R_a}\cdot\frac{1}{Js+f}} = \frac{-1}{Js+f+\frac{K_b K_m}{R_a}}$$

$$\rightarrow \omega(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{-D}{Js+f+\frac{K_bK_m}{R_a}} = \frac{1}{s}\cdot\frac{-D\cdot R_a}{(Js+f)R_a+K_bK_m}$$

بکمک قضیه مقدار نهایی داریم :

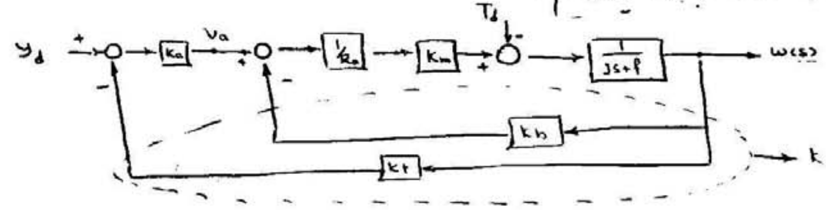
$$\omega_{ss} = \lim_{t\to\infty}\omega(t) = \lim_{s\to 0} s\,\omega(s) = \frac{-DR_a}{fR_a+K_bK_m}$$

هنگامیکه از قضیه مقدار نهایی استفاده می کنیم ، باید از پایداری سیستم مطمئن باشیم.

در اینجا مطمئن بودیم ، چون تمام المان های سیستم فیزیکی اند ، و یک ریشه داریم آن هم چپ $j\omega$ است ← پایدار است

$$e_{ss} = V_a(s)-\omega(s) = \frac{DR_a}{fR_a+K_bK_m}$$

الان حالت فوق را با حالت حلقه بسته مقایسه می کنیم :



ساده سازی : $\rightarrow K_t+\frac{K_b}{K_a}$

$$V_a=0 \quad T_L=\frac{D}{s} \qquad \rightarrow \frac{\omega}{T_d} = \frac{-\frac{1}{Js+f}}{1+\frac{K_aK_m}{R_a}\left(K_t+\frac{K_b}{K_a}\right)\cdot\frac{1}{Js+f}} = \frac{-1}{Js+f+K_aK_t\frac{K_m}{R_a}+\frac{K_mK_b}{R_a}} = \frac{-1}{Js+f+\frac{K_m}{R_a}(K_aK_t+K_b)}$$

$$\omega(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{-DR_a}{(Js+f)R_a+K_m(K_aK_t+K_b)}$$

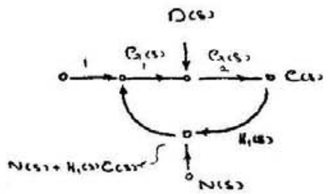
$$\omega_{ss} = \lim_{s\to 0} s\,\omega(s) = \frac{-DR_a}{fR_a+K_m(K_aK_t+K_b)}$$

– با افزایش K_a این کسر کوچک می شود ، اثر سیگنال اغتشاش کم می شود

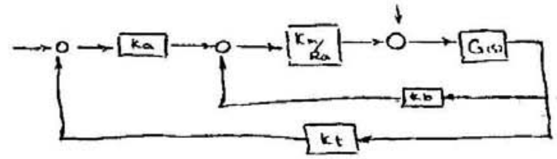
تذکر : افزایش گین حلقه فیدبک ، تمام مشخصات سیستم را بهبود می بخشد به جز Sensitivity.

* جلسه دهم : یکشنبه : ۸۲،۱،۲۴

نویز : سیگنال سنسور (sensor)

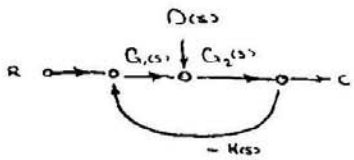


موتور dc :



(I)

سیستم استاندارد یک حلقه‌ای:



$$(I) \rightarrow \begin{cases} G_2(s) = G(s) \\ G_1(s) = \dfrac{K_a K_m}{R_a} \\ H(s) = K_t + \dfrac{K_b}{K_a} \end{cases}$$

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{-G_1 G_2 H_2}{1 + G_1 G_2 H_1 H_2}$$

$$\frac{C(s)}{N(s)} = -\frac{1}{H_1} \quad \leftarrow \quad G_1 G_2 H_1 H_2 \gg 1$$

برای کاهش نویز ، H_1 باید بزرگ باشد.

نسبت سیگنال به نویز سنسور

$$\begin{cases} S_H^T & H \gg 1 \\ \text{نویز} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_G^T \\ D(s) \end{cases} \qquad \frac{1}{2} \qquad A \rightarrow$$

$$S_{G_2}^T = \frac{\partial T}{\partial G_2} \cdot \frac{G_2}{T} \Rightarrow S_{G_2}^T = \frac{G_1(1 + G_1 G_2 H) - G_1 H G_2}{(1 + G_1 G_2 H)^2}$$

$$T = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H} \qquad S_{G_2}^T = \frac{1}{1 + G_1 G_2 H}$$

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{G_2}{1+G_1G_2H} \qquad G_1G_2H \gg 1 \Rightarrow \frac{C(s)}{D(s)} = \frac{1}{G_1H}$$

$$\Leftarrow \quad \begin{cases} \dfrac{C(s)}{N(s)} \cong \dfrac{-1}{H_1} \\ S_H^T \cong -\dfrac{1}{H} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{C(s)}{D(s)} \cong \dfrac{1}{G_1H} \\ S_{G_2}^T \cong \dfrac{1}{G_1G_2H} \end{cases}$$

G_2 گین حلقه را افزایش می‌دهد ولی اغتشاش را تیز زیاد می‌کند. بنابراین G_1 را انتخاب می‌کنیم برای افزایش گین حلقه.

در مسیر feed forward هر تابع تبدیلی که دیده نمی‌شود (در صورت نمی‌آید) را افزایش می‌دهیم. (برای کاهش حساسیت)

خطای حالت دائم:

برای سیستم نوسانی، transcient هیچگاه از بین نمی‌رود، خطای حالت دائم ندارد.

سیستم باید به حالت پایدار برسد که خطای حالت دائم را بتوان برای آن تعریف کرد.

خطای تعقیب:

$e(t) = r(t) - c(t)$

$E(s) = R(s) - C(s)$

با فرض پایداری سیگنال $e(t)$:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

a) سیستم حلقه‌باز:

$C(s) = G(s) \cdot R(s) \qquad R(s) \longrightarrow \boxed{G} \longrightarrow C(s)$

$\longrightarrow E(s) = (1 - G(s))R(s)$

با فرض $R(s) = \frac{1}{s} \leftarrow$

$E(s) = (1 - G(s)) \cdot \frac{1}{s}$

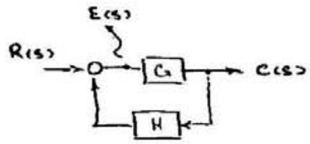
با فرض پایداری G:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) = 1 - G(0)$$

$\hookrightarrow$ گین dc

$\leftarrow$ خطای حالت دائم وابسته به DC gain سیستم است.

ب) سیستم حلقه بسته :



$E(s) = R(s) - C(s)$ $\qquad$ $C(s) = T(s) \cdot R(s)$

$$\Rightarrow e_{ss} = \lim_{s \to 0} s(1 - T(s)) \cdot \frac{1}{s} = 1 - T(0)$$

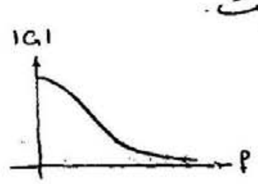
گین dc سیستم حلقه بسته ←

$E(s) = \frac{1}{1+G} \cdot R(s)$ $\qquad$ $H(s) = 1$ $\qquad$ $R(s) = \frac{1}{s}$

$$\Rightarrow e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \frac{1}{1+G(0)}$$

(با فرض پایداری سیستم حلقه بسته : $T = \frac{1}{1+G}$)

سیستمهای فیزیکی غالباً پایین گذر هستند ، بنابراین حالت حلقه بسته بهتر است .

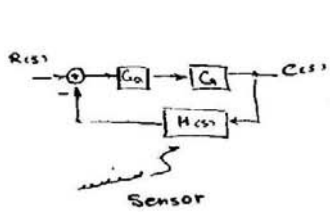


$$\begin{cases} e_c = 0 \Rightarrow G(0) \to \infty \\ e_0 \approx 0 \Rightarrow G(0) \gg 1 \end{cases}$$

* مثال :

$$\begin{cases} G(s) = \frac{K}{1+\tau s} \\ H(s) = \frac{1}{1+\tau s} \end{cases} \qquad e_{ss} = ?$$

* هزینهٔ فیدبک :



هزینه‌های مادی:
- افزایش پیچیدگی (Instrumentation)
- افزایش قیمت

هزینه‌های معنوی:
- کاهش بهره (Gain) : قابل قبول
- امکان ناپایداری : قابل قبول نیست : باید از این بپرهیزیم

آنچه که برای ما مهم است، ریشه‌های $G+1$ است. ممکن است G پایدار باشد ولی $1+G$ غیر.

* مثال:

$$G(s) = \frac{s-1}{s+0.5}$$

$$k = 1$$

$$T = \frac{\dfrac{s-1}{s+0.5}}{1 + k\cdot\dfrac{s-1}{s+0.5}} = \frac{s-1}{s+0.5+s-1}$$

$$\rightarrow \quad T(s) = \frac{s-1}{2s-0.5}$$

بدیهی است که ناپایدار است. در حالیکه G پایدار بود.

در این مثال اگر بصورت حلقه باز کنترل می‌کردیم، پایدار می‌شد.

* اندازه‌های عملکرد سیستم فیدبک:

Performance

- Index
- Messure
- Criteria

هر سیستمی دو دسته پاسخ دارد:
- پاسخ فرکانسی
- پاسخ زمانی

پاسخ زمانی نسبت به ورودیهای استاندارد

ورودیهای استاندارد:
- ساده باشند
- تمام سیگنالها را برحسب این ورودیها بنویسیم

ورودیهای استاندارد خانواده پله و چندجمله‌ای:

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$$

$$u(t) \rightarrow 1/s$$

$$r(t) \rightarrow 1/s^2$$

$$p(t) \rightarrow 1/s^3$$

پاسخ ضربه یک سیستم را تابع تبدیل (G(s)) برابر $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$ می باشد.

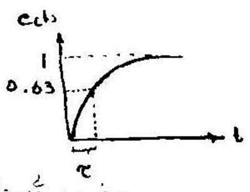
معیارهای عملکرد بر مبنای پاسخ پله ساخته می شوند.

ساخت پله آسانتر از ضربه است. سیگنال خروجی سیستم در پله، bounded است. ولی در r(t) و p(t) اینطور نیست.

پاسخ زمانی سیستم درجه 1 :

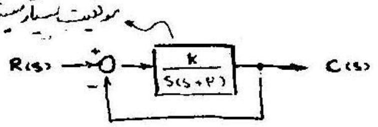
پاسخ ایده آل سیستمها، پاسخ فرومیرای درجه ۲ است.

$$G(s) = \frac{1}{1+\tau s} \longrightarrow c(t) = 1 - e^{-t/\tau}$$



عملکرد سیستم درجه ۲ :

موقعیت بسیاری سیستمها مثل [illegible]



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{S^2 + PS + K} = \frac{\omega_n^2}{S^2 + 2\xi\omega_n S + \omega_n^2}$$

Standard form

پاسخ ضربه :

$$g(t) = \frac{\omega_n}{\beta} \cdot e^{-\xi\omega_n t} \cdot \sin(\omega_n \beta t) \qquad \beta = \sqrt{1-\xi^2} \qquad 0<\xi<1$$

فرامیرا : دو قطب ساده $\xi > 1$

میرای بحرانی : قطب ساده مکرر $\xi = 1$

* جلسهٔ یازدهم: سه‌شنبه: ۸۲/۱/۲۶

معیارهای عملکرد:

برمبنای مشخصات تعریف شده ← اندازه‌های عملکرد (کمّی) ← ارتباط معیارهای عملکرد با پارامترهای سیستم ← تنظیم پارامترهای خاص برای دستیابی به مشخصات مطلوب.

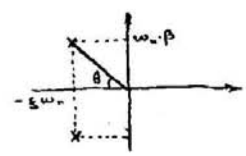
طراحی

- اندازه‌های عملکرد برمبنای پاسخ پله سیستم تعیین می‌شود.
- امکان برقراری ارتباط معیارهای عملکرد با پارامترهای سیستم، در سیستمهای بالای درجه ۲ به طور تحلیلی امکان پذیر نیست.
- اکثر سیستمها را با تقریب می‌توان به درجه ۲ مدل کرد.

* سیستم درجه دو استاندارد:

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n+\omega_n^2}$$

پاسخ فرومیرا:



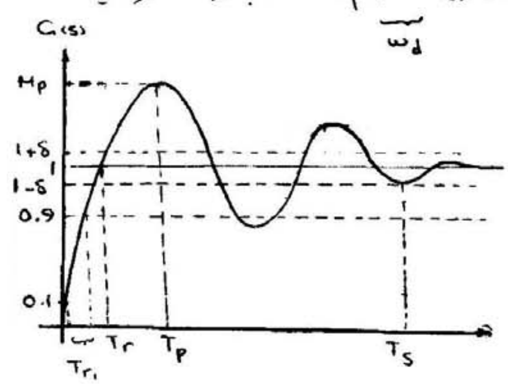
$$s_{1,2}=-\xi\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\begin{cases}\beta=\sqrt{1-\xi^2}\\ \theta=\cos^{-1}\xi\end{cases}$$

پاسخ ضربه: $g(t)=\frac{\omega_n}{\beta}\cdot e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_n\beta t)$

پاسخ پله: $c(t)=1-\frac{1}{\beta}e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_n\beta t+\theta)$

در ω_n ثابت، با افزایش ξ سیستم میرایی بیشتری می‌شود. و از طرفی $\underbrace{\beta\omega_n}_{\omega_d}$ کم می‌شود ← با سرعت کمتری میرا می‌شود.



تعریف اندازه‌های عملکرد:

T_r : (زمان اوج Rise time) : زمان رسیدن پاسخ به ٪100 مقدار نهایی

T_{r_1} : زمان رسیدن پاسخ از 0.1 تا 0.9 پاسخ نهایی

T_p : زمان قله (Peak time) : زمان رسیدن پاسخ به ماکسیمم خودش

M_p : ماکزیمم مقدار پاسخ

T_s : زمان نشست، زمان قرار : (Setting time) : زمانی است که سیستم به پاسخ محدود δ از مقدار نهایی می‌رسد و در آن استقرار می‌یابد.

P.O (Percent Overshoot) : درصد بالازدگی یا انحراف نرمالیزه شده پاسخ از مقدار نهایی :

$$P.O = \frac{M_p - C_{ss}}{C_{ss}} \times 100$$

C_{ss} : خروجی در حالت ماندگار (دائم)

معیارهای سرعت: T_r، T_p، T_s

معیارهای دقت : M_p، T_s، P.O

معیارهای عملکرد بر حسب پارامترهای سیستم درجه ۲ : (ξ, ω_n)

$$g(t) = \frac{\omega_n}{\beta} \cdot e^{-\xi\omega_n t} \cdot \sin(\omega_n \beta t)$$

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\xi_n \omega_n t} \cdot \sin(\omega_n \beta t + \theta) \qquad \theta = \cos^{-1}\xi \qquad \beta = \sqrt{1-\xi^2}$$

- یافتن زمان رسیدن به ماکزیمم مقدار (T_p) :

$$\left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_{t=T_p} = 0 \rightarrow g(T_p) = 0$$

$$g(t) = 0 \rightarrow \sin(\omega_n \beta t) = 0 \rightarrow \omega_n \beta T_p = \pi \rightarrow \quad T_p = \frac{\pi}{\omega_n \beta}$$

- ماکزیمم مقدار پاسخ (M_p) :

$$M_p = C(T_p) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\xi\omega_n T_p} \sin(\omega_n \beta T_p + \theta) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\xi\frac{\pi}{\beta}} \sin(\pi + \theta)$$

$$= 1 + \frac{1}{\beta} e^{-\xi\pi/\beta} \cdot \sin\theta \quad \rightarrow \quad M_p = 1 + e^{-\xi\pi/\beta}$$

- P.O :

$C_{ss} = 1 \rightarrow$

$$P.O = \frac{M_p - 1}{1} \times 100 \rightarrow \qquad P.O = 100 \cdot e^{-\xi\pi / \sqrt{1-\xi^2}}$$

overshoot تنها به ξ وابسته است.

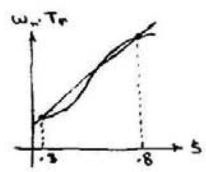
$$\left.\begin{array}{l} T_p \downarrow \leftarrow \xi \downarrow \quad \omega_n = cte \\ T_p \downarrow \leftarrow \omega_n \uparrow , \ \xi = cte \end{array}\right\}$$

- Tr (زمان رسیدن به ٪100 مقدار نهایی):

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\xi\omega_n t} \cdot \sin(\omega_n \beta t + \theta) \rightarrow c(T_r) = C_{ss} = 1 \rightarrow \sin(\omega_n \beta T_r + \theta) = 0 \rightarrow$$

$$\omega_n \beta T_r + \theta = \pi \rightarrow \qquad T_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_n \cdot \beta}$$

هر چه ξ بیشتر باشد سرعت سیستم بیشتر است.



- T_{r1} : به کمک حل عددی یافته می‌شود:

$$\rightarrow \quad T_{r1} \approx \frac{2.16\xi + 0.6}{\omega_n}$$

$$0.3 < \xi < 0.8$$

- Ts : زمان نشست :

تعریف : مدت زمانی را می‌گویند که پاسخ سیستم وارد محدوده δ می‌شود:

(پاسخ پایانی ترم نهایی است)

$\delta = 2\%$

$\delta = 5\%$

برای توابع نمایی: $\tau \rightarrow 0.63$

$3\tau \rightarrow 0.95$

$4\tau \rightarrow 0.98$

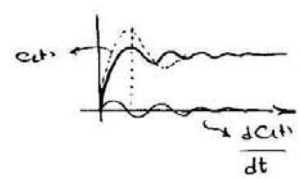
$$T_s \begin{cases} \delta = 2\% \rightarrow 4\tau = \dfrac{4}{\xi\omega_n} \\ \delta = 5\% \rightarrow 3\tau = \dfrac{3}{\xi\omega_n} \end{cases}$$

اثرات صفر و قطب سوم:

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$G(s)=\frac{\omega_n^2(1+T_z\cdot s)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} \rightarrow G(s)=\underbrace{\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}}_{c_1(t)}+T_z\cdot\frac{\omega_n^2 s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$c(t)=c_1(t)+\left(\frac{dc_1(t)}{dt}\times T_z\right)$$



T_s و T_p کم می‌شود.

P.O : افزایش می‌یابد

با افزایش ثابت زمانی صفر (T_z)، این اثرات محسوس‌ترند.

T_z تأثیری بر c_{ss} ندارد ← با افزایش T_z سیستم ناپایدار نمی‌شود.

اثر صفر سمت راست:

$T_z<0$

$$c(t)=c_1(t)+\overset{\text{منفی}}{T_z}\cdot\frac{dc_1(t)}{dt}$$

T_r و T_p افزایش می‌یابد، P.O کم می‌شود.

پاسخ دارای undershoot می‌شود.

سیستمی که صفر راست دارد، پس از لحظه شروع undershoot دارد (در ابتدا در جهت عکس حرکت می‌کند).

هر چند صفر سمت راست به محور نزدیک‌تر شود، اثرات مخرب آن بیشتر می‌شود.

اگر T_z خیلی کوچک باشد یا سمت راست خیلی دور از محور باشد، اثرات آن کم است و از اصطلاح Weak non-minimum phase می‌نامیم.

* جلسه دوازدهم : پنجشنبه : ۸۲/۱/۲۸

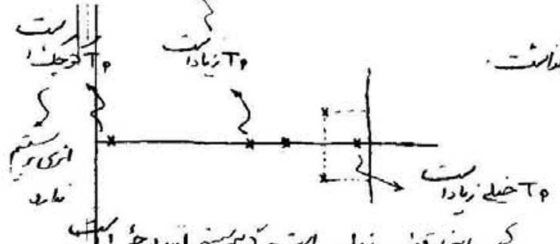
اثر قطب سوم :

از صفر: صفر مانند یک مشتق گیر عمل می کند. صفر سرعت سیستم و overshoot را افزایش می دهد.

اما اثر قطب:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)(1+T_p s)} = \frac{As+B}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} + \underbrace{\frac{K}{s+\frac{1}{T_p}}}_{e^{-t/T_p}}$$

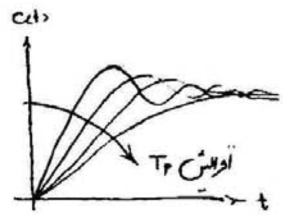
اگر T_p خیلی کوچک باشد ← اثری بر پاسخ زمانی نخواهد داشت.



که در اینجا، قطب غالب است و گویی سیستم از درجه 1 است.

اگر قطب سوم، T_p کوچک نداشته باشد ← سیستم را کند می کند. زمان اوج و زمان نشست زیاد می شود و P.O کم می شود.

در حالت قطب غالب، چون سیستم درجه 1 است ← Overshoot ندارد.



نرخ عملکردی در حذف قطب سوم باید منظور شود.

* در دو حالت میتوان از اثر یک قطب صرفنظر کرد (یعنی اثر قطب در پاسخ زمانی محسوس نباشد) :

(۱) قطب از محور ساز خیلی دور باشد.

بیان ریاضی :

$$G(s) = \frac{m(s)}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)\cdots(s+\alpha_n)} \qquad \alpha_i \gg 1$$

$$\rightarrow g(t) = k_1 e^{-\alpha_1 t} + \cdots + k_n e^{-\alpha_n t}$$

(۲) صفری در نزدیکی یک قطب وجود داشته باشد:

$$G(s)=\frac{(s+z_1)\cdots}{(s+\alpha_1)\cdots}$$

$z_1=\alpha_1 \Rightarrow$ اثر قطب کاملا حذف می‌شود

$z_1\approx\alpha_1 \Rightarrow$ اثر قطب کم می‌شود.
(با کم شدن ضریب آن در پاسخ زمانی)

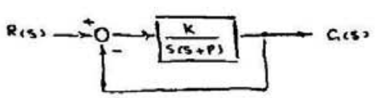
تذکر:

$$g(t)=k_1e^{-\alpha_1 t}+\dots+k_ne^{-\alpha_n t}$$

k_i ها توسط صفرها و α_i ها توسط قطبها تعیین می‌شود.

... تا کنون معیارهای عملکرد بیان شدند. اکنون به کمک مثال زیر کاربرد آنها را بیان می‌کنیم:

* مثال:



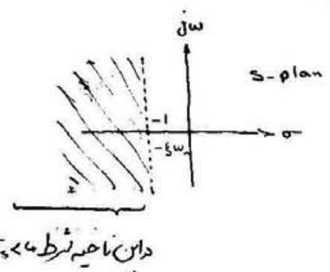
$$T(s)=\frac{K}{s^2+Ps+K}$$

پارامترهای P و K را طوری تعیین کنید که پاسخ گذرا دارای $P.O<0/05$ و زمان نشست کمتر از 4s داشته باشد.

$$T(s)=\frac{K}{s^2+Ps+K}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \rightarrow \begin{cases} K=\omega_n^2 \\ P=2\xi\omega_n \end{cases}$$

$$T_s=\frac{4}{\xi\omega_n}<4(s) \rightarrow \xi\omega_n>1$$

سیستم درجه ۲ داریم: $S_{1,2}=-\xi\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$



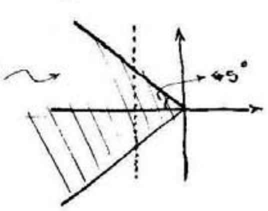
در این ناحیه شرط $T_s<4$ ارضا می‌شود

$$P.O=e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\xi=0.707 \rightarrow P.O=4.3\ \%$$

اکنون باید ناحیه‌ای از صفحه s را بیابیم که این شرط را نیز ارضا کند:

ارضای شرط $P.O<0/05$



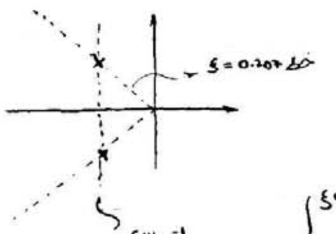
$$\theta=\cos^{-1}\xi=\cos^{-1}(0.707)=45^\circ$$

و ناحیه مشترک پاسخ است

* راه حل دیگر این بود که ابتدا یک مقدار کمتر از ۹٪ برای PO و مقدار کمتر از ۲(s) برای T_s فرض کنیم و معادلات را حل کنیم و پارامترهای مطلوب یافت شود.

الان بحث می‌کنیم کجای این ناحیه مطلوب، بهتر است؟

نقطه‌های خوب روی مرز هستند.



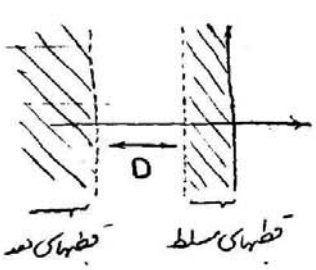
$$\begin{cases} \zeta\omega_n = 1 \\ \zeta = 0.707 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \omega_n = \sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K = 2 \\ P = 2 \end{cases}$$

نتیجه: K در اختیار ماست (چون گین است)
ولی تنظیم P در اختیار ما نیست.

* مفهوم قطب مسلط:

یک سری قطبها هستند که روی پاسخ زمانی تأثیر دارند: قطبهای نزدیک محور $j\omega$

یک سری قطبها تأثیر چندانی بر پاسخ زمانی ندارند: قطبهای دور از محور $j\omega$



. معیار دقیقی برای D نمی‌توان ارائه کرد.

- جزء حقیقی قطبها سرعت میرا شدن را تعیین می‌کند
- جزء موهومی قطبها، فرکانس میرا شدن را.

• بطور تجربی می‌توان گفت: قطبهایی که ۵ تا ۱۰ برابر از بقیه قطبها به محور $j\omega$ دورتر باشند، قطب غیرمسلط هستند.

• حفظ گین dc در حذف قطبهای غیرمسلط:

... اکنون به این موضوع می‌پردازیم که چگونه می‌توان قطب غیرمسلط را حذف کرد:

• مثال:

$$G(s)=\frac{10}{(s+10)(s^2+2s+2)} \qquad s_{1,2}=-1\pm j \qquad s_3=-10$$

چون $real(s_3) \ll real(s_{1,2})$ یعنی: $-10 \ll -1$ $\Rightarrow$ s_3 قطب دور است

$\Rightarrow$ $s_{1,2}$ قطبهای مسلط است

$\Rightarrow$ آیا می‌توان نوشت: $G_1(s)=\frac{10}{(s^2+2s+2)}$ ؟ پاسخ: خیر

چون گین dc برای G و G_1 یکی نیست.

$$G(s)=\frac{10}{10(s^2+2s+2)(1+\frac{s}{10})} \longrightarrow \frac{s}{10}\ll 1 \Rightarrow G(s)=\frac{10}{10(s^2+2s+2)}$$

این فرم درست است: چون $dc_{gain}=G(0)=0.5$ تغییر نکرده است.

• تخمین پارامترهای سیستم درجه ۲:

توضیح: در این بخش می‌توان پارامترهای سیستم درجه ۲ را یافت هرگاه با اعمال ورودی به سیستم درجه ۲، خروجی را داشته باشیم.

- پارامترهای سیستم درجه ۲ استاندارد: ζ و ω_n

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

- پارامترهای سیستم درجه ۲ به فرم کلی: ζ و ω_n و K

$$G(s)=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

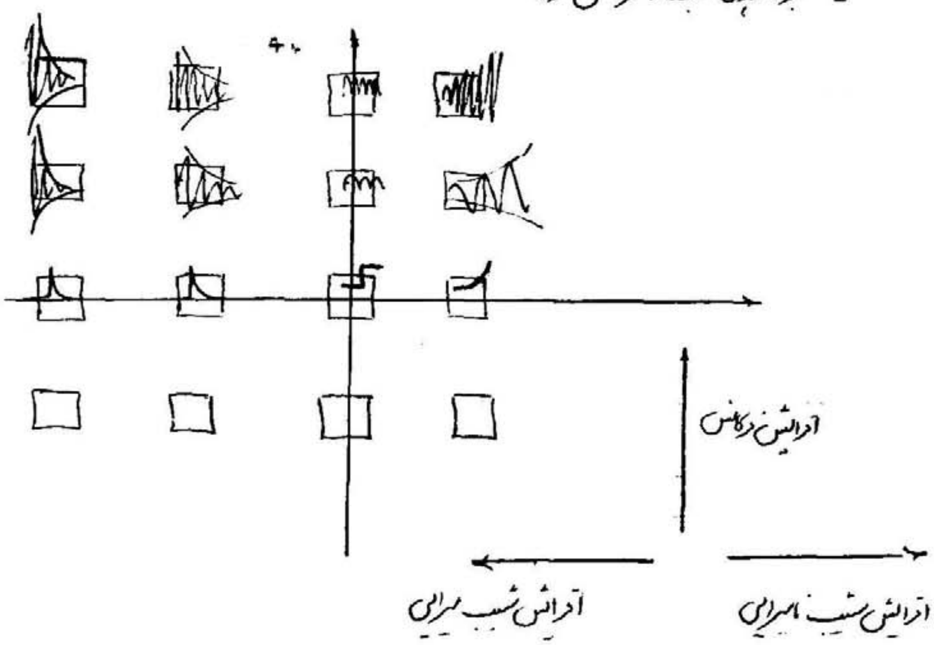
(چون همیشه $dc_{gain}=1$ می‌باشد.)

از روی P.O نمودار: ζ بدست می‌آید و از روی T_r و T_s، ω_n بدست می‌آید.

K هم که همان مقدار ماندگار سیستم است.

* محل قطبها و پاسخ حالت گذرا :

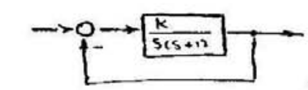
- جزء حقیقی قطب : شیب میرایی
- جزء موهومی قطب : فرکانس نوسان



. فیدبک سرعت:

عموماً قطب در حلقه باز در اختیار ما نیست و نمی توانیم آن را تنظیم کنیم.

مثال: K را طوری بیابید که $\begin{cases} P.O \leq . \\ T_s \leq . \end{cases}$



$$T(s) = \frac{K}{S^2+S+K}$$

آیا برای این تابع می توان T_s تعیین کرد؟ پاسخ: خیر: چون $\xi\omega_n$ ثابت است و در دست ما نیست.

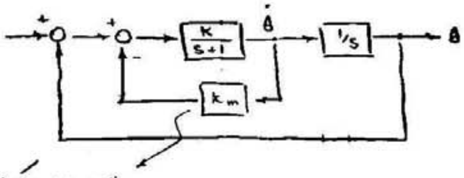
$$\frac{K}{S^2+S+K} = \frac{\omega_n^2}{S^2+2\xi\omega_n S+\omega_n^2} \longrightarrow \xi\omega_n = 0.5$$

$$T_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = 8$$

از طرفی ξ هم در اختیار ما نیست چون با تغییر K، ω_n تغییر می کند و چون $\xi\omega_n$ ثابت است ← ξ هم تغییر می کند.

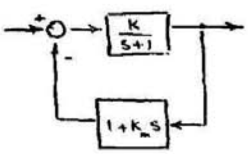
← تنها یکی از پارامترهای سیستم را می توانیم کنترل کنیم.

راه حل: فیدبک سرعت:



مانند دمپر عمل می کند
(فنر)

پس از ساده سازی داریم:



$$\longrightarrow T(s) = \frac{\frac{K}{S(S+1)}}{1+\frac{K(1+K_h S)}{S(S+1)}}$$

$$\longrightarrow T(s) = \frac{K}{S^2+(1+KK_h)S+K} = \frac{\omega_n^2}{S^2+2\xi\omega_n S+\omega_n^2} \longrightarrow \begin{cases} \omega_n^2 = K \\ 2\xi\omega_n = 1+KK_h \end{cases}$$

← کمک K_h می توان ξ را (میرایی) تغییر داد و تأثیری روی ω_n ندارد.

بدیهی است: چون مثل دمپر فرکانس طبیعی کل سیستم را تغییر نمی دهد.

$\left.\begin{array}{l} K \uparrow \longrightarrow \omega_n \text{ تنظیم میشود} \\ K_h \uparrow \longrightarrow \xi \text{ تنظیم میشود.} \end{array}\right\} \leftarrow$

* مثال: پارامترهای k و k_h را برای رسیدن به $P.O < 20\%$ و $T_p < 1(s)$ تنظیم کنید.

$P.O = 100 \cdot e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}$ ، $P.O = 20 \Rightarrow \xi = 0.456 \rightarrow P.O < 20\% \rightarrow \xi > 0.456$

$T_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \rightarrow \omega_n = 3.53 \rightarrow \omega_n > 3.53$ $\quad \Big\} \rightarrow \begin{cases} P.O < 20\% \\ T_p < 1 \end{cases}$

الان به راحتی ξ و ω_n را به k و k_h تبدیل می‌کنیم:

$K = \omega_n^2 = 12.5$

$1 + KK_h = 2 \times 3.53 \times 0.456 \rightarrow K_h = 0.178$

* خطای حالت دائمی:

خطای حالت دائم یکی از مهمترین اندازه‌های عملکرد است.

برای هر سیستم یک حد قابل قبول برای خطای حالت دائم وجود دارد.

یک اهمیت که چگونه میتوانیم خطای حالت دائم را کوچک کنیم؟

* خطای حالت دائم دو منبع (Source) دارد

(۱) المانهای غیرخطی

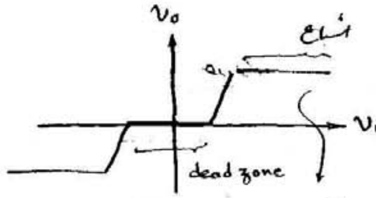
(۲) عدم توانایی دینامیک سیستم برای تعقیب ورودیهای خاص

• المانهای غیرخطی: - اشباع (sat)

- dead zone

- خطای کوانتیزاسیون

- اصطکاک کولمب

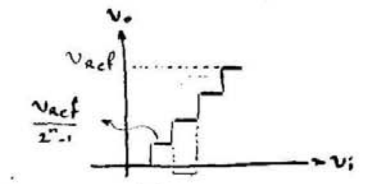


اشباع: ناحیه‌ای که تغییرات ورودی دیده نمی‌شود.

Quantization Error : خطای سطح بندی

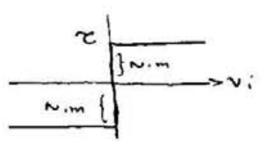
خطای دیجیتیزاسیون:　- ساده سازی کامپیوتری

- مبدل A2D یا ADC　　در حالت n بیت می توان $2^n - 1$ سطح را نشان داد.



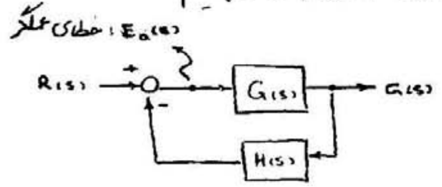
در این محدوده تغییرات جزئی دیده نمی شود

اصطکاک کولمب:



- یعنی باید τ به حدی باشد که بر اصطکاک غلبه کند.

بحث اصلی ما قسمت دوم است (عدم توانایی تعقیب شدن) که اکنون به آن می پردازیم:



$$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$E_a(s) = R(s) - H(s) \cdot C(s)$$

$$\begin{cases} E(s) = R(s) - T(s) R(s) \\ T(s) = \dfrac{G(s)}{1 + G(s) H(s)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E(s) = R(s) - \frac{G}{1+GH} \cdot R(s) = R(s)\left(1 - \frac{G}{1+GH}\right) \Rightarrow E(s) = \frac{1+GH-G}{1+GH} \cdot R(s)$$

در سیستم فیدبک واحد داریم:

$$H = 1 \Rightarrow E(s) = E_a(s) = \frac{1}{1+G(s)} \cdot R(s)$$

در تمامی مباحث این بخش فرض پایداری $T(s)$ لحاظ شده است. چون می خواهیم از قضیه مقدار نهایی کمک بگیریم:

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{s \to 0} s E(s)$$

به فرض: $\Leftarrow R(s) = \frac{1}{s}$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1+G(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1+G(0)}$$

اکنون پارامتری به نام نوع سیستم را معرفی می‌کنیم:

* **نوع سیستم:**

سیستمی با تابع تبدیل مقابل را در نظر بگیرید:

$$G(s) = K \cdot \frac{(1+Z_1 S) \cdots (1+Z_m S)}{S^N (1+P_1 S) \cdots (1+P_n S)}$$

این سیستم: m عدد صفر دارد. $N+n$ عدد قطب دارد.

- مرتبه سیستم: بزرگترین درجه مخرج

* نوع سیستم: تعداد انتگرال‌گیرهای سیستم: تعداد قطبهای سیستم در مبداء $(s=0)$

$$G(0) = \lim_{s \to 0} G(s) = \begin{cases} K & \Leftarrow N=0 \\ \infty & \Leftarrow N \geq 1 \end{cases}$$

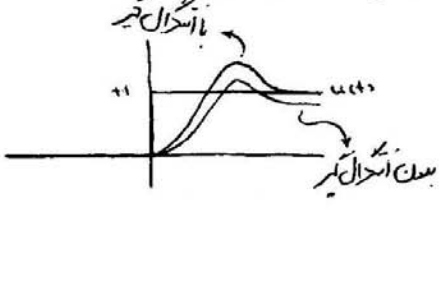
- نتیجه: تنها حالتیکه خطای ماندگار سیستم ($e_{ss} = \frac{1}{1+G(0)}$) صفر باشد، آنست که $G(0)$ بینهایت باشد یعنی $N \geq 1$ باشد؛ به عبارت دیگر سیستم باید حداقل یک انتگرال‌گیر داشته باشد:

ثابت خطای موقعیت:

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s)$$

$$K_p = \begin{cases} K & N=0 \to e_{ss} = \frac{1}{1+K} \\ \infty & N \geq 1 \to e_{ss} = 0 \end{cases}$$

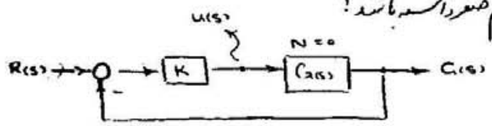
شرط اینکه سیستم بتواند ورودی پله را تعقیب کند، آنست که حداقل یک انتگرال‌گیر داشته باشد.



- آیا با تغییر K می‌توان خطا را صفر کرد؟ پاسخ: خیر - چون K را نمی‌توان تا بی‌نهایت برد.

به عبارت واضح‌تر:

چرا سیستم زیر نمی‌تواند خطای حالت دائم صفر داشته باشد؟



چون K محدود نمی‌تواند خروجی با محدود ایجاد کند.

- تذکر: اگر K را با یک انتگرال‌گیر تعویض کنیم، می‌تواند خطای ماندگار سیستم صفر شود. چون انتگرال‌گیر سطح زیر منحنی خطا را می‌خواند نه خود خطای لحظه‌ای را.

درحقیقت، انتگرال‌گیر، سطح زیر منحنی خطا را به سیستم اعمال می‌کند: بیان ریاضی:

$$\left.\begin{array}{l} e=0 \Rightarrow u(s)=Ke=0 \Rightarrow c(s)=0 \Rightarrow c(s)\neq R(s) \\ e=0 \Rightarrow c(s)=R(s) \end{array}\right\}$$ تناقض

$$e=\frac{1}{1+K}\cdot r \Rightarrow u=\frac{K}{1+K}\cdot r \rightarrow e=(r)\left(1-\frac{K}{1+K}\right)=\frac{r}{1+K}=e$$ تناقض دارد.

← با K محدود، اگر خطا صفر باشد ← به تناقض می‌رسیم ← با افزایش K نمی‌توانیم خطای حالت دائم را صفر کنیم.

- تذکر: اگر انتگرال‌گیر داشته باشیم، می‌توانیم $e=0$ داشته باشیم، درحالیکه $u(s)$ غیرصفر است.

چون انتگرال‌گیر سطح زیر منحنی خطا را اندازه می‌گیرد.