اسلایدهای آموزشی درس:

بررسی سیستم‌های قدرت یک

(3 واحد- دوره کارشناسی برق- توزیع انتقال)

:

احمد رشتچی‌زاده

عضو هیئت علمی

وزارت نیرو

مجتمع عالی آموزشی و پژوهشی آذربایجان

آذرماه 87

فصل اوّل

بررسی اندوکتانس و مقاومت خطوط انتقال انرژی

تعاریف اولیه

طبق تعریف ولتاژ القاء شده در یک مدار از رابطه‌ی $e = \frac{d\varphi}{dt}\ [v]$ حساب می‌شود .که مبیّن شار در برگیرنده‌ی (شار دورزننده) مدار بوده و بر حسب و بر – دور(*Wb-T*) بیان می‌شود.

همچنین داریم:

$$e = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{di}.\frac{di}{dt} = L\frac{di}{dt} \quad \rightarrow \mathrm{e} = L\frac{di}{dt}$$

$L\frac{di}{dt}$ را به عنوان اندوکتانس مدار تعریف می‌کنیم و واحد آن هانری می‌باشد .

به طور کلی اندوکتانس تابعی از جریان *(i)* است در مدارهای مغناطیسی خطی و یا به عبارت ساده‌تر در مدارهای مغناطیسی با نفوذپذیری مغناطیسی ثابت تغییرات شار در برگیرنده نسبت به جریان خطی خواهد بود و در نتیجه اندوکتانس ثابت می‌باشد:

$$L = \frac{\varphi}{i}\ [H] \qquad \text{یا} \qquad \varphi = Li \quad [Wb - Turn]$$

اگر در رابطه‌ی فوق جریان را متناوب در نظر بگیریم خواهیم داشت:

λ و I مقادیر مؤثر شار در برگیرنده و $\lambda = LI$ یا $L = \frac{\lambda}{I}[H]$ جریان بوده و البته دو کمیت هم‌فاز نیز هستند.

خطوط انتقال انرژی از هادی‌های موازی تشکیل شده‌اند و فرض می‌کنیم که طول آن‌ها زیاد است . ابتدا یک هادی حامل جریان با طول بلند را در نظر می‌گیریم و شار در برگیرنده آن را بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم هادی استوانه‌ای شکل و مسیر برگشتی آن در فاصله بسیار دور (بی‌نهایت) از این هادی قرار داشته باشد. شار در برگیرنده هادی را می‌توان به دو قسمت تقسیم کرد:

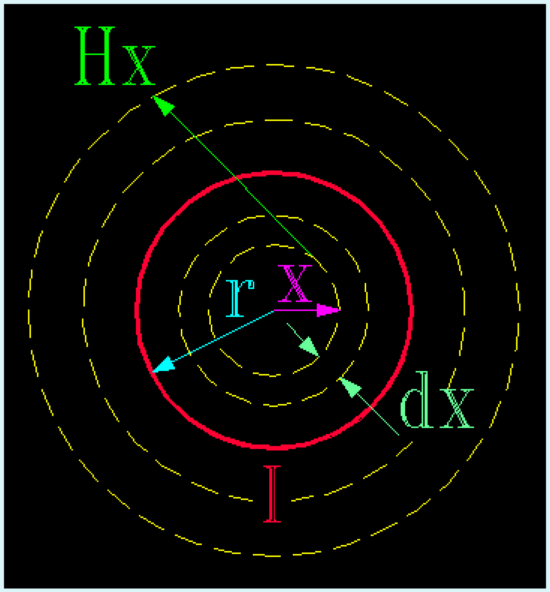
الف) شار داخلی Internal flux

ب) شار خارجی External flux

لازم به توضیح است که با عبور جریان از هادی موجب تولید میدان مغناطیسی در اطراف آن می گردد . خطوط شار مغناطیسی به صورت دایره‌های بسته و هم‌مرکزی هستند که جهت آن‌ها توسط قانون دست راست تعیین می‌شود . هنگامی که جریان تغییر می کند شار تغییر نموده و ولتاژی در مدار القاء می‌شود طبق تعریف اندوکتانس (L) مواد غیر مغناطیسی نسبت کل شار پیوندی به جریان I می‌باشد . برابر است با : $L = \frac{\lambda}{I}$

البته یک هادی به طول بی‌نهایت دارای میدان شعاعی E نیز علاوه بر میدان مغناطیسی H هست. در شروع محاسبه از اثر مغناطیسی استفاده می کنیم.

یک هادی بلند با شعاع r و جریان I را مطابق شکل داریم:



$$\oint_0^{2\pi x} H_m ds = I_x \Rightarrow H_x\ 2\pi x = I_x\ , H_m = \frac{I_x}{2\pi x}$$

$$[\frac{A.\ Turn}{m}]$$

در این جا فرض بر آن است که چگالی جریان یکنواخت می‌باشد . زیرا در فرکانس 50^{cps} این

فرضیه کاملا منطقی است . شدت میدان مغناطیسی (H_m) در اطراف دایره‌ای به شعاع X ثابت بوده

و مماس بر آن دایره است.

الف) محاسبه اندوکتانس ناشی از شار پیوند داخلی: [L_{int}]

$$\frac{\mathrm{I}}{\pi \mathrm{r}^2} = \frac{I_m}{\pi \mathrm{x}^2} \Longrightarrow I_m = \frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{r}^2} I$$

$$H_x = \frac{I_x}{2\pi \mathrm{x}} = \frac{\frac{I^2{}_x}{r^2}}{2\pi \mathrm{x}} = \frac{I_x^2}{2\pi \mathrm{x} r^2} = \frac{x}{2\pi r^2} I \qquad [\frac{A.T}{m}]$$

$$B_{\mathrm{x}} = \mu_{\circ} \mathrm{H}_{\mathrm{m}} = \frac{\mu_{\circ}\mathrm{I}}{2\pi r^2} \mathrm{X} [\frac{\mathrm{wb}}{\mathrm{m}^2}] \quad , \quad B_x = \frac{d\varphi_x}{dA}, \qquad dA = 1 * d_x$$

$d\varphi_x = B_x\, d_x * 1$ (شار کلی،ولی $d\lambda$ قسمتی از $d\varphi$ و شار در برگیرنده‌ی داخلی است.) $d\varphi$

$$\frac{I_x}{I} = (\frac{x}{r})^2 \Longrightarrow d\lambda_x = (\frac{x}{r})^2\, d\varphi_x = \frac{\mu_{\circ} I}{2\pi r^4} x^3\, dx$$

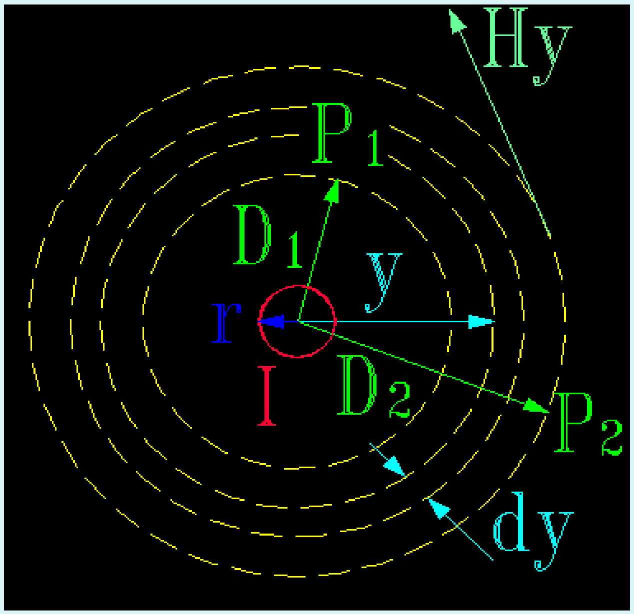
$$\lambda_{int} = \frac{\mu_\circ I}{2\pi r^4}\int_0^r x^3 dx = \frac{\mu_\circ I}{8\pi} = \frac{4\pi * 10^{-7}\,\mathrm{I}}{8\,\pi} = \frac{1}{2}\,\mathrm{I} * 10^{-7}$$

$$\Rightarrow L_{int} = \frac{\lambda_{int}}{I} = \frac{\frac{1}{2}\,I * 10^{-7}}{I} = 0.5 * 10^{-7} \quad [\mathrm{H/m}]$$

$$L_{int=0.5*10^{-7}} \quad [\mathrm{H/m}]$$

اندوکتانس ناشی از شار مغناطیس داخلی عددی ثابت است (در واحد متر) که اندوکتانس داخلی هادی برابر $0.5 * 10^{-7}$ هانری بر متر است .

ب) محاسبه‌ی اندوکتانس ناشی از پیوند خارجی: [L_{ext}]



شکل روبرو را در نظر بگیرید که در آن هادی به شعاع r نشان داده شده و دو نقطه‌ی p_1 و p_2 به فواصل D_1 و D_2 از آن هادی به نمایش گذاشته شده‌اند.فرض می کنیم جریان I از هادی عبور می کند. در این صورت میدان مغناطیسی در خارج هادی دوایر متحدالمرکزی هستند که هادی را دور می‌زنند. در نتیجه کل شار محصور شده مابین نقاط p_1 و p_2و استوانه مابین این‌ها است .

$$I_y = \mathrm{I} = \oint H_y.dy = H_y\, y2\pi \Rightarrow H_y = \frac{I}{2\pi y} \quad [\frac{A.Turn}{m}]$$

نسبت بین شار کلی و شار پیوندی یک شده یعنی این دو باهم برابرند.

$$By = \mu_0 \ H_y , \qquad d\lambda = 1 * d\varphi$$

$$By = \frac{d\varphi_y}{dA_{=dy*1}} \qquad \Longrightarrow d\lambda = d\varphi = \ Bydy$$

$$\Rightarrow d\lambda = \frac{\mu_\circ I}{2\pi y} dy \Rightarrow \lambda_{ext} = \frac{\mu_\circ I}{2\pi} \int_{D_1}^{D_2} \frac{dy}{y} = \frac{\mu_\circ I}{2\pi} Lny|_{D_1}^{D_2}$$

$$= \frac{4\pi * 10^{-7} \ I}{2 \ \pi} \ Ln \ \frac{D_2}{D_1} \Rightarrow L_{ext} = 2 * 10^{-7} \ Ln \ \frac{D_2}{D_1} \ [H/m]$$

اندوکتانس ناشی از شار پیوندی خارجی بیرون از هادی بین نقاط D_1 و D_2 .

اگر $r = D_1$ نقطه‌ی روی هادی و $D = D_2$ نقطه‌ای در بیرون هادی باشد داریم:

$$L_{ext} = 2 * 10^{-7} Ln \frac{D}{r} \ [H/m]$$

L_{ext}، اندوکتانس ناشی از شار پیوند خارجی بین نقطه‌ی روی هادی و یک نقطه‌ی دلخواه بیرون هادی می‌باشد .

محاسبه اندوکتانس کل هادی: [L_T]

$$L_T = L_{int} + L_{ext} = \frac{1}{2} * 10^{-7} + 2 * 10^{-7} \; L_n \; D/r$$

$$= 2 * 10^{-7} \left[\frac{1}{4} + L_n \; D/r\right] = 2 * 10^{-7} \left[\frac{1}{4} L_n e + L_n \; D/r\right]$$

$$= 2 * 10^{-7} \left[L_n e^{\frac{1}{4}} + L_n \; D/r\right] = 2 * 10^{-7} \left[L_n \frac{e^{\frac{1}{4}} D}{r}\right] = 2 * 10^{-7} \; L_n \frac{D}{r e^{\frac{-1}{4}}}$$

$$\Rightarrow L_T = 2 * 10^{-7} \; L_n \frac{D}{r * 0.7788} \quad ,K = 0.7788 \Rightarrow L_T = 2 * 10^{-7} \; L_n \frac{D}{kr}$$

$$r' = Kr \;\Rightarrow\; L_T = 2 * 10^{-7} \; L_n \frac{D}{r'} = \; 0.461 \; \log \frac{D}{r'}$$ رابطه‌ی نهایی اندوکتانس

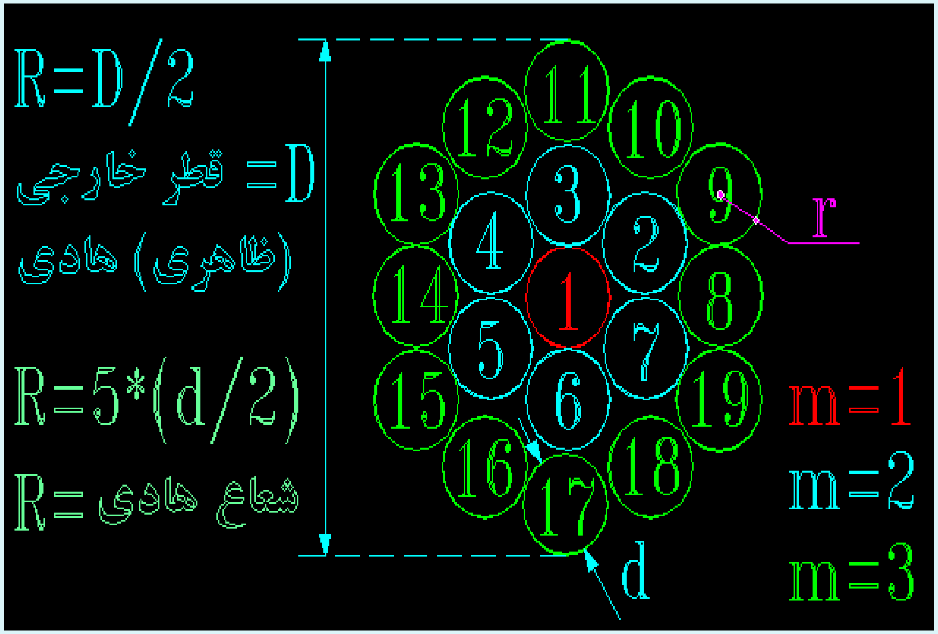
دقت کنید که: مقدار اندوکتانس کل به: 1- فاصله‌ی مورد نظر تا هادی، 2- شعاع هادی 3- به K مورد نظر بستگی دارد.

انواع هادی‌ها و ضریب K:

اگر m تعداد لایه‌ها و t تعداد رشته‌ها در نظر گرفته شود در این صورت رابطه‌ی زیر همواره برقرار است.

$$t = 3m^2 - 3m + 1$$

البته باید خاطرنشان ساخت که در رابطه‌ی فوق تک‌رشته‌ی مرکز هادی به عنوان لایه شماره یک محسوب می‌شود و در لایه‌ی بعدی یا بعدی ها مثلاً m=2 تعدادی کل هادی‌ها برابر 7 رشته می‌باشند که یکی مربوط به لایه اوّل است و6 تای دیگر در لایه دوم، m=2 هستند.



D= (2m-1)d → قطر هر رشته

قطر هادی

لایه mام

پس اگر مثلا هادی سه لایه باشد، قطر ظاهری برابر D= ((2*3)-1) d=5d و پنج برابر قطر هر رشته هادی می‌شود که شعاع هادی برابر می‌شود با:

$$R = \frac{5}{2}d$$

تعداد کل رشته ها

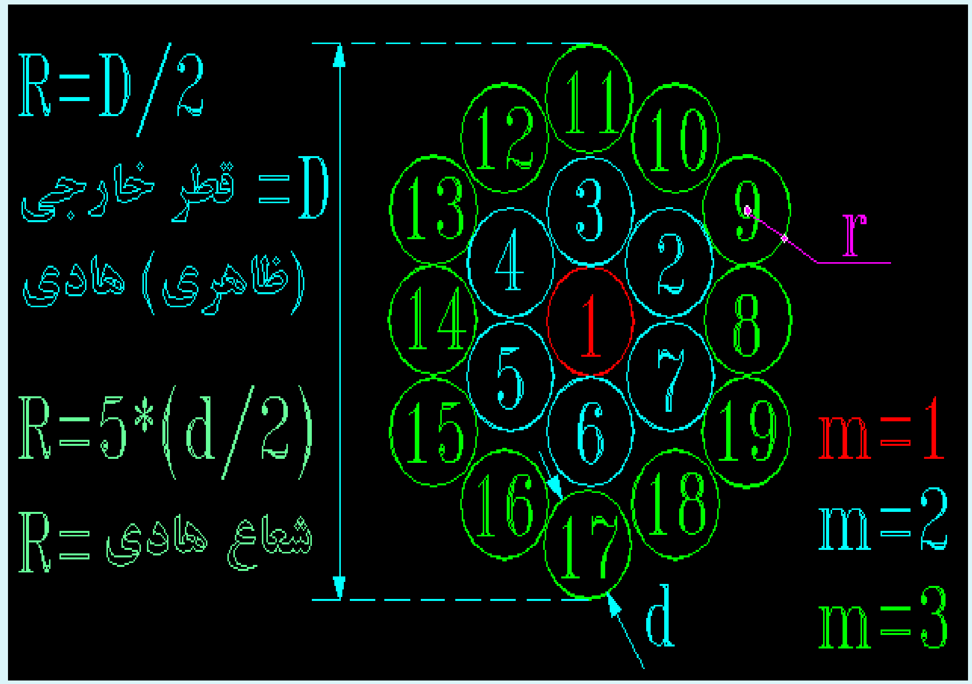
تعداد لایه

شعاع هادی

ضریب K

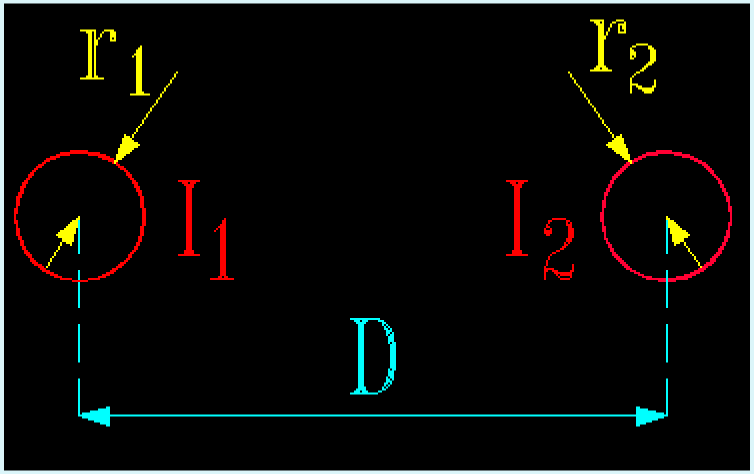
شعاع هر رشته =r

m	t	R	K
1	1	r	نداریم
2	7	3r	0.725
3	19	5r	0.757
4	37	7r	0.768
5	61	9r	0.772
6	91	r11	0.774
7	127	13r	0.775
⋮	⋮	⋮	⋮
∞	∞	∞r	0.7788



* جدول مربوط به kهای مختلف را با توجه به تعداد لایه‌هایشان مشاهده می‌کنید. که اگر اطلاعات مربوط به رشته را نداده باشند، جهت انتخاب K مقدار k=0.7788 را در نظر می‌گیریم و در صورت نداشتن سطح مقطع رشته‌ها مقدار یک را قرار می‌دهیم.

محاسبه‌ی اندوکتانس یک سیستم تکفاز دوسیمه:



$$L_1 = 2 * 10^{-7}\, L_n \frac{D}{r_1'}$$

$$L_2 = 2 * 10^{-7}\, L_n \frac{D}{r_2'}$$

$$\Rightarrow L_T = L_1 + L_2 = 2 * 10^{-7}\left(L_n \frac{D}{r_1'} + L_n \frac{D}{r_2'}\right) = 2 * 10^{-7}\, L_n \left(\frac{D}{\sqrt{r_1' r_2'}}\right)^2$$

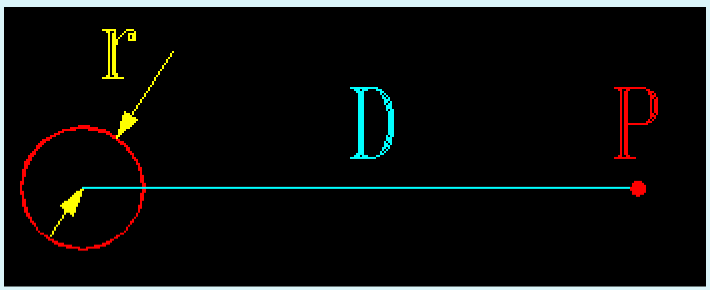
$$\Rightarrow L_T = 4 * 10^{-7} L_n \frac{D}{\sqrt{r_1' r_2'}} \left[\frac{H}{m}\right], r_1' = r_2'$$

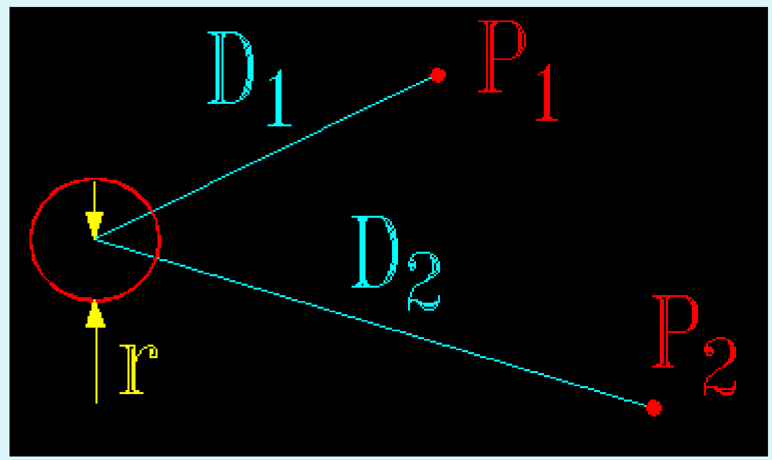
$$\Rightarrow L_T = 4 * 10^{-7}\, L_n \frac{D}{r_1'} \left[\frac{H}{m}\right], L_T = 0.921\, Log\, D/r' \left[\frac{H}{m}\right]$$

$$\Rightarrow L_T = 4*10^{-7} L_n \frac{D_1}{D_2} = 4*10^{-7} L_n \frac{D_m}{D_s} = 4*10^{-7} L_n \frac{\text{G.M.D}}{\text{G.M.R}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D = D_1 = D_m = \text{G.M.D} & \text{همیشه منعکس کننده فاصله‌ی بیرونی هادی است .} \\ r' = D_2 = kr = D_s = \text{G.M.S} & \text{همیشه منعکس کننده فاصله‌ی درونی هادی می‌باشد .} \end{cases}$$

شار دربرگیرنده‌ی یک هادی در یک سیستم حاوی n هادی :





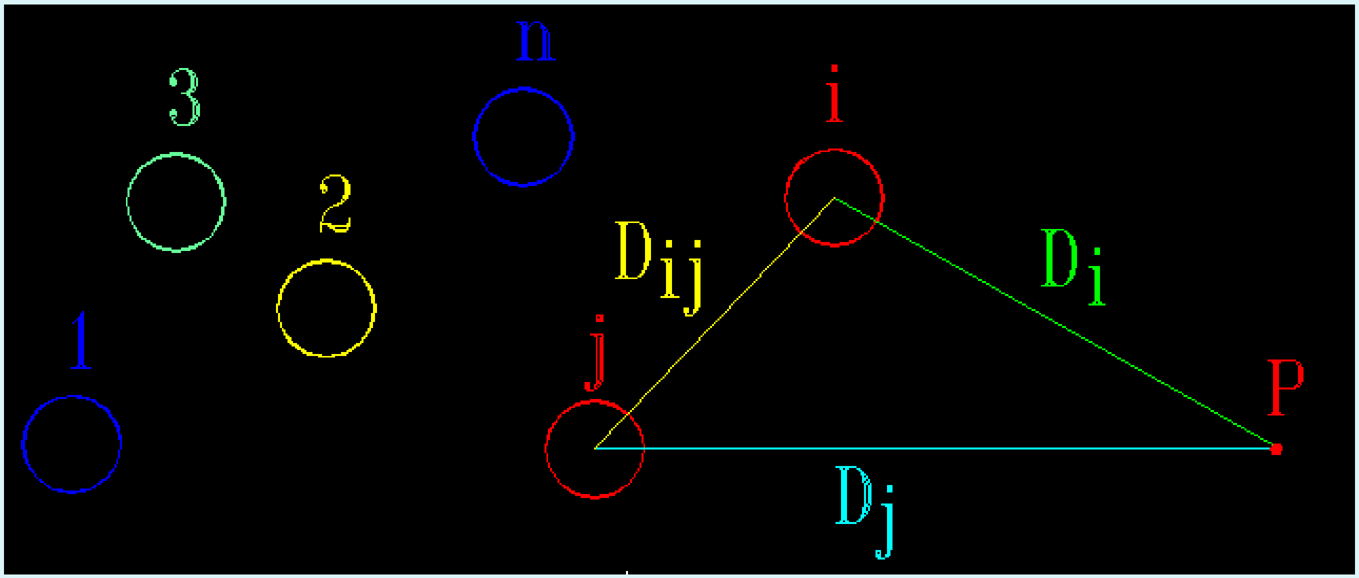
$$\lambda = 2*10^{-7} L_n \frac{D}{r_1'}$$

روی هادی و بیرون هادی به فاصله D

$$\lambda_{12} = 2*10^{-7} L_n \frac{D_2}{D_1}$$

بین دو نقطه بیرون هادی

شکل زیر را در نظر بگیرید که در آن n هادی موازی با جریان‌های I_1 و I_2 و.... و I_n نشان داده شده‌اند و فرض بر آن است که مجموع این جریان‌ها برابر صفر باشد . نقطه‌ی p در بیرون از هادی‌ها مفروض است و فاصله‌ی هادی‌ها از این نقطه را با D_1 و D_2 و....و D_n و نشان می‌دهیم.



نسبت پیدا کردن رابطه‌ی مربوط به کل شار دربرگیرنده‌ی هادی i فقط شار تا نقطه‌ی P را مورد بررسی قرار می‌دهیم که این شار دربرگیرنده‌ی هادی i به خاطر جریان همان هادی (I_i) از رابطه‌ی

$\lambda_{ii} = 2 * 10^{-7}\ I L_n \frac{D_i}{r_i'}$ به دست آمده بود شار دربرگیرنده‌ی هادی i به خاطر جریان هادی j از رابطه‌ی $\lambda_{ij} = 2 * 10^{-7}\ I L_n \frac{D_i}{r_i'}$ استفاده شد . تکرار رابطه‌ی اخیر برای سایر هادی‌ها می‌توان کل شار دربرگیرنده‌ی هادی i را تا نقطه‌ی P حساب کرد.

$$\lambda_{\mathrm{i}} = \lambda_{\mathrm{i1}} + \lambda_{\mathrm{i2}} + \lambda_{\mathrm{i3}} + \cdots + \lambda_{\mathrm{ij}} + \cdots + \lambda_{\mathrm{in}} + \lambda_{\mathrm{ii}}$$

$$= 2 * 10^{-7}\left(I_1\ L_n \frac{D_1}{D_{i1}} + I_2\ L_n \frac{D_2}{D_{i2}} + \cdots + I_j\ L_n \frac{D_j}{D_{ij}} + \cdots + I_n\ L_n \frac{D_n}{D_{in}} + I_i\ L_n \frac{D_i}{r_i'}\right)$$

$$= 2 * 10^{-7}\left[\left(I_1\ L_n \frac{1}{D_{i1}} + I_2\ L_n \frac{1}{D_{i2}} + \cdots + I_n\ L_n \frac{1}{D_{in}}\right) + \underbrace{(I_1 L_n\ D_1 + I_2 L_n\ D_2 + \cdots + I_n L_n\ D_n)}_{A}\right]$$

$$I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n = 0 \quad \Rightarrow I_n = -(I_1 + I_2 + I_3 + \cdots I_{n-1} \ldots + I_n)$$

$$A = (I_1 lnD_1 + I_2 lnD_2 + \cdots - I_1 lnD_n) - I_2 lnD_n - I_3 lnD_3 - \cdots - I_{n-1} lnD_n$$

$$= I_1 ln\frac{D_1}{D_n} + I_2 ln\frac{D_2}{D_n} + \cdots + I_{n-1} ln\frac{D_{n-1}}{D_n}$$

$$\lambda_i = 2 * 10^{-7}[(I_1\ ln\frac{D_1}{D_{i1}} + I_2\ ln\frac{1}{D_{i2}} + \cdots + I_n\ ln\frac{1}{D_{in}})$$

$$+(I_1 ln\frac{D_1}{D_n} + I_2 ln\frac{D_2}{D_n} + \cdots + I_{n-1} ln\frac{D_{n-1}}{D_n})$$

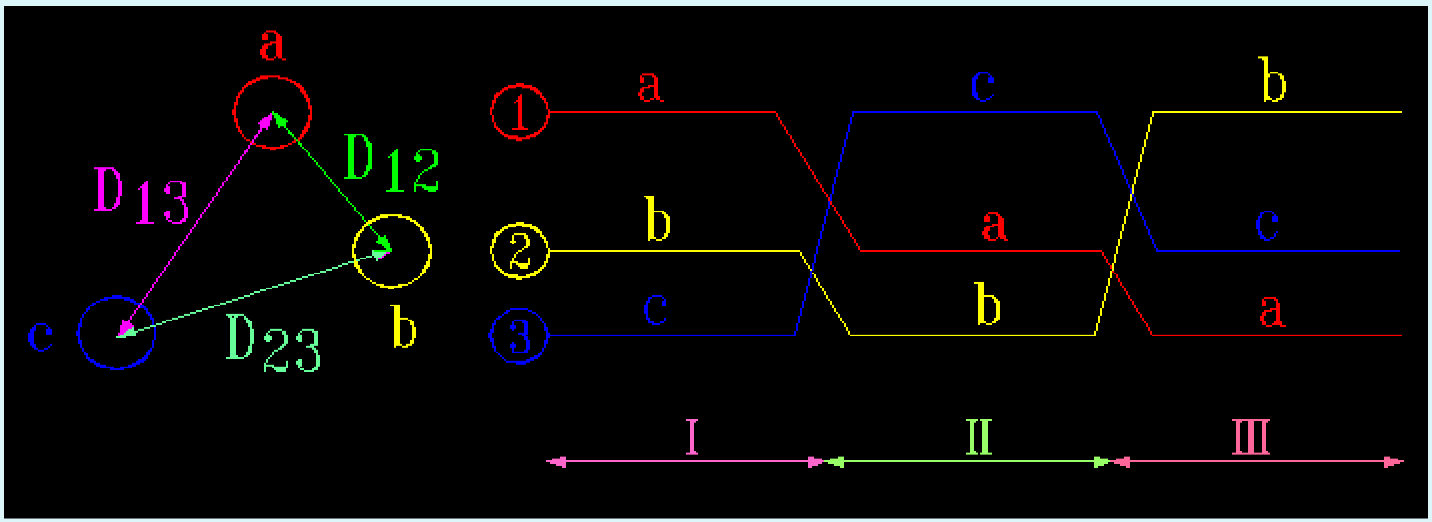
جهت محاسبه‌ی کل شار دربرگیرنده‌ی هادی i نقطه‌ی P را به سمت بینهایت سوق می‌دهیم لذا

قسمت دوم عبارت به صفر میل می کند .

$$\lambda_i = 2 * 10^{-7}(I_1\ ln\frac{D_1}{D_{i1}} + I_2\ ln\frac{1}{D_{i2}} + \cdots + I_n\ ln\frac{1}{D_{in}})$$

- این رابطه‌ی کلی است مثلا در سیستم سه‌فاز که جزئی و حالت خاصی از این رابطه می‌باشد n=3 می‌شود .

اندوکتانس خطوط انتقال انرژی سه فاز ترانسپوز شده با فواصل نامساوی بین هادی‌ها:



$$\lambda_a = (\lambda_{aI} + \lambda_{aII} + \lambda_{aIII})/3 \rightarrow D_{equ} = \sqrt{D_{12} D_{23} D_{31}}$$

$$\lambda_{aI} = 2 * 10^{-7}\left(I_a \ln\frac{1}{r'_a} + I_b \ln\frac{1}{D_{21}} + I_c \ln\frac{1}{D_{31}}\right)$$

$$\lambda_{\mathrm{aII}} = 2 * 10^{-7}\left(I_a \, ln\frac{1}{r_a'} + I_b \, ln\frac{1}{D_{32}} + I_c \, ln\frac{1}{D_{12}}\right)$$

$$\lambda_{\mathrm{aIII}} = 2 * 10^{-7}\left(I_a \, ln\frac{1}{r_a'} + I_b \, ln\frac{1}{D_{13}} + I_c \, ln\frac{1}{D_{23}}\right)$$

$$\lambda_{\mathrm{a}} = 2 * 10^{-7}\left(I_a \, ln\frac{1}{r_a'} + I_b \, ln\frac{1}{(D_{21}D_{32}D_{13})^{1/3}} + I_c \, ln\frac{1}{(D_{31}D_{12}D_{23})^{1/3}}\right)$$

$$I_a + I_b + I_c = 0 \Longrightarrow I_b + I_c = -I_a$$

$$\lambda_{\mathrm{a}} = \left(I_a ln\frac{1}{r_a'} + ln\frac{1}{(D_{12}D_{23}D_{31})^{\frac{1}{3}}}[I_b + I_c]\right) * 2 * 10^{-7}$$

$$\Longrightarrow \lambda_{\mathrm{a}} = \left(I_a ln\frac{1}{r_a'} - I_a ln\frac{1}{(D_{12}D_{23}D_{31})^{\frac{1}{3}}}\right) * 2 * 10^{-7}$$

$$= 2 * 10^{-7} I_a \left(ln\frac{1}{r_a'} - ln\frac{1}{(D_{12}D_{23}D_{31})^{\frac{1}{3}}} \right) = 2 * 10^{-7} I_a (ln\frac{1}{r_a'} - ln\frac{1}{D_{eyt}}$$

$$\Rightarrow \lambda_a = 2 * 10^{-7} I_a ln\frac{D_{equ}}{r_a'} \quad , \qquad I_a = \frac{\lambda_a}{I_a}$$

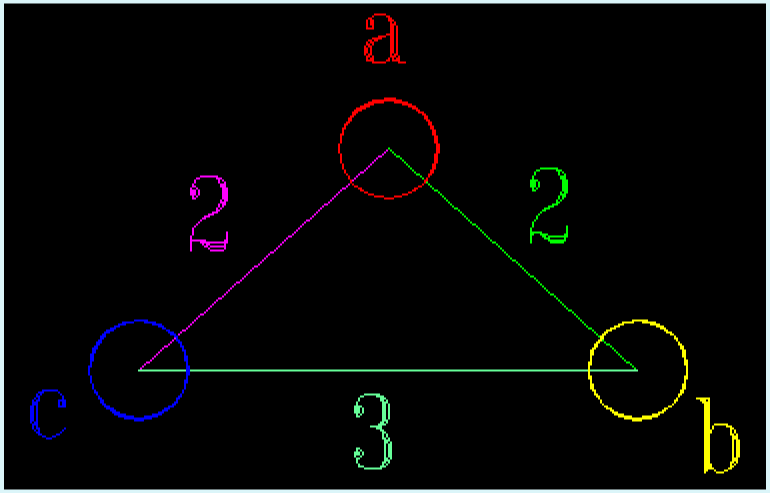
$$\Rightarrow L_a = 2 * 10^{-7} ln\frac{D_{equ}}{r_a'} [H/m] = 0.461 \; Log\frac{D_{equ}}{r_a'} (H/m)$$

$$\begin{cases} D_{equ} = D_m = \mathrm{G.M.D} \quad \Rightarrow r_a = r_b = r_c \Rightarrow L_a = L_b = L_c \\ \qquad r_a' = D_s.\mathrm{G.M.S} \end{cases}$$

اگر فواصل هادی‌ها باهم برابر باشند لذا داریم: $D_{12} = D_{23} = D_{31} = D_{ey} = \mathrm{D}$

اگر $r_c = r_b = r_a \Rightarrow L_a = L_b = L_c \quad , \quad L_a = 2 * 10^{-7} ln\frac{D}{r_a'} [H/m]$

تمرین1: اندوکتانس خط سه‌فاز زیر را حساب کنید اگر هر هادی 19 رشته و قطر خارجی 10 میلی‌متر باشد و $t = 19 \implies K = 0.757$



$$r = \frac{d}{2} = \frac{10 * 10^{-3}}{2} = 5 * 10^{-3}\, m$$

$$, r' = Kr = 0.757 * 5 * 10^{-3}$$

$$D_{equ} = \sqrt[3]{2 * 2 * 3} = 2.280^{\mathrm{m}}$$

$$D_s = r' = Kr = 3.785 * 10^{-3}$$

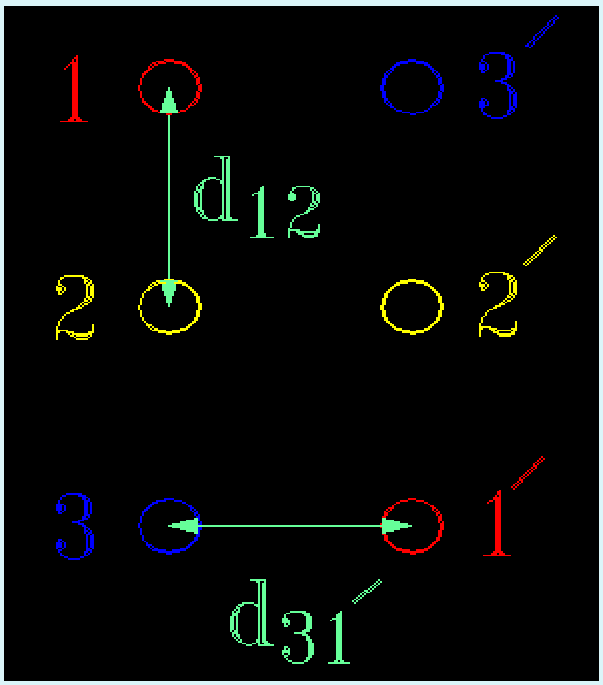
$$L = 2 * 10^{-7} ln \frac{D_{eq}}{D_s} = 2 * 10^{-7} ln \frac{2.280}{3.785 * 10^{-3}} = 1.280 * 10^{-6} [H/m]$$

$$\implies L = 1.280 * 10^{-8} \frac{\frac{H * 1000}{m}}{1000} = 1.28\, [mH/Km]$$

$$w = 314 \ \Rightarrow X_l = Lw = 0.402\ [m\Omega/Km]$$

اگر همین مسئله با تعداد رشته‌های 37 تکرار می‌شد فقط مقدار K مربوطه عوض می‌شد و شاید هم قطر سیم و نوع آرایش و در نتیجه اندازه‌ی هادی‌ها از هم فرق داشته بود. که باید دقت کرد.

خط دو مداره‌ی ترانسپوز شده:



$$D_m = \sqrt[3]{D_{12} D_{23} D_{31}}$$

$$D_{12} = \sqrt[4]{d_{12}\ d_{1'2}\ \ d_{12'}\ d_{1'2'}}$$

$$D_{23} = \sqrt[4]{d_{23}\ d_{2'3}\ \ d_{23'}\ d_{2'3'}}$$

$$D_{31} = \sqrt[4]{d_{31}\ d_{3'1}\ \ d_{31'}\ d_{3'1'}}$$

$$D_s = \sqrt[3]{D_{11'}\ D_{22'}\ D_{33'}} \qquad D_{11'} = \sqrt{r'\ d_{11'}}$$

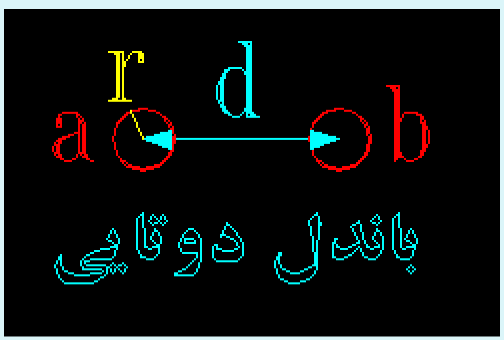
$$D_{22'} = \sqrt{r' \ d_{22'}} \qquad , \qquad D_{33'} = \sqrt{r' \ d_{33'}} \quad , \ (r' = kr)$$

در انواع آرایش‌ها فقط اندازه‌ها فرق می‌کند و بقیه همان است .

هادی های باندل شده :

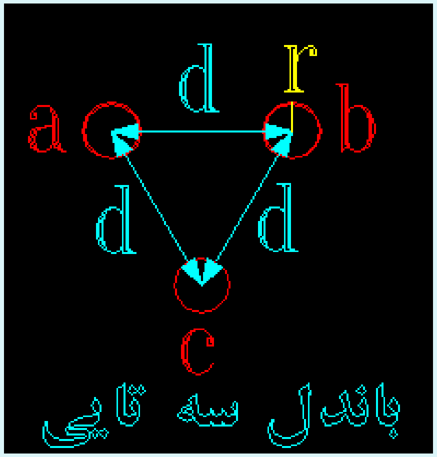
رابطه‌ی کلی برای D_s در باندل‌ها (انواع nتایی)

$$D_b^s \ \text{یا} \ D_s^b = \sqrt[n^2]{(r'a \ d_{ab} \dots d_{an})(\ d_{ba} r'b \dots d_{bn}) \dots (d_{na} \dots r'n)}$$



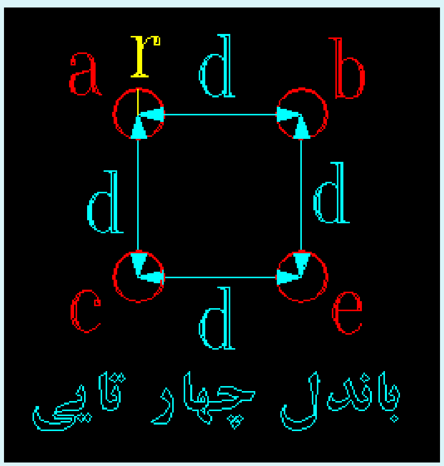
$$D_s^b = \sqrt[4]{(r'd)(r'd)} = \sqrt{r'd}$$

n=2



$$D_s^b = \sqrt[3^2]{(r'dd)(dr'd)(ddr')} = \sqrt[3]{r'd^2}$$

n=3



$$D_s^b = \sqrt[4^2]{(r'dd\sqrt{2}d)(dd\sqrt{2}dr')(d\sqrt{2}ddr')(\sqrt{2}dddr')}$$

$$= \sqrt[4]{r'd^3\sqrt{2}} = 1.1\sqrt[4]{r'd^3}$$

n=4

در مدارهای مختلف D_m فرق نمی کند.

الگوریتم پیدا کردن D_s :

1- آیا هادی چند رشته می‌باشد ؟

مثبت: با توجه به تعداد رشته داریم: $D_s = \mathrm{Kr}$

منفی: (نمی‌دانیم یا بی‌نهایت است)

$$D_s = \mathrm{Kr}\ , \qquad \mathrm{K} = 0.7788$$

2- آیا فاز باندل می‌باشد ؟

مثبت: از طریق D_s^b حساب می کنیم.

منفی: D_s را با روش معمولی بالا داریم.

3- آیا دو مداره است ؟

مثبت: D_m و D_s مربوط به دو مداره را حساب می کنیم.

منفی: D_s معمولی با روش بالا را حساب می کنیم.

4- آیا دو مداره باندل است ؟

مثبت: پس جهت محاسبه‌ی D_s در زیر داریم:

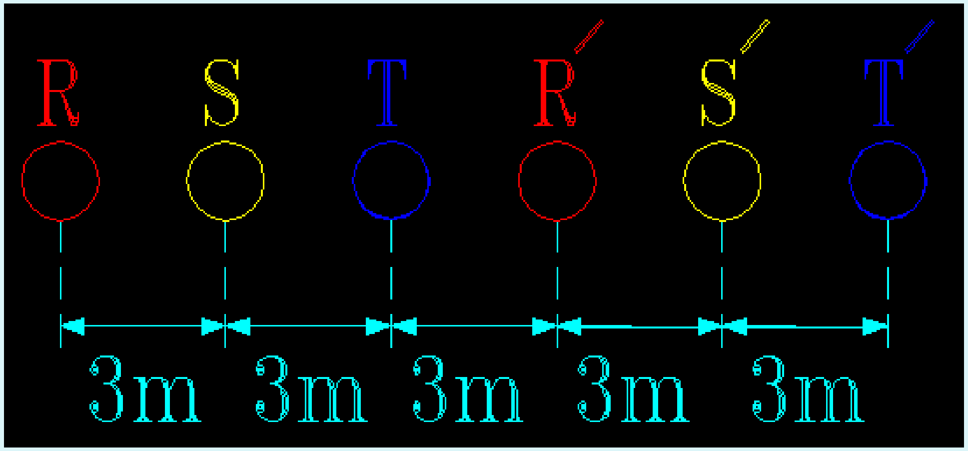
منفی: پس ساده می‌باشد و با روش بالا.

جهت محاسبه‌ی D_s^b مربوط به دو مدار بودن به جای r' مقدار D_s^b جایگزین می‌شود :

مثلا باندل دوتایی دو مداره $D_s^b = \sqrt{r' . d} \Rightarrow D_s = \sqrt[3]{D_{11'} \, D_{22'} \, D_{33'}}$,

$$D_{11'} = \sqrt{r' \; d_{11'}} \Rightarrow D_{11'} = \sqrt{D_s^b \, d_{11'}}$$

مثال: در خط دو مداره‌ی روبرو تعداد رشته‌های هادی‌ها 19 رشته و به شعاع هر رشته 1.4mm است . مطلوب است محاسبه‌ی اندوکتانس L در مدار زیر؟



$$L = 2 \times 10^{-7} \mathrm{Ln}\frac{D_m}{D_s} \quad ,$$

$$D_m = \sqrt[3]{D_{12}D_{23}D_{31}} \quad ,$$

$$D_s = \sqrt[3]{D_{11'}\,D_{22'}\,D_{33'}}$$

$$D_{12} = \sqrt[4]{d_{12}\,d_{1'2}\,\,d_{12'}\,d_{1'2'}} = \sqrt[4]{3*6*12*3} = 3\sqrt[4]{8}$$

$$D_{23} = \sqrt[4]{d_{23}\,d_{2'3}\,\,d_{23'}\,d_{2'3'}} = \sqrt[4]{3*6*12*3} = 3\sqrt[4]{8}$$

$$D_{31} = \sqrt[4]{d_{31}\,d_{3'1}\,\,d_{31'}\,d_{3'1'}} = \sqrt[4]{6*3*15*6} = 3\sqrt[4]{20}$$

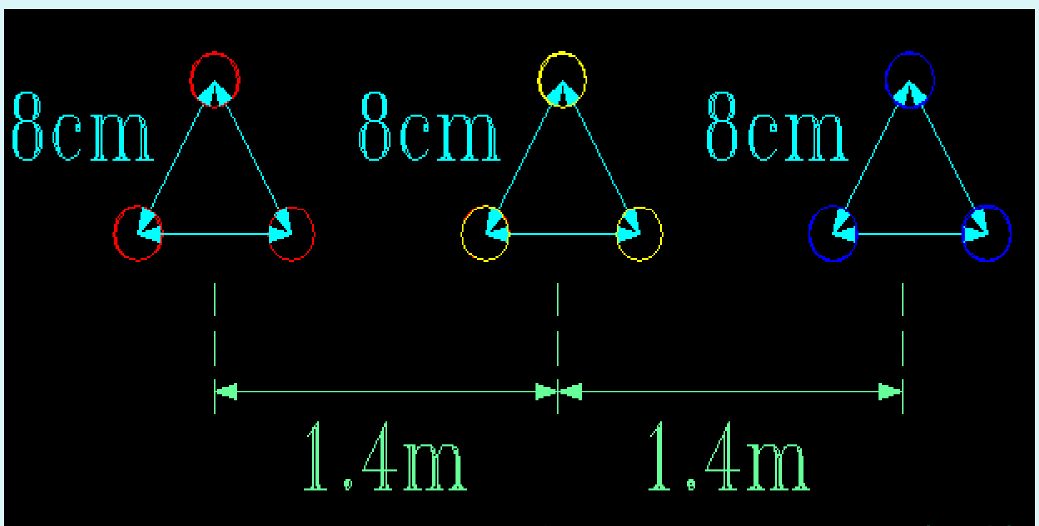
$$\Rightarrow D_m = \sqrt[3]{(3\sqrt[4]{8})(3\sqrt[4]{8})(3\sqrt[4]{20})} = 5.44\mathrm{m}$$

$$D_{11'} = \sqrt{r'\ d_{11'}} = \sqrt{Kr\, d_{11'}} = \sqrt{0.757 * \underbrace{1.4 * 10^{-3} * 5}_{\text{شعاع ظاهری هادی}} * 9} = 0.2183^{m}$$

$$\Rightarrow D_{11'} = D_{22'} = D_{33'} = 0.2183m \quad \Rightarrow L = 2 * 10^{-7}\, \mathrm{Ln}\frac{5.44}{0.2183}$$

$$\Rightarrow D_s = \sqrt[3]{(D_{11'})^3} = 0.2183\mathrm{m} = 0.643 \ \text{mH/Km/phase}$$

تمرین2: در مدار روبرو هر هادی 7 رشته و شعاع هر رشته 1.5mm است . مطلوب است محاسبه‌ی L؟



$$L = 2 \times 10^{-7} \mathrm{Ln}\frac{D_m}{D_s}$$

$$D_m = \sqrt[3]{D_{12}D_{23}D_{31}} = \sqrt[3]{1.4 * 1.4 * 2.8} \Rightarrow D_m = 1.4\sqrt[3]{2}\ \text{m}$$

$$D_s^b = \sqrt{r' . d^2} = \sqrt[3]{0.725 * 1.5 * 10^{-3} * 3 * 8 * 10^{-2}}$$

$$L = 2 \times 10^{-7} \text{Ln} \frac{1.4\sqrt[3]{2}}{D_s^b} = 8.319 * 10^{-7}\ {}^{H}/_{m}$$

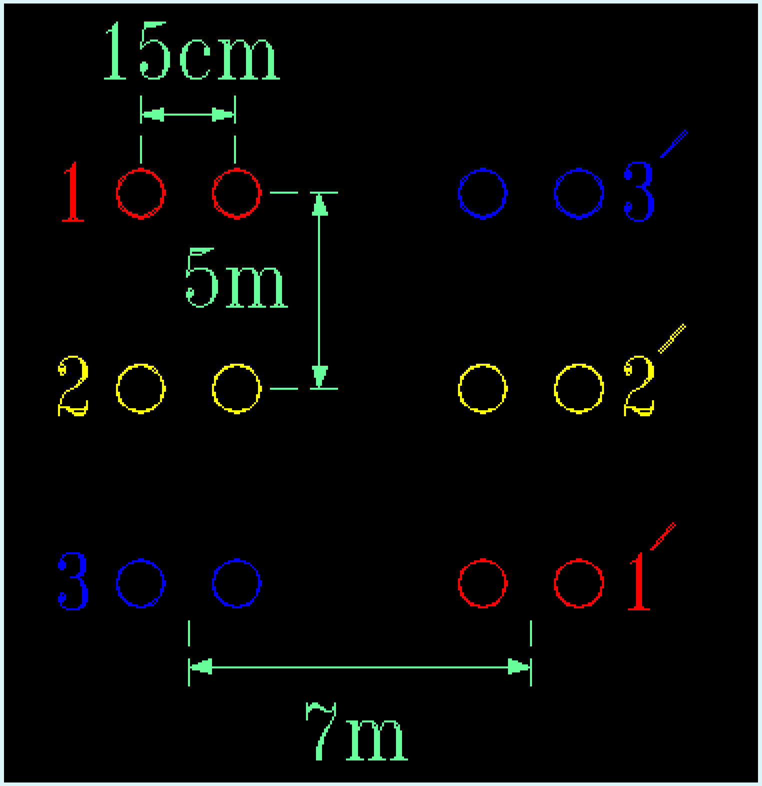
F=50

$$X_L = 8.319 * 10^{-7}\ {}^{H}/_{m} * \omega = {}^{\Omega}/_{m} * 10^{+3} = \Omega/Km/phase(0.2612)$$

تمرین3: یک شبکه‌ی دو مداره دو باندل ترانسپوز شده مطابق شکل روبرو مطلوب است . هادی 7 رشته و قطر خارجی آن 1.5 cmاست مطلوب است محاسبه‌ی L در این شبکه؟

$$D_m = \sqrt[3]{D_{12}D_{23}D_{31}} \quad ,$$

$$D_{12} = \sqrt[4]{d_{12}\ d_{1'2}\ \ d_{12'}\ d_{1'2'}} = \sqrt[4]{5 * \sqrt{74} * \sqrt{74} * 5} = 6.55\text{m}$$



$$D_{23} = \sqrt[4]{d_{23}\ d_{2'3}\ \ d_{23'}\ d_{2'3'}}$$

$$= \sqrt[4]{5 * \sqrt{74} * \sqrt{74} * 5} = 8.36\ \mathrm{m}$$

$$D_{13} = \sqrt[4]{d_{13}\ d_{1'3}\ \ d_{13'}\ d_{1'3'}}$$

$$= \sqrt{5 * \sqrt{149} * 7 * 10} = 6.55\ \mathrm{m}$$

$$D_m = 7.104\ \mathrm{m}$$

$$D_s^b = \sqrt{r'\,.\,d} = \sqrt{Krd} = \sqrt{0.725 * \frac{1.5}{2} * 10^{-2} * 15 * 10^{-3}} = 0.0285^{m}$$

$$D_s = \sqrt[3]{D_{11'}\ D_{22'}\ D_{33'}}\ ,\ D_{11'} = \sqrt{r'\ \ d_{11'}} = \sqrt{D_s^b\ \ d_{11'}} = 0.589\ \mathrm{m}$$

$$D_{22'} = 0.4466 \quad , \quad D_{33'} = 0.589 \ \text{m}$$

$$D_s = \sqrt[3]{(0.589)^2(0.4466)} = 0.53 \ \text{m}$$

$$L = 2 \times 10^{-7} \text{Ln} \frac{D_m}{D_s} = 2 \times 10^{-7} \text{Ln} \frac{0.704}{0.537} = 5.1644 * 10^{-7} \ {}^{H}/_{m}$$

$$= 5.1644 * 10^{-4} \ {}^{H}/_{Km} \quad , \omega = 314 \quad , X_L = 1621.62 * 10^{-4} \ {}^{\Omega}/_{Km}$$

$X_{L_t} = 1621.62 \ {}^{\Omega}/_{Km} * 100Km = 16.2 \ \Omega$ چون طول خط 100Km است پس

تمرین4- یک خط انتقال بار 80 MW را با ضریب قدرت 0.8Lag به فاصله‌ی 100Km با ولتاژ 132 Km و مقاومت هر هادی $0.2 \ {}^{\Omega}/_{Km}$ و هادی 7 رشته و قطر خارجی 1.5cm است. مطلوب است ولتاژ جریان و ضریب قدرت در ابتدای خط.

تمرین5: یک خط سه فاز به قدرت 6MW با ولتاژ انتهای خط 11Kv و به طول 10Km کشیده شده است . تلفات اکتیو خط ، 10% قدرت انتهای خط می‌باشد و ضریب قدرت مصرف‌کننده 0.8 Lag و فرکانس شبکه 50 Hz، فاصله‌ی هادی‌ها از هم 5.1 m و هادی‌ها از رشته‌های مسی به مقاومت $14 \ {\Omega mm^2}/{Km}$ ساخته شده‌اند. مطلوب است محاسبه‌ی :

الف) مقاومت اسمی خط؟

ب) شعاع هادی‌ها؟

پ) راکتانس خط؟

ت) تلفات راکتیو خط؟

ث) ولتاژ ابتدای خط ؟

$p = 6MW$, فاصله هادی‌ها از هم $= 1.5m$

$U_R = 11kv$, مقاومت مخصوص $= \ 14 \ {\Omega mm^2}/{Km}$

$\Delta P = \% \ 10 \ p_R$, طول خط $= \ 10 \ Km$

$P_{F_R} = 0.8 \log$, $F = 50 \ cps$

$$P = \sqrt{3}\,UI\,Cas\varphi \Rightarrow I = \frac{6 * 10^{+6}}{\sqrt{3} * 11 * 10^{+3} * 0.8} \Rightarrow I = 393\ A$$

$$\Delta P = 3RI^2 = \%10 * 6 = 3 * R * (393)A \Rightarrow R = 1.29\Omega$$

$$R = \rho\frac{L}{A} \Rightarrow 1.29 = 14 * \frac{10}{5} \Rightarrow S = 109mm^2$$ سطح مقطع هادی

چون سطح مقطع هر رشته گفته نشده است پس مقدار آن را $1mm^2$ در نظر می‌گیریم.

$$\text{تعداد رشته‌ها} = \frac{S_{\text{کل}}}{s_{\text{یک رشته}}} = \frac{109}{1} = 109\ \text{رشته}$$

$$S = \pi r^2 \Rightarrow 109 = \pi r^2 \Rightarrow r = 5.89mm$$ شعاع هادی

چون فاصله 1.5 m داده شده است و هر سه فاز با هم 1.5 m را دارد پس آرایش فازها به صورت

مثلث می‌باشد .

$$L = 2 \times 10^{-7} Ln \frac{D_m}{D_s} = 2 \times 10^{-7} Ln \frac{1.5 * 1000}{0.775 * 5.89}$$

$$\Rightarrow L = 1.159 * 10^{-6}\, {}^{h}/_{m}$$

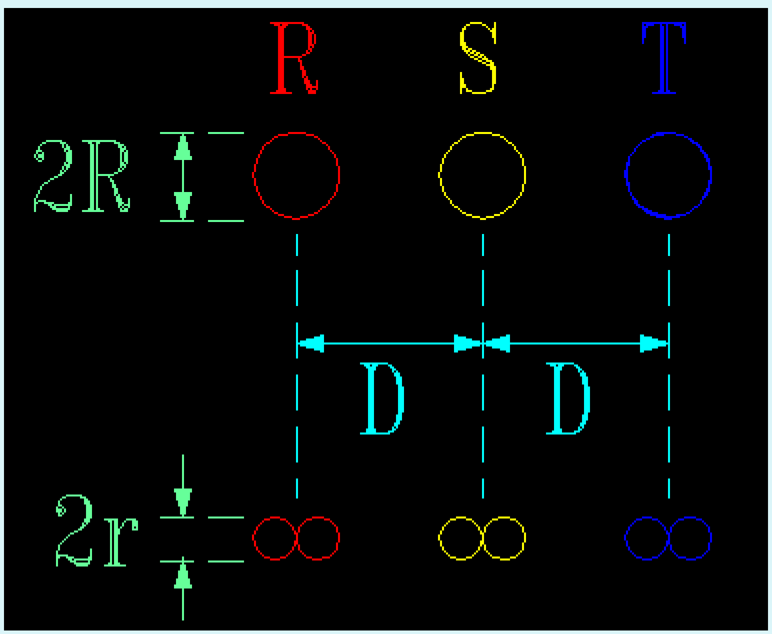
$$X_L = \omega l = 314 * 1.159 * 10^{-3} = 364\, {}^{\Omega}/_{km}$$

$$,\quad L = 1.159 * 10^{-3} = {}^{h}/_{km} = X_L * 10km = 3.64\Omega$$

$\Delta Q = 3 X_L I^2 = 3 * 3.64 * (393)^2 = 1.6865\ MVAR$ تلفات راکتیو خط در هر فاز

تمرین6: یک خط سه فاز 12.5MVA با ضریب قدرت 0.8 پس فاز در فاصله‌ی 100 kmبار را تغذیه می‌کند . اگر ولتاژ انتهای خط 90kw و مقاومت هادی‌ها $0.3\ {}^{\Omega}/_{km}$ و فاصله‌ی مساوی آن‌ها از هم 3m باشد و هادی‌ها از رشته‌های مسی به مقاومت $14\ {}^{\Omega mm^2}/_{Km}$ ساخته شده باشند ، مطلوب است تجزیه و تحلیل خط؟

تمرین7: در یک خط انتقال با آرایش شکل زیر هر فاز با یک باندل دوتایی جایگزین می‌شود .
تغییرات راکتانس سلفی - تغییرات راکتانس فازی، توان اکتیو و توان راکتیو را بررسی کنید.
(جواب: توان اکتیو باندل شده 5/38 درصد افزوده می‌شود و 28% راکتانس بیشتری نسبت به حالت باندل خواهیم داشت).



$$\frac{D}{R} = 300\,, \frac{D}{d} = 8.6$$

$$S_1 = \pi R^2 \quad \Rightarrow 2\,S_2 = S_1$$

$$S_2 = \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \pi R^2 = \pi r^2 \Rightarrow r = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

حالت اول: $L_1 = 2 \times 10^{-7} \mathrm{Ln} \dfrac{D_m}{D_s} = 2 \times 10^{-7} \mathrm{Ln} \dfrac{D\sqrt[3]{2}}{0.7788R}$

حالت دوم: $L_2 = 2 \times 10^{-7} \mathrm{Ln} \frac{D_m}{D_s}$, $D_s = \sqrt{r' . d} = \sqrt{r * 0.7788 * d}$

$$L_2 = 2 \times 10^{-7} \mathrm{Ln} \frac{D\sqrt[3]{2}}{0.7788 * d}$$

$$\Rightarrow L_1 = 2 \times 10^{-7} \mathrm{Ln} \frac{R300\sqrt[3]{2}}{0.7788R} = 1.2369 * 10^{-6} \ (H/m)$$

$$L_2 = 2 \times 10^{-7} \mathrm{Ln} \frac{R300\sqrt[3]{2}}{\sqrt{\frac{R}{\sqrt{2}} 0.7788 \frac{R300}{8.6}}}$$

$$= 2 \times 10^{-7} \mathrm{Ln} \frac{R300\sqrt[3]{2}}{R6.198} = 0.8914 * 10^{-4} \ (H/m)$$

$$F = 50 \Rightarrow \omega = 314 = X_{L_1} = L_1\omega = 0.388\ ^{\Omega}/_{km}\ ,\ X_{L_2} = 0.28\ ^{\Omega}/_{km}$$

$$\text{تغییرات} = \frac{0.388 - 0.28}{0.388} * 100 = \%28$$

راکتانس نسبت به حالت دوم 28% کاهش یافته است .

$$P = \frac{|V_1||V_2|}{X}\ \text{Sin}\ \delta \Rightarrow \frac{P_1 - P_2}{P_1} * 100$$

$$\text{تغییرات توان اکتیو} = \frac{\frac{1}{X_1} - \frac{1}{X_2}}{\frac{1}{X_1}} * 100 = \frac{\frac{1}{0.388} - \frac{1}{0.28}}{\frac{1}{0.388}} * 100 = 38.5\%$$

$$P_1 \alpha \frac{1}{X_1}\ ,\ P_2 \alpha \frac{1}{X_2}$$

مقاومت خطوط انتقال انرژی :

مقاومت مؤثر ac این‌چنین تعریف می‌شود . که I مؤثر هادی بر حسب آمپر می‌باشد .

$$R_{ac}^{[\Omega]} = \frac{\text{متوسط تلفات در هادی}^{[W]}\,(W)}{I^{2[A]}}$$

همچنین مقاومت dc یک هادی گرد و تو پر در دمای مشخص برابر است با:

$$R_{dc}^{[\Omega]} = \rho\,\frac{l^{[m]}}{A^{[m^2]}}$$

- مقاومت هادی با سه عامل تغییر می‌کند : 1- فرکانس 2- تاباندن 3- دما

مقاومت مؤثر ac هنگامی با مقاومت اهمی dc برابر است که توزیع جریان در سطح مقطع هادی یکسان باشد.

هنگامیکه جریان ac از یک هادی عبور می کند . توزیع جریان در سطح مقطع هادی یکسان نبوده

و چگالی جریان در سطح هادی بیشترین مقدار را دارد این اثر موجب می‌شود تا مقاومت ac کمی

بیشتر از مقاومت dc گردد. این رفتار به اثر پوستی (skineffect) موسوم است . در فرکانس

60Hz، مقاومت ac تقریبا 2% بیشتر از مقاومت dc می‌باشد . از آن‌جا که هادی رشته‌ای تابانده

شده است ، بنابراین طول واقعی هر رشته بیشتر از طول هادی است . از اینرو مقاومت هادی کمی

بیشتر از مقاومت از رابطه‌ی R_{dc} بالا می‌باشد . $R_t = R(1 + \propto_0 t)$

با افزایش درجه حرارت مقاومت نیز افزایش پیدا می کند .

ضریب حرارتی هادی در صفر درجه‌ی سانتیگراد $= \propto_0$

مقاومت در صفر درجه‌ی سانتیگراد =R

یا معلوم بودن مقاومت در درجه حرارت $(R_1)t_1$ می‌توان در درجه حرارت $(R_2)t_2$ را

حساب کرد.

$$\frac{R_{t_1}}{R_{t_2}} = \frac{1 + \propto_0 t_1}{1 + \propto_0 t_2}$$

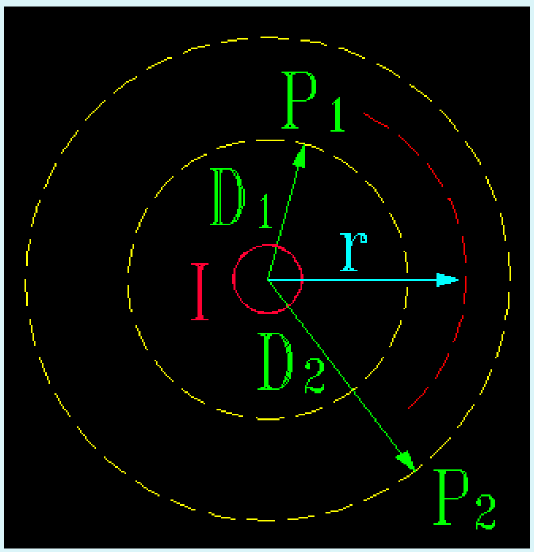
- لازم به توضیح است که در فرکانس‌های بالا اثر پوستی به خوبی مشهود می‌باشد. به خاطر اثر پوستی مقاومت *ac* از مقاومت *dc* بیشتر می‌باشد و لذا در خطوط انتقال انرژی *AC* تلفات توان (در اثر مقاومت) بیشتر خواهد بود.

فصل دوّم

بررسی کاپاسیتانس خطوط انتقال انرژی

-هادی‌های خط انتقال به دلیل وجود اختلاف پتانسیل بین آن‌ها (میدان الکتریکی) نسبت به یکدیگر ظرفیت خازنی دارند. $C = \frac{Q}{V}$

یک هادی بلند با شعاع r در هر متر طول دارای بار q کولن است در نظر بگیرید بار روی هادی موجب تولید میدان الکتریکی با خطوط شار شعاعی (خطوط هم پتانسیل) در اطراف آن می گردد .



با استفاده از قانون گاوس چگالی شار الکتریکی در یک استوانه‌ای به شعاع x برای یک متر طول از هادی برابر است با :

$$D = \frac{q}{A} = \frac{q}{2\pi r(1)} = \frac{q}{2\pi r}$$

چگالی بار الکتریکی

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} \quad , \quad \varepsilon_0 = 8.85 * 10^{-12} \ F/m$$

شدت میدان الکتریکی　　　ضریب نفوذپذیری الکتریکی هوای آزاد

$\varepsilon_r = 1$ ضریب نفوذ الکتریکی نسبی هوا ، ضریب نفوذ مطلق ماده $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

$$\Rightarrow E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow$$

اختلاف پتانسیل بین استوانه ها از نقطه D_1تاD_2 به صورت کار انجام شده بر اثر حرکت دادن یک بار واحد یک کولنی از نقطه‌ی D_2 به نقطه‌ی D_1 و از میان میدان الکتریکی تولید شده بر روی هادی تعریف می‌شود و این‌چنین داریم.

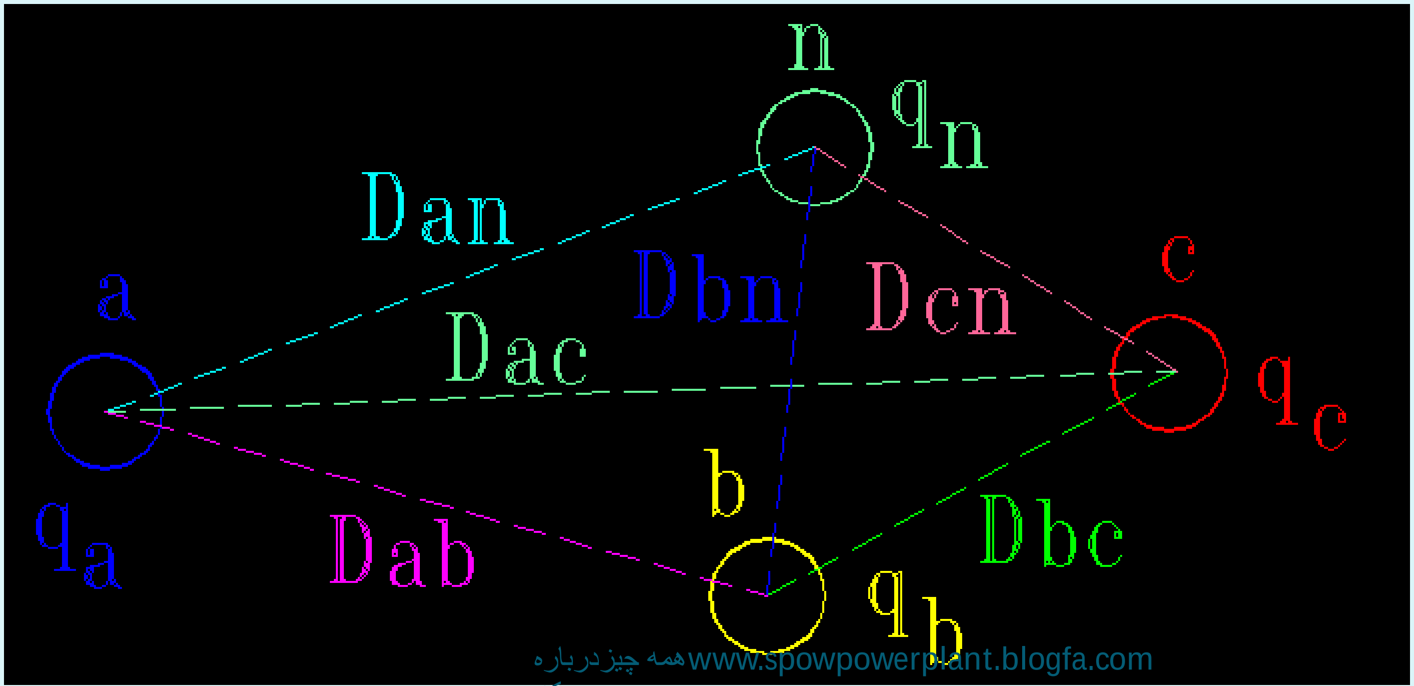
$$V_{12} = \int_{D_1}^{D_2} E dr = \int_{D_1}^{D_2} \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \int_{D_1}^{D_2} \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} Lnr|_{D_1}^{D_2} \Rightarrow V_{12} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} Ln\frac{D_2}{D_1}$$

- نماد V_{12} نشان می‌دهد که افت ولتاژ از نقطه‌ی 1 به 2 است . یعنی نقطه‌ی 1 نسبت به نقطه‌ی 2 مثبت می‌باشد . بار q علامت خود را خواهد داشت. این رابطه ، رابطه‌ی کلیدی محاسبه‌ی کاپاسیتانس برای یک هادی در دو نقطه‌ی بیرون از هادی است .

اختلاف پتانسیل بین دو هادی در میان هادی‌های گوناگون (آرایش هادی‌های متعدد):

اگر n هادی موازی باردار نشان داده شده را داشته باشیم و با فرض زیاد بودن فاصله‌ی هادی‌ها از زمین و همچنین فاصله‌ی هادی‌ها از هم ، نسبتا زیاد است. یعنی شعاع هادی‌ها نسبت به فواصل بین هادی‌ها کوچک است (مثل خطوط انتقال انرژی)



همچنین با فرض یکنواخت بودن توزیع بار بر روی هر هادی و با احتساب‌شده $q_1 + q_2 + q_n = 0$

و همچنین اثر غیر یکنواختی ناچیز و قابل صرف نظر باشد خواهیم داشت.

اختلاف پتانسیل بین هادی‌های A و B به واسطه‌ی حضور تمامی بارها با استفاده اصل جمع آثار:

$$V_{ab} \frac{1}{2\pi\varepsilon_{\circ}} \sum_{k=1}^{n} q_k ln \frac{D_{kb}}{D_{ka}} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_{\circ}} [q_a ln \frac{D_{ab}}{D_{aa}} + q_b ln \frac{D_{bb}}{D_{ba}} + q_c ln \frac{D_{cb}}{D_{ca}}]$$

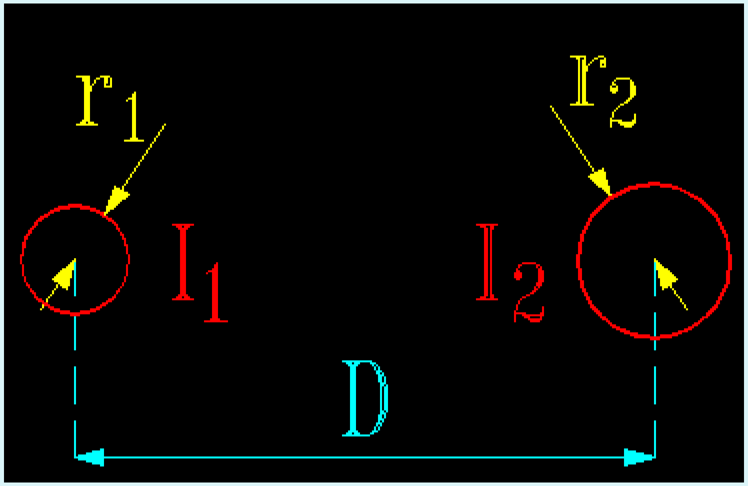
-اگر a و b با هم برابر باشند این فاصله بین مرکز تا سطح هادی می‌باشد یا به عبارت دیگر شعاع هادی r مورد نظر می‌باشد .

- اگر بار به صورت سینوسی تغییر کند و همچنین ولتاژ هم به صورت سینوسی باشد (خطوط انتقال انرژی ac) در این صورت رابطه‌ی I هنوز کاربرد داشته مشروط بر آن که با بار (کولمب در هر متر) و ولتاژ به صورت فازور (Phasor) برخورد شود.

لذا همین رابطه برای مقادیر لحظه‌ای و همچنین مقادیر سینوسی که بارها و ولتاژها به صورت فازور می‌باشند معتبر خواهد بود.

محاسبه‌ی کاپاسیتانس (ظرفیت خازنی) سیستم تک‌فاز:

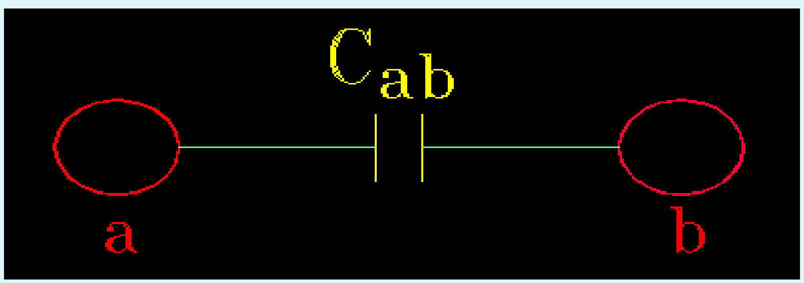
اگر سیستم تک‌فاز دو سیمه مطابق شکل روبرو را در نظر بگیرید که توسط منبع ac تغذیه می گیرد . در سیستم بر روی سیم ها بارهای متضاد سینوسی قرار می‌گیرد. q_a, q_b که $q_a = -q_b$ است با در نظر گرفتن فرض بی‌اژ بودن اثر زمین و همچنین بزرگ فرض شود و فاصله هادی‌ها از زمین بسیار زیاد است .

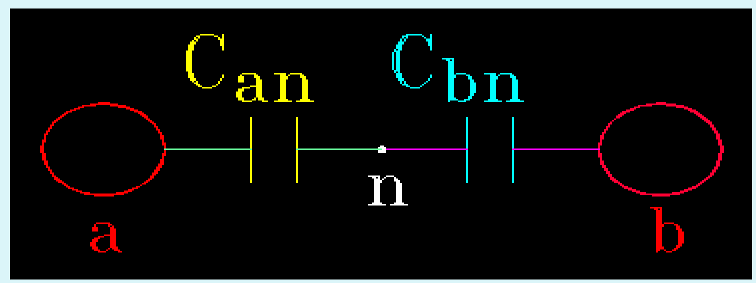


$$V_{ab} = \frac{1}{2\pi\mathcal{E}_0}\left(q_a \ln\frac{D_{ab}}{D_{aa}} + q_b \ln\frac{D_{bb}}{D_{ba}}\right) = \frac{1}{2\pi\mathcal{E}_0}(q_a \ln\frac{D}{r_a} + q_a \ln\frac{D}{r_b})$$

$$\Longrightarrow V_{ab} = \frac{q}{2\pi\mathcal{E}_0} \ln\frac{D^2}{r_a r_b} = \frac{q}{2\pi\mathcal{E}_0} \ln(\frac{D}{\sqrt{r_a r_b}})^2 \;, \quad CV = Q$$

$$\Longrightarrow C_{ab}\frac{q_a}{V_{ab}} = \frac{q_a}{\frac{q}{2\pi\mathcal{E}_0}\ln(\frac{D}{\sqrt{r_a r_b}})^2} = \frac{\pi\mathcal{E}_0}{\ln\frac{D}{\sqrt{r_a r_b}}} \Rightarrow C_{ab} = \frac{\pi\mathcal{E}_0}{\ln\frac{D}{\sqrt{r_a r_b}}} \; [F/m]$$





$$C_{an} = C_{bn} = 2\,C_{ab} = C_n$$

$$C_n = C_{an} = C_{bn} = \frac{2\pi\mathcal{E}_0}{\mathrm{Ln}\frac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{r_a r_b}}}}[F/m] \;, \Rightarrow \mathrm{r_a} = \mathrm{r_b}$$

$$\Rightarrow C_{an} = C_{bn} = \frac{2\pi\mathcal{E}_0}{\mathrm{Ln}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{r}}}[F/m]$$

$$\mathrm{Ln} = 2.3Log \quad \Rightarrow \mathcal{E}_0 = 8.85 * \; 10^{-12}, \pi = \; 3.1415$$

$$\Longrightarrow C_{an} = \frac{2 * \pi * 8.85 * \; 10^{-12}}{2.3 \; Log\frac{D}{r}} * 10^{+6} \; * \; 10^{+3}$$

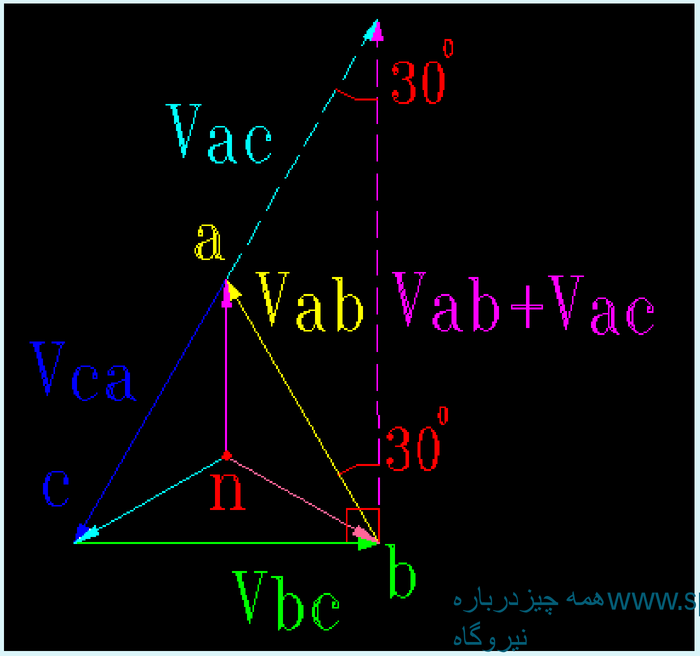
$$\Rightarrow C_{an} = \frac{0.0242}{Log\frac{D}{r}} \; [Mf/Km]$$

فرقی نمی‌کند اگر C_{an} به دست آمده در 2.3 ضرب شود فرمول به صورت Ln تبدیل می‌شود .

$$I_c = j\omega c_{ab} \, V_{\mathrm{ab}} \;\; A/Km$$

توجه کنید که رابطه‌ی به دست آمده در فرض توزیع بار در سطح هادی به صورت یکنواخت است ولی این فرضیه کاملا صحیح نمی‌باشد ولی با یک تقریب خوبی قابل قبول است که همچنین در این رابطه سیم ها استوانه‌ای هستند (مقطع دایره‌ای شکل) اما در عمل سیم ها رشته‌ای (طنابی) هستند ، اما باز هم خطای محاسبات ناچیز است .

کاپاسیتانس خطوط انتقال انرژی سه‌فاز با فواصل مساوی فازها از هم :



$$q_a + q_b + q_c = 0$$

$$V_a + V_b + V_c = 0$$

$$V_{ab} + V_{ac} = 2\sqrt{3}\,Cos(30)V_{an}$$

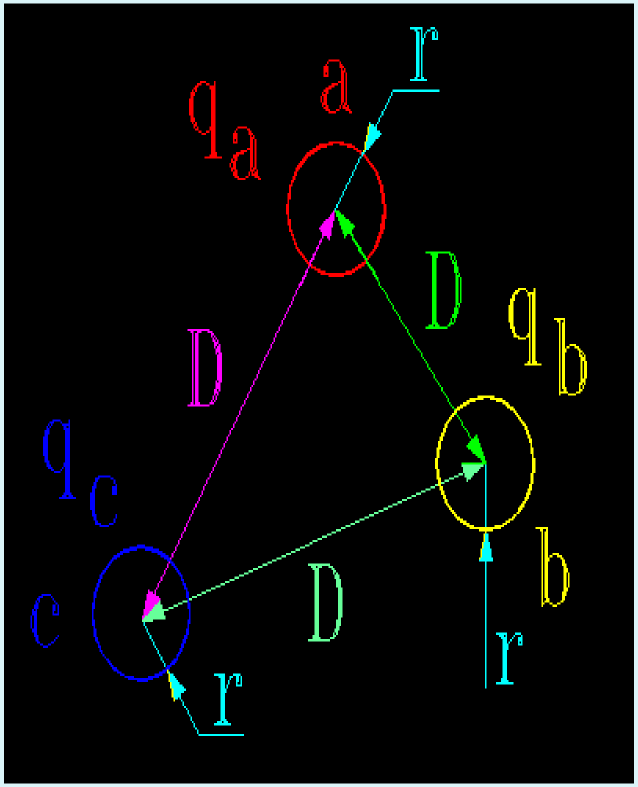
$$V_{ab} + V_{ac} = 3\,V_{an} \quad , \quad \mathrm{r_a} = \mathrm{r_b} = \mathrm{r_c} = r$$

$$V_{ab} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(q_a \mathrm{Ln}\frac{D_{ab}}{D_{aa}} + q_b \mathrm{Ln}\frac{D_{bb}}{D_{ba}} + q_c \mathrm{Ln}\frac{D_{cb}}{D_{ca}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}(q_a \mathrm{Ln}\frac{D}{r} + q_b \mathrm{Ln}\frac{r}{D})$$

$$V_{ac} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(q_a \mathrm{Ln}\frac{D_{ac}}{D_{aa}} + q_b \mathrm{Ln}\frac{D_{bc}}{D_{ba}} + q_c \mathrm{Ln}\frac{D_{cc}}{D_{ca}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}(q_a \mathrm{Ln}\frac{D}{r} + q_c \mathrm{Ln}\frac{r}{D})$$



$$3V_{an} = V_{ab} + V_{ac} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}(2q_a \mathrm{Ln}\frac{D}{r} + q_b \mathrm{Ln}\frac{r}{D} + q_c \mathrm{Ln}\frac{r}{D})$$

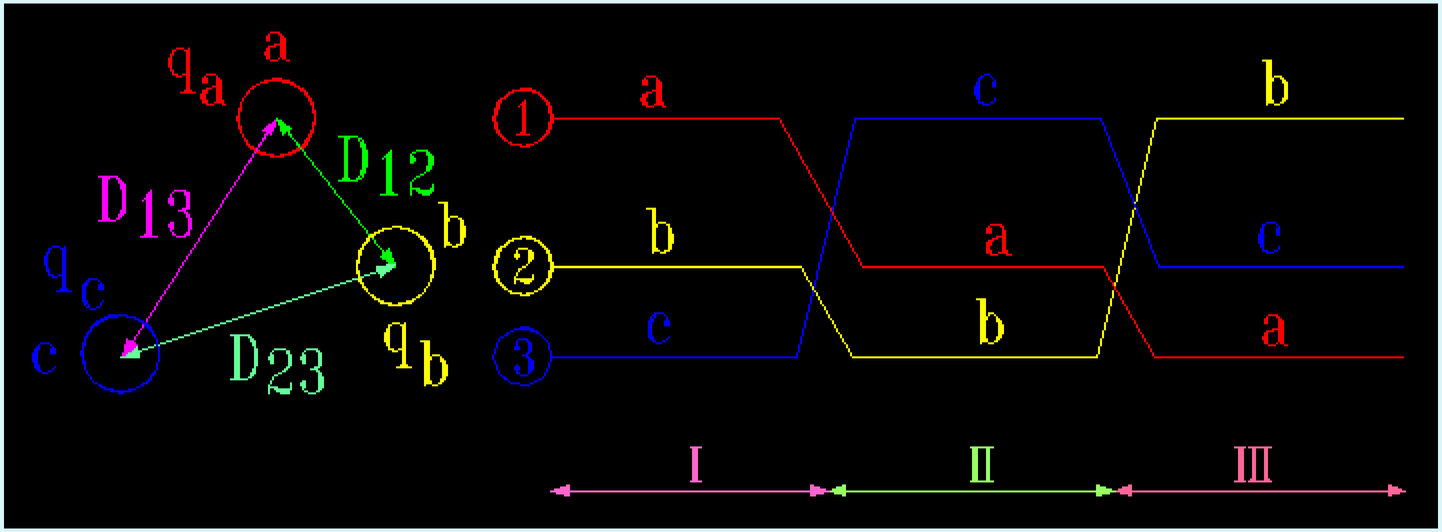
$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left[2q_a \mathrm{Ln}\frac{D}{r} + q_a \mathrm{Ln}\frac{D}{r}\right] = \frac{3q_a}{2\pi\varepsilon_0}\mathrm{Ln}\frac{D}{r} \Rightarrow V_{an} = \frac{q_a\ \mathrm{Ln}\frac{D}{r}}{2\pi\varepsilon_0}\ [v/m]$$

$$C_{an} = \frac{\mathrm{q_a}}{V_{an}} = \frac{\mathrm{q_a}}{\frac{\mathrm{q_a}\ \mathrm{Ln}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{r}}}{2\pi\mathcal{E}_0}} = \frac{2\pi\mathcal{E}_0}{\mathrm{Ln}\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{D}}} \Longrightarrow C_{an} = \frac{0.0242}{Log\ D/r}\ [\mu f/Km]$$

$$I_a = \frac{V_{an}}{-jX_c} = \frac{V_{an}}{-j\frac{1}{\omega c_n}} = j\omega c_n V_{an}$$

- توجه کنید که فرمول به دست آمده برای ظرفیت خط سه‌فاز با فاصله هادی‌های مساوی یا فرمول ظرفیت در سیستم تک‌فاز یکی می‌باشد .

کاپاسیتانس خط انتقال انرژی سه‌فاز در سیستم ترانسپوز شده :



در حالتی که فاصله‌ی فازها نابرابرند یک متر از خط سه‌فاز بلند را که دارای سه هـادی اسـت ، داریم . شعاع هر یک از هادی‌ها r و فاصله‌ی آن‌ها مطابق شکل می‌باشد ، داریم:

$$q_a + q_b + q_c = 0$$

با جمع ولتاژ در هر سه زون و تقسیم بر سه آن‌ها در دو مرحله برای دو ولتاژ، ولتاژ با زمین به دست آمده و با توجه به رابطه‌ی $c = \frac{q}{v}$ ظرفیت نسبت به زمین به دست می‌آید.

$$(\mathrm{I})\quad V_{ab} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(q_a \mathrm{Ln}\frac{D_{ab}}{D_{aa}} + q_b \mathrm{Ln}\frac{D_{bb}}{D_{ba}} + q_c \mathrm{Ln}\frac{D_{cb}}{D_{ca}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}(q_a \mathrm{Ln}\frac{D_{12}}{r} + q_b \mathrm{Ln}\frac{r}{D_{21}} + q_c \mathrm{Ln}\frac{D_{23}}{D_{31}})$$

$$(II)\quad V_{ab} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(q_a \mathrm{Ln}\frac{D_{23}}{r} + q_b \mathrm{Ln}\frac{r}{D_{23}} + q_c \mathrm{Ln}\frac{D_{31}}{D_{12}}\right)$$

$$(III)\quad V_{ab} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(q_a \mathrm{Ln}\frac{D_{13}}{r} + q_b \mathrm{Ln}\frac{r}{D_{13}} + q_c \mathrm{Ln}\frac{D_{12}}{D_{23}}\right)$$

$$V_{ab} = (\underset{(\mathrm{I})}{V_{ab}} + \underset{(II)}{V_{ab}} + \underset{(III)}{V_{ab}})/3 = \frac{1}{6\pi\mathcal{E}_0}\left[q_a \mathrm{Ln}\left(\frac{\sqrt[3]{D_{12}D_{23}\,D_{13}}}{r}\right)^3 + q_b \mathrm{Ln}\left(\frac{r}{\sqrt[3]{D_{21}D_{23}\,D_{13}}}\right)^3 + 0\right]$$

$$\Longrightarrow V_{ab} = \frac{1}{2\pi\mathcal{E}_0}\left[q_a \mathrm{Ln}\frac{\mathrm{Deq}}{r} + q_b \mathrm{Ln}\frac{r}{\mathrm{Deq}}\right]$$

به همان طریق به دست آوردن V_{ab} و V_{ac} را نیز به دست آوریم که عبارت است از:

$$\Longrightarrow V_{ac} = \frac{1}{2\pi\mathcal{E}_0}\left[q_a \mathrm{Ln}\frac{\mathrm{Deq}}{r} + q_c \mathrm{Ln}\frac{r}{D_{eq}}\right], V_{an} = (V_{ab} + V_{ac})/3$$

$$3V_{an} = \frac{1}{2\pi\mathcal{E}_0}\left[2q_a \mathrm{Ln}\frac{\mathrm{Deq}}{r} + q_b \mathrm{Ln}\frac{r}{\mathrm{Deq}} + q_c \mathrm{Ln}\frac{r}{\mathrm{Deq}}\right] \quad , q_b + q_c = -q_a$$

$$V_{an} = \frac{1}{2\pi\mathcal{E}_0} \; q_a \mathrm{Ln}\frac{\mathrm{Deq}}{\mathrm{r}} \Rightarrow C_{an} = \frac{q_a}{V_{an}} = \frac{q_a}{\frac{1 q_a}{2\pi\mathcal{E}_0} \; \mathrm{Ln}\frac{\mathrm{Deq}}{\mathrm{r}}} = \frac{2\pi\mathcal{E}_0}{\mathrm{Ln}\frac{\mathrm{Deq}}{\mathrm{r}}}$$

$$C_{an} = \frac{0.0556}{ln\,\frac{\mathrm{Deq}}{\mathrm{r}}} \; [\mu f/Km/phase] \qquad , C_{an} = \frac{0.0242}{Log\,\frac{\mathrm{Deq}}{\mathrm{r}}} \; [\mu f/Km/phase]$$

$$I_a = \frac{V_{an}}{-jX_{c_n}} = \frac{V_{an}}{-j(1/\omega c_n)} = j\omega c_n\, V_{an}$$

اثر گروه‌بندی یا باندل کردن:

دراین مورد به جای r از معادل آن یعنی r^{b} استفاده می‌شود که برابر است با:

گروه‌بندی موجب تبدیل شعاع r به r^{b} است ، اگر d فاصله‌گذاری میان هادی‌های

فرعی یک گروه باشد ، شعاع معادل چنین حساب می‌شود :

1) باندل دوتایی :

$$r^b = \sqrt{r * d}$$

2) باندل سه‌تایی:

$$r^b = \sqrt[3]{r * d^2}$$

3) باندل چهارتایی:

$$r^b = 1.09\sqrt[4]{r * d^3}$$

-تأثیر خطوط دو مداره ترانسپوز شده در کاپاسیتانس سیستم سه‌فاز:

برای این مورد هم در رابطه‌ی روبرو به جای r از R استفاده می‌شود که داریم:

$$C_{an} = \frac{0.0556}{Ln\frac{Deq}{R}}$$

$$3 = \sqrt[3]{r_A r_B r_C}$$

$$r_A = \sqrt{rd_{11'}} \ , \quad r_B = \sqrt{rd_{22'}} \ , \quad r_C = \sqrt{rd_{33'}}$$

سیستم سه فاز با باندل و دو مداره و تأثیر آن بر کاپاسیتانس :

در این حالت چنین می‌شود :

$$r_A = \sqrt{r^b d_{11'}}\ , \qquad r_B = \sqrt{r^b d_{22'}}\ , \qquad r_C = \sqrt{r^b d_{33'}}$$

$$R = \sqrt[3]{r_A r_B r_C} \qquad , \qquad C_{an} = \frac{0.0556}{\mathrm{Ln}\dfrac{Deq}{R}}$$

فصل سوّم

مدل‌های الکتریکی خطوط انتقال انرژی و محاسبات مربوطه

مقدمه

معمولا بار خطوط انتقال سه‌فاز متعادل بوده و برای تحلیل اینگونه خطوط کافی است ازمدار معادل تک‌فاز استفاده شود.جهت بررسی وتحلیل مدارهای معادل از تئوری مدارهای 4 قطبی کمک می‌گیریم و همان‌طور که می‌دانیم ولتاژ وجریان در ابتدا و انتهای شبکه 4 قطبی از رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix}$$

و می‌دانیم همواره:

AD-BC=1

*از این به بعد کمیت‌هایی که با اندیس S نشان داده می‌شوند مربوط به مقادیر ابتدای خط بوده و کمیت‌های با اندیس R مبین مقادیر انتهای خط می‌باشد.

*جهت بررسی خطوط انتقال انرژی آن‌ها را از نظر طول تقسیم‌بندی می کنند:

1 - خطوط انتقال انرژی کوتاه (short line) که تا 80km(50mile)

2 - خطوط انتقال انرژی متوسط (Medium Line) از 80km تا 240km یا 50mile تا 150mile

3 - خطوط انتقال انرژی بلند(Long Line) از240km به بالا یا از 150mile به بالا

لازم به ذکر است که بعضا خطوط کوتاه را تا 100km و خطوط متوسط را از 100 تا 300 کیلومتر و خطوط بلند را بیشتر از 300km هم نظر می گیرند که در این صورت حتما باید نوع خط مشخص شود مثلا اگر بگویید 90km ما آن را جزو خطوط متوسط در نظر می گیریم ولی اگر بگویند 90km کوتاه ما آن را برای خطوط کوتاه در نظر می گیریم (1mile=1.6km)

برای تحلیل و بررسی هر یک از این خطوط باید ضرایب ABCD فوق‌الذکر شوند.

ضرایب ABCD به پارامترهای خطوط از قبیل اندوکتانس،کاپاسیتانس، مقاومت و کندوکتانس بستگی دارد. دراین فصل از کندوکتانس ناچیز خطوط ناشی از نشست مقره‌ها چشم‌پوشی می کنیم.

کل امپدانس سری در هر فاز Z=zl

امپدانس سری هر فاز (واحد طول) =z

کل ادمتیاس موازی در هر فاز Y=yl

ادمیتانس موازی هر فاز (واحد طول) =y

اندیس مبیّن کمیت‌های ابتدای خط (سر خط)=S

طول خط انتقال انرژی =l

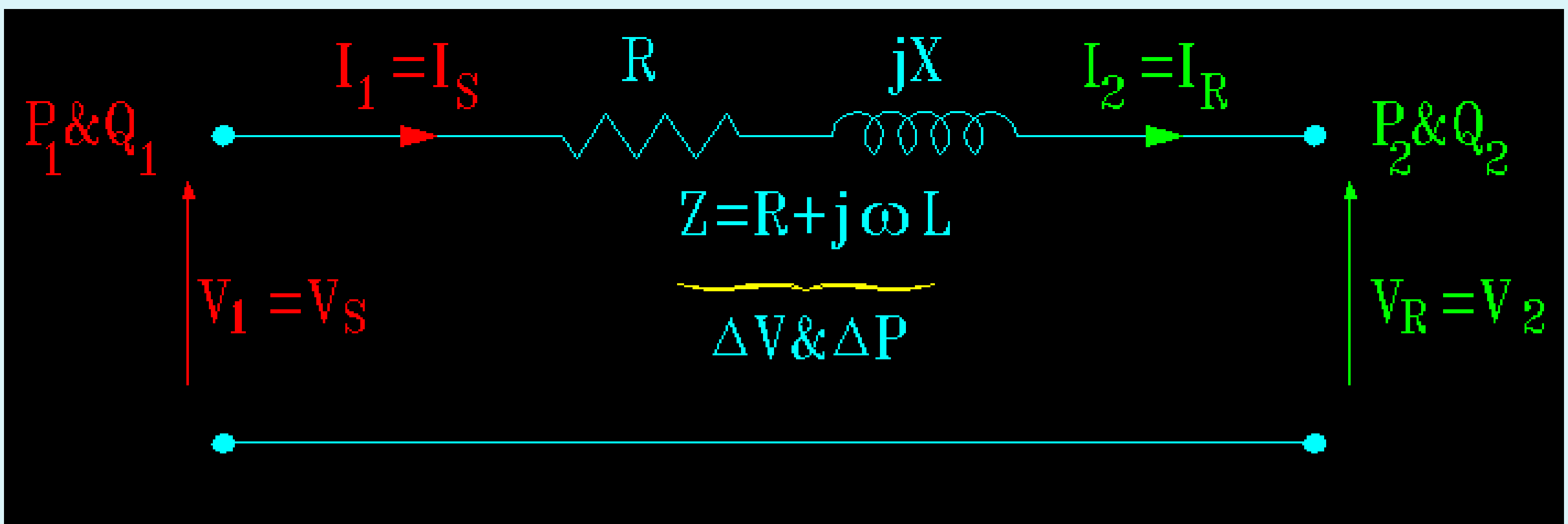
اندوکتانس واحد طول=L

اندیس مبین کمیت‌های انتهای خط (ته خط) =R

خطوط انتقال انرژی کوتاه:

اگر طول خط کمتر از 80km(50mile) باشد یا ولتاژ بیشتر از 69Kv نباشد،اغلب می‌توان از طریق ظرفیت خازنی خط (ادمیتانس موازی (Yp))در فرکانس 50Hz بدون ایجاد خطای زیاد چشم‌پوشی کرد. امپدانس سری در مدل خط کوتاه از حاصل‌ضرب طول خط و امپدانس سری در واحد طول به دست می‌آید.

$$Z = (r + jwl)l = R + jX$$

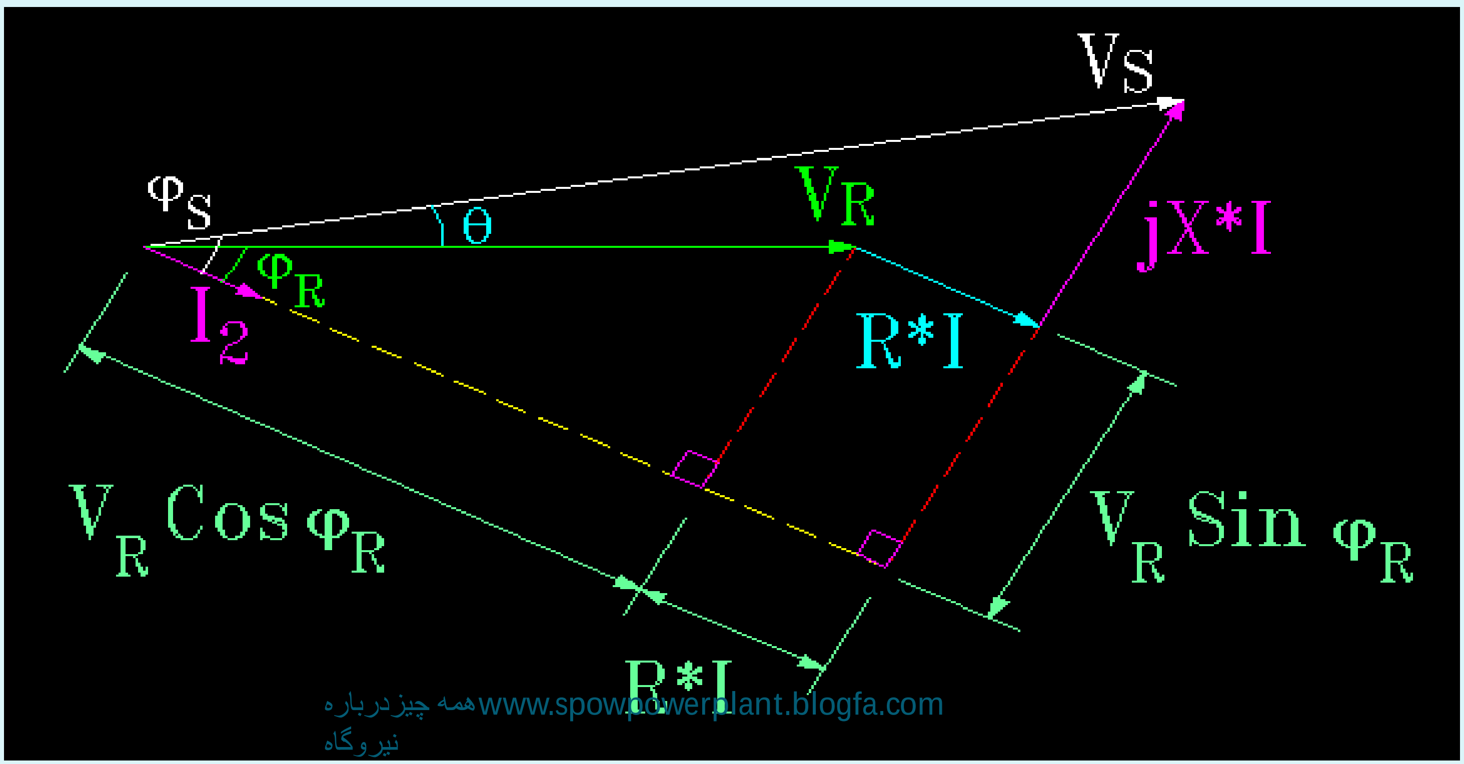


مدل خط کوتاه را مشاهده می‌کنید برای این مدل می‌توان روابط و نمودار فازور را رسم کرد:

$$I_1 = I_2 = I_3 \qquad V_1 = V_2 + \Delta V = V_2(R + jX)I = V_2 + RI + jXI$$

$$P_1 = V_1 I_1 Cos\,\varphi_1 \qquad Q_2 = V_2 I_2 Sin\varphi_1$$

$$Q_1 = V_1 I_1 Sin\,\varphi_1 \qquad P_2 = V_2 I_2 Cos\varphi_2$$



$$|V_s| = [((|V_R|\ Cos\varphi_R)(RI))^2 + ((|V_R|\ Sin\varphi_R)(IX))^2]^{1/2}$$

$$P_R = V_R\, I_R\, Cos\varphi_R \Rightarrow V_R\, Cos\varphi_R = \frac{P_R}{I_R},\ V_R\, Sin\varphi_R = \frac{Q_R}{I_R},\ |V_s| = V_1$$

$$\rightarrow V_1 - \left[\left(\frac{P_2}{I_2} + RI_2\right)^2 + \left(\frac{Q_2}{I_2} + XI_2\right)^2\right]^{1/2}$$

بعد از خلاصه کردن خواهیم داشت:

$$V_1 = V_{2+}\frac{RP_2 + XQ_2}{V_2} + j\frac{(XP_2 - RI_2)}{V_2} \Rightarrow \Delta V = V_p + V_q$$

اگر مقاومت اهمی خط را خیلی کوچکتر از راکتانس خط در نظر بگیریم(R<<x)،می‌توان نوشت:

$$\Delta V = \frac{RP_2 + XQ_2}{V_2} \simeq \frac{XQ_2}{V_2} \Rightarrow \Delta V = \frac{XQ_2}{V_2} \qquad \Rightarrow \Delta V \alpha Q_2$$

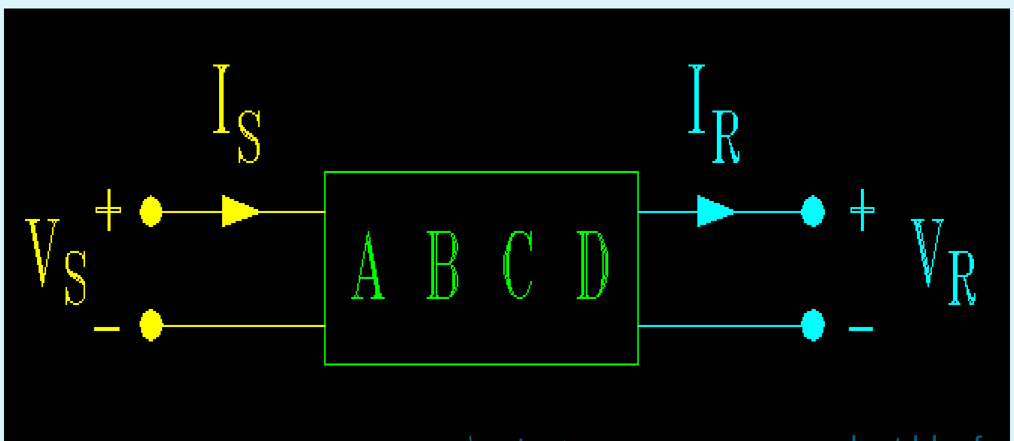
کنترل ولتاژ در سیستم‌های قدرت تابع قدرت راکتیو (Q)است و کنترل فرکانس تابع توان اکتیو(P)است.

$\Delta Q = 3XI^2$ سه فاز $\qquad$ $\Delta P = 3RI^2$ سه فاز

همان‌طوری که قبلا هم اشاره شد، خط انتقال ممکن است با یک شبکه‌ی دوقطبی مطابق شکل زیر نشان

داده شود و روابط بالا را می‌توان بر حسب ثابت‌های عمومی مدار *(Generalized Constants)* که

معمولا ثابت‌های *ABCD* نامیده می‌شوند،بدست آورد.



$$V_s = AV_R + BI_R$$

$$I_s = CV_R + DI_R$$

و یا به صورت ماتریسی خواهیم نوشت:

$$\begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix}$$

که برای مدل خط کوتاه خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} A = 1 & B = Z \\ C = 0 & D = 1 \end{matrix}$$

جهت تنظیم ولتاژ خطوط انتقال انرژی خواهیم داشت:

$$\text{درصد تنظیم ولتاژ} = \frac{|V_{RO}| - |V_{RL}|}{|V_{RL}|} * 100$$

ولتاژ انتهای خط محصول حالت بی‌باری: $|V_{RO}|$

ولتاژ انتهای خط در بار کامل تحت ضریب توان معین: $|V_{RL}|$

در خطوط کوتاه داریم:

$$|V_{Ro}| = |V_s| \text{ و } |V_{RL}| = |V_R|$$

$$\Rightarrow \text{درصد تنظیم ولتاژ} = \frac{|V_s| - |V_R|}{|V_R|} = \frac{|I|R\, Cos\, \varphi_R - |I|X\, Sin\, \varphi_R}{|V_R|} * 100 = \frac{RP_2 + XQ_2}{|V_R|}$$

در رابطه‌ی بالا می‌توان گفت که :

1 - اگر جریان نسبت به ولتاژ تأخیر داشته باشد (پس فاز) مثبت است.

2 - واگر جریان نسبت به ولتاژ تقدم فاز اشته باشد (پیش فاز) منفی خواهد شد. و رابطه‌ی تنظیم ولتاژ برای این حالت مطابق زیر حساب می‌شود:

$$\text{درصد تنظیم ولتاژ} = \frac{|I|R\, Cos\, \varphi_R - |I|X\, Sin\, \varphi_R}{|V_R|} * 100$$

هر گاه در رابطه‌ی بالا شرط زیر برقرار باشد تنظیم ولتاژ منفی خواهد بود.

$$X\,Sin\varphi_R > R\,Sin\varphi_R \qquad \text{یا} \quad \tan\varphi_R > \frac{R}{X}$$

و باز با توجه به همین رابطه‌ی تنظیم ولتاژ با منفی، اگر شرط زیر برقرار باشد تنظیم ولتاژ صفر می‌شود.

یعنی:

θ: زاویه‌ی امپدانس خط انتقال به شمار می‌رود.

$$\tan\varphi_R = \frac{R}{X} = Cot\theta \implies \qquad \text{پیش فاز} = \varphi_R = \frac{\pi}{2} - \theta$$

پس نتیجه می گیریم که:

1 - تنظیم ولتاژ به ضریب توان بستگی دارد و در ضریب توان‌های گوناگون تغییر خواهد کرد.

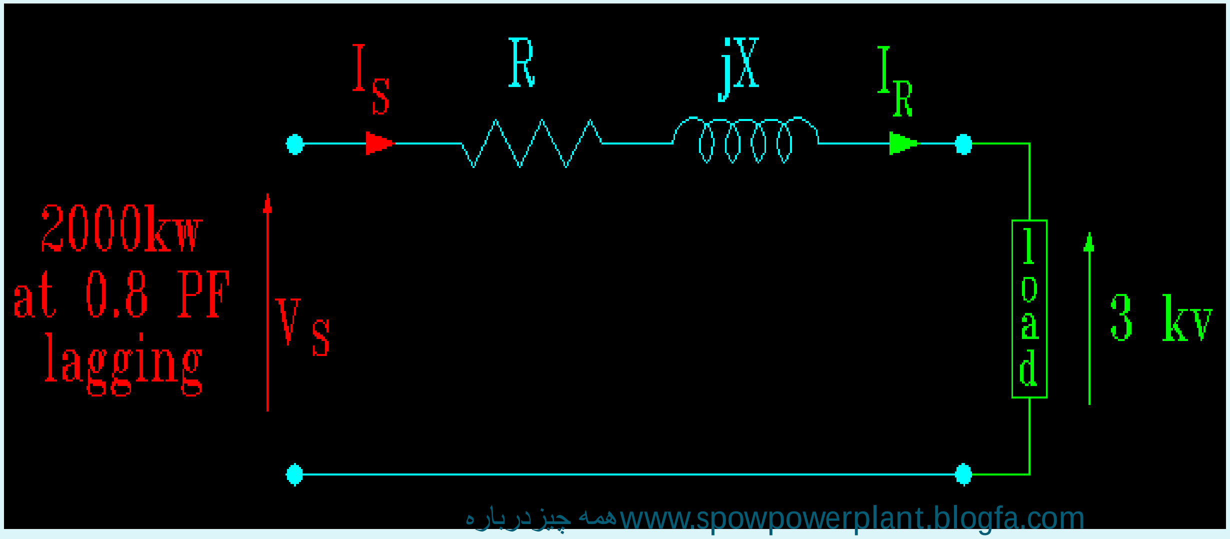
2 - بهبود تنظیم ولتاژ (کاهش تنظیم ولتاژ) با افزایش ضریب توان در حالت (پس فاز) شروع شده در وضعیت پیش‌فاز به صفر می‌رسد.

تمرین8: یک خط انتقال انرژی مطابق شکل زیر مفروض است (خط کوتاه)در ابتدای خط مقادیر مربوطه به شرح زیر است:

توان: 2000Kw

ضریب توان = 0.8پس فاز

امپدانس سری خط $0.4+j0.4$ اهم می‌باشد.



اگر ولتاژ انتهای خط 3Kv باشد.مطلوب است:

1 - بار متصل شده به انتهای خط ؟

2 - ضریب توان در انتهای خط؟

3 - ولتاژ ابتدای خط؟

با توجه به دو رابطه‌ی رو به رو به سهولت می‌توان دریافت که:

$$P_s = \Delta P_L + P_R \,, Q_s = \Delta Q_L + Q_R$$

$$(I) \quad |V_s|\ |I|\ Cos\varphi_s = |V_R|\ |I|\ Cos\varphi_R + |I|^2 R$$

$$(II) \quad |V_s|\ |I|\ Sin\varphi_s = |V_R|\ |I|\ Sin\varphi_R + |I|^2 X$$

$$(I\ I\ I) \quad |V_s|^2\ |I|^2 - |V_R|^2\ |I|^2 + 2|V_R|\ |I|^2\ (|I|R\ Cos\varphi_R + |I|X\ Sin\varphi_R) + |I|^4(R^2 + X^2)$$

حال اعداد مسئله را جایگزین می‌کنیم:

$$R^2 + X^2 = 0.32$$

$$|V_s|\,|I| = \frac{2000 * 10^3}{0.8} = 2500 * 10^3$$

$$|V_s|\,|I|\,Sin\varphi_s = 2500 * 10^3 * 0.6 = 1500 * 10^3$$

$$|V_s|\,|I|\,Cos\varphi_s = 2500 * 10^3$$

از روابط (I) و (II) داریم:

$$|I|\,Cos\varphi_R = \frac{2000 * 10^3 - 0.4|I|^2}{3000} \, (IV)$$

$$|I|\,Sin\varphi_R = \frac{1500 * 10^3 - 0.4|I|^2}{3000} \, (V)$$

تمامی مقادیر را در رابطه‌ی *(III)* جایگزین می کنیم.

$$(2500 * 10^3)^2 = 3000^2\ |\mathrm{I}|^2 + 2 * 3000 * |I|^2 \left[0.4 * \frac{2000 * 10^3 - 0.4|I|^2}{3000} + 0.4 * \frac{1500 * 10^3 - 0.4|I|^2}{3000} \right] + 0.32\ |I|^4$$

با ساده کردن رابطه‌ی اخیر داریم:

$$0.32\ |I|^4 - 11.8 * 10^6 |I|^2 + 6.25 * 10^{12} = 0 \qquad \Rightarrow |I| = 725(A)$$

با توجه به رابطه‌ی *V I* و مقدار $|I|$ داریم:

$$Cos\varphi_R = 0.82$$

لذا توان حقیقی (اکتیو) بار چنین حساب می‌شود:

$$P_R = |V_R||I|\,Cos\varphi_R = 3000 * 725 * 0.82 = 1790Kw$$

می‌دانیم که:

$$|V_s||I|Cos\varphi_R = 2000$$

پس:

$$|V_s| = \frac{2000}{725 * 0.8} = 3.44Kv$$

خطوط انتقال انرژی متوسط:

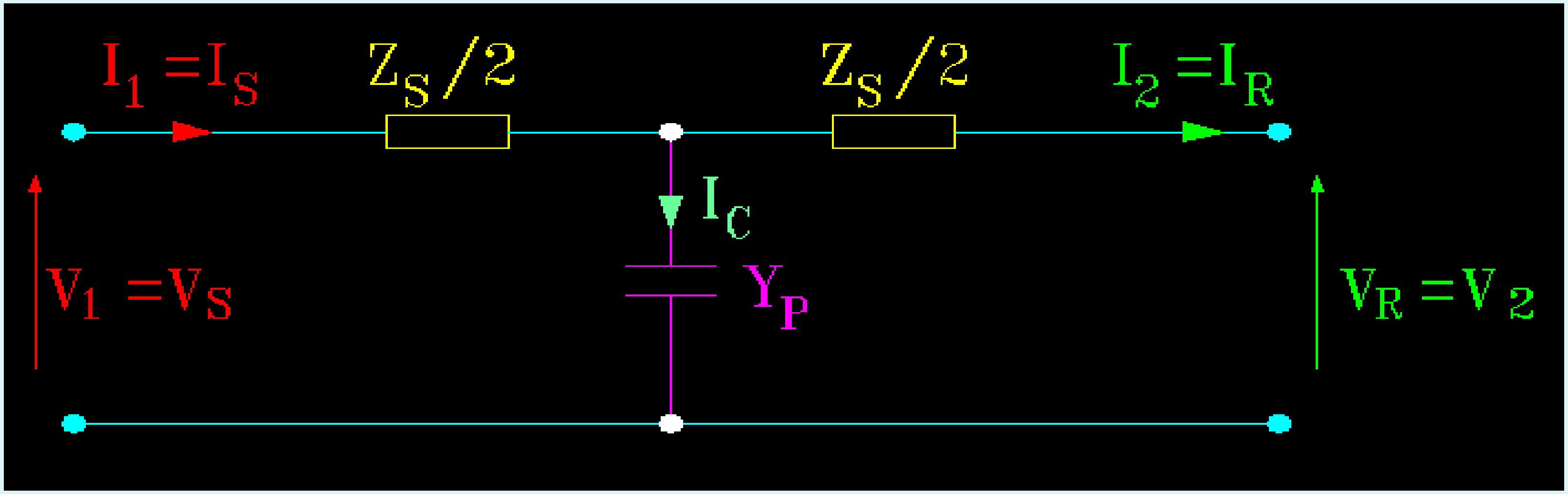
با افزایش طول خط جریان باردهی خط بیشتر شده و باید ظرفیت خازنی موازی را در نظر گرفت در این رابطه هم Z امپدانس سری کل خط بوده و همچنین Y ادمیتانس موازی کل خط است و از رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

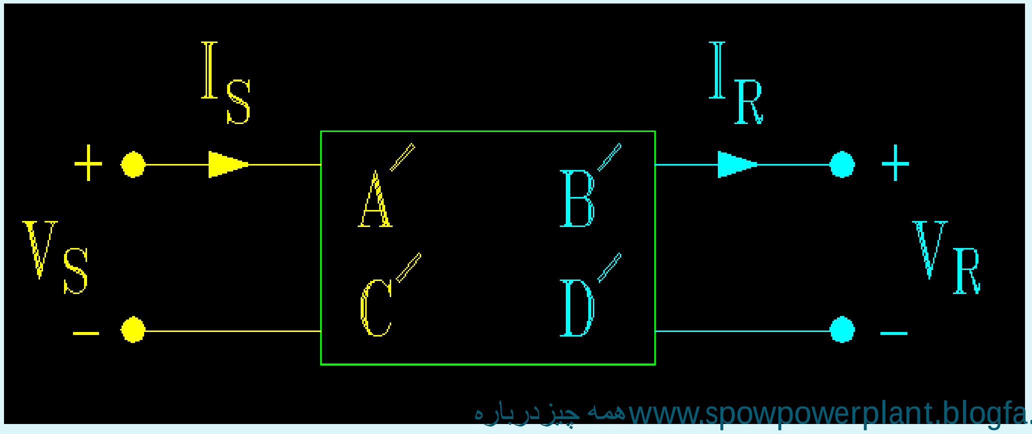
$$Y=(g+j\,\omega c)$$

در شرایط عادی رسانایی موازی در واحد طول که جریان نشتی مقره‌ها و ناشی از پدیده‌ی کرونا را نشان می‌دهد قابل چشم‌پوشی بوده و g برابر صفر فرض می‌شود.

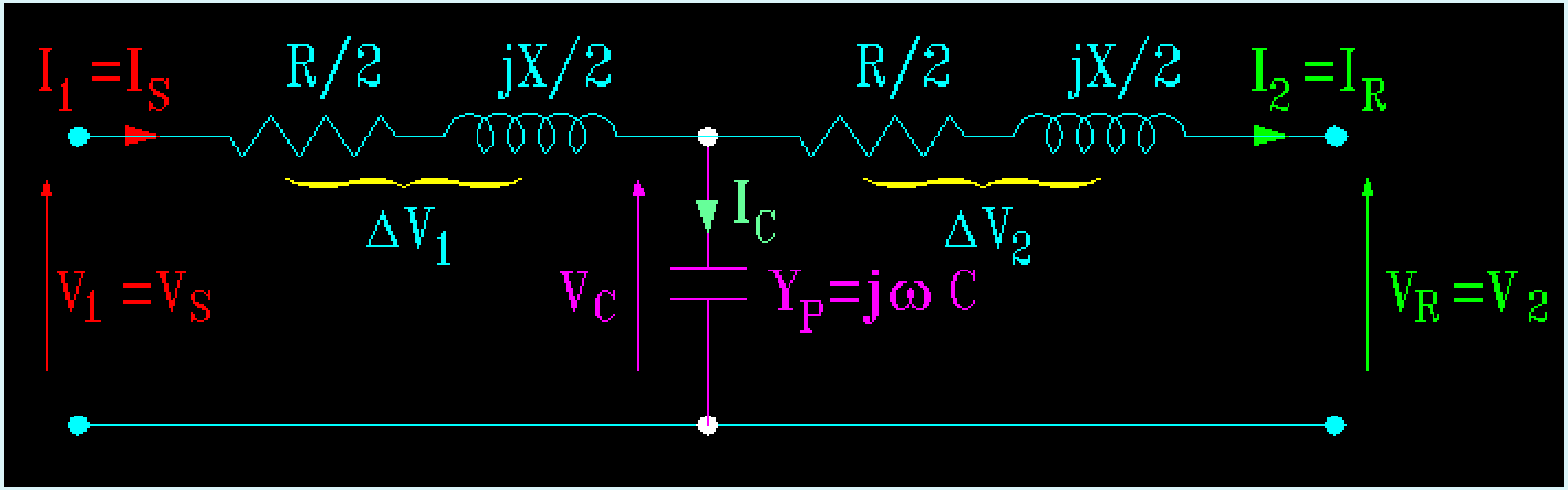
در این جا C ظرفیت خازنی نسبت به خنثی در هر کیلومتر و L طول خط انتقال می‌باشد.

مدل T:شکل خط در مدل T به صورت روبرو است و خواهیم داشت:





$$\begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} V_s = A'V_R + B'I_R \\ I_s = C'V_R + D'I_R \\ V_C = V_R + \frac{Z}{2} I_R \end{cases}$$

$$I_c = V_c\,Y = \left(V_R + \frac{Z}{2} I_R\right) jWC$$

$$I_c = V_R\,Y + \frac{ZY}{2} I_R$$

$$I_s = V_R\,Y + V_R + \frac{ZY}{2} I_R + I_R = V_R\,Y + I_R\left(1 + \frac{ZY}{2}\right) \quad (I)$$

عناصر طرف اول را بر حسب عناصر طرف دوم به دست می‌آوریم:

$$V_s = V_c + \frac{Z}{2} I_s = V_R + \frac{Z}{2} I_R + \frac{Z}{2}\left[V_R Y + I_R\left(\frac{ZY}{2} + 1\right)\right]$$

$$= V_R + \frac{Z}{2} I_R + V_R \frac{ZY}{2} + I_R \frac{ZY}{2} + \frac{Z^2 Y}{4} I_R$$

$$\Rightarrow V_s = V_R\left(1 + \frac{ZY}{2}\right) + I_R Z\left(1 + \frac{ZY}{4}\right) \quad (II)$$

از دو رابطه‌ی (I) و (II) داریم:

$$\begin{cases} A' = D' = 1 + \dfrac{ZY}{2} \ (\text{بدون واحد}) \\ B' = Z\left(1 + \dfrac{ZY}{4}\right) \ (\text{واحد اهم}) \\ C' = Y \ (\text{واحد موهو}) \end{cases},$$

$$\begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{ZY}{2} & Z\left(1 + \dfrac{ZY}{4}\right) \\ Y & 1 + \dfrac{ZY}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix}$$

حالت خاصی از ماتریس‌ها:

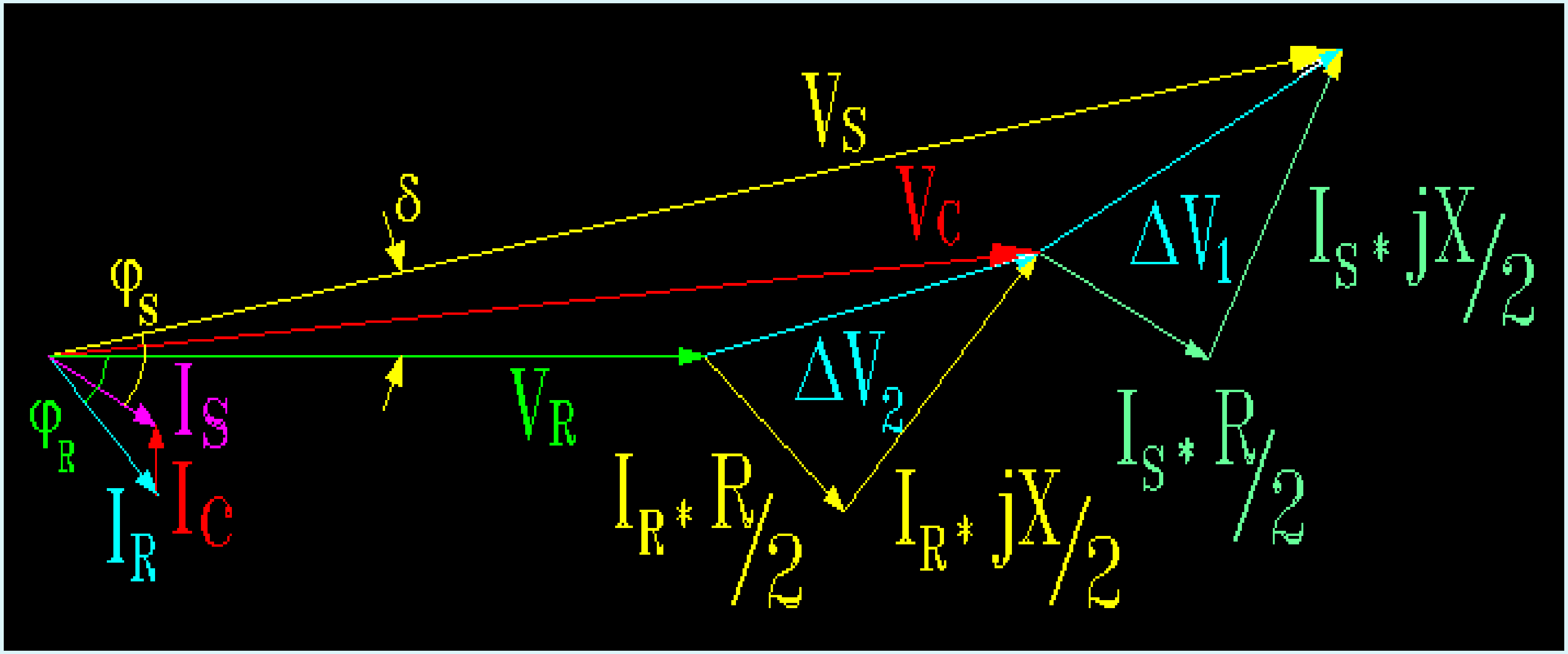
$$\begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \Longrightarrow A'D' - B'C' = 1$$

$$\left(1+\frac{ZY}{2}\right)\left(1+\frac{ZY}{2}\right)-\left(ZY\left(1+\frac{ZY}{4}\right)\right) = \left(1+\frac{ZY}{2}\right)^2 - ZY\left(1+\frac{ZY}{4}\right)$$

$$= 1^2 + \frac{2ZY}{2} + \frac{Z^2Y^2}{4} - ZY - \frac{Z^2Y^2}{4} = 1$$

حالا می‌توان کمیت‌های انتهایی را بر حسب کمیت‌های ابتدایی نوشت یعنی:

D'A'-C'B'=1, $\begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D' & -B' \\ -C' & A' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} V_R = D'V_s - B'I_s \\ I_R = -C'V_s + A'I_s \end{cases}$

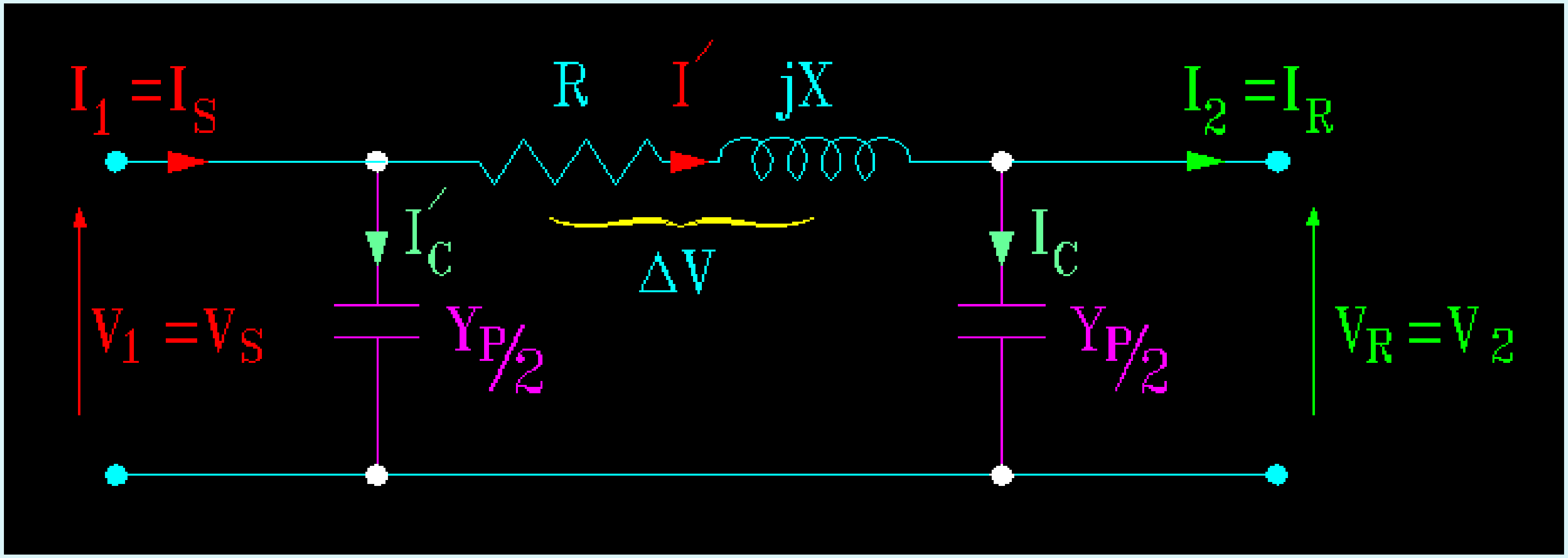


I_R برای خاصیت اندوکتیوی را در نظر می گیریم.

I_C جریان خازنی عمود بر ولتاژ خازن که به اندازه 90 درجه نسبت به ولتاژ پیش‌فاز است.

کسینوس زاویه بین V_S و I_s ضریب قدرت اولیه می‌باشد و $I_s = I_C + I_R$

مدل π :



$$I' = I_C + I_R = \frac{V_R\, Y_P}{2} + I_R \qquad I_C = \frac{V_R Y_P}{2}\ , \qquad V_s = V_R + ZI'$$

$$V_s = V_R + Z\left(\frac{V_R\, Y}{2} + I_R\right) = V_R + \frac{ZYV_R}{2} + ZI_R = V_R\left(1 + \frac{ZY}{2}\right) + (ZI_R)\ (I)$$

$$I_s = I' + I'_c = \frac{V_R Y}{2} + I_R + \frac{V_R Y_P}{2} = \frac{V_R Y}{2} + I_R + \frac{1}{2} Y V_R + V_R \frac{ZY^2}{4} + \frac{1}{2} ZY I_R$$

$$= \frac{V_R Y}{2} + I_R + \frac{1}{2} Y \left[V_R \left(1 + \frac{ZY}{2} \right) + Z I_R \right]$$

$$\Rightarrow I_s = V_2 Y \left(1 + \frac{ZY}{4} \right) + I_R \left(1 + \frac{ZY}{2} \right) \qquad (II)$$

با توجه به دو رابطه‌ی (I) و (II) داریم:

$$\begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{ZY}{2} & Z \\ Y \left(1 + \frac{ZY}{4} \right) & 1 + \frac{ZY}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix}$$

باز هم "A و "D فاقد واحدند و واحد "B اهم است و واحد "C هم موهو می‌باشد.

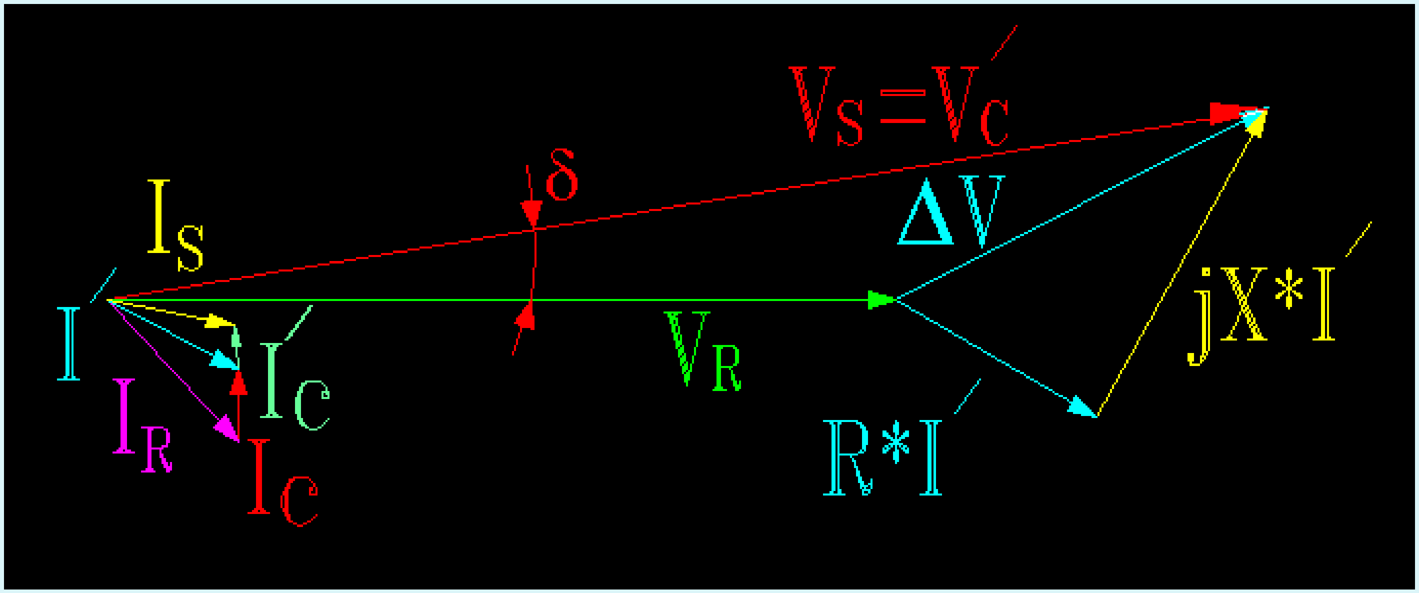
برای بدست آوردن از T و بالعکس فقط جای قطره‌ها را عوض کرده و جای Z و Y را عوض می کنیم.

$$\begin{cases} V_s = \text{A"}\ \text{V}_\text{R} + \text{B"}\ I_R \\ I_s = \text{C"}\ \text{V}_\text{R} + \text{D"}\ I_R \end{cases}$$

$$A'D'-B'C'=A''D''-B''C''=1$$

و باز هم مانند مدل T برای حالت خاص ماتریس خواهیم داشت.

$$\begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{D"} & -\text{B"} \\ -\text{C"} & \text{A"} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_R = \text{D"V}_\text{S} - \text{B"}\ I_S \\ I_R = -\text{C"}\ \text{V}_\text{S} + \text{A"}\ I_S \end{cases}$$



برای I_R خاصیت اندوکتیوی در نظر می‌گیریم.

δ عبارت است از زاویه‌ی بین V_R و V_S

I'_C نسبت به V_S یا V'_C 90 درجه پیش فاز است.

$$I_R + I_C = I' \quad \text{و} \quad I' + I'_C = I_S$$

I_C نسبت به V_R ، 90 درجه پیش‌فاز است.

$$S_S = P_S + JQ_S = \mathrm{V_S} \times I_S^*$$

$\mathrm{I_S}$ مزدوج $= I_S^*$

$$S_R = P_R + JQ_R = \mathrm{V_R} \times I_R^*$$

$\mathrm{I_R}$ مزدوج $= I_R^*$

$$\begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{D}' & -\mathrm{B}' \\ -\mathrm{C}' & \mathrm{A}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_R = \mathrm{D}'\mathrm{V_S} - \mathrm{B}'\, I_S \\ I_R = -\mathrm{C}'\, \mathrm{V_S} + \mathrm{A}'\, I_S \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{B}'\ \mathrm{I_S} = \mathrm{D}'\mathrm{V_S} - V_R \quad \Rightarrow I_s = \frac{\mathrm{D}'}{B'} \mathrm{V_S} - \frac{V_R}{B'}$$

β :بتا α :آلفا

Δ :دلتا γ :گاما

$$\begin{cases} A' = |A'| \angle^{\alpha} \\ B' = |B'| \angle^{\beta} \end{cases} , \qquad \begin{cases} C' = |C'| \angle^{\gamma} \\ D' = |D'| \angle^{\Delta} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} \Rightarrow V_s = A'V_R + B'\, I_R \quad \Rightarrow I_R = \frac{V_s}{B'} - \frac{A'}{B'} V_R$$

$$\Rightarrow I_S = \frac{|D'|}{|B'|} \times |V_S| \angle\, (\Delta - \beta + \gamma) - \frac{|V_R|}{B'} \angle(-B)$$

$$I_R = \frac{|V_s|}{|B'|} \angle(\Delta - \beta) - \frac{|A'|}{|B'|} |V_R| \angle(\propto - \beta)$$

$$S_R = V_R \times I_R^* = (V_R \angle 0) \left(\frac{|V_s|}{|B'|} \angle(\beta - \Delta) - \frac{|A'|}{|B'|} |V_R| \angle(\beta - \propto) \right)$$

$$\Rightarrow S_R = |V_R| \left(\frac{|V_s|}{|B'|} \right) \angle(\beta - \Delta) - \frac{|A'|}{|B'|} |V_R|^2 \angle(\beta - \propto)$$

$$S_R = \left(\frac{|V_R||V_S|}{|B'|}\right) Cos\,(\beta - \Delta) - \frac{|A'|}{|B'|}|V_R|^2 Cos\,(\beta - \propto) +$$

$$j\left(\frac{|V_R||V_S|}{|B'|} Sin\,(\beta - \Delta) - \frac{|A'|}{|B'|}|V_R|^2 Sin(\beta - \propto)\right)$$

$$P_S = \frac{|D'|}{|B'|}|V_S|^2 Cos\,(\beta - \Delta) - \frac{|V_s||V_R|}{|B'|} Cos(\beta + \Delta)$$

$$Q_S = \frac{|D'|}{|B'|}|V_S|^2 Sin\,(\beta - \Delta) - \frac{|V_s||V_R|}{|B'|} Sin(\beta + \Delta)$$

تمرین9: یک خط سه فاز به طول 100Km بار 40MVA را با ولتاژ 132Kv با ضریب قدرت 0.75 پس فاز تغذیه می کند. مقاومت هر فاز 10 اهم و راکتانس هم در هر فاز 40 اهم است و ادمیتانس $3 \times 10^{-4}\mho$ بر هر فاز می‌باشد. با هر دو روش حل کنید. کلیه‌ی مقادیر مجهول را ؟

تمرین10: یک خط انتقال انرژی سه فاز به طول 250کیلومتر مفروض است. در انتهای خط یک بار متعادل به مشخصات زیر مفروض است:

توان بار = 25 MVA

ضریب توان بار (پس فاز) = 0.8

ولتاژ بار (خط به خط) = 132 K

مشخصات خط به شرح ذیل است:

1 - فواصل فازها از همدیگر 3 متر است.

2 - مقاومت فازها 0.11 اهم در هر کیلومتر است.

3 - قطر مؤثر هادی‌ها 1.6سانتی‌متر می‌باشد.

با استفاده از مدل π نامی مطلوب است محاسبه‌ی: 1- ولتاژ ابتدای خط؟

2- تنظیم ولتاژ خط؟

$$L = 0.461\ Log\frac{D}{r'} = 0.461\ Log\frac{300}{0.7788 * 0.8} = 1.24\ {}^{mH}/_{Km}$$

$$C = \frac{0.0242}{log\frac{D}{r}} = \frac{0.0242}{log\frac{300}{0.8}} = 0.0094\ {}^{\mu F}/_{Km}$$

$$R = 0.11 * 250 = 27.5\Omega$$

$$X = 2\pi f l = 2\pi * 50 * 1.24 * 10^{-3} * 250 = 97.4\Omega$$

$$Z = (R + jX)l = 27.5 + j97.4 = 101.2\ \angle 74/2^\wedge\ \Omega$$

$$Y = j\omega c l = (314 * 0.0094 * 10^{-6} * 250)\angle 90^\wedge$$

$$= 7.38 * 10^{-4}\angle 90^\wedge\ \mho$$

$$I_R = \frac{25 * 1000}{\sqrt{3} * 132}\angle - 36.9 = 109.3\angle - 36.9^\wedge\ A$$

$$V_R\ (\text{هر فاز}) = \frac{132}{\sqrt{3}}\angle 0^\wedge = 76.2\ \angle 0^\wedge$$

$$V_S = V_R\left(1+\frac{ZY}{2}\right)+ZI_R = 76.2\left(1+\frac{7.38\times 10^{-4}\angle 90\times 101.2\ \angle 74.2}{2}\right)$$

$$+101.2\ \angle 74.2\times(109.3\angle -36.9)\times 10^{-3}$$

$$= 82.6\angle\ 5.2^\wedge\ \ Kv$$

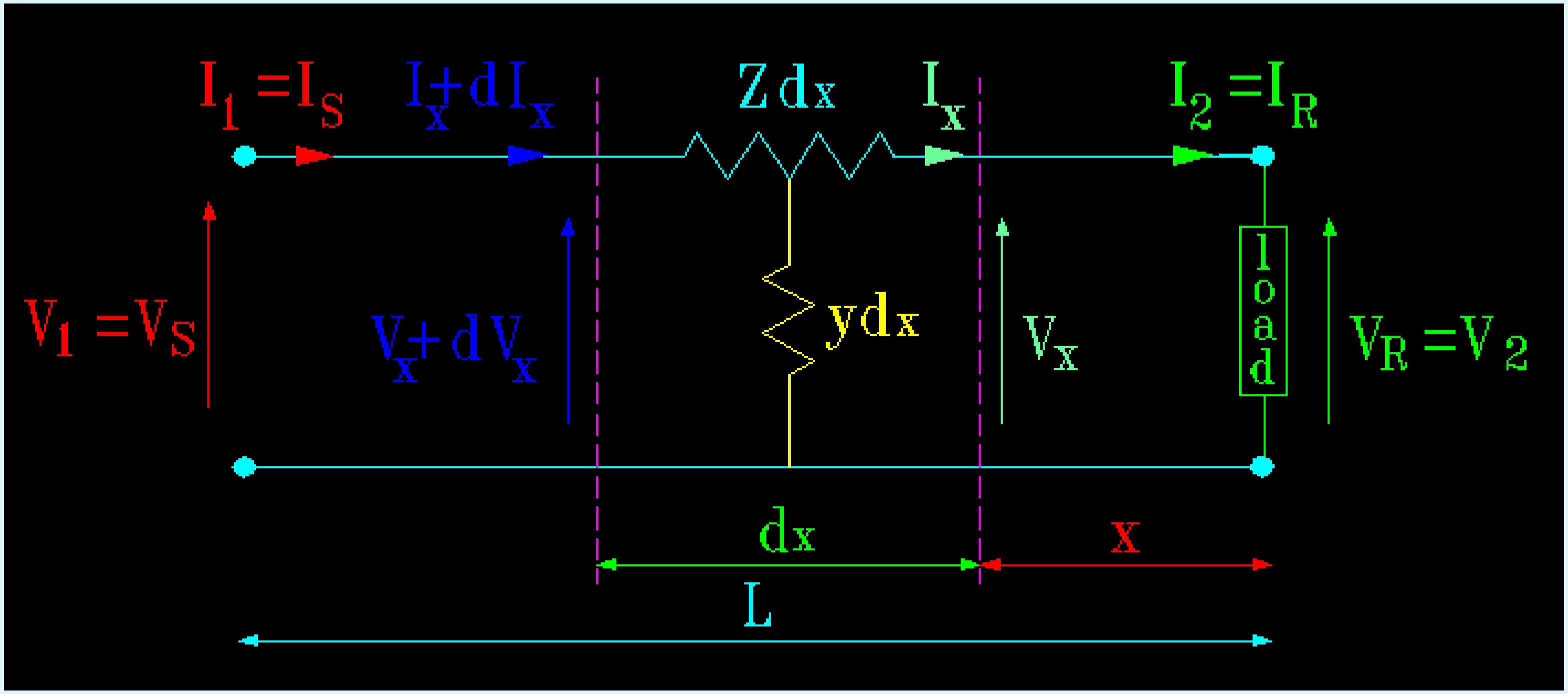
$$|V_S| \left(\text{خط به خط}\right) = 82.6 * \sqrt{3} = 143Kv$$

$$|V_{RO}| \left(\text{در حالت بی‌باری}\right) = \frac{143}{1 + \frac{ZY}{2}} = \frac{143}{0.964} = 148.3\,Kv$$

$$\text{درصد تنظیم ولتاژ} = \frac{148.3 - 132}{132} \times 100 = 12.3\%$$

خطوط انتقال انرژی بلند:

اگر خط جزو خطوط بلند محسوب شود دیگر نمی توان پارامتر های خط را بصورت فشرده و در یک نقطهٔ خاص متمرکز نمود و مدل سازی را بر این اساس انجام داد . بلکه برای جوابهای دقیق تر ، باید اثر کامل پارامتر های گسترده Distributed خطوط را در نظر گرفت . یعنی باید پارامتر ها به طور یکنواخت به صورت پخش شده در طول خط در نظر گرفت . در مدار معادل تک فاز یک خط انتقال انرژی سه فاز امپدانس سیم برگشت صفر در نظر گرفته شده است .) که در زیر مشاهده می کنید طول جزیی dx را بر روی خط مشخص می کنیم بنابراین خواهیم داشت:



امپدانس موازی طول جزیی dx	= Ydx
امپدانس سری طول جزیی dx	= Zdx
افت ولتاژ در طول dx	= dv_x

$m=\sqrt{zy}$ را ضریب انتشار خط گویند.

$$\left.\begin{aligned} dV_x &= I_x z dx \\ dI_x &= V_x y dx \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{dV_x}{dx} &= I_x y \\ \frac{dI_x}{dx} &= V_x y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{d^2V_x}{dx^2} &= \frac{Zd\,I_x}{d\,x} \\ \frac{d^2I_x}{dx^2} &= \frac{dV_x y}{d\,x} \end{aligned}\right\}$$

$$\overset{(I)}{\Rightarrow} \frac{d^2V_x}{dx^2} = ZV_x y \overset{(II)}{\Rightarrow} \frac{d^2I_x}{dx^2} = yI_X Z \Rightarrow \begin{cases} V_x = C_1e^{mx} + C_2e^{-mx} \\ I_x = C_3e^{mx} + C_4e^{-mx} \end{cases}$$

$$\frac{dV_x}{dx} = m\dot{C}_1e^{mx} - mC_2e^{-mx} = I_x Z = Z\left(C_3e^{mx} + C_4e^{-mx}\right) \Rightarrow$$

$$mC_1e^{mx} - mC_2e^{-mx} = ZC_3e^{mx} + ZC_4e^{-mx}$$

$$\Rightarrow C_3 = \frac{m}{z} C_1 \text{ و } C_4 = \frac{-m}{z} C_2$$

امپدانس مشخصهٔ خط: $Z_C = \sqrt{\frac{Z}{y}}$

$$I_x = \frac{m}{z} C_1 e^{mx} - \frac{m}{z} C_2 e^{-mx}$$

$$\Rightarrow I_x = \frac{\sqrt{z}\sqrt{y}}{\sqrt{z}\sqrt{z}} C_1 e^{mx} - \frac{\sqrt{z}\sqrt{y}}{\sqrt{z}\sqrt{z}} C_2 e^{-mx}$$

$$\Rightarrow I_x = \frac{C_1}{Z_C} e^{mx} - \frac{C_2}{Z_C} e^{-mx} \Rightarrow \begin{cases} V_x = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \\ I_x = \frac{C_1}{Z_C} e^{mx} - \frac{C_2}{Z_C} e^{-mx} \end{cases}$$

با اعمال شرایط حدّی در $x = 0$ (انتهای خط) خواهیم داشت :

$$\begin{cases} V_2 = V_x = C_1 + C_2 \\ I_2 = I_x = \dfrac{C_1}{Z_C} - \dfrac{C_2}{Z_C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{V_2 + Z_C I_2}{2} \\ C_2 = \dfrac{V_2 - Z_C I_2}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_x = \left(\dfrac{V_2 + Z_C I_2}{2} \right) e^{mx} + \left(\dfrac{V_2 - Z_C I_2}{2} \right) e^{-mx} \\ I_x = \left(\dfrac{V_2 + Z_C I_2}{2} \right) e^{mx} - \left(\dfrac{V_2 - Z_C I_2}{2} \right) e^{-mx} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_x = V_2 \left(\dfrac{e^{mx} + e^{-mx}}{2} \right) + I_2 Z_C \left(\dfrac{e^{mx} - e^{-mx}}{2} \right) \\ I_x = \dfrac{V_2}{Z_C} \left(\dfrac{e^{mx} - e^{-mx}}{2} \right) + I_2 \left(\dfrac{e^{mx} + e^{-mx}}{2} \right) \end{cases}$$

حال می توان از توابع هیپربولیک نیز استفاده کرد ودر $x = L$ خواهیم داشت :

$$\begin{cases} V_x = V_2 Cosh(mx) + I_2 Z_C Sinh(mx) \\ I_x = \dfrac{V_2}{Z_C} Sinh(mx) + I_2 Cosh(mx) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = D_1 = Cosh(mL) \\ B_1 = Z_C Sinh(mL) \\ C_1 = \dfrac{1}{Z_C} Sinh(mL) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = A_1 V_2 + B_1 I_2 \\ I_1 = C_1 V_2 + D_1 I_2 \end{cases}$$

جهت محاسبهٔ ضرایب A_1 ، B_1 ، C_1 روشهای مختلفی وجود دارند ، امّا یک روش ساده و در عین حال با تقریب خوب عبارتست از :

$$\begin{cases} Cosh(ml)=1+\dfrac{m^2l^2}{2!}+\dfrac{m^4l^4}{4!}+\ldots\approx 1+\dfrac{ZY}{2} \\ Sinh(ml)=ml+\dfrac{m^3l^3}{3!}+\dfrac{m^5l^5}{5!}+\ldots\approx ml(1+\dfrac{m^2l^2}{3!})=\sqrt{YZ}(1+\dfrac{YZ}{6}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1=1+\dfrac{ZY}{2} \\ B_1=Z_C Sinh(ml)=\sqrt{\dfrac{z}{y}}\sqrt{ZY}\left(1+\dfrac{ZY}{6}\right)\Rightarrow B_1=Z\left(1+\dfrac{ZY}{6}\right) \\ C_1=\dfrac{1}{Z_C}Sinh(ml)=\sqrt{\dfrac{y}{z}}\sqrt{Z}\sqrt{Y}\left(1+\dfrac{ZY}{6}\right)\Rightarrow C_1=Y\left(1+\dfrac{ZY}{6}\right) \end{cases}$$

تمرین11: یک خط انتقال انرژی به طول 300km با مشخصات زیر مفروض است ،ولتاژ انتهای خط 220kV بوده و بار 50MW را تحت ضریب توان 0.8 پس فاز تغذیه می کند . مطلوبست محاسبهٔ ولتاژ ، جریان ، توان و ضریب توان در ابتدای خط از رابطهٔ تقریبی ؟

$$Z = 40 + j125\ \Omega ,\ Y = 10^{-3}$$ موهو

$$Z = 40 + j125 = 131.2\angle 72.3^\circ\ \Omega$$

$$Y = 10^{-3}\angle 90^\circ$$

$$I_R = \frac{50}{\sqrt{3}\times 220\times 0.8}\angle -36.9^\circ = 0.164\angle -36.9^\circ\ kA$$

$$V_R = \frac{220\angle 0^\circ}{\sqrt{3}} = 127\angle 0^\circ\ kV$$

$$\begin{cases} A_1 = D_1 = 1+\dfrac{ZY}{2} = 1+\dfrac{(131.2\angle 72.3^\circ)(10^{-3}\angle 90^\circ)}{2} = 0.938\angle 1.2^\circ \\ B_1 = Z\left(1+\dfrac{ZY}{6}\right) = (131.2\angle 72.3^\circ)\left(1+\dfrac{(131.2\angle 72.3^\circ)(10^{-3}\angle 90^\circ)}{6}\right) \\ B_1 = 128.5\angle 72.7^\circ \\ C_1 = Y\left(1+\dfrac{ZY}{6}\right) = (10^{-3}\angle 90^\circ)\left(1+\dfrac{(131.2\angle 72.3^\circ)(10^{-3}\angle 90^\circ)}{6}\right) \\ C_1 = (10^{-3}\angle 90^\circ) \end{cases}$$

$$V_S = A_1 V_R + B_1 I_R = \left((0.938\angle 1.2^\circ)(127\angle 0^\circ)\right) +$$

$$\left((128.5\angle 72.7^\circ)(0.164\angle -36.9^\circ)\right)$$

$$\Rightarrow V_S = 137\angle 6.2^\circ kV \quad \Rightarrow \left|V_S\right|_{L-L} = 137\times\sqrt{3} = 237.3kV$$

$$I_s = C_1 V_R + D_1 I_R$$

$$= \left((0.001\angle 1.2^\circ)(127\angle 0^\circ)\right) + \left((0.938\angle 1.2^\circ)(0.164\angle -36.9^\circ)\right)$$

$$= 0.13\angle 16^\circ$$

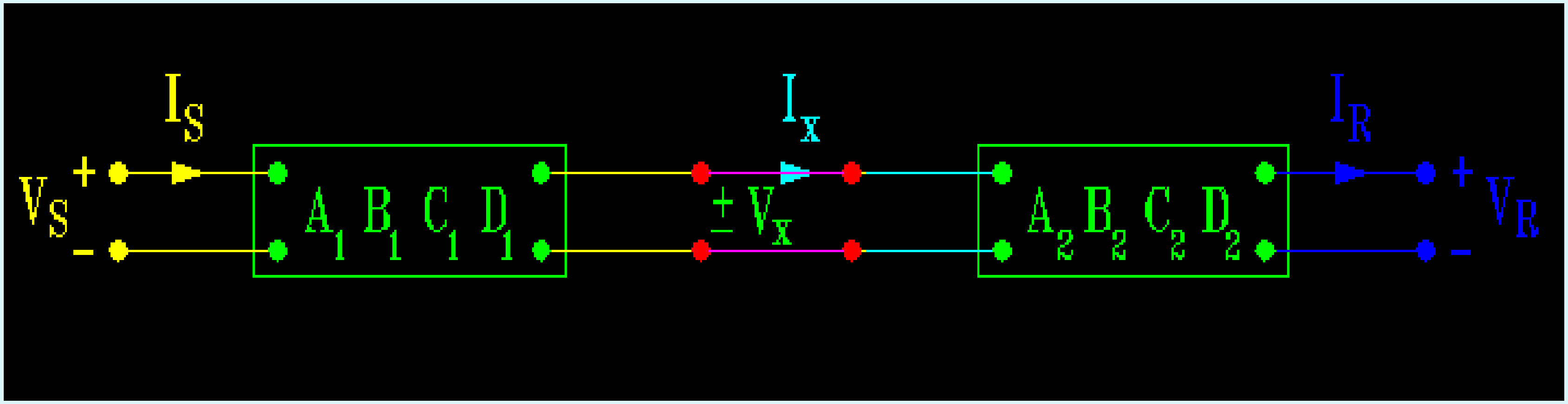
ضریب توان در ابتدای خط $= Cos\,(16.5^\circ - 6.2^\circ) = 0.984\ ^\circ$ پیش فاز

توان در ابتدای خط $P_s = \sqrt{3}\times 237.3\times 0.13\times 0.984 = 52.58\,MW$

تلفات توان $= P_S - P_R = 52.58 - 50 = 2.58\ MW$

ضرایب $ABCD$ در شبکه های سری و موازی :

الف) شبکه های سری:



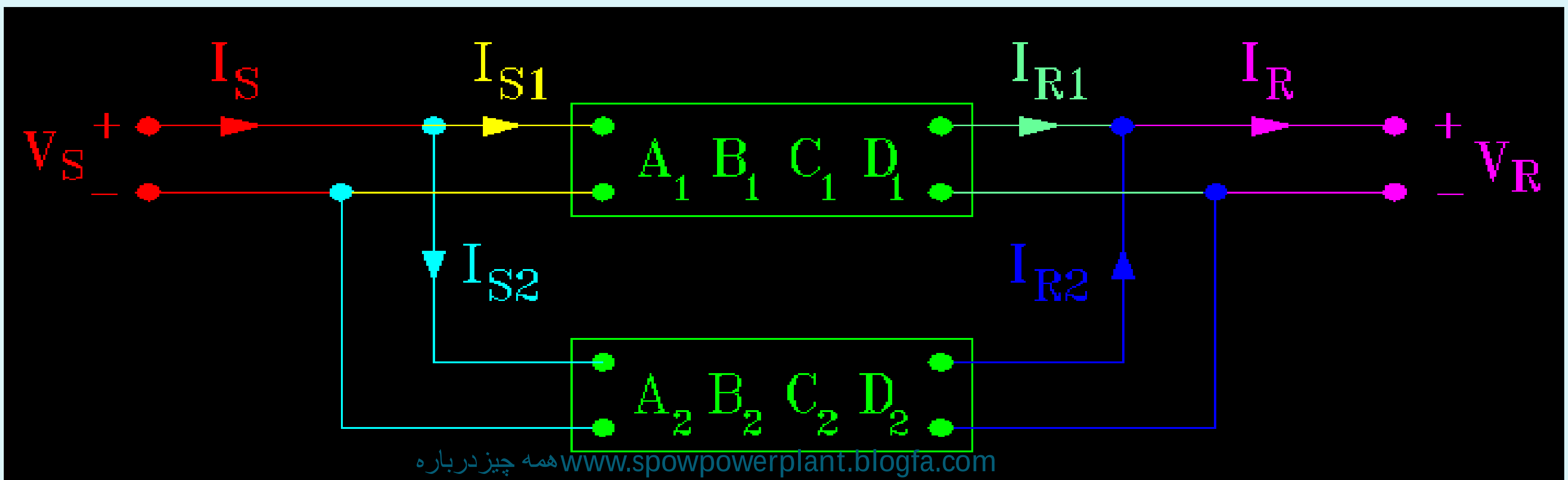
$$\begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_X \\ I_X \end{bmatrix} \quad \& \quad \begin{bmatrix} V_X \\ I_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 A_2 + B_1 C_2 & A_1 B_2 + B_1 D_2 \\ C_1 A_2 + D_1 C_2 & C_1 B_2 + D_1 D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = A_1 A_2 + B_1 C_2 \\ B = C_1 A_2 + D_1 C_2 \\ C = A_1 B_2 + B_1 D_2 \\ D = C_1 B_2 + D_1 D_2 \end{cases}$$

ب) شبکه های موازی:



$$A = \frac{A_1 B_2 + A_2 B_1}{B_1 + B_2}$$

$$B = \frac{B_1 B_2}{B_1 + B_2}$$

$$C = C_1 + C_2 + \frac{(A_1 - A_2)(D_1 - D_2)}{B_1 + B_2}$$

$$D = \frac{D_1 B_2 + D_2 B_1}{B_1 + B_2}$$

تمرین12: اگر $ABCD$ در یک خطی مشخص باشند ،(خط بلند) رابطه ای برای امپدانس

مشخصهٔ خط پیدا کنیدیا اینکه ثابت کنید $Z_C = \sqrt{\frac{B}{C}}$

$$\left.\begin{aligned} B &= Z_C \, Sinh(ml) \\ C &= \frac{1}{Z_C} Sinh(ml) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{B}{C} = \frac{Z_C}{\left(\frac{1}{Z_C}\right)} = Z_C^{\,2} \Rightarrow Z_C = \sqrt{\frac{B}{C}}$$

تمرین13:در یک خط بلند بی بار ثابت کنید ولتاژ انتهای خط از ولتاژ ابتدای خط بیشتر است ؟

$$\left.\begin{aligned} Cosh(jx) &= Cos(x) \\ Sinh(jx) &= Sin(x) \end{aligned}\right\} \& \; V_1 = Cosh(ml)\,V_2 + Z_C\,Sinh(ml)\;I_2$$

$$No\;\; Load \;\; \Rightarrow I_2 = 0$$

$$\Rightarrow V_1 = Cosh(ml)\,V_2 = Cos(ml)\,V_2 \Rightarrow V_1 \le V_2$$

V_1 کسری از V_2 خواهد بود .

تمرین14: رابطهٔ جریان و ولتاژ ابتدای خط بلندی را به دست آورید که بار امپدانس مشخصهٔ خط باشد ؟

$$\begin{cases} V_2 = V_1 Cosh(ml) - I_1 Z_C Sinh(ml) \\ I_2 = -\dfrac{V_1}{Z_C} Sinh(ml) + I_1 Cosh(ml) \end{cases}$$

[یا اگر $V_2 = Z_C I_2$ باشد ثابت کنید $V_1 = Z_C I_1$ است .]

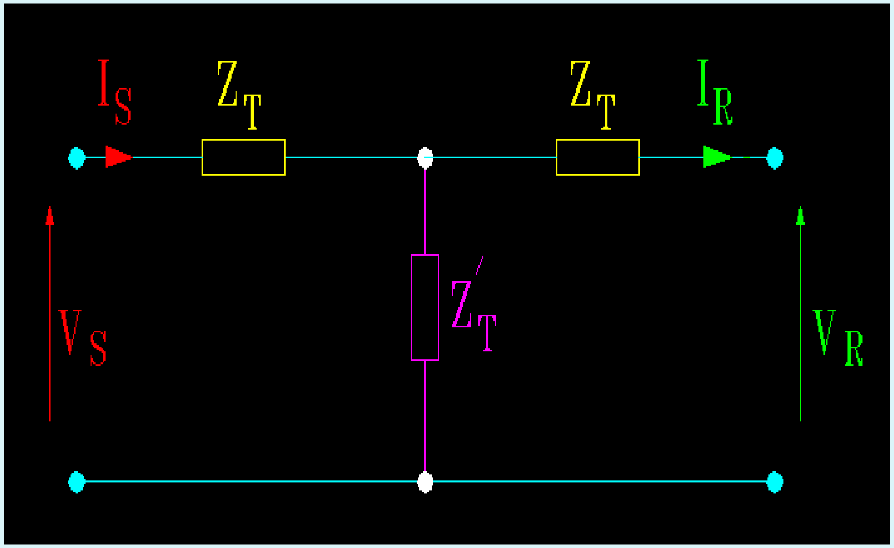
$$\Rightarrow V_2 = V_1 Cosh(ml) - I_1 Z_C Sinh(ml) = I_2 Z_C$$

$$= Z_C \left[-\frac{V_1}{Z_C} Sinh(ml) + I_1 Cosh(ml) \right]$$

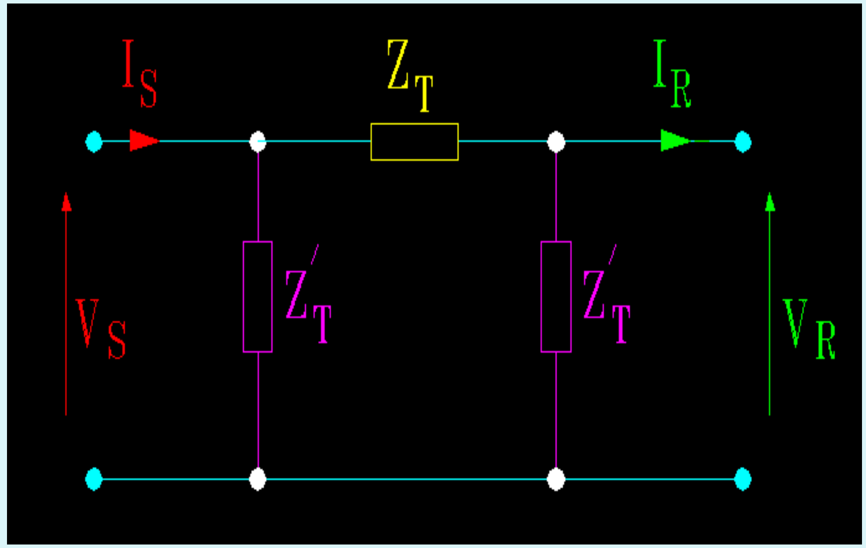
$$\Rightarrow V_1 Cosh(ml) + V_1 Sinh(ml) = I_1 Z_C \left(Sinh(ml) + Cosh(ml) \right)$$

$$Sinh(ml) + Cosh(ml) = 1 \Rightarrow V_1 = I_1 Z_C$$

تمرین15: با معلوم بودن پارامترهای خط متوسط $ABCD$ مدار معادل آن را در حالت Tو π بدست آورید ؟



$$Z_T = B \;, Z'_T = \frac{B}{A-1}$$



$$Z'_T = \frac{1}{C} \;, Z_T = \frac{D-1}{C}$$

تمرین16: یک خط بلند به طول 250km بار 100MW را تحت ولتاژ 230kv و ضریب

قدرت 0.9 پس فاز تغذیه می کند. هدف تجزیه و تحلیل خط می باشد .

$$l = 250\ km$$

$$p_2 = 100\ MW$$

$$U_2 = 230\ kV$$

$$Cos\ (\varphi_2) = 0.9 lag$$

$$C = 14.1 \ {}^{nf}\!/\!_{km}$$

$$L = 1.9\ {}^{mh}\!/\!_{km}$$

$$R = 0.16\ {}^{\Omega}\!/\!_{km}$$

$$Z_s = r + j\ X_L = 0.16 + J(2\pi * F * 1.9) = 0.617\angle 74.9°\ {}^{\Omega}\!/\!_{km}$$

$$Y = jc\omega = J(14.1 * 10^{-9} * 2\pi * f) = j4.429 * 10^{-6}\ {}^{v}\!/\!_{km}$$

$$Z_C = \sqrt{\frac{z}{y}} = \sqrt{\frac{0.617\angle 74.9°}{4.429 \times 10^{-6}\angle 90°}} = 373.5\angle -7.55°$$

$$m=\sqrt{zy}=\sqrt{(0.617\angle 74.9^\circ)(4.429\times 10^{-6}\angle 90^\circ)}$$

$$=1.653\times 10^{-3}\angle 82.45^\circ\ \Omega/_{km}$$

$$ml=0.0539+j0.41\Omega$$

$$B\cong Z\left(1+\frac{YZ}{6}\right)=150.27\angle 75.42^\circ$$

$$D=A\cong 1+\frac{ZY}{2}=0.918\angle 1.34^\circ$$

$$C=0.0011\angle 90.42^\circ$$

$$V_2=\frac{u_2}{\sqrt{3}}=\frac{230\ kv}{\sqrt{3}}=132.79\ kv$$

$$I_2=\frac{P_2}{\sqrt{3}\ u_2 Cos\ \varphi_2}=\frac{100}{\sqrt{3}*230*0.9}=2.789\ kA$$

$$\begin{cases} V_1 = AV_2^{kV} + BI_2^{kA} = 153.13\angle 13.12^\circ kV \\ I_1 = CV_2^{kV} + DI_2^{kA} = 0.23\angle 9.73^\circ kV \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_2 = 265.23\angle 13.12 kV$$

$$S_1 = \sqrt{3}\, U_1 I^*_1 = 3(153.13\angle 13.12^\circ)(0.23\angle -9.7^\circ)$$

$$\Rightarrow S_1 = 107.99\, MW + j6.397\, MVAR$$

$$\Rightarrow S_2 = 100\, MW + j42.26\, MVAR$$

$$Cos\,\varphi_1 = Cos\,(13.12 - 9.73) = 0.998\, lag$$

تمرین17: یک خط سه فاز به طول 500km و $S=90+j30$ مگا ولت آمپررا تغذیه می کند. ولتاژ و توان ابتدای خط را بدست آورید،اگر داشته باشیم :

$$R=74*10^{-6}\Omega/m$$

$$L=1.212*10^{-6}H/m \qquad G=0,\ f=50cps,\ U_2=220kV$$

$$C=9.577*10^{-12}F/m \qquad U_1=?\ \&\ S_1=?\ \&\ I_1=?$$

$$Z_S=R+jX_L=74*10^{-6}+j(2\pi*50*1.212\times10^{-6})$$

$$=74\times10^{-6}+j380.76\times10^{-6}\,\Omega/m$$

$$Y = jC\omega = j(9.577 * 10^{-12} * 2\pi * 50) = j3.0087 \,{}^{v}\!/_{m}$$

$$m = \sqrt{zy} = 1.2927 \angle 85.39 \qquad ml = 0.05185 + j0.6443$$

اگر با روش تحلیلی حل شود باید دقت شود که مقادیر زاویه ها بر حشب رادیان می باشد .

$$A = Cosh(ml) = Cos(0.05185 + j0.6443)$$

$$= Cosh(0.05185\, rad) * Cos(j0.6443\, rad) +$$

$$jSinh(0.05185\, rad) * Sin(0.6443\, rad)$$

$$D = A = 0.8006 + j0.03116$$

$$B = 32.08 + j213.5$$

تمرین18: یک خط انتقال انرژی سه فاز به طول 400km مفروض است .ولتاژ در ابتدای خط220kv بوده و پارامترهای خط برای هر کیلومتر به شرح زیر اند:

$r = 0.125\,\Omega \;\; \& \;\; x = 0.4\Omega \;\; \& \;\; y = 2.8\times 10^{-6}$ موهو

$$R = 0.125\times 400 = 50\,\Omega \;\; \& \;\; X_L = j0.4*400 = j160\,\Omega$$

$$Y = j2.8*10^{-6}*400 = 1.12\times 10^{-3}\angle 90^\circ$$

$$Z_s = R + jX = 50 + j160\,\Omega = 168\angle 72.6^\circ\Omega$$

$$YZ = 1.12*10^{-3}\angle 90*168\angle 72.6^\circ = 0.188\angle 162.6^\circ$$

الف) اگر انتهای خط باز باشد ، (حالت بی باری یا مدار باز) در اینصورت ولتاژ انتهای خط و جریان ابتدای خطبه صورت زیر حساب می شود :

$$I_R = 0 \Rightarrow V_S = AV_R \text{ , } I_S = CV_R$$

$$A \cong 1 + \frac{YZ}{2} = 1 + \frac{0.188\angle 162.6^\circ}{2} = 0.91 + j0.028 , |A| = 0.91$$

$$C = Y\left(1 + \frac{YZ}{6}\right) = 1.12 \times 10^{-3}\angle 90^\circ\left(1 + \frac{0.188\angle 162.6^\circ}{6}\right)$$

$$\Rightarrow C = 1.09 \times 10^{-3}\angle 90.55^\circ$$

$$V_R = \frac{V}{|A|} = \frac{220}{0.91} = 242\ kv$$

$$|I_s| = |c||V_R| = 1.09 \times 10^{-3} \times \frac{242}{\sqrt{3}} \times 10^{3} = 152 \ A$$

می بینیم که در حالت بی باری (مدار باز) ولتاژ انتهای خط از ابتدای خط بیشتر می گردد . این پدیده

به اثر فرانتی (Ferranti-Effect) موسوم است .

ب) حداکثر طول از خط را طوری حساب کنید که ولتاژ انتهای خط در حالت مدار باز (بی باری)

از 235kV تجاوز نکند :

$$U_R \le 235 \Rightarrow L = ? \Rightarrow L \langle 400\, km$$

$$|A| = \left|\frac{V_S}{V_R}\right| = \frac{220}{2.35} = 0.936$$

$$A \cong 1 + \frac{YZ}{6} = 1 + \frac{1}{2} L^2 \times j2.8 \times 10^{-6} \times (0.125 + j0.4)$$

$$A=\left(1.056\times10^{-6}L^{2}\right)+j0175\times10^{-6}L^{2}$$

چون مقدار موهومی ناچیز است ، لذا با تقریب خوبی داریم :

$$A=\left(1-0.56\times10^{-6}L^{2}\right)=0.936$$

$$\Rightarrow\ L^{2}=\frac{1-0.936}{0.56\times10^{-6}}\ \Rightarrow\ L=338\ km$$

پ) در فرض حالت (الف) ماکزیمم فرکانس مجاز را طوری حساب کنید که ولتاژ انتهای خط در

حالت بی باری (باز بودن) از 250kV تجاوز نکند .

$$|A|=\left|\frac{V_S}{V_R}\right|=\frac{220}{250}=0.88$$

$$A\cong 1+\frac{YZ}{6}=1+\frac{1}{2}\times j1.12\times 10^{-3}\times\frac{f}{50}\left(50+j160*\frac{f}{50}\right)$$

از قسمت موهومی صرفنظر می کنیم :

$$A\cong 1+\frac{YZ}{6}=1-\frac{1}{2}\times 1.12\times 10^{-3}\times 160*\left(\frac{f}{50}\right)^2=0.88$$

$$\Rightarrow f=57.9[c.p.s]$$

فصل چهارم

- معادله انتقالي توان الكتريكي در خط انتقال

$$S_S = P_S + JQ_S = \mathrm{V_S} \times I_S^*$$

$\mathrm{I_S}$ مزدوج $= I_S^*$

$$S_R = P_R + JQ_R = \mathrm{V_R} \times I_R^*$$

$\mathrm{I_R}$ مزدوج $= I_R^*$

$$\begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{D}' & -\mathrm{B}' \\ -\mathrm{C}' & \mathrm{A}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_R = \mathrm{D}'\mathrm{V_S} - \mathrm{B}' \, I_S \\ I_R = -\mathrm{C}' \, \mathrm{V_S} + \mathrm{A}' \, I_S \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{B}' \, \mathrm{I_S} = \mathrm{D}'\mathrm{V_S} - V_R \quad \Rightarrow I_s = \frac{\mathrm{D}'}{B'} \mathrm{V_S} - \frac{V_R}{B'}$$

β :بتا α :آلفا

Δ :دلتا γ :گاما

$$\begin{cases} A' = |A'| \angle^{\alpha} \\ B' = |B'| \angle^{\beta} \end{cases} , \quad \begin{cases} C' = |C'| \angle^{\gamma} \\ D' = |D'| \angle^{\Delta} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} \Rightarrow V_s = A'V_R + B'\,I_R \quad \Rightarrow I_R = \frac{V_s}{B'} - \frac{A'}{B'} V_R$$

$$\Rightarrow I_S = \frac{|D'|}{|B'|} \times |V_S| \angle\,(\Delta - \beta + \gamma) - \frac{|V_R|}{B'} \angle(-B)$$

$$I_R = \frac{|V_s|}{|B'|} \angle(\Delta - \beta) - \frac{|A'|}{|B'|} |V_R| \angle(\propto - \beta)$$

$$S_R = V_R \times I_R^* = (V_R \angle 0) \left(\frac{|V_s|}{|B'|} \angle(\beta - \Delta) - \frac{|A'|}{|B'|} |V_R| \angle(\beta - \propto) \right)$$

$$\Rightarrow S_R = |V_R| \left(\frac{|V_s|}{|B'|} \right) \angle(\beta - \Delta) - \frac{|A'|}{|B'|} |V_R|^2 \angle(\beta - \propto)$$

$$S_R = \left(\frac{|V_R||V_S|}{|B'|}\right) Cos\ (\beta - \Delta) - \frac{|A'|}{|B'|}|V_R|^2 Cos\ (\beta - \propto) +$$

$$j\left(\frac{|V_R||V_S|}{|B'|} Sin\ (\beta - \Delta) - \frac{|A'|}{|B'|}|V_R|^2 Sin(\beta - \propto)\right)$$

$$P_S = \frac{|D'|}{|B'|}|V_S|^2 Cos\ (\beta - \Delta) - \frac{|V_s||V_R|}{|B'|} Cos(\beta + \Delta)$$

$$Q_S = \frac{|D'|}{|B'|}|V_S|^2 Sin\ (\beta - \Delta) - \frac{|V_s||V_R|}{|B'|} Sin(\beta + \Delta)$$

فصل پنجم

سیستم پریونیت (به درصد) یا (به واحد)   Per Unit System

- حل سیستم قدرت به هم پیوسته با چندین سطوح ولتاژ مختلف به تبدیلات پرزحمتی شامل تغییر تمامی امپدانس‌ها به یک سطح ولتاژ خاص نیاز دارد . با وجود این، مهندسان سیستم‌های قدرت سیستم نسبت به واحد را ابداع کرده‌اند . به طوری که کمیت‌های فیزیکی مختلف مانند توان، ولتاژ، جریان و امپدانس به صورت اعداد اعشاری یا ضریبی از کمیت‌های مبنا بیان می‌شوند. در این سیستم سطوح ولتاژ مختلف از بین رفته و شبکه‌های قدرت شامل ژنراتورها، ترانسفورماتورها و خطوط (با سطوح ولتاژهای مختلف) به سیستمی از امپدانس‌های ساده تبدیل می‌شوند. مقدار پریونیت شده یا نسبت به واحد با علامت اختصاری (pu) و همچنین مقادیر مبنا با اندیس B مشخص می‌شوند.

امروزه در بررسی سیستم‌های قدرت رسم بر آن است که چهار پارامتر اصلی زیر بر حسب پریونیت بیان شوند:

1- ولتاژهای شبکه‌ی قدرت

2- جریان‌های شبکه‌ی قدرت

3- امپدانس‌های سیستم قدرت

4- توان‌های سیستم قدرت

یکی از خصوصیات ویژه در سهولت محاسبات سیستم پریونیت این است که امپدانس به پریونیت در طرفین ترانسفورماتور یکسان است.

این چهار مقدار بالا بر حسب پریونیت که نوشته می‌شوند اگر در 100 ضرب شوند به صورت درصد بیان می‌شوند و حتی جهت نشان دادن امپدانس داخلی غیراهمی پیشوند j نیز به آن اضافه می‌شود که در ادامه‌ی موضوع به آن خواهیم رسید.

برای پریونیت کردن مقادیر فوق از رابطه‌ی کلی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\text{مقدار واقعی کمیت}}{\text{مقدار مبنای مربوط به همان کمیت}} = \text{کمیت بر حسب نسبت به واحد}\ (\text{مقدار پریونیت شده‌ی یک کمیت})$$

- ابتدا یک سیم تک‌فاز را مورد مطالعه قرار می‌دهیم:

برای مقادیر مبنا داریم:

$$S_B = (VA)_B = \text{توان مبنا}\ (\text{ولت آمپر})$$

$$V_B = \text{ولتاژ مبنا}\ (\text{ولت})$$

لذا خواهیم داشت:

$$\text{جریان مبنا} = I_B = \frac{(VA)_B}{V_B} = \frac{S_B}{V_B}\ (\text{آمپر})$$

$$\text{امپدانس مبنا} = Z_B = \frac{V_B}{I_B} = \frac{V_B{}^2}{(VA)_B} = \frac{V_B{}^2}{S_B}\ (\text{اهم})$$

$$S_{pu} = \frac{S}{S_B} \quad , \quad V_{pu} = \frac{V}{V_B} \quad , \quad I_{pu} = \frac{I}{I_B} \quad , \quad Z_{pu} = \frac{Z}{Z_B}$$

حالا سیستم سه‌فاز را برای پریونیت بررسی می‌کنیم:

اگر داشته باشیم: ولتاژ مبنا (ولت)= V_B و توان مبنا (ولت آمپر)= S_B

خواهیم داشت:

$$S_B = \sqrt{3}\, U_B I_B \Longrightarrow I_B \frac{S_B}{\sqrt{3}\, U_B}$$

$$V_B = Z_B\, I_B \Rightarrow Z_B = \frac{V_B}{I_B} = \frac{U_B/\sqrt{3}}{\frac{S_B}{\sqrt{3}\, U_B}} = \frac{U_B * U_B * \sqrt{3}}{\sqrt{3} * S_B} = \frac{U_B^2}{S_B} = Z_B$$

پس : $S_B\,,\, U_B\,,\, I_B = \frac{S_B}{\sqrt{3}\, U_B}\,, Z_B = \frac{U_B^2}{S_B}$

و دوباره خواهیم داشت:

$$S_{pu} = \frac{S}{S_B} \quad , \quad U_{pu} = \frac{U}{U_B} \quad , \quad I_{pu} = \frac{I}{I_B} \quad , \quad Z_{pu} = \frac{Z}{Z_B}$$

لازم به ذکر است که در حالت پریونیت قوانین مدار نیز صادق هستند یعنی:

$$S_{pu} = V_{pu} * I_{Pu}^{*} \quad , \quad V_{pu} = Z_{pu} * I_{pu} \quad , \quad S_{(3\Phi)} = 3V_{pu}\, I_{Pu}^{*}$$

تغییر مبنا :

امپدانس هر یک از ژنراتورها و ترانسفورماتورها معمولا توسط سازندگان برحسب درصد یا pu بر مبنای مقادیر نامی آن‌ها ارائه می‌شود. امپدانس خطوط انتقال معمولا برحسب مقادیر اهمی آن‌ها بیان می گردند. تمامی امپدانس‌ها باید برحسب نسبت به واحد در مبنای مشترک سیستم بیان شود. به عنوان مثال امپدانس به درصد یک ترانس مختص S_B و U_B آن ترانس بوده و مشخص شده است .

و اگر یکی از این دو کمیت یا هر دو کمیت تغییر کنند باید امپرانس به درصد تازه‌ای را برای آن محاسبه کرد.

فرض کنید Z_{pu}^{old} امپدانس نسبت به واحد در توان مبنای S_B^{old} و ولتاژ مبنای V_B^{old} باشد و با رابطه‌ی زیر بیان می‌شود :

$$Z_{pu}^{old} = \frac{Z_\Omega}{Z_B^{old}} = Z_\Omega \frac{S_B^{old}}{(V_B^{old})^2}$$

با بیان Z_Ω در مبنای جدید توان و ولتاژ امپدانس نسبت به واحد جدید به صورت زیر بیان می‌شود :

$$Z_{pu}^{new} = \frac{Z_\Omega}{Z_B^{new}} = Z_\Omega \frac{S_B^{new}}{(V_B^{new})^2}$$

حالا با مساوی قرار دادن Z_Ω ها برای Z_{pu}^{new} خواهیم داشت:

$$Z_{pu}^{old} = Z_\Omega \frac{S_B^{old}}{(U_B^{old})^2} \Longrightarrow Z_\Omega S_B^o = Z_{pu}^o (U_B^o)^2 \Longrightarrow Z_\Omega = \frac{Z_{pu}^o (U_B^o)^2}{S_B^o}$$

$$Z_{pu}^{new} = Z_{\Omega} \frac{S_B^{new}}{(U_B^n)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad Z_{\Omega} = \frac{Z_{pu}^n (U_B^n)^2}{S_B^n}$$

$$\Rightarrow Z_{\Omega} = Z_{\Omega} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{Z_{pu}^0 (U_B^0)^2}{S_B^0} = \frac{Z_{pu}^n (U_B^n)^2}{S_B^n}$$

$$\Rightarrow Z_{pu}^{new} = \frac{Z_{pu}^{old} (U_B^0)^2}{S_B^0} / \frac{(U_B^n)^2}{S_B^n}$$

$$\Longrightarrow Z_{pu}^{new} = Z_{pu}^{old} \frac{S_{pu}^{new}}{S_{pu}^{old}} \left(\frac{U_B^{old}}{U_B^{new}}\right)^2$$

مشاهده می‌کنید که اگر توان مبنای قدیم و جدید یکی باشد عبارت $\frac{S_{pu}^{new}}{S_{pu}^{old}}$ مساوی یک شده و

در رابطه‌ی Z_{pu}^{new} بی‌اثر می‌شود و همچنین اگر ولتاژ مبنای قدیم و جدید یکی باشد تأثیر آن هم

در رابطه بی‌اثر می‌شود حالا اگر هر دو کمیت ثابت بمانند رابطه‌ی $Z_{pu}^{old} = Z_{pu}^{new}$ همواره

برقرار است .

تمرین19: سه قسمت از یک سیستم تکفاز Aو Bو Cمطابق شکل روبرو،به کمک ترانسفورماتورهای AB وBC به هم مرتبط شده‌اند. یک بار 300^{Ω} هم به آن‌ها متصل است. اگر ولتاژ دوسربار66^{kv}باشد،مطلوب است:

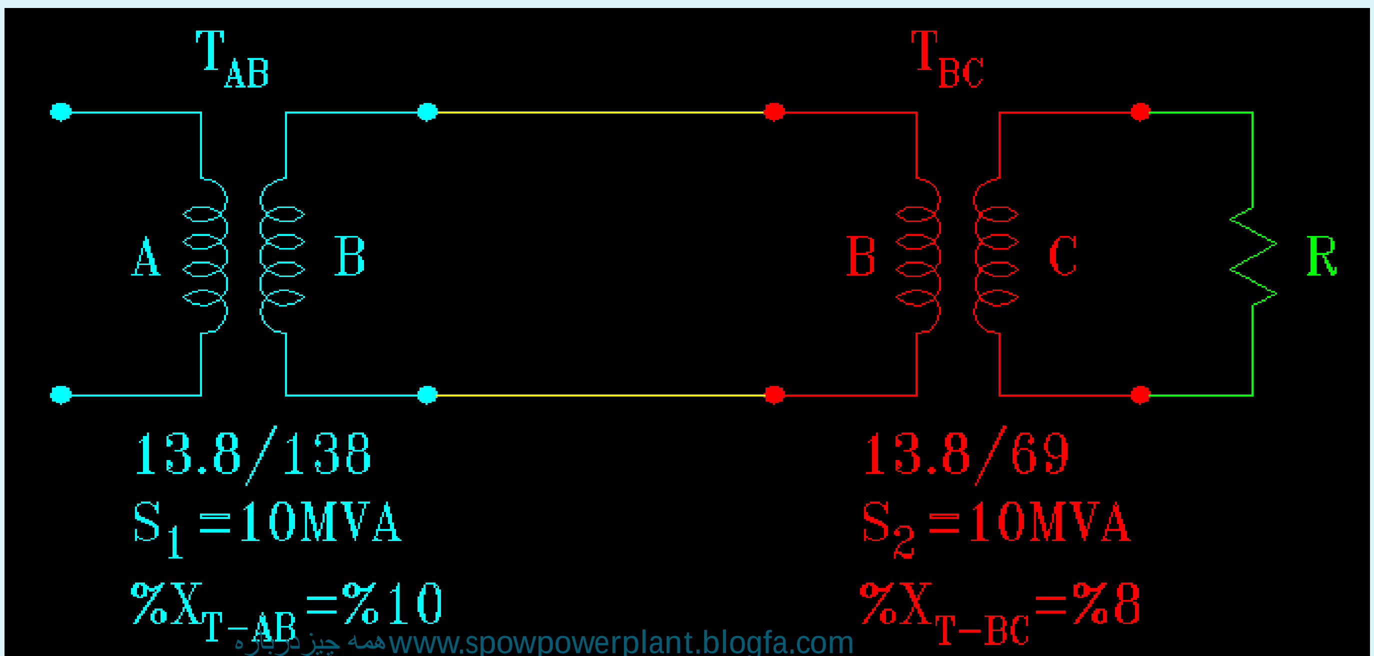
الف) مقاومت به پریونیت برمبنای Aو Bو C؟

ب) مدار معادل این شبکه به پریونیت ؟

پ) تنظیم ولتاژ؟

* چون ولتاژ13.8^{kv} می‌باشد،پس همه‌ی مقادیر واقعی مبنا هستند.

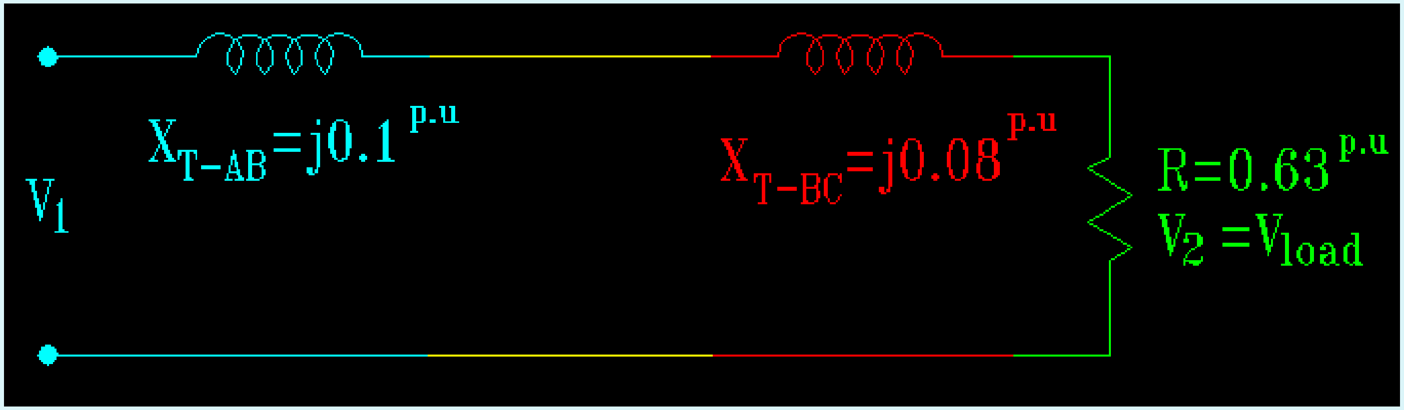
$$(U_b = 13.8^{kv}, S_b = 10^{MVA})$$



$$A:\begin{cases} S_b = 10^{MVA} \\ U_b = 13.8^{kv} \\ Z = \dfrac{V_B^2}{S_b} = \dfrac{(13.8)^2}{10} = 19.044\Omega \end{cases} \Longrightarrow R_A = 300\left(\frac{138}{69}\right)^2\left(\frac{13.8}{138}\right)^2 = 12\Omega \qquad \Longrightarrow \underset{A}{R_{pu}} = \frac{12^{\Omega}}{19.044} = 0.63^{pu}$$

$$B:\begin{cases} S_b = 10^{MVA} \\ U_b = 138^{kv} \\ Z = \dfrac{V_B^2}{S_b} = \dfrac{(138)^2}{10} = 1904.4\Omega \end{cases} \qquad \Longrightarrow \underset{B}{R_{pu}} = \frac{300\left(\frac{138}{69}\right)^2}{1904.4} = 0.63^{pu}$$

$$C:\begin{cases} S_b = 10^{MVA} \\ V_b = 69^{kv} \\ Z = \dfrac{V_B^2}{S_b} = \dfrac{(69)^2}{10} = 476\Omega \end{cases} \qquad \Longrightarrow \underset{c}{R_{pu}} = \frac{R_{re}}{Z_b} = \frac{300}{476/1} = 0.63^{pu}$$



$$V_{load-pu} = \frac{V_{Re}}{V_b} = \frac{66}{69} = 0.957^{pu} \Longrightarrow I_{load-pu} = \frac{V_{pu}}{R_{pu}} = \frac{0.957}{0.63} = 1.52^{pu}$$

$$\mathrm{V}_{1\mathrm{pu}} = V_{2-pu} + I_{pu}\left(\mathrm{j}\mathrm{X}_{T_1} + \mathrm{j}\mathrm{X}_{T_2} + R\right) = 0.957 + 1.52(0.63 + j(0.1 + 0.88))$$

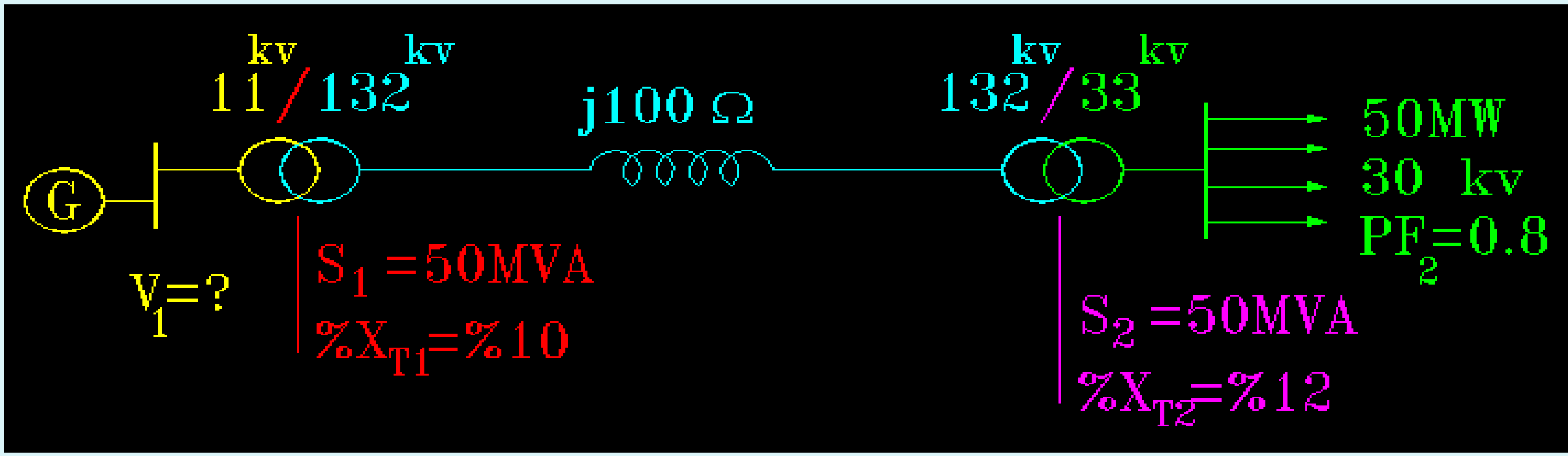
$$- 0.957 + 1.52(0.63 + j0.18) - 0.957 + j0.2736 - 0.996 \angle 15.95^{\wedge}$$

$$\longrightarrow \left|V_{1-pu}\right| = 0.996$$

و

$$\%IR - \frac{\left|V_{1-pu}\right| - \left|V_{2-pu}\right|}{\left|V_{1-pu}\right|} * 100 - \%3.91$$

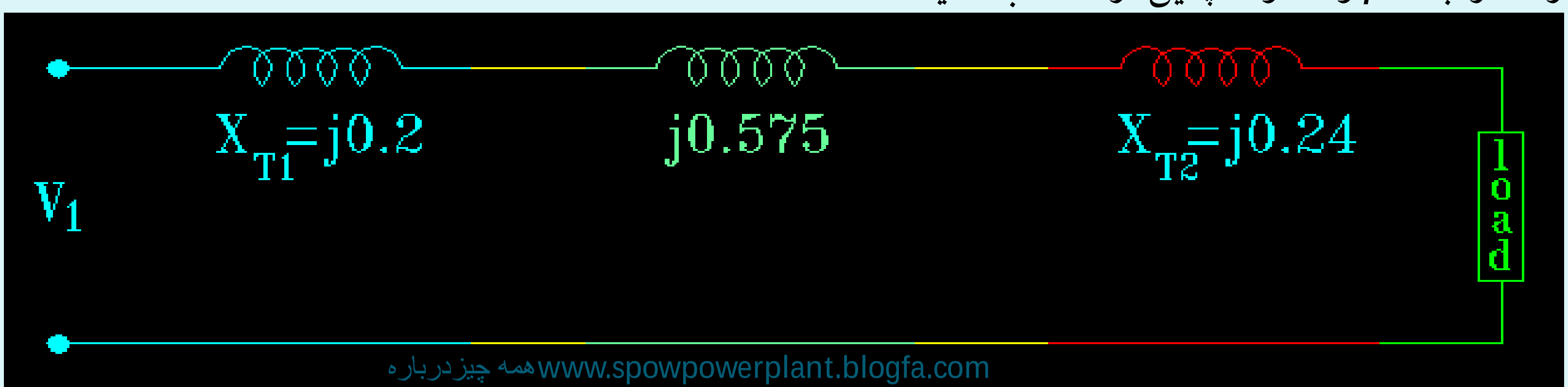
تمر



V_b $S_b = 100MVA$

با انتخاب V_1 وولتاژ نامی ترانس‌ها در هر قسمت از شبکه به عنوان .

مقدار را به *pu* و *Kv*وهمچنین را حساب کنید؟



$$Z_{pu}^{new} = Z_{pu}^{old} \frac{S_{pu}^{new}}{S_{pu}^{old}} \left(\frac{U_B^{old}}{U_B^{new}}\right)^2$$

$$\Longrightarrow X_{T_1}^{n} = 0.1 * \frac{100}{50} 1^2 = 0.2 \quad , \quad X_{T_2}^{n} = 0.12 \frac{100}{50} = 0.24$$

$$X_{b-line} = \frac{u_B^2}{S_b} = \frac{132^2}{100} = 174^{pu} \longrightarrow X_{L\ pu} = \frac{100}{174} = j0.575^{pu}$$

$$I_{Load} = \frac{P_L}{\sqrt{3}\, U \, Cos\varphi} = \frac{50}{\sqrt{3} * 30 * 0.8} \longrightarrow I_{Load} = 1.2^{KA} \qquad , V_{Load\ \ pu} = \frac{30}{33} = 0.91^{pu}$$

$$I_{base-load} = \frac{S_b}{\sqrt{3} U_b} = \frac{100}{\sqrt{3} * 33} \Longrightarrow 1.75^{KA} \rightarrow I_{L-pu} = \frac{1.2}{1.75} = 0.688 \angle -36.8^{\wedge}$$

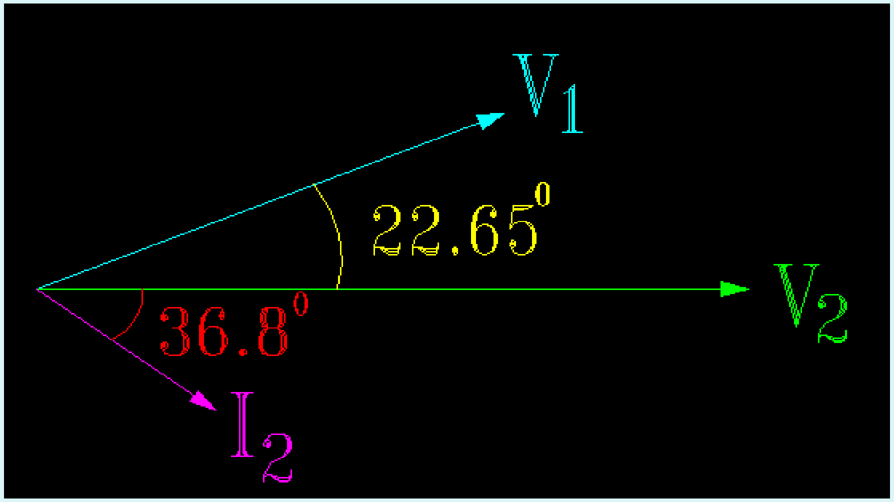
$$V_{1-pu} = I_{pu}\left(X_{T_1} + X_L + X_{T_2}\right) + V_{load} = (0.688 \angle -36.8)(j1.015) + (0.91 \angle 0)$$

$$= (0.551 - j0.412)(j1.015) + 0.91 \Rightarrow V_{1-pu} = 1.44 \angle 22.65$$

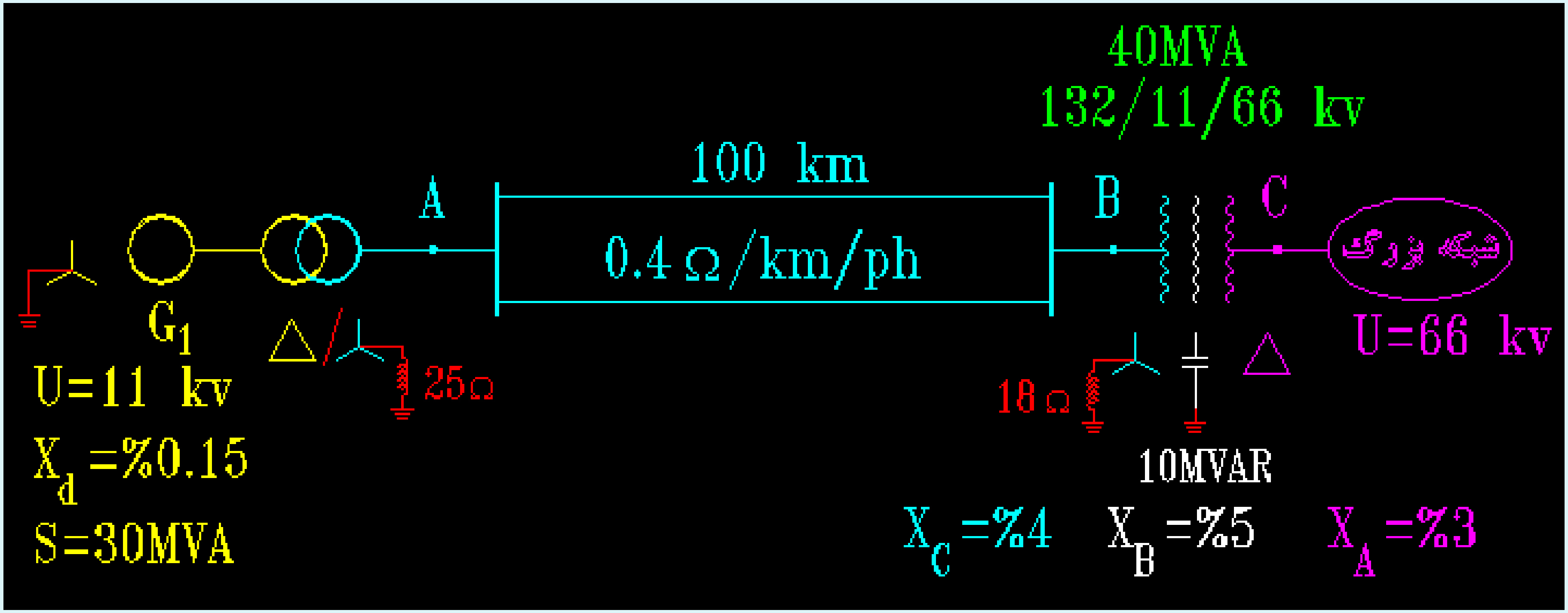
$$|V_1| = |V_{pu}| * V_B = 1.44 * 11 = 15.84^{kv}$$

$$\varphi = \varphi_v - \varphi_i = 22.65 — 36.8 = 59.4$$

$$\Rightarrow \quad P.F = Cos59.4 = Cos60 = \frac{1}{2} = 0.5$$



تمرین21: دیاگرام تک‌خطی یک شبکه قدرت مطابق شکل زیر است. شبکه‌ی فوق راا ز بخش C به یک شبکه‌ی بزرگ قدرت با قدرت اتصال کوتاه $S_{cc} = 1000^{MVA}$ متصل می‌باشد. دیاگرام امپدانس یاشمای مستقیم این شبکه را رسم کنید؟ مقادیر به پریونیت در مبنای $S_b = 30^{MVA}$ و $U_b = 132^{kv}$ می‌باشند.


40MVA
132/11/66 kv
100 km
0.4 Ω/km/ph
A
B
C
شبکه بزرگ
G_1
U=11 kv
X_d =%0.15
S=30MVA
25Ω
18 Ω
U=66 kv
10MVAR
X_C =%4
X_B =%5
X_A =%3

فصل ششم

مطالعات پخش بار در سیستمهای قدرت

هدف از محاسبات پخش بار:

هدف از محاسبات تقسیم بار (پخش بار) را می توان به صورت زیر خلاصه نمود :

I- تعیین امکان انتقال انرژی از تعداد معینی مولد به بارهای موجود در شبکه.

II- تعیین ولتاژ کلیه شین های سیستم و بررسی آن که این ولتاژها از مقادیر حدی تعیین شده برای هر شین تجاوز ننماید.

III- تعیین مقدار توان راکتیو انتقال داده شده در خطوط انتقال.

IV- بررسی آن که خطوط و کلیدهای قطع در تحت شرایط عادی و یا در موقع قطع بعضی از خطوط بیش از حد اسمی بار تحمل ننماید.

در مواقع طرح سیستم اگر مسئله تقسیم بار برای شرایط مختلفی حل شود نتیجتا" امکان بروز اختلافات در سیستم به حداقل ممکن تقلیل می یابد.

با استفاده از مطالعات پخش بار به نتایج زیر می رسیم :

i- نقاط ضعف شبکه.

ii- نقاط نصب نیروگاههای جدید ، ترانسفورماتورهای جدید ، افزایش ظرفیت ترانسفورماتورها ، توسعه خطوط ، تغییر سطح مقطع سیم های خطوط ، نصب کاپاسیتور ، نصب راکتور ، تغییر درجه کارتپ چنجر ترانس ، ...

در حقیقت :

از مطالعه پخش بار جهت کار ایده آل ، بهینه سیستم استفاده می نمائیم.

از آن جائی که سیستم های قدرت به صورت سه فاز متعادل تحت شرایط ماندگار یا پایدار (Steady State) مورد بهره برداری قرار می گیرند. بنابراین در بحث پخش بار (Load Flow) فقط معادل مثبت (مستقیم) شبکه مورد تجزیه قرار می گیرد یعنی :

سیستم در حالت نرمال و متقارن :

ترتیب مثبت وجود دارد.

ترتیب منفی و صفر (هموپولر) وجود ندارد.

دسته بندی نوع باس بارها (شین ها) :

1- شین بار (Load bus) Type(1)

2 - شین ژنراتور یا شین مربوط به نیروگاهها Type(2)

(Generation bus) یا (Voltage Controlled bus)

3 - شین مبنی یا اسلگ (Swing or slack bus) یا (Reference bus) Type(0)

که در حقیقت شین بی نهایت سیستم می باشد. یا بزرگ ترین شین سیستم یا شین نزدیک به بزرگ ترین نیروگاه در شبکه.

کمیت هر شین :

به طور کلی در هر یک از شین های یک شبکه قدرت چهار نوع پارامتر اصلی داریم که عبارتند از :

P : قدرت اکتیو تزریق شده و یا جذب شده.

Q : قدرت راکتیو تزریق شده و یا جذب شده.

$|V|$: مدول ولتاژ در شین.

θ: زاویه فاز ولتاژ در شین.

و همان طوری که قبلا" بیان گردید در بررسی تقسیم بار شینه های یک سیستم قدرت به سه گروه اصلی تقسیم گردیدند.

شین ژنراتور یا شین مولد :

به شینی اطلاق می شود که به آن مولد اتصال داده شده است و در یک سیستم انرژی معمولا" وجود وسائل کنترل تحریك و کنترل توربین باعث تنظیم و ثابت نگهداشتن ولتاژ و توان می شوند فلذا روی اینگونه شین ها P و $|V|$ ثابت فرض می شوند (مقادیر معلوم) Q و θ به عنوان مقادیر مجهول بایستی به دست آورد.

شین بار یا شین مصرف:

چون تغییرات کم ولتاژ روی توان حقیقی و غیر حقیقی بسیاری از بارهای مصرفی تاثیر زیاد نمی گذارند ، لذا MW و MVAR این شینه ها مستقل از ولتاژ در نظر گرفته می شوند بنابراین P و Q ثابت (مقادیر معلوم) و $|V|$ و θ متغیر (مقادیر مجهول) که بایستی تعیین گردند.

شین مبنی :

که در آن $|V|$ و θ ثابت فرض می شوند و این شین جهت تعیین اختلاف فاز به عنوان مبنا انتخاب

می شود و در آن $\theta = 0$ فرض می شود.

بنابراین :

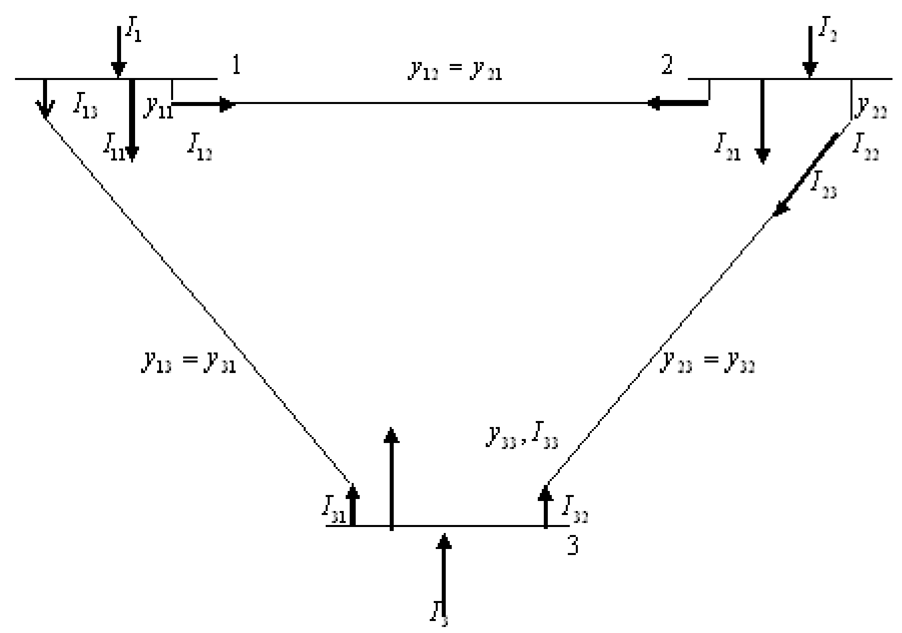
در شین مولد Q و θ ، در شین مصرف $|V|$ و θ ودر شین مبنی بر P و Q بایستی تعیین و پس از

مشخص گردیدن مقادیر فوق به آسانی قدرت انتقالی و تلفات موجود را در هر یک از المان های شبکه

می توان تعیین نمود.

ماتریس ادمیانس شبکه ی سه باس باره:

اگر ماتریس اطلاعات را برای شبکه سه شینه نیز بررسی کنیم خواهیم داشت :



شکل شماره (٤)

از طرفی می دانیم که :

y_{11} = 1 بار متصل به شین

y_{22} = 2 بار متصل به شین

y_{33} = 3 بار متصل به شین

$$\begin{cases} I_1 = I_{11} + I_{12} + I_{13} \\ I_2 = I_{22} + I_{21} + I_{23} \\ I_3 = I_{31} + I_{32} + I_{33} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = y_{11}V_1 + (V_1 - V_2)y_{12} + (V_1 - V_3)y_{13} \\ I_2 = y_{22}V_2 + (V_2 - V_1)y_{21} + (V_2 - V_3)y_{23} \\ I_3 = y_{33}V_3 + (V_3 - V_1)y_{31} + (V_3 - V_2)y_{32} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_1 - y_{12}V_2 + y_{13}V_1 - y_{13}V_3 \\ I_2 = y_{22}V_2 + y_{21}V_2 - y_{21}V_1 + y_{23}V_2 - y_{23}V_3 \\ I_3 = y_{33}V_3 + y_{31}V_3 - y_{31}V_1 + y_{33}V_3 - y_{32}V_2 \end{cases}$$

ویا

$$\begin{cases} I_1 = V_1(y_{11} + y_{12} + y_{13}) - V_2 y_{12} - V_3 y_{13} \\ I_2 = V_1 y_{21} + V_2(y_{22} + y_{21} + y_{23}) - V_3 y_{23} \\ I_3 = V_1 y_{31} - V_2 y_{32} + V_3(y_{31} + y_{32} + y_{33}) \end{cases}$$

از طرفی می دانیم که : $y_{12} = y_{21}$ ، $y_{13} = y_{31}$ و $y_{23} = y_{32}$

و فرض می کنیم که :

ادمیتانس کل معادل شین 1)

$$y_{11} + y_{12} + y_{13} = Y_{11}$$

ادمیتانس کل معادل شین 2)

$$y_{21} + y_{22} + y_{23} = Y_{22}$$

ادمیتانس کل معادل شین 3)

$$y_{31} + y_{32} + y_{33} = Y_{33}$$

$$-y_{21} = -y_{12} = Y_{12}$$

$$-y_{13} = -y_{31} = Y_{13} = Y_{31}$$

$$-y_{23} = -y_{32} = Y_{23} = Y_{32}$$

بعد از جایگذاری در روابط قبلی خواهیم داشت :

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + Y_{13}V_3 \\ I_2 = Y_{22}V_1 + Y_{22}V_2 + Y_{23}V_3 \\ I_3 = Y_{31}V_1 + Y_{32}V_2 + Y_{33}V_3 \end{cases}$$

حال اگر معادلات فوق را به صورت ماتریسی شکل در بیاوریم خواهیم داشت :

برای یک سیستم سه شینه

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$[I_{bus}] = [Y_{bus}][V_{bus}]$$

و در نهایت برای یک سیستم n شینه اگر توسعه دهیم خواهیم داشت :

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ . \\ . \\ . \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \ldots\ldots Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \ldots\ldots Y_{2n} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \ldots\ldots Y_{3n} \\ . & . & \ldots\ldots \\ . & . & \ldots\ldots \\ . & . & \ldots\ldots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & Y_{n3} \ldots\ldots Y_{nn} \end{vmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ . \\ . \\ . \\ V_n \end{bmatrix}$$

رابطه کلی برای باس P :

$$I_p = \sum_{q=1}^{n} Y_{pq} V_q \qquad P = 1,2,\ldots n$$

برای حالت خاص 2 باس خواهیم داشت :

$$I_2 = \sum_{q=1}^{n} Y_{2q} V_q = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + Y_{23}V_3 + Y_{24}V_4 + \ldots \qquad p = 2$$

(diagonal element)=Ypp یا جمع ادمیتانس های متصل به شین *p*

(المان های قطری) ماتریس ادمیتانس

-(Off diagonal element)=Ypq یا منهای ادمیتانس بین شین *p* و *q*

البته رابطه کلی $\sum_{q=1}^{n} Y_{pq} V_{q\,,\,p=1,\ldots n}$ $I_p =$ را می توان به صورت زیر نوشت :

$$I_p = Y_{pp}V_p + \sum_{q=1}^{n} Y_{pq}V_q$$

$$q \neq p \quad , \quad p = 1,2,\ldots n$$

$$(I) \qquad V_p = \frac{1_p}{Y_{pp}} - \frac{1}{Y_{pp}} \sum_{q \neq 1}^{n} Y_{pq} V_q$$

$$q \neq p \quad , \quad p = 1,2,\dots n$$

می دانیم که :

$$S = VI^* \qquad I = |I| < a \Rightarrow I^* = |I| < -a \qquad I^* = \frac{S}{V}$$ و یا $$I = \frac{S^*}{V^*}$$

داشتیم ،

$$[I_{bus}] = [Y_{bus}][V_{bus}]$$

$$\left[\frac{S^*}{V^*}\right] = [Y_{bus}][V_{bus}]$$

و برای شین p می توان نوشت :

$$S_p = V_p I_p^* \rightarrow I_p^* = \frac{S_p}{V_p} \Rightarrow I_p = \frac{S_p^*}{V_p^*}$$

$$S_p = P_p + jQ_p \Rightarrow S_p^* = P_p - jQ_p$$

فلذا :

$$(II) \qquad I_p = \frac{P_p - jQ_p}{V_p^*}$$

اگر رابطه *II* را در معادله I جایگذاری کنیم خواهیم داشت :

$$V_p = \frac{\dfrac{P_p - jQ_p}{V_p^*}}{Y_{pp}} - \frac{1}{Y_{pp}} \sum_{q=1}^{n} Y_{pq} V$$

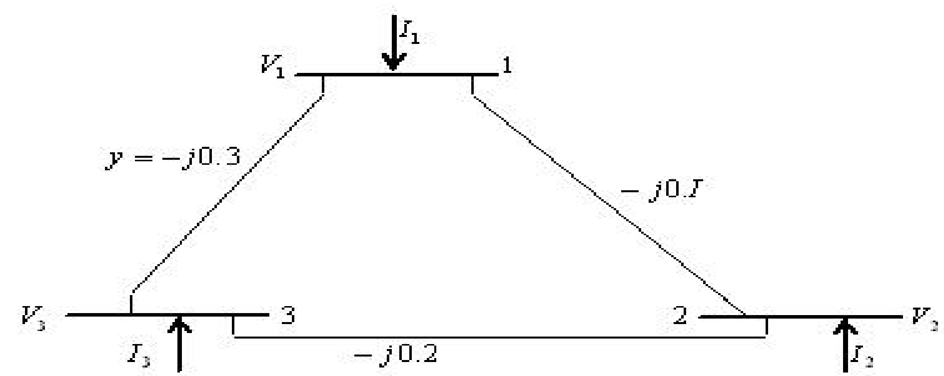
$$q \neq p \quad , \quad p = 1,2,\ldots n$$

$$(\mathrm{III}) \quad V_p = \frac{1}{Y_{pp}} \left[\frac{P_p - jQ_p}{V_p^*} - \sum_{q=1}^{n} Y_{pq} V_q \right]$$

$$q \neq p \quad , \quad P = 1,2,\ldots n$$

معادلات *II* و *III* معادلات اساسی *Load flow* می باشند که معادلات غیرخطی بوده و به راحتی با دست امکان حل آن ها وجود نخواهد داشت و با استفاده از روش های تحلیل عددی در قسمت های بعدی مختصرا" توضیح داده خواهد شد توسط برنامه های کامپیوتری حل خواهد گردید.

تمرین 22 : Y_{bus} شبکه سه شینه زیر را به دست آورید.



$$[Y_{bus}] = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -jo.4 & +jo.1 & +jo.3 \\ +jo.1 & -jo.3 & +jo.2 \\ -jo.3 & +jo.2 & -jo.5 \end{vmatrix}$$

روش های تحلیل عددی:

1 - روش گوس سیدال (Gauss-Seidel)

2 - روش تکرار نیوتن رافسون (Newton Raphson)

اساس این روش ها بر مبنای تکرار استوار است و بدین جهت آن ها را روش های تکراری می نامند طبق این روش ها دائما" تخمین های دقیق تری از مقادیر مجهول محاسبه شده و بالاخره پس از چندین تکرار جواب نسبتا" دقیقی به دست می آید. هنگامی که مسئله به جواب رسید اصطلاحا" گویند که حل مسئله همگرا می باشد.

به طور کلی می توان گفت که روش های تکراری بر این پایه استوارند که از مجهولات به

دست آمده در تکرار مرحله K می توان این مجهولات را برای تکرار مرحله $K+1$ تخمین زد.

در مسائل مربوط به پخش بار نیز از روش های متداول تکراری کمک می گیریم.

تقریبا" در تمامی برنامه های کامپیوتری جهت مسائل پخش بار از دو روش تکراری فوق الذکر استفاده می گردد.

1 - روش گوس سیدال:

با استفاده از مثال زیر به بررسی روش گوس سیدال می پردازیم. $x+\sin x-2=0$

تخمین اولیه $x=0$ $\quad$ $x=-\sin x+2$

مرحله 1 $$x = -\sin 0 + 2 = 2$$

مرحله 2 $$x = -\sin 2^{rad} + 2 = 2 - \sin 2^{rad} = 1.09$$

مرحله 3 $$x = 2 - \sin 1.09^{rad} = 1.113$$

مرحله 4 $$x = 2 - \sin 1.113^{rad} = 1.1028$$

مرحله 5 $$x = 2 - \sin 1.1028^{rad} = 1.1075$$

مرحله 6 $$x = 2 - \sin 1.1075^{rad} = 1.1054$$

مرحله 7 $$x = 2 - \sin 1.154^{rad} = 1.1063$$

مرحله 8 $$x = 2 - \sin 1.1063^{rad} = 1.1059$$

مرحله 9 $$x = 2 - \sin 1.1059^{rad} = 1.10612$$

مرحله 10 $$x = 2 - \sin 1.10612^{rad} = 1.10603$$

مرحله 11 $$x = 2 - \sin 1.10603^{rad} = 1.10607$$

مرحله 12 $$x = 2 - \sin 1.10607^{rad} = 1.10605$$

مرحله 13 $$x = 2 - \sin 1.10605^{rad} = 1.10602$$

مرحله 14 $$x = 2 - \sin 1.106062^{rad} = 1.106059$$

مرحله 15 $$x = 2 - \sin 1.106059^{rad} = 1.106060$$

یعنی *1.106060* جواب مسئله می باشد.

جواب زمانی حاصل می گردد که : $\Delta x < \varepsilon$

Δx: عبارتست از اختلاف جواب مسئله با جواب یک مرحله قبل از آن مثلا" در مثال بالا

جواب مسئله *1.106060* و جواب یک مرحله قبل از آن *1.106059* می باشد در واقع :

$$\Delta x = 1.106060 - 1.106059 = 1 \times 10^{-6}$$

ε: عبارتست از یک عدد معین که جزو داده ها می باشد.

اگر تکرار به پاسخ منجر گردد در آن صورت مسئله همگرا است.

اگر تکرار به پاسخ منجر نگردد در آن صورت مسئله واگرا است.

2 - روش نیوتن رافسون:

برای محاسبات مربوط به پخش بار در سیستم های بزرگ ، گاهی استفاده از روش گوس سیدال طولانی بوده و تعداد تکرارها زیاد می باشد حتی گاهی اوقات روش گوس سیدال واگرا نیز خواهد بود و به جواب منتهی نمی گردد.

در سیستم های بزرگ برای محاسبات پخش بار از روش نیوتن رافسون استفاده می شود.

روش حل معادلات به روش نیوتن رافسون :

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots x_n, \dots, x_{2n}) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots x_n, \dots, x_{2n}) = 0 \\ . \\ . \\ . \\ F_{2n}(x_1, x_2, \dots x_n, \dots, x_{2n}) = 0 \end{cases}$$

اگر $2n = N$

حال $2n$ معادله $2n$ مجهولی خواهیم داشت ،

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots x_N) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots x_N) = 0 \\ . \\ . \\ . \\ F_N(x_1, x_2, \dots x_N) = 0 \end{cases}$$

در مرحله اول جواب ها را تخمین می زنیم :

محاسبه می نمائیم	حدس می زنیم
Δx_1	x_1
Δx_2	x_2
Δx_3	x_3
.	.
.	.
.	.
Δx_N	x_n

معادلات فوق الذکر را به صورت زیر در می آوریم :

$$\begin{cases} F_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, \ldots x_N + \Delta x_n) = 0 \\ F_2(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, \ldots x_N + \Delta x_n) = 0 \\ . \\ . \\ . \\ F_N(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3, \ldots x_N + \Delta x_n) = 0 \end{cases}$$

به سری تیلر بسط می دهیم خواهیم داشت :

$$
\begin{cases}
F_1(x_1, x_2, \ldots x_N) + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3}\Delta x_3 + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_N}\Delta x_N + \text{مشتق دوم} + \text{مشتق سوم} + \ldots = 0 \\
F_2(x_1, x_2, \ldots x_N) + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_3}\Delta x_3 + \ldots + \dfrac{\partial F_2}{\partial x_N}\Delta x_N + \text{مشتق دوم} + \text{مشتق سوم} + \ldots = 0 \\
. \\
. \\
. \\
F_N(x_1, x_2, \ldots x_N) + \dfrac{\partial F_N}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dfrac{\partial F_N}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dfrac{\partial F_N}{\partial x_3}\Delta x_3 + \ldots + \dfrac{\partial F_N}{\partial x_N}\Delta x_N + \text{مشتق دوم} + \text{مشتق سوم} + \ldots = 0
\end{cases}
$$

به شکل ماتریس در می آوریم :

$$
\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ F_N \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_N} \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ \frac{\partial F_N}{\partial x_1} & \frac{\partial F_N}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial F_N}{\partial x_N} \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \Delta x_N \end{vmatrix} = 0
$$

ماتریس ژاکوبین J

با صرف نظر کردن مشتق دوم و به بعد :

$$
[F] + [J][\Delta x] \cong 0
$$

ماتریس ستونی $[F]$

ماتریس ژاکوبین $[J]$

$$[\Delta x] \cong -[J]^{-1}.[F]$$

در مرحله نخست پیدا می شود.

تمرین23 : دومعادله دو مجهولی غیرخطی زیر را به روش نیوتن رافسون حل کنید.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_1 x_2 - 1 = 0 \\ 2x_2 + x_1 x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

تخمین اولیه :

$$\begin{cases} x_1^{(0)} = 0 \\ x_2^{(0)} = 0 \end{cases}$$

به جای x_1 و x_2 در معادلات صفر قرار داده و ماتریس ستونی F را پیدا می کنیم:

$$F^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}$$

ماتریس J (ژاکوبین) را که عبارتست از $\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$ می باشد به دست می آوریم:

$$[J] = \begin{bmatrix} 2 + x_2 & x_1 \\ -x_2 & 2 - x_1 \end{bmatrix}$$

تخمین اولیه $x_2^{(0)} = 0, x_1^{(0)} = 0$ را در ماتریس ژاکوبین جایگذاری می نمائیم.

$$[J]=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad [J]^{-1}_{(0)}=\frac{[J]^{(0)}_{adj}}{\Delta}=\frac{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}{4}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[\Delta]^{(0)}=-[J]^{-1}_{(0)}[F]^{(0)}=-\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ +1 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}$$

در مرحله بعدی :

$$\begin{cases} x_1^{(0)} + \Delta x_1^{(0)} = x_1^{(0)} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ x_2^{(0)} + \Delta x_2^{(0)} = x_2^{(0)} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$F^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ +\frac{1}{4} \end{bmatrix}, [J]^{(1)} = \begin{bmatrix} +\frac{3}{2} & +\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} & +\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$[J]_{(1)}^{-1} = \frac{[J]_{adj}^{(1)}}{\Delta} = \frac{\begin{bmatrix} +\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & +\frac{3}{2} \end{bmatrix}}{2} \qquad \Delta = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$[J]^{-1}_{(1)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} +\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & +\frac{3}{2} \end{bmatrix} \ , \ [\Delta x]^{(1)} = -[J]^{1}_{(1)}[F]^{(1)} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} +\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & +\frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ +\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\Delta x^{(1)} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & +\frac{1}{4} \\ +\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ +\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0.25 \\ -0.25 \end{bmatrix}$$

با یکی دو بار تکرار دیگر جواب دقیق تر به دست می آید.

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = x_1^{(1)} + \Delta x_1^{(1)} = \frac{1}{2} + 0.25 = 0.75 \\ x_2^{(2)} = x_2^{(1)} + \Delta x_2^{(1)} = \frac{1}{2} - 0.25 = -0.75 \end{cases}$$

در روش نیوتن رافسون زودتر از روش گوس سیدال به جواب می رسیم.