* جلسه سیزدهم :   یکشنبه : ۸۲/۱/۳۱

* خطای حالت دائمی :

یادآوری . ورودی پله :

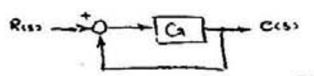
$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s) \Rightarrow e_{ss}=\frac{1}{1+G(0)}=\frac{1}{1+K_p}$$

ثابت خطای موقعیت : $K_p=\lim_{s\to 0} G(s)$

دیدیم :

$$G(s)=K\cdot\frac{(1+T_{z_1})\cdots(1+T_{z_m})}{s^N(1+T_{p_1})\cdots(1+T_{p_n})}$$. نوع سیستم را تعریف کردیم .

اگر ورودی شیب را بررسی کنیم :



$$r(t)=t \to R(s)=\frac{1}{s^2}$$

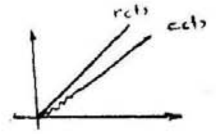
$$E(s)=\frac{1}{1+G(s)}\cdot R(s)=\frac{1}{1+G(s)}\cdot\frac{1}{s^2} \qquad e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+G(s)}\cdot\frac{1}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{sG(s)}$$

ثابت خطای سرعت : $K_v=\lim_{s\to 0} sG(s) \Rightarrow e_{ss}=\frac{1}{K_v}$

$$\begin{cases} N=0 \to K_v=0 \to e_{ss}=\infty \\ N=1 \to K_v=K \to e_{ss}=\frac{1}{K} \\ N\geq 2 \to K_v=\infty \to e_{ss}=0 \end{cases}$$

$N=1 \to \quad r(t)=t$

$c(t)=r(t)-\frac{1}{K}$



$\frac{dr(t)}{dt}=1$

$\frac{dc(t)}{dt}=1$

سرعت خطا ندارد .

ورودی شتاب (سهمی) :

$$r(t)=\frac{t^2}{2} \to R(s)=\frac{1}{s^3}$$

$$E(s)=\frac{1}{1+G(s)}\cdot\frac{1}{s^3} \to e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2+s^2G(s)}$$

ثابت خطای شتاب : $K_a=\lim_{s\to 0} s^2G(s)$

$$\rightarrow \begin{cases} N=0 \rightarrow K_a=0 \rightarrow e_{ss}=\infty \\ N=1 \rightarrow K_a=0 \rightarrow e_{ss}=\infty \\ N=2 \rightarrow K_a=K \rightarrow e_{ss}=\frac{1}{K} \end{cases} \Leftarrow \quad e_{ss}=\frac{1}{K_a}$$

$$N\geq 3 \rightarrow K_a=\infty \rightarrow e_{ss}=0$$

• نتیجه‌گیری:

برای تعقیب ورودی شتاب و با خطای حالت ماندگار صفر، باید حداقل ۳ عدد انتگرال‌گیر در حلقه داشته باشیم.

برای تعقیب ورودیهای با تغییر بیشتر و سریعتر، باید تعداد انتگرال‌گیر بیشتری داشته باشیم.

← مزیت انتگرال‌گیر: کاهش خطا

و اما معایب انتگرال‌گیر:

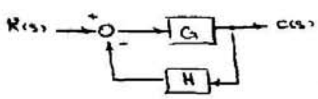
(۱) تأخیر می‌دهد.

(۲) باعث ناپایداری می‌شود.

تأخیر فاز ۱ انتگرال‌گیر: $\angle \frac{1}{s}=-90^\circ$

$\angle \frac{1}{s^2}=-180^\circ$: " " ۲ " "

خطای حالت دائم سیستم با فیدبک غیر واحد:



$E(s) \neq E_a(s)$

$$\frac{E_a(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+GH} \rightarrow E_a(s)=\frac{1}{1+G(s)H(s)}\cdot R(s)$$

فرمولهای بخش قبل تنها برای $E_a(s)$ درست خواهند بود نه $E(s)$:

$$E(s)=R(s)-C(s)=R(s)-T(s)\cdot R(s) \rightarrow$$

$$E(s)=\frac{1+GH-G}{1+GH}\cdot R(s) \qquad (*)$$

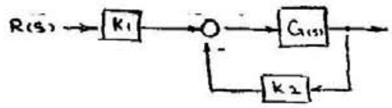
خطای حالت دائم یعنی اندازه‌ی سیستم در فرکانس صفر.

اگر $H(0)=1$ (مثلاً $G(s)=\frac{1}{1+\tau s}$) ← از رابطه (*) دیده می‌شود که همان فرمولهای قبلی معتبرند.

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\frac{1+G(0)H(0)-G(0)}{1+G(0)H(0)}=\frac{1}{1+G(0)}$$

← تمام مطالب پیش در مورد انتگرال‌گیرها ... برقرار است.

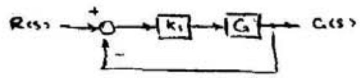
. حالت خاص:



H(s) تنها یک گین است.

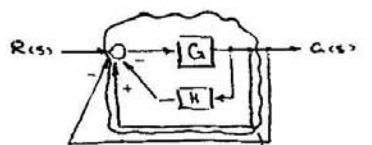
در این صورت، فیدبک واحد تبدیل می‌شود:

$K_1 = K_2 \Rightarrow$

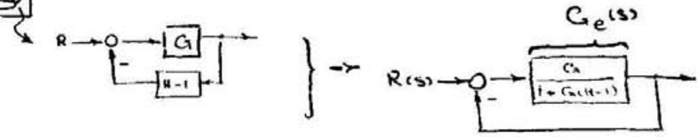


روابط در این قسمت معتبر است. ⇐

• روش دیگری هم وجود داشت:



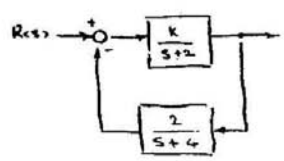
یک فیدبک مثبت و یک فیدبک منفی اضافه می‌کنیم.



$$\Rightarrow G_e(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)(H(s)-1)} \qquad \Rightarrow \qquad E(s) = E_a(s) = \frac{1}{1+G_e(s)} \cdot R(s)$$

⇐ تمام روابط قبلی، با قرار دادن $G_e(s)$ به جای G برقرار است.

• مثال:



Find k s.t $e_{ss} = 0$

$R(s) = \frac{1}{s}$

حل: از روش $G_e(s)$ نمی‌رویم. از روش کلاسیک به طور متعارف استفاده می‌کنیم:

$$T(s) = \frac{\frac{k}{s+2}}{1 + \frac{k}{s+2} \cdot \frac{2}{s+4}} = \frac{k(s+4)}{(s+2)(s+4)+2k}$$

رابطه کلی خطا: $E(s) = R(s) - C(s) = R(s) - T(s) \cdot R(s) = (1 - T(s)) \cdot R(s)$

$$E(s) = (1 - T(s)) \cdot \frac{1}{s} \qquad e_{ss} = \lim_{s \to 0} s E(s) = 1 - \lim_{s \to 0} T(s)$$

⇐ برای صفر شدن e_{ss} باید $\lim_{s \to 0} T(s) = 1$ باشد، یعنی:

$T(0) = \frac{4K}{8+2K} = 1 \rightarrow K = 4$

مشاهده میکنید با وجود آنکه انتگرال گیری وجود ندارد و K هم محدود بود اما سیستم توانایی تعقیب ورودی پله را با خطای ماندگار صفر دنبال می کند.

* با توجه به مشکلات انتگرال گیر، چرا همیشه از روش فوق استفاده نکنیم؟

* پاسخ: اگر G را داشته باشیم، یافتن H(s) مناسب انجام پذیر است، که خطای حالت دائم صفر شود، اما مشکل اینجاست که G را دقیقاً نمی شناسیم. (با شناخت دقیق سیستم است که قطبها، صفرها و ... بدست می آید)
ولی با وجود انتگرال گیر، علیرغم حضور تغییرات سیستم، همچنان خطا صفر خواهد شد. (گین dc انتگرال گیر، ∞ است)

* پایداری:

پایداری یکی از مهمترین پارامترهای سیستم کنترل است.

پایداری { مطلق: یعنی اینکه پایدار است یا خیر
نسبی: یعنی سیستم چقدر در نزدیکی مرز پایداری است. یعنی سیستم پایدار چگونه ناپایدار می شود یا سیستم ناپایدار چگونه پایدار می شود

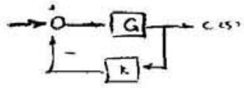
پایداری { BIBO: هر ورودی محدود، خروجی محدود نتیجه می دهد.
Internal Stability (پایداری داخلی): تمام سیگنالهای سیستم باید محدود باشند.

شرط پایداری { BIBO: قطبهای سیستم اکیداً سمت چپ محور jω باشند
داخلی: مقادیر ویژه ماتریس A سمت چپ محور jω باشند.

اگر حذف صفر-قطب سمت راست نداشته باشیم، پایداری داخلی و BIBO معادل یکدیگر هستند.

یعنی: در این صورت مقادیر ویژه ماتریس A، همان قطبهای سیستم است.

• پایداری BIBO : همه قطبهای سیستم سمت چپ محور jω باشد.



$G=\frac{n_p}{d_p}$ $\quad H=\frac{n_h}{d_h}$ $\quad T(s)=\frac{G(s)}{1+H(s)G(s)}$

$$\to T(s)=\frac{\frac{n_p}{d_p}}{1+\frac{n_p}{d_p}\cdot\frac{n_h}{d_h}}=\frac{n_p\cdot d_h}{d_p d_h+n_p n_h}$$

$$\Delta(s)=d_p\cdot d_h+n_p h_h=0$$

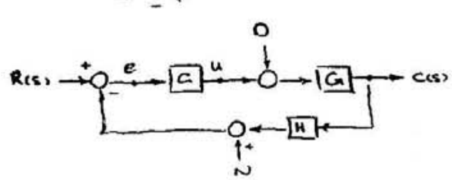
ریشه‌های معادله مشخصه، قطبهای سیستم CL (Closed loop) است.

* شرط پایداری داخلی:

اگر حذف صفر و قطب در RHP (سمت راست صفحه s) در طول حلقه صورت نگرفته باشد ← این دو نوع پایداری یکی هستند.

یعنی باید ریشه‌های $\Delta(s)$ را بررسی کنیم.

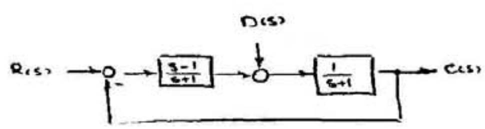
حالت کلی:



• برای پایداری داخلی: (۱) باید حذف صفر و قطب در RHP نداشته باشیم

(۲) ریشه‌های $\Delta(s)$ باید اکیداً سمت چپ محور jω باشند.

* کوییز:



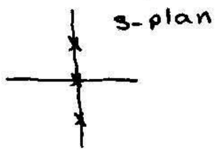
$\frac{C(s)}{R(s)}$ پایدار است $\qquad$ $\frac{C(s)}{D(s)}$: پایدار نیست

تذکر: چون در سیستمهای فیزیکی همواره اغتشاش (disturbance) وجود دارد همه باید پایداری داخلی بحث شود.
یعنی حالت حذف صفر و قطب در RHP را به عنوان راه فراری برای ایجاد پایداری BIBO استفاده نمی‌کنیم.

* پایداری مرزی:

پایداری مرزی یعنی قطبهای ساده روی محور jω هستند.

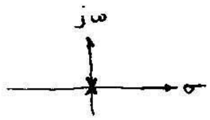
یعنی ناپایداری نمایی وجود ندارد.



یعنی با اندکی تغییر در پارامترها، پایداری BIBO می‌شود یا سیستم ناپایدار می‌شود.

بعضی از ورودی‌های محدود در پایداری مرزی، می‌توانند سیستم را ناپایدار کنند:

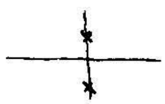
مثال:



$R(s)=\frac{1}{s} \longrightarrow C(s)=\frac{1}{s^2}$ (unbounnded)

$G(s)=\frac{1}{s}$

مثال:



$R(s)=\frac{k}{s^2+w^2}$

$G(s)=\frac{w}{w^2+s^2}$

$\longrightarrow C(s)=\frac{kw}{(w^2+s^2)^2} \longrightarrow \mathcal{L}^{-1} \longrightarrow c(t)=kt\sin wt$

تذکر: اگر قطب تکراری روی محور $j\omega$ باشد، سیستم ناپایدار است.

این ناپایداری به دلیل نمایی بودن نیست. به دلیل اثر عامل t است.

* جلسه چهاردهم : سه‌شنبه : ۸۲٫۲٫۲

... ادامه مباحث پایداری:

پایداری
- BIBO : ⟵ ریشه‌های معادله مشخصه اکیداً سمت چپ ($\Delta(s)$)
- Internal : ⟵ $\Delta(s)$ ⟵ No RHP Pole-Zero Cancellation

در این جلسه می‌خواهیم بدون حل کردن معادله $\Delta(s)=0$ ، در مورد ریشه‌های آن بحث کنیم:

$$\Delta(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1s+a_0=0$$

به شکل فاکتور r_i :

$i=1,2,\dots,n$

$$\Delta(s)=(s-r_1)(s-r_2)\cdots(s-r_n)$$

$$\Delta(s)=s^n-(r_1+r_2+\dots+r_n)s^{n-1}+(r_1r_2+\dots+r_{n-1}r_n)s^{n-2}+\dots+(-1)^n(r_1r_2\cdots r_n)$$

پایداری یعنی : مقادیر حقیقی r_i ها، باید منفی باشد.

شرط لازم (ولی ناکافی) :
- هر ضرایب $\Delta(s)$ مثبت باشد. $(a_i>0)$ (هر ضرایب متحدالعلامت باشد)
- هر ضرایب $\Delta(s)$ باید وجود داشته باشد.

* مثال:

$$\Delta(s)=s^3+s^2+2s+8$$

$$\rightarrow \Delta(s)=(s+2)(s^2-s+4)$$

$$=(s+2)\left(s-\left(\frac{1\pm\sqrt{15}j}{2}\right)\right)$$

شرط لازم را دارد ولی 2 ریشه سمت راست دارد.

... بررسی شرایط لازم و کافی :

* معیار راث ـ هرویتز:

این روش براساس تشکیل یک جدول یا آرایه است.

درایه‌های این ماتریس بطور مستقیم یا غیرمستقیم از ضرایب $\Delta(s)$ یافت می‌شود:

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

* آرایه راث:

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\dots$
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\dots$
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	$\dots$
$\vdots$	c_1	c_2	c_3	$\dots$
s^1	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$s^0=1$				

- دو سطر اول مستقیماً از $\Delta(s)$ بدست می‌آید.

- سطرهای بعدی از ضرایب دو سطر قبل یافت می‌شود به این صورت:

$$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} \qquad b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} \qquad b_3 = \dots$$

$$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} \qquad c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} \qquad c_3 = \dots$$

$\vdots$

بعد از این که سطرهای جدول راث تکمیل شد، داریم:

* شرط لازم و کافی برای آنکه ریشه‌های $\Delta(s)$ همگی سمت چپ محور موهومی باشند، آنستکه در ستون تحت جدول تغییر علامتی مشاهده نشود.

* تعداد ریشه‌های سمت راست = تعداد تغییر علامتهای ستون اول آرایه راث است.

- هنگام برگردان آرایه‌ها جدول راث، سه حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

(۱) جدول بودن تشکیل کامل شود (هیچ عنصری در ستون اول صفر نشود)
(۲) یکی از درایه‌های ستون اول صفر شود.
(۳) تمام درایه‌های یک سطر صفر شوند.

اکنون به بررسی این سه حالت می‌پردازیم:

حالت اول: جدول الصدر ordinary پر شود.

مثال: سیستم درجه ۲:

$$\Delta(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

می‌دانیم در سیستم درجه ۲، اگر تمام ضرایب مثبت باشد، سیستم پایدار است.

s^2	a_2	a_0
s^1	a_1	0
s^0	a_0	

$$\left.\begin{array}{l} a_2>0 \\ a_1>0 \\ a_0>0 \end{array}\right\} \text{پایداری}$$

مثال: سیستم درجه ۳:

$$\Delta(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

s^3	a_3	a_1
s^2	a_2	a_0
s^1	$\frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_2}$	0
s^0	a_0	

$$\left.\begin{array}{l} a_3, a_2, a_1, a_0 > 0 \\ a_2 a_1 > a_0 a_3 \end{array}\right\} \text{شرط پایداری}$$

مثال:

$$\Delta(s) = s^3 + s^2 + 2s + 24$$

s^3	1	2
s^2	1	24
s^1	-22	0
s^0	24	

دو ریشه سمت راست داریم پس ناپایدار است.

برای آنکه ریشه در صفر باشد، باید $a_0 = 0$ باشد.

چون معادلهٔ اخیر درجه ۳ بود و دو ریشه سمت راست داریم، ریشه‌ای که روی محور $j\omega$ باشد نداریم (چون اینگونه ریشه‌ها باید مزدوج باشند ولی در معادله درجه ۳ حداکثر ۳ ریشه داریم).

حالت دوم: یکی از درایه‌های ستون اول، صفر باشد:

- راه حل (۱): عنصر صفر را با ε جایگزین نموده و محاسبات را ادامه می‌دهیم (ε عدد مثبت کوچکی می‌باشد). درپایان ε را به سمت صفر میل می‌دهیم و تغییر علامت‌ها را بررسی می‌کنیم.

- راه حل (۲): در یک فاکتور $(s+\alpha_i)$ که $\alpha_i>0$ ضرب می‌کنیم (غالباً جواب می‌دهد).

مثال:

$$\Delta(s)=s^5+2s^4+2s^3+4s^2+11s+10$$

s^5	1	2	11
s^4	2	4	10
s^3	$0 \to \varepsilon$	6	0
s^2	b_1	b_2	
s^1	c_1	0	
s^0	10		

$$b_1=\frac{4\varepsilon-12}{\varepsilon}=4-\frac{12}{\varepsilon}\simeq-\frac{12}{\varepsilon}$$

$$b_2=\frac{10\varepsilon-0}{\varepsilon}=10$$

$$c_1=\frac{6b_1-10\varepsilon}{b_1}=6-\frac{10\varepsilon}{b_1}\simeq 6$$

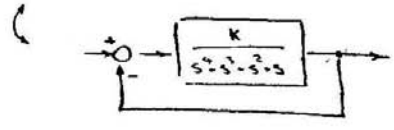
$$\lim_{\varepsilon\to 0} b_1=-\frac{12}{\varepsilon}<0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} c_1=6>0$$

$\Rightarrow$ 2 تغییر علامت دارد $\Rightarrow$ دو ریشه سمت راست دارد.

مثال:

$$\Delta(s)=s^4+s^3+s^2+s+K$$



s^4	1	1	K
s^3	1	1	0
s^2	$0 \to \varepsilon$	K	0
s^1	$\frac{\varepsilon-K}{\varepsilon}$	0	
s^0	K		

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon - k}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} 1 - \frac{k}{\varepsilon} = \begin{cases} -\infty & ; \ k>0 \\ +\infty & ; \ k<0 \end{cases}$$

$k>0$ ⟵ دو تغییر علامت، دو ریشه سمت راست.

$k<0$ ⟵ یک تغییر علامت، یک ریشه سمت راست.

$k=0$ ⟵ $\Delta(s)$ یک ریشه در مبداء دارد.

حالت سوم: وقتی همه عناصر یک سطر صفر شوند:

(۱) یعنی فاکتور مشترک در تقسیمات متوالی وجود دارد. (همواره فرامی که بدست می‌آیدم از تقسیمات متوالی بدست آمده‌اند).

(۲) نشان‌دهنده ریشه‌های متقارن است.

مثال: $\Delta(s) = 9s^4 + 4s^2 + 1$

Δ_1 :	s^4	2	4	1
Δ_2 :	s^3	0	0	0
	s^2			

همانطور که دیده می‌شود، ریشه‌ها متقارن خواهند بود.

$\Delta(s) = \Delta_1(s) \cdot \Delta_2(s)$

(۳) معادله کمکی از سطر قبل تشکیل می‌دهیم. (که ریشه‌های آن متقارن است)

هرگز در سطر زوج، صفر نخواهد شد:

s^5	2	4	1
s^4	0	0	0

$$\Delta(s) = 2s^5 + 4s^3 + s = s(2s^4 + 4s^2 + 1)$$

(۴) ریشه‌های معادله کمکی، ریشه‌های معادله اصلی نیز هستند.

(۵) معادله کمکی زوج است.

* درحالت سوم جدول را چگونه ادامه دهیم؟

– از سطر قبل، یک معادله کمکی تشکیل می‌دهیم: $A(s)$ (Auxilary) ⟵ { زوج ، ریشه‌های متقارن که ریشه‌های $\Delta(s)$ نیز هست.

- ضرایب مشتق $A(s)$ را به جای سطر کاملاً صفر قرار می‌دهیم: $P(s) = \frac{dA(s)}{ds}$

و جدول را ادامه می‌دهیم.

- اکنون تعداد تغییر علامتها متناظر با تعداد ریشه‌های سمت راست خواهد بود.

* مثال: محدودهٔ پایداری: $\Delta(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & K \\ s^1 & \frac{8-K}{2} & 0 \\ s^0 & K & \end{array}$$

شرط پایداری: $\left.\begin{array}{l} 8-K>0 \\ K>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{0<K<8}_{\text{Range پایداری}}$

به ازای $K=8$ در مرز پایداری هستیم:

اگر $K=8 \Rightarrow$ داریم:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & 8 \\ s^1 & 0 & 0 \\ s^0 & 8 & \end{array} \longrightarrow \underbrace{A(s) = 2s^2 + 8}_{\text{معادله کمکی}} \longrightarrow \underbrace{s = \pm 2j}_{\text{ریشه‌های متقارن}}$$

$$\frac{dA(s)}{ds} = 4s \quad (*) \longrightarrow \begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & 8 \\ s^1 & 4 & 0 \\ s^0 & 8 & \end{array}$$

چون تغییر علامت نداریم $\Leftarrow$ ریشه سمت راست نداریم.

از طرفی می‌دانیم به ازای $K=8$، ریشه موهومی در سمت چپ ترین است.

پس برای اینکه متقارن باشد، همه ریشه‌ها روی محور $j\omega$ هستند.

* مثال:

$$\begin{array}{c|cccc} s^9 & & & & \\ s^8 & & & & \\ s^7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^6 & & & & \\ \vdots & & & & \end{array} \sim \begin{array}{c|c} s^9 & 2 \\ s^8 & 1 \\ s^7 & 2 \\ & -3 \\ \vdots & 3 \\ & \vdots \\ s^0 & 3 \end{array}$$

s^9: بقیه ریشه‌های $\Delta(s)$ را مشخص می‌کند

$A(s) \rightarrow s^8$

تغییر علامت از اینجا به بعد، ریشه‌های $A(s)$ را مشخص می‌کند

توضیحات:

چون ۲ تغییر علامت داریم ← ۲ ریشه سمت راست داریم.

به علت تقارن ریشه‌ها، دو ریشه هم در سمت چپ باید داشته باشیم

چون مجموعاً 8 ریشه مربوط به A(s) است ← ۴ ریشه هم بر روی محور $j\omega$ خواهیم داشت.

در کل سیستم 9 ریشه دارد، 1 ریشه باقیمانده مربوط به D(s) است که در سمت چپ است.

(البته توجه کنید که از s^9 به s^8 تغییر علامت نداشته‌ایم).

نتیجه‌گیری: اطلاعاتی که به دست آورده‌ایم:

۱) تعداد ریشه‌های سمت راست

۲) تعداد ریشه‌های سمت چپ

۳) تعداد ریشه‌های روی محور $j\omega$

تذکر و یادآوری: اگر تعداد ریشه‌های سمت راست صفر باشد ولی روی $j\omega$ ریشه داشته باشیم، یا ناپایدار است و یا پایدار مرزی: که بستگی به تکراری بودن یا نبودن ریشه‌های روی محور $j\omega$ دارد.

اگر تکراری باشد، ناپایدار است و اگر ساده باشد، پایدار مرزی خواهد بود.

* جلسه پانزدهم: یکشنبه: ۸۲،۲،۷

* مثال:

$$A(s) = s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4$$

s^5	1	8	7
s^4	4	8	4
s^3	6	6	0
s^2	4	4	0
s^1	$0 \to \varepsilon \to 8$	0	0
s^0	4	1d	

$$A(s) = 4s^2 + 4 \Rightarrow s = \pm j$$

$$P(s) = \frac{dA(s)}{ds} = 8s$$

چون در کل جدول تغییر علامت نداریم به غیر از دو ریشه $A(s)$ که بر روی محور $j\omega$ قرار دارد، بقیه ریشه‌ها سمت چپ است

این سیستم در مرز پایداری است

* مثال:

$$A(s) = s^5 + s^4 + 4s^3 + 24s^2 + 3s + 63$$

s^5	1	4	3
s^4	1	24	63
s^3	-20	-60	0
s^2	21	63	0
s^1	$\cancel{0} \to \varepsilon \to 42$	0	0
s^0	63		

$$A(s) = 21s^2 + 63 \Rightarrow s = \pm\sqrt{3}\,j$$

$$P(s) = A'(s) = 42s$$

این سیستم دو ریشه سمت راست محور $j\omega$ دارد.

دو ریشه متقارن روی محور $j\omega$ دارد. و باقیمانده ریشه‌ها سمت چپ خواهد بود.

$$\begin{cases} 2 : RHP \\ 2 : j\omega \\ 1 : LHP \end{cases}$$

* مثال: ریشه‌های تکرار روی محور $j\omega$:

$$A(s) = s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1$$

s^5	1	2	1
s^4	1	2	1
s^3	$\cancel{0} \to 4$	$\cancel{0} \to 4$	0
s^2	1	1	
s^1	$\cancel{0} \to 2$	0	
s^0	1		

$$A_1(s) = s^4 + 2s^2 + 1 = (s^2+1)^2$$

$$P_1(s) = 4s^3 + 4s = \underbrace{4s(s^2+1)}_{\text{جمله‌ای متقارن}}$$

$$A_2(s) = s^2 + 1 \qquad P_2(s) = 2s$$

* وقتیکه ریشه تکرار روی محور $j\omega$ داشته باشیم، بیش از یک سطر صفر خواهد شد. به هر تعداد ریشه تکرار داشته باشیم، به همان تعداد سطر صفر خواهیم داشت.

سیستم مثال اخیر ناپایدار است (نه پایدار مرزی) چون روی محور $j\omega$ ریشه تکرار دارد.

* مثال: (موتور DC)

- حذف قطبهای غیر مسلط:

ثابت زمانی الکتریکی

$$\begin{cases} \tau_a = 0.0003\ S \qquad L_a = 0.003 H \\ \tau_m = 0.01333\ S \end{cases}$$

ثابت زمانی مکانیکی

$$G(s) = \frac{4500K}{S(S+361.2)} \Rightarrow T = \frac{G}{1+G}$$

$$T = \frac{4500K}{S^2 + 361.2S + 4500K} \qquad \Delta(s) = S^2 + 361.2S + 4500K$$

این سیستم ساده شده به ازای هر K پایدار است.

البته نمی توان گفت سیستم واقعی هم با این شرط پایدار است چون درجه ۳ خواهد بود:

$$G(s) = \frac{1.5\times10^7 K}{S(S+400.26)(S+3008)} \Rightarrow T(s) = \frac{1.5\times10^7 K}{S(S+400.26)(S+3008) + 1.5\times10^7 K}$$

$\Delta(s) \to$

$$\Delta(s) = S^3 + 3408.3 S^2 + 1{,}204{,}000 S + 1.5\times10^7 K$$

S^3	1	1204000
S^2	3408.3	$1.5\times10^7 K$
S^1	b_1	0
S^0	$1.5\times10^7 K$	

$$b_1 = \frac{3408.3 \times 1204000 - 1.5\times10^7 K}{3408.3}$$

شرط پایداری:

$$K > 0 \qquad b_1 > 0 \Rightarrow K < \frac{3408.3 \times 1204000}{1.5\times10^7}$$

$$\Rightarrow 0 < K < 273.57$$

→ پس حذف قطب غیر مسلط ما را به تعبیر درستی در حدود پایداری سیستم واقعی نمی رساند.

* پایداری نسبی: فاصله ریشه‌ها تا محور $j\omega$ چقدر است؟

$$\Delta(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

معیار راث تعداد ریشه‌های سمت چپ $j\omega$ را به ما می‌دهد.

حال اگر محور $j\omega$ را به سمت چپ شیفت بدهیم (مثلاً روی خط $\sigma = -k$) و معیار راث را پیاده کنیم، تعداد ریشه‌های سمت چپ و راست این خط جدید یافته می‌شود.

$S_n = S + \alpha \qquad \alpha > 0$

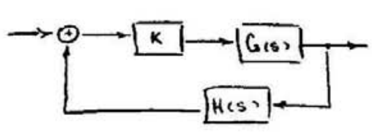
• معیار راث را اعمال می‌کنیم:

- اگر تعداد تغییر علامت داشت، ← ریشه‌ها سمت راست α هستند ← α را کوچکتر می‌کنیم
- اگر تغییر علامت نداشت ← ریشه‌ها سمت چپ α هستند ← α را بزرگتر می‌کنیم.
- ریشه‌ها روی خط α قرار گیرد.

* مکان هندسی ریشه‌ها: فصل ۷:

هدف: بررسی تغییرات ریشه‌های معادله مشخصه در اثر پارامتر خاص روی پایداری

بررسی تغییرات ریشه‌های معادله مشخصه نسبت به تغییرات یک پارامتر خاص (که لزوماً K نیست)



$$\Delta(s) = 1 + KGH(s) = 0$$

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KGH(s)}$$

$$\Delta(s) = 1 + KGH(s) = 0 \quad \rightarrow \quad KGH(s) = -1$$

شرط اندازه

$$\begin{cases} |KGH(s)| = 1 \\ \angle GH(s) = \pm 180(2q+1) \quad , \quad q = 0, 1, \dots \end{cases}$$

شرط زاویه

که مضارب فرد 180°

مکان هندسی یعنی تغییر ریشه های $\Delta(s)$ به ازای تغییرات K

اگر نقطه s^* در $GH(s)$ قرار داده شود و فاز $\angle GH(s^*)$ مضارب فرد 180 باشد

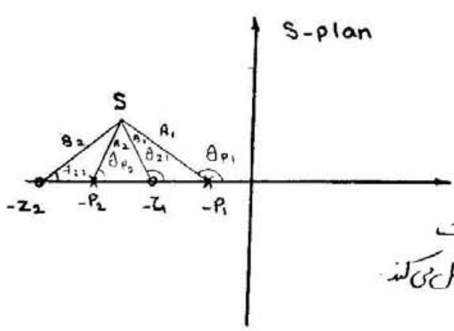
این به ازاء یک K خاص خود ریشه های معادله مشخصه خواهد بود. به ازای چه K ای؟ K ای که شرط اندازه را تحقق کند.

$$GH(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

برای سیستمهای فیزیکی $n \geq m$

برای حالت $m > n$ حداقل یک قطب در بینهایت خواهیم داشت.

- دیاگرام قطب × و صفر ° در صفحه S:



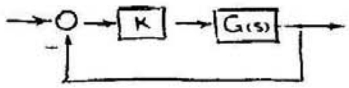
$$\begin{cases} s + z_i = (s - (-z_i)) \\ s + p_i \end{cases}$$

نشاندهنده برداری است که z_i (یا p_i) را به S وصل می کند.

$$\angle GH(s) = \sum_{i=1}^{m} \angle (s+z_i) - \sum_{i=1}^{n} \angle (s+p_i)$$

$$\begin{cases} \angle GH(s) = \theta_{z_1} + \theta_{z_2} - (\theta_{p_1} + \theta_{p_2}) \\ |GH(s)| = \dfrac{B_1 B_2}{A_1 A_2} \end{cases}$$

* مثال :



$$A(s) = 1 + KG(s)$$
$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

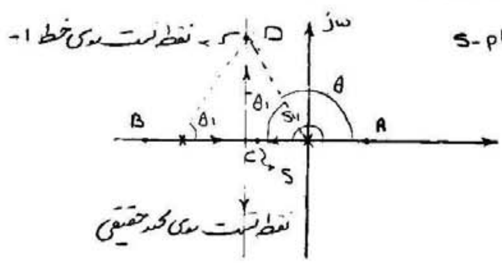
$$A(s) = 0 \rightarrow s(s+2) + K = 0 \rightarrow s^2 + 2s + K = 0 \rightarrow s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-K}$$

$$\begin{cases} s_1 = -1 + \sqrt{1-K} \\ s_2 = -1 - \sqrt{1-K} \end{cases} \qquad K = 0 \rightarrow \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -2 \end{cases}$$

$0 < K < 1 \rightarrow$ s_1 منفی تر ، s_2 مثبت تر

$$K = 1 \rightarrow s_1 = s_2 = -1$$

$K > 1 \rightarrow s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{K-1} \rightarrow$ اندازه ثابت و فاز تغییر می کند



$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

نقاط حقیقی: نقاط روی محور حقیقی بین ۰ و ۲-

$$\measuredangle G H(s) = -(\measuredangle s_1 + \measuredangle s_2) = -180 \leftarrow \begin{rmatrix}\end{rmatrix}$$

نقطه C: $\measuredangle s_1 = 180$ ، $\measuredangle s_2 = 0$ $\rightarrow$ $\measuredangle GH(s) = -(\measuredangle s_1 + \measuredangle s_2) = -180$

که ← جزو مکان هست.

نقطه D: $\theta = 180 - \theta_1$

$$\measuredangle GH = -(180 - \theta_1 + \theta_1) = -180 \rightarrow$$

شرط زاویه ارضا می شود ← جزو مکان هست.

نقطه A: $\measuredangle GH = 0$

نقطه B: $\measuredangle GH = -360$

← شرط زاویه ارضا نمی شود ← جزو مکان نیستند.

* مراحل یافتن: (1) تابع تبدیل حلقه باز را بصورت فاکتورگیری شده می نویسیم:

$$GH(s) = \frac{(s+Z_1)\cdots(s+Z_m)}{(s+P_1)\cdots(s+P_n)}$$

(۲) دیاگرام قطب، صفر تابع تبدیل حلقه باز را رسم می‌کنیم.

تعداد شاخه‌های مکان:

شاخه یعنی مسیری که یک قطب با تغییرات پارامتر طی می‌کند ($0 < K < \infty$) که برابر n می‌باشد،

(تعداد قطبهای سیستم حلقه باز)

(۳) تقارن نسبت به محور حقیقی:

مکان نسبت به محور حقیقی متقارن است.

چون که ریشه مختلط، زوج آن نیز جزء مکان است.

(۴) نقطه شروع و انتها:

ریشه‌های $\Delta(s)$ به ازای $K=0$ کجا هستند؟ با قطبهای $GH(s)$ برابر هستند.

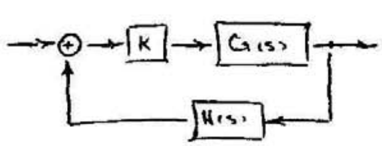
ریشه‌های $\Delta(s)$ به ازای $K=\infty$ کجا هستند؟ با صفرهای $GH(s)$ برابر هستند.

$$GH(s) = \frac{N_{gh}}{D_{gh}}$$

$$1 + KGH(s) = 0 \Rightarrow K = \frac{-1}{GH(s)} \Rightarrow \begin{cases} K=0 \Rightarrow GH(s)=\infty \sim \text{قطبهای } GH(s) \\ K=\infty \Rightarrow GH(s)=0 \sim \text{صفرهای } GH(s) \end{cases}$$

اگر K به سمت صفر میل کند (بسیار کوچک باشد):

سیستم حلقه باز و حلقه بسته با هم عمل می‌کنند.



* جلسه شانزدهم: سه شنبه : ۸۲٫۲٫۹

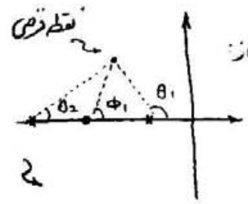
* مکان هندسی ریشه‌ها :

بررسی رفتار سیستم حلقه بسته با تغییرات یک یا چند پارامتر خاص
رفتار سیستم توسط قطبها مشخص می‌شود و قطبها ریشه‌های معادله مشخصه هستند.
و هدف ما یافتن رفتار سیستم حلقه بسته از روی مشخصات سیستم حلقه باز است، بدون حل معادله مشخصه.
(به با داشتن تابع تبدیل سیستم حلقه باز و دانستن صفرها و قطبهای آن))

$\Delta(s) = 1 + KGH(s) = 0$

$$\Delta(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \rightarrow \Delta(s) = 1 + \frac{a_{n-1}s^{n-1}}{s^n + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_0}$$

$0 < K < \infty$ $KGH(s) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} |KGH(s)| = 1 \\ \measuredangle KGH(s) = (2q+1)180^\circ \quad q = 0, \pm 1, \dots \end{cases}$



نمودار قطب صفر سیستم حلقه باز:
$GH(s)$

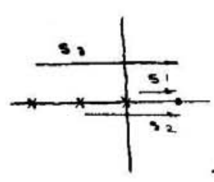
$$GH(s) = \frac{(s+z_1)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)\dots(s+p_n)}$$

$\measuredangle GH(s) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2$

- ترسیم دیاگرام صفر و قطب
- تعداد شاخه‌ها : n
- تقارن نسبت به محور حقیقی
- نقاط شروع و انتها: $K=0$ $K=\infty$

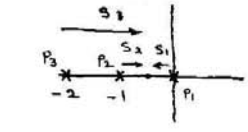
. نقاط روی محور حقیقی عضو مکان :

$$GH(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$



$\measuredangle s_1 = \measuredangle s_2 + \measuredangle s_3 = 0 \rightarrow$

$\measuredangle GH(s) = 0 \Rightarrow$ شرط زاویه ارضا نمی‌شود



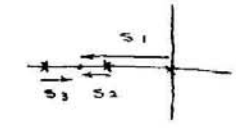
← نقاط سمت راست همگی حذف می‌شوند و جزء مکان نیستند

$\measuredangle s_1 = 180$

$\measuredangle s_2 = \measuredangle s_3 = 0$

$\rightarrow \measuredangle GH(s) = -180 \rightarrow OK \rightarrow$

نقاط میان P_1 ، P_2 عضو مکان هستند.



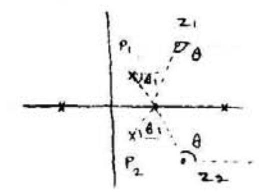
$\measuredangle GH(s) = -(180+180+0) = -360^\circ \rightarrow \text{Cancel} \rightarrow$

نقاط میان P_2 ، P_3 عضو مکان نیستند.

$\measuredangle GH(s) = -(3 \times 180) = -540^\circ \rightarrow OK \rightarrow$

نقاط سمت چپ P_3 جزء مکان هستند.

نتیجه‌گیری: نقاط سمت چپ تعداد فرد صفر و قطب روی محور حقیقی جزء مکان هستند.



- تاکنون قطبهای مختلط را بررسی نکردیم:

$\measuredangle z_1 = 360 - \theta$

$\measuredangle z_2 = \theta$

$\rightarrow \measuredangle z_1 + \measuredangle z_2 = 360^\circ \rightarrow$ تأثیری روی فاز ندارد.

$\measuredangle P_1 = 360 - \theta_1$

$\measuredangle P_2 = \theta_1$

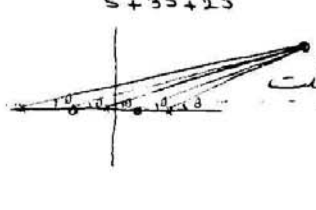
$\rightarrow \measuredangle P_1 + \measuredangle P_2 = 360^\circ \rightarrow$ تأثیری در فاز ندارد

← قطب و صفرهای مختلط تأثیری تاکنون نداشته‌اند.

.رفتار در بینهایت: (مجانبها):

مکان از قطبهای سیستم حلقه باز شروع می‌شود و به صفرهای سیستم حلقه باز ختم می‌شود.

$$GH(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s} \longrightarrow s \to \infty \rightarrow GH(s) \simeq \frac{1}{s^3}$$



در بینهایت

$$(m-n)\theta = (2q+1)180^\circ \rightarrow \theta = \frac{2q+1}{m-n} \cdot 180^\circ$$

تعداد صفرها

تعداد قطبها

الان باید دنبال خطوطی هستیم که ریشه‌ها در $s \to \infty$ روی این خط قرار می‌گیرند. (خطوط مجانب)

$$GH(s)=\frac{s^{m}+b_{m-1}s^{m-1}+\dots+b_1 s+b_0}{s^{n}+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1 s+a_0}$$

$$\Delta(s)=1+K\cdot\frac{s^{m}+\dots+b_0}{s^{n}+\dots+a_0}\quad(\mathrm{I})\Rightarrow$$ تقریب در نهایت : $$\Delta(s)\cong 1+K\cdot\frac{1}{(s-\sigma)^{n-m}}$$

$$\Delta(s)=1+\frac{K}{(s-\sigma)^{n-m}}=0\Rightarrow\quad(\mathrm{II})$$

(۱) نشان می‌دهیم، s هایی که رابطه (II) را ارضا می‌کنند روی یک خط قرار دارند.

(۲) نشان می‌دهیم چگونه در $s\to\infty$ ، رابطه II از رابطه I بدست می‌آید.

بررسی (۱) :

$$1+\frac{K}{(s-\sigma_0)^{N}}=0 \leftarrow \quad n-m=N$$

$$\Rightarrow \frac{K}{(s-\sigma_0)^{N}}=-1 \to (s-\sigma_0)^{N}=-K \to s-\sigma_0=(-K)^{1/N}$$

$$-1=e^{j\pi}\Rightarrow(-1)^{N}=e^{j\pi N} \qquad \Rightarrow s-\sigma_0=(+K)^{1/N}\cdot e^{j\cdot\frac{2q+1}{N}\cdot\pi}$$

$$s=\sigma+j\omega\Rightarrow \qquad \sigma+j\omega-\sigma_0=(K)^{1/N}\cdot e^{j\frac{2q+1}{N}\cdot\pi}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sigma-\sigma_0=|K|^{1/N}\cos\left(\frac{2q+1}{N}\cdot\pi\right) & (\mathrm{III})\\ \omega=|K|^{1/N}\cdot\sin\left(\frac{2q+1}{N}\cdot\pi\right) & (\mathrm{IV})\end{cases}$$

ابتدا رابطه III را بر IV تقسیم می‌کنیم :

$$\frac{\omega}{\sigma-\sigma_0}=\overbrace{\operatorname{tg}\left(\frac{2q+1}{N}\cdot\pi\right)}^{m}$$

$$\Rightarrow \omega=m(\sigma-\sigma_0)$$

⇐ قسمت حقیقی و موهومی همه s هایی که رابطه II را ارضا می‌کنند، روی خط با شیب m و در σ_0 قرار می‌گیرند.

$$\Rightarrow\begin{cases}\Phi=\frac{(2q+1)\pi}{n-m} & ,\ q=0,1,\dots\\ \sigma_0=?\end{cases}$$

بررسی (۲) :

ابتدا می‌خواهیم σ_0 را بیابیم :

می‌دانیم: $b_{n-1} = \sum$ مجموع صفرها ، $a_{n-1} = \sum$ مجموع قطبها

صورت و مخرج رابطه (I) را بر $s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0$ تقسیم می‌کنیم $\Rightarrow$

$$\Delta = 1 + \frac{K}{\dfrac{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}} \xrightarrow{\text{با در نظر گرفتن دو جمله تحت}} \Delta = 1 + \frac{K}{s^{n-m} + (a_{n-1} - b_{m-1})s^{n-m-1} + \dots} = 0 \quad (\text{V})$$

اکنون تقسیم معادله II را نیز با در نظر گرفتن دو جمله انجام می‌دهیم:

$$1 + \frac{K}{(s-\sigma_0)^{n-m}} = 0 \rightarrow 1 + \frac{K}{s^{n-m} - (n-m)\sigma_0 s^{n-m-1} + \dots} = 0 \quad (\text{VI})$$

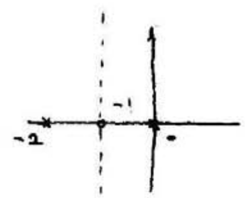
با مساوی قرار دادن روابط V و VI داریم:

$$-(n-m)\sigma_0 = a_{n-1} - b_{m-1}$$

$$\sigma_0 = \frac{\sum \text{قطبها} - \sum \text{صفرها}}{n-m}$$

$$\begin{cases} \Phi_A = \dfrac{2q+1}{n-m} \cdot 180 \quad ; q = 0, 1, 2, \dots & \text{زاویه مجانب ها} \\ \sigma_A = \dfrac{\sum \text{قطبها} - \sum \text{صفرها}}{n-m} & \text{مرکز مجانب ها} \end{cases}$$

* مثال:

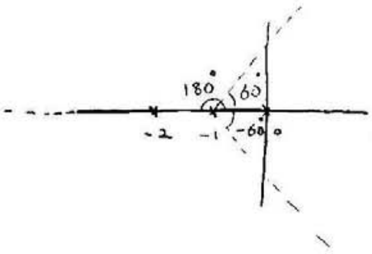


$$\sigma_A = -2 - 0 - (-1) = -1$$

$n = 2$, $m = 1 \rightarrow n - m = 1$

* مثال:

$$GH(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$



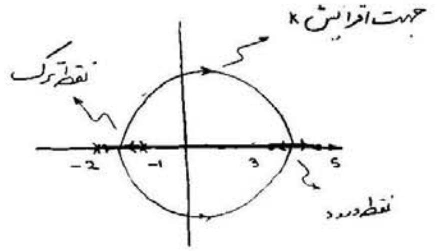
$n = 3$, $m = 0 \rightarrow n - m = 3 \Rightarrow \Phi_A = \frac{2q+1}{n-m} \times 180^\circ \Rightarrow \Phi_A = \begin{cases} 60 & : q = 0 \\ 180 & : q = 1 \\ -60 & : q = 2 \end{cases}$

$$\sigma_A = \frac{\sum \text{قطبها} - \sum \text{صفرها}}{n-m} = \frac{(-1-2-0)-0}{3} = -1$$

• نقاط ترک و ورود به محور حقیقی :

مثال:

$$GH(s)=\frac{(s-3)(s-5)}{(s+1)(s+2)}$$



مکان از قطبها شروع شده و به صفرها ختم می گردد.

مجانب نداریم ← $n=2,\ m=2 \to n-m=0 \to$

سپس نقاط روی محور حقیقی را مشخص می کنیم

الان می خواهیم نقاط ترک و ورود را بیابیم :

تذکر: در نقاط ترک یا ورود ، ریشه های مکرر داریم ، بسته به اینکه چند شاخه به هم رسیده باشد.

⇐ میان نقاط ‎-1 و ‎-2 ، در نقطه ترک σ_1 ، K بیشترین مقدار خود را دارد.

مکان در بینهایت به سمت صفرها می رود ، و در صفر از قطبها شروع می شود

بین نقاط 3 و 5 ، K مقدار مینیمم خود را دارد.

به کمک مفاهیم فوق :

$$\left.\frac{dK}{ds}\right| = 0$$

نقاط ترک یا ورود

راه نخست : روش عددی: ازدیاد K در نقاط مختلف.

راه دوم : مشتق گیری: $\Delta = 1+KGH(s)=0 \to K=\frac{-1}{GH(s)} \to \frac{dK}{ds}=0$

$\to S_{B.in}\ ,\ S_{B.away}$: OK

اگر این نقاط یافته شده روی مکان بودند ← نقاط ترک و ورود هستند.

برای مختلط ها : $K=\frac{-1}{GH(s)}$ قرار می دهیم. اگر حقیقی بود حتما ترک یا ورود است.

راه سوم: از اینکه ریشه در نقاط ترک یا ورود تکرار است، کمک می‌گیریم:

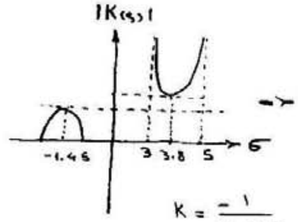
ریشه تکرار یعنی: $\Delta(s_0)=0$ و $\frac{d\Delta(s_0)}{ds}=0$

اثبات: در نقاط ترک یا ورود:

$$\frac{dKGH(s)}{ds}=0 \rightarrow \frac{dGH(s)}{ds}=0$$

$$K=\frac{-1}{GH(s)} \rightarrow \frac{dk}{ds}=\frac{\frac{dGH(s)}{ds}}{(GH(s))^2}=0 \rightarrow \frac{dGH(s)}{ds}=0$$

باز می‌گردیم به حل مثال:



$\rightarrow$ مقدار مینیمم سمت راست از ماکزیمم سمت چپ باید بیشتر باشد.

$K=\frac{-1}{GH(s)}$ $\quad s\in[-2,-1] \rightarrow$

• روش نخست: عددی

σ	K
-1.41	0.008557
-1.42	0.008585
-1.45	0.008623 $\rightarrow$ Max
-1.46	0.008622

σ	K
3.3	44.686
3.4	37.125
3.8	29 $\rightarrow$ Min
3.9	2.200

• روش دوم:

$$K=\frac{-1}{GH(s)}=\frac{-(s+2)(s+1)}{(s-3)(s-5)}$$

$$\frac{dk}{ds}=0 \rightarrow \frac{d}{ds}\left(\frac{s^2+3s+2}{s^2-8s+15}\right)=0 \rightarrow \dots \rightarrow \begin{cases} s_1=-1.45 \\ s_2=3.82 \end{cases}$$

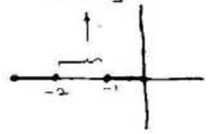
* مثال:

$$K=-(s^3+3s^2+2s)$$

$$\frac{dk}{ds}=0 \rightarrow 3s^2+6s+2=0 \rightarrow s_{1,2}=-1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

تذکر مهم: $-1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ جزء مکان نیست. چون:

این ناحیه جزو مکان نیست.



$-1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ جزو مکان نیست ← نقطه ترک هم نیست.

ولی نقطه $-1+\frac{\sqrt{3}}{3}$ جزو مکان می باشد. $\sigma_b = -1+\frac{\sqrt{3}}{3}$

• نقطه قطع محور ها:

چرا باید بدانیم که مکان محور ها را قطع می کند یا خیر؟

پاسخ: چون محور ها مرز پایداری است و باید بدانیم مکان به ازای چه K هایی پایدار است.

برای تشخیص آنکه مکان چه زمانی محور ها را قطع می کند، یک راه است که بجای s، مقدار ها قرار دهیم:

$$\Delta(s)\Big|_{s=j\omega} = Re(\omega)+j\,Im(\omega) = 0 \rightarrow \begin{cases} Re(\omega)=0 \\ Im(\omega)=0 \end{cases}$$

روش دیگر: معیار راث: اگر سطر صفر داشت، احتمال قطع می باشد که هم ω و هم K داده می شود.

• جلسه ۲۲م: یکشنبه: ۸۲٫۲٫۲۴

... ادامه مباحث مکان هندسی ریشه ها:

• تغییرات قطبهای سیستم حلقه بسته نسبت به یک پارامتر $(K>0)$:

- تقارن نسبت به محور حقیقی
- نقاط شروع و انتها
- رفتار در بینهایت
- نقاط ترک و ورود
- نقاط قطع محور ها
- نقاط روی محور حقیقی روی مکان

$$\Delta(s) = 1 + KGH(s) = 0$$

$$\begin{cases} \text{شرط اندازه}: |KGH(s)| = 1 \\ \text{شرط زاویه}: \measuredangle KGH(s) = (2q+1)180^\circ \end{cases}$$

$q = 0, 1, 2, \dots$

برای نقاط قطع روی محور $j\omega$:

دو راه داریم : (۱) $s = j\omega$ ← $\Delta(j\omega) = 0$ ←

$$\Delta(j\omega) = Real(\omega) + j\,Im(\omega)$$

$$Re(\omega) = 0$$

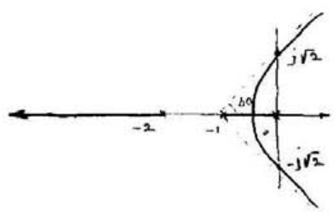
(۲) معیار راث :

یک سطر صفر (نشان دهنده دو ریشه متقارن) ← احتمال اینکه ریشه روی $j\omega$ باشد وجود دارد

* مثال :

$$GH(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

اولین گام: رسم دیاگرام صفر و قطب :



$$\left.\begin{matrix} n = 3 \\ m = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \quad \Phi_A = \frac{2q+1}{n-m} \cdot 180 \rightarrow \begin{cases} 60 \\ -60 \\ 180 \end{cases}$$

$$\sigma_A = \frac{\text{مجموع صفرها} - \text{مجموع قطبها}}{n-m} = -1$$

$$\frac{dGH(s)}{ds} = 0 \cdot \frac{dk}{ds} = 0 \rightarrow s = \begin{cases} -0.57 & ; OK \\ -1.57 & \rightarrow \text{چون خارج مکان می‌باشد} \end{cases}$$

$$\Delta(s) = 1 + K\,GH(s) = 0 \rightarrow$$

$$s(s+1)(s+2) + K = 0 \rightarrow s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0 \rightarrow$$

s^3	1	2
s^2	3	K
s^1	$\frac{6-K}{3}$	0 ← تنها سطری که ممکن است صفر شود
s^0	K	

به ازای $K=6$ صفر می‌شود: ← معادله کمکی: $3s^2+6=0 \to$

$3(s^2+2)=0 \to s=\pm j\sqrt{2} \to$ محل قطع مکان با محور j

روش دوم: $\Delta(s)\Big|_{s=j\omega}=0$ $\quad Re(\omega)+jIm(\omega)=0$

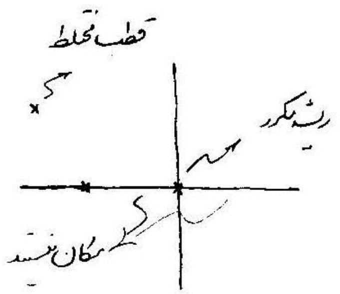
$\to (j\omega)^3+3(j\omega)^2+2(j\omega)+K=0 \to$

$-j\omega^3-3\omega^2+2j\omega+K=0 \to$

$\underbrace{(K-3\omega^2)}_{Re(\omega)}+j\underbrace{(2\omega-\omega^3)}_{Im(\omega)}=0 \to Im(\omega)=0 \to 2\omega-\omega^3=0 \to \begin{cases}\omega=0\\ \omega=\pm\sqrt{2}\end{cases}$

$Re(\omega)=0 \to K-3\omega^2 \to \left.\begin{array}{l} K=3\omega^2 \\ \omega=\pm\sqrt{2}\end{array}\right\} \to K=6$

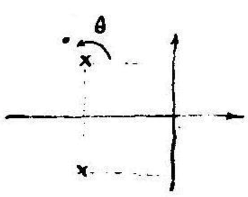
* زاویه خروج از قطب (مختلط) یا زاویه ورود به صفر (مختلط):



مثال: $G(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)}$

- یک نقطه در همسایگی قطب مورد نظر انتخاب می‌کنیم.

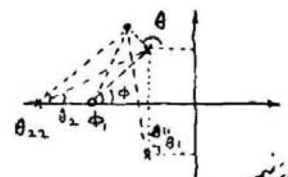
- زاویه این نقطه با قطب مورد نظر را θ می‌نامیم (θ مجهول است)



- این نقطه اگر جزء مکان باشد باید شرط زاویه برای آن محقق شود

جلسهٔ هجدهم: سه‌شنبه: ۱۶/۲/۸۲

... زاویه خروج (ورود) از (به) قطب (صفر):



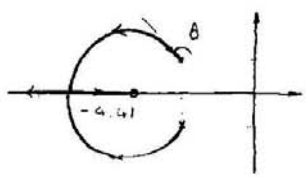
زاویه نسبت به قطب مورد نظر را θ می‌نامیم و مجهول فرض می‌کنیم:

زاویه بقیه صفر و قطبهای $GH(s)$ با نقطه نسبت را با زاویه قطب و صفر همسایه تقریب می‌زنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_1 - \theta_{11} - \theta_{22} - \theta = 180 \\ \Phi_1 \simeq \Phi \quad \theta_{11} \simeq \theta_1 \quad \theta_{22} \simeq \theta_2\end{array}\right\} \Rightarrow$$ θ بدست می‌آید

مثال:

$$GH(s) = \frac{S+3}{S^2+4S+5} \rightarrow \begin{cases} z = -3 \\ P_1, P_2 = -2 \pm j1 \end{cases}$$



گام (۱): رسم دیاگرام صفر و قطب

گام (۲): یافتن نقاط حقیقی روی محور

گام (۳): مجانبها (تعداد، زاویه و مرکزشان):

- تعداد: $n-m=1$

- زاویه: $\Phi_A = \frac{2q+1}{n-m}\cdot\pi, \quad q=0,1,2,\ldots \rightarrow \Phi_A = +180^\circ$

- مرکز: $\sigma_A = \frac{\sum \text{قطب} - \sum \text{صفر}}{n-m} = 1$

گام (۴): نقطه شکست و رسیدن به محور حقیقی:

$$\frac{dK}{ds} = 0 \ , \quad \frac{dGH(s)}{ds} = 0$$

$$K = -\frac{1}{GH(s)} = -\left[\frac{S^2+4S+5}{S+3}\right]$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 \rightarrow \frac{(2S+4)(S+3) - (S^2+4S+5)(1)}{(S+3)^2} \ldots$$

$$\to (2s^2+10s+12)-(s^2+4s+5)=0 \rightsquigarrow s^2+6s+7=0 \to s=-3\pm\sqrt{9-7} \to$$

$$s=-3\pm\sqrt{2} \to s=\begin{cases} -3-\sqrt{2} \rightsquigarrow \text{جزو مکان ، هست} \\ -3+\sqrt{2} \rightsquigarrow \text{جزو مکان نیست} \end{cases} \qquad -3-\sqrt{2}=-4.41$$

$$K=\frac{-1}{GH(-4.41)}=4.84$$

گام نهایی: یافتن زاویه خروج:

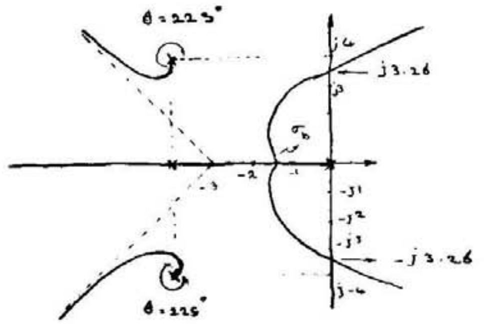
$$\phi-\theta_1-\theta=180 \to \underbrace{-90}_{\theta_1}+\underbrace{45}_{\phi}-\theta=180 \rightsquigarrow \theta=-225^\circ=135^\circ$$

یادآوری: مکان نسبت به محور حقیقی متقارن است.

* مثال:

$$GH(s)=\frac{1}{s^4+12s^3+64s^2+128s}$$

رسم دیاگرام صفر و قطب:



$P_1=0$

$P_2=-4$

$P_3=-4+j4$

$P_4=-4-j4$

نقاط روی محور حقیقی: OK

مجانب ها:

(a) تعداد:

تعداد مجانبها برابر اختلاف درجه صورت و مخرج است. پس ۴ مجانب دارد.

توضیح دیگر: این سیستم ۴ صفر در بینهایت دارد. مکان از قطبها شروع شده، در صفرها ختم میشود پس ۴ مجانب دارد.

- زوایا:

$$\Phi_A = \frac{2q+1}{n-m}\pi \rightarrow \Phi_A = \frac{2q+1}{4}\cdot 180 \rightarrow \Phi_A = \begin{cases} 45 \\ -45 \\ 135 \\ -135 \end{cases}$$

$$q = 0, 1, 2, \dots$$

- مرکز مجانب:

$$\sigma_A = \frac{\sum P - \sum Z}{n-m} = \frac{(0-4-4-4)-0}{4} = -3$$

- تذکر: برای آنکه بفهمیم مکان از پایین به مجانب نزدیک می‌شود یا از بالا، باید نقطه قطع محور jω را بیابیم؛

- نقطه ترک محور حقیقی:

$$\frac{dGH(s)}{ds} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{dK}{ds} = 0 \qquad K = \frac{-1}{GH(s)}$$

$$\frac{dK}{ds} = -(4s^3 + 36s^2 + 128s + 128) = 0$$

چون ماشین حساب نداریم (!) ⇐ باید از روش عددی کمک بگیریم:

می‌خواهیم $\frac{dK}{ds} = 0$ باشد ⇐ $K(s)$ باید ماکسیمم باشد؛ ⇐ نتایج $K(s) = \frac{-1}{GH(s)}$ عددی دهیم.

S	0	−1	−1.5	−2	−2.5	−3	−4
K	0	75	85	80	68.5	51	0

$$\underbrace{}_{Max}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_b = -1.5 \\ K_b = 85 \end{cases}$$ در: b: Brake Away (!?)

- نقطه قطع محور jω:

(1) معیار راث

(2) از رابطه $\Delta(s)$ در $s = j\omega$

$$\Delta(s) = s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s + K$$

s^4	1	64	K
s^3	12	128	0
s^2	b_1	K	
s^1	c_1	0	
s^0	K		

$$b_1 = \frac{12 \times 64 - 128}{12} = 53.33$$

$$c_1 = \frac{128 b_1 - 12K}{b_1}$$

(سطر فرد، یه صفر باشد):

$$c_1 = 0 \rightarrow K = \frac{53.33 \times 128}{12} = 568.85$$

برای K به دست آمده اخیر، سیستم در مرز پایداری خواهد بود.

معادله کمکی

$\to A(s) = 53.33\, s^2 + 568.85 = 0$

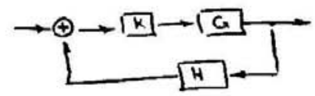
$\to s = \pm j\sqrt{\dfrac{568.85}{53.33}} \to s_{1,2} = \pm j\, 3.26$ ← نقاط تقاطع با محور j

- زاویه خروج از قطب مختلط:

$-135 - 90 - 90 - \theta = 180 \to$

$\theta = -135^\circ - 360^\circ = -135^\circ \to 22$

کوییز: برای فیدبک مثبت، قوانین مکان چگونه اصلاح می‌شود؟



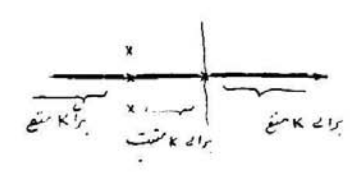
تذکر: فیدبک مثبت با گین مثبت = فیدبک منفی با گین منفی

- قوانین اصلاح شده برای فیدبک مثبت:

$$KGH(s) = 1 \Rightarrow \begin{cases} |KGH(s)| = 1 \\ \angle GH(s) = 2k\pi \qquad k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

(۱) تقارن نسبت به محور حقیقی برقرار است

(۲) نقاط روی محور حقیقی: سمت چپ تعداد زوج صفر و قطب



- نتیجه: اگر K را در بازه $(-\infty, +\infty)$ در نظر بگیریم ← کل محور حقیقی جزء مکان خواهد بود.

(۳) نقطه ترک محور حقیقی، تفاوتی نمی‌کند (چون ارتباطی با زاویه ندارد)

(۴) مجانبها: - تعداد: قانون آن تفاوتی نمی‌کند.

- مرکز: عوض نمی‌شود.

- زاویه: عوض می‌شود: $\Phi_A = \frac{2q\pi}{n-m}, \; q=0,1,\dots$

(۵) زاویه ورود و خروج: تغییر می‌کند: برای مضارب زوج $180°$ نوشته می‌شود: $2q\pi$

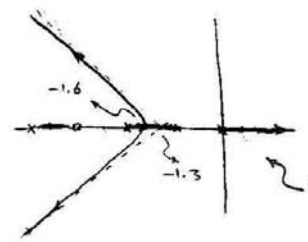
(۶) نقطه قطع محور $j\omega$: قانون تغییر نمی‌کند: معیار راث یا بررسی $\Delta(s)$ به ازای $s=j\omega$

* مثال: با فرض فیدبک مثبت:

$$GH(s) = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$

$$\begin{cases} Z = -3 \\ P_1 = 0 \\ P_2 = -1 \\ P_3 = -2 \\ P_4 = -4 \end{cases}$$

- رسم دیاگرام مکان قطب:



فیدبک مثبت، ذاتاً ناپایدار است

مجانبها: - اختلاف درجه صورت و مخرج: ۳

- $\Phi_A = \frac{2K}{3} \cdot 180 \Rightarrow 0, 120, -120$

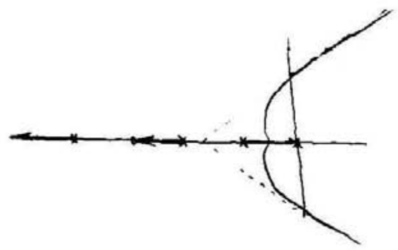
- $\sigma_A = \frac{\Sigma P - \Sigma Z}{n-m} = \frac{-4}{3} = -1.3$

- تذکر: در سیستم‌های درجه پایین عموماً، مجانبها توسط مکان قطع نمی‌شوند.

- نقطه ترک:

$$\frac{dK}{ds} = 0 \longrightarrow \sigma_b = -1.6$$

* تذکر: اگر فیدبک منفی (و تیر $K<0$) بود، مکان بصورت زیر در می‌آید:



Matlab Code: Rlocus(n,d)

* تأثیر اضافه کردن قطب و صفر روی مکان :

تا اینجا، هدف رسم مکان بود، از PC کمک می گرفتیم. اما مکان هندسی ریشه ها برای طراحی و تنظیم پارامترهای سیستم برای دستیابی به پاسخ مطلوب کاربرد دارد.

طراحی : - تنظیم پاسخ به صورت پاسخ مطلوب به کمک تغییر پارامترهای سیستم.
- آیا میتوان پاسخ مطلوب را گرفت؟
- اگر نمی توان ، چگونه عمل کنیم؟

همین مثال اخیر را بررسی می کنیم : (شمائی که مکان هندسی ریشه های آن در بالای صفحه رسم شده است)

- شاخه های مسلط، شاخه های نزدیک محور ها هستند.

ضمناً : $\left\{ \begin{array}{l} T_s < 4(s) \\ P.O < 10\% \end{array} \right. \rightarrow$ [illegible] $\rightarrow$ $s_{1,2} = \underbrace{0.5 \pm j1}_{S_d}$

S_d : ریشه مطلوب.

اکنون باید ببینیم این ریشه خود مکان هست یا خیر؟

اگر هست $\rightarrow$ $K = \frac{-1}{GH(S_d)}$

اگر نیست $\rightarrow$ باید شکل مکان را به گونه ای تغییر دهیم که از نقطه مطلوب عبور کند.

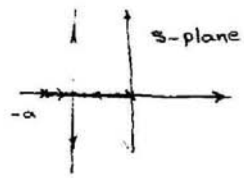
پس از این نقطه در جلسه آینده این بحث دنبال خواهد شد.

* جلسهٔ نوزدهم: یکشنبه: ۸۲٫۲٫۲۱

... در واقع، هدف، شکل دهی مکان برای عبور از یک نقطه (نقاط) خاص است.

* مثال: تأثیر قطب:

$GH(s) = \frac{1}{s(s+a)}$, $a>0$



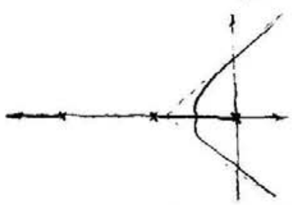
$\Rightarrow$ پایدار

$\Phi_A = \pm 90$

$$\begin{cases} s_{1,2} = -0.5 \pm j\omega_1 \\ s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\beta \\ T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 8 \ (s) \end{cases}$$

$GH(s) = \frac{1}{s(s+a)(s+b)}$, $|a|<|b|$

$a>0 \quad b>0$

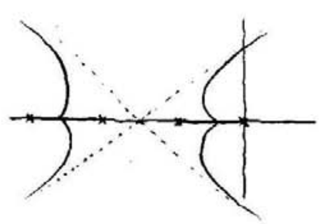


$$\begin{cases} \Phi_A = \frac{2q+1}{3} \cdot 180 = 60, -60, 180 \\ \sigma_A = \frac{-(a+b)}{3} \end{cases}$$

اثر: ناپایداری - خم شدن مکان بسمت راست.

$GH(s) = \frac{1}{s(s+a)(s+b)(s+c)}$

$n-m=4$



$$\begin{cases} \Phi_A = \frac{2q+1}{4} \times 180 = \pm 45, \pm 135 \\ \sigma_A = \frac{-(a+b+c)}{4} \end{cases}$$

$\Leftarrow$ مکان بیشتر به سمت راست می رود $\Leftarrow$

« قطب به پایداری کمک نمی کند و سیستم را به سمت ناپایداری می برد. »

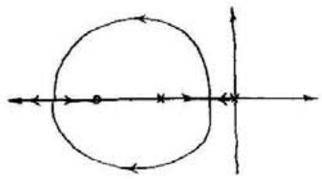
* مثال: - تأثیر صفر:

$$GH(s) = \frac{1}{s(s+a)}$$

$$GH(s) = \frac{(s+b)}{s(s+a)}$$

$n-m=1$

$$\phi_A = \frac{2q+1}{1} \cdot 180 = 180$$



مکان به سمت چپ منحرف می‌شود.

صفر اثر پایدارکننده (پایدارسازی) دارد.

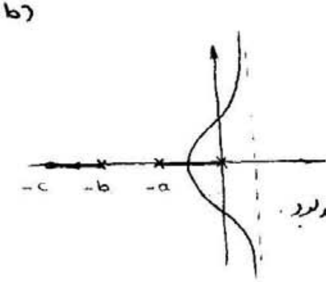
- تذکر: صفر راست باعث ناپایداری می‌شود.

* مثال:

$$GH(s) = \frac{s+c}{s(s+a)(s+b)}$$

$n-m=2$

$$\begin{cases} \phi_A = \dfrac{2q+1}{2} \cdot 180 = \pm 90 \\ \sigma_A = \dfrac{c-(a+b)}{2} \end{cases}$$



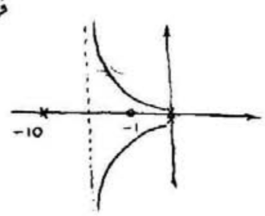
به ازای $c < a+b$ سیستم همواره پایدار خواهد بود.

- تأثیر موقعیت قطب روی مکان ریشه‌ها:

$$GH(s) = \frac{s+1}{s^2(s+a)}$$

$$\begin{cases} \phi_A = \pm 90 \\ \sigma_A = \dfrac{-a+1}{2} \end{cases}$$

فرض: $a=10$



شکل را نمی‌توانیم بطور دقیق رسم کنیم مگر اینکه نقطه قطع محور حقیقی را پیدا کنیم.

$$\frac{dGH(s)}{ds} = \frac{(3s^2+2as)(s-1) - s^3 - as^2}{(s^2(s+a))^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2s^3+(a+3)s^2+2as=0 \rightarrow s(2s^2+(a+3)s+2a)=0$$

که همواره $s=0$ یک نقطه ترک است.

$$S=\frac{-(a+3)\pm\sqrt{(a+3)^2-16a}}{4}$$

زیرا رادیکال نمی‌تواند منفی باشد، چون سیستم درجه ۳ است. که سیستم درجه ۲ می‌تواند.

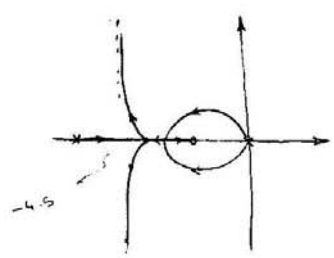
$$\left.\begin{array}{l}(a+3)^2-16a>0\\ a^2-10a+9=0\\ (a-1)(a-9)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c}a\geq 9\\ \text{or}\\ a\leq 1\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\geq 0$$

$a=10 \Rightarrow S=-4\ ,\ -2.5$

به ازای $a=1$ و $a=9$ نقطه ترک مکرر داریم.

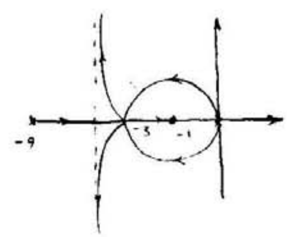
به ازای $a<1$ ، $a>9$ نقطه قطع و ورود داریم.

به ازای $1<a<9$ نقطه قطع و ورود نداریم.

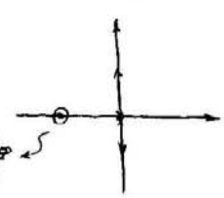


$a=9 \Rightarrow S_{2,3}=-3$

نقطه قطع مکرر (هم ترک هم ورود)

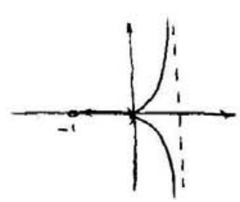


$$a=1 \Rightarrow GH(s)=\frac{s+1}{s^2(s+1)}=\frac{1}{s^2}$$



که هم قطب هم صفر (از -1 خارج شده و به آن وارد می‌شود)

$a<1 \Rightarrow$



* تعمیم مکان هندسی ریشه‌ها:

$$1+KGH(s)=0$$

$$\Delta(s)=S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\dots+a_1S+a_0=0$$

تغییرات ریشه‌های $\Delta(s)$ مثلاً با تغییرات a_1:

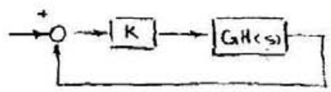
مثلاً به شکل $1+a_1GH(s)$ درمی‌آوریم:

بر جملات فاقد a_1 تقسیم می‌کنیم:

$$1+\frac{a_1 S}{S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\dots+a_2S^2+a_0}$$

* مثال:

$$K=10 \qquad G(s)=\frac{1}{(S+2)(S+P)}$$

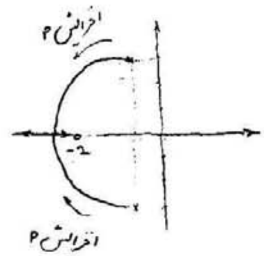


$$\Delta(s)=1+KGH(s)=1+\frac{K}{(S+2)(S+P)}=0$$

$$\Rightarrow (S+2)(S+P)+K=0 \rightarrow S^2+(P+2)S+2P+10=0 \rightarrow S^2+2S+P(S+2)+10=0$$

$$\rightarrow \quad 1+\frac{P(S+2)}{S^2+2S+10}=0$$

جدید $GH(s)=\dfrac{S+2}{S^2+2S+10}$ $\rightarrow$



$n-m=1 \qquad \Phi_A=180$

اینکه در P خیلی بزرگ به سمت -2 می‌رود را اگر کنار G(s) هم می‌توان ترسیم بیابیم: با بزرگ شدن P می‌توان از ترم (S+P) در مقابل (S+2) صرف‌نظر کرد.

سطوح ریشه:

$$K_1K_2=K$$

$$\Delta(s)=P(s)+K_1Q_1(s)+K_2Q_2(s)$$

ابتدا K_2 را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\Delta(s)=P(s)+K_1Q_1(s)$$

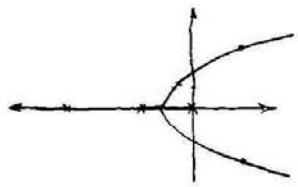
مکان را برای K_1 ترسیم می‌کنیم:

بر P تقسیم می‌کنیم:

$$1+K_1\cdot\frac{Q_1(s)}{P(s)}=0$$

$$\rightarrow 1+K_1\,G_1H_1(s)=0$$

K_1 را Fix می‌کنیم:



معادله مشخصه را می‌نویسیم:

$$\Delta(s)=P(s)+K_1Q_1(s)+K_2Q_2(s)$$

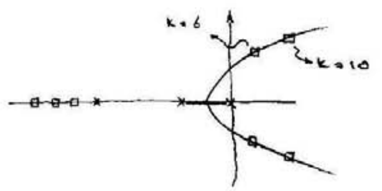
- مکان را نسبت به K_2 رسم می‌کنیم:

- $\Delta(s)$ را بر $P(s)+K_1Q_1(s)$ تقسیم می‌کنیم:

قطب‌های GH_2 همان ریشه‌های $P(s)+K_1Q_1(s)$

$$\Delta(s)=1+\frac{K_2\,\overbrace{Q_2(s)}^{GH_2(s)}}{P(s)+K_1Q_1(s)}=1+K_2G_2H_2(s)$$

نمایش گرافیکی سطح:



- مثال ۲:

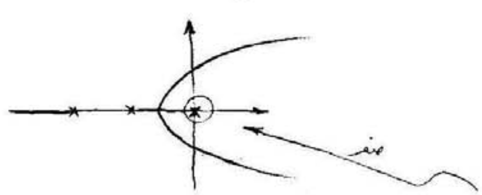
$$GH(s)=\frac{K(1+Ts)}{s(s+1)(s+2)}\qquad K_1=K \qquad K_2=KT$$

$$\Delta(s)=s(s+1)(s+2)+K(1+Ts)$$

$$T=0 \Rightarrow \Delta(s)=\underbrace{s^3+3s^2+2s+K}_{P(s)} \longrightarrow \Delta(s)=1+\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

- K را Fix می‌کنیم.

- مکان را برحسب T می‌نویسیم:

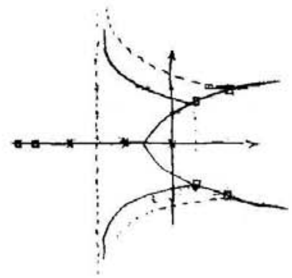


$n-m=2$

$\phi_A=\pm 90$

$$\Delta(s)=s(s+1)(s+2)+K+KTs \longrightarrow \Delta(s)=1+\frac{KTs}{s(s+1)(s+2)+K}$$

$$\rightarrow \frac{\text{مجموع قطب‌ها}-\text{مجموع ریشه‌ها}}{}=-3 \longrightarrow \sigma_A=\frac{-3}{2}$$



* جلسه بیستم : سه‌شنبه : ۸۲،۲،۲۳

حساسیت ریشه‌ها : (هر چقدر کمتر باشد بهتر است)

قبلاً داشتیم : $S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G} \cdot \frac{G}{T}$

اکنون : $S_K^s = \frac{\partial s}{\partial K} \cdot \frac{K}{s}$

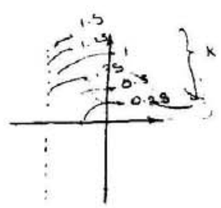
نقاط قطع محور حقیقی :

$$\frac{\partial K}{\partial s} = 0 \rightarrow \frac{\partial s}{\partial K} = \infty \Rightarrow S_K^s \rightarrow \infty$$

* مثال :

$$\Delta(s) = s(s+1) + K = 0$$

تغییرات K از ۰ تا ۲۰ با گام 0.25 (Matlab)



حل تحلیلی :

$$\Delta(s) = s^2 + s + K = 0 \Rightarrow K = -s(s+1)$$

$$\Rightarrow 2s \cdot \frac{\partial s}{\partial K} + \frac{\partial s}{\partial K} + 1 = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial K} \cdot (2s+1) = -1 \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial K} = \frac{-1}{2s+1} \Rightarrow S_K^s = \frac{-1}{2s+1} \cdot \frac{K}{s}$$

$$S_K^s = \frac{s+1}{2s+1}$$

$2s+1=0 \rightarrow s = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ در $s=-0.5$ حساسیت بی‌نهایت است.

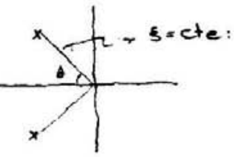
* تمرین : با Matlab گام K را چنان بیابید که شکل واضح باشد. $\Delta(s) = s^2(s+1)^2 + K(s+2) = 0$

$$\text{Rlocus}(\overbrace{\underbrace{\text{num}}_{\text{ضرایب صورت}},\ \underbrace{\text{den}}_{\text{ضرایب مخرج}}}^{\text{سیستم}},\ K)$$

* یافتن تقاطع خط $\xi = cte$ با مکان هندسی ریشه‌های سیستم:

$$\begin{cases} S_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\beta \\ \theta = \cos^{-1}\xi \end{cases}$$

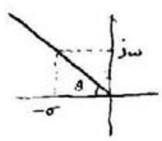
For Example: $\begin{cases} \xi = .707 \\ \theta = \cos^{-1}.707 = 45^\circ \end{cases}$



اهمیت مطلب در اینجاست که overshoot را فقط ξ تعیین می‌کند.

For example: P.O < 10% => $\xi > 0.45$

Matlab: ginput



$$\begin{cases} \text{خط } \xi = \cos\theta = \text{ثابت} \\ \Delta(s) = s^n + \dots + a_1 s + a_0 \end{cases}$$

$$s = -\sigma + j\omega$$

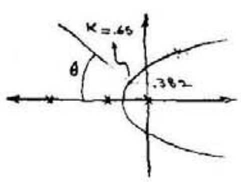
$$tg\,\theta = \frac{\omega}{\sigma} \Rightarrow \sigma = \frac{\omega}{tg\,\theta} \qquad \Rightarrow s = -\frac{\omega}{tg\,\theta} + j\omega \Rightarrow s = \omega\left(\frac{-1}{tg\,\theta} + j1\right)$$

$\theta = 45^\circ$: مثلا $\Rightarrow s = \omega(-1+j)$

* مثال: تقاطع خط $\xi = 0.707$ را با مکان هندسی ریشه‌های سیستم را پیدا کنید.

$$\Delta(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K$$

$$1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = 0$$



$$\theta = \cos^{-1}\xi = 45^\circ \Rightarrow tg\,\theta = 1$$

$$\Rightarrow s = \omega(-1+j)$$

در $\Delta(s)$ جایگزین می‌کنیم:

$$s^2 = \omega^2(-1+j)^2 = -2j\omega^2$$

$$s^3 = -2j\omega^3(-1+j) = 2\omega^3(1+j)$$

$$\Rightarrow 2\omega^3(1+j) - 6j\omega^2 + 2\omega(-1+j) + K = 0$$

$$Re: \quad K - 2\omega + 2\omega = 0$$

$$Im: \quad 2\omega^3 - 6\omega^2 + 2\omega = 0 \quad \rightarrow \quad 2\omega(\omega^2 - 3\omega + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \omega = 0.382 \\ \end{cases}$$

$\rightarrow$ جایگذاری در Re : $K = 0.65$

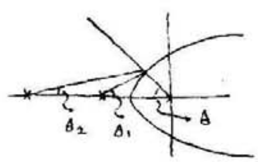
ریشه دیگر به ازای K منفی رخ می دهد.

* **راه حل سعی و خطا (گرافیکی)** : (چندان مطلوب نیست فقط به درد امتحان می خورد)

یک نقطه به طول r روی خط ζ = cte انتخاب می کنیم (از روی شکل کلی مکان)

سپس شرط مکان را تست می کنیم. اگر ارضا شد، یعنی همان نقطه جزء مکان هست.

اگر نه، طول r را بسته به نوع جواب زاویه کم یا زیاد می کنیم:



* پاسخ فرکانسی :

- مزیتهای پاسخ فرکانسی بر حوزه لاپلاس :

(۱) مفهوم پهنای باند و فیلترینگ

(۲) تست ساده پاسخ فرکانسی بدون نیاز به تابع تبدیل

(۳) برخورد با سیستم های تأخیردار

(کلاس خاصی از سیستمهای غیرخطی)

- عیب :

. تحلیل پاسخ زمانی از روی پاسخ فرکانسی، به راحتی بدست نمی آید. مگر برای سیستم درجه ۲ استاندارد.

* ترسیم منحنی های پاسخ فرکانسی (تابع تبدیل sin)

پاسخ فرکانسی، پاسخ سیستم به ورودی سینوسی است.

تابع تبدیل لاپلاس: $G(s) \rightarrow G(j\omega)$: تابع تبدیل سینوسی

* پاسخ فرکانسی برای چه سیستمهایی می‌تواند بیان شود؟

برای سیستمهای علّی و سیستمهایی که محور $j\omega$ جزو ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس آن باشد یعنی سیستم پایدار باشد.

$$G(j\omega) = G(s)\Big|_{s=j\omega}$$

- ناحیه همگرایی سمت راست آخرین قطب ← آخرین قطب باید سمت چپ محور $j\omega$ باشد.

$$\frac{1}{s-2} \not\Rightarrow \frac{1}{j\omega-2}$$

* نمایش $G(j\omega)$:

$$G(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

$$\begin{cases} R(\omega) = Re\{G(j\omega)\} \\ X(\omega) = Im\{G(j\omega)\} \end{cases}$$

$$G(j\omega) = M(\omega).e^{j\phi(\omega)}$$

$$\begin{cases} M(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \\ \phi(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right) \end{cases}$$

* منحنی های پاسخ فرکانسی:

(۱) منحنی قطبی یا نایکوئیست

محور موهومی و حقیقی در صفحه $G(j\omega)$

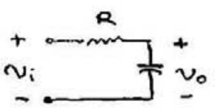
(۲) منحنی های بودی:

دامنه و فاز در دو منحنی جدا بر حسب فرکانس (راحت‌تر است اما برای همه سیستمها می‌توان یافت)

(۳) لگاریتم اندازه - فاز:

(بدست آوردن مشخصه حلقه بسته از روی حلقه باز)

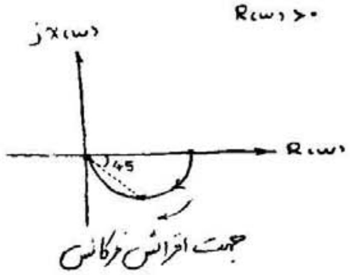
* منحنی های قطبی: Polar-Plot



$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{1}{CS}}{R + \frac{1}{CS}} = \frac{1}{1 + RCS}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \qquad \left.\begin{array}{l} \tau = RC \\ \omega_1 = \frac{1}{RC} \end{array}\right\} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{1 + j(\frac{\omega}{\omega_1})} = \frac{1 - j(\frac{\omega}{\omega_1})}{1 + (\frac{\omega}{\omega_1})^2}$$

$$G(j\omega) = \underbrace{\frac{1}{1 + (\frac{\omega}{\omega_1})^2}}_{R(\omega) > 0} + j\,\underbrace{\frac{-\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + (\frac{\omega}{\omega_1})^2}}_{X(\omega) < 0}$$



$$\Leftarrow \begin{cases} \omega = 0 \to R(\omega) = 1 ,\ X(\omega) = 0 \\ \omega = \infty \to R(\omega) = 0 ,\ X(\omega) = 0 \\ \omega = \omega_1 \to R(\omega) = 0.5 ,\ X(\omega) = -0.5 \end{cases}$$

فاز و اندازه:

$$\begin{cases} M(\omega) = \frac{1}{(1 + (\frac{\omega}{\omega_1})^2)^{1/2}} \\ \phi(\omega) = -tg^{-1}(\frac{\omega}{\omega_1}) \end{cases}$$

$$\omega = 0 \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ \phi = 0 \end{cases}$$

$$\omega = \infty \Rightarrow \begin{cases} M = 0 \\ \phi = -90^\circ \end{cases}$$

* مثال:

$$G(s)=\frac{K}{s(1+\tau s)}$$

$$G(j\omega)=\frac{K}{j\omega(1+\tau j\omega)}=\frac{K}{(j\omega-\omega^2\tau)}$$

$$\begin{cases} M(\omega)=\dfrac{K}{((\omega^2\tau)^2+\omega^2)^{1/2}} \\ \phi(\omega)=-tg^{-1}\left(\dfrac{\omega}{-\omega^2\tau}\right)=-tg^{-1}\left(\dfrac{-1}{\omega\tau}\right) \end{cases}$$

- باید دقت کنیم در کدام ربع شکل ما است.

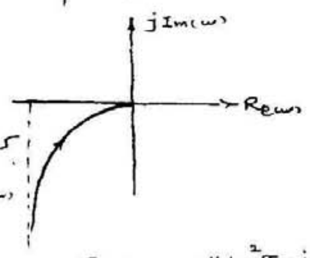
- بهتر است فاکتورها را جدا درنظر گرفته تا آنها را جمع کنیم:

$$\phi(\omega)=-(\phi(j\omega)+\phi(1+j\omega\tau))$$

$$\rightarrow \phi(\omega)=-90-tg^{-1}(\omega\tau)$$

$$\omega=0 \rightarrow \begin{cases} M=\infty \\ \phi=-90 \end{cases} \qquad \omega=\infty \rightarrow \begin{cases} M=0 \\ \phi=-180 \end{cases}$$

فاز نمی‌تواند از 180- منفی‌تر باشد و تیر نمی‌تواند مثبت‌تر از 90- باشد که در ربع سوم قرار دارد.



که برای یافتن مجانب باید $Re(\omega)$ و $Im(\omega)$ را می‌شود پیدا کرد.

$$G(j\omega)=\frac{K}{-\omega^2\tau+j\omega}$$

$$G(j\omega)=\frac{-K(\omega^2\tau+j\omega)}{\omega^4\tau^2+\omega^2} \rightarrow \begin{cases} Re=\dfrac{-K\omega^2\tau}{\omega^4\tau^2+\omega^2} \\ Im=\dfrac{-K\omega}{\omega^4\tau^2+\omega^2} \end{cases}$$

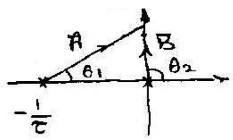
$\omega=0$ مجانب $R(0)=-K\tau$

$X(0)=-\infty$

روش سوم: از روی دیاگرام قطب و صفر:

$$G(s)=\frac{K}{s(1+\tau s)} \qquad G(s)=\frac{K/\tau}{s(s+\frac{1}{\tau})} \Rightarrow G(j\omega)=\frac{K/\tau}{j\omega(j\omega+\frac{1}{\tau})}$$

دیاگرام قطب و صفر:



S-plane

بردارکه از $-\frac{1}{\tau}$ به $j\omega$ وصل می‌شود $\rightarrow$ $j\omega + \frac{1}{\tau}$

$$G(j\omega) = \frac{K/\tau}{j\omega\,(j\omega + \frac{1}{\tau})}$$

$$\begin{cases} A = j\omega \\ B = j\omega + \frac{1}{\tau} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M(\omega) = \dfrac{K(\tau)^{-1}}{|A|\,|B|} \\ \phi(\omega) = -\theta_1 - \theta_2 \end{cases}$$

$$\omega = 0 \rightarrow \begin{cases} |A| = \frac{1}{\tau} \quad |B| = 0 \\ \theta_1 = 0 \ , \ \theta_2 = +90 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M(\omega) = \infty \\ \phi(\omega) = -90 \end{cases}$$

$$\omega = \infty \rightarrow \begin{cases} |A| = |B| = \infty \\ \theta_1 = \theta_2 = +90 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M(\omega) = 0 \\ \phi(\omega) = -180 \end{cases}$$

تذکر: قطبهای سمت راست را نیز با این Trick میتوان بررسی کرد.

* در منحنی پاسخ فرکانس اضافه کردن هر فاکتور، منجر به انجام یک عده محاسبات میشود.
در حذف فاکتور نیز دیده نمی‌شود.

در حلقه بعد از لگاریتم استفاده می‌کنیم: $(\log : \times \rightarrow +)$

• جلسه بیست دوم : یکشنبه : ۸۲،۲،۲۸

• دیاگرام بودی : (Bode-diagram) :

در این دیاگرام منحنی اندازه و فاز برحسب ω رسم می‌شوند.

$20\log|G|$ — ω

$\phi(\omega)$ — ω

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau} \rightarrow |G(j\omega)| = \frac{1}{(1+\omega^2\tau^2)^{1/2}} \quad , \quad \phi(\omega) = -\tan^{-1}\omega\tau$$

سیستم ۵ پاسخ فرکانسی را رسم کرده، داریم برای دامنه:

$$20\log|G(j\omega)| = -10\log(1+\omega^2\tau^2)$$

بیشترین کاربرد : یافتن مجانب ها:

$\omega \ll \frac{1}{\tau} \Rightarrow 20\log|G(j\omega)| = 0 \text{ dB} \rightarrow$ مجانب فرکانس پایین

$\omega = \frac{1}{\tau} \rightarrow -10\log 2 = -3\text{dB} \rightarrow$ در مجانب بالا و پایین در $\frac{1}{\tau} = \omega$ با هم می‌رسند
← فرکانس گوشه - فرکانس قطع

$\omega \gg \frac{1}{\tau} \rightarrow -20\log(\omega\tau) \rightarrow$ مجانب فرکانس بالا

مجانب فرکانس بالا : $-20\log(\omega\tau) = -20\log\omega - \overbrace{20\log\tau}^{cte}$

← اگر محور افقی را بصورت لگاریتمی درج کنیم، تبدیل به یک خط می‌شود

تعریف: بازه $[\omega_1, \omega_2]$ یک decade (دهه) تلقی می‌شود اگر: $\omega_2 = 10\omega_1$

شیب مجانب فرکانس بالا : $-20\log\omega_1\tau - (-20\log\omega_2\tau) = -20\log\frac{\omega}{\omega_2} = +20 \ \text{dB/decade}$

تعریف: بازه $[\omega_1, \omega_2]$ یک Octave (اکتاو) تلقی می‌شود اگر: $\omega_2 = 2\omega_1$

شیب مجانب ذکر شده باید : $-20\log \omega_1\tau + 20\log \omega_2\tau = -20\log \frac{\omega_1}{\omega_2} = -6\ dB/_{octave}$

نکته مهم: هر فاکتور درجهٔ 1، معادل شیب 20 dB/decade است و فاز هم می‌تواند 90° از فاز کم کند.

ترسیم دیاگرام بودی: (Bode Plot):

$$G(j\omega) = \frac{K_b \prod_{i}^{Q}(1+j\omega\tau_i)}{(j\omega)^N \prod_{m=1}^{M}(1+j\omega\tau_m)\prod_{k=1}^{R}\left(1+\left(\frac{2\zeta_k}{\omega_{nk}}\right)j\omega+\left(\frac{j\omega}{\omega_{nk}}\right)^2\right)}$$

$$\phi(\omega) = \measuredangle G(j\omega) = \measuredangle K_b + \sum_{i}^{Q} tg^{-1}\omega\tau_i - 90N - \sum_{m=1}^{M} tg^{-1}\omega\tau_m - \sum_{k=1}^{R} tg^{-1}\frac{2\zeta_k(\omega/\omega_{nk})}{1-(\omega/\omega_{nk})^2}$$

$$20\log|G(j\omega)| = +20\log|K_b| + \sum_{i}^{Q} 20\log|1+j\omega\tau_i| - 20N\log\omega$$

$$-\sum_{m=1}^{M} 20\log|1+j\omega\tau_m| + \sum_{k=1}^{R} 20\log|\text{عبارت درجه ۲}|$$

* هدف از دیاگرام بودی این بود که فاکتورهایش را جدا جدا ببینیم.

(۱) فاکتور ثابت: K_b :

$G(j\omega) = K_b$

$20\log|G| = 20\log K_b$

$K_b > 0 \rightarrow \measuredangle G(j\omega) = 0$

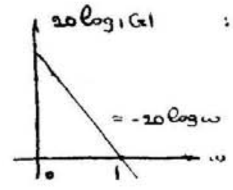
$K_b < 0 \rightarrow \measuredangle G(j\omega) = 180$

(۲) فاکتور صفر یا قطب در مبدأ :

$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

$20\log|G| = -20\log\omega$ $\rightarrow$

$\measuredangle G(j\omega) = -90$



به شیب خط: $-20\ dB/_{decade}$

* تأثیر فاکتور گین این است که فقط شیفت می‌دهد ولی روی فاز تأثیر ندارد با اینکه $180°$ جهت را عوض میکند.

* اگر داشتیم:

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^N}$$

$$\rightarrow 20\log|G| = -20N\log\omega \sim 20N\ \text{dB/decade}$$ کاهش

$$\Phi(\omega) = -90N$$

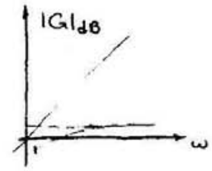
اگر صفر داشتیم (که معمولا سیستمهای فیزیکی در مبداء صفر ندارند) (در حالی که سیستمهای فیزیکی غالباً پائین گذرند).

مثال:

$$G(j\omega) = (j\omega)^N$$

$$20\log|G| = 20N\cdot\log\omega \sim 20N\ \text{dB/decade}:$$ افزایش

$$\Phi(\omega) = +90N$$



(۳) فاکتور صفر و قطب ساده:

۳-۱: قطب ساده:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

$\omega \ll \frac{1}{\tau}$: فرکانس پایین مجانب $\Rightarrow |G| = \frac{1}{[1+\omega^2\tau^2]^{1/2}} \rightarrow 20\log|G| = 0$

$\omega \gg \frac{1}{\tau}$: فرکانس بالا مجانب $\rightarrow 20\log|G| = -20\log(\omega\tau) \sim$ کاهش $20\ \text{dB/decade}$

فرکانس قطع: $\omega = \frac{1}{\tau} \rightarrow 20\log|G| = -3\text{dB}$ خطا Max

* خطا در یک اکتاو زیر فرکانس قطع:
مجانب

$\omega\tau = 1/2$ خطا $|G|_{dB}^{Actual} - |G|_{dB}^{Asym} \rightarrow$ مجانب صفر

اصلی

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20\log(1+\omega^2\tau^2)^{1/2}$$

$$= -20\log\sqrt{1+1/4} = -0.97\text{dB}$$

* خطای در یک اکتاو بالای فرکانس قطع:

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20\log(1+\omega^2\tau^2)^{1/2} + 20\log(\omega\tau) = -20\log\frac{\sqrt{5}}{2} = -0.97\,dB$$

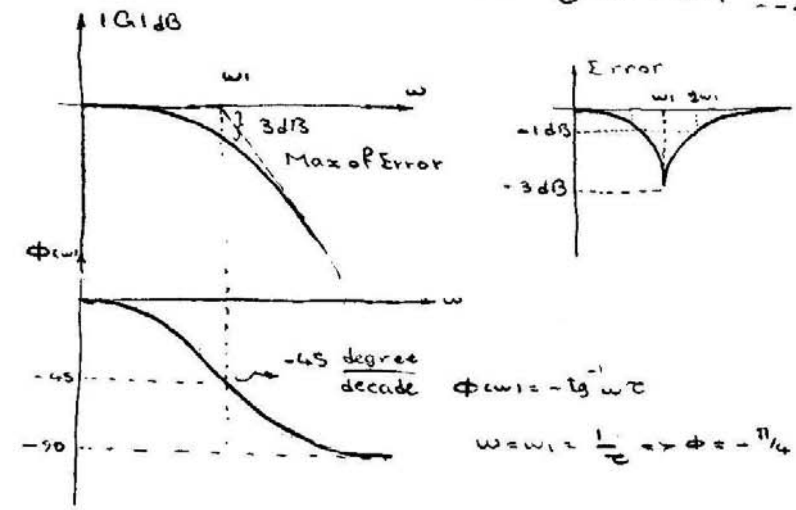
=> خطا تعادل است .

* حداکثر خطا را در فرکانس قطع داریم ($\omega_c\tau = 1$) و برابر است با $-3dB$

$\omega\tau = 0.1 \rightarrow$ یک دهه زیر فرکانس قطع : $\rightarrow -0.04\,dB$

$\omega\tau = 10 \rightarrow$ یک دهه بالای فرکانس قطع : $\rightarrow \mp 0.04\,dB$

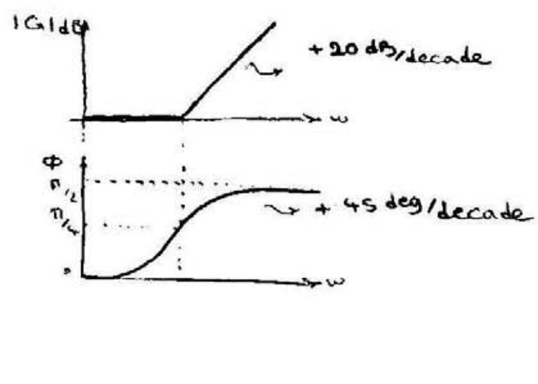
← خطا در یک دهه پایین و بالای فرکانس قطع در حدود 0.04dB است .



۱۳-۲) صفر ساده :

عکس همان حالت :

$G(j\omega) = 1 + j\omega\tau$



(۴) حالت دو قطب مختلط :

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \quad , \quad 0<\xi<1$$

بصورت ثابت زمانی تصویر میکنیم : $G(s)=\dfrac{1}{1+\dfrac{2\xi s}{\omega_n}+\dfrac{s^2}{\omega_n^2}}$

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+2\xi j\cdot\frac{\omega}{\omega_n}+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\rightarrow |G|=\frac{1}{\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$20\log|G|=-10\log\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2\right]$$

مجانب فرکانس پایین : $\omega\ll\omega_n$: $20\log|G|=0\ dB$

مجانب فرکانس بالا : $\omega\gg\omega_n$ $\quad -40\log\frac{\omega}{\omega_n}$ $\rightarrow$ با شیب $40\ \frac{dB}{dec}$ افت میکند.

مشاهده میشود منحنی ها بستگی ای به ξ ندارند.

ولی سیستمهای دارای میرایی، پیک دارند. اگر سیستمی را با فرکانس طبیعی تحریک کنیم، تشدید رخ میدهد.

$$u\triangleq\frac{\omega}{\omega_n}\rightarrow |G|^2=\frac{1}{(1-u^2)^2+(2\xi u)^2}$$

$$dG/du=0 \rightarrow \cdots\rightarrow u=\sqrt{1-2\xi^2}$$

فرکانس تشدید $\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$

resonance frequency

$$\begin{cases}\xi=0 \rightarrow \omega_r=\omega_n\\ \xi>0\rightarrow \omega_r<\omega_n\\ \xi>\frac{\sqrt{2}}{2}\rightarrow \text{تشدید نداریم}\end{cases}$$

$$|G|^2_{u_r}=\frac{1}{(1-u^2)^2+4\xi^2u^2} \qquad u_r=\sqrt{1-2\xi^2}$$

$M_{p\omega} = |G(j\omega_r)|$ ...

ماکزیمم پیک

$$M_{p\omega} = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$M_{p\omega}$ تنها تابع میرایی سیستم است.

به ازای $\xi = 0$ ، این پیک پاسخ فرکانسی ، بینهایت ∞ است در $\omega = \omega_n$ رخ می دهد.

* جلسهٔ بیست و دوم: سه شنبه: ۸۲/۲/۳۰

Makeup Class tentative Next Thursday, Khordad: 8, 2PM

پاسخ فرکانسی:

قطب مختلط:

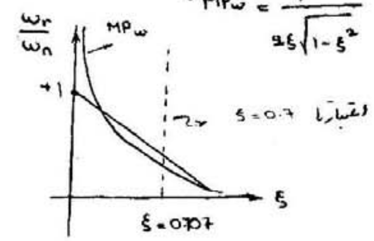
$$G(j\omega)=\frac{1}{1+2\xi\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2} \qquad 0<\xi<1$$

منحنی لگاریتم اندازه و فاز برحسب فرکانس (منحنی های بودی) (Bode diagram

Matlab Code: nyquist(sys,w) : قطبی

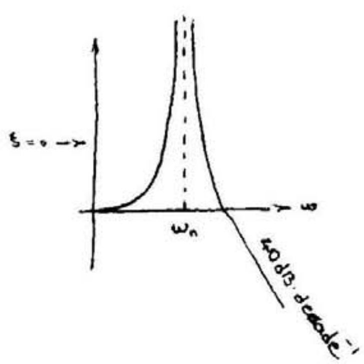
[meg,ph] = bode[sys,w] : بودی

$$|G|_{dB} \Rightarrow \begin{cases} \omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \\ MP_\omega=\dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \end{cases} \qquad \xi\uparrow \Rightarrow \begin{cases} \omega_r\downarrow \\ MP_\omega\downarrow \end{cases}$$

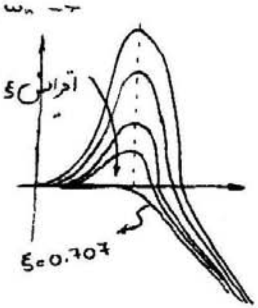


الان با در دست داشتن پاسخ فرکانسی، می خواهیم با پارامترهای سیستم درجه ۲ رابطه را بیابیم:

به ازای ξ های مختلف، پاسخ فرکانسی را رسم می کنیم:



$\xi=0.5 \rightarrow$ کم می شود $MP_\omega, \omega_n \rightarrow$



بعد از $\xi>0.707$ دیگر تشدید نخواهیم داشت.

MP_ω تنها تابع پارامتر سیستم (ξ) است.

برسی منحنی فاز:

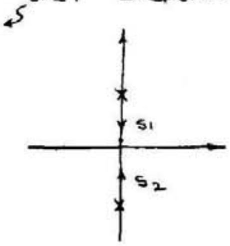
$u=\frac{\omega}{\omega_n} \qquad G(j\omega)=\frac{1}{1-u^2+j2\xi u} \;,\quad \phi(\omega)=\measuredangle G(j\omega)$

$$\phi(\omega)=-tg^{-1}\left(\frac{2\xi u}{1-u^2}\right)$$

$$\begin{cases} u=0 \Rightarrow G(j\omega)=0 \\ u=\infty \rightarrow \phi(\omega)=-180^\circ \\ u=1 \rightarrow \phi(\omega)=-90^\circ \end{cases}$$

$u=1 \rightarrow \omega=\omega_n$

مقادیر دسته منحنی های فاز برای $u=0,1,\infty$ از مقادیر $\Rightarrow$ ثابتی ، بدون وابستگی به ξ ، عبور می کند.



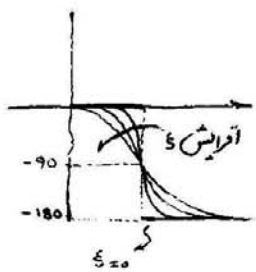
$$\xi=0 \Rightarrow G(j\omega)=\frac{1}{1+\frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

$$P_1,P_2=\pm j\omega_n$$

$0<\omega<\omega_n \rightarrow \measuredangle S_1=-90 \quad \measuredangle S_2=+90 \rightarrow G(j\omega)=-(-90+90)=0$

$\omega_n<\omega \rightarrow \measuredangle S_1=+90 \quad \measuredangle S_2=+90 \rightarrow G(j\omega)=-(90+90)=-180$

برای $\xi=0$ منحنی فاز گسسته است :



* سیستمهای مینیمم فاز و نامینیمم فاز : (Minimum and Non-minimum Phase Systems)

سیستمهایی که صفر یا قطب سمت راست دارند ، نامینیمم فاز هستند .

غلط مصطلح : سیستمهای دارای صفر سمت راست ، نامینیمم فازند

برای منحنی دامنه داده شده ، فقط یک تابع تبدیل وجود دارد که منحنی فاز آن در مقایسه با بقیه توابع تبدیلی که دارای منحنی دامنه مشابه هستند ، ولی فاز متفاوت دارند ، مینیمم است ، به آن تابع تبدیل مینیمم فاز اطلاق می شود و به بقیه سیستمهای نامینیمم فاز.

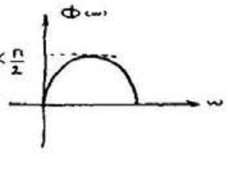
* مثال:

$$G_1(j\omega)=\frac{j\omega+a}{j\omega+b}\qquad G_2(j\omega)=\frac{j\omega-a}{j\omega+b}$$

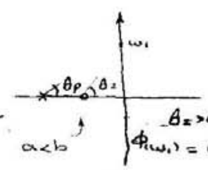
$$\begin{cases}|G_1|=\dfrac{(a^2+\omega^2)^{1/2}}{(b^2+\omega^2)^{1/2}}\\[2mm] |G_2|=\dfrac{(a^2+\omega^2)^{1/2}}{(b^2+\omega^2)^{1/2}}\end{cases}\longrightarrow |G_1|=|G_2|$$

$$\measuredangle G_1=\Phi_1(\omega)=tg^{-1}\frac{\omega}{a}-tg^{-1}\frac{\omega}{b}$$

$0<\Phi_m<\frac{\pi}{2}$



$\longleftarrow$ $a<b$

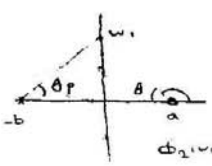


$\theta_z>\theta_p$

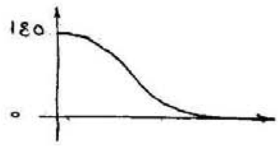
$\Phi_1(\omega_1)=\theta_z-\theta_p$

$$\measuredangle G_2=\Phi_2(\omega)$$

$$\begin{cases}\omega=0\longrightarrow\Phi_2(\omega)=180\\ \omega=\infty\longrightarrow\Phi_2(\infty)=0\end{cases}$$



$\Phi_2(\omega_1)=\theta_z-\theta_p=180-\theta-\theta_p$



فاز سیستم قبلی 0 و 90 بود درحالیکه فاز سیستم دوم 0-180 است.
سیستم 1 مینیمم فاز بود.

G_1 و G_2 مشخصه دامنه یکسانی داشتند، پس باید شباهتی با یکدیگر داشته باشند

$$G_2(j\omega)=\frac{j\omega-a}{j\omega+b}\times\frac{j\omega+a}{j\omega+a}\longrightarrow G_2(j\omega)=\frac{j\omega+a}{j\omega+b}\cdot\frac{j\omega-a}{j\omega+a}\longrightarrow$$

$$G_2(j\omega)=\underbrace{\frac{j\omega-a}{j\omega+a}}_{A(j\omega)}\cdot G_1(j\omega)$$

می‌خواهیم ببینیم چگونه تابع تبدیل نامینیمم را از تابع تبدیل مینیمم بیابیم؟

$A(\omega) \Rightarrow \forall \omega : |A(\omega)| = 1 \quad \rightarrow$ All Pass Filter

$A(\omega)$ تابع تبدیلی بصورت all-pass-filter است که تابع تبدیلی حقیقی گویاست و تمام صفر و قطبهایش نسبت به محور موهومی قرینه است.

* مثال: تابع تبدیل تاخیر انتقال تمام گذر است:

$A(s) = e^{-\tau s}$

$\rightarrow A(j\omega) = e^{-\tau j\omega} \Rightarrow |A(j\omega)| = 1$

$\phi(\omega) = -\omega\tau$

- تذکر: تابع تبدیل تاخیر انتقال حقیقی گویا نیست ولی در عمل وجود دارد.

* فیلترهای all-pass که به سیستم اضافه می‌شود باعث می‌شوند که از یک فرکانس به بعد $|G|=1$ شود. فیلترهای all-pass روی منحنی اندازه بی اثرند و تنها روی منحنی فاز موثرند. به کمک منحنی فاز می‌توان به نوع فیلتر all-pass پی برد.

نتیجه: اگر سیستم مینیمم فاز باشد، از روی منحنی دامنه منحنی فاز را می‌توانیم بیابیم.

توضیح: برای سیستم مینیمم فاز $A(\omega)=1$ است. اما وقتی سیستم نامینیمم فاز است نمی‌دانیم چه تابع تمام گذری ضرب شده است ← بدون منحنی فاز نمی‌توانیم آنرا تشخیص دهیم
و چون تعداد نامحدود تابع all-pass وجود دارد که همان منحنی اندازه ولی منحنی فاز متفاوت می‌دهد.

- صفر سمت راست دال بر تاخیر می‌باشد.

. قضیه بود: (Bode Theorem)

برای توابع تبدیل مینیمم فاز، فاز تابع تبدیل بطور یکتا، توسط منحنی اندازه می‌تواند بدست آید. در واقع در هر لحظه فرکانس، اندازه لگاریتمی توسط تبدیل هیلبرت به هم مرتبط می‌شوند ولی برای توابع نامینیمم فاز درست نیست. زیرا ضرب یک تابع تمام گذر در تابع تبدیل، منحنی اندازه را تغییر نمی‌دهد ولی منحنی فاز را تغییر می‌دهد

$$\measuredangle G(j\omega_0) \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,Ln|G|}{dv}\, Ln\, Cotg\frac{|v|}{2}.dv + \measuredangle \prod_{i=1}^{K}\left(\frac{j\omega_0+z_i}{j\omega_0-z_i}\right) \quad , \quad v = Ln\frac{\omega}{\omega_0}$$

* تشخیص سیستم مینیمم فاز:

$$G(s) = \frac{s^m + \dots}{s^n + \dots}$$

اگر دیاگرام گین مثبت است

$$G(s) \simeq \frac{1}{s^{n-m}} \quad : s \to \infty$$

$$\omega \to \infty \Rightarrow \measuredangle G(j\omega) \simeq -90(n-m)$$

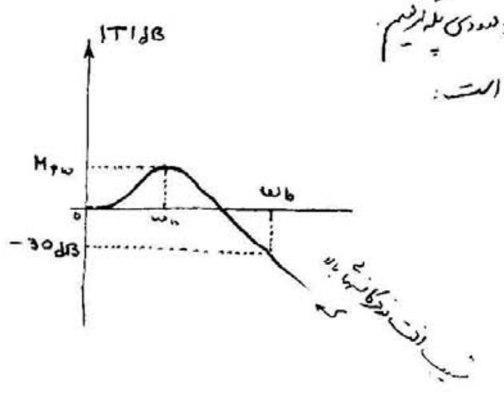
اگر سیستم مینیمم فاز باشد، در نهایت $\quad \Phi(\omega) \overset{\omega \to \infty}{=} -90(n-m)$

. تذکر: برای همه سیستمها در فرکانسهای بالا، منحنی اندازه با شیب $-20(n-m)\cdot\frac{dB}{decade}$ افت می‌کند.

* اندازه‌های عملکرد بر حسب پاسخ فرکانسی:

به یاد دارید که برای سیستم زمانی، پاسخ زمانی سیستم درجه ۲ را به عنوان الگو گرفتیم

در حیطه فرکانس هم: پاسخ فرکانسی مطلوب، سیستم درجه ۲ است:



$T_r \downarrow \;,\; T_s \uparrow \;\Leftarrow\; \xi \uparrow$

سرعت سیستم

* اندازه‌های عملکرد: (1) M_{pw} : پیک پاسخ فرکانسی

(2) ω_b : پهنای باند

(3) cut-off rate ، شیب افت پاسخ فرکانسی در فرکانسهای بالا

- تذکر: وقتی طراحی در حوزه فرکانس است (مثل طراحی فیلترها) ← اندازه‌های عملکرد در حوزه فرکانس در اختیار است.

اما وقتی می‌خواهیم سیستم زمانی طراحی کنیم، اما ابزاری که در اختیار داریم، فرکانسی است باید به معیارهای پایداری و سرعت توجه کنیم. و اکنون ارتباط این معیارها با حوزه فرکانس را باید بیابیم:

پایداری در زمان به PO بستگی دارد (چون PO فقط به ξ بستگی دارد و اگر ξ بیشتر باشد ← پایداری نسبی بیشتر است)
(چون از محور jω دور می‌شویم)

در حوزه فرکانس پایداری مربوط است به $M_{P\omega}$

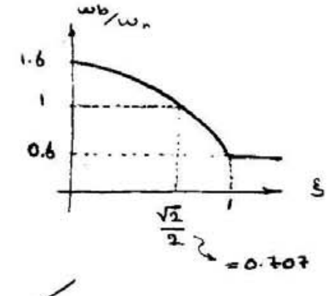
← یک پاسخ فرکانسی معیاری از پایداری است. M_P بالاتر یعنی پایداری نسبی کمتر زیرا ξ کوچکتر است.

معیار سرعت در حوزه فرکانس، پهنای باند است.

پهنای باند معیاری است از سرعت، زیرا سیستمی با پهنای باند بیشتر می‌تواند فرکانسهای بالاتری عبور دهد ← سریعتر است.

- تذکر: بنابه تعریف، ω_b فرکانسی است که دامنه به $-3dB$ می‌رسد.

$$|T|_{dB} = -3dB \rightarrow |T| = 0.707 \Rightarrow \omega_b = \omega_n\left[1-2\xi^2+\sqrt{2-4\xi^2(1-\xi^2)}\right]$$



رسم نمودار $\frac{\omega_b}{\omega_n}$ برحسب ξ:

نتیجه: در $\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ← $\omega_b = \omega_n$

* در ξ ثابت، با افزایش ω_n ، ω_b هم زیاد می‌شود ← سرعت سیستم زیاد می‌شود ← درست است که پهنای باند معیاری از سرعت است.

* در ω_n ثابت، برای افزایش ω_b ، باید ξ را کم کنیم.

* سرعت را متناسب با T_r و T_p تعریف می‌کنیم (نه T_s)

* جلسه بیست و سوم: یکشنبه: ۸۲٫۳٫۴

پاسخ فرکانسی: منحنی‌های بودی:

از روی پاسخ فرکانسی می‌توان نوع سیستم را یافت:

تعداد انتگرالگیرهای حلقه

از روی دیاگرام اندازه پاسخ فرکانسی می‌توان نوع سیستم را یافت :

$$GH(s) = \frac{K(1+T_{z_1}s)(1+T_{z_2}s)\cdots(1+T_{z_m}s)}{s^N(1+T_{p_1}s)(T_{p_2}s+1)\cdots(1+T_{p_n}s)}$$

در فرکانسهای پایین، با استفاده از شیب منحنی در حوالی فرکانس صفر می‌توان N را از روی مشخصه فرکانسی یافت.

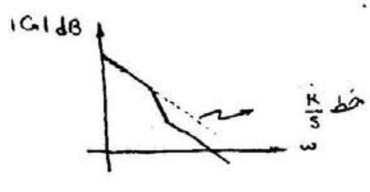
ثابت خطای موقعیت نیز با استفاده از منحنی اندازه در حوالی فرکانسهای صفر بدست می‌آید:

$$N = 0 \rightarrow \lim_{s \to 0} GH(s) = K$$

برای هر سیستم تنها یک ثابت خطای غیر صفر و غیر بینهایت وجود دارد که آن را از مشخصه اندازه پاسخ فرکانسی می‌توان یافت.

$$N = 1 \rightarrow \lim_{s \to 0} GH(s) = \frac{K}{s} \quad \text{or} \quad \lim_{\omega \to 0} GH(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

منحنی اندازه پاسخ فرکانسی (البته منحنی بودی آن) یک خط صاف با شیب $-20\,dB/decade$ است.



باید بتوانیم ثابت خطای سرعت را بیابیم:

$$K_v = \lim_{s \to 0} s\,GH(s)$$

منحنی اندازه در فرکانسهای پایین را ادامه میدهیم تا خط 0dB را در ($\omega = \omega_1$) قطع کند:

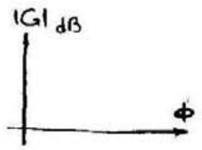
$$20\log\frac{K}{\omega_1} = 0 \rightarrow \underbrace{K = \omega_1}_{\text{ثابت خطای سرعت}}$$

برای N های بزرگتر نیز به همین صورت عمل میکنیم.

• دیاگرام لگاریتم اندازه ـ فاز:

- تاکنون دو دسته منحنی داشتیم:
  - قطبی: $G(j\omega)$
  - بودی:
    - لگاریتم اندازه برحسب فرکانس
    - لگاریتم فاز برحسب فرکانس

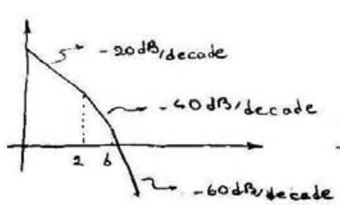
دیاگرام لگاریتم اندازه ـ فاز:

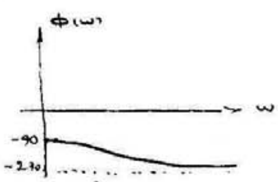


- اطلاعات اندازه و فاز از روی دیاگرام بودی بدست می آید.

• مثال:

$$GH(j\omega) = \frac{5}{j\omega(1+0.5j\omega)(1+\frac{j\omega}{6})}$$

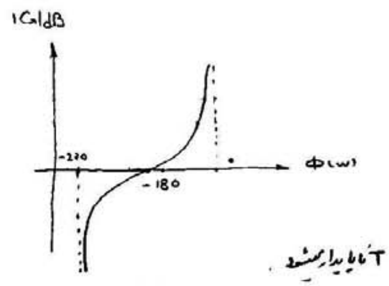




توضیح: - در شروع منحنی |G| با شیب -20dB/decade افت میکند.

- اولین شکست در $1+0.5\omega = 0 \rightarrow \omega_{c1} = 2$ می رسیم و شیب افت 40 میشود.

- برای منحنی فاز، $j\omega$ در مخرج یک فاز $\frac{\pi}{2}$ دائمی دارد. و هر ریشه درجه 1 (قطب درجه 1) حداکثر $\frac{\pi}{2}$ افت فاز دارد.



بررسی پایداری:

فرضا $T = \frac{1}{1+G}$ ⟵ اگر $\begin{cases} |G| = 1 \\ \measuredangle G = 180 \end{cases}$ ⟵ T ناپایدار میشود.

$\begin{cases} |G|_{dB} = 0 \\ \Phi = 180 \end{cases}$ ⟵ در بررسی پایداری باید دید که:

- در $\Phi = 180$: منحنی اندازه چقدر با صفر فاصله دارد.
- در $|G|_{dB} = 0$ ، منحنی فاز چقدر با 180 فاصله دارد

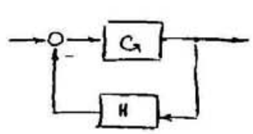
• پایداری در حوزهٔ فرکانس:

• هدف: از روی پاسخ فرکانسی حلقه باز سیستم، پایداری سیستم حلقه بسته را تشخیص دهیم.

• تذکر: برای سیستمهای خطی، کلی ترین معیار پایداری، پایداری در حوزهٔ فرکانس است.

(چون در بعضی موارد مکان هندسی ریشه‌ها و معیار راث جوابگو نیستند)

• پیش از ورود به این بحث، باید موارد زیر مشخص شود:



$T = \frac{G}{1+GH}$

(a) ارتباط قطبهای $1+GH$ با قطبهای GH

(b) ارتباط قطبهای T با صفرهای $1+GH$

(c) مفهوم نگاشت نقاط

(d) مفهوم نگاشت کانتور

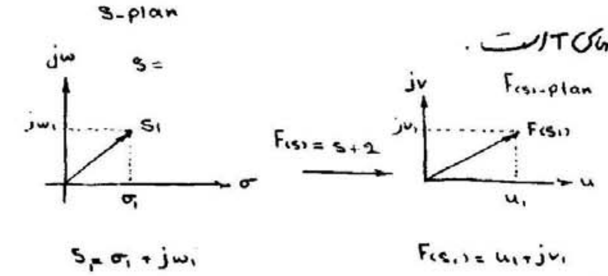
- فرض:

$H = \frac{N_h}{D_h} \qquad G = \frac{N_g}{D_g}$

$$T = \frac{G}{1+GH} = \frac{\frac{N_g}{D_g}}{1 + \frac{N_g N_h}{D_g D_h}} = \frac{\frac{N_g}{D_g}}{\underbrace{\frac{N_g N_h + D_g D_h}{D_g D_h}}_{1+GH}}$$

← قطبهای $1+GH$ همان قطبهای GH است.

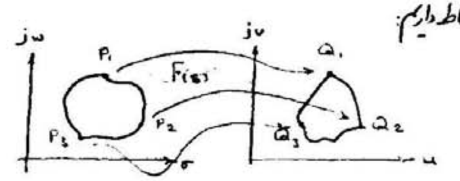
← صفرهای $1+GH$ همان قطبهای T است.



$S_1 = \sigma_1 + j\omega_1$ $\qquad$ $F(s_1) = u_1 + jv_1$

← $F(s_1)$ نگاشت s_1 است تحت تابع $F(s)$

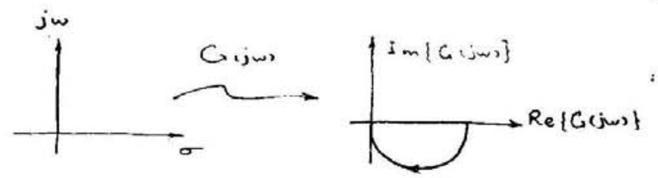
- الان به فرض در صفحه s به جای یک نقطه، مجموعه نقاط داریم:



کانتور: مجموعه نقاط پیوسته

کانتور بسته: مجموعه نقاط پیوسته بسته

- تذکر: اگر کانتور در صفحه s پیوسته باشد، وقتی کانتور در صفحه $F(s)$ نیز پیوسته است که: کانتور صفحه s از صفر قطبهای $F(s)$ عبور نکند.



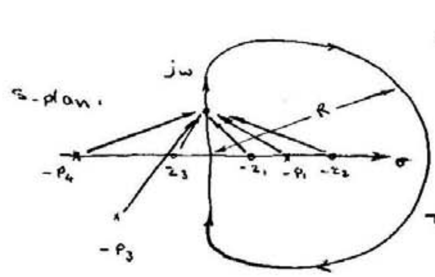
* مثال از نگاشت کانتور:

جهت کانتور: جهت افزایش فرکانس (جهت عقربه‌های ساعت)

پس از مقدمه، میپردازیم به بحث پایداری در حوزه فرکانس:

$$F(s) = K \cdot \frac{(S+Z_1)(S+Z_2)\cdots}{(S+P_1)(S+P_2)\cdots}$$

دیاگرام صفر قطب $F(s)$ به صورت زیر است:



کانتور A ←

. کانتور A : نیمصفحه سمت راست s و شامل محور $j\omega$ ← کانتور A : نیمدایره ای شامل کل محور $j\omega$ با شعاع $R \to \infty$

بردارهای $s+z_1$ ، $s+z_2$ ، $s+p_1$ ، هنگامیکه کانتور A را یکبار در جهت کانتور طی میکنیم، 360° تغییر فاز میدهند (یکبار کامل میچرخند)

← چرخش خالص بردارهای $s+z_3$ ، $s+p_4$ ، $s+p_2$ ، $s+p_3$ صفر است ←

(وقتی کانتور را یکبار در جهت کانتور طی کنیم تغییر خالص فاز آنها صفر است.)

تعمیم:

(a) در چرخش در جهت کانتور، بردارهای درون کانتور یکبار کامل میچرخند

(b) در چرخش روی کانتور در جهت آن، بردارهای خارج کانتور، چرخش خالص صفر دارند.

* تغییر زاویه خالص $F(s)$ = تغییر زاویه صفرها − تغییر زاویه قطبها

برای مورد اخیر $= 2(360) - 1(360)$

Z : تعداد صفرهای $F(s)$ که در داخل کانتور هستند.

P : تعداد قطبهای $F(s)$ که در داخل کانتور هستند

تعریف میکنیم: $N = Z - P$ (N میتواند مثبت باشد یا منفی)

← تغییر خالص زاویه $F(s)$ = $N \times 360^\circ$ = تعداد دفعاتی که $F(s)$ مبداء صفحه $F(s)$ را دور میزند

اگر $N > 0$ باشد ← $F(s)$ در جهت کانتور دور میزند.

* قضیه آرگومانها: (Principle of Arguments)

اگر تابع $F(s)$ دارای Z صفر و P قطب درون کانتور بسته A باشد و کانتور A از هیچ صفر یا قطب $F(s)$ عبور نکند آنگاه به ازای تغییرات s در طول کانتور A، منحنی $F(s)$ مبداء صفحه مختصات را به تعداد $N = Z - P$ بار دور خواهد زد.

(اثبات در کتاب اوگاتا - Page 584)

• پایداری: فرض کنیم $F(s) = 1 + GH(s) = A(s)$

برای پایداری $T = \frac{G}{F}$ باید T قطبی در RHP نداشته باشد ← F(s) نباید صفری در RHP داشته باشد

و چون RHP، همان داخل کانتور A است ←

برای پایداری، F(s) نباید صفری درون کانتور A داشته باشد: یعنی: $Z = 0$ باشد.

از طرفی P نیز معلوم است. (چون قطبهای F(s) همان P، همان قطبهای GH هستند)

← P = تعداد قطبهای سمت راست تابع GH(s) *

* نتیجه: اگر نگاشت کانتور A تحت F(s) را در صفحه F(s) ترسیم کنیم و تعداد دورها را بشماریم:

اگر $N = -P$ باشد ← سیستم حلقه‌بسته (T) پایدار است.

تذکر: (۱) $N = -P$ یعنی: در خلاف جهت عقربه‌های ساعت، به اندازه P بار دور بزند.

(۲) بیان کردیم که P نیز معلوم است.

• قضیه نایکوئیست:

اگر تابع تبدیل حلقه‌باز سیستم (GH(s)) دارای P قطب سمت راست باشد، برای پایداری T منحنی F(s) باید (به ازای تغییرات s در طول کانتور A) به تعداد P بار مبدأ صفحه F(s) را دور بزند.

یعنی P بار در جهت عکس عقربه‌های ساعت.

تذکر: می‌خواستیم از روی منحنی GH(s) پایداری را نتیجه بگیریم، نه از روی F(s):

$F(s) = 1 + GH(s)$

مبدأ صفحه F(s) به نقطه (-1,0) در صفحه GH(s) مربوط است. ← می‌توان قضیه را به فرم زیر بیان کرد:

* اگر تابع تبدیل حلقه باز سیستم (GH(s)) دارای P قطب سمت راست باشد، برای پایداری باید منحنی GH(s) ، (به ازای تغییرات s در طول کانتور R) ، به تعداد P بار ، نقطه (-1,0) را در صفحه GH(s) دور بزند. یعنی P بار در عکس جهت عقربه‌های ساعت.

* منحنی نایکوئیست : منحنی GH(s) است (به ازای تغییرات s در کانتور R) در صفحه GH(s).

* شرط پایداری نایکوئیست :

سیستم فیدبک پایدار است ، اگر و فقط اگر تعداد چرخشهای دیاگرام نایکوئیست (منحنی) در جهت ccw حول نقطه (-1,0) مساوی باشد با تعداد قطبهای GH(s) در RHP. (یعنی حلقه بسته) (یعنی در جهت خلاف عقربه‌های ساعت)

اگر P=0 باشد : سیستم فیدبک پایدار است اگر دیاگرام نایکوئیست (-1,0) را دور نزند.

* کانتور R سه قسمت دارد :

(۱) $\omega > 0$: دیاگرام قطبی (پاسخ فرکانسی)

(۲) $\omega < 0$: قرینه دیاگرام قطبی

(۳) $s \to \infty$: در طول نیم دایره بزرگ

$$GH(s) = \frac{\prod^{m}(s+z_i)}{\prod^{n}(s+P_i)} \times K$$

در طول نیم دایره بزرگ

$$\begin{cases} m = n \to s \to \infty : & GH(s) = K \\ m < n : \to s \to \infty , & GH(s) = 0 \end{cases}$$

* قسمت اصلی منحنی نایکوئیست همان بخش $\omega > 0$ است.