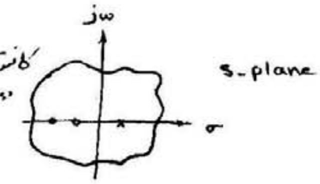
* جلسهٔ بیست و چهارم:  سه‌شنبه: ۸۲،۳،۶

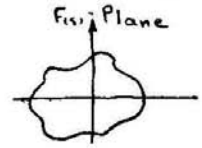
... ادامهٔ مطالب پایداری در حوزهٔ فرکانس:

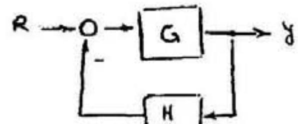
یادآوری: محک پایداری نایکوئیست:

کانتور A: از صفرها و قطبهای F(s) عبور نکند




$N = 2 - 1 = 1$



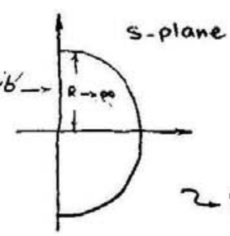




$F(s) = 1 + GH$

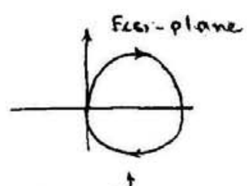
$T_{YR} = \dfrac{G}{1+GH}$

- اگر کانتور A را کل نیم‌صفحهٔ سمت راست صفحهٔ s تعریف کنیم داریم:

کانتور نایکوئیست




$\sim F(s) \rightarrow$




$N = 0$

$\rightarrow Z = N + P$

P: قطبهای سمت راست GH(s)

برای پایداری می‌خواهیم Z=0 باشد ← $N = -P$

تذکر:

$F(s) = 1 + GH(s)$

$(0,0)\Big|_{F(s)} \approx (-1,0)\Big|_{GH(s)}$

معیار نایکوئیست را برای نقطهٔ (-1,0) در صفحهٔ GH(s) بررسی می‌کنیم:

N = تعداد چرخش دور زدن نقطهٔ (-1,0)

جمع‌بندی: P و GH در اختیار می‌باشد. نگاشت نایکوئیست تحت GH(s) در صفحهٔ GH(s) را یافته و سپس N و Z = N + P بدست می‌آید.

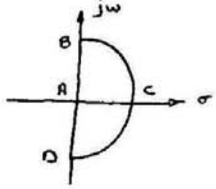
منحنی نایکوئیست

در این جلسه به حل مثال می‌پردازیم:

مثال (۱): $GH(s)=\frac{K}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}$ ، $K>0$

گام (۱): ترسیم منحنی نایکوئیست (در صفحه s):

(جهت کانتور هم باید مشخص شود)




قطعات کانتور: AB ، BCD ، DA

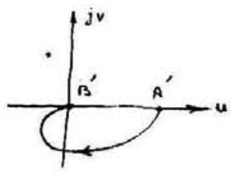
* قطعه AB:

AB: $s=j\omega \Rightarrow GH(s)=GH(j\omega)$ : پاسخ فرکانسی : $GH(j\omega)=\frac{K}{(1+\tau_1 j\omega)(1+\tau_2 j\omega)}$ ،

$$\left.\begin{aligned} M(\omega) &= \frac{K}{(1+\tau_1^2\omega^2)^{1/2}(1+\tau_2^2\omega^2)^{1/2}} \\ \Phi(\omega) &= -tg^{-1}(\omega\tau_1)-tg^{-1}(\omega\tau_2) \end{aligned}\right\}$$

$\omega=0 \rightarrow M=K$ ، $\Phi=0$

$\omega=\infty \rightarrow M=0$ ، $\Phi=-180^\circ$




$\leftarrow$ چون سیستم تمام قطب است $\Rightarrow$ منحنی کاهشی است

چون فاز حداکثر ۱۸۰- است $\Rightarrow$ باید از محور افقی بالاتر نیاید

تذکر و یادآوری: منحنی قطبی: منحنی پاسخ فرکانسی به ازای $\omega=(0,\infty)$ است که به دو شکل ترسیم میشود:

$GH(j\omega)=M(\omega)\cdot e^{j\Phi(\omega)}$ یا $GH(j\omega)=R(\omega)+jX(\omega)$

* قطعه BCD:

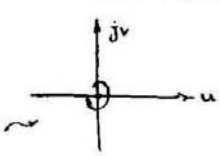
$S=Re^{j\theta} \rightarrow \left\{\begin{aligned} R&=\infty \\ \theta &\in [-\pi/2 , \pi/2] \end{aligned}\right. \leftarrow$

$GH(s)=\frac{K}{(1+\tau_1 Re^{j\theta})(1+\tau_2 Re^{j\theta})} \Rightarrow GH(s)=\frac{K}{\tau_1\tau_2 R^2 e^{j2\theta}}=\frac{K}{\tau_1\tau_2 R^2}\cdot e^{-j2\theta}$

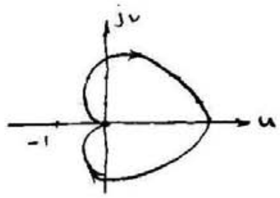
$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} &B: M=0 ، \Phi=-180 \\ &C: M=0 ، \Phi=0 \\ &D: M=0 ، \Phi=180 \end{aligned}\right.$$

* تذکر: چرخش حول مبدا در اینجا مهم نیست. چون باید چرخش حول نقطه (0، 1-) را در نظر گرفت.

$\Rightarrow$




$\Rightarrow$ چرخش 360° حول مبدا با شعاع صفر



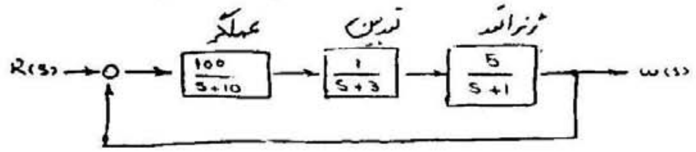

+ قطعه DE : این قطعه قرینه AB است : ←

+ بررسی پایداری $(T_1 , T_2 > 0)$

$P = 0$ : تعداد قطبهای سمت راست GH       $N = 0$ : چرخش حول $u = -1$

برای $0 < K$ ← $Z = N + P = 0$ ⇐ برای هر مقدار مثبت K ، پایدار است.

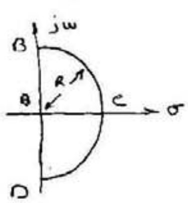
+ مثال (۲) :




حل :

GH را داریم :
سپس کانتور نایکوئیست را رسم میکنیم :

$$GH(s) = \frac{500}{(s+1)(s+3)(s+10)}$$



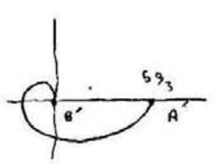

قطعه AB :

$$s = j\omega \rightarrow GH(s) = GH(j\omega) = \frac{500}{(j\omega+1)(j\omega+3)(j\omega+10)}$$

$$\begin{cases} M(\omega) = \dfrac{500}{\left[(1+\omega^2)(9+\omega^2)(100+\omega^2)\right]^{1/2}} \\ \Phi(\omega) = -tg^{-1}\omega - tg^{-1}\frac{\omega}{3} - tg^{-1}\frac{\omega}{10} \end{cases}$$

$$A: \quad \omega = 0 \rightarrow \underbrace{M = \frac{50}{3} , \Phi = 0}_{\text{مختصات نقطه } A'}$$

$$B : \omega = \infty \rightarrow M = 0 \qquad \Phi = -270^\circ$$




برای BCD : $\quad s = Re^{j\theta}$

$$GH(s) = \frac{500}{(1+Re^{j\theta})(3+Re^{j\theta})(10+Re^{j\theta})} \leftarrow \begin{cases} R \rightarrow \infty \\ \theta \in [-\pi/2 , +\pi/2] \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad GH(s) \simeq \frac{500}{R^3 \cdot e^{j3\theta}}$$

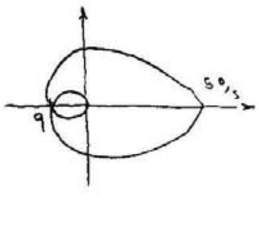
$\rightarrow$ B: $M=0$ , $\phi=-270$

C: $M=0$ , $\phi=0$ $\quad\rightarrow\quad 270-(-270)=540^\circ=360+180^\circ$

D: $M=0$ , $\phi=+270$

در مبداء یک هدو نیم میزنیم.

برای قطعه DE : $s=j\omega$ ← قرینه حالت AB است




• بررسی پایداری :

این نمودار تعریفی کلی نمی‌کند. چون نمی‌دانیم ۱- کجاست.

با نقاط تقاطع منحنی قطبی با محور حقیقی را یابیم:

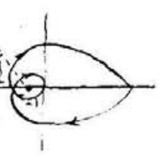
$$GH(j\omega)=\frac{500}{(-14\omega^2+30)+j(43\omega-\omega^3)}\rightarrow$$

$$GH(j\omega)=\underbrace{\frac{500(-14\omega^2+30)}{[-14\omega^2+30]^2+[43\omega-\omega^3]^2}}_{Re\{GH(j\omega)\}}+j\underbrace{\frac{-[43\omega-\omega^2]}{[-14\omega^2+30]^2+[43\omega-\omega^3]^2}}_{Im\{GH(j\omega)\}=X(\omega)}$$

$$X(\omega)=0\rightarrow 43\omega-\omega^2=0\rightarrow\omega_\pi=\pm\sqrt{43}$$

$$q=Re\{\omega_\pi\}=-0.874\rightarrow -1<-0.874\rightarrow N=0$$

$P=0$ ⟵ $Z=N+P=0$ ⟵ سیستم پایدار است.



در نقطه جهت ! ←

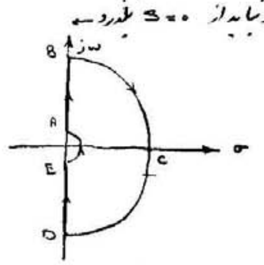
دوبار دور می‌خورد.

- تذکر: اگر فرض $q<-1$ بود ← نقطه $(-1,0)$ دوبار دور می‌خورد.

* مثال (۳):

$$GH(s)=\frac{s+2}{s^2}$$

- تذکر مهم: به یاد دارید که کانتور نایکوئیست نباید از صفر و قطبهای $F(s)$ عبور کند و نیز به یاد دارید که قطبهای $F(s)$ با قطبهای $GH(s)$ یکی می‌باشد. در اینجا: $s^2=0\rightarrow s=0$ ← کانتور نباید از $s=0$ بگذرد ← باید کانتور A را تصحیح کنیم. (identator)



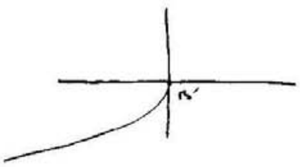

برای قطعه AB :

$s=j\omega \rightarrow GH(s)=GH(j\omega)=\dfrac{j\omega+2}{-\omega^2}=\left(\dfrac{2}{-\omega^2}\right)+j\left(\dfrac{-1}{\omega}\right)$

$A:\ \omega=0 \rightarrow M=+\infty,\ \phi=-180$

$B:\ \omega=\infty \rightarrow M=0,\ \phi=-90$

چون هم R و هم X منفی است ← در ربع سوم است.




برای BCD :

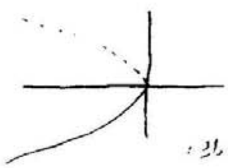
$s=Re^{j\theta}$

$\{R\rightarrow\infty,\ \theta\in[-\pi/2,\pi/2]\} \rightarrow$

$B \Rightarrow M=0,\ \phi=-90 \qquad C: M=0,\ \phi=0 \qquad D: M=0,\ \phi=+90$

← در قطعه BCD در مبدا دورانی با زاویه 180° داشتیم.

برای DE : هم قرینه AB است.

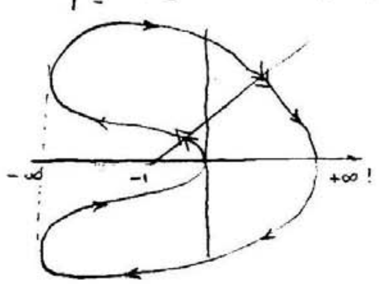


الان باید ببینیم آن نیم‌دایره کوچک (که در اثر identation (کانتور پدید آمده) چه رفتاری دارد:

• قطعه EA : در این قطعه، $s=\epsilon.e^{j\theta}$ $\quad \theta\in[-\pi/2,+\pi/2]$

$\rightarrow GH(s)=\dfrac{2+\epsilon e^{j\theta}}{\epsilon^2 e^{j2\theta}}=\dfrac{2}{\epsilon^2 e^{j2\theta}}=\infty\angle-2\theta \rightarrow \begin{cases} E: M=\infty,\ \phi=180 \\ A: M=\infty,\ \phi=-180 \end{cases}$

← توجه: از E به A: فاز از 180+ به 180- می‌رسد ← در جهت عقربه های ساعت یک دور می‌زنیم، و چون $M=\infty$ ← شعاع بی‌نهایت است:



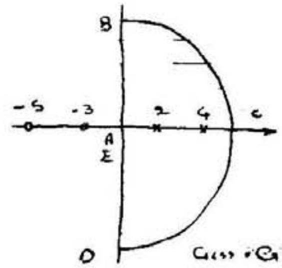

تعداد دور خالص : $N=+1-1=0$

$P=0 \rightarrow Z=P+N=0+0=0 \rightarrow$ پایدار است

• مثال (۴):

$G(s)=K.\dfrac{(s+3)(s+5)}{(s-2)(s-4)}$

• نکته: چون فیدبک واحد بوده ← $GH=G$



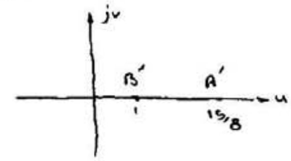

- تذکر: در ابتدا همواره توجه میکنیم که کانتور از صفر و قطبهای محور ۹۰ درجه عبور کرده باشد.
- تذکر: برای سیستمهایی که تغییر K دارد، ابتدا برای K = 1 تحلیل می‌کنیم.

$\leftarrow K = 1$

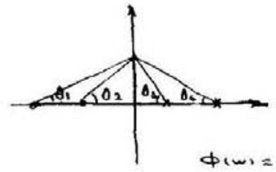
* قطعه AB: $\leftarrow s = j\omega$

$$G(s) = G(j\omega) = \frac{(3 + j\omega)(5 + j\omega)}{(j\omega - 2)(j\omega - 4)}$$

$$\begin{cases} A:\ \omega = 0 \rightarrow M = 15/8,\ \Phi = 0 \\ B:\ \omega = \infty \rightarrow M = 1,\ \Phi = 0 \end{cases}$$




اکنون ایده‌ای برای نقاط میان A و B نداریم:



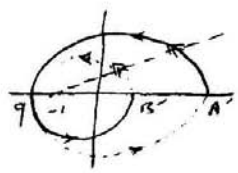

یک s فرضی میان A و B در نظر میگیریم:

$$\Phi(\omega) = \theta_1 + \theta_2 - (180 - \theta_3) - (180 - \theta_4)$$

قطب راست زاویه مثبت اعمال میکند. (و برعکس)

صفر راست زاویه منفی اعمال میکند (و برعکس)

نقطه تقاطع با محور حقیقی: $\text{Im} = 0 \rightarrow \omega = \sqrt{11} \rightarrow q = -1.33$




قطعه BCD، حول نقطه B' دوران میکنیم و DE هم قرینه AB:

$$K = 1 \begin{cases} \rightarrow N = -2 \\ P = 2 \end{cases} \rightarrow Z = 0 \rightarrow$$

به ازای K = 1 پایدار است.

- اگر K بزرگ شود شکل منبسط خواهد شد ولی در پایداری تاثیری نخواهد داشت.

- اما برای Kهای کوچکتر از 1: چون منحنی منقبض میشود، در نقطه ای از 1- عبور خواهد کرد ← از نظر پایداری بررسی میکنیم:

$Kq = 1 \rightarrow$ به ازای $K = \frac{1}{1.33}$ وارد مرز ناپایداری میشود:

$$\begin{cases} K > \frac{1}{1.33} : \text{پایدار} \leftarrow \text{محدوده پایداری} \\ K < \frac{1}{1.33} : \text{ناپایدار} \end{cases}$$

* جلسه بیست و پنجم :        پنجشنبه : ۸۲،۳،۸

- دیاگرام نایکوئیست

- اصل آرگومان : $N = Z - P$

- تحلیل پایداری : $Z = N + P$

- وقتی دیاگرام نایکوئیست از نقطه ۱- عبور کند، معیار نایکوئیست ساکت است ( یعنی از روی قضیه نایکوئیست نمی‌توان تحلیل پایداری کرد.

علت : چون وقتی از ۱- عبور کند کانتور از صفر F(s) عبور کرده است :

$GH(s) = -1 \rightarrow F(s) = 1 + GH(s) = 0$

یعنی کانتور نایکوئیست از صفرهای F(s) عبور می‌کند در $s = j\omega$ ریشه دارد .

→ معادله مشخصه ریشه‌های روی محور jω دارد (*)

تذکر: (۱) هنگامیکه چنین حالتی اتفاق افتاد نمی‌توان گفت سیستم پایدار مرزی است . چون از تعداد ریشه‌های سمت راست خبر نداریم و حتی ممکن است روی محور موهومی (jω) ریشه تکرار داشته باشیم → مانند (*) تنها میگوییم : ریشه‌ای روی محور jω وجود دارد همین و بس .

(۲) مگر اطلاعات دیگری از سیستم داشته باشیم :

فرضاً در سیستم درجه ۲ اگر منحنی نایکوئیست از ۱- عبور کند → می‌توان گفت سیستم پایدار مرزی است ؛ چون سیستم درجه دو اگر ریشه‌ای در jω داشته باشد ، ریشه دیگر هم در jω- است و در نتیجه سمت راست ریشه نداریم .

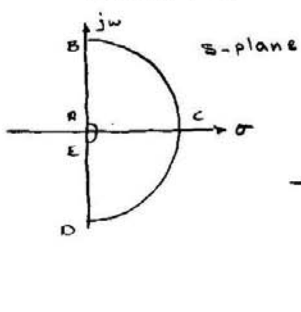
• مثال :

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)(s+5)}$$

ابتدا کانتور نایکوئیست indent شده را رسم میکنیم :

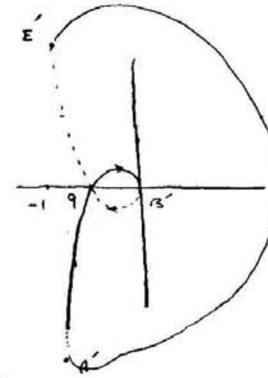
• فرض K = 1 :

• قطعه AB :




$s = j\omega$

$$\rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)(j\omega+3)(j\omega+5)}$$




$$\begin{cases} A: \omega = 0 \rightarrow |G(j\omega)| = \infty \ , \ \Phi = -90^\circ \\ B: \omega = \infty \rightarrow |G(j\omega)| = 0 \ , \ \Phi = -270^\circ \end{cases}$$

تذکر: تعداد نقاط قطع با محور حقیقی باید یافته شود:

$Im = 0 \rightarrow \omega_\pi = \sqrt{15} \rightarrow a = Re\{\omega_\pi\} = -0.0083$

تذکر: همواره جهت حرکت را مشخص کنید (در جهت افزایش فرکانس)

• قطعه BCD که در بالا است و DE هم قرینه AB است.

برای EA:

$S = \epsilon . e^{j\theta} \ , \ \theta \in [-\pi/2 , +\pi/2]$

$$\left. \begin{cases} E: |G| = \infty \ , \ \Phi = +90 \\ A: |G| = \infty \ , \ \Phi = -90 \end{cases} \right\} \rightarrow$$

از E به A چرخش با شعاع بینهایت و $180^\circ$- داریم.

بررسی پایداری:

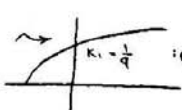
برای $K=1$: 
$N=0$, $P=0$ $\rightarrow Z=0 \rightarrow$ برای $K=1$ سیستم حلقه بسته پایدار است.

برای $K<1$ هم پایدار است:

برای $K=\frac{1}{a}$ منحنی از $-1$ میگذرد و برای $K>\frac{1}{a}$ ناپایدار است.

محدوده پایداری: $K < \frac{1}{a} = 125$

* تذکر: رابطه با مکان هندسی: (مهم):

$\omega = \sqrt{15}$ 

: مرز پایداری

از روی معیار راث میتوان تقاطع مکان و محور موهومی را یافت که همان K و a است که در نایکوئیست یافته می‌شد.

* تذکر: بررسی $K<0$: به ازای K های منفی ناپایدار است.

$F(s)$ در صفحه $(-1,0)$

$F(s) = 1 + KGH(s) \qquad K<0$

$F(s) = 1 - K_1GH(s) \qquad K_1 = -K > 0$

$F(s)$ در صفحه $(+1,0)$

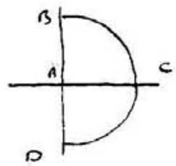
← برای تحلیل حالت $K<0$ ← نقطه بحرانی را $(+1,0)$ در نظر میگیریم و دوران حول آن را بررسی میکنیم:

$P=0 \qquad N=1 \quad \rightarrow \quad Z=1+0=1 \quad \Rightarrow$ ناپایدار است.

* مثال:

$$GH(s)=K\cdot\frac{(s-2)}{(s+1)^2}$$

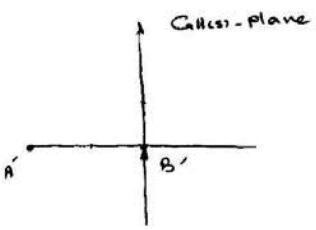
$K=1$





$$GH(j\omega)=\frac{j\omega-2}{(j\omega+1)^2}$$

$$\begin{cases} A:\ \omega=0 \rightarrow |G(j\omega)|=2 & \Phi=+180 \\ B:\ \omega=\infty \rightarrow |G(j\omega)|=0 & \Phi=-90 \end{cases}$$





حالا باید ببینیم که چگونه از $A'$ به $B'$ میرسیم:

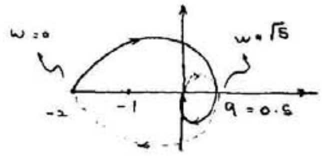
تعداد نقاط قطع محور حقیقی را میابیم:

$$GH(j\omega)=\frac{j\omega-2}{-\omega^2+1+2j\omega}=\frac{(j\omega-2)(1-\omega^2-2j\omega)}{(1-\omega^2)^2+(2\omega)^2}$$

$$\rightarrow \quad GH(j\omega)=\frac{(4\omega^2-2)+j(5\omega-\omega^3)}{(1-\omega^2)^2+(2\omega)^2}$$

$$Im=0 \rightarrow \omega=\sqrt{5} \rightarrow Re\{GH(j\omega)\}\Big|_{\omega=\sqrt{5}}=0.5=q$$

چون نقطه قطع دارد در $0.5$ است ← شکل به صورت زیر در می آید:





$$\left.\begin{array}{l} P=0 \\ N=1 \end{array}\right\} \rightarrow Z=1+0=1 \rightarrow$$ ناپایدار

$K=\frac{1}{2}$: مرز ناپایداری $\rightarrow$ $\frac{1}{2}<K<1$: ناپایدار $\qquad K>1 \Rightarrow$ باز هم ناپایدار

پایدار مرزی: حل سیستم درجه ۱۲ تست ۲.

تذکر: رابطه کمان هندسی در اینجا درست نمی باشد!

تذکر: $P=0$ یعنی سیستم حلقه باز پایدار است.

* معیار ساده شده نایکوئیست:

مقدمه: اگر $P=0$ باشد ← شرط پایداری صفر بودن یا نبودن $Z$ است.

← اگر راهی وجود داشته باشد تا بفهمیم منحنی نایکوئیست دور خورده است یا خیر ($N=0$ یا $N\neq 0$) کافی است برای آنکه نظر بدهیم در مورد پایداری سیستم حلقه بسته.

تذکر: اگر $P\neq 0$ باشد ← این کافی نیست که بفهمیم دور خورده یا خیر. بلکه باید تعداد دورها را بدانیم.

برای این منظور باید مفاهیم enclosure و encirclement را بدانیم:

- یک نقطه enclosure شده است اگر در جهت cw ، encirclement شده باشد.

یک نقطه توسط یک منحنی encirclement شده است اگر وقتی در طول منحنی حرکت می کنیم، نقطه در سمت راست قرار گرفته باشد. (درصورتیکه یک تکه منحنی داشته باشیم).

* اگر $GH(s)$ دارای قطبی در RHP نباشد (یعنی $P=0$ باشد)، آنگاه سیستم فیدبک پایدار است اگر و فقط اگر وقتی در طول دیاگرام قطبی با افزایش فرکانس حرکت می کنیم، همواره نقطه $-1$ سمت چپ این منحنی قرار گرفته باشد.

تذکر: (۱) بکمک این معیار تعداد دور و به عبارتی $N$ و $Z$ بدست نمی آید.

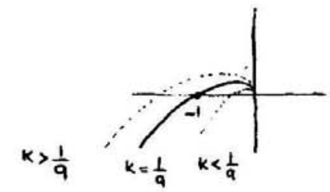
(۲) برای سیستم های حلقه باز پایدار ($P=0$)، تنها می توان از روی پاسخ فرکانسی در مورد پایداری قضاوت کرد.

(۳) برای $K<0$ از همین معیار می توان برای نقطه $+1$ استفاده کرد.

* پایداری نسبی :

در دیاگرام صفر و قطب : معیار پایداری نسبی ، فاصله قطبها از محور ها می باشد. در نایکوییست نزدیکی با ۱- معیاری برای پایداری نسبی می باشد.

مرز نزدیکی برای پایداری : گین به مقدار است : $K = \frac{1}{9}$

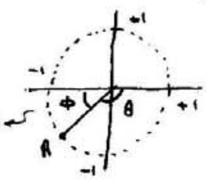



* حد بهره ( Gain Margine ) :

یعنی وقتی فاز $180°$ است ، گین چقدر با ۱+ فاصله دارد؟

$$GH(j\omega) = -1 \to \begin{cases} |GH(j\omega)| = 1 \\ \measuredangle GH(j\omega) = +180° \end{cases}$$

حالت دیگری که بررسی می کنیم زمانی است که $|GH(j\omega)| = 1$ است و باید ببینیم فاز چه فاصله ای با $+180°$ دارد؟ ← این هم معیاری برای بررسی پایداری نسبی خواهد بود.




که در اینجا $\Phi$ : فاصله با $\pi$ است

* حد فاز ( Phase Margine ) :

یعنی اگر $|GH(j\omega)| = 1$ باشد ، فاز چقدر با $\pi$ فاصله دارد؟

اکنون قصد داریم این دو مفهوم را ریاضی تعریف کنیم :

$GM$ : Gain Margine

ماکزیمم مقدار گینی که می توان به سیستم اعمال کرد تا به مرز ناپایداری برسد :

$$GM = \frac{1}{q} \qquad q = |GH(j\omega_\pi)| \quad \to \quad GM = \frac{1}{|GH(j\omega_\pi)|}$$

فرکانس گذر فاز :

$\omega_\pi$ : فرکانسی که در آن ، زاویه $-180°$ می شود.

$$GM_{dB} = -20 \log |GH(j\omega_\pi)| = -|GH(j\omega_\pi)|_{dB}$$

← با این تعریف اگر سیستم پایدار باشد ← $GM_{dB}$ باید مثبت باشد.

PM : (Phase Margine)

هنگامیکه $|G|=1$ است، PM برابر با کمیت فازی است که بتوان از سیستم کم کرد (یعنی در جهت عقربه ساعت) تا آنرا در مرز پایداری قرار دهد.

$PM = \Phi = 180 - \theta$ $\qquad \theta = -\angle GH(j\omega_c)$

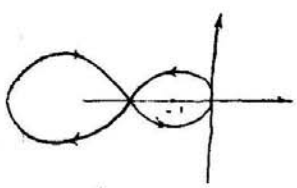
$\omega_c$ : فرکانس گذر از بهره ← $|GH(j\omega_c)| = 1$

$\rightarrow PM = 180 + \angle GH(j\omega_c)$

← PM باید مثبت باشد تا سیستم پایدار باشد.

* در حالت $P = 0$ : با افزایش K سیستم ناپایدار میشود و برای افزایش پایداری باید K را کم میکردیم.
← این GM ، "GM از بالا" گویند (چون حد بالای GM است)

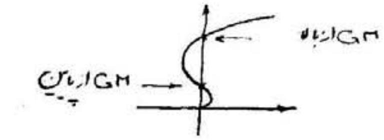
اما مثلا برای حالت $P \neq 0$ :



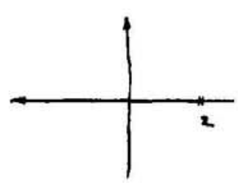

$\left.\begin{array}{l} \text{فرض}: P=1 \\ N=-1 \end{array}\right\} \rightarrow Z=0 \rightarrow$ پایدار

برای پایدار کردن باید K را کم کنیم (که -1 دور بخورد) ← برای چنین سیستمهایی GM از پایین تعریف میکنیم.

نمایش این موضوع در مکان هندسی:




توضیح: وقتی $P \neq 0$ با افزایش K پایداری بیشتر میشود:




شرط پایداری: $K > 2$

اگر K زیاد شود ← مرز پایداری نزدیک‌تر میشود ← پایدارتر میشود.

* بررسی از روی دیاگرام بودی :

از روی معیار ساده شده نایکوئیست پیش می رویم :

وقتی $\measuredangle G = 180 \rightarrow |G| = ?$

وقتی $|G| = 1 \rightarrow \measuredangle G = ?$

$\omega_c$ : فرکانس گذر بهره .

$\omega_\pi$ : فرکانس گذر فاز.

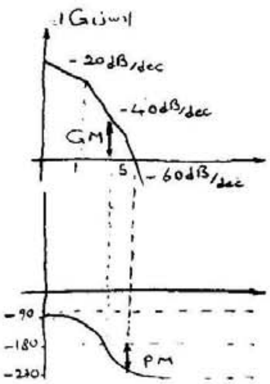
تذکر : بررسی پایداری از روی دیاگرام بودی مخصوص سیستمهای حلقه باز پایدار $(P = 0)$ می باشد چون از معیار ساده شده نایکوئیست کمک میگیریم.

* مثال: بررسی پایداری از روی دیاگرام بودی :

$$GH(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(-2j\omega+1)}$$

ابتدا دیاگرام بودی را رسم میکنیم :

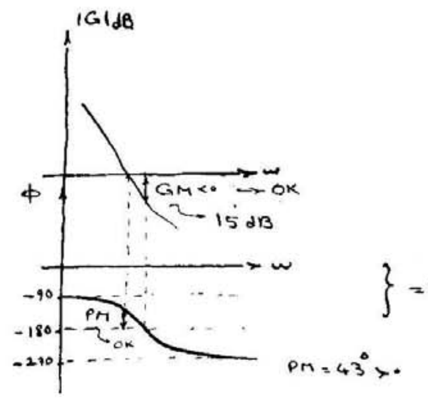
نمودار تقریبی .




برای پایداری: در $\measuredangle 180 \leftarrow |G|$ باید منفی باشد .

برای پایداری: در $|G| = 1 \leftarrow \measuredangle G$ باید از 180- مثبت تر باشد .

نمودار بودی دقیق برای مثال اخیر



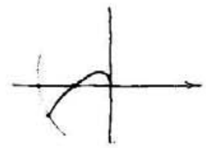

$\} \Rightarrow$ پایدار است

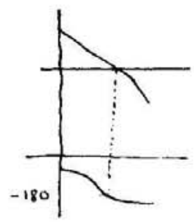
* جلسه بیست و ششم: (این جلسه غایب بودم) یکشنبه: ۸۲/۳/۱۱

- حد فاز:

→ نزدیکی به ۱-

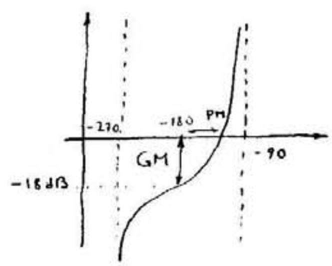
- حد بهره:






$\rightarrow GM = \infty$ ?

* دیاگرام لگاریتم اندازه-فاز:




* رابطه حد فاز با میرائی نسبی:

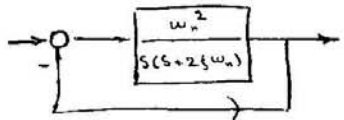
$\xi$ ← که PM

فرکانس گذر بهره

$$PM = 180 + \angle G(j\omega_c)$$

سیستم درجه ۲ استاندارد.

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$ : تابع تبدیل سیستم حلقه بسته




$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s} \rightarrow G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega + 2\xi\omega_n)}$$

$$\rightarrow |G| = \frac{\omega_n^2}{\omega(\omega^2 + 4\xi^2\omega_n^2)^{1/2}} \rightarrow 1 = \frac{\omega_n^2}{\omega_c(\omega_c^2 + 4\xi^2\omega_n^2)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \omega_n^4 = \omega_c^2(\omega_c^2 + 4\xi^2\omega_n^2) \Rightarrow \omega_c^4 + 4\xi^2\omega_n^2\omega_c^2 - \omega_n^4 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_c^2 = -2\xi^2\omega_n^2 \pm \sqrt{4\xi^4\omega_n^4 + \omega_n^4} \Rightarrow \omega_c^2 = \omega_n^2(-2\xi^2 \pm \sqrt{1+4\xi^2})$$

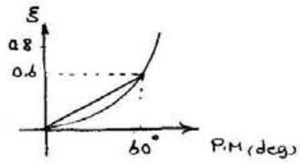
$$\omega_c = \omega_n\sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{1+4\xi^2}}$$

$$\frac{\omega_c}{\omega_n} = \sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{1+4\xi^2}} \qquad (*)$$

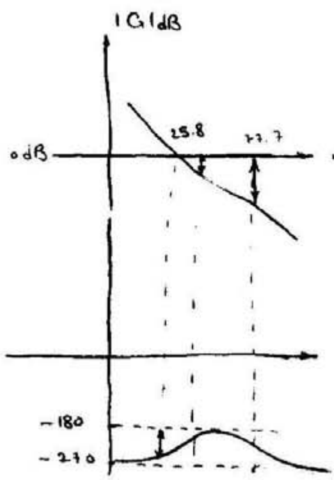
$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\xi\omega\omega_n} \rightarrow \angle G(j\omega) = -\left(180 - tg^{-1}\frac{2\xi\omega_n}{\omega}\right)$$

$$PM = 180 + \angle G(j\omega_c) = tg^{-1}\frac{2\xi\omega_n}{\omega_c} \rightarrow \& * \rightarrow$$

$$PM = tg^{-1}\frac{2\xi}{\sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{1+4\xi^2}}}$$




$\xi = 0.01\ PM \quad (?!) \quad \leftarrow \quad \xi \leqslant 0.7$



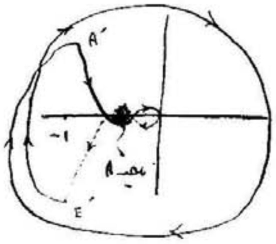

* سیستمهای ناپایداری مشروط :

سیستم مینیمم فاز با گین مثبت $|G(0)| = \infty,\ K = 1$

چون PM منفی است، ناپایدار است.

* مطلوبست دیاگرام نایکوئیست در تحلیل پایداری :

• چون سیستم پایدار است و قطب و صفر سمت راست نداریم ← 270° - فقط میتواند ناشی از سه انتگرالگیر باشد.




540° تغییر فاز از E به A′ یعنی ۱٫۵ دور

از روی معیار ساده شده واضح است که ناپایدار است.

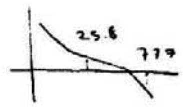
ولی از روی معیار کامل نایکوئیست داریم:

$$\left.\begin{array}{l} K < 69\ dB \\ K > 85\ dB \end{array}\right\} \quad Z = 2 \leftarrow \left\{\begin{array}{l} P = 0 \\ N = 2 \end{array}\right.$$

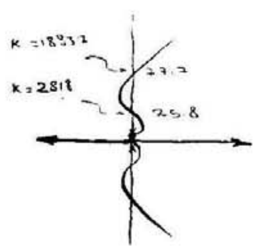
برای پایداری باید -1 در ناحیه A قرار گیرد:

$$K = \frac{1}{10^{-\frac{69}{20}}} \rightarrow 69\ dB \rightarrow \qquad 69_{dB} < K \text{ افزایش } < 85\ dB \rightarrow PM > 0$$

$\rightsquigarrow$



• نمودار مکان هندسی را با این اطلاعات به صورت تقریبی میتوانیم رسم کنیم:




$$GH(j\,25.8) = -1$$

$$1 + GH(j\,25) = 0$$

$$GH(77.7) = -1$$

$$1 + GH(77.7) = 0$$

پایداری سیستمهای با تأخیر زمانی:

$$GH(s) = GH_1(s) \cdot e^{-T_d s}$$

$GH_1(s)$: یک تابع حقیقی گویا

ابزارهای حوزه فرکانس:
- معیار راث
- مکان ریشه‌ها
- نایکوئیست

- مکان ریشه ؟:

$$1 + GH(s) = 0$$

$$1 + GH_1(s) e^{-\tau_d s} = 0$$

$$\begin{cases} |GH_1(s) e^{-\tau_d(s)}| = 1 \\ \measuredangle GH_1(s) e^{-\tau_d s} = \pm 180(2q+1) \end{cases}$$

$$\measuredangle GH(s) = \measuredangle GH_1(s) + \measuredangle e^{-\tau_d s} = 180$$

$$\measuredangle GH_1(s) - \omega\tau_d = 180 \quad \rightarrow \quad \measuredangle GH_1(s) = 180 + \omega\tau_d$$

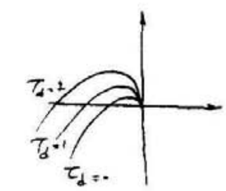
این مسئله باعث میشود استفاده از مکان ریشه مشکل باشد.

- نایکوئیست:

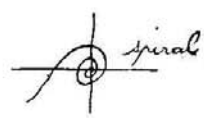
$$|GH(s)| = |GH_1(s)|$$

$$|e^{-j\omega\tau_d}| = 1$$

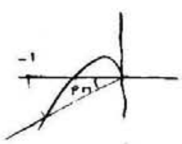
$$\measuredangle GH(j\omega) = \measuredangle GH_1(j\omega) - \omega\tau_d$$




برای ω های بزرگ :



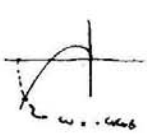

حداکثر تاخیری که سیستم میتواند داشته باشد به اندازه PM است.




مثال:

$$GH(s) = \frac{e^{-\tau_d s}}{s(s+1)(s+2)}$$

$$GH_1(j\omega) = \frac{e^{-\tau_d j\omega}}{(j\omega)(j\omega+1)(j\omega+2)} \qquad \omega = 0 \rightarrow \begin{cases} |G| = \infty \\ \phi = -90 \end{cases} \qquad \omega = \infty \rightarrow \begin{cases} |G| = 0 \\ \phi = -270 \end{cases}$$

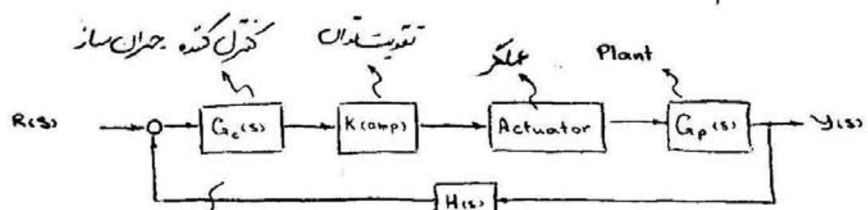



$$\omega_c = .446 \text{ rad/s} \rightarrow PM = 53.4$$

$$\omega_c\tau_d = 53.4 \times \frac{\pi}{180} \rightarrow \tau_d = \frac{53.4 \times \pi/180}{.446} = 2.09 \text{ ثانیه}$$

* جلسه بیست و هفتم :　　　　　　　　　　　　　　سه‌شنبه : ۸۴٫۳٫۱۳

* جبران سازی سیستم فیدبک :




Cascade Compensator　　　　Plant : سیستمی که خروجی آن قرار است کنترل شود.

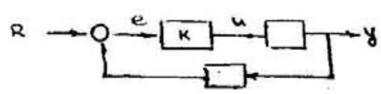
- هدف چنین سیستمی : Y(s) <-- R(s) و نیز پایداری داخلی است.

- عملگرها :　Hydrolic : کار با فشار روغن
Pnumatic : کار با فشار هوا
Electric : الکتریکی

هنگامیکه قادر نباشیم با تغییر K ، مشخصات سیستم را بهبود بخشیم ، باید دینامیکی به سیستم اضافه کنیم تا هدف برآورده شود.

* انواع جبران سازها :

(I) جبران ساز تناسبی :　　　$u = Ke$ خط حل که سیگنال کنترل




• مزایا :　۱- تنظیم پاسخ حالت گذرا
۲- مقابله با اغتشاشات
۳- کاهش حساسیت

• معایب :
۱- افزایش زیاد K ممکن است موجب ناپایداری شود.

(II) جبران ساز مشتق گیر:

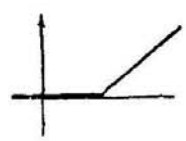
مشتق یعنی:
- اضافه کردن صفر
- فیدبک سرعت
- پیشگویی
- ...

ضعف:
- تسهیل نفوذ نویز به سیستم
- مشکل تحقق

* جبران ساز PD: (Proportional Derivation)

ترکیبی از جبران ساز های تناسبی و مشتقی است.

$u = (K_p + K_d s)e$



- تا این محدوده نویز اثر ندارد.

جبران ساز PD ← جبران ساز Lead (تقریبی از PD است).

(از لحاظ Category ها PD است.)

$$G(s) = K \cdot \frac{s+z}{s+p} \qquad : |z| \ll |p|$$

← برای هر فرکانس فاز تابع تبدیل مثبت است:

$\angle G(s) = tg^{-1}\frac{\omega}{z} - tg^{-1}\frac{\omega}{p} > 0$ → به همین علت به آن Lead گویند.

$p > z$

افزودن صفر: مکان هندسی ریشه ها را به سمت چپ متمایل میکند.

در حوزه فرکانس افزایش فاز (یعنی افزایش پایداری - یعنی چرخش منحنی نایکوئیست در خلاف جهت عقربه ساعت) را سبب میشود.

- تأثیر PO و lead :

- حرکت به سمت چپ در مکان

- حرکت منحنی نایکوئیست در جهت خلاف عقربه های ساعت. (فاز مثبت)

III) جبران ساز انتگرالی:   $u = \frac{1}{s} \cdot e$

- مزایا:

- آوردن انتگرال گیر موجب کاهش خطای حالت دائم میشود.

(جبران به ازای ورودی صفر خروجی غیر صفر میتواند ایجاد کند و میتواند خطا را صفر کند)

- ضعف:

- تأخیر که موجب ناپایداری میشود

تذکر: افزایش انتگرالگیر و افزایش قطب، منحنی مکان را به سمت راست خم میکند.

و از طرفی هر انتگرال گیر $\frac{\pi}{2}$ از فاز سیستم کم میکند ← منحنی نایکوئیست در جهت عقربه های ساعت بچرخد (← ممکن است ۱- دور بخورد)

- جبران ساز PI :   (Proportional Integration)

- ترکیبی از انتگرالی و تناسبی

$$u = (K_p + \frac{K_I}{s}) e$$

$$\Rightarrow G(s) = K_p + \frac{K_I}{S} = \frac{K_p S + K_I}{S} = K_p \cdot \frac{S + \frac{K_I}{K_p}}{S}$$

* جبران ساز PI - جبران ساز lag :

(تقریبی از PI است)

$G_c(s) = K\cdot\frac{S+Z}{S+P}$    $|Z| > |P|$    (خط صفر نمی‌شود ولی خیلی کم می‌شود)

برای فرکانس تأخیر فاز دارد: $\forall\omega \Rightarrow \angle G_c(j\omega) = tg^{-1}\frac{\omega}{z} - tg^{-1}\frac{\omega}{p} < 0 \Rightarrow lag$

(IV) جبران ساز تناسبی مشتقی انتگرالی: (PID)

(III)

$G_c(s) = K_p + K_d S + \frac{K_I}{S}$

همه خواص کنترل کننده های پیش را دارد.

• اکنون به بررسی این جبرانسازها می‌پردازیم:

جبرانسازی PD :

ابتدا مکان هندسی جبران نشده را رسم می‌کنیم. سپس مختصات نقاط مطلوب باید به محل های مطلوب map شوند!

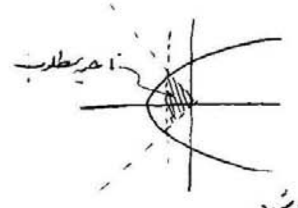
به کمک تنظیم K یا اضافه کردن صفر یا قطب بتوان مکان را از نقاط مطلوب گذراند.

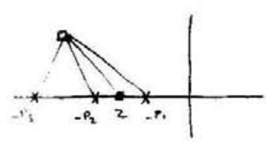
$P_D = K_p + K_d S = K_d(S + \frac{K_p}{K_d}) = \underbrace{K(S+Z)}$

• مثال:

$P.O \le 10\% \Rightarrow \xi > 0.6$

$T_s < 3 \Rightarrow \xi\omega_n > 4/3$




$\theta_z - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = 180 \Rightarrow \theta_z$ ✓

صفر جبرانساز را جایی قرار می‌دهیم که شرط زاویه در نقاط مطلوب ارضا شود.

K نیز از روی شرط اندازه بدست می‌آید:

$K = \frac{1}{|GH(s_d)|}$

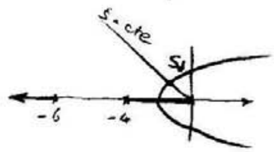
* مثال: کنترل کننده PD طراحی کنید که پاسخ پله سیستم PO: 16% و زمان نشست نسبت به حالت جبران نشده ۳ برابر بهبود یابد.

$$\frac{K}{S(S+4)(S+6)}$$

$$PO:\begin{cases} P.O < 16\% \\ T_{sc} = \dfrac{T_{suc}}{3} \end{cases} \Rightarrow \xi = 0.504$$

uncompensated

Compensated




سپس مکان هندسی سیستم جبران نشده را رسم میکنیم،

$$\theta = \cos^{-1}\xi = \cos^{-1}0.504$$

سپس خط $\xi = cte.$ را رسم میکنیم.

برای این مثال خاص:

$$S_d = -1.2 + j2.05$$

و K را از روی شرط اندازه بدست می‌آوریم.

$$K = \frac{1}{GH(-1.2 + j2.05)} = 43.35$$

زمان نشست جبران نشده:

$$S_d = -\xi\omega_n + j\omega_n\beta \rightarrow T_s = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{1.2} = 3.32$$

الان پیش از آنکه به سراغ PD برویم باید اعتبار قطب مسلط را بررسی کنیم

برای اینکار باید بقیه صفر و قطبهای سیستم حلقه بسته را یابیم.

ریشه سوم به ازای $K = 43.35$ ← قطب: $S_3 = -7.59$

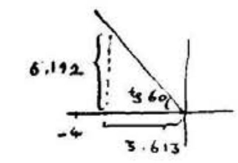
۶ برابر بیشتر است ← تقریب معتبر است.

الان به سراغ PD می‌رویم:

$$T_{sc} = \frac{3.32}{3} = 1.107$$

$$\xi = 0.5$$

$T_{sc} = \frac{4}{\xi\omega} \rightarrow \xi\omega = 3.613$ $\qquad$ $S_d = -\xi\omega_n \pm \underbrace{\omega_d(\omega_n \beta)}_{6.192}$

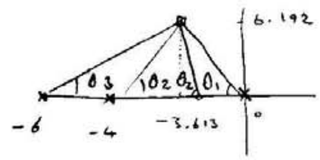


که از راه دیگر نیز داریم :

$(tg\,60) \times 3.613$

$\rightarrow S_d = -3.613 \pm j\,6.192$

الان باید مکان جدید را رسم کنیم :



$\theta_z - \theta_2 - \theta_3 - (180 - \theta_1) = 180$

$\rightarrow \theta_z = 95.6$

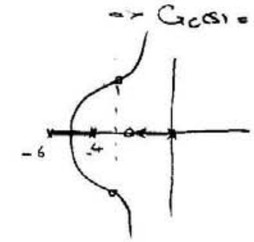
$$tg\,(180 - 95.6) = \frac{6.192}{3.613 - z} \rightarrow z = -3.005$$

الان باید گین را بیابیم :

$$k = \frac{1}{GH(S_d)} = \frac{1}{GH(-3.6 + j6.2)} = 47.63$$

$\Rightarrow G_c(s) = 47.63\,(s + 3.005)$

شکل مکان جدید :



قطبها و صفرها به ازای $K = 47.63$

$S_{1,2} = -3.36 \pm j6.2$

$z = -3.005$

$S_3 = -2.774$ ← باید حساب کرد

- قطب که به جبرانساز نزدیک میشود ← PO کمتر میشود .

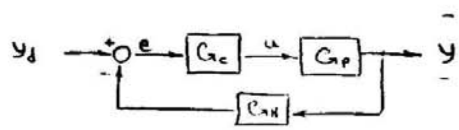
درحالت جبرانسازی شده :

$PO = 11.8\% < 16\%$

$T_s = 1.2 > 1.167$

* جلسه بیست و هشتم : سه‌شنبه : ۸۲/۳/۲۰

جبران‌ساز Lead :




PD: $G_c(s)=K(s+z)$ → بهبود پاسخ حالت گذرا

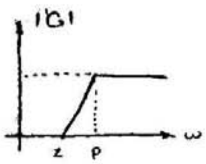
$u=(K_p+K_d s)e$ — تشدید نویز سیستم

عدم امکان تحقق دقیق

جبران‌ساز lead، حالت خاصی از PD است: $G_c(s)=K\cdot\frac{s+z}{s+p}$ : $|z|<|p|$

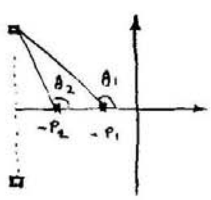
* طراحی در صفحه s : قراردادن صفر و قطب در مکان مطلوب و بدست آوردن z و p طوریکه مکان از نقاط مطلوب عبور کند.

$G_c(s)=K\cdot\frac{s+z}{s+p}$

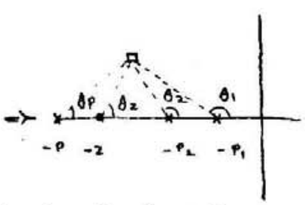



→ بهبود پاسخ حالت گذرا

امکان تحقق دقیق




→ اعمال جبران‌ساز →




$-\theta_1-\theta_2=(2q+1)\cdot180$

$-\theta_1-\theta_2+\underbrace{\theta_z-\theta_p}_{\theta_c}=180$

→ جبران‌ساز باید به اندازه $\theta_c$ فاز اضافه کند.

تذکر: برای هر سیستم بینهایت جبران‌ساز میتوان طراحی کرد.

به کمک ملاحظات دیگر مکان صفر یا قطب را می‌یابیم؛ و سپس از رابطهٔ بالا، پارامتر باقیمانده (صفر یا قطب) بدست می‌آید.

ملاحظات نظر: - خطای حالت دائم (این مورد انتظار ما از lead نیست!)

- اعتبار قطب مسلط

- تامین گین مورد نیاز

الان سه روش تحلیلی وجود دارد تا بتوانیم جبران‌ساز lead طراحی کنیم:

(I) روش تحلیلی (از کتاب Philips):

$$G_c(s) = \frac{a_1 s + a_0}{b_1 s + 1}$$

$a_0$ را برای ملاحظات خطای حالت دائم تعیین می‌کنیم.

- یافتن $a_1$ و $b_1$ برای اینکه $s_d$ جزو ریشه‌های سیستم حلقه بسته باشد:

$$\Delta(S_d) = 1 + G_c(S_d) G_H(S_d) G_p(S_d) = 0 \rightarrow G_c(S_d) \cdot G_p(S_d) \cdot G_H(S_d) = -1$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |G_c(S_d)|\,|G_H(S_d)|\,|G_p(S_d)| = 1 \\ \\ \angle G_c\big|_{S_d} + \angle G_H\big|_{S_d} + \angle G_p\big|_{S_d} = -180^\circ \end{array} \right\} \rightarrow$$ $a_1$ و $b_1$ یافته می‌شود.

اشکال این روش این است که هیچ دیدی به طراح نمی‌دهد (در مورد سایر ریشه‌های سیستم) و تنها می‌گوید مکان از نقاط مطلوب خواهد گذشت. اشکال دیگر در قسمت یافتن $a_0$ است:

چون تنها $a_0$ بر روی خطا اثر ندارد:

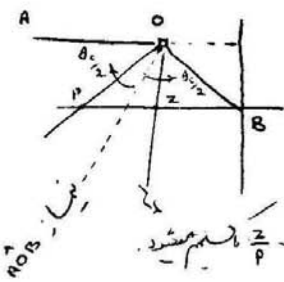
$$G = K \cdot G_c \cdot G_H \cdot G_p \qquad \underbrace{\phantom{xxx}}_{a_0}$$

$$K = \lim_{s \to 0} G$$

(II) روش نیمساز (Ogatta)

موقعیت p و z بگونه‌ای انتخاب میشود که $\frac{z}{p}$ ماکزیمم شود. (برای ملاحظات خطای دائم)

تذکر: $\frac{z}{p}$ ماکزیمم، لزوماً موجب بهبود خطای حالت دائم نمی‌باشد. (چون $\frac{kz}{p}$ خطا را تعیین میکند ← پس k هم باید توجه کرد).




(III) روش Dorf:

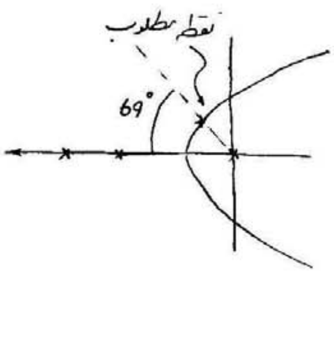
این روش میگوید صفر جبرانساز دقیقاً زیر قطب مطلوب قرار گیرد و یا سمت چپ اولین قطب حقیقی (دو اولین قطب: یعنی اولین قطب در مجموعه قطبهای شاخه مسلط).

و بعد دقیقاً مطابق آنچه ابتدا بیان شد، قطب جبرانساز را از روی شرط زاویه می‌یابیم.

(در حقیقت در این روش هم اعتبار قطب مسلط در زاویه مناسب برای صفر در نظر گرفته میشود).

* مثال: طراحی برای $PO < 30\%$ و بهبود زمان نشست به اندازه نصف حالت جبران نشده:

$$G(s)=\frac{1}{s(s+4)(s+6)}$$




نخستین گام: رسم مکان هندسی سیستم جبران نشده است.

مرحله (۲): رسم خط مناسب با $PO=30\%$

$PO=30\% \Rightarrow \xi=0.358$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\xi = 69^\circ$

مرحله (۳): یافتن نقطه تلاقی مکان با خط $S = 0.358$ :

برای s های روی خط: $tg\theta = \frac{\omega}{\sigma} \Rightarrow \sigma = \frac{\omega}{tg\theta}$

$\Delta(s) = 0 \Rightarrow s = -\sigma + j\omega$

$\longrightarrow s = -1 + j\,2.6$

مرحله (۴): بررسی اعتبار قطب مسلط :

$K = \frac{1}{|GH(s_d)|} = 63.2$

چون قطب سمت چپ شش برابر بیشتر است
بدون محاسبه میتوان گفت اعتبار قطب مسلط برقرار است

مرحله (۵): زمان نشست :

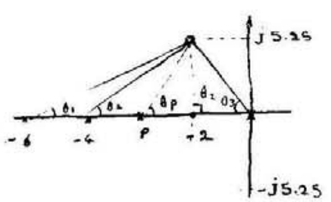
$T_s$ جبران نشده $= \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{1} = 4 \ (sec)$

$T_s$ جبران شده $= \frac{4}{2} = 2 \ (sec) \Rightarrow \frac{4}{\xi\omega_n} = 2 \Rightarrow \xi\omega_n = 2$

$\Rightarrow s = -\xi\omega_n \pm j[\xi\omega_n \, tg\theta] = -2 \pm j\,5.25$

الان به مراحل طراحی می‌رسیم:

صفر را در زیر قطب مطلوب قرار می‌دهیم:

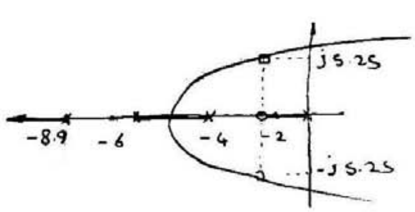



$-\theta_1 - \theta_2 - (180 - \theta_3) - \theta_p + 90^\circ = 180^\circ$

$-tg^{-1}\left(\frac{5.25}{2}\right) - tg^{-1}\left(\frac{5.25}{4}\right) - \theta_p + 90 - \left(180 - tg^{-1}\left(\frac{5.25}{2}\right)\right) = 180$

$\Rightarrow \theta_p = 38^\circ$

اکنون باید مکان هندسی سیستم جبران شده را رسم کنیم:



www.elec-fsr.blogfa.com

بررسی اعتبار قطب مسلط :

$$K = \frac{1}{|GH(S_d)|} = 345$$

ریشه‌های دیگر را به ازای $K = 345$ می‌یابیم :

$$\begin{cases} S_3 = -1.6 \rightarrow \text{باید شبیه‌سازی کنیم} \\ S_4 = -13.3 \rightarrow \text{بیشتر از ۵ برابر است} \rightarrow OK \end{cases}$$

- برای مقایسه :

$$\begin{cases} z = -2 \,,\; P = -8.9 \rightarrow S_3 = -1.6 \rightarrow 2\,(No) \\ z = -4 \,,\; P = -20 \rightarrow S_3 = -22 \rightarrow 2\,(OK) \\ z = -5 \,,\; P = -43 \rightarrow \begin{cases} S_4 = -43.8 \rightarrow -2 \;\; OK \\ S_3 = -5.13 \rightarrow \text{نزدیک صفر واقع در } s=-5 \text{ است} \rightarrow OK \end{cases} \end{cases}$$

- بررسی اینکه $\frac{z}{p}$ ، Max است یا خیر؟

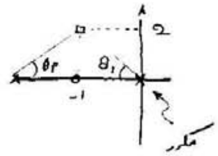
$$\begin{cases} z = -2 \rightarrow K = 345 \rightarrow K_v = 3.2 \rightarrow \frac{z}{p} : Max \\ z = -4 \rightarrow K = 698 \rightarrow K_v = 5.7 \\ z = -5 \rightarrow K = 1423 \rightarrow K_v = 6.9 \;\} \quad K_v \text{ بهترین} \end{cases}$$

مشاهده می‌کنید جایی که $\frac{z}{p}$ ماکسیمم بود، $K_v$ بهترین نبود ← معیار بهینه از معیار خوبی متفاوت است.

* طراحی Prefilter :

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} T_s \leq 4\,s \rightarrow \zeta\omega \geq 1 \\ P.O \leq 35\% \rightarrow \zeta \geq 0.32 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \zeta = 0.45 \\ \zeta\omega_n = 1 \end{cases} \rightarrow S_d = -1 \pm j2$$

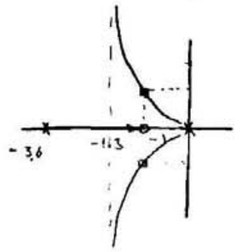



$$-\theta_p + 90 - 2(180 - \theta_1) = 180 \rightarrow \theta_p = 38^\circ$$

$$tg\,\theta_p = \frac{2}{P-1} \rightarrow P = 3.6$$

$$G_c(s) = K \cdot \frac{s+1}{s+3.6} \qquad K = \frac{1}{|GH(-1+j2)|} = 8.05$$

$$\sigma_A = \frac{-3.6+1}{2} = -1.3$$



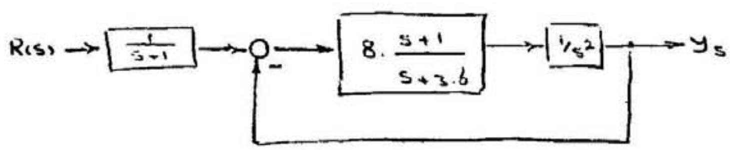

بررسی اعتبار قطب مسلط:

$$K = 8.05 \text{ برای } \Rightarrow \begin{cases} S_3 = -1.67 \\ Z = -1 \end{cases}$$

z به محور موهومی نزدیک است و صفر هم باعث افزایش P.O میشود.

شبیه‌سازی زمانی نشان میدهد: $P.O = 46\%$

برای حل: از Prefilter کمک میگیریم. Prefilter صفر جبرانساز را در سیستم حلقه بسته حذف میکند:




$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{8(s+1)}{\Delta(s)} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{8}{\Delta(s)} \Rightarrow$$

با این روش $(s+1)$ صفر از بین میرود P.O به اندازه 10% بهتر میشود.

تذکر: (1) حذف این صفر باید پیش از فیدبک انجام گیرد. (اگر درون حلقه قرار گیرد اساساً کار جبرانساز لغو میشود)

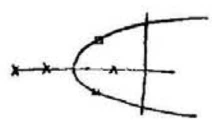
(2) سؤال: چرا همین کار را برای قطب جبرانساز انجام نمی‌دهیم؟

پاسخ: چون مقدار دقیق آن را نداریم. صفر $(s+1)$ را خودمان ایجاد کرده بودیم خودمان هم از بین بردیم!

* جبران‌ساز PI :

بهبود خطای حالت دائم با حفظ پاسخ حالت گذرا $\qquad G_c(s) = K\cdot\frac{s+z}{s}$

• مقدمه : خطای حالت دائم سیستم صفر نیست به ورودی پله چون نوع سیستم صفر است.



از طرفی اگر انتگرال‌گیر اضافه کنیم شکل مکان هم بهم می‌خورد.

چون شکل مکان نباید دست بخورد سعی می‌کنیم یک صفر هم نزدیک انتگرال‌گیر قرار می‌دهیم.

← قطب جبرانساز معلوم است (در مبداء است) ← صفر را در نزدیکی قطب انتخاب می‌کنیم تا مکان تحت تاثیر قرار نگیرد.

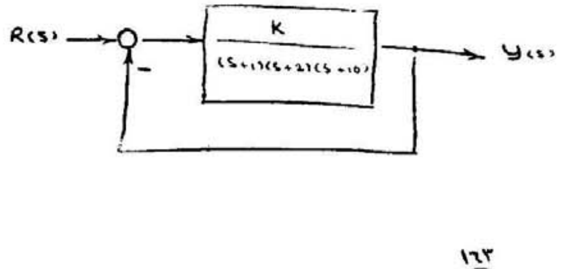
• ضعف جبرانسازی PI : بر پاسخ گذرا تاثیر دارد.
(چون یک کند کننده سیستم است که در زمانهای بزرگ عمل می‌کند)

روش طراحی جبرانساز PI :

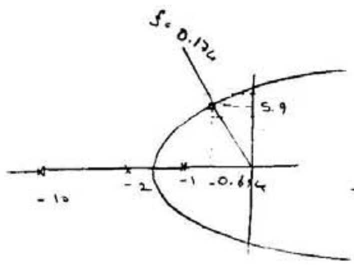
قطب جبران‌ساز در مبداء است.

صفر را تا جائیکه بتوانیم (شرط زاویه خراب نشود) حداکثر تا ۵-۴ درجه انحراف به سمت چپ انتخاب می‌کنیم (تا زیر شاخه جدید ایجاد شده از محور دور شود)

• مثال : جبرانسازی طراحی کنید که سیستم با $\xi$ معادل 0.174 کار کند و خطای آن به ورودی پله صفر باشد.



(۱) مکان جبران شده را می‌یابیم.




$\rightarrow S_d = -0.694 + j5.9$

K را از روی شرط اندازه می‌یابیم:

$$K = \frac{1}{|GH(S_d)|} = \frac{1}{|GH(-0.694 + j3.9)|}$$

$$-tg^{-1}\frac{3.9}{9.3} - tg^{-1}\frac{3.9}{1.3} - tg^{-1}\frac{3.9}{0.3} - tg^{-1}\frac{3.9}{7} + tg^{-1}\frac{3.9}{-7-0.1}$$

بررسی اعتبار قطب مسلط:

باید ریشه سوم و چهارم را بیابیم.

$|S_4| > 10$

$$\begin{cases} S_3 = -0.09 \\ z = -0.1 \end{cases} \longrightarrow$$ اثر آن خنثی می‌شود.

با اینکه خنثی می‌شود اما باز اثر کمی می‌ماند 0.09 وجود دارد که در زمان‌های بلند خود را نشان می‌دهد.

* جلسه بیست وهفتم : سه شنبه: ۸۲,۳,۲۰ ساعت : ۱۲:۳۰

• جبران ساز PI :

$$G_c(s)=\frac{s+z}{s}$$

- حفظ پاسخ حالت گذرا :

- بهبود پاسخ حالت دائم :

$$G_c(s)=K\cdot\frac{s+z}{s+p} \quad , |z|>|p|$$

جبران ساز lag : حالت خاص از PI است.

نوع سیستم عوض نمیشود. تنها ثابت خطا افزایش می یابد.

یادآوری : برای هر سیستم یک ثابت خطای محدود و غیر صفر وجود دارد.

$$G(s)=K\cdot\frac{(s+z_1)\cdots(s+z_m)}{s^N(s+p_1)\cdots(s+p_n)}$$

فرض N=1 :

$$K_{vu}=\lim_{s\to 0} sG(s)=K\cdot\frac{z_1z_2\cdots z_m}{p_1p_2p_3\cdots p_m}$$

اکنون جبران ساز lag را اضافه میکنیم:

$$K_{vc}=\lim_{s\to 0} G_c\cdot G(s) \Rightarrow$$

$$K_{vc}=K\cdot\frac{z_1\cdots z_m}{p_1p_2\cdots p_n}\times\frac{z_c}{p_c} \Rightarrow K_{vc}=K_{vu}\cdot\frac{z_c}{p_c} \quad , \quad \frac{z_c}{p_c}>1$$

- دو شرط باید ارضا شود:

(۱) پاسخ حالت گذرا دست نخورد یعنی به ازای مقادیر بهره یکسان به قطبهای مطلوب برسیم.

(۲) نسبت $\frac{z_c}{p_c}$ بزرگ باشد.

• تذکر: در نزدیک محور (نزدیک مبدا) هر دو خاصیت ارضا میشود:
یعنی هم نسبت $\frac{z}{p}$ بزرگ است و هم در برابر نقاط مطلوب قابل صرفنظر کردن.

مثال: $\left\{ \begin{array}{l} P_c = -0.01 \\ Z_c = -0.1 \end{array} \right. \rightarrow \}$ $Z = 10 \cdot P_c$

نقطه مطلوب

$(-2+j2)+0.1 \simeq (-2+j2)+0.1$

نتیجه: تنها حوالی مبداء بر روی خاصیت برقرار است ← صفر و قطب جبرانساز lag در حوالی مبداء انتخاب میشود.

- چون قطب و صفر نزدیک هم هستند، همدیگر را خنثی میکنند.

★ در عمل: (۱) یکی از پارامتر z و p خیلی نزدیک مبداء انتخاب میشود.

(۲) پارامتر دیگر از روی میزان بهبود خطای حالت دائم و $\frac{Z_c}{P_c}$ بدست می آید.

★ مثال: جبرانساز را طراحی کنید که خطای حالت دائم ۱۰ برابر بهبود یابد.

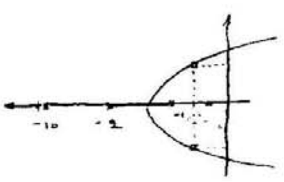
$$G(s) = \frac{K}{(S+1)(S+10)(S+2)} \qquad K = 164.5$$

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) = \frac{164.5}{20} = 8.22$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_p + 1} = \frac{1}{9.22} = 0.108 \xrightarrow{\div 10} e_c = 0.0108 = \frac{1}{1 + K_{pc}} \rightarrow K_{p_c} = 91.59 \rightarrow$$

$$\frac{K_{pc}}{K_{pu}} = \frac{Z_c}{P_c} = 11.1 \Rightarrow P_c = 0.01 \rightarrow Z_c = 0.01 \times 11.1 = 0.111$$

$$\Rightarrow G_c(s) = \frac{S + 0.111}{S + 0.01}$$




الان باید K را مجدداً چک کنیم و از شرط اندازه داریم:

مقدار نزدیک به 164.5 است که همان 164.5 در نظر میگیریم.

بررسی قطب مسلط:

$$S_{1,2} = -0.694 + j3.8$$

$$|S_3| = -11.554 > 10 \qquad S_4 = -0.101 \qquad Z = -11$$

مقدار دقیق K: تقاطع خط ξ با مکان:

$$K = 58.097 \leftarrow S = -0.678 \pm j3.836$$

(اگر این مقدار K پیش برویم، P.O دقیق بدست می آید ولی بهبود خطا، ۱۰ برابر نخواهد بود).

* جبرانساز PID :
$$\left.\begin{matrix}\text{Lag-Lead}\\ \text{Lead-Lag}\end{matrix}\right\}$$

هم پاسخ گذرا هم پاسخ حالت دائم را بهبود می‌بخشد.

در lag-lead : اول lag در بهبود پاسخ حالت دائم و سپس lead در بهبود پاسخ حالت گذرا عمل می‌کند و در lead-lag برعکس.

تفاوت در اهمیت که برمشخصه ای که می‌خواهیم ۱۰۰٪ بهبود یابد ، آخر انجام می‌دهیم (در مرحله دوم)

اگر خطا مهم باشد lead-lag و اگر حالت گذرا مطرح باشد lag-lead .

* طراحی جبرانساز در حوزه فرکانس :

مقدمه : ابزاری که در این بخش در اختیار داریم پاسخ فرکانسی است.

و از اندازه‌های عملکرد فرکانسی کمک خواهیم گرفت : مثلاً $M_P$ ، cut-off ، $\omega_b$ ، $\Phi_M$ ، $G_M$

سیستمهای کنترلی معمولاً براساس اندازه عملکرد زمانی بیان میشوند پس ابتدا باید روش Map کردن اندازه‌های عملکرد زمانی به فرکانسی مطرح شود.

به فرض : حالت دائم در حوزه فرکانس ـ معنای حوالی نواحی صفر مشخصه فرکانسی است.

به همین منظور ماهیتی چون حساسیت و اغتشاش و خطا در حوزه فرکانس باید کشف شود.

اما در عمل نمی‌توان همه اینها را باهم تنظیم کرد : معمولاً با $\Phi_M$ ، $\omega_b$ و حساسیت و خطا سروکار داریم.

* تذکر : (از مباحث قبل) پیاده سازی (Implementation) شبکه‌های lead و lag :

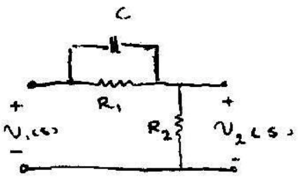
ـ به کمک کامپیوتر :

$G_c(z) = K\cdot\dfrac{z+a}{z+b}$ $\qquad e \to \boxed{G_c(z)} \to u$

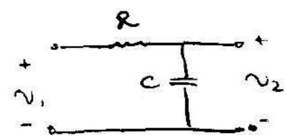
$$\Rightarrow \frac{u}{e} = \frac{z+a}{z+b} \Rightarrow u(z+b) = e(z+a) \Rightarrow u(k+1) + b\,u(k) = e(k+1) + a\,e(k)$$

$u(k) = -b\,u(k-1) + K e(k) + K\alpha\, e(k+1)$

- ساده‌سازی با المانهای پیوسته:




Lead



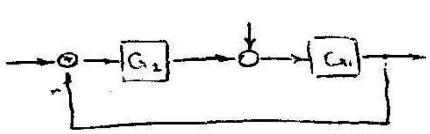

Lag

* جلسهٔ سی ام (جلسهٔ نهایی):

پنجشنبه: ۲۲ر۳ر ۸۲

* جبران‌سازی در حوزهٔ فرکانس:

- رفتار حالت دائم
- دقت در تنظیم کاری
- پهنای باند در فرکانس قطع
- حذف نویز
- حساسیت
- پایداری نسبی
- پاسخ حالت گذرا (ارتباط پاسخ حالت گذرا با مشخصه فرکانسی)
- حذف اغتشاش




برای کاهش اغتشاش باید $G_2$ بزرگ باشد: $\dfrac{G_1}{1 + G_1 G_2}$

• ارتباط پهنای باند و فرکانس قطع:

یادآوری: پارامترهای سیستم حلقه‌باز را برای رسیدن به شرایط مطلوب در حلقه بسته تغییر می‌دهیم.

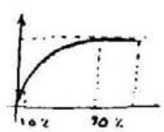
$$\omega_b = \omega_n\sqrt{(1-2\xi^2)\sqrt{\cdots}} = \omega_n \cdot f_1(\xi) \qquad \forall \xi > 0.3$$

$$\omega_c = \omega_n\sqrt{-2\xi^2+\sqrt{\cdots}} = \omega_n \cdot f_2(\xi) \qquad \to \quad \frac{\omega_b}{\omega_c} = \frac{f_1(\xi)}{f_2(\xi)} = \frac{1}{0.63}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_c \cong 0.63\,\omega_b \\ \forall \xi > 0.3 \end{cases}$$

* ارتباط زمان اوج با پهنای باند: $\underbrace{\quad}_{\omega_b} \therefore \underbrace{\quad}_{T_r}$

(۱) در سیستم درجه ۱: $G(j\omega) = \dfrac{1}{1+j\omega\tau} \Rightarrow BW = \dfrac{1}{\tau} = \omega_b$




سیستم درجه ۱ در بی‌نهایت به ۱۰۰٪ مقدار نهایی می‌رسد.

$\tau \to .63$

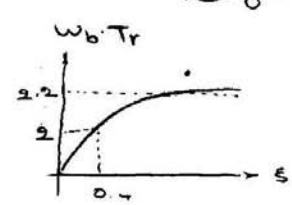
$2\tau \to .85$ $\qquad @90\% \Rightarrow T_r = 2.2\tau$

$3\tau \to .95$ $\qquad \Rightarrow \tau = \dfrac{T_r}{2.2} \Rightarrow \omega_b = \dfrac{2.2}{T_r}$

$4\tau \to .98$

$$T_r\,\omega_b = 2.2$$

برای سیستم درجه ۱ قطعی است.




در سیستم درجه ۲، $T_r$ به $\xi$ هم وابسته است:

$$\omega_b \cdot T_r = \begin{cases} 2 \\ 2.2 \leftarrow \xi > 0.4 \end{cases}$$

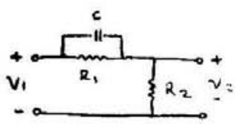
* ارتباط زمان نشست و فرکانس قطع :

$$\begin{cases} T_s = \dfrac{4}{\xi\omega_n} \\ P.M = tg^{-1}\left(\dfrac{2\xi\omega_n}{\omega_c}\right) \end{cases} \qquad tg\,PM = \frac{2\xi\omega_n}{\omega_c} \rightarrow \xi\omega_n = \frac{4}{T_s}$$

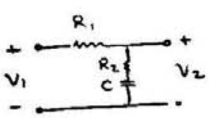
$$\rightarrow tg\,PM = \frac{8}{T_s\cdot\omega_c} \quad \rightarrow \quad \omega_c = \frac{8}{(tg\,PM)\cdot T_s}$$

رابطه دیگر نیز برقرار است : $\quad \xi = 0.01\,\Phi_M$

* مشخصات شبکه Lead , Lag :




lead




lag

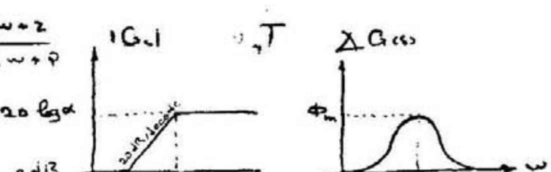
$$\rightarrow G_c(s) = K\cdot\frac{s+z}{s+p} : \begin{cases} lead: \dfrac{z}{p} < 1 \\ lag: \dfrac{z}{p} > 1 \end{cases}$$

* مشخصات جبرانساز lead :

$$G_c(s) = \alpha\cdot\frac{s+z}{s+p} \qquad \alpha = \frac{p}{z}$$

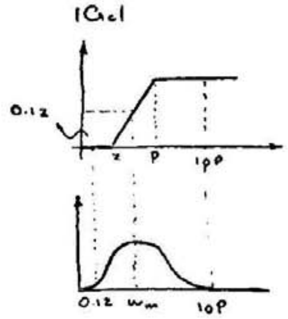
جمله α در نظر گرفتیم که dc-gain برابر ۱ است.

$$G_c(j\omega) = \alpha\cdot\frac{j\omega+z}{j\omega+p}$$




$$\angle G_c(j\omega) = tg^{-1}\frac{\omega}{z} - tg^{-1}\frac{\omega}{p} > 0 \qquad (p > z)$$

محاسبهٔ $\omega_m$ ، $\phi_m$ ، $|G_c(j\omega_m)|$ :




$$G(j\omega)=\alpha\cdot\frac{j\omega+z}{j\omega+p}$$

$$\phi(\omega)=\measuredangle G(j\omega)=tg^{-1}\frac{\omega}{z}-tg^{-1}\frac{\omega}{p}$$

$$\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}=\frac{1/z}{1+\frac{\omega^2}{z^2}}-\frac{1/p}{1+\frac{\omega^2}{p^2}}=\frac{z}{z^2+\omega^2}-\frac{p}{\omega^2+p^2}=\frac{z(\omega^2+p^2)-p(\omega^2+z^2)}{(\omega^2+p^2)(\omega^2+z^2)}=0$$

$$\Rightarrow 0=z\omega^2+zp^2-p\omega^2-pz^2 \Rightarrow \omega^2(z-p)=pz^2-p^2z \Rightarrow \omega^2(z-p)=pz(z-p)$$

$$\Rightarrow \omega^2=pz \Rightarrow \boxed{\omega_m=\sqrt{pz}}$$

$\phi(\omega_m)=?$

$$G(j\omega)=\alpha\cdot\frac{(z+j\omega)(p-j\omega)}{\omega^2+p^2}=\alpha\cdot\frac{pz+pj\omega+\omega^2-zj\omega}{\omega^2+p^2}$$

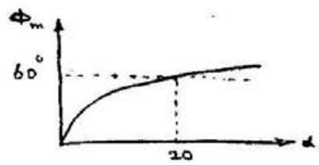
$$\Rightarrow \phi(\omega)=tg^{-1}\left(\frac{\omega(p-z)}{\omega^2+pz}\right)$$

$$\phi_m=\phi(\omega_m)=tg^{-1}\Big(\frac{\omega_m(p-z)}{\omega_m^2+\underbrace{pz}_{pz=\omega_m^2}}\Big)=tg^{-1}\frac{\omega_m(p-z)}{2\omega_m^2}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} \\ p=\alpha z\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$tg\,\phi_m=\frac{\alpha z-z}{2\sqrt{p}\,z}=\frac{z(\alpha-1)}{2z\sqrt{\alpha}}$$

$$\begin{cases} tg\,\phi_m=\dfrac{\alpha-1}{2\sqrt{\alpha}}\\[2mm] \sin\phi_m=\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\end{cases}$$




$$\alpha=\frac{P}{Z}$$

شیب ← ∘ ← $\alpha\uparrow$

۱. اگر فاز بیشتر از °60 مورد نظر باشد، α خیلی بزرگ میشود.

- تحمیل صفر قطب به سیستم : Lead → PD
- مقادیر خازن و مقاومت نامعقول بدست می‌آید.

۲. تاثیر Lead بر روی اندازه:

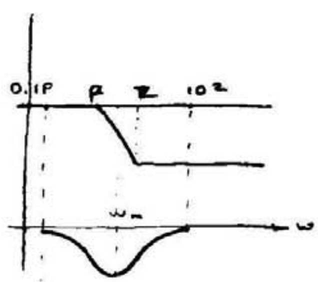
$$|G(j\omega_m)| = \alpha \cdot \frac{\sqrt{\omega_m^2 + z^2}}{\sqrt{\omega_m^2 + p^2}} \rightarrow |G(j\omega_m)|^2 = \alpha^2 \cdot \frac{\omega_m^2 + z^2}{\omega_m^2 + p^2} = \alpha^2 \cdot \frac{pz + z^2}{pz + p^2}$$

$$\rightarrow |G(j\omega_m)| = \sqrt{\alpha} \quad \text{or} \quad 10 \log \alpha \ (dB)$$

$$\rightarrow \begin{cases} |G(j\omega_m)| = \sqrt{\alpha} \\ \omega_m = \sqrt{pz} \end{cases}$$

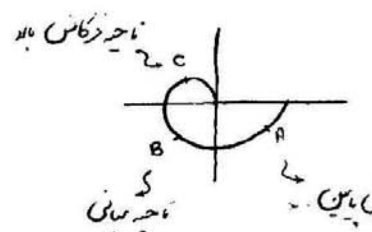
- مشخصات جبرانساز Lag:

$$G_c(s) = \alpha \cdot \frac{s+z}{s+p} \qquad \alpha = \frac{p}{z} < 1$$




جبرانسازی Lead: دامنه فاز مرزی را افزایش می‌دهد.

یک منحنی قطبی typical:



- اگر صفر و قطب را در ناحیه C قرار دهیم که فرکانس بالاست:

اندازه را زیاد می‌کند اما اندازه در حالت بالاست ← اثر مخرب دارد.

فاز را زیاد می‌کند اما مقدار آن کم است ← مزیتی ندارد.

- اگر صفر و قطب جبرانساز را در ناحیه A قرار دهیم:

افزایش دامنه مخرب است.

تاثیر مثبت فاز ندارد.

- در ناحیه B:

- افزایش فاز تاثیر مثبت دارد.

- افزایش دامنه تاثیر منفی دارد. ← z و p باید به دقت انتخاب شوند.

* پس از معرفی lead و lag به روش طراحی می‌پردازیم:

* روش محل دقیق صفر و قطبهای lead: از روی دیاگرام بد

(۱) گین سیستم را تنظیم می‌کنیم. (برای ملاحظات خطای دائم)

← به ازای $K_0$ یافته می‌شود ← $\Phi_M$ را حساب کند

اگر $\Phi_M$ مناسب بود، کفایت می‌کند. - افزایش فاز در فرکانس قطع مناسب صورت بگیرد.

(۲) حد فاز را می‌یابیم: با رسم دیاگرام بد و مقدار فاز حد فاز را محاسبه می‌کنیم

$$PM = \Phi < PM_d$$

افزایش فاز: $PM_d - \Phi$

$$\Phi_m = \Phi_d - \Phi_{PM} + \underbrace{\Delta}_{\text{Margine}}$$

(۳) مقدار $\alpha$ را محاسبه کرد:

$$\sin \Phi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

فرکانسی که اندازه پاسخ فرکانسی G برابر $-10\log\alpha$ است را یافته و آن را $\omega_1$ می‌نامیم ←

$\omega_m = \omega_1$

$$|G_c \cdot GH(j\omega)| = 10\log\alpha - 10\log\alpha = 0$$

یعنی این فرکانس قطع جدید می‌باشد. در فرکانس جدید میزان فاز GH کمتر از فرکانس قبلی است.

- اگر در حوالی فرکانس قطع تغییرات تند داشتیم، lead به درد نمی‌خورد.

* مثال:

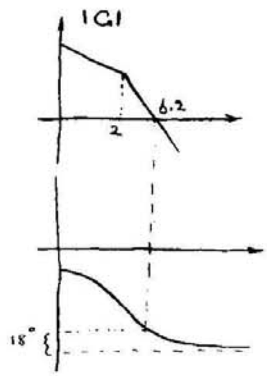
$G(s) = \frac{K}{s(s+2)}$

ملاحظات $\begin{cases} K_v = 20 \\ PM = 45^\circ \end{cases}$

(۱) K را برای ملاحظات خطای دائم set می‌کنیم:

$K_v = 20 \to \lim_{s \to 0} sG(s) = 20 = \frac{K}{2} \Rightarrow K = 40$

(۲) برای K = 40 پاسخ فرکانسی را رسم می‌کنیم:




$\Delta$ : در حدود ۵-۱۰ اضافه می‌دهیم!

$\phi_m = 45 - 18 + 3 = 30^\circ$

$\sin 30^\circ = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \Rightarrow \alpha = 3$

این °۳۰ را باید در فرکانس جدید اعمال کنیم.

فرکانسی که در آن، اندازه $|G| = -10 \log \alpha$ می‌شود را حساب می‌کنیم.

$10 \log 3 = 4.8 \to \omega_m = 8.4 \ (rad/s)$

$\to \begin{cases} \alpha = \frac{P}{Z} = 3 \\ \sqrt{PZ} = \omega_m = 8.4 \end{cases} \to \begin{cases} P = 14.4 \\ Z = 4.8 \end{cases}$

$\Rightarrow G_c(s) = 3 \times \frac{s + 4.8}{s + 14.4}$

- تذکر: در افزایش K محدودیت داریم. حتماً قرار است $\phi_m$ حداکثر $60^\circ$ باشد.

← اگر ثابت خطا و حد فاز داده شده از روش قبل استفاده می‌کنیم.

* اگر حدفاز و پهنای باند داده شد چه باید کرد؟

پاسخ:

در ابتدا بیان میکنیم که lead پهنای باند را زیاد می‌کند. اما این زیاد شدن در اختیار ما نیست.

اگر پهنای باند و حدفاز داده شده باشد:

* هدف: تأمین پهنای باند و حدفاز:

* روش:

• (۱) از رابطه $w_c = 0.63 w_b$ فرکانس گذر سیستم را می‌یابیم.

• (۲) پس از یافتن فرکانس گذر، $\phi_m$ را در این فرکانس می‌یابیم.

در حدفاز مطلوب مقایسه می‌کنیم ← مشخص میشود که چقدر باید فاز اضافه کنیم

(مقدار مورد نیاز را برای تأمین PM بدست می‌آوریم)

• (۳) اکنون K را به گونه‌ای تعیین میکنیم که فرکانس $w_m$، فرکانس گذر باشد:

$$@w_c \Rightarrow |G(jw_m)| = 10\log\alpha$$

$$|KG(jw_m)| + 10\log\alpha = 0 \quad \Rightarrow$$ K بدست می‌آید.

$$|KG(jw_m)| = -10\log\alpha \quad \text{or} \quad \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

* مثال:

$$G(s) = \frac{K}{s^2} \qquad \begin{cases} w_b = 5 \\ \xi = 0.5 \end{cases}$$

$$w_c = 0.63 w_b \Rightarrow w_c = 3.15 \ (rad.s^{-1})$$

$$\left.\begin{array}{l} PM_d = 100\xi = 50^\circ \\ PM_{\text{فعلی}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 50^\circ = PM_{\text{مورد نیاز}}$$

$$\left.\begin{cases} w_m = \sqrt{pz} \\ \sin\phi_m = \sin 50^\circ = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \Rightarrow \alpha = 10 = \frac{p}{z} \end{cases}\right\} \Rightarrow$$ z و p بدست می‌آید $\begin{cases} p = 9.74 \\ z = 0.974 \end{cases}$

اکنون باید K را تعیین کنیم:

$$|G(jw)| = \left|\frac{K}{(jw)^2}\right| = \frac{K}{w^2}$$

$$|G(j3.15)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \rightarrow \frac{K}{(3.15)^2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow K \simeq 3$$

$\omega_m$

$$\Rightarrow G_c(s) = 10 \times \frac{s + 0.974}{s + 9.74}$$

(افزایش فاز: چرخش در خلاف جهت عقربه‌های ساعت).

## * جبران‌ساز Lag: (طراحی)

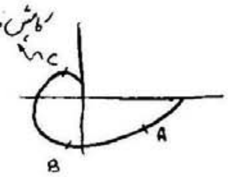
$$G_c(s) = \alpha \cdot \frac{s+z}{s+p} \qquad \alpha = \frac{p}{z} < 1$$

اینجا هم فرض براینست که گین dc برابر یک است.

مشخصه lag:
- کاهش گین
- کاهش فاز

- همانطور که بحث شد در lead، قرار دادن صفر و قطب در ناحیه‌ی فرکانس بالا تاثیر ندارد.

کاهش فاز و دامنه تاثیری ندارد.




برای lag باید صفر و قطب را در محدوده فرکانسهای پایین قرار داد.

چون کاهش فاز (چرخش cw) عامل مخرب است ← اینجا مساعد نیست.

در ناحیه A:
- کاهش فاز: عامل مخرب نیست چون مقدارش کم است.
- کاهش دامنه: تاثیر مثبت دارد. (چون در تمامی فرکانسها ادامه دارد).

- تذکر: ممکن است پرسیده شود چرا از گین برای کم کردن دامنه استفاده نمی‌شود؟
- پاسخ: اثر پایدارسازی در کاهش گین ... و lag یکی است. اما lag در فرکانسهای پایین تاثیر ندارد.

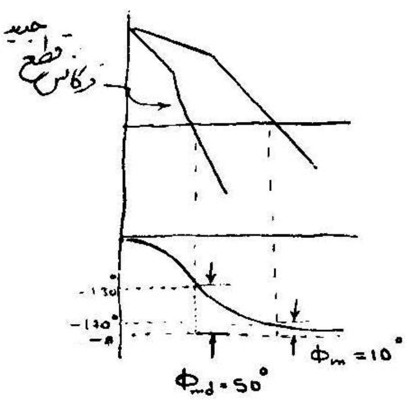
و از lag برای از بین بردن خطا استفاده می‌شود.

• روال طراحی جبرانساز lag :

- اطلاعاتی که در اختیار داریم :
  - ثابت خطا
  - حدفاز

تذکر: lag فاز را کم میکند.

توضیح: در نمودار مقابل، فرض می‌خواهیم $\Phi_{md}=45°$ باشد:




برای رسیدن به $\Phi_{md}$ باید $40°$ اضافه کنیم ⇐
یعنی فرکانس قطع را به سمت چپ شیفت دهیم.

نتیجه: فرکانسی را که در آن فرکانس، فاز دستورمان در آن مناسب است (حدفاز را تأمین میکند) را یافته و به کمک lag، آن را به فرکانس قطع تبدیل میکنیم.

تذکر: چون عموماً فاز در فرکانسهای پایین مناسب است ⇐ فرکانس قطع کم میشود ⇐ پهنای باند کاهش می‌یابد.

• معیارهای طراحی ثوابت خطا و حدفاز:

دنباله مطالب در صفحه بعد آورده شده است.

ادامه مطالب در صفحه بعدی آورده شده است.

معیارهای طراحی ثوابت خطا و حد فاز :

$\alpha = P/Z$

$G_c(s) = \alpha \cdot \frac{s+Z}{s+P}$

(۱) K را برای ملزومات ثوابت خطا می‌یابیم.

(۲) پاسخ فرکانسی ترسیم می‌شود.

(۳) فرکانسی که در آن فاز مطلوب است یعنی برابر است با $\underbrace{-180+\Phi_{pm}+\overset{5-12^\circ}{(\Delta)}}_{=\Phi(\omega)}$ را یافته و آن را برابر $\omega_1$ قرار دهید. $(rad.s^{-1})$

(۴) صفر جبران‌ساز را برابر $\frac{1}{10}\omega_1$ قرار می‌دهیم (تا تأخیر فاز تقریباً از بین رفته باشد)

(۵) $\alpha$ را جوری انتخاب می‌کنیم که $\omega_1$ فرکانس قطع باشد. یعنی:

$$|KG(j\omega_1)|_{dB} + |G_c(j\omega_1)|_{dB} = 0$$

$$\rightarrow 20\log\alpha + |KG(j\omega_1)| = 0 \Rightarrow$$

$$20\log\alpha = -|KG(j\omega_1)| \rightarrow$$ $\alpha$ یافته می‌شود

(۶) قطب جبران‌ساز را از رابطه $P = \alpha Z$ می‌یابیم.

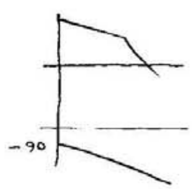
مثال:

$GH(j\omega) = \frac{K}{s(s+2)}$ $\quad \begin{cases} K_v = 20 \\ \Phi_m = 45^\circ \end{cases}$

(۱) یافتن K :

$K_v = \lim_{s \to 0} s\,GH(s) = 20 = \frac{K}{2} \rightarrow K = 40$

(۲) ترسیم پاسخ فرکانسی :




(۳) $-180 + 45^\circ + \overset{\Delta}{0} = -135$

از روی جدول $\Rightarrow \omega_1 = 1.5\ (rad.s^{-1})$

(۴) $Z = 0.1\omega_1 = 0.15$

(۵) $20\log\alpha = -[20\log 40 - 20\log\omega_1 - 20\log(\omega_1^2+4)]$

(۶) $\&\ \omega_1 = 1.5 \rightarrow \alpha = 0.1 \rightarrow P = \alpha Z = 0.1 \times 0.15 = 0.015$

$$\rightarrow G_c(s) = 0.1 \times \frac{s+0.15}{s+0.015}$$

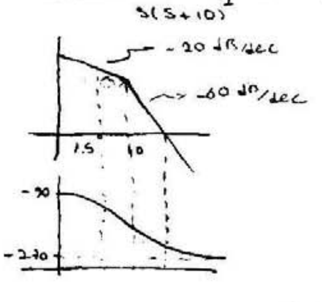
همین مثال را قبلاً با lead طراحی کرده بودیم. دقت کنید lead، پهنای باند را افزایش و lag کاهش میدهد.

lead : سرعت      lag : حذف نویز

* مثال:

$$GH(j\omega) = K \cdot \frac{1}{j\omega(j\omega+10)^2} \qquad \begin{cases} K_v = 20 \\ \Phi_{PM} = 65^\circ \end{cases}$$

$$GH(s) = \frac{K}{s(s+10)^2} \quad , \quad K_v = \lim_{s \to 0} s\,GH(s) = \frac{K}{100} = 20 \rightarrow K = 2000 \qquad (1)$$




به کمک lead حداکثر 60° میتوان به PM اضافه کرد.

← از lag پیش میریم

$$-180 + 65 + 5 = -110 \longrightarrow \text{table} \rightarrow \omega_1 = 1.5$$

$$\hookrightarrow \Phi(\omega_1) = -110 \rightarrow \omega_1 = 1.5$$

$$\rightarrow z = 0.15$$

$$20\log\alpha = -|KGH(j\omega_1)|_{dB} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{14.2} \quad \rightarrow p = 0.15 \times \frac{1}{14.2}$$

تذکر: اگر همین مثال را با lag نمی‌توانستیم حل کنیم باید فرکانس قطعی را پیدا کنیم که با حداکثر 60° اضافه شدن به PM به PMd برسیم.

← طراحی به کمک lag-lead.

که در صفحه بعد توضیح داده میشود.

* روال طراحی جبرانساز lag-lead :

$$G_c(s) = \underbrace{\alpha_1 \cdot \frac{s+z_1}{s+p_1}}_{lag} \times \underbrace{\alpha_2 \cdot \frac{s+z_2}{s+p_2}}_{lead}$$

(۱) $K$ را برای تأمین ملزومات خطا می‌یابیم.

(۲) فرکانسی را پیدا میکنیم که در آن فرکانس: اگر شد $50^\circ$ به فاز سیستم اضافه کنیم، حد خطات حد فاز تأمین میشود. آن فرکانس را $w_1$ می‌نامیم.

(۳) جبرانساز lead را یافته‌ایم:

(a) $\sin\phi_m = \frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2 + 1} \Rightarrow \alpha_2 : OK$

(b) $\left.\begin{array}{l} w_1 = \sqrt{p_2} \\ \alpha = \frac{p}{z} \end{array}\right\} \Rightarrow p_2, z_2 : OK$

(۴) به کمک جبرانساز lag ، $w_1$ را تبدیل به فرکانس قطع میکنیم یعنی:

(a) $z_1 = 0.1 w_1$ : OK

(b) محاسبه $\alpha$ (برای آنکه $w_1$ فرکانس قطع باشد):

$$|G_{lag} \cdot G_{lead}\, G_H(jw_1)| = |GH(jw_1)|_{dB} + \underbrace{20 \log \alpha_1}_{lag} + \underbrace{10 \log \alpha_2}_{lead}$$

$\Rightarrow \alpha_1 : OK$

$\Rightarrow p_1 = \alpha_1 z_1 \Rightarrow p_1 : OK$

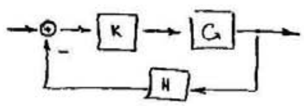
* اگر قرار باشد از دو جبرانساز lead استفاده شود، فاز باید خیلی زیاد میشود (مد است) و تعبیر جبران در عدد $10 \log \alpha$ اضافه میشود، ۵ دلیل بیشتر از (5~12) خواهد بود. ← جبرانساز lag-lead از آن بهتر میباشد.

* پایان مباحث کنترل خطی *

* خلاصه مطالب کنترل خطی: (مباحث پایان ترم)

* مکان هندسی ریشه‌ها:

مکان هندسی ریشه‌ها: بررسی تغییرات ریشه‌های معادله مشخصه نسبت به پارامتری خاص




$T(s) = \frac{KG(s)}{1+KGH(s)}$ ، $\Delta(s) = 1 + KGH(s)$

$$\Delta(s) = 0 \rightarrow \begin{cases} |KGH(s)| = 1 \\ \angle GH(s) = \pm 180 \times (2q+1) \end{cases}$$

$$GH(s) = \frac{(s+z_1)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)}$$

* مراحل یافتن مکان هندسی ریشه‌ها:

(۱) نوشتن تابع تبدیل حلقه باز بصورت فاکتورگیری آن

(۲) رسم دیاگرام صفر و قطب تابع تبدیل حلقه باز

(۳) تعداد شاخه‌های مکان = تعداد قطبهای سیستم حلقه باز $= n$

(۴) تقارن مکان نسبت به محور حقیقی

(۵) نقاط شروع و انتها:

$K = 0$ ← ریشه‌ها = قطبهای $GH$

$K \to \infty$ ← ریشه‌ها = صفرهای $GH$

← مکان از قطبها شروع شده و تا صفرها ادامه می‌یابد. (قطبها و صفرهای سیستم حلقه باز)

(۶) نقاط روی محور حقیقی عضو مکان:

← نقاط سمت چپ تعداد فرد صفر و قطب روی محور حقیقی جزء مکان هستند.

(۷) رفتار در بینهایت (مجانبها):

تعداد مجانبها: $n-m$

تعداد قطبهای سیستم حلقه باز: $n$

تعداد صفرهای سیستم حلقه باز: $m$

زاویه مجانب: $\phi_A = \frac{2q+1}{n-m} \cdot 180^\circ$

مرکز مجانب: $\sigma_A = \frac{\Sigma p - \Sigma z}{n-m}$

(۸) یافتن نقاط ترک و ورود به محور حقیقی:

$\frac{dK}{ds} = 0$ or $\frac{dGH(s)}{ds} = 0$

(۹) یافتن نقاط تقاطع محور $j\omega$ :

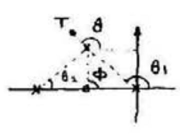
a - به کمک معیار راث، برای عبارت $\Delta(s)=1+KGH(s)$ سطرهایی که احتمال صفر بودن را دارند را با هم جدا نموده آن K را یافته و سپس به کمک معادله مشخصه و K یافته شده، و حل معادله مشخصه s مربوطه یافته می‌شود.

$$\left.\begin{array}{l}\Delta(s)=0\\ s=j\omega\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta(j\omega)=0$$ -b

c- ارزیابی K در نقاط مختلف.

$$\Delta(j\omega)=Re(\omega)+jIm(\omega)=0 \rightarrow \begin{cases} Im(\omega)=0 \rightarrow \omega \text{ بدست می‌آید} \\ Re(\omega)=0 \end{cases} \rightarrow K \text{ بدست می‌آید}$$

(۱۰) زاویه خروج از قطب مختلط - ورود به صفر مختلط:

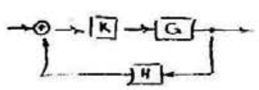



نقطه T را نسبتاً نزدیک به قطب (صفر) مختلط در نظر می‌گیریم.

با در نظر گرفتن تقریب در زاویه‌ها داریم:

$\Phi-\theta_1-\theta_2-\theta=180 \rightarrow \theta$ : بدست می‌آید.

* قوانین اصلاح شده مکان هندسی برای فیدبک مثبت:




فیدبک مثبت و گین مثبت = فیدبک منفی با گین منفی

$$KGH(s)=1 \rightarrow \begin{cases} |KGH(s)|=1 \\ \angle GH(s)=2q.\pi \quad q=0,\pm1,\pm2,\ldots \end{cases}$$

- تقارن نسبت به محور حقیقی برقرار است.

- نقاط روی محور حقیقی عضو مکان: سمت چپ تعداد زوج صفر و قطب

- نقطه ترک - ورود محور حقیقی: تفاوتی نمی‌کند.

- مجانبها: • تعداد و مرکز: تفاوتی نمی‌کند. • زاویه: $\Phi_A=\frac{2q.\pi}{n-m}$ ، $q=0,\pm1,\ldots$

- زاویه ورود، خروج: رابطه همان است ولی برای مضارب زوج $180°$ نوشته می‌شود.

- نقاط قطع محور $j\omega$: تفاوتی نمی‌کند (معیار راث - یا اندیس $\Delta(s)=0$ به ازای $s=j\omega$)

* اضافه کردن قطب ⇐ خم شدن مکان به سمت راست (ناپایداری بیشتر)

* اضافه کردن صفر سبب خم شدن مکان به سمت چپ ( پایداری بیشتر )

* تعمیم مکان هندسی ریشه‌ها :

بررسی تاثیر سایر پارامترها : فرض می‌کنیم اثر پارامتر $a_1$ را بررسی کنیم در رابطه $\Delta(s)=0$ ، کل رابطه را بر جملات فاقد $a_1$ تقسیم می‌کنیم : در نتیجه به صورت $1 + a_1 G_1H_1(s)$ در می‌آید و مکان را به روش گذشته رسم می‌کنیم.

* سطوح ریشه‌ها : —

* حساسیت ریشه‌ها :

$$S^{s}_{k} = \frac{\partial s}{\partial k} \cdot \frac{k}{s}$$

$$\Delta(s)=0 \rightarrow \frac{\partial(\Delta(s))}{\partial k} = 0 \rightarrow \frac{\partial s}{\partial k} : OK$$

$$\Delta(s)=0 \rightarrow K = f(s) : OK \rightarrow \frac{k}{s} : OK$$

* یافتن نقطه تقاطع خط etc. = $\xi$ با مکان هندسی :

$$\theta = \cos^{-1}\xi$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\beta \qquad S = \omega\left(\frac{-1}{tg\theta} + j1\right)$$

با جایگذاری $s$ در رابطه $\Delta(s)=0$ ← $\left\{\begin{array}{l} Re=0 \\ Im=0 \rightarrow \omega \text{ بدست می‌آید} \end{array}\right\}$ → $K$ بدست می‌آید

– یادآوری :

$$\beta = \sqrt{1-\xi^2} \qquad PO = 100e^{-\xi\pi/\beta} \qquad T_s = \frac{4}{\xi\omega_n}$$

* پاسخ فرکانسی :

پاسخ فرکانسی را برای سیستمهایی می‌توان نوشت که محور $j\omega$ جزو ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس آنها باشد. یعنی سیستم پایدار باشد به عبارت دیگر اخرین قطب آنها سمت چپ محور $j\omega$ باشد یعنی قطبی سمت راست محور $j\omega$ نداشته باشند

$$G(s)\big|_{s=j\omega} = G(j\omega)$$

* نمایش $G(j\omega)$ :

$$G(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) = M(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)}$$

$$R(\omega) = Re\{G(j\omega)\} \,،\, X(\omega) = Im\{G(j\omega)\} \,،\, M(\omega) = (R^2(\omega) + X^2(\omega))^{1/2} \,،\, \phi(\omega) = tg^{-1}\left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right)$$

* منحنی‌های پاسخ فرکانسی :

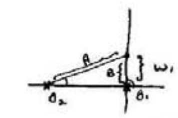
(۱) منحنی قطبی یا نایکوئیست ( $jX(\omega)$ – $R(\omega)$ ) (۲) منحنی بود ( $|G|_{dB}$ ، $\phi(\omega)$ – $\omega$ ) (۳) منحنی لگاریتم اندازه – فاز

+ روشهای یافتن در رسم $G(j\omega)$ :

(۱) استفاده از Image، Real

(۲) استفاده از فاز و اندازه

(۳) استفاده از دیاگرام قطب و صفر :




$$M(\omega_1) = \frac{1}{|A|\cdot|B|} \qquad \Phi(\omega_1) = 0 - \theta_1 - \theta_2$$

+ منحنی بودی :

$$|G|_{dB} = 20\log|G(j\omega)|$$

- بازهٔ $[\omega_1, \omega_2]$ یک decade است $\Leftarrow \frac{\omega_2}{\omega_1} = 10$

- بازه $[\omega_1, \omega_2]$ یک octave است $\Leftarrow \frac{\omega_2}{\omega_1} = 2$

- هر فاکتور درجه (۱) معادل 20dB/decade است و معادل 6 dB/octave می باشد.

- صفر شیب مثبت و قطب شیب منفی اعمال می‌کند.

- برای سیستم های درجه ۲ :

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \longrightarrow \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

فرکانس طبیعی ، فرکانس تشدید

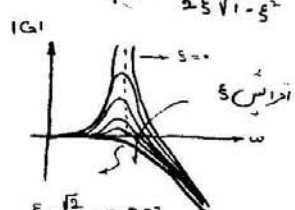
0 dB ، مجانب فرکانس پایین $\omega \ll \omega_n$

$-40\log\frac{\omega}{\omega_n}$ ، مجانب فرکانس بالا $\omega \gg \omega_n$

پیک این سیستمها به $\zeta$ (میرایی) وابسته است:

مقدار پیک :

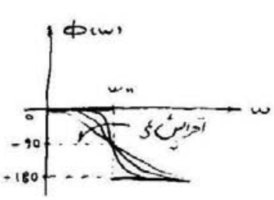
$$M_{p\omega} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$




$\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$

رسم پاسخ فرکانسی سیستم درجه ۲ به ازای مقادیر ζ مختلف :

با $\zeta > 0.707$ دامنه تشدید نداریم.



• سیستمهای نینیمم فاز:

برای منحنی دامنه داده شده فقط یک تابع تبدیل وجود دارد که منحنی فاز آن در تعادل سایر توابع تبدیلی که منحنی دامنه مشابه ولی فاز متفاوت دارند، می‌نیمم است. به آن سیستم مینیمم فاز گویند.

- فیلتر تمام گذر: $\forall \omega \rightarrow |A(\omega)| = 1 \Rightarrow A(\omega)$: All Pass Filter

فیلترهای تمام گذر که به سیستم اضافه میشوند، باعث میشوند از یک فرکانس به بعد، $|G| = 1$ شود. این فیلترها روی منحنی اندازه بی‌تاثیرند و تنها روی منحنی فاز عمل می‌کنند.

• قضیه بد: برای توابع تبدیل مینیمم فاز، فاز تابع تبدیل به صورت تنها توسط منحنی اندازه میتواند بدست آید: توسط جفت تبدیل هیلبرت:

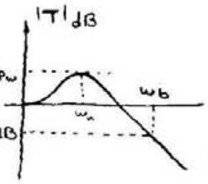
$$G(j\omega_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\ln|G|}{dv} \ln \coth|v/2|\, dv + \measuredangle \prod_{i=1}^{K} \left(\frac{j\omega_0 + z_i}{j\omega_0 - z_i}\right)$$

$$v = \ln\frac{\omega}{\omega_0}$$

• تشخیص سیستم مینیمم فاز: اگر سیستم مینیمم فاز باشد در بینهایت: $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \Phi(\omega) = -90^\circ(n-m)$

- تذکر: برای همه سیستمها، در فرکانسهای بالا منحنی اندازه با شیب $-20(n-m)\ \mathrm{dB}/\mathrm{decade}$ افت میکند.

• اندازه های عملکرد برحسب پاسخ فرکانسی:




(1) $M_{p\omega}$: پیک پاسخ فرکانسی

(2) $\omega_b$: پهنای باند (فرکانسی که در آن، دامنه به $-3\mathrm{dB}$ میرسد)

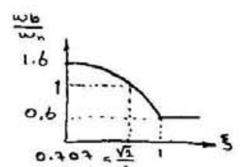
(3) cut-off rate: شیب افت پاسخ فرکانسی در فرکانسهای بالا.

• $M_{p\omega}$ معیاری است از پایداری: $M_{p\omega}$ بالاتر یعنی پایداری نسبی کمتر؛ زیرا $\xi$ کوچکتر است:

$$M_{p\omega} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

• $\omega_b$ در پهنای باند معیاری است از سرعت: پهنای باند بیشتر = سرعت بیشتر

• رسم نمودار $\frac{\omega_b}{\omega_n}$ برحسب میرایی ($\xi$):




$\xi$ ثابت $\leftarrow \uparrow\omega_b \Leftarrow \uparrow\omega_n$

$\omega_n$ ثابت $\leftarrow \downarrow\xi \leftarrow \uparrow\omega_b$

* یافتن نوع سیستم از روی پاسخ فرکانسی :

در فرکانسهای پایین، با شیب منحنی در حوالی فرکانس صفر، می‌توان $N$ را از روی مشخصه فرکانسی یافت

$N$ : تعداد انتگرال گیرهای حلقه

* یافتن ثوابت خطا از روی پاسخ فرکانسی :

. ثابت خطای موقعیت : به کمک اندازه منحنی در حوالی فرکانس صفر بدست می‌آید : $N=0 \rightarrow \lim\limits_{s \to 0} GH(s) = K$

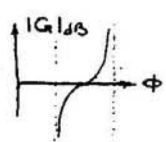
. ثابت خطای سرعت : $K_v = \lim\limits_{s \to 0} s\,GH(s)$

منحنی اندازه، در فرکانسهای پایین را امتداد میدهیم تا خط $0\,dB$ (محور افقی) را در $\omega = \omega_1$ قطع کند

$\leftarrow \quad K_v = \omega_1$

تذکر : برای هر سیستمی تنها یک ثابت خطای غیر صفر و غیر بینهایت وجود دارد که از روی مشخصه اندازه در پاسخ فرکانسی میتوان یافت

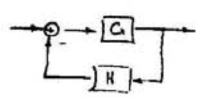
* دیاگرام لگاریتم اندازه - فاز :




به کمک حدف پارامتر $\omega$ بدست می‌آید .

* پایداری در حوزه فرکانس :

- هدف : تشخیص پایداری سیستم حلقه بسته از روی پاسخ فرکانسی سیستم حلقه باز .




$T(s) = \dfrac{G(s)}{1 + GH(s)} \qquad F(s) \triangleq 1 + GH(s) = \Delta(s)$

(۱) قطبهای $F(s)$ = قطبهای $GH(s)$

(۲) قطبهای $T(s)$ = صفرهای $F(s)$

* قضیه آرگومانها : اگر تابع $F(s)$ دارای $Z$ صفر و $P$ قطب درون کانتور بسته $A$ باشد، و کانتور $A$ از هیچ صفر یا قطب $F(s)$ عبور نکند، آنگاه به ازای تغییرات $s$ در طول کانتور $A$، منحنی $F(s)$ مبداء مختصات را به تعداد $N = Z - P$ بار دور خواهد زد .

• $N$ میتواند مثبت یا منفی باشد : $N > 0 \rightarrow$ $F(s)$ در جهت کانتور دور میزند
$N < 0 \rightarrow$ $F(s)$ در خلاف جهت کانتور دور میزند

• بررسی پایداری:

برای پایداری سیستم حلقه‌بسته ($T=\frac{G}{F}$)، باید T قطبی در RHP نداشته باشد ← F(s) نباید صفری در RHP داشته باشد. از طرفی کانتور A را نیم‌دایره‌ای شامل محور jω و نیز RHP و به شعاع ∞ می‌باشد و جهت این کانتور، در جهت عقربه‌های ساعت است.

← برای پایداری سیستم حلقه‌بسته، F(s) نباید صفری درون کانتور A داشته باشد.

نگاشت کانتور A را تحت F(s) در صفحه F(s) رسم می‌کنیم و ملاحظه می‌کنیم که مبداء مختصات چند بار دور می‌خورد (N)

از طرفی: P = تعداد قطبهای F(s) درون کانتور A = تعداد قطبهای سمت راست GH(s)

بنابراین P را نیز داریم ← به کمک اصل آرگومانها $N = Z - P$ ← $Z = N + P$

← برای پایداری اگر $N = -P$ باشد ← $Z = 0$ ← F(s) صفری درون کانتور A ندارد ← T(s) قطبی درون کانتور A ندارد ← T(s) پایدار است.

* تذکر (۱): $N = -P$: یعنی مبداء مختصات (در صفحه F(s)) به اندازه P بار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت دور بخورد.

* تذکر (۲): (0,0) @ F(s)-Plan ≈ (−1,0) @ GH(s)-Plan

* شرط پایداری نایکوئیست:

سیستم فیدبک پایدار است اگر و فقط اگر تعداد چرخشهای دیاگرام (منحنی) نایکوئیست در خلاف عقربه‌های ساعت حول نقطه (−1,0) در صفحه GH(s)، مساوی باشد با تعداد قطبهای GH(s) در RHP.

* کانتور A (کانتور نایکوئیست) سه بخش دارد:

(a) $w>0$ : دیاگرام قطبی (پاسخ فرکانسی) : قسمت اصلی

(b) $w<0$ : قرینه دیاگرام قطبی نسبت به محور حقیقی

(c) $w \to \infty$ : در طول نیم‌دایره بزرگ

* مراحل حل مسائل به کمک معیار پایداری نایکوئیست:

(۱) ترسیم منحنی نایکوئیست در صفحه s (همان کانتور A) ـ جهت کانتور هم باید مشخص شود.

(۲) تقسیم بندی منحنی نایکوئیست به قطعات خود.

(۳) رسم کامل کانتور در صفحه $GH(s)$ برای تک تک بخشهای کانتور.

(۴) یافتن نقطه تقاطع پاسخ فرکانسی با محور حقیقی: $\left.\begin{array}{l} G(j\omega)=R(\omega)+jX(\omega) \\ X(\omega)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \omega=\omega_1 \text{ , OK}$

طول نقطه تقاطع: $\Rightarrow a=R(\omega_1)$

(۵) بررسی تعداد دور خوردن نقطه $(-1,0)$ (در صفحه $GH(s)$)

(۶) توجه به $P$ و تعیین $Z=N+P$ و یافتن محدوده $K$ برای پایداری

تذکر: افزایش مقدار $K$ یعنی منبسط شدن منحنی در صفحه $GH(s)$ و کاهش $K$ یعنی منقبض شدن آن.

* اگر دیاگرام نایکوئیست از نقطه $-1$ عبور کرد ← معیار نایکوئیست ساکت است. در این حالت معادله مشخصه روی محور موهومی ریشه دارد. ولی از تعداد و چگونگی آن خبر نداریم.

* تذکر: در مکان هندسی: به کمک معیار راث نقطه قطع محور موهومی یافته میشود در نتیجه ← $K$ و $\omega$ بدست می‌آید. آن $\omega$ و $K$ همان $\omega_\pi$ و $a=\frac{1}{K}$ در دیاگرام نایکوئیست (برای نقطه قطع منحنی با محور حقیقی) می‌باشد.

* بررسی پایداری به کمک نایکوئیست - برای $K$های منفی:

برای تحلیل حالت $K<0$، نقطه بحرانی را $(+1,0)$ در نظر میگیریم. و تعداد دور خوردن آنرا در نظر میگیریم.

- معیار سریع نایکوئیست:

* اگر $GH(s)$ دارای قطبی در RHP نباشد (یعنی $P=0$ باشد) آنگاه سیستم فیدبک پایدار است اگر در طول دیاگرام قطبی با افزایش فرکانس حرکت میکنیم، نقطه $(-1)$ همواره سمت چپ این منحنی قرار گرفته باشد.

تذکر: برای $K<0$ از همین معیار برای نقطه $+1$ استفاده می‌کنیم.

* حد بهره: $(GM)$:

$$GM=\frac{1}{a}=\frac{1}{|GH(j\omega_\pi)|}$$

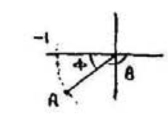
$\omega_\pi$: فرکانسی که در آن فرکانس زاویه $180^\circ$ میشود: فرکانس گذر فاز

$$GM_{dB}=-20\log|GH(j\omega_\pi)|=-|GH(j\omega_\pi)|_{dB}$$

برای پایداری سیستم $GM_{dB}$ باید مثبت باشد در عبارتی $GM>1$ باشد.

* حدفاز (PM):

$PM = \phi = 180^\circ - \theta \qquad \theta = -\measuredangle GH(j\omega_c)$




$\omega_c$: فرکانس گذر بهره $\longrightarrow |GH(j\omega_c)| = 1$

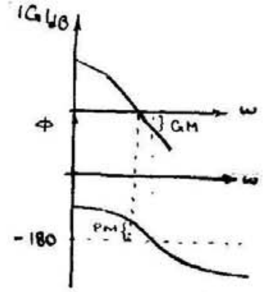
$\Rightarrow PM = 180 + \measuredangle GH(j\omega_c)$

. برای پایداری سیستم، PM باید از $180^\circ-$ ، مثبت تر باشد.

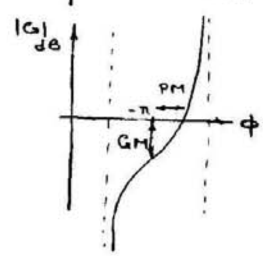
* تذکر: برای حالت P=0 ، با افزایش گین، سیستم ناپایدار میشود و برای پایداری باید گین را کم کنیم. به این GM ، GM از بالا گوییم.

- برای سیستمهای با $P \neq 0$ حدود برای GM باید تعیین کنیم

* یافتن PM و GM از روی دیاگرام بدی:




* یافتن PM و GM از روی دیاگرام لگاریتم اندازه - فاز:




* رابطه حدفاز با میرایی نسبی:

$$PM = tg^{-1}\left(\frac{2\xi}{\sqrt{-2\xi^2+\sqrt{1+4\xi^2}}}\right)$$

$\xi \leq 0.707 \Rightarrow \xi \simeq 0.01\,PM$

* پایداری سیستمهای با تأخیر زمانی:

$$GH(s) = \underbrace{GH_1(s)}_{\text{تابع تبدیل حقیقی - گویا}} \cdot e^{-\tau_d \cdot s}$$

* ماکسیمم تأخیری که یک سیستم میتواند داشته باشد، به اندازه PM است.

$\omega_c \Rightarrow PM \rightarrow \qquad \omega_c \cdot \tau_d = P.M \times \frac{\pi}{180^\circ} \rightarrow \tau_{d\,(s)} : OK$

$\hookleftarrow |GH(j\omega_c)| = 1$

• جبران سازی سیستم فیدبک:

هنگامیکه قادر نباشیم با تغییر K مشخصات سیستم را بهبود بخشیم، باید دینامیکی، به سیستم اضافه کنیم.

• انواع جبرانسازها:

I) جبرانساز تناسبی: تنظیم پاسخ حالت گذرا $u = Ke$

- مقابله با اغتشاشات — افزایش K ممکن است موجب ناپایداری شود.
- کاهش حساسیت

II) جبرانساز مشتق‌گیر:

- اضافه کردن صفر — تشدید نویز
- فیدبک سرعت — عدم امکان تحقق
- پیشگویی

• جبران ساز PD: $u = (K_p + K_d s)e$

- جبران ساز Lead: $G_c(s) = K \cdot \frac{s+z}{s+p}, \quad |p| \gg |z|$

• اثرات:
- چرخش به سمت چپ مکان
- چرخش منحنی نایکوییست در خلاف جهت عقربه‌های ساعت
- فاز مثبت

III) جبرانساز انتگرالی: - کاهش خطای حالت دائم - ایجاد تاخیر

• اثرات:
- مکان را به شدت به سمت راست خم می‌کند.
- کاهش فاز
- چرخش منحنی نایکوییست در جهت عقربه‌های ساعت.

• جبران ساز PI: $u = (K_p + \frac{K_I}{s})e$

- جبران ساز Lag: $G_c(s) = K \cdot \frac{s+z}{s+p}, \quad |z| \gg |p|$

IV) جبرانساز تناسبی مشتق انتگرالی:

PID: $G_c(s) = K_p + K_d s + \frac{K_I}{s}$

• روش طراحی جبرانساز PD: $P_D : G_c(s) = K(s+z)$

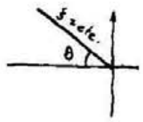
1) مکان هندسی سیستم جبران نشده را رسم می‌کنیم.

2) به کمک پارامترهای داده شده، نقاط مطلوب را میابیم:

روش:

با در اختیار داشتن P.O، مقدار ξ بدست می‌آید $\Rightarrow$ $PO_{(\%)} = 100 \cdot e^{-\pi\xi/\beta}$ ، $\beta = \sqrt{1-\xi^2}$

سپس خط $\xi = cte.$ را رسم می‌کنیم؛ $\theta = \cos^{-1}\xi$



$$S_d = -\xi\omega_n + j(\omega_n\beta) = -\xi\omega_n + j(\xi\omega_n \cdot tg\theta) = \omega\left(\frac{-1}{tg\theta} + j1\right)$$

$$\Delta(s) = 0 \Big|_{s=s_d} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Im = 0 \rightarrow \omega : OK \\ Re = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow K : OK$$

زمان نشست: $T_s = \frac{4}{\xi\omega_n}$

(۳) اعتبار قطب مسلط را بررسی می‌کنیم:

به ازای K بدست آمده، ریشه‌های $\Delta(s) = 0$ را می‌یابیم.

(۴) اکنون به سراغ طراحی می‌رویم،

$T_s$ جدید و نقطه مطلوب جدید را می‌یابیم: $s_d = -\xi\omega_n + j\xi\omega_n tg\theta$.

پس مکان جدید را پیدا می‌کنیم:

به کمک شرط زاویه، محل دو زاویه $z$ و $\theta_z$ را می‌یابیم. $K = \frac{1}{|GH(s_d)|}$

* طراحی جبران‌ساز Lead: $G_c(s) = K \cdot \frac{s+z}{s+p}$ : $|z| < |p|$

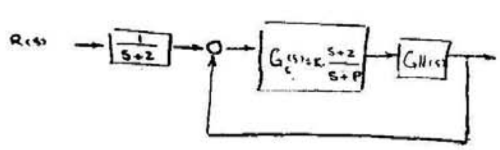
نقطه مطلوب جدید

(۱) صفر جبرانساز دقیقاً زیر نقطه مطلوب قرار می‌گیرد.

(۲) به کمک شرط زاویه مکان قطب جبرانساز یافته می‌شود.

تذکر: تمامی (۴) مرحله بیان شده در طراحی جبرانساز PD را باید اینجا هم در نظر گرفت.

* طراحی Prefilter:




حذف صفر جبرانساز پیش از فیدبک.

* طراحی جبرانساز PI: $G_c(s) = K \cdot \frac{s+z}{s}$

در این جبرانسازی اساس طراحی بدین صورت است که قطب جبرانساز و برای بهبود خطای حالت دائم) در مبداء است

. صفر را نیز در همان نزدیکی انتخاب می‌کنیم تا مکان کمتر تغییر قرار بگیرد.

• طراحی جبرانساز Lag :

$G_c(s) = K \cdot \frac{s+z_c}{s+p_c}$ $\quad |z|>|p|$

$K_v = \lim_{s \to 0} s\,G(s)$

نسبت بهبود خطا

$K_{vc} = K_{vu} \cdot \frac{z}{p}$

خطای حالت دائم بهبود می‌یابد ← ثابت خطا افزایش یابد ← $|z|>|p| \to \frac{z}{p}>1$

(۱) یکی از دو پارامتر جبرانساز خیلی نزدیک مبداء انتخاب می‌شود.

(۲) ثابت خطای پیش از جبرانسازی را بدست می‌آوریم. $(K_u)$

(۳) به کمک ثابت خطا، خطای حالت دائم را می‌یابیم. $(e_{ss.u})$ $\quad e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K_a}$

(۴) به میزان بهبود خواسته شده، خطای حالت دائم پس از جبرانسازی را می‌یابیم. $(e_{ss.c})$

(۵) از روی $e_{ss.c}$، مقدار ثابت خطای جدید را می‌یابیم: $(K_c)$

(۶) $\frac{z_c}{p_c} = \frac{K_c}{K_u}$ ← پارامتر دیگر یافته می‌شود.

(۷) برای K داده شده قطب مسلط را تست می‌کنیم.

• جبرانساز PID :

هر مشخصه‌ای که می‌خواهیم 100% بهبود یابد ابتدا انجام می‌دهیم:

اگر بهبود خطا مهم باشد ← lead-lag

اگر تنظیم پاسخ حالت گذرا مطرح باشد ← lag-lead

* طراحی جبرانساز در حوزهٔ فرکانس :

- در حوزهٔ فرکانس ابزاری که در اختیار داریم پاسخ فرکانسی.

- ارتباط پارامترهای حوزهٔ زمان و فرکانس:

(۱) $\forall \xi > 0.3 \Rightarrow \omega_c \simeq 0.63\,\omega_b$

پهنای باند $\quad$ کسر فرکانس گذر

(۲) برای سیستم درجه ۱ : $T_r \cdot \omega_b = 2.2$      برای سیستم درجه ۲ : $\forall \zeta > 0.4 \Rightarrow \omega_b \cdot T_r = \begin{cases} 2 \\ 2.2 \end{cases}$

(۳) $\zeta = 0.01\, \Phi_M$      $\Phi_M = 100\zeta$

(۴) $$\omega_c = \frac{8}{(tg\, PM) \cdot T_s}$$

• طراحی جبرانساز Lead :

$$G_c(s) = \alpha \cdot \frac{s+z}{s+p} \quad , \quad \alpha = \frac{p}{z} > 1$$

(الف) هنگامیکه ثابت خطا و حدفاز مشخص باشد:

(۱) به کمک ثابت خطا، مقدار گین سیستم را تنظیم می کنیم ( K )

(۲) برای K بدست آمده پاسخ فرکانسی را رسم می کنیم

(۳) به کمک دیاگرام بودی مقدار فاز مورد نیاز را محاسبه می کنیم :

حدفاز مورد نیاز

$$\Phi_m = \underbrace{\Phi_d}_{\text{حدفاز مطلوب}} - \underbrace{\Phi_{PM}}_{\text{حدفاز فعلی}} + \Delta$$

$$\frac{\Phi_d - \Phi_{PM}}{10} \quad \text{یا} \quad 5\text{-}10^\circ : \Delta$$

(۴) به کمک روابط زیر، $\alpha$ یافته میشود :

$$\sin \Phi_m = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{z} = \alpha : OK \qquad (I)$$

$$tg\, \Phi_m = \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}}$$

(۵) فرکانسی که در آن فرکانس، $|G|$ برابر $-10\log\alpha$ است را بیابید ( $\omega_1$ ) (از روی جدول)

این فرکانس، فرکانس قطع جدید است:      $\omega_1 = \omega_m$

$$\omega_m = \sqrt{pz} \qquad (II)$$

(۶) با توجه به روابط (I) و (II) $\Rightarrow$ p و z و در نتیجه $G_c(s)$ یافته می شود.

(ب) هنگامیکه پهنای باند و میرایی در اختیار باشد:

(۱) از رابط $\omega_c = 0.63\, \omega_b$ فرکانس گذر را می یابیم.

(۲) از رابط $PM_d = 100\zeta$ مقدار حدفاز مطلوب را می یابیم.

(۳) در فرکانس گذر، $\Phi_m$ ( حدفاز مورد نیاز ) را می یابیم.

$$\sin\Phi_m = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \Rightarrow \alpha = \frac{p}{z} : OK \qquad (۴)$$

$$\left.\omega_m = \sqrt{pz}\right\} \Rightarrow p \,\&\, z : OK$$

(۵) حالا K جدید را بیابیم :

K را به گونه‌ای می‌یابیم که فرکانس $\omega_m$، به فرکانس گذر تبدیل شود:

$$|KG(j\omega_m)| = -10\log\alpha_{dB} \quad \text{or} \quad \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

• طراحی جبران‌ساز Lag :

$$G_c(s) = \alpha\cdot\frac{s+z}{s+p} \quad ; \quad \alpha = \frac{p}{z} < 1$$

(۱) K را برای ملزومات خطای حالت دائم می‌یابیم.

(۲) پاسخ فرکانسی رسم می‌شود.

(۳) فرکانسی که در آن فرکانس، فاز مطلوب بدست می‌آید ($\omega_1$) : $\Phi(\omega_1) = -180 + PM_d + \Delta$

(۴) صفر جبران‌ساز را برابر $z = 0.1\,\omega_1$ ($rad.s^{-1}$) قرار دهید.

(۵) $\alpha$ را طوری بیابید که $\omega_1$ فرکانس قطع باشد:

$$20\log\alpha = -|KG(j\omega_1)|_{dB} \Rightarrow \alpha = \frac{p}{z} : OK$$

(۶) قطب جبران‌ساز را از رابطه $p = \alpha z$ می‌یابیم.

• طراحی جبران‌ساز lag-lead :

$$G_c(s) = \underbrace{\alpha_1\cdot\frac{s+z_1}{s+p_1}}_{lag} \times \underbrace{\alpha_2\cdot\frac{s+z_2}{s+p_2}}_{lead}$$

(۱) K را برای ملزومات خطا می‌یابیم.

(۲) فرکانسی را می‌یابیم که در آن فرکانس اگر $50^\circ$ به فاز سیستم اضافه شود، حد فاز مطلوب بدست می‌آید. ($\omega_1$)

(۳) جبران‌ساز lead را فراهم می‌کنیم: ($50^\circ$)

$$\sin\Phi_m = \frac{\alpha_2-1}{\alpha_2+1} \Rightarrow \alpha_2 : OK$$

$$\omega_1 = \sqrt{p_2 z_2} \qquad \alpha_2 = \frac{p_2}{z_2} \Rightarrow p_2 , z_2 : OK$$

(۴) در کنار lag، $\omega_1$ را فرکانس قطع تبدیل می‌کنیم:

$$z_1 = 0.1\,\omega_1 : OK$$

$$0 = |G_{lag}\cdot G_{lead}\cdot G_H(j\omega_1)| = |KGH(j\omega_1)| + \underbrace{20\log\alpha_1}_{lag} + \underbrace{10\log\alpha_2}_{lead}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 : OK \Rightarrow p_1 = \alpha_1 z_1 : OK$$

- پایان -