ریاضی فیزیک
(مجموعه فیزیک)

مجموعه فیزیک

ریاضی فیزیک 1و2

فهرست مطالب

فصل اول:بردارها

یک بردار پاره خطی است، جهت دار. که هر بردار شامل طول و جهت می باشد.

چنانچه دو بردار همسنگ یا یکی باشند، آن دو طول مساوی داشته و موازی بوده و هم جهت می باشند.

تعریف: برابری بردارها

$$ai+bj+c\hat{k}=a'i+b'\hat{j}+c'k \quad \Rightarrow \quad a=a', b=b', c=c'$$

جمع جبری

دو بردار را می توان از طریق جبری با افزودن مؤلفه های عددی متناظرشان به یکدیگر با هم جمع کرد.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_1}=a_1\hat{i}+b_1\hat{j}+c_1\hat{k}\\ \overrightarrow{v_2}=a_2\hat{i}+b_2\hat{j}+c_2\hat{k}\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}=(a_1+a_2)\hat{i}+(b_1+b_2)\hat{j}+(c_1+c_2)\hat{k}$$

تفریق

قرینه بردار v بردار $-v$ است که طولی برابر طول v دارد اما جهت آن مخالف جهت v است.

برای کم کردن بردار v_2 از بردار v_1، $-v_2$ را به v_1 می افزاییم.

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{v_1}+(-\overrightarrow{v_2})=\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}$$

و مانند جمع جبری با آن رفتار می کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_1}=a_1\hat{i}+b_1\hat{j}+c_1\hat{k}\\ \overrightarrow{v_2}=a_2\hat{i}+b_2\hat{j}+c_2\hat{k}\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}=(a_1-a_2)\hat{i}+(b_1-b_2)\hat{j}+(c_1-c_2)\hat{k}$$

طول بردار $v=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$ را معمولاً با $|v|$ نشان می دهند که می توان آن را اندازه v خواند.

$$|v|=|a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

جهت بردار

جهت بردار ناصفر A بردار واحدی است که از تقسیم A بر طولش به دست می آید:

جهت بردار $A = \frac{A}{|A|}$

برای یافتن بردار بین دو نقطه مطابق شکل زیر عمل می کنیم:

نقطه P_1 به مختصات داده شده است:

$P_1(x_1, y_1, z_1)$

نقطه P_2 به مختصات داده شده است:

$P_2(x_2, y_2, z_2)$

$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$

فاصله بین دو نقطه : $|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

مثال (1-1): مطلوبست بردار واحد U که در جهت بردار از $P_1(3,0,3)$ تا $P_2(2,1,0)$ باشد.

حل:

$\overrightarrow{P_1P_2} = (2-3)\hat{i} + (1-0)\hat{j} + (0-3)\hat{k}$

$= -\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (3)^2} = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$

$\vec{U} = \frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{|P_1P_2|} = \frac{-\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{11}} = -\frac{1}{\sqrt{11}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{11}}\hat{j} - \frac{3}{\sqrt{11}}\hat{k}$

مثال (2-1): مطلوبست برداری به طول 12 واحد در جهت بردار $\vec{A}$

$\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

حل:

$|A| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$

$\frac{A}{|A|} = \frac{2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}}{3} = \frac{2}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{1}{3}\hat{k}$

$12 \times \frac{A}{|A|} = 12(\frac{2}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{1}{3}\hat{k}) = 8\hat{i} + 8\hat{j} - 4\hat{k}$

ضرب اسکالر یا نقطه ای

اینک در پی تعریف بردارها، به ترکیب آن ها در یکدیگر اقدام می کنیم. قوانین مربوط بـه ترکیـب بردارهـا بایـد از نظـر ریاضی سازگار باشد.

با ترکیب $AB\cos\theta$ که در آن A و B بزرگی دو بردار و θ زاویه بین آن ها است، در فیزیک زیاد برخورد می کنیم:

کار = نیرو × جا به جایی × $\cos\theta$

با در نظر داشتن چنین کاربردهایی، ضرب اسکالر یا نقطه ای یا داخلی بنا به تعریف عبارت است از:

$$A\cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \sum_i A_i B_i$$

حاصل ضرب اسکالر دو بردار، یک کمیت اسکالر است. توجه می کنیم که بنابراین تعریف داریم:

$$A\cdot B = B\cdot A$$

یعنی ضرب اسکالر تعویض پذیر است.

بردارهای یکّه k , j , i در روابط زیر صدق می کنند.

$$i\cdot i = j\cdot j = k\cdot k = 1$$

در حالی که

$$i\cdot j = i\cdot k = j\cdot k = 0$$
$$j\cdot i = k\cdot i = k\cdot j = 0$$

می توان به راحتی نشان داد:

$$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$$

اثبات:

فرض می کنیم:
$$\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$$
$$\vec{C} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$A\cdot(B+C) = A\cdot((b_1+c_1)\hat{i} + (b_2+c_2)\hat{j} + (b_3+c_3)\hat{k})$$

$$= a_1(b_1+c_1) + a_2(b_2+c_2) + a_3(b_3+c_3)$$
$$= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 + a_3b_3 + a_3c_3$$
$$= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)$$
$$= \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$$

بردارهای متعامد

دو بردار که حاصل ضرب اسکالری آن ها برابر صفر است متعامد هستند، زیرا که $(\cos 90=0)$

مثال (1-3): زاویه بین بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را به دست آورید:

$$\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + k$$
$$\vec{B} = 2\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})\cdot(2\hat{j} + 4\hat{k}) = 3(0) - 2(2) + 1(4) = 0$$

دو بردار متعامد هستند $\Rightarrow$ چون ضرب داخلی دو بردار صفر شده است $\Rightarrow$

تصاویر برداری

برداری که از تصویر کردن برداری مانند B بر راستای برداری مانند A به دست می آید، تصویر رداری B بر A نامیده می شود. اگر زاویه بین دو بردار A و B حاده باشد تصویر برداری B بر A برابر است با $|B|\cos\theta$ و اگر زاویه بین دو بردار منفرجه باشد کسینوسش منفی است و طول تصویر برداری B بر A برابر است با $-|B|\cos\theta$

شکل شکل

مؤلفه عددی B در جهت A را می توان از تقسیم طرفین رابطه $A\cdot B = |A||B|\cos\theta$ به دست آورد.

$$|B|\cos\theta = \frac{A\cdot B}{|A|} = B\cdot\frac{A}{|A|}$$

مثال (1-4):

تصویر برداری $B = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2k$ را بر $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2k$ به دست آورید.

$$\text{تصویر } \vec{B} \text{ بر بردار } \vec{A} = |B|\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|A|} = \frac{(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})\cdot(6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (2)^2}} = \frac{6-4+4}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$$

اما این مقدار اندازه تصویر می باشد.

برای به دست آوردن بردار تصویر $\vec{B}$ بر $\vec{A}$ باید این عدد را در بردار یکّه $\vec{A}$ ضرب کنیم.

$$\text{تصویر } B \text{ بر } A = B\cos\theta = \frac{\vec{A}}{|A|} = 2\frac{(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})\cdot(6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (2)^2}} = \frac{2}{3}\hat{i} - \frac{4}{3}\hat{j} + \frac{4}{3}\hat{k}$$

خط های واقع در صفحه و فواصل نقطه ها از خط

ضرب عددی بردارها روش نوینی برای درک معادلات خطوط واقع در صفحه و نیز راه سریعی برای محاسبه فواصل نقـاط تا خطوط به دست می دهد.

فرض می کنیم L خطی باشد که از نقطه $P_0(x_0, y_0)$ می گذرد و بردار $N = a\hat{i} + b\hat{j}$ عمود است.

نقطه ای دلخواه به مختصات $P(x, y)$ بر این خط واقع است.

که خواهیم داشت:

$$N \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

از این معادله برای به دست آوردن معادله خط استفاده می شود.

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$
$$ax + by = a_0x_0 + by_0$$

در این صورت $ax + by = c$ که $ax_0 + by_0 = c$

مثال (۱– ۵):

معادله خط گذرنده از $P_0(3,5)$ و عمود بر $\vec{N} = \hat{i} + 2\hat{j}$ را بیابید.

حل:

$$((x - 3)\hat{i} + (y - 5)\hat{j}) \cdot (\hat{i} + 2\hat{j}) = 0$$

$$(x - 3)1 + (y - 5)2 = 0 \qquad x - 3 + 2y - 10 = 0$$

$$x + 2y = 10 + 3 = 13 \Rightarrow x + 2y = 13$$

چنانچه نقطه ای به مختصات $P(x_0, y_0)$ فاصله اش از خطی به معادله $ax + by = c$ خواسته شود:

حل: ابتدا یک نقطه دلخواه مانند R که در معادله خط صدق کند را انتخاب می کنیم. $R = (x, y)$

آن گاه تصویر بردار $\overrightarrow{RP}$ بر بردار عمود بر خط همان فاصله نقطه P از خط می باشد.

$\dfrac{\overrightarrow{RP} \cdot \vec{N}}{|N|} =$ فاصله نقطه P از خطی که بر $\vec{N}$ عمود باشد.

مثال (۱– ۶):

فاصله نقطه $(1,2)$ را از خط $2x + y = 10$ به دست آورید:

حل: ابتدا یک نقطه دلخواه روی خط در نظر می گیریم $R=(5,0)$

آن گاه فاصله نقطه P از خط به قرار زیر است:

$$\text{فاصله P از خط} = \left|\frac{\overrightarrow{R\cdot P}\cdot \vec{N}}{|N|}\right| = \left|\frac{((5-1)\hat{i}+(0-2)\hat{j})\cdot(2\hat{i}+\hat{j})}{\sqrt{(2)^2+(1)^2}}\right| = \left|\frac{10-2}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{8}{\sqrt{5}}\right| = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

ضرب برداری

اگر A و B موازی نباشند صفحه ای را مشخص می کنند. بردار واحد $\hat{n}$ را عمود بر این صفحه طبق قانون دست راست بر می گزینیم. با این ترتیب که $\hat{n}$ را آن بردار واحد قائم می گیریم که انگشتان دست راست ما روی زاویه θ در جهت از A به B خم شود، این بردار در جهت انگشت شست ما باشد.

$$\vec{A}\times\vec{B}=n|A||B|\sin\theta$$

θ زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می باشد.

توجه شود که در ضرب برداری جا به جا شدن بردارها سبب قرینه شدن نتیجه می شود.

$$\vec{B}\times\vec{A}=-(\vec{A}\times\vec{B})$$

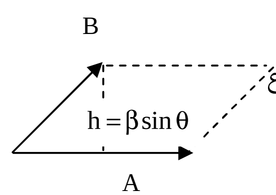
بر خلاف ضرب اسکالر، ضرب برداری تعویض پذیر نیست.

با استفاده از تعریف ضرب برداری در مورد بردارهای واحد k , j , i داریم:

$$\hat{i}\times\hat{j}=-(\hat{j}\times\hat{i})=k$$
$$\hat{j}\times\hat{k}=-(\hat{k}\times\hat{j})=\hat{i}$$
$$\hat{k}\times\hat{i}=-(\hat{i}\times\hat{k})=\hat{j}$$

$$\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$$

$|A\times B|$ مساحت متوازی الاضلاعی است که اضلاع آن بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می باشد.



ارتفاع × قاعده = مساحت متوازی الاضلاع

$$|A|\times|B|\sin\theta$$

$$\Rightarrow\ |\text{مساحت متوازی الاضلاع}|=|A||B|\sin\theta=|\vec{A}\times\vec{B}|$$

قوانین شرکت پذیری و توزیع پذیری

طبق قاعده ضرب برداری خاصیت شرکت پذیری ندارد. چنانچه می دانیم $(A\times B)\times C$ در صفحه A و B قرار دارد. حال آن که $A\times(B\times C)$ در صفحه B و C است. اما:

$$(r\vec{A})\times(s\vec{B})=(rs)\vec{A}\times\vec{B}$$

در مورد ضرب برداری، قوانین توزیع پذیری برداری برقرار است.

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$$
$$(\vec{B}+\vec{C})\times\vec{A}=\vec{B}\times\vec{A}+\vec{C}\times\vec{A}$$

فرمول دترمینانی $A\times B$:

حال هدف ما این است که نشان دهیم مؤلفه های $\vec{A}\times\vec{B}$ را چگونه از مؤلفه های A و B به دست آوریم:

$$\vec{A}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}\quad,\ \vec{B}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})\times(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})$$

$$=a_1b_1(\hat{i}\times\hat{i})+a_1b_2(\hat{i}\times\hat{j})+a_1b_3(\hat{i}\times\hat{k})+a_2b_1(\hat{j}\times\hat{i})+a_2b_2(\hat{j}\times\hat{j})+a_2b_3(\hat{j}\times\hat{k})+a_3b_1(\hat{k}\times\hat{i})+a_3b_2(\hat{k}\times\hat{j})+a_3b_3(\hat{k}\times\hat{k})$$

$$=0+a_1b_2\hat{k}+a_1b_3(-\hat{j})+a_2b_1(-\hat{k})+0+a_2b_3(\hat{i})+a_3b_1(\hat{j})+a_3b_2(-\hat{i})+0$$
$$=(a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}$$

این جمله همان دترمینان مقابل است:

$$A\times B=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

بنابراین برای تشکیل ضرب برداری می توان از تشکیل دترمینانی با اعضای مربوطه بهره برد.

مثال (۱– ۷):

مساحت مثلثی سه رأس آن $P(+1,1,0)$ و $Q(3,5,1)$ و $M(7,2,3)$ می باشد. مطابق P و Q و M هستند را بیابید:

حل:

$$\overrightarrow{MP}=(7-1)\hat{i}+(2-1)\hat{j}+(3-0)\hat{k}=6\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$$

$$\overrightarrow{QP}=(3-1)\hat{i}+(5-1)\hat{j}+\hat{k}=2\hat{i}+4\hat{j}+\hat{k}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{|\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{QP}|}{2}$$

$$\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{QP} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (1\times1-4\times3)\hat{i} + (3\times2-6\times1)\hat{j} + (6\times4-2\times1)\hat{k} = -11\hat{i} + 0\hat{j} + 22\hat{k}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{QP}| = \sqrt{(-11)^2 + (0)^2 + (22)^2} = 11\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \ \text{مساحت مثلث} = \frac{11\sqrt{5}}{2}$$

معادله خط در فضای سه بعدی

فرض می کنیم L خطی باشد که از نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ بگذرد و موازی با بردار $V = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$ باشد. پس L مجموعه نقطه ای است که مانند $P(x, y, z)$ بردار $\overrightarrow{PP_0}$ موازی با $\vec{V}$ باشد.

توجّه: در اینجا برخلاف نمونه های قبلی ما برداری را که خط بر آن عمود می باشد را نداریم بلکه هادی خط را داریم:

$$\overrightarrow{P_0P} = tv$$

اگر این معادله را بر حسب مؤلفه ها بنویسیم خواهیم داشت:

$$(x - x_0)\hat{i} + (y - y_0)\hat{j} + (z - z_0)\hat{k} = t(A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k})$$

$$x - x_0 = tA \qquad y - y_0 = tB \qquad z - z_0 = tC$$

$$x = x_0 + tA \ , \ y = y_0 + tB \ , \ z = z_0 + tC$$

مثال (۱- ۸):

معادلات پارامتری خط گذرنده از نقطه $(5,1,2)$ و موازی با بردار $\vec{V}$ را بیابید. $(V = 2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k})$

حل:

$$A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k} = (2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k})$$

$$P_0(x_0, y_0, z_0) = (5,1,2)$$

$$\Rightarrow \ x = 5 + 2t \ , \ y = 1 + 4t \ , \ z = 2 - t$$

فاصله یک نقطه از یک خط

برای یافتن فاصله نقطه P از خط L گام های زیر را بر می داریم:

گام 1: نقطه Q را روی L چنان بر می گزینیم که نزدیک ترین فاصله را تا P داشته باشد.

گام 2: فاصله P تا Q را محاسبه می کنیم.

مثال (۱- ۹):

فاصله نقطه $P(1,1,5)$ را از خط زیر بیابید.

$$x=1+t \ , \ y=3-t \ , \ z=t$$

گام 1: ابتدا نقطه Q را از خط انتخاب می کنیم، که بر خط منطبق است.

$$Q(1+t,3-t,t)$$

می خواهیم مقداری از t را بیابیم که به ازای آن فاصله P و Q مینیمم شود.

بنابراین:

فاصله P تا Q $\quad f(t)=\sqrt{(1+t-1)^2+(3-t-1)^2+(t-5)^2}$

$f(t)$ وقتی مینیمم می شود که عبارت زیر رادیکال مینیمم شود.

$$L(t)=t^2+(2-t)^2+(t-5)^2$$

حال مشتق می گیریم و مشتق را برابر صفر قرار می دهیم.

$$L'(t)=0=2t+2(2-t)(-1)+2(t-5)$$

$$=2t-4+2t+2t-10=6t-14=0 \Rightarrow t=\frac{7}{3}$$

حال t به دست آمده را در $f(t)$ قرار می دهیم تا فاصله به دست آید.

$$f(t)=\sqrt{(\frac{7}{3})^2+(2-\frac{7}{3})^2+(\frac{7}{3}-5)^2}$$

$$=\sqrt{(\frac{7}{3})^2+(-\frac{1}{3})^2+(-\frac{8}{3})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{114}}{9}=\frac{\sqrt{114}}{3}$$

معادله خط

فرض می کنیم M صفحه ای در فضاست که از نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ می گذرد و بر بردار $N = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k}$ عمود است. (قائم)، پس مجموعه ای از نقاط مانند $P(x, y, z)$ در صورتی تشکیل صفحه M را می دهند که بردار $\overrightarrow{P_0P}$ بر N عمود باشد.

$$\overset{r}{N} \cdot \overrightarrow{PP_0} = 0 \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0$$

$$\boxed{Ax + By + Cz = D \quad , \quad D = Ax_0 + By_0 + Cz_0}$$

که کادر بالا معادله صفحه را نشان می دهد.

مثال (۱- ۱۰):

معادله صفحه ای را بیابید که از $P_0(-3,0,6)$ بگذرد و بر $N = 5\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ عمود باشد.

حل:

$$((x - (-3))\hat{i} + (y - 0)\hat{j} + (z - 6)\hat{k}) \cdot (5\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) = 0$$

$$\Rightarrow 5(x + 3) + 2y + (z - 6) = 0$$

$$5x + 2y + z = -15 + 0 + 6 = -9$$

$$5x + 2y + z = -9$$

زاویه بین دو صفحه

بنا بر تعریف زاویه ای که بین دو صفحه متقاطع تشکیل می شود، زاویه حاده ای است که دو بردار قائم آن ها با هم می سازند.

مثال (۱- ۱۱):

زاویه بین دو صفحه $3x + 6y - 2z = 30$ و $2x + y + 2z = 72$ را تعیین کنید.

حل:

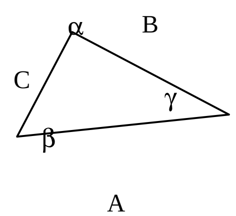
$$N_1 = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$$
$$N_2 = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$$

حال باید زاویه بین دو بردار $\vec{N_1}$ و $\vec{N_2}$ را به دست آوریم:

$$\cos\theta=\frac{\vec{N_1}\cdot\vec{N_2}}{|N_1||N_2|}=\frac{(3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k})\cdot(2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{9+36+4}\times\sqrt{4+1+4}}=\frac{6+6-4}{7\times3}=\frac{8}{21}\Rightarrow\theta=\cos^{-1}\frac{8}{21}$$

قانون سینوس ها

اگر در یک مثلث اندازه سه ضلع به ترتیب A ، B و C باشد و اندازه زوایای روبرو به ضلع های مثلث به ترتیـب α، β و γ باشد مطابق شکل:



رابطه بین اندازه اضلاع و سینوس زوایا مطابق زیر خواهد بود:

$$\frac{\sin\alpha}{A}=\frac{\sin\beta}{B}=\frac{\sin\gamma}{C}$$

نمونه سوالات تستی

۱- تصویر برداری $\vec{A} = 3\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ بر $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ کدام می باشد؟

1) $-\frac{1}{3}\hat{i} - \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$
2) $-\frac{1}{9}\hat{i} - \frac{2}{9}\hat{j} + \frac{2}{9}\hat{k}$
3) $+\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{2}{3}\hat{k}$
4) $+\frac{1}{9}\hat{i} + \frac{2}{9}\hat{j} - \frac{2}{9}\hat{k}$

۲- معادله خط گذرنده از $P_0(3,1,2)$ و عمود بر $\vec{N} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$ را بیابید.

1) $x + 2y + z = 7$
2) $x + 2y + z = -7$
3) $x - 2y + z = -7$
4) $-x + 2y + z = -7$

۳- فاصله نقطه $P(5,3)$ را از خط $x + 3y = 6$ بیابید.

1) $\frac{8\sqrt{10}}{10}$
2) $-\frac{2}{\sqrt{10}}$
3) $\frac{8}{\sqrt{10}}$
4) $+\frac{2\sqrt{10}}{10}$

۴- مطلوب است معادلات پارامتری خطی که از نقاط $P(3,2,3)$ و $Q(1,-1,4)$ می گذرد:

1) $x = -2t + 3$, $y = -3t + 3$, $z = -t + 1$
2) $x = -2t + 1$, $y = -3t - 1$, $z = -t + 4$
3) $x = -2t + 3$, $y = -3t + 2$, $z = t + 3$
4) $x = -2t + 1$, $y = -3t - 1$, $z = t - 4$

۵- زاویه بین صفحات $6x + 6y - 3z + 5 = 0$ و $x - 2y + 2z - 4 = 0$ برابر است با:

1) $\arccos(-\frac{4}{9})$
2) $\arccos(-\frac{9}{4})$
3) $\pi - \arccos(-\frac{4}{9})$
4) $\pi - \arccos(-\frac{9}{4})$

۶- برداری موازی فصل مشترک دو صفحه $3x - 6y - 2z = 64$ و $2x + y - 2z = 25$ کدام گزینه می باشد؟

1) $14\hat{i} - 2\hat{j} + 15\hat{k}$
2) $14\hat{i} + 2\hat{j} + 15\hat{k}$
3) $14\hat{i} + 2\hat{j} - 15\hat{k}$
4) $7\hat{i} + 2\hat{j} + 15\hat{k}$

۷- معادلات پارامتری فصل مشترک دو صفحه $3x - 6y - 2z = 15$ و $3x + y + z = -6$ کدام می تواند باشد؟

1) $\begin{cases} x = -4t + 11 \\ y = 9t + 3 \\ z = 21t \end{cases}$
2) $\begin{cases} x = 4t + 11 \\ y = 9t + 3 \\ z = -21t \end{cases}$
3) $\begin{cases} x = -4t + 11 \\ y = -9t + 3 \\ z = 21t \end{cases}$
4) $\begin{cases} x = -4t + 11 \\ y = -9t + 3 \\ z = 3t \end{cases}$

۸- با استفاده از قانون سینوس ها داریم:

1) $\frac{A}{\sin\alpha} = \frac{B}{\sin\beta} = \frac{C}{\sin\gamma}$
2) $C\sin\alpha = B\sin\gamma = A\sin\beta$
3) $A\sin\alpha = B\sin\beta = C\sin\gamma$
4) $\frac{\sin\alpha}{A} = \frac{\sin\beta}{B} = \frac{\sin\gamma}{C}$

۹- سه بردار زیر داده شده است $A(1,2,3)$ و $B(0,1,5)$ و $C(1,2,3)$ برداری پیدا کنید که بر $\vec{A}$ عمود بوده و در صفحه $\vec{B}$ و C واقع باشد.

1) $2B - C$
2) $6B - 17C$
3) $5B + 8C$
4) $12\vec{B} - \vec{C}$

پاسخنامه سوالات تستی

۱- حل: گزینه ۲ صحیح می باشد زیرا:

$$A\cos\theta=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|B|}=\text{اندازه تصویر}=\frac{(3\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})\cdot(\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k})}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(-2)^2}}=\frac{3(1)-1(2)+1(-2)}{3}=-\frac{1}{3}$$

$$\text{بردار تصویر}=a\cos\theta\frac{\vec{B}}{|B|}=-\frac{1}{3}\frac{(+\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k})}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(-2)^2}}=-\frac{1}{3}(\frac{1}{3}\hat{i}+\frac{2}{3}\hat{j}-\frac{2}{3}\hat{k})=-\frac{1}{9}\hat{i}-\frac{2}{9}\hat{j}+\frac{2}{9}\hat{k}$$

۲- حل: گزینه ۱ صحیح می باشد زیرا:

$$\overrightarrow{PP_0}\cdot N=0\Rightarrow((x-3)\hat{i}+(y-1)\hat{j}+(z-2)\hat{k})\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})=0$$
$$\Rightarrow(x-3)1+(y-1)2+(z-2)1=0$$

$$x-3+2y-2+z-2=0\Rightarrow x+2y+z=7$$

۳- حل: گزینه ۱ صحیح می باشد زیرا:

ابتدا یک نقطه دلخواه روی خط در نظر می گیریم: $R=(0,2)$

آن گاه داریم:

$$\left|\frac{\overrightarrow{RP}\cdot N}{|N|}\right|=\frac{((0-5)\hat{i}+(2-3)\hat{j})\cdot(1\hat{i}+3\hat{j})}{\sqrt{(1)^2+(3)^2}}=\left|\frac{(5\hat{i}-\hat{j})\cdot(\hat{i}+3\hat{j})}{\sqrt{10}}\right|=\left|\frac{-5-3}{\sqrt{10}}\right|=\left|-\frac{8}{\sqrt{10}}\right|=\frac{8\sqrt{10}}{10}$$

از آن جا که فاصله منفی نمی باشد آن عدد را با علامت + در نظر می گیریم یعنی: = فاصله

۴- حل: گزینه ۳ صحیح می باشد زیرا:

$$\overrightarrow{PQ}=(1-3)\hat{i}+(-1-2)\hat{j}+(4-3)\hat{k}=-2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$$

خط موازی با بردار $\overrightarrow{PQ}$ است.

بنابراین:

$$x=-2t+3$$
$$y=-3t+2$$
$$z=t+3$$

۵- حل: گزینه ۳ صحیح می باشد زیرا:

$$N_1=6\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k}$$
$$N_2=1\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$$

$$\cos\theta=\frac{N_1\cdot N_2}{|N_1||N_2|}=\frac{(6\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k})\cdot(\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})}{\sqrt{36+36+9}\times\sqrt{1+4+4}}=\frac{6-12-6}{9\times 3}=-\frac{12}{9\times 3}=-\frac{4}{9}$$

$$\theta=\arccos(-\frac{4}{9})$$

ولی توجه شود که در اینجا زاویه ما از 90° بیشتر شده است بنابراین باید زاویه ای که حاصل جمعش با آن 180° می شود را به عنوان زاویه صفحات اعلام کنیم.

$$\Rightarrow\theta=\pi-\arccos(-\frac{4}{9})$$

۶- حل: گزینه ۲ صحیح می باشد زیرا:

$$N_1=3\hat{i}-6\hat{j}-2\hat{k}$$
$$N_2=2\hat{i}+1\hat{j}-2\hat{k}$$

فصل مشترک دو صفحه بر نرمال هر یک از صفحات عمود می باشد.

$$\Rightarrow A=(N_1\times N_2)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 3 & -6 & -2\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=14\hat{i}+2\hat{j}+15\hat{k}$$

۷- حل: گزینه ۳ صحیح می باشد زیرا:

فصل مشترک بر نرمال هر دو صفحه عمود می باشد.

$$N_1=3\hat{i}-6\hat{j}-2\hat{k}\qquad N_2=3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\qquad \vec{A}=N_1\times\overrightarrow{N_2}$$

$$\Rightarrow\vec{A}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 3 & -6 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=-4\hat{i}-9\hat{j}+21\hat{k}$$

حال که هادی فصل مشترک به دست آمد کافی است نقطه ای را بیابیم که در هر دو صفحه باشد.

برای مثال $(z=0)$ فرض شود.

$$\begin{cases}3x-6y=15\\ 3x+y=-6\end{cases}\Rightarrow -7y=21\Rightarrow y=3$$

$$3x-6(3)=15\Rightarrow x=\frac{33}{3}=11$$

در نتیجه نقطه ای که روی هر دو صفحه باشد $(11,3,0)$ می باشد که این یکی از نقاط است.

$$x = -4t + 11$$
$$y = -9t + 3$$
$$z = 21t$$

۸- حل: گزینه ۴ مطابق نکته های ارائه شده درست است.

۹- حل:

$$\vec{B} \times \vec{C} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -7\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}$$

ابتدا برداری را می یابیم که در صفحه (B,C) عمود باشد.

$$A \times (B \times C) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -7 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -17\hat{i} - 20\hat{j} + 19\hat{k}$$

سپس برداری را پیدا می کنیم که هم بر A عمود بوده و هم بر صفحه (B,C) عمود باشد.

حال به دنبال گزینه ای هستیم که با بردار بالا موازی باشد.

$$2B - C = (0,2,10) + (-1 - 2 - 3) = (-1,0,7)$$
$$6B - 17C = (0,6,30) + (-17 - 34 - 51) = (-17,-28,-21)$$
$$5B + 8C = (0,5,25) + (8,16,24) = (8,21,49)$$
$$12B - C = (0,12,60) + (-1 - 2 - 3) = (-1,10,57)$$

همان طور که دیده می شود هیچ کدام از بردارهای داده شده با بردار $A \times (B \times C)$ موازی نیست و هیچ کدام از گزینه ها صحیح نمی باشد.

فصل دوم: گرادیان

1-2 گرادیان

فرض کنید $\varphi(x,y,z)$ تابع نقطه ای اسکالری باشد؛ یعنی تابعی که مقدارش به مقدار مختصات (x,y,z) بستگی دارد. این تابع به عنوان یک اسکالر باید در هر نقطه معلوم فضا، دارای مقداری مشخص مستقل از چرخش دستگاه مختصات باشد.

توجه: 1، 2 و 3 اندیس است.

$$\varphi'(x'_1,x'_2,x'_3)=\varphi(x_1,x_2,x_3)$$

با مشتق گیری نسبت به x'_i و با استفاده از قواعد مشتق گیری جزء به جزء می رسیم به:

$$\frac{\partial\varphi'(x'_1,x'_2,x'_3)}{\partial x'_i}=\frac{\partial\varphi(x_1,x_2,x_3)}{\partial x'_i}=\sum_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x'_i}=\sum_j a_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$$

حال پی می بریم که برداری با مؤلفه های $\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$ تشکیل داده ایم: این بردار را گرادیان φ می نامیم.

$$\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}$$

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

مثال ۲-۱:

گرادیان تابعی از r $\left(f(r)=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\right)$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\nabla f(r)=\hat{i}\frac{\partial f(r)}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial f(r)}{\partial y}+\hat{k}\frac{\partial f(r)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x}=\frac{df(r)}{dy}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}{\partial x}=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\times 2x=\frac{x}{r}$$

$$\Rightarrow \nabla f(r)=\hat{i}\frac{df(r)}{dr}\frac{x}{r}+\hat{j}\frac{df(r)}{dr}\frac{y}{r}+\hat{k}\frac{df(r)}{dr}\frac{z}{r}=(\frac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{r})\frac{df}{dr}=\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{df}{dr}=\vec{r}_0\frac{df}{dr}$$

یکی از کاربردهای مهم $\nabla\varphi$ آن است که درغوی از طول ضرب شود.

$$(\nabla\varphi)\cdot dr=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

$$=d\varphi$$

که عبارت است از تغییر اسکالر φ متناظر با تغییر مکان dr

اگر تابعی از φ به گونه ای باشد که:

$$\varphi(x,y,z)=c, \text{coust}$$

در این صورت:

$$d\varphi=(\nabla\varphi)\cdot dr=0$$

زیرا که تابع φ به صورت تابعی ثابت تعریف شده است.

این نتیجه نشان می دهد که $\nabla\varphi$ بر dr عمود است.

به طور معمول در فیزیک $E=-\nabla\varphi$ تعریف می شود که در این رابطه E میدان الکتریکی و φ پتانسیل الکتریکی می باشد. در سطوح پتانسیل که ما آن ها را به صورت سطحی که پتانسیل در آن سطح یک مقدار ثابت است، تعریف می کنیم بنا به دلیل فوق میدان همواره بر سطوح پتانسیل عمود می باشد.

مثال (۲- ۲):

به ازای $\varphi(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$ مقدار میدان در نقطه $(0,0,1)$ را محاسبه کنید.

حل:

$$E=-\nabla\varphi \qquad \nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}$$

$$\nabla\varphi=-\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\times 2x\hat{i}-\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}2y\hat{j}-\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}2z\hat{k}$$

$$-\nabla\varphi=3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}x\hat{i}+3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}y\hat{j}+3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}z\hat{k}$$

$$-\nabla\varphi(x=0, y=0, z=1)=0\hat{i}+0\hat{j}+3(0+0+1)^{-\frac{5}{2}}\times(1)\hat{k}=3\hat{k}$$

مثال (۲- ۳):

بردار یکّه عمود بر سطح $x^2+y^2+z^2=3$ را در نقطه $(1,1,1)$ بیابید و معادله صفحه مماس بر این سطح در این نقطـه را به دست آورید.

$$\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}$$

$$=2x\hat{i}+2y\hat{j}+2z\hat{k}$$

$$\nabla\varphi(x=1, y=1, z=1)=2i+2\hat{j}+2\hat{k}\Rightarrow|\nabla\varphi|=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$$

$$\hat{n}=\frac{2}{2\sqrt{3}}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$$

یک نقطه دلخواه $=(x=0, y=0, z=3)$

$$\Rightarrow(x-0)\hat{i}+(y-0)\hat{j}+(z-3)\hat{k}\cdot(\hat{n})=0$$

$$x\frac{1}{\sqrt{3}}+y\frac{1}{\sqrt{3}}+(z-3)\frac{1}{\sqrt{3}}=0$$

معادله صفحه مماس به صورت: $x+y+z-3=0\Rightarrow x+y+z=3$

مثال (۲- ۴):

اگر $\varphi(x,y,z)=3x^2y-y^3z^2$ باشد $\nabla\varphi$ را در نقطه $(1,-2,-1)$ به دست آورید:

$$\nabla\varphi=(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k})(3x^2y-y^3z^2)$$

$$=\hat{i}\frac{\partial(3x^2y-y^3z^2)}{\partial x}+\hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y-y^3z^2)+\hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(3x^2y-y^3z^2)$$

$$=6xy\hat{i}+(3x^2-3y^2z^2)\hat{j}+(-2y^3z)\hat{k}$$

$$=6(1)(-2)\hat{i}+(3(1)^2-3(-2)^2(-1)^2)\hat{j}+(-2(-2)^3(-1))\hat{k}$$

$$=-12\hat{i}-9\hat{j}-16\hat{k}$$

نکته

$$\boxed{\nabla(FG)=F\nabla G+G\nabla F}$$

$$\nabla(FG)=(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k})(FG)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(FG)\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}(FG)\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}(FG)\hat{k}$$
$$=F\frac{\partial G}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial F}{\partial x}G\hat{i}+F\frac{\partial G}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial F}{\partial y}G\hat{j}+F\frac{\partial G}{\partial z}\hat{k}+\frac{\partial F}{\partial z}G\hat{k}$$
$$=F(\frac{\partial G}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial G}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial G}{\partial z}\hat{k})+(\frac{\partial F}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\hat{k})G$$
$$=F\nabla G+G\nabla F$$

نکته:

عملگر ∇ در دستگاه های مختصات مختلف به صورت های زیر به دست خواهد آمد:

الف) دستگاه متعامد

$$\nabla f=\text{grad}f=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

ب) دستگاه استوانه ای

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial r}\hat{ei}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{e\theta}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{ez}$$

ج) دستگاه کروی

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial r}\hat{er}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{e\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{e\varphi}$$

مثال (۲- ۵):

اگر پتانسیل الکتریکی ناشی از ما بر نقطه ای $\frac{kq}{r}$ باشد میدان الکتریکی متناظر را حساب کنید.

حل: با توجه به این که باید دستگاه کروی برای ما بر نقطه ای در نظر گرفته شود و با توجه به این که $E=-\nabla\varphi$ که φ پتانسیل الکتریکی می باشد خواهیم داشت:

$$E=-\frac{\partial}{\partial r}(\frac{kq}{r})\hat{er}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{kq}{r})\hat{e\theta}-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\frac{kq}{r})\hat{e\varphi}$$

$$=-kq(-1)r^{-2}\hat{er}=\frac{kq}{r^2}\hat{er}$$

دیورژانس Ñ x

مشتق گیری از یک تابع برداری تعمیم ساده ای از مشتق گیری کمیت های اسکالر یا عددی است.

اگر فرض کنیم مکان یک جسم متحرک را با $\vec{r}(r)$ (بردار مکان $\vec{r}$) نشان دهند، در این صورت سرعت خطی به صورت:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r(t+\Delta t)-r(t)}{\Delta t}=\vec{V}$$

که $\vec{V}$ بردار سرعت خطی می باشد.

اگر بردار مکان $\vec{r}(t)$ را به مؤلفه های دکارتی تجزیه کنیم، $\frac{d\vec{r}}{dt}$ همواره به صورت جمع برداری سه مشتق اسکالر در فضای سه بعدی است. در سایر دستگاه های مختصات (فصل آینده) وضعیت کمی پیچیده تر می شود، زیرا جهت بردارهای یکه در این دستگاه های مختصات ثابت نیست.

دیدیم که ما ∇ را به صورت یک عملگر برداری تعریف کردیم، اینک با در نظر گرفتن خواص برداری و خواص مشتق گیری از یک بردار حاصل اعمال آن را بر یک بردار دیگر بررسی می کنیم.

$$\nabla\cdot V=\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}+\frac{\partial V_z}{\partial z}$$

به عملگر ∇_0 دیورژانس می گویند که عملگری است که اگر چه بر بردارها اعمال می شود ولی خودش اسکالر است.

می توان $\nabla\cdot\vec{F}$ را به صورت ضرب داخلی عملگر $\vec{\nabla}$ و بردار $\vec{F}$ در نظر گرفت.

$$\nabla\cdot\vec{F}=(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k})\cdot(F_x\hat{i}+F_y\hat{j}+F_z\hat{k})$$

$$=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

مثال (۲- ۶):

$\nabla_0\vec{r}f(r)$ را به دست آورید:

$$\nabla\cdot\vec{r}f(r)=\frac{\partial}{\partial x}[xf(r)]+\frac{\partial}{\partial y}[yf(r)]+\frac{\partial}{\partial z}[zf(r)]$$

$$=f(r)+\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}x+f(r)\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}y+f(r)+\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}z$$

$$=3f(r)+\frac{x^2}{r}\frac{df}{dr}+\frac{y^2}{r}\frac{df}{dr}+\frac{z^2}{r}\frac{df}{dr}$$

$$=3f(r)+r\frac{df}{dr}$$

چرا که $\frac{df}{dx}=\frac{x}{r}$ و به همین ترتیب می توان ثابت نمود:

$$\nabla\cdot(\vec{A}+\vec{B})=\nabla_0\vec{A}+\nabla_0\vec{B}$$

زیرا:

$$\nabla\cdot(\vec{A}+\vec{B})=\frac{\partial}{\partial x}(A_x+B_x)+\frac{\partial}{\partial y}(A_y+B_y)+\frac{\partial}{\partial z}(A_z+B_z)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}A_x+\frac{\partial}{\partial x}B_x+\frac{\partial}{\partial y}A_y+\frac{\partial}{\partial y}B_y+\frac{\partial}{\partial z}A_z+\frac{\partial}{\partial z}B_x=\nabla_0\vec{A}+\nabla_0\vec{B}$$

نکته: توجه کنید $\nabla\cdot\vec{V}$ هرگز با $\vec{V}\cdot\nabla$ یکسان نمی باشد.

می توان نشان داد:

$$\nabla\cdot(\varphi\vec{A})=\nabla\varphi\cdot\vec{A}+\varphi(\nabla\cdot\vec{A})$$

که در این جا φ تابعی اسکالر و $\vec{A}$ تابعی برداری است.

$$\nabla\cdot(\varphi\vec{A})=\frac{\partial}{\partial x}\varphi A_x+\frac{\partial}{\partial y}\varphi A_y+\frac{\partial}{\partial z}\varphi A_z$$

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial x}A_x+\varphi\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}A_y+\varphi\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}A_z+\varphi\frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$=\frac{\partial\varphi}{\partial x}A_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}A_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}A_z+\varphi(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z})$$
$$=\nabla\varphi\cdot\vec{A}+\varphi\nabla\cdot\vec{A}$$

مثال (۲- ۷):

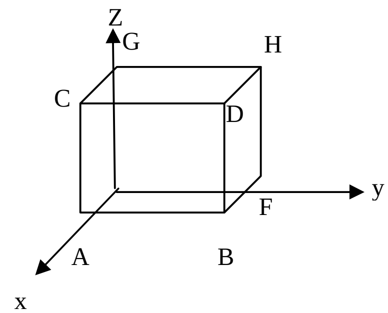
$\nabla\cdot\vec{r}r^{n-1}$ را حساب کنید.

$$\nabla\cdot\vec{r}r^{n-1}=\nabla r^{(n-1)}\cdot\vec{r}+r^{n-1}\nabla\cdot\vec{r}$$

$$=(\frac{d}{dr}r^{n-1}\frac{\partial r}{\partial x}\hat{i}+\frac{dr^{n-1}}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}\hat{j}+\frac{dr^{n-1}}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}\hat{k})\cdot(\vec{r})+3r^{n-1}$$
$$=(n-1)r^{n-2}[\frac{x}{r}x+\frac{y}{r}y+\frac{z}{r}z]+3r^{n-1}$$
$$=r(n-1)r^{n-2}+3r^{n-1}=(n-1)r^{n-1}+3r^{n-1}$$
$$=(n+2)r^{n-1}$$

برای آن که تصویری از معنای فیزیکی دیورژانس داشته باشیم، بردار $\vec{V}(x,y,z)$ را به صورت سرعت در یک شاره و $f(x,y,z)$ را به صورت چگالی در آن نقطه در نظر می گیریم.

حجم کوچکی به صورت $dx\ dy\ dz$ را مطابق شکل (1- 1) در نظر می گیریم.



شکل (1-1)

شاره ای که در واحد زمان (در جهت مثبت محور x) از وجه $EFGH$ به درون این حجم جاری می شود عبارت است از $fV_x|_{x=0}\,dydz$ چرا که مؤلفه های fV_y و fV_z بر این وجه مماس اند و در شارش از این حجم نقشی ندارند. آهنگ شارش به خارج از سطح $ABCD$ نیز به صورت $fV_x|_{x=dx}\,dydz$ است.

x آهنگ شارش ورودی در جهت محور = $fV_x|_{x=0}\,dydz$

x آهنگ شارش خروجی در جهت محور = $fV_x|_{x=dx}\,dydz = [fV_x + \frac{\partial}{\partial x}(fV_x)dx]_{x=0}dydz$

در اینجا جمله مشتق جمله ای است که امکان غیر یکنواخت بودن چگالی یا سرعت را مطرح می کند.

یعنی ممکن است شاره تراکم پذیر باشد و چگالی یکنواخت نداشته باشد. جمله مرتبه صفر $\partial V_x|_{x=0}$ را که متناظر با شارش یکنواخت است حذف می کنیم.

آهنگ شارش خروجی $|_x = \frac{\partial}{\partial x}(fV_x)dxdydz$

که در حقیقت به صورت زیر است:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{fV_x(\Delta x,0,0) - fV_x(0,0,0)}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial x}[fV_x(x,y,z)]|_{0,0,0}$$

$$\text{شار خروجی خالص} = [\frac{\partial}{\partial x}(fV_x) + \frac{\partial}{\partial y}(fV_y) + \frac{\partial}{\partial z}(fV_z)]dxdydz$$

چرا که:

شار خروجی خالص = شار خروجی خالص در راستای محور x + شار خروجی خالص در راستای محور y + شار خروجی خالص در راستای محور z

$$\Rightarrow \text{شار خروجی خالص} = \nabla \cdot (f\vec{V})dxdydz$$

مثال (۲– ۸):

اگر پتانسیل الکتریکی ناشی از بار نقطه ای $\varphi=\dfrac{kq}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ باشد میدان الکتریکی متناظر را حساب کنید.

حل:

این مسئله را در دستگاه متعامد حل می کنیم.

$$E=-\nabla\varphi$$

$$E=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}=-\frac{\partial}{\partial x}(kq(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}})\hat{i}-\frac{\partial}{\partial y}(kq(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}})\hat{j}-\frac{\partial}{\partial z}(kq(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}})\hat{k}$$

$$=-kq(-\frac{1}{2})(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\times 2x\hat{i}-kq(-\frac{1}{2})(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}2y\hat{j}-kq(-\frac{1}{2})(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}2z\hat{k}$$

$$=\frac{kq(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{kq\vec{r}}{r^3}$$

مثال (۲– ۹):

با مشتق گرفتن از مؤلفه ها نشان می دهد که درست مانند مشتق گیری از حاصل ضرب دو تابع جبری داریم:

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B})=\frac{dA}{dt}\cdot B+A\cdot\frac{dB}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B})=\frac{d}{dt}(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)=\frac{dA_x}{dt}B_x+A_x\frac{dB_x}{dt}+\frac{dA_y}{dt}B_y+A_y\frac{dB_y}{dt}+\frac{dA_z}{dt}B_z+A_z\frac{dB_z}{dt}$$

$$=\frac{dA_x}{dt}B_x+\frac{dA_y}{dt}B_y+\frac{dA_z}{dt}B_z+A_x\frac{dB_x}{dt}+A_y\frac{dB_y}{dt}+A_z\frac{dB_z}{dt}$$
$$=\frac{d}{dt}(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})\cdot(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})+(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})\cdot\frac{d}{dt}(B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k})$$
$$=\frac{d}{dt}A\cdot B+A\cdot\frac{dB}{dt}$$

به همین ترتیب می توان نشان داد:

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B})=\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}$$

مثال (۲– ۱۰):

نشان دهید $\nabla\cdot\nabla\varphi=\nabla^2\varphi$ که $\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$

و سپس $\nabla\cdot\nabla\varphi$ به شرطی که $\varphi=2x^3y^2z^4$ باشد را حساب کنید.

$$\nabla\cdot\nabla\varphi=\nabla\cdot(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k})$$

$$=(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k})\cdot(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k})$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial\varphi}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial\varphi}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial\varphi}{\partial z})$$

$$=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

$$\Rightarrow\varphi=2x^3y^2z^4\Rightarrow\nabla_0\nabla\varphi=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial\varphi}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial\varphi}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial\varphi}{\partial z})$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(6x^2y^2z^4)+\frac{\partial}{\partial y}(4x^3yz^4)+\frac{\partial}{\partial z}(8x^3y^2z^3)$$

$$=12xy^2z^4+4x^3z^4+24x^3y^2z^2)$$

مثال (۲- ۱۱):

ثابت کنید:

$$\nabla^2(\frac{1}{r})=0$$

$$\frac{1}{r}=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\nabla(\frac{1}{r})=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{r})\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{r})\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{r})\hat{k}$$

$$=(-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\times 2x)\hat{i}+(-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\times 2y)\hat{j}+(-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\times 2z)\hat{k}$$

$$=-x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\hat{i}-y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\hat{j}-z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\hat{k}$$

$$\nabla\cdot\nabla(\frac{1}{r})=\frac{\partial}{\partial x}(-x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}})+\frac{\partial}{\partial y}(-y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}})+\frac{\partial}{\partial z}(-z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}})$$

$$=-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\times 2x^2-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}2y^2-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$+\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}2z^2$$

$$=-3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}(2x^2+2y^2+2z^2)$$
$$=-3(r^2)^{-\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}(r^2)^{-\frac{5}{2}}(2r^2)$$
$$=-3r^{-3}+3r^{-5}\times r^2=-3r^{-3}+3r^{-3}=0$$

به معادله $\nabla^2\varphi=0$ معادله پالایش گفته می شود.

مثال (۲– ۱۲):

$\nabla_0(\frac{\vec{r}}{r^3})$ را حساب کنید.

$$\nabla\cdot(\frac{\vec{r}}{r^3})=\nabla\cdot(r^{-3}\vec{r})=\nabla(r^{-3})\cdot\vec{r}+r^{-3}(\nabla\cdot(\vec{r}))$$

به دلیل این که $\nabla\cdot(\varphi\vec{A})=\nabla\varphi\cdot A+\varphi(\nabla\cdot\vec{A})$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}(r^{-3})\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}(r^{-3})\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}(r^{-3})\hat{k}\right)\cdot\vec{r}+r^{-3}(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z})$$
$$=\left((\frac{dr^{-3}}{dr}\frac{\partial r}{\partial x})\hat{i}+(\frac{d(r^{-3})}{dr}\frac{\partial r}{\partial y})\hat{j}+\frac{d(r^{-3})}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\vec{r}+3r^{-3}$$

در صفحات قبل نشان دادیم $(\frac{x}{r^2}=\frac{\partial r}{\partial x})$

$$=-3r^{-4}\frac{x^2}{r}-3r^{-4}\frac{y^2}{r}-3r^{-4}\frac{z^2}{r}+3r^{-3}$$
$$=-3r^{-5}(x^2+y^2+z^2)+3r^{-3}$$
$$=-3r^{-3}+3r^{-3}=0$$

تاو یا عملگر ´ Ñ

عمل دیگری که برای عملگر برداری ∇ می توان تعریف کرد، عبارتست از ضرب برداری این عملگر در بردار

$$\nabla\times A=(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k})\times(A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k})$$

$$\nabla\times A=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}=(\frac{\partial}{\partial y}A_z-\frac{\partial}{\partial z}A_y)\hat{i}+(\frac{\partial}{\partial z}A_x-\frac{\partial}{\partial x}A_z)\hat{j}+(\frac{\partial}{\partial x}A_y-\frac{\partial}{\partial y}A_x)\hat{k}$$

که تاو A نامیده می شود.

نکته: در حالت $\nabla\times\nabla$ فقط به صورت یک عملگر دیفرانسیلی برداری جدید تعریف می شود که مطمئناً با $-\nabla\times\nabla$ برابر نیست.

مثال (۲- ۱۳):

اگر $A = xz^3\hat{i} - 2x^2yz\hat{j} + 2yz^4\hat{k}$، $\nabla\times A$ را در نقطه $(1,-1,1)$ پیدا کنید.

$$\nabla\times A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^3 & -2x^2yz & 2yz^4 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(2yz^4) - \frac{\partial}{\partial z}(-2x^2yz)\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(xz^3) - \frac{\partial}{\partial x}(2yz^4)\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(-2x^2yz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz^3)\right)\hat{k}$$

$$= (2z^4 + 2x^2y)\hat{i} + (3xz^2)\hat{j} + (-4xyz)\hat{k}$$

$$\nabla\times A\Big|_{\substack{8=1 \\ y=-1 \\ z=1}} = (2(1)^4 + 2(1)^2(-1))\hat{i} + 3(1)(1)^2\hat{j} - 4(1)(-1)(1)\hat{k} = 0\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$$

مثال (۲- ۱۴):

اگر $A = x^2y\hat{i} - 2xz\hat{j} + 2yz\hat{k}$ باشد، $\nabla\times\nabla\times A$ را محاسبه کنید.

$$\nabla\times\nabla\times A = \nabla\times\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y & -2xz & 2yz \end{vmatrix} = \nabla\times\{(2z+2x)\hat{i} + 0\hat{j} + (-2z - x^2)\hat{k}\}$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2(x+z) & 0 & -x^2-2z \end{vmatrix} = (0)\hat{i} + (2+2x)\hat{j} + 0\hat{k}$$

می توان نشان داد:

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla\times(\vec{A}+\vec{B}) = \nabla\times\vec{A} + \nabla\times\vec{B} \\ &\nabla\times(\varphi\vec{A}) = (\nabla\varphi)\times\vec{A} + \varphi(\nabla\times\vec{A}) \end{aligned}}$$

مثال ۲- ۱۵:

$\nabla\times(\nabla\varphi)$ را حساب کنید و مقدار آن را به دست آورید:

$$\nabla\times(\nabla\varphi)=\nabla\times\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}\right)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z}\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right)\hat{i}+\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right)\hat{k}$$

$$=\left(\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}\right)\right)\hat{i}+\left(\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\right)\right)\hat{j}+\left(\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\right)\right)\hat{k}=0\hat{i}+0\hat{j}+0\hat{k}$$

توجه: در این جا فرض کرده ایم که φ مشتق پاره ای مرتبه دوم پیوسته داشته باشد.

مثال (۲- ۱۶):

$\nabla\cdot(\nabla\times A)$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\nabla\cdot(\nabla\times A)=\nabla\cdot\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3\end{vmatrix}$$

$$=\nabla\cdot\left(\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\hat{i}+\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\hat{k}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 A_3}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 A_1}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 A_3}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 A_1}{\partial z\partial y}$$

$$=\frac{\partial^2 A_3}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_3}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 A_1}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 A_1}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 A_2}{\partial x\partial z}=0$$

در این جا نیز فرض نموده ایم که A مشتق پاره ای مرتبه دوم پیوسته دارد.

توجه: با توجه به تکرار بسیاری از $\nabla\times$ها یا ∇_0ها ∇ها در فرمول های فیزیک می توان مواردی را محاسبه کنیم.

مثال ۲- ۱۷:

اگر $f(r)$ مشتق پذیر باشد، $\nabla\times(\vec{r}f(r))$ را محاسبه کنید.

$$\operatorname{curl}(\vec{r}f(r)) = \nabla\times(rf(r)) = \nabla\times(xf(r)\hat{i}+yf(r)\hat{j}+zf(r)\hat{k}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xf(r) & yf(r) & zf(r) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(zf(r)) - \frac{\partial}{\partial z}(yf(r))\right)\hat{i} + \frac{\partial}{\partial z}\left(xf(r) - \frac{\partial}{\partial x}zf(r)\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(yf(r)) - \frac{\partial}{\partial y}(xf(r))\right)\hat{k}$$

$$= \left(z\frac{\partial f(r)}{\partial y} - y\frac{\partial f(r)}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(x\frac{\partial f(r)}{\partial z} - z\frac{\partial f(r)}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(y\frac{\partial f(r)}{\partial x} - x\frac{\partial f(r)}{\partial y}\right)\hat{k}$$

اما : $\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x}$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\times 2x$$

$$= \frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{x}{r} = \frac{f'x}{r}$$

و به چنین ترتیب: $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f'y}{r} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{f'z}{r}$

پس $\nabla\times(rf(r)) = (z\frac{f'y}{r} - y\frac{f'z}{r})\hat{i} + (x\frac{f'z}{r} - z\frac{f'x}{r})\hat{j} + (y\frac{f'x}{r} - x\frac{f'y}{r})\hat{k} = 0$

مثال (۲- ۱۸):

اگر چنانچه $A = 2yz\hat{i} - x^2y\hat{j} + xz^2\hat{k}$ و $\varphi = 2x^2yz^3$ باشد $(A\cdot\nabla)\varphi$ و $A\cdot\nabla\varphi$ را به دست آورید.

حل:

$$(A\cdot\nabla) = (2yz\hat{i} - x^2y\hat{j} + xz^2\hat{k})\cdot(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k})$$

$$= 2yz\frac{\partial}{\partial x} - x^2y\frac{\partial}{\partial y} + xz^2\frac{\partial}{\partial z}$$

$$(A\cdot\nabla)\varphi = 2yz\frac{\partial}{\partial x}(2x^2yz^3) - x^2y\frac{\partial}{\partial y}(2x^2yz^3) + xz^2\frac{\partial}{\partial z}(2x^2yz^3)$$

$$= 2yz\times 4xyz^3 - x^2y\times 2x^2z^3 + xz^2\times 6\times x^2yz^2$$
$$= 8xy^2z^4 - 2x^4yz^3 + 6x^3yz^4$$

$$\nabla\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\varphi\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\varphi\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\varphi\hat{k} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2yz^3)\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}(2x^2yz^3)\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}(2x^2yz^3)\hat{k} = 4xyz^3\hat{i} + 2x^2z^3\hat{j} + 6x^2yz^2\hat{k}$$

$$A\cdot\nabla\varphi = (2yz\hat{i} - x^2y\hat{j} + xz^2\hat{k})\cdot(4xyz^3\hat{i} + 2x^2z^3\hat{j} + 6x^2yz^2\hat{k}) = 8xy^2z^4 - 2x^4yz^3 + 6x^3yz^4$$

پاسخنامه سوالات تستی

۱- اگر $\vec{V} = x^2z\hat{i} - 2y^3z^2\hat{j} + xy^2z\hat{k}$ باشد، شار خروجی در نقطه (۱،-۱،۱) کدام می باشد؟

1) -3 2) $+3$ 3) 9 4) -9

۲- اگر $\phi = 3x^2yz$ باشد در این صورت $\nabla_0\phi\vec{r}f(r)$ کدام است؟

1) 0 2) $12x^2yzf(r)$ 3) $3x^2yzf(r)$ 4) $xyzf(r)$

۳- مشتق سویی تابع $f(x,y) = xy$ در نقطه (۳،۴) کدام گزینه می باشد؟

1) $3\hat{i}+4\hat{j}$ 2) $4\hat{i}+3\hat{j}$ 3) $4\hat{i}-3\hat{j}$ 4) $-4\hat{i}-3\hat{j}$

۴- مشتق سویی تابع $f(x,y) = xyz$ در نقطه (۱،۵،۰) در کدام جهت صفر می باشد.

1) $2i+3k$ 2) $\hat{k}$ 3) $\hat{i}+\hat{j}$ 4) $\hat{i}+\hat{k}$

۵- مشتق سویی تابع $f(x,y) = xy$ در نقطه (۳،۴) در جهت بردار .... برابر صفر است.

1) $\frac{2}{5}\hat{i}+\frac{3}{5}\hat{j}$ 2) $\frac{2}{5}\hat{i}-\frac{3}{5}\hat{j}$ 3) $\frac{3}{5}\hat{i}+\frac{4}{5}\hat{j}$ 4) $\frac{3}{5}\hat{i}-\frac{4}{5}\hat{j}$

۶- اگر $\nabla\phi = 2xyz^3\hat{i} + x^2z^3\hat{j} + 3x^2yz^2\hat{k}$ و $\phi(1,-2,2) = 4$ باشد، $\phi(x,y,z)$ کدام می باشد؟

1) $x^2yz^3 - 24$ 2) $x^2yz^3 + 16$ 3) $x^2yz^3 - 16$ 4) $x^2yz^3 + 20$

۷- اگر $\nabla\psi = (y^2 - 2xyz^3)\hat{i} + (3 + 2xy - x^2z^3)\hat{j} + (6z^3 - 3x^2yz^2)\hat{k}$، ψ کدام گزینه است؟

1) $\psi = xy^2 - x^2yz^3 + 3y + \frac{3}{2}z^4 + c$ 2) $\psi = xy^2 - x^2yz^3 + c$

3) $\psi = xy^2 - x^2z^3y + 3y + c$ 4) $\psi = -x^2yz^3 + \frac{3}{2}z^4 + c$

۸- مشتق سویی $\phi = 2xz^4 - x^2y$ در نقطه $(2,-2,-1)$ کدام است؟

1) $10\hat{i} - 4\hat{j} - 16\hat{k}$ 2) $10\hat{i} + 4\hat{j} + 8\hat{k}$ 3) $10\hat{i} - 4\hat{j} + 16\hat{k}$ 4) $10\hat{i} + 4\hat{j} + 16\hat{k}$

۹- مقدار $\nabla \cdot (\frac{\vec{r}}{r^3})$ برابر است با:

1) صفر 2) $3r^2$ 3) r^{-3} 4) $\frac{1}{r^5}$

۱۰- $\nabla^2(\frac{1}{r})$ برابر است با:

1) $\frac{1}{r^2}$ 2) صفر 3) r^2 4) r^3

۱۱- مسیر قائم دسته منحنی منحنی $x^2+y^2=c$ برابر است با:

1) $y'=-\frac{x}{y}$ 2) $y'=-xy+c$ 3) $y'=x^2y^2+c$ 4) $y'=\frac{y}{x}+c$

۱۲- از طریق روش جواب سازی متغیرها $\frac{\partial u}{\partial x}=4\frac{\partial u}{\partial y}$ مقدار $u(x,y)$ برابر است با:

1) $A\exp(-12x-3y)$ 2) $\exp(8x-y)$ 3) $A\exp(12x-3y)$ 4) $\exp(12x+3y)$

پاسخنامه سوالات تستی

۱- گزینه ۱ صحیح است. زیرا:

$$\nabla\cdot(f\vec{V})=(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k})\cdot(x^2z\hat{i}-2y^3z^2\hat{j}+xy^2z\hat{k})$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(x^2z)+\frac{\partial}{\partial y}(-2y^3z^2)+\frac{\partial}{\partial z}(xy^2z)$$

$$=2xz-6y^2z^2+xy^2$$

$$\nabla\cdot(fV)\Big|_{\substack{x=1\\y=1\\z=1}}=2(1)(1)-6(-1)^2(1)^2+1=2-6+1=-3$$

۲- گزینه ۲ صحیح است. زیرا:

$$\nabla\cdot(\varphi\vec{A})=\nabla\varphi\cdot\vec{A}+\varphi(\nabla\cdot\vec{A})$$

که در این جا $A=\vec{r}f(r)$ و $\varphi=3x^2yz$ است.

$$\nabla\cdot(3x^2yz\vec{r}f(r))=\nabla\varphi\cdot\vec{A}+\varphi(\nabla\cdot A)$$

با توجه به این نکته که $\nabla\cdot(\vec{r}f(r))$ صفر می باشد پس جمله دوم صفر می شود و کار ما تنها محاسبه جمله اول است.

$$\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}=6xyz\hat{i}+3x^2z\hat{j}+3x^2y\hat{k}$$

$$\vec{A}=f(r)x\hat{i}+f(r)y\hat{j}+f(r)z\hat{k}$$

$$\vec{\nabla}\varphi\cdot\vec{A}=(6xyz\hat{i}+3x^2z\hat{j}+3x^2y\hat{k})\cdot(xf(r)\hat{i}+yf(r)\hat{j}+zf(r)\hat{k})$$

$$=6x^2yzf(r)+3x^2yzf(r)+3x^2yzf(r)$$

$$=f(r)[6x^2yz+3x^2yz+3x^2yz]$$

$$=f(r)(12x^2yz)$$

۳- گزینه ۲ صحیح است. زیرا:

$$\nabla f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}=y\hat{i}+x\hat{j}=4\hat{i}+3\hat{j}$$

۴- گزینه ۳ صحیح است. زیرا:

$$\nabla f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

$$\nabla f=yz\hat{i}+xz\hat{j}+xyk$$

$$\nabla f\Big|_{\substack{x=1\\y=5\\z=0}}=5k$$

با توجه به گزینه ها ضرب داخلی $5\hat{k}\cdot(\hat{i}+\hat{j})=0$

۵- گزینه ۴ صحیح است. زیرا:

$$\nabla f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}=y\hat{i}+x\hat{j}\Rightarrow \nabla f\Big|_{\substack{x=3\\y=4}}=4\hat{i}+3\hat{j}$$

با توجه به گزینه ها:

$$(4\hat{i}+3\hat{j})\cdot(\frac{3}{5}\hat{i}-\frac{4}{5}\hat{j})=0$$

۶- گزینه ۴ صحیح است. زیرا:

$$\nabla\varphi=2xyz^3\hat{i}+x^2z^3\hat{j}+3x^2yz^2\hat{k}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=2xyz^3\rightarrow\varphi=x^2yz^3+c_1$$

یا $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=x^2z^3\rightarrow\varphi=x^2yz^3+c_2$

یا $\frac{\partial\varphi}{\partial z}=3x^2yz^3\rightarrow\varphi=x^2yz^3+c_3$

از طرفی

$$\varphi(1,-2,2)=4\rightarrow(1)^2(-2)(2)^3+c=4\rightarrow-16+c=4\rightarrow c=20$$

$$\rightarrow\varphi=x^2yz^3+20$$

۷- گزینه ۱ صحیح است. زیرا:

$$\nabla\psi=(y^2-2xyz^3)\hat{i}+(3+2xy-x^2z^3)\hat{j}+(6z^3-3x^2yz^2)\hat{k}$$

$$\rightarrow\frac{\partial\psi}{\partial x}=y^2-2xyz^3\rightarrow\psi=xy^2-x^2yz^3+c_x$$

توجه: c_x می تواند تابعی باشد که آن فاقد متغیر x باشد.

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=(3+2xy-x^2z^3)\rightarrow\psi=3y+xy^2-x^2z^3y+c_y$$

توجه: c_y تابعی است که فاقد متغیر y می باشد.

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}=(6z^3-3x^2yz^2)\rightarrow\psi=\frac{3}{2}z^4-x^2yz^3+c_2$$

$$\left.\begin{array}{l}\psi = xy^2 - x^2yz^3 + c_x \\ \psi = xy^2 - x^2yz^3 + 3y + c_x \\ \psi = -x^2yz^3 + \frac{3}{2}z^4 + c_z\end{array}\right\} \rightarrow \psi = xy^2 - x^2yz^3 + 3y + \frac{3}{2}z^4 + c$$

۸- گزینه ۱ صحیح است. زیرا:

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}$$

$$= (2z^4 - 2xy)\hat{i} - x^2\hat{j} + 8xz^3\hat{k}$$

$$\nabla\varphi\Big|_{\substack{x=2 \\ y=-2 \\ z=-1}} = 10\hat{i} - 4\hat{j} - 16\hat{k}$$

۹- گزینه ۱ صحیح است. زیرا:

$$\nabla\cdot(\frac{\mathbf{r}}{r^3}) = \nabla\cdot\frac{x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \nabla\cdot\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{i} + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{j} + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\times 2x^2$$

$$= (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}x^2$$

$$\rightarrow \nabla\cdot(\frac{r}{r^3}) = 3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} = 3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} - 3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} = 0$$

۱۰- گزینه ۲ صحیح است. زیرا:

$$\nabla^2(\frac{1}{r}) = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}) = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\times 2x = \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{1}{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(-x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}) = -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}2x^2$$

$$\rightarrow \nabla^2(\frac{1}{r}) = -3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \times 3(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}} \times (x^2+y^2+z^2) = 0$$

۱۱- گزینه ۴ صحیح است. زیرا:

$$x^2 + y^2 = c$$

$$2x + 2y\,y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y} \qquad y' \Rightarrow -\frac{1}{y'} \qquad -\frac{1}{y'} = -\frac{x}{y} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \rightarrow \ln y = \ln x + c \rightarrow y = cx$$

۱۲- گزینه ۴ صحیح است. زیرا:

$$u(x, y) = X(x)$$

$$\frac{1}{X}\,\frac{dX}{dx} = 4\frac{1}{Y}\,\frac{dY}{dy} = \alpha$$

$$\frac{X'}{X} = \alpha \Rightarrow X = e^{\alpha x}$$

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{1}{y}\alpha \rightarrow y = e^{\frac{1}{4}\alpha y}$$

$$u = e^{\alpha(x+\frac{1}{4}y)}$$

فصل سوم: انتگرال های چند گانه

در این جا چگونگی محاسبه انتگرال های چندگانه یعنی انتگرال های توابع دو یا چند متغیره تشریح می شود.

انتگرال های چندگانه درست مانند انتگرال های توابع یک متغیره تعریف می شوند و در عین حال، تعابیر گسترده تری دارند.

ابتدا با انتگرال های دوگانه در صفحه آشنا می شویم. با استفاده از این انتگرال ها مساحت نـواحی کـه مرزهـای خمیـده دارند، گشتاورها، جرم، مرکز جرم ها و غیره را محاسبه می کنیم.

- روش های انجام این محاسبات را در مختصات قائم و قطبی تشریح و درباره راه های دیگر تغییر متغیر بحث می کنیم.

- سپس به محاسبه انتگرال های سها گانه می پردازیم، انتگرال هایی که به کمک آن ها، حجم، گشـتاورها، جـرم، مرکـز جرم، شعاع های چرخش اجسام منظم و غیر منظم در فضا محاسبه می شوند. چگونگی انجام این محاسبات در مختصات قائم استوانه ای و کروی را تشریح می کنیم و درباره جانشینی ها در انتگرال های سه گانه بحث می کنیم.

3-1 انتگرال های دوگانه

در این بخش چگونگی محاسبه انتگرال تابعی چون $f(x,y)$ بر ناحیه ای محصور واقع در صفحه xy تشریح می شود.

- این انتگرال را انتگرال دوگانه f بر این ناحیه می نامیم. بحث را با نواحی مستطیلی آغاز می کنیم و سپس به نواحی ای که شکل کلی تری دارند تعمیم می دهیم.

- خواهید دید که بین انتگرال های دوگانه و انتگرال های یگانه (ساده) شباهت هـای فراوانـی وجـود دارد. در واقـع ایـن ارتباط بسیار قوی است.

- قضیه اصلـی محاسبـه انتگرال هـای دوگانه حاکـی است که هر انتگرال دوگانه ای را می تـوان بـه کمـک روش هـای انتگرال گیری از انتگرال های یگانه که بر آن ها مسلّط هستیم، پیدا کنیم، که طی چند مرحله به دست می آید.

انتگرال های دوگانه روی نواحی مستطیلی

فرض می کنیم $f(x,y)$ بر ناحیه مستطیلی R زیر تعریف می شود.

$$R:\ a \le x \le b \quad c \le y \le d$$

و فرض می کنیم R شبکه ای از خطوط موازی با محورهای x و y پوشیده شده باشد.

این خطوط R را به قطعات کوچکی تقسیم می کنند که مساحت هر کدام برابر است با:

$\Delta A = \Delta x \Delta y$

این قطعات را به ترتیبی شماره گذاری می کنیم $\Delta A_1, \Delta A_2, \mathbf{K}, \Delta A_n$

در هر قطعه مانند ΔA_k نقطه (x_k, y_k) را بر می گزینیم و مجموع زیر را تشکیل می دهیم:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

اگر f در سراسر R پیوسته باشد، با کوچک کردن خانه های شبکه یعنی میل دادن Δx و Δy به صفر مجموع مشخص شده در رابطه بالا به حدی میل می کند که آن را انتگرال دوگانه f روی R می نامیم.

نماد انتگرال دوگانه عبارت است از:

$$\iint_R f(x,y)dxdy \quad \text{یا} \quad \iint_R f(x,y)dA$$

بنابراین

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{\Delta A \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

مانند حالتی که توابع یک متغیره سر و کار داشتیم، به شرط این که Δx و Δy هر دو به صفر میل کنند، مجموع ها به این حد میل می کنند و به نحوه تقسیم بندی بازه های $[a,b]$ و $[c,d]$ که R را مشخص می کنند بستگی ندارند. همچنین این حد به ترتیب شماره گذاری مساحت های ΔA_k و نحوه انتخاب نقطه (x_k, y_k) در هر یک از ΔA_k ها بستگی ندارند.

مقدار هر یک از مجموع های تقریب زننده S_n به چگونگی این انتخاب ها بستگی دارد، اما در نهایت این مجموع ها به حد واحدی میل می کنند. برهان وجود و یکتایی این حد در مورد تابع پیوسته ای چون f در کتاب های پیشرفته تر آمده است. پیوستگی f شرطی کافی برای وجود انتگرال دوگانه است، اما شرط لازم نیست. این حد در مورد بسیاری از توابع ناپیوسته هم وجود دارد.

ویژگی های انتگرال های دوگانه

انتگرال های دوگانه توابع پیوسته مانند انتگرال های یگانه این توابع ویژگی های جبری دارند که در محاسبات و کاربردها سودمندند. این ویژگی ها چون در مورد مجموع هایی که به کمک آن ها انتگرال ها را تعریف می کنیم برقرارند، در مورد

انتگرال ها هم برقرارند. برخی از این ویژگی ها عبارت اند از:

1- (k عددی دلخواه)

$$\iint_R kf(x,y)dA = k\iint_R f(x,y)dA$$

-2

$$\iint_R (f(x,y)+g(x,y))dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA$$

-3

$$\iint_R (f(x,y)-g(x,y))dA = \iint_R f(x,y)dA - \iint_R g(x,y)dA$$

-4

$$\iint f(x,y)dA \geq 0$$

(اگر بر ناحیه R داشته باشیم $f(x,y)\geq 0$).

-5

$$\iint_R f(x,y)dA \geq \iint_R g(x,y)dA$$

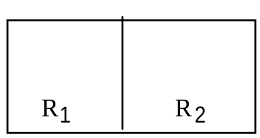
اگر بر ناحیه R داشته باشیم $(f(x,y)\geq g(x,y))$.

ویژگی دیگری نیز به نام ویژگی (جمع پذیری دامنه ها) وجود دارند.

-6

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA$$

که وقتی برقرار است که R مطابق شکل زیر اجتماعی باشد از دو مستطیل R_1 و R_2 که تداخلی با هم نداشته باشند، اثبات این مطلب را ذکر نمی کنیم.



$$\iint_{R_1 \cup R_2} f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA$$

انتگرال های دوگانه هم مانند انتگرال های یگانه دارای ویژگی جمع پذیری دامنه ها هستند.

تعبیر انتگرال های دوگانه به صورت حجم

وقتی $f(x,y)$ مثبت باشد انتگرال دوگانه f روی ناحیه مستطیلی R را می توان به صورت حجم منشوری تعبیر کرد که از پایین به R و از بالا به رویه $z=f(x,y)$ و حدود است.

$$S_n=\sum f(x_k,y_k)\Delta A_k$$

هر جمله $f(x_k,y_k)\Delta A_k$ از مجموع بالا برابر است با حجم منشور قائمی با قاعده مستطیل شکل به مساحت ΔA_k بنابراین مجموع S_n آن چه را که می خواهیم حجم کل جسم بنامیم، تقریب مجازند. این حجم را چنین تعریف می کنیم:

$$\text{حجم}=\lim S_n=\iint_R f(x,y)dA$$

قضیه فوبینی در مورد محاسبه انتگرال های دوگانه

اکنون آماده ایم که نخستین انتگرال دوگانه را محاسبه کنیم.

فرض می کنیم می خواهیم حجم زیر صفحه $z=4-2x-y$ را روی ناحیه مستطیلی $0\le y\le 1$ و $0\le x\le 2$ که R در صفحه xy واقع است را بیابیم.

در این صورت حجم برابر است با:

$$\int_{x=0}^{x=2}A(x)dx$$

که در آن Ax مساحت سطح قائمی است که از برش قائم ناحیه به دست آمده است.

$$Ax=\int_{y=0}^{y=i}(4-2x-y)dy$$

$$\text{حجم}=\int_{x=0}^{x=2}A(x)dy=\int_{x=0}^{x=2}\left(\int_{y=0}^{y=1}(4-2x-y)dy\right)dx$$

$$=\int_{x=0}^{x=2}\left[4y-2xy-\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1}dx$$

$$=\int_{x=0}^{x=2}(4(1)-2x(1)-\frac{1}{2})-(0)dx$$

$$=\int_{x=0}^{x=2}(\frac{7}{2}-2x)dx=[\frac{7}{2}x-x^2]_0^2$$

$$=\frac{7}{2}(2)-(2)^2-0=3$$

می توان انتگرال فوق را به طریقی دیگر نیز محاسبه کرد.

$$A(y)=\int_{x=0}^{x=2}(4-2x-y)dx$$

$$=(4x-x^2-xy)\Big|_{x=0}^{x=2}=(4(2)-(2)^2-y(2))-0=4-2y$$

$$\text{حجم}=\int_{y=0}^{y=1}(4-2y)dy=(4y-y^2)\Big|_{y=0}^{y=1}=4(1)-(1)^2-0=3$$

قضیه فوبینی (صورت اول)

اگر $f(x,y)$ بر ناحیه مستطیلی $R:\ a\le x\le b\quad c\le y\le d$ پیوسته باشد داریم:

$$\iint_R f(x,y)dA=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx$$

قضیه فوبینی حاکی است که انتگرال های دوگـانه روی مستطیل هـا را می توان همواره به صـورت انتگـرال هـای مکـرر محاسبه کرد. یعنی می توان یک انتگرال دوگانه را با انتگرال گیری از یک متغیـر در هـر بـازه بـا اسـتفاده از روش هـای انتگرال گیری که در مورد توابع یک متغیره می دانیم محاسبه کرد.

قضیه فوبینی همچنین حاکی است که برای انتگرال گیری از انتگرال دوگانه هر ترتیبی می توان برگزید.

از این ها مهم تر این که، قضیه فوبینی در مورد هر تابع پیوسته ای چون $f(x,y)$ برقرار است. بـه خصـوص f مـی توانـد روی R هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی داشته باشد، و همـان طور کـه بعداً خواهیم دید انتگرال هایی که با استفاده از قضیه فوبینی محاسبه می شوند می توانند علاوه بر حجم چیزهای دیگری را هم نمایش دهند.

مثال ۳-۱:

مطلوب است محاسبه $\iint_R f(x,y)dA$ به ازای $f(x,y)=1-5x^2y$، $-1\le y\le 1$ و $0\le x\le 2$.

حل:

$$\int_{y=-1}^{y=1}\int_{x=0}^{x=2}(1-5x^2y)dxdy=\int_{y=-1}^{y=1}(x-\frac{5}{3}x^3y)\Big|_{x=0}^{x=2}dy=\int_{y=-1}^{y=1}(2-\frac{5}{3}\times 8\times y)dy=(2y-\frac{40}{3}\frac{y^2}{2})\Big|_{y=-1}^{y=1}$$
$$=(2-\frac{20}{3})-(-2-\frac{20}{3})=4$$

با معکوس کردن ترتیب انتگرال گیری نیز همین نتیجه به دست می آید:

$$\int_{x=0}^{x=2}\int_{y=-1}^{y=1}(1-5x^2y)dydx=\int_{x=0}^{x=2}(y-\frac{5}{2}x^2y^2)\Big|_{y=-1}^{y=1}dx=\int_{x=0}^{x=2}(1-\frac{5}{2}x^2)-(-1-\frac{5}{2}x^2)dx=\int_{x=0}^{x=2}2dx=2x\Big|_{x=0}^{x=2}=4$$

3-2 انتگرال های دوگانه روی نواحی غیر مستطیلی محصور

برای تعریف انتگرال دوگانه تابعی چون $f(x,y)$ روی یک ناحیه غیر مستطیلی محصور بار دیگر فرض می کنیم R را یک شبکه مستطیلی پوشانده است. اما در مجموع جزئی، تنها مساحت آن عده از اجزاء ناحیه یعنی $\Delta A = \Delta x \Delta y$ هایی را که کاملاً درون ناحیه قرار دارند منظور می کنیم. برای شماره گذاری قطعات ترتیبی اتخاذ می کنیم، نقطه دلخواه (x_k, y_k) را در هر ΔA_k بر می گزینیم و مجموع زیر را تشکیل می دهیم.

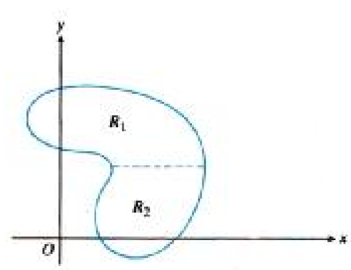
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

تنها تفاوت این مجموع با مجموع قبلی که در مورد نواحی مستطیلی بود، این است که در این جا ممکن است مساحت های ΔA_k همه R را نپوشاند. ولی هر چه تعداد خانه های شبکه بیشتر شود و تعداد جملات S_n افزایش یابد، قسمت بیشتری از R پوشانده می شود. اگر f پیوسته باشد و مرز R از تعداد متناهی پاره خط یا خم هموار تشکیل شده باشد که انتها به انتها به یکدیگر وصل شده باشند، آن گاه مجموع های S_n وقتی که Δx و Δy به صفر میل می کنند حدی خواهند داشت این حد را انتگرال دوگانه f روی R می نامیم.

$$\iint\limits_R f(x,y)dA = \lim_{\Delta A \to 0} \sum f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

انتگرال های دوگانه توابع پیوسته روی نواحی غیر مستطیلی همه ویژگی های جبریی را که برای انتگرال های روی نواحی مستطیلی برشمردیم دارند.

اگر R شامل دو ناحیه نامتداخل R_1 و R_2 باشند که مرزهایشان از پاره خط ها یا خم های هموار تشکیل شده باشد آن گاه:



$$\iint\limits_R f(x,y)dA = \iint\limits_{R_1} f(x,y)dA + \iint\limits_{R_2} f(x,y)dA$$

$$\iint\limits_R f(x,y)dA = \iint\limits_{R_1} f(x,y)dA + \iint\limits_{R_2} f(x,y)dA$$

اگر $f(x,y)$ روی R مثبت و پیوسته باشد حجم ناحیه فضایی بین R و رویه $z=f(x,y)$ را مثل گذشته برابر با $\iint_R f(x,y)dA$ تعریف می کنیم.

اگر R ناحیه ای واقع در صفحه (xy) باشد از بالا و پایین به خم های $y=f_2(x)$ و $y=f_1(x)$ و از طرفین به خطوط $x=a$ و $x=b$ محدود باشد، باز هم می توان حجم را به روش برش دادن محاسبه کرد.

نخست مساحت سطح مقطع را می یابیم.

$$A(x)=\int_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} f(x,y)dy$$

$$V=\int_a^b A(x)dx=\int_a^b\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dydx$$

همین طور اگر R ناحیه ای باشد که به خم های $x=g_2(y)$ و $x=g_1(y)$ و خطوط $y=c$ و $y=d$ محدود باشد، آن گاه حجمی که از روش برش دادن به دست می آید عبارت است از انتگرال مکرر زیر:

$$\text{حجم}=\int_c^d\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dxdy$$

قضیه فوبینی (صورت قوی تر)

فرض می کنیم $f(x,y)$ روی ناحیه ای چون R پیوسته باشد.

1- اگر تعریف R عبارت باشد از $a\le x\le b$ و $f_1(x)\le y\le f_2(x)$ با این شرط که f_1 و f_2 بر $[a,b]$ پیوسته باشند، آن گاه:

$$\iint_R f(x,y)dA=\int_a^b\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dydx$$

2- اگر تعریف R عبارت باشد از: $c\le y\le d$ و $g_1(y)\le x\le g_2(y)$ با این شرط که g_1 و g_2 بر $[c,d]$ پیوسته باشند، آن گاه:

$$\iint f(x,y)dA=\int_c^d\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dxdy$$

مثال ۳-۲:

مطلوب است حجم منشوری که قاعده پایینی اش مثلثی باشد واقع در صفحه (xy) و محدود به محور x و خطوط $y=x$ و $x=1$ و قاعده بالایی اش بر صفحه $z=f(x,y)=5-x-y$.

حل:

$$\text{حجم} = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x}(5-x-y)dydx$$

$$=\int_{x=0}^{x=1}(5y-xy-\frac{y^2}{2})\Big|_{y=0}^{y=x}dx=\int_{x=0}^{x=1}(5x-x^2-\frac{x^2}{2})-0dx=\int_{x=0}^{x=1}5x-\frac{3}{2}x^2dx=(\frac{5}{2}x^2-\frac{3}{2}\frac{x^3}{3})\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$=(\frac{5}{2}-\frac{1}{2})-(0)=\frac{4}{2}=2$$

مثال ۳-۳:

مطلوب است محاسبه $\iint\limits_R \frac{\sin x}{x}dA$

که A مثلثی است واقع در صفحه (xy) و محدود به محور x و خط $y=x$ و $x=2$.

حل:

$$\int_{x=0}^{x=2}\int_{y=0}^{y=x}\frac{\sin x}{x}dydx=\int_{x=0}^{x=2}(\frac{\sin x}{x}y)\Big|_{y=0}^{y=x}dx=\int_{x=0}^{x=2}\frac{\sin x}{x}(x-0)dx=\int_{x=0}^{x=2}\sin xdx=-\cos x\Big|_{x=0}^{x=2}$$

$$=-\cos x+\cos 0=-\cos 2+1$$

توجّـه: هیچ قاعـده ای کلی وجود ندارد که بتوان به کمک آن پیش بینی کرد که مواردی نظیر این مسـأله کـدام ترتیـب انتگرال گیری مناسب تر است. لذا باید بدون نگرانی انتگرال گیری را با یک ترتیب دلخواه شروع کـرد و چنانچـه بـا ایـن ترتیب کار به بن بست رسید، ترتیب دیگر را امتحان کرد.

مثال ۳-۴:

هر یک از انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_0^3\int_0^2(4-y^2)dydx$

حل : $\int_0^3\int_0^2(4-y^2)dydx=\int_0^3(4y-\frac{y^3}{3})\Big|_{y=0}^{y=2}dx=\int_0^3\frac{16}{3}dx=\frac{16}{3}x\Big|_{x=0}^{x=3}=\frac{16}{3}\times 3-\frac{16}{3}\times 0=16$

ب) $\int_{-1}^0\int_{-1}^1(x+y+1)dxdy$

حل : $\int_{y=-1}^{0}\int_{x=-1}^{1}(x+y+1)dxdy=\int_{-1}^{0}(\frac{x^2}{2}+yx+x)\Big|_{x=-1}^{1}dy=\int_{-1}^{0}((\frac{1}{2}+y+1)-(\frac{1}{2}-y-1))dy=\int_{y=-1}^{0}2y+2dy$

$=(y^2+2y)\Big|_{y=-1}^{0}=0-(1-2)=+1$

ج) $\int_{\pi}^{2\pi}\int_{0}^{\pi}(\sin x+\cos y)dxdy$

حل : $\int_{\pi}^{2\pi}(-\cos x+\cos y\times x)\Big|_{x=0}^{x=\pi}dy=\int_{\pi}^{2\pi}[(-\cos\pi+\cos y\times\pi)-(-\cos 0+\cos y\times 0)]dy=\int_{\pi}^{2\pi}(1+\pi\cos y)-(-1)dy$

$=\int_{\pi}^{2\pi}2+\pi\cos ydy=(2y+\pi\sin y)\Big|_{\pi}^{2\pi}=(2(2\pi+\pi\sin 2\pi)-(2(\pi)+\pi\sin\pi)=2\pi$

مثال ۳-۵:

حاصل انتگرال های زیر را به دست آورید.

$\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{x}x\sin ydydx$

حل : $\int_{x=0}^{x=\pi}\int_{y=0}^{y=x}x\sin ydydx=\int_{0}^{\pi}(-x\cos y)\Big|_{y=0}^{y=x}dx=\int_{0}^{\pi}(-x\cos x-(-x\cos 0))dx=\int_{0}^{\pi}(-x\cos x+x)dx$

$=\int_{0}^{\pi}-x\cos xdx+\int_{0}^{\pi}xdx=2+\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{\pi}=2+\frac{\pi^2}{2}$

توجه : $\int_{0}^{\pi}x\cos xdx=(x\sin x)\Big|_{0}^{\pi}-\int_{0}^{\pi}\sin xdx$ $\quad \begin{array}{l} x=u \\ \cos xdx=du \\ +\sin x=u \end{array}$

$=(\pi\sin x)-(0\sin 0)+\cos x\Big|_{0}^{\pi}=\cos\pi-\cos 0=-2$

$\Rightarrow -\int_{0}^{\pi}x\cos xdx=+2$

$\int_{1}^{\ln 8}\int_{0}^{\ln y}e^{x+y}dxdy$

حل : $\int_{y=0}^{y=\ln 8}\int_{x=0}^{x=\ln y}e^{(x+y)}dxdy=\int_{1}^{\ln 8}(e^{x+y})\Big|_{x=0}^{x=\ln y}dy=\int_{1}^{\ln 8}(e^{\ln y+y}-e^{y})dy=\int_{y=1}^{\ln 8}e^{y}(e^{\ln y}-1)dy$

$=\int_{y=1}^{y=\ln 8}e^{y}(y-1)dy=\int_{y=1}^{\ln 8}e^{y}ydy-\int_{y=1}^{\ln 8}e^{y}dy$

توجه : $\int_{1}^{\ln 8}e^{y}ydy=ye^{y}\Big|_{y=1}^{\ln 8}-\int_{1}^{\ln 8}e^{y}dy$ $\quad \begin{array}{l} e^{y}dy=dv\rightarrow v=e^{y} \\ y=u\rightarrow du=dy \end{array}$

$=(\ln 8e^{\ln 8}-1e^{1})-(e^{y})\Big|_{1}^{\ln 8}=\ln 8\ \ 8-e-\{e^{\ln 8}-e^{1}\}=\ln 8\times 8-e-8+e=8(\ln 8-1)$

$\Rightarrow \int_{y=1}^{\ln 8}e^{y}(y-1)dy=8(\ln 8-1)-(e^{y})\Big|_{y=1}^{\ln 8}=8\ln 8-8-e^{\ln 8}+e^{1}=8\ln 8-16+e$

3-3 مساحت و مرکز جرم در دو بعد

در ایـن بخش چگونگـی استفاده از انتگرال هـای دوگانـه را در محاسبـه مساحت نواحی محصور در صفحه و نیز جـرم و مرکز جرم نشان می دهیم. اگر در تعریف انتگرال دوگانه روی ناحیه R تابع $f(x,y)$ را برابر (1) فرض کنیم.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k$$

وقتی Δx و Δy به سمت صفر میل کنند ΔA_k ها رفته رفته ناحیه R را کـاملاً مـی پوشـانند و مسـاحت R را چنـین تعریف می کنیم:

$$\text{مساحت} = \lim \sum \Delta A_k = \iint_R dA$$

مساحت یک ناحیه محصور و بسته واقع در صفحه از فرمول زیر به دست می آید.

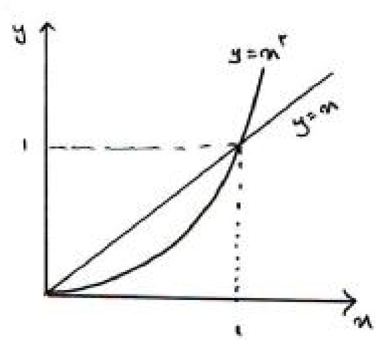
$$\text{مساحت} = \iint_R dA$$

مثال (۳-۶):

مطلوب است مساحت ناحیه R که در ربع اول واقع و به $y=x$ و $y=x^3$ محدود است:

حل : $\int_{x=0}^{1}\int_{y=x^3}^{y=x} dydx$

اگر چنانچه این منحنی رسم شود



خواهیم دید که با رسم خطی موازی محور y ابتدا منحنی $y=x^3$ قطع مـی شـود سـپس خـط $y=x$ بنـابراین حـدود انتگرال گیری y به دست آمد در عین حال این بازه x از 0 تا 1 تغییر می کند.

$$=\int_{x=0}^{x=1}(x-x^3)dx = (\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4})\Big|_0^1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

4-3 گشتاور اول و دوم مرکز جرم در صفحه

در این جا فرمول های محاسبه گشتاور اول و دوم و مرکز جرم را آورده ایم.

- گشتاور لفتی در محاسبه انرژی جنبشی اجسام دوران کننده اهمیت دارند.

- تفاوت گشتاورهای M_x و M_y و گشتاورهای لفتی یا گشتاور دوم I_x و I_y در این است که در گشتاورهای دوم مجذور فواصل x و y به کار می روند.

- گشتاور I_0 را گشتاور قطبی لفتی حول مبدأ نیز می نامیم.

چگالی: $\delta(x, y)$

جرم: $M = \iint \delta(x, y)dA$

گشتاور اول:

$$M_x = \iint y\delta(x, y)dA$$

$$M_y = \iint x\delta(x, y)dA$$

مرکز جرم: $\bar{x} = \dfrac{M_y}{M} \qquad \bar{y} = \dfrac{M_x}{M}$

گشتاور دوم (لفتی):

حول محور x: $I_x = \iint y^2\delta(x, y)dA$

حول محور y: $I_y = \iint x^2\delta(x, y)dA$

حول مبدأ: $I_0 = \iint (x^2 + y^2)\delta(x, y)dA = I_x + I_y$

شعاع های چرخش

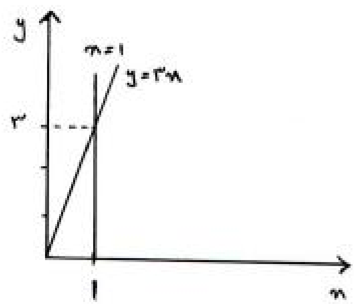
حول محور x: $R_x = \sqrt{\dfrac{I_x}{M}}$

حول محور y: $R_y = \sqrt{\dfrac{I_y}{M}}$

حول مبدأ: $R_0 = \sqrt{\dfrac{I_0}{M}}$

مثال (۳-۷):

ورقه نازکی ناحیه مثلثی شکل واقع در ربع اول و محدود به محور x و خطوط $x=1$ و $y=3x$ را می پوشاند چگالی ورقه در نقطه (x,y) عبارت است از $\delta(x,y)=6x+6y+6$ مطلوب است تعیین جرم، گشتاورهای اول و مرکز جرم، گشتاورهای لفتی ورقه و شعاع چرخش حول محورهای مختلف.



حل: $M=\int_0^1\int_0^{3x}\delta(x,y)dydx=\int_0^1\int_0^{3x}(6x+6y+6)dydx=\int_0^1(6xy+3y^2+6y)\Big|_{y=0}^{y=3x}dx=\int_0^1 6x(3x)+3(3x)^2+6(3x)dx$

$=\int_0^1(18x^2+27x^2+18x)dx=\int_0^1 45x^2+18xdx=(15x^3+9x^2)\Big|_{x=0}^{x=1}=15+9=24$

$M_y=\int_0^1\int_0^{3x}\delta(x,y)xdydx=\int_0^1\int_0^{3x}(6x+6y+6)xdydx=\int_0^1\int_0^{3x}(6x^2+6yx+6x)dydx=\int_0^1(6x^2y+3xy^2+6xy)\Big|_{y=0}^{y=3x}dx$

$=\int_0^1 6x^2(3x)+3x(3x)^2+6x(3x)dx=\int_0^1(18x^3+27x^3+18x^2)dx=\int_0^1 45x^3+18x^2dx=(45\frac{x^4}{4}+18\frac{x^3}{3})\Big|_0^1$

$=\frac{45}{4}+6=17/25$

$M_x=\int_{x=0}^1\int_{y=0}^{y=3x}y\delta(x,y)dydx=\int_0^1\int_0^{3x}y(6x+6y+6)dydx=\int_0^1\int_0^{3x}6yx+6y^2+6ydydx=\int_0^1(3xy^2+2y^3+3y^2)\Big|_0^{3x}dx$

$=\int_0^1 3x(3x)^2+2(3x)^3+3(3x)^2dx=\int_0^1 27x^3+54x^3+27x^2dx=\int_0^1 81x^3+27x^2dx=\frac{81}{4}x^4+\frac{27}{3}x^3=\frac{81}{4}+\frac{27}{3}=29/25$

$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{17/25}{24}=0/72 \qquad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{29/25}{24}=1/22$

$I_y=\int_0^1\int_{y=0}^{3x}x^2\delta(x,y)dydx=\int_0^1\int_0^{3x}x^2(6x+6y+6)dydx=\int_0^1(6x^3y+3x^2y^2+6y)\Big|_{y=0}^{y=3x}dx$

$=\int_0^1 6x^2(3x)+3x^2(3x)^2+6(3x)dx=\int_0^1 18x^4+27x^4+18xdx=\int 45x^4+18xdx=(9x^5+9x^2)\Big|_0^1=18$

$I_x=\int_0^1\int_0^{3x}y^2\delta(x,y)dydx=\int_0^1\int_0^{3x}y^2(6x+6y+6)dydx=\int_0^1\int_0^{3x}6xy^2+6y^3+6y^2dydx=\int_0^1(2xy^3+\frac{3}{2}y^4+2y^3)\Big|_{y=0}^{y=3x}dx$

$$= \int_0^1 (2x(3x)^3 + \frac{3}{2}(3x)^4 + 2(3x)^3)dx = \int 54x^4 + 121/5x^4 + 54x^3 dx$$

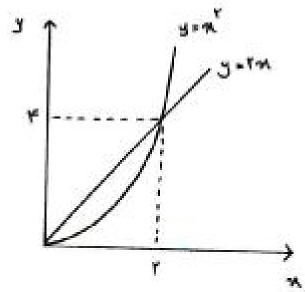
* اگر چگالی جسمی ثابت باشد، مقدارش از صورت و مخرج فرمول های $\bar{x}$ و $\bar{y}$ حذف می شود.

بنابراین در فرمول ها δ را برابر 1 می توان گرفت. بنابراین وقتی δ ثابت است، محل مرکز جرم از ویژگی حدی شکل جسم است و به جنس ماده ای که جسم از آن ساخته شده بستگی ندارد. در این گونه موارد، مرکز جرم را مرکز وار شکل می نامند.

برای یافتن مرکز وار کافی است δ را برابر 1 بگیریم و مانند قبل با تقسیم کردن گشتاورهای اول بر جرم ها، $\bar{x}$ و $\bar{y}$ را بیابیم.

مثال ۳-۸:

مرکز وار ناحیه ای را بیابید که در ربع اول واقع است و از بالا به خط $y=2x$ و از پایین به سهمی $y=x^2$ محدود است.



$$M = \int_0^2 \int_{y=x^2}^{y=2x} dydx = M = \int_0^2 y\Big|_{x^2}^{2x} dx = \int_0^2 (2x - x^2)dx = (x^2 - \frac{x^3}{3})\Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

$$M_x = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} ydydx = \int_0^2 \frac{y^2}{2}\Big|_{y=x^2}^{2x} dx = \int_0^2 (2x^2 - \frac{x^4}{2})dx = (\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^5}{10})\Big|_0^2 = \frac{2}{3}\times 8 - \frac{32}{10} = 2/1\overline{3}$$

$$M_y = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} xdydx = \int_0^2 (xy)\Big|_{y=x^2}^{2x} dx = \int_0^2 (2x^2 - x^3)dx = (\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4})_0^2 = \frac{2}{3}\times 8 - \frac{16}{4} = 1/3\overline{3}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1/3\overline{3}}{4/3} = 1 \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{2/1\overline{3}}{4/3} = 1/6$$

3-5 انتگرال دوگانه به صورت قطبی

گاه اگر مختصات قائم به مختصات قطبی تبدیل شود، محاسبه انتگرال ها ساده تر می شود.

در این بخش روش تبدیل مختصات قائم به مختصات قطبی و چگونگی محاسبه انتگرال ها روی دامنه هایی که مرزهایشان به صورت قطبی مشخص شده تشریح می شود. بحث مختصری درباره ژاکوبی ها خواهیم کرد.

انتگرال ها در مختصات قطبی

وقتی می خواستیم انتگرال دوگانه یک تابع را روی ناحیه R در صفحه xy تعریف کنیم، نخست R را به تعدادی مستطیل که اضلاعشان موازی محورهای مختصات بود تقسیم می کردیم. این مستطیل ها طبیعی ترین اشکالی بودند که می توانستیم به کار بریم زیرا مقدار x یا مقدار y اضلاعشان ثابت است. در مختصات قطبی، شکل طبیعی، مستطیل قطبی است، که حال آن را توصیف می کنیم.

فرض می کنیم تابع $F(r,\theta)$ روی ناحیه ای چون R تعریف شود که به پرتوهای $\theta=\alpha$ و $\theta=\beta$ و خم های $r=f_1(\theta)$ و $r=f_2(\theta)$ محدود باشد. همچنین فرض می کنیم به ازای هر مقدار θ بین α و β، $0\le f_1(\theta)\le f_2(\theta)\le a$ در این صورت R در ناحیه ای بادبزنی شکل قرار دارد که با نابرابری های $0\le r<a$ و $\alpha\le\theta\le\beta$ تعریف می شود.

این ناحیه را به قوس های مستدیر و پرتوها می پوشانیم. قوس ها قطعاتی هستند که از دوایری به مرکز مبدأ و به شعاع های زیر

$$\Delta r, 2\Delta r, \ldots m\Delta r$$

که $\Delta r=\frac{a}{m}$. و پرتوها چنین مشخص می شوند.

$$\theta=\alpha \qquad \theta=\alpha+\Delta\theta \qquad \theta=\alpha+2\Delta\theta$$

$$\theta=\alpha+n\Delta\theta=\beta$$

قوس ها و پرتوها ناحیه بادبزنی شکل را به مستطیل های قطبی تقسیم می کنند.

مستطیل های قطبی درون R را شماره گذاری می کنیم (ترتیب مهم نیست)

$$\Delta A_1, \Delta A_2, \ldots \Delta A_n$$

فرض می کنیم (r_k,θ_k) مرکز مستطیل قطبی باشد که مساحتش ΔA_k باشد.

که منظور ما از مرکز نقطه ای است که واقع بر پرتوی که قوس ها را نصف می کند و وسط قطعه ای از پرتو است که بین

دو قوس است.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} F(r_k, \theta_k)\,\Delta A_k$$

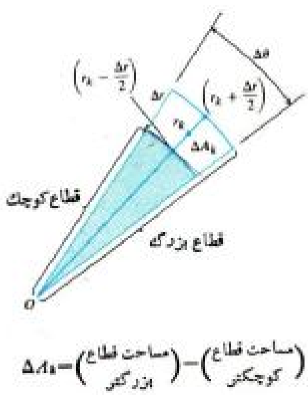
که F در سراسر R پیوسته است. این مجموع وقتی مستطیل های قطبی با میـل کـردن Δr و $\Delta\theta$ بـه صـفر، کوچـک و کوچک تر شوند به یک حد میل می کند. این حد را انتگرال دوگانه F روی R می نامیم و به صورت نمادی داریم:

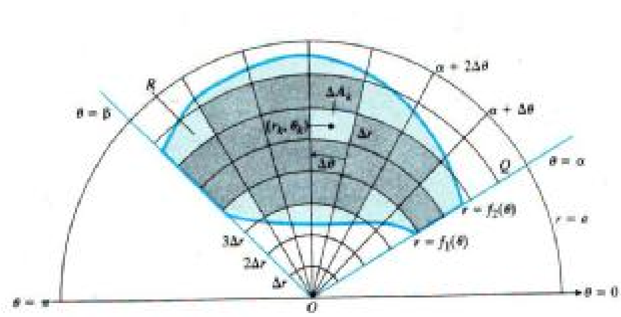
$$\lim S_n = \iint_R F(r, \theta)\, dA$$

برای محاسبه این حد باید مجموع S_n را به صورتی بنویسیم که ΔA_k را بر حسب Δr و $\Delta\theta$ بیان کند.

فرض می کنیم شعاع قوس داخلی محدود کننده ΔA_k برابر است با $r_k = (\frac{\Delta r}{2})$.

بنابراین مساحت قطعاع مستدیر به صورت زیر خواهد بود.





$$\frac{1}{2}(r_k - \frac{\Delta r}{2})^2 \Delta\theta$$

$\Delta A_k =$ (مساحت قطاع بزرگ تر) - (مساحت قطاع کوچک تر)

$$= \frac{1}{2}(r_k - \frac{\Delta r}{2})^2 \Delta\theta - \frac{1}{2}(r - \frac{\Delta r}{2})^2 \Delta\theta$$

$$= \frac{\Delta\theta}{2}[(r_k + \frac{\Delta r}{2})^2 - (r_k + \frac{\Delta r}{2})^2]$$

$$= \frac{\Delta\theta}{2}(r_k + \frac{\Delta r}{2} + r_k - \frac{\Delta r}{2})(r_k + \frac{\Delta r}{2} - r_k + \frac{\Delta r}{2})$$

$$= \frac{\Delta\theta}{2} \times 2r_k \times \Delta r = \Delta\theta\ r_k\ \Delta r$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} F(r_k, \theta_k)\, r_k\, \Delta r\, \Delta\theta$$

حال صورتی از قضیه فوبینی حاکی است که حدی را که این مجموع ها به آن میل می کنند می توان با انتگـرال گیـری مکرر نسبت به r و θ به دست آورد.

$$\iint_R F(r,\theta)\, dA = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta} \int_{r=f_1(\theta)}^{r=f_2(\theta)} F(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

مثال ۳-۹:

مطلوب است مساحت ناحیه محصور در $r^2 = a^2 \cos 3\theta$.

حل: با توجه به این که r^2 هرگز نمی تواند منفی باشد $-\frac{\pi}{2} \le 3\theta < \frac{\pi}{2}$ بنابراین:

$$-\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{6}$$

بنابراین حدود انتگرال گیری برای متغیر θ به دست آمد.

از طرفی $r^2 = a^2 \cos 3\theta$ بنابراین حدود r از 0 تا $\sqrt{a^2 \cos 3\theta}$ می باشد.

با توجه به این که $dA = r\, dr\, d\theta$.

$$\text{مساحت} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{\sqrt{a^2 \cos 3\theta}} r\, dr\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{\sqrt{a^2 \cos 3\theta}} \frac{r^2}{2}\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{a^2 \cos 3\theta}{2}\, d\theta = \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos 3\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2}\frac{1}{3}(\sin 3\theta)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{a^2}{6}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{-\pi}{2}\right) = \frac{a^2}{6} \times (1-(-1)) = \frac{a^2}{3}$$

(6-3) تبدیل انتگرال های دکارتی به قطبی

عمل تبدیل یک انتگرال دکارتی مانند

$$\iint_R F(x,y)\, dx\, dy$$

به یک انتگرال قطبی دو مرحله دارد:

مرحله الف): در انتگرال دکارتی جانشینی های زیر را انجام می دهیم.

$$dx\, dy = r\, dr\, d\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \quad , \quad x = r\cos\theta$$

مرحله ب): حدود قطبی انتگرال را برای مرز R تعیین می کنیم.

به این ترتیب انتگرال دکارتی به صورت زیر در می آید:

$$\iint_R F(x,y)dx\,dy = \iint_G F(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\,d\theta$$

که در آن، G ناحیه انتگرال گیری در مختصات قطبی است.

مثال (۳-۱۰):

ورقه نازکی با چگالی $\delta(x,y)=1$ در ربع اول قرار دارد و به دایره $x^2+y^2=1$ محدود است. گشتاور لختی قطبی این ورقه را حول مبدأ بیابید.

حل:

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2) = \int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\, r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2}\times\int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{2}\times\frac{r^4}{4} = \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}$$

مثال (۳-۱۱):

مطلوب است محاسبه

$$\iint_R e^{x^2+y^2} dy\,dx$$

که در آن R ربع دایره ای محدود به محور x و خم $y=\sqrt{1-x^2}$ و محور y است. (ربع اول)

حل:

$$\iint_R e^{x^2+y^2} dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \frac{1}{2} e^{r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} e^{r^2}\Big|_{r=0}^{r=1} d\theta = \frac{1}{2}(e-1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}(e-1)$$

جانشانی در انتگرال های دوگانه

جانشانی در مختصات قطبی حالت خاصی است از روش عاقه جانشانی در مورد انتگرال های دوگانه، روشی که تغییر متغیرها را به صورت تبدیل نواحی مجسم می سازد.

فرض می کنیم ناحیه G در صفحه uv با معادلات زیر به ناحیه R در صفحه xy تبدیل می شود.

$$x = G(u,v) \quad , \quad y = H(u,v)$$

هر تابعی چون $F(x,y)$ که روی R تعریف می شود می توان تابعی چون $F(G(u,v), H(u,v))$ دانست که روی Q

تعریف می شود. می بینیم انتگرال $F(x,y)$ روی R ارتباطی با انتگرال $F(G,H)$ روی ناحیه Q دارد.

اگر G ، H و F پیوسته و دارای مشتقات جزئی پیوسته باشند این انتگرال ها چنین به هم مربوط می شوند.

$$\iint_R F(x,y)\,dx\,dy =$$

$$\iint_Q F\big(G(u,v),H(u,v)\big)\,|J(u,v)|\,du,dv$$

عامل $J(u,v)$ که قدر مطلقش در این فرمول آمده است برابر است با دترمینان

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

این دترمینان، دترمینان ژاکوبی نام دارد.

نماد $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ به ما کمک می کند چگونگی تشکیل دترمینان از مشتقات جزئی x و y را به یاد بسپاریم.

در مختصات قطبی به جای (v,u) و (θ,r) را داریم.

به ازای $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ ژاکوبی عبارت است از:

$$J(r,\theta)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r$$

بنابراین رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$\iint_R F(x,y)\,dx\,dy=\iint_Q F(r\cos\theta,r\sin\theta)\,|r|\,dr\,d\theta=\iint_Q F(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

مثال (۳-۱۲):

انتگرال $\int_0^8\int_{x=\frac{y}{2}}^{x=\frac{y}{2}+1}\frac{2x-y}{2}\,dx\,dy$ را با استفاده از تبدیل $v=\frac{y}{2}$ و $u=\frac{2x-y}{2}$ به دست آورید.

حل:

با توجه: $u=\frac{2x-y}{2}$, $v=\frac{y}{2}\rightarrow\frac{2u+y}{2}=x$

$$v=\frac{y}{2}\rightarrow\begin{matrix} u+v=x \\ 2v=y \end{matrix}$$

$$\rightarrow \frac{\partial x}{\partial u}=1 \qquad \frac{\partial x}{\partial v}=1$$
$$\rightarrow \frac{\partial y}{\partial u}=0 \qquad \frac{\partial y}{\partial v}=2$$

$$\rightarrow J(u,v)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2$$

حال باید حدود انتگرال را به دست آوریم:

$$\int_0^8 \int_{x=\frac{y}{2}}^{x=\frac{y}{2}+1} \frac{2x-y}{2}\,dx\,dy=\iint_Q u\,du\,dv$$

$$(x=\frac{y}{2}\rightarrow u+v=\frac{2v}{2}\rightarrow u=0),$$

$$x=\frac{y}{2}+1 \rightarrow u+v=v+1\rightarrow u=1$$

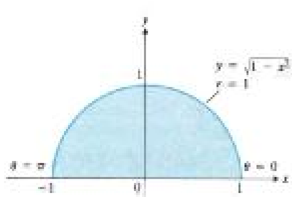
$$y=0\rightarrow 2v=0\rightarrow v=0$$
$$y=8\rightarrow 2v=8\rightarrow v=4$$

$$\int_0^8 \int_{x=\frac{y}{2}}^{x=\frac{y}{2}+1} \frac{2x-y}{2}\,dx\,dy=\int_{v=0}^{v=4}\int_{u=0}^{u=1} u\times 2\,du\,dv=\int_{v=0}^{v=4}\frac{u^2}{1}\Big|_0^1 dv=1\times 4=4$$

مثال (۳-۱۳):

انتگرال دکارتی را به انتگرال قطبی معادلش تبدیل کرده و انتگرال قطبی را محاسبه کنید.

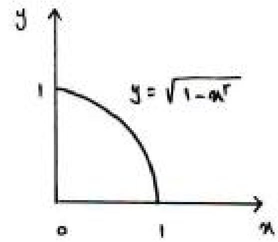
الف) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\,dx$



حل: $\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{1} r\,dr\,d\theta=0$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}\Big|_0^1 d\theta=\frac{1}{2}\times 2\pi=\pi$$

ب) $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}(x^2+y^2)\,dx\,dy$



حل: $x^2+y^2=r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta\ ,\ dx\,dy=r\,dr\,d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{1} r^2\, r\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^4}{4}\Big|_0^1 d\theta=\frac{1}{4}\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}$$

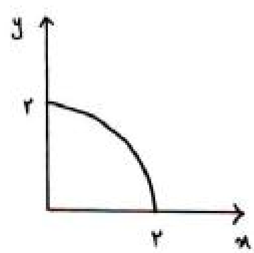
ج) $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\,dx$

حل $=\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{a} r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{r^2}{2}\Big|_0^a d\theta=\frac{a^2}{2}\times 2\pi=a^2\pi$

مثال (۳-۱۳):

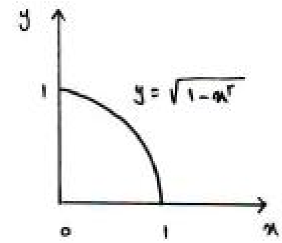
انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx$



حل: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2\frac{r^2\sin\theta\cos\theta}{r}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r^3}{3}\Big|_0^2\sin\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{8}{3}\times\frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$

ب) $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}5\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{1}5r(r\,dr\,d\theta)$



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\,\frac{r^3}{3}\Big|_0^1 d\theta=\frac{5}{3}\times\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}$$

مثال (۳-۱۵):

از تابع $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$ روی قرص دایره $x^2+y^2\le\dfrac{3}{4}$ انتگرال بگیرید:

$$\iint_{(xy)}\frac{1}{1-x^2-y^2}\,dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{1-r^2}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\ln(1-r^2)\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}d\theta=(-\frac{1}{2}\ln(1-\frac{3}{4})-\frac{1}{2}\ln(1))\times2\pi=-\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{4})\times2\pi$$:

حل

$$=-\pi\ln(\frac{1}{4})=+\pi\ln 4$$

مثال (۳-۱۶):

از دستگاه $v=2x+y$ و $u=x-y$، x و y را بر حسب u و v به دست آورید. سپس ژاکوبی $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ را به دست آورید.

فرض کنید R ناحیه ای واقع در ربع اول و محدود به خطوط $y=-2x+4$ و $y=-2x+7$ و $y=x-2$ و $y=x+1$ باشد.

از تعویض متغیرها استفاده کنید و انتگرال

$$\iint_R(2x^2-xy-y^2)\,dx\,dy$$

را روی ناحیه Q در صفحه uv محاسبه کنید.

حل:

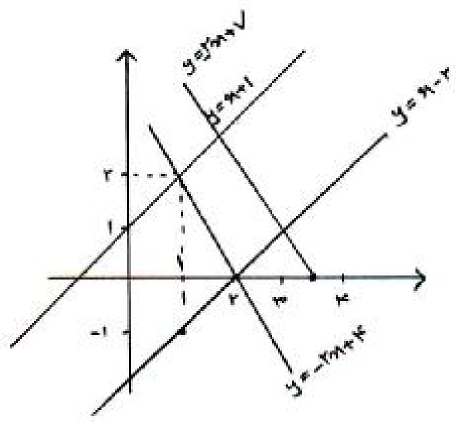
$$\left.\begin{aligned}u&=x-y\\ v&=2x+y\end{aligned}\right\}\to\frac{u+v}{3}=x$$

$$\left.\begin{aligned}2u&=2x-2y\\ -v&=-2x-y\end{aligned}\right\}\to 2u-v=-3y\to y=-(\frac{2u-v}{3})=\frac{v-2u}{3}$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{3}\ ,\ \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{1}{3} \qquad \Rightarrow$$
$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{3}\ ,\ \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3} & +\frac{1}{3}\end{vmatrix}=+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=+\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

$$\iint_R (2x^2-xy-y^2)dx\,dy=\iint(2\frac{(u+v)^2}{9}-(\frac{u+v}{3})(\frac{v-2u}{3})-\frac{(v-2u)^2}{9})\frac{1}{3}du\,dv$$
$$=\iint\frac{1}{3}\times\frac{2u^2+2v^2+4uv-uv+2u^2-v^2+2uv-v^2-4u^2+4uv}{9}=\iint\frac{1}{27}\,9uv=\frac{1}{3}\iint vu\,du\,dv$$



$$y=x+1\rightarrow\frac{v-2u}{3}=\frac{u+v}{3}+\frac{3}{3}\rightarrow -3=3u\rightarrow u=-1$$
$$y=x-2\rightarrow\frac{v-2u}{3}=\frac{u+v}{3}-\frac{6}{3}\rightarrow 6=3u\rightarrow u=2$$
$$y=-2x+4\rightarrow\frac{v-2u}{3}=-\frac{2u-2v}{3}+\frac{12}{3}\rightarrow 37=12\rightarrow v=4$$
$$y=-2x+7\rightarrow\frac{v-2u}{3}=-\frac{2u-2v}{3}+\frac{21}{3}\rightarrow 37=21\rightarrow v=7$$

$$=\frac{1}{3}\int_{v=4}^{v=7}\int_{u=-1}^{u=2}vu\,du\,dv=\frac{1}{3}\int_4^7 7\frac{u^2}{2}\Big|_{-1}^{2}dv=\frac{1}{3}\times(2-\frac{1}{2})\times(\frac{7^2}{2})\Big|_4^7=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}(\frac{49}{2}-\frac{16}{2})=\frac{1}{2}\times\frac{33}{2}=\frac{33}{4}$$

(3-7) انتگرال های سه گانه در مختصات قائم

از انتگرال های سه گانه برای محاسبه حجم اشکال سه بعدی نامنظم و مقدار متوسط توابع روی نواحی سه بعدی استفاده می شود. همچنین از این انتگرال ها برای محاسبه حجم و گشتاور اجسام سه بعدی بهره می گیرند.

وقتی این انتگرال ها با بردارها ترکیب می شوند برای توصیف بسیاری از پدیده های مربوط به سیالات و الکترومغناطیس به کار می روند. در این بخش انتگرال های سه گانه را تعریف می کنیم و با استفاده از آن ها حجم اجسام و مقدار متوسط توابع را به دست خواهیم آورد.

انتگرال های سه گانه

اگر $F(x,y,z)$ تابعی باشد که روی ناحیه بسته و محصوری چون O در فضا تعریف می شود.

ناحیه مکعب مستطیلی دربردارنده D را با صفحات موازی صفحات مختصات به خانه های مکعب مستطیلی تقسیم می کنیم. ابعاد این خانه ها عبارت اند از: Δx در Δy در Δz.

خانه های درون D به ترتیب زیر شماره گذاری می شوند.

$$\Delta v_1, \Delta v_2, \mathbf{K}\, \Delta v_n$$

در هر Δv_k نقطه ای چون (x_k, y_k, z_k) بر می گزینیم و مجموع زیر را تشکیل می دهیم.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k, z_k)\, \Delta v_k$$

اگر F پیوسته باشد و رویه محدود کننده D از رویه های هموار که با خم های پیوسته به هم وصل می شوند تشکیل شده باشد، آن گاه وقتی Δx ، Δy و Δz به صفر میل کنند، مجموع S_n به سمت حدی میل می کند.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iiint_D F(x,y,z)\, dv$$

این حد را انتگرال سه گانه F روی D می نامیم. این حد برای برخی از توابع ناپیوسته نیز وجود دارد.

ویژگی های انتگرال های سه گانه

همان ویژگی های جبری را که انتگرال های دوگانه و یگانه (ساده) دارند، انتگرال های سه گانه نیز دارند.

اگر $F=F(x,y,z)$ و $G=G(x,y,z)$ هر دو انتگرال پذیر باشند داریم:

1) $\iiint_D kF\,dv = k\iiint_D F dv$

2) $\iiint_D [F+G]\,dv = \iiint_D F dv + \iiint_D G\,dv$

3) $\iiint_D [F-G]\,dv = \iiint_D F dv - \iiint_D G\,dv$

4) $\iiint_D F dv \ge 0$ (اگر روی D، $F \ge 0$)

5) $\iiint_D F dv \ge \iiint_D G\,dv$ (اگر روی D، $F \ge G$)

6) $\iiint_D F\,dv = \iiint_{D_1} F dv + \iiint_{D_2} F\,dv + \ldots + \iiint_{D_n} F\,dv$

حجم یک ناحیه در فضا

اگر F تابعی ثابت و مقدارش برابر 1 باشد، آن گاه

$$S_n = \sum F(x_k, y_k, z_k)\Delta v_k = \sum 1 \cdot \Delta v_k = \sum \Delta v_k$$

وقتی Δx، Δy و Δz هر سه به صفر میل کنند، خانه های Δv_k کوچک تر و بیشتر می شوند و در نهایت D را می پوشانند.

بنابراین حجم D را به صورت انتگرال سه گانه زیر تعریف می کنیم:

$$\lim \sum_{k=1}^{n} \Delta v_k = \iiint_D dv$$

حجم ناحیه محصور و بسته ای چون D در فضا از فرمول زیر به دست می آید.

$$\text{حجم } D = \iiint_D dv$$

به زودی خواهیم دید که این فرمول ما را به محاسبه حجم محصور در رویه های خمیده قادر می سازد.

محاسبه انتگرال های سه گانه

برای محاسبه انتگرال سه گانه به ندرت مستقیماً از تعریف آن به صورت یک حد استفاده می کنیم. بلکه بصورت سه بعدی قضیه فوبینی را به کار می بریم و با استفاده از انتگرال گیری یگانه (ساده) مکرر انتگرال سه گانه را محاسبه می کنیم.

مثلاً فرض می کنیم ناحیه ای چون D داریم که از پایین به رویه $z=f_1(x,y)$ و از بالا به رویه $z=f_2(x,y)$ و از اطراف به استوانه c که موازی محور z است محدود است. می خواهیم از تابع پیوسته ای چون $F(x,y,z)$ روی این ناحیه انتگرال بگیریم. فرض می کنیم R تصویر قائم D روی صفحه xy باشد. R ناحیه ای در صفحه xy است که c آن را محصور می کند. بنابراین انتگرال F روی D محاسبه می شود.

$$\iiint_D F(x,y,z)dv = \iint_R \left(\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x,y,z)dz\right) dy\,dx$$

نتیجه می گیریم:

$$\iiint_D F(x,y,z)dv = \iint_R \left(\int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x,y,z)dz\,dy\,dx\right.$$

حدود x و y در انتگرال گیری بالا نیامده است که باید به روش معمول با استفاده از مرزهای R تعیین شوند.

مقدار متوسط یک تابع در فضا

$$\text{مقدار متوسط } F \text{ روی } D = \frac{1}{\text{حجم } D}\iiint_D F\,dv$$

مثال (۳-۱۷):

مقدار انتگرال زیر را بیابید:

$$\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^2 dx\,dy\,dz = 2\int_0^1\int_0^{1-z} dy\,dz = 2\int_0^1 (1-z)dz = 2\left(z-\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 2\left\{1-\frac{1}{2}\right\} = 1$$

مثال (۳-۱۸):

شش انتگرال سه گانه مکرر و مختلف برای حجم مکعب مستطیلی که در یک هشتم اوّل واقع و به صفحات مختصات و صفحات $x=1$، $y=2$ و $z=3$ محدود است بنویسید. یکی از انتگرال ها را محاسبه کنید.

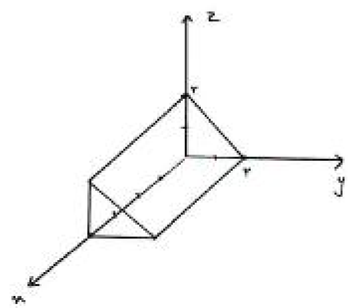
حل:

$$v = \int_0^1\int_0^2\int_0^3 dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^3\int_0^2 dy\,dz\,dx = \int_0^2\int_0^1\int_0^3 dz\,dx\,dy = \int_0^3\int_0^1\int_0^2 dy\,dx\,dz = \int_0^3\int_0^2\int_0^1 dx\,dy\,dz = \int_0^2\int_0^3\int_0^1 dx\,dz\,dy = \int_0^1\int_0^2 3\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 3\times(y)\Big|_0^2 dx = 3\times2\times1 = 6$$

مثال (۳-۱۹):

حجم شکل مقابل را با نوشتن انتگرال های مختلف به دست آورید.



$$v=\int_0^4\int_0^2\int_{z=0}^{z=2-y} dz\,dy\,dx=\int_0^4\int_0^2 (2-y)dy\,dx=\int_0^4 (2y-\frac{y^2}{2})\Big|_0^2 dx=(4-2)(4)=8$$

راه دیگر : $v=\int_0^4\int_0^2\int_{y=0}^{z=2-z} dy\,dz\,dx=\int_0^4\int_0^2 (2-z)dz\,dx=\int_0^4 (2z-\frac{z^2}{2})\Big|_0^2 dx=2\times 4=8$

مثال (۳-۲۰):

مطلوب است مقدار متوسط $F(x,y,z)=2xyz$ روی مکعبی که در یک هشتم اوّل واقع و به صفحات $x=2$، $y=2$ و $z=2$ محدود است.

$$v=\int_0^2\int_0^2\int_0^2 dx\,dy\,dz=\int_0^2\int_0^2 2dy\,dz=\int_0^2 2y\Big|_0^2 dz=\int_0^2 4\,dz=8$$

$$\iiint F(x,y,z)dx\,dy\,dz=\int_0^2\int_0^2\int_0^2 2xyz\,dx\,dy\,dz=\int_0^2\int_0^2 (x^2yz)\Big|_{x=0}^{x=2} dy\,dz=\int_0^2\int_0^2 4yz\,dy\,dz=\int_0^2 2y^2\Big|_0^2 z\,dz=\int_0^2 8z\,dz=8\frac{z^2}{2}\Big|_0^2$$
$$=4(2)^2=16$$

$$\bar{F}=\frac{\iiint F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint dx\,dy\,dz}=\frac{16}{8}=2$$

پاسخنامه سوالات تستی

۱- جواب انتگرال زیر کدام گزینه است؟

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\sin x} y\,dy\,dx$$

1) $\frac{\pi}{8}$ 2) $\frac{\pi}{4}$ 3) $\frac{\pi}{2}$ 4) π

۲- انتگرال زیر را محاسبه کنید. جواب کدام گزینه است؟

$$\int_0^{1}\int_0^{x^{3}} e^{\frac{y}{x}}\,dy\,dx$$

1) $\frac{1}{2}e$ 2) 1 3) $\frac{1}{2}e+1$ 4) $\frac{1}{2}e-1$

۳- حاصل انتگرال زیر را بیابید. جواب کدام گزینه است؟

$$\int_0^{1}\int_0^{4-x^{2}} dy\,dx$$

1) $\frac{11}{3}$ 2) 4 3) 3 4) $\frac{1}{3}$

۴- ورق نازکی ناحیه مثلثی شکل واقع در ربع اوّل محدود به محور x و خطوط $x=2$ و $y=x$ را می پوشاند. چگالی ورقه در نقطه (x,y) عبارت است از $d(x,y)=x+y+2$ مطلوب است مرکز جرم این ناحیه مثلثی.

1) $(1/4,2)$ 2) $(1,2)$ 3) $(1,3)$ 4) $(1,4)$

۵- مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2}}$

1) π 2) $\frac{\pi}{2}$ 3) 2π 4) 3π

۶- حاصل انتگرال زیر را به دست آورید.

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^{2}+y^{2})}\,dx\,dy$$

1) π 2) $\frac{\pi}{2}$ 3) $\frac{3}{2}\pi$ 4) $-\pi$

۷- حاصل انتگرال زیر کدام گزینه است؟

$$\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^{2}}} \frac{x+y}{x^{2}+y^{2}}\,dy\,dx$$

1) 2 2) -2 3) 1 4) -1

۸- مطلوب است ناحیه محصور در یک برگ از گل $r=\cos 3\theta$

1) $\frac{\pi}{2}$ 2) $\frac{\pi}{6}$ 3) $\frac{\pi}{12}$ 4) $\frac{\pi}{3}$

۹- مساحت ناحیه $r=1+\cos\theta$ و بیرون دایره $r=1$ را بیابید.

1) $\frac{\pi}{2}+2$ 2) $\pi+2$ 3) $\frac{\pi}{2}$ 4) 2

۱۰- حاصل انتگرال زیر را بیابید.

$$\int_0^2\int_0^x y\,dy\,dx$$

1) $\frac{4}{12}$ 2) $\frac{4}{6}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{4}{3}$

۱۱- اگر $F(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt+\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1+t^2}dt$ $(x\neq 0)$ تابع ثابتی باشد مقدار این تابع کدام است؟

1) صفر 2) 1 3) $\frac{\pi}{2}$ 4) $\frac{\pi}{4}$

۱۲- حاصل انتگرال دوگانه $\iint_R e^{-(x^2+y^2)}dA$ وقتی R درون دنباله R به معادله $x^2+y^2=1$ و در ناحیه اوّل مختصات باشد کدام است؟

1) $\frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{e})$ 2) $\frac{\pi}{4}(1-\frac{1}{e})$ 3) $\frac{\pi}{4}(1+\frac{1}{e})$ 4) $\frac{\pi}{2}(1+\frac{1}{e})$

۱۳- حاصل $\iint_D\frac{dx\,dy}{x^2+y^2+1}$ وقتی D درون دایره ای به مرکز مبدأ و شعاع واحد باشد کدام است؟

1) 2π 2) $\frac{\pi}{2}\ln 2$ 3) $\frac{2\pi}{3}\ln 3$ 4) $\pi\ln 2$

۱۴- اگر D در ناحیه بین خطوط $x=\pi$ و $y=2x$ و $2y=x$ است. حاصل $\iint_D \sin y\,dx\,dy$ کدام است؟

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

۱۵- حاصل انتگرال $\iint_D\frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2}$ در داخل مثلثی به سه رأس $(0,0)$ و $(2,0)$ و $(2,2)$ کدام است؟

1) $\ln\frac{5}{\sqrt{3}}$ 2) $\ln\sqrt{5}$ 3) $\ln\sqrt{3}$ 4) $\ln\frac{3}{\sqrt{5}}$

۱۶- حاصل انتگرال $\int_0^1\int_0^{3-3x}\int_0^{3-3x-y}dz\,dy\,dx$

1) $-\frac{3}{2}$ 2) $-\frac{5}{2}$ 3) $-\frac{1}{2}$ 4) -1

۱۷- حاصل انتگرال مقابل کدام گزینه است؟

$$\int_1^e \int_1^e \int_1^e \frac{1}{xyz}\, dz\, dy\, dx$$

1) 2   2) 1   3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{1}{3}$

۱۸- مقدار متوسط $F(x,y,z)$ را روی ناحیه ای که در یک هشتم اوّل واقع و به صفحات مختصات و صفحات $x = ۲$، $y = ۲$ و $z = ۲$ محدود است، کدام است؟

$$F(x,y,z) = x^{۲} + ۹$$

1) 3   2) $\frac{31}{3}$ 3) $\frac{27}{3}$ 4) $\frac{4}{3}$

۱۹- ناحیه محصور بین استوانه های $z = ۵ - x^{۲}$، $z = ۴x^{۲}$ و صفحات $y = ۰$ و $x + y = ۱$ کدام است؟

1) 3   2) 4   3) $\frac{25}{6}$ 4) $\frac{25}{12}$

۲۰- فصل مشترک بین نواحی $x^{۲} + y^{۲} = a^{۲}$ و استوانه $x^{۲} + z^{۲} = a^{۲}$ چه حجمی دارد؟

1) $\frac{2}{3}a^3$ 2) $\frac{1}{3}a^3$ 3) $\frac{16}{3}a^3$ 4) $16a^3$

پاسخنامه سوالات تستی

۱- گزینه ۲ صحیح است. زیرا:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\sin x} y\,dy\,dx = \int_0^{\pi}(\frac{y^2}{2})\Big|_{y=0}^{y=\sin x}dx = \int_0^{\pi}(\frac{\sin^2 x}{2})\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin^2 x\ dx = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin x = u$$
$$\sin x\,dx = dv$$
$$\rightarrow v = -\cos x$$

نکته * $\int_0^{\pi}\sin^2 x\ dx = \int_0^{\pi}\sin x\ \sin x\ dx - \sin x\ \cos x\Big|_0^{\pi} - \int -\cos x\ \cos x$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi}\sin^2 x\ dx = \int_0^{\pi}\cos^2 x\ dx$$

از طرفی

$$\int_0^{\pi}(\sin^2 x + \cos^2 x)\ dx = x\Big|_0^{\pi} = \pi$$
$$\rightarrow \int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

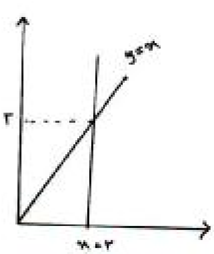
۲- گزینه ۴ صحیح است. زیرا:

$$\int_0^1\int_0^{x^3} e^{\frac{y}{x}}\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1}(xe^{\frac{y}{x}})\Big|_{y=0}^{y=x^3}dx = \int_{x=0}^{x=1}(xe^{x^2}) - (x)\,dx = \int_0^1 x\,e^{x^2}dx - \int_0^1 x\,dx = (\frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{x^2}{2})\Big|_{x=0}^{x=1} = (\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}) - (\frac{1}{2})$$
$$= \frac{1}{2}e - 1$$

۳- گزینه ۱ صحیح است. زیرا:

$$\int_0^1\int_0^{4-x^2} dy\,dx = \int_0^1 (y)\Big|_{y=0}^{y=4-x^2}dx = \int_0^1 (4 - x^2)\,dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

۴- گزینه ۱ صحیح است. زیرا:



$$M=\int_0^2\int_{y=0}^{y=x}\delta(x,y)\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^x(x+y+2)\,dy\,dx=\int_0^1(xy+\frac{y^2}{2}+2y)\Big|_0^x dx=\int_0^2 x^2+\frac{x^2}{2}+2x\ dx=\int_0^2\frac{3}{2}x^2+2x\ dx$$

$$=(\frac{3}{2}\times\frac{x^3}{3}+2\times\frac{x^2}{2})\Big|_0^2=(\frac{8}{2}+4)=8$$

$$M_y=\int_0^2\int_0^x\delta(x,y)x\,dy\,dx=\int_0^2\int_0^x(x+y+2)x\,dy\,dx=\int_0^2\int_0^x(x^2+yx+2x)\,dy\,dx=\int_0^2(x^2y+x\frac{y^2}{2}+2xy)\Big|_0^x dx$$

$$=\int_0^2(x^3+\frac{x^3}{2}+2x^2)\,dx=(\frac{x^4}{4}+\frac{x^4}{8}+\frac{2}{3}x^3)\Big|_0^2=\frac{16}{4}+\frac{16}{8}+\frac{2}{3}\times 8=4+2+\frac{16}{3}=11/\overline{3}$$

$$M_x=\int_0^2\int_0^x\delta(x,y)y\,dy\,dx=\int_0^2\int_0^x(x+y+2)y\,dy\,dx=\int_0^2\int_0^x(xy+y^2+2y)\,dy\,dx=\int_0^2(x\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+y^2)\Big|_0^x dx$$

$$=\int_0^2(\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{3}+x^2)\,dx=\int_0^2\frac{5}{6}x^3+x^2\,dx=(\frac{5}{6}\,\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3})\Big|_0^2=\frac{5}{6}\times\frac{16}{4}+\frac{8}{3}=6$$

$$\rightarrow \bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{11/3}{8}=1/4$$

$$\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{6}{8}=2$$

۵- گزینه ۱ صحیح است. زیرا:

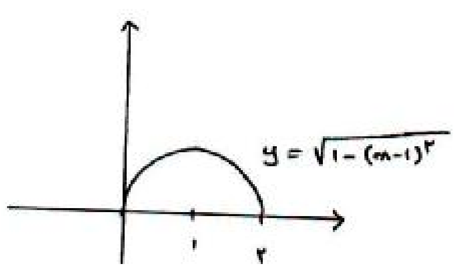
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

۶- گزینه ۴ صحیح است. زیرا:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\times\int_0^{\infty}e^{-r^2}\,r\,dr=2\pi(\frac{e^{-r^2}}{2}\Big|_0^{\infty})=2\pi\{0-\frac{1}{2}\}=-\pi$$

۷- گزینه   صحیح است. زیرا:

$y=\sqrt{1-(x-1)^2}$ $\rightarrow$ شکل قسمتی از دایره فوق است $y^2+(x-1)^2=1$



$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}}\frac{x+y}{x^2+y^2}\,dy\,dx=\int_0^{\pi}\int_0^1\frac{r(\cos\theta+\sin\theta)}{r^2}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{\pi}(\sin\theta+\cos\theta)\,d\theta=\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta+\int_0^{\pi}\cos\theta\,d\theta$$

$$=(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}+\sin\theta\Big|_0^{\pi}=-\cos\pi+\cos 0=1+1=2$$

۸- گزینه ۳ صحیح است. زیرا:

$$\frac{\pi}{2} < 2\theta < -\frac{\pi}{2} \;\rightarrow\; -\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$$

$$A = \iint r\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \int_{r=0}^{\cos 3\theta} r\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{r^2}{2}\right)\Big|_{r=0}^{r=\cos 3\theta} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{\cos^2 3\theta}{2}\right) d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\theta\; d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 6\theta}{2}\, d\theta$$

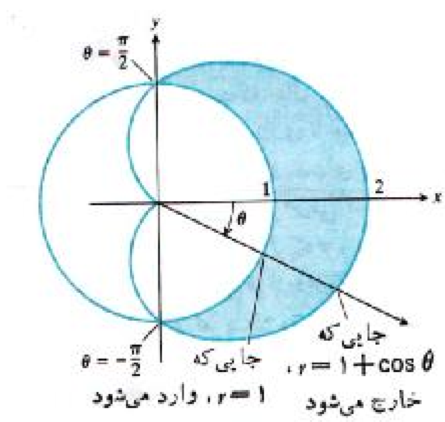
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos 6\theta\, d\theta = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{6}(\sin 6\theta)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{6}\{\sin \pi - \sin(-\pi)\} = \frac{\pi}{12}$$

۹- گزینه ۱ صحیح است. زیرا:

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{1}^{1+\cos\theta} r\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^2}{2}\right)\Big|_{1}^{1+\cos\theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{(1+\cos\theta)^2}{2} - \frac{1}{2}\right\} d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{1+\cos^2\theta + 2\cos\theta}{2} - \frac{1}{2}\right\} d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\; d\theta = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \sin\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}(\pi) + \frac{1}{4}(\sin\pi - \sin -\pi)(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)) = \frac{\pi}{2} + (2)$$



۱۰- گزینه ۴ صحیح است. زیرا:

$$\int_0^2 \left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^x dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \left(\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\frac{8}{3} - 0 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

۱۱- گزینه ۳ صحیح است. زیرا:

$$F(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt+\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt=\arctan t\Big|_{t=0}^{t=x}+\arctan t\Big|_0^{\frac{1}{x}}=(\arctan x-\arctan 0)+(\arctan\frac{1}{x}-\arctan 0)$$

$$=\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}$$

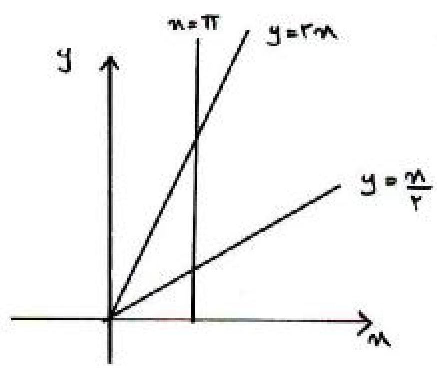
۱۲- گزینه ۲ صحیح است. زیرا:

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dA=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{r=1} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta=\left(\frac{e^{-r^2}}{-2}\Big|_{r=0}^{r=1}\right)\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\times\left\{\frac{e^{-1}}{-2}-\frac{e^0}{-2}\right\}=-\frac{\pi}{4}\left\{\frac{1}{e}-1\right\}=\frac{\pi}{4}\left\{1-\frac{1}{e}\right\}$$

۱۳- گزینه ۴ صحیح است. زیرا:

$$\iint\frac{dx\,dy}{x^2+y^2+1}=\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{r\,dr\,d\theta}{r^2+1}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\ln|1+r^2|\,\Big|_{r=0}^{r=1}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1)\times d\theta=\frac{1}{2}\ln 2\times 2\pi=\pi\ln 2$$

۱۴- گزینه ۲ صحیح است. زیرا:



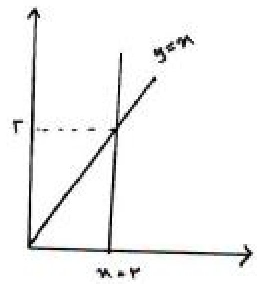
$\left.\begin{array}{l}x=\pi\\ y=2x\end{array}\right\}\to y=2\pi\to\left\{\begin{array}{l}x=\pi\\ y=2\pi\end{array}\right.$ محل تلاقی خطوط $x=\pi$ و $y=2x$

$\left.\begin{array}{l}y=\frac{x}{2}\\ x=\pi\end{array}\right\}\to y=\frac{\pi}{2}\to\left\{\begin{array}{l}x=\pi\\ y=\frac{\pi}{2}\end{array}\right.$ محل تلاقی خطوط $x=\pi$ و $y=\frac{x}{2}$

$$\iint_D \sin y\,dx\,dy=\int_0^{\pi}\int_{y=\frac{x}{2}}^{y=2x}\sin y\,dx\,dy=\int_0^{\pi}\int_{\frac{x}{2}}^{2x}\sin y\,dy\,dx=\int_0^{\pi}(-\cos y)\Big|_{y=\frac{x}{2}}^{y=2x}dx=\int_0^{\pi}(-\cos 2x+\cos\frac{x}{2})\,dx$$

$$=-\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx+\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\,dx=-\frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\pi}+2\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}=-\frac{\sin 2\pi}{2}+\frac{\sin 0}{2}+2\sin\frac{\pi}{2}-2\sin 0=2$$

۱۵- گزینه ۴ صحیح است. زیرا:



$$\iint \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2} = \int_0^2\int_{y=0}^{y=x}(x+y+1)^{-2}\,dy\,dx = \int_0^2 \frac{(x+y+1)^{-1}}{-1}\Big|_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^2 \frac{(2x+1)^{-1}}{-1} - \frac{(x+1)^{-1}}{-1}\,dx$$

$$= \int_0^2 -\frac{1}{(2x+1)} + \frac{1}{(x+1)}\,dx = -\int_0^2 \frac{1}{2x+1}\,dx + \int_0^2\frac{1}{1+x}\,dx = (-\frac12\ln|1+2x| + \ln|1+x|)\Big|_{x=0}^{2} = -\frac12\ln 5+\frac12\ln 1+\ln 3-\ln 1$$

$$= -\frac12 \ln 5 + \ln 3 = (\ln\frac{3}{\sqrt5})$$

۱۶- گزینه ۱ صحیح است. زیرا:

$$\int_0^1\int_0^{3-3x}\int_0^{3-3x-y} dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{3-3x} z\Big|_{z=0}^{z=3-3x-y} dy\,dx = \int_0^1\int_0^{3-3x}(3-3x-y)\,dy\,dx = \int_0^1 (1-3x-\frac{y^2}{2})\Big|_{y=0}^{y=3-3x} dx$$

$$= \int_0^1 (1-3x-\frac{(3-3x)^2}{2}) - (1-3x) = \int_0^1 -\frac92 - \frac92 x^2 + \frac{18}{2}x\,dx = -\frac92 - \frac92\times\frac13 + 9\,\frac12 = -\frac32$$

۱۷- گزینه ۲ صحیح است. زیرا:

$$\int_1^e\int_1^e\int_1^e \frac{1}{xyz}\,dz\,dy\,dx = \int_1^e\int_1^e \frac{1}{xy}\ln|z|\Big|_{z=1}^{z=e} dy\,dx = \int_1^e\int_1^e\frac{1}{xy}(\ln e - \ln 1)\,dy\,dx = \ln e\int_1^e\int_1^e \frac{1}{xy}\,dy\,dx = (\ln e)^3 = 1$$

۱۸- گزینه ۲ صحیح است. زیرا:

$$\bar F = \frac{\iiint F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint dx\,dy\,dz} \Rightarrow$$

$$\int_0^2\int_{y=0}^2\int_{x=0}^2 dx\,dy\,dz = \int_0^2\int_0^2 (x)\Big|_0^2 dy\,dz = 2\int_0^2\int_0^2 dy\,dz = 2\int_0^2 (y)\Big|_0^2 dz = 2\times(2)\int_0^2 dz = 8$$

$$\int_0^2\int_0^2\int_0^2 (x^2+9)\,dx\,dy\,dz = \int_0^2\int_0^2(\frac{x^3}{3}+9x)\Big|_0^2 dy\,dz = \int_0^2\int_0^2(\frac83+18)\,dy\,dz = \int_0^2(\frac83+18)\,y\Big|_0^2 dx = \int_0^2(\frac83+18)(2)\,dz = (\frac83+18)\times2\times2$$

$$=\frac{32}{3}+72$$

$$\bar F = \frac{\frac{32}{3}+72}{8} = 9 + \frac{32}{8\times3} = 9+\frac43 = \frac{27+4}{3} = \frac{31}{3}$$

۱۹- گزینه ۴ صحیح است. زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} z=5-x^2 \\ z=4x^2 \end{array}\right\} \rightarrow 5-x^2=4x^2 \rightarrow 5=5x^2 \rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}$$

حدود x به قرار بالا است.

از طرفی حدود y به قرار مقابل است:

$$y=0$$

$$x+y=1 \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=1-x \end{cases}$$

$$v=\iiint dx\,dy\,dz=\int_{x=-1}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1-x}\int_{z=4x^2}^{z=5-x^2} dz\,dy\,dx=\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x}(5-x^2)-4x^2\,dy\,dx=\int_{-1}^{1}(5-5x^2)(1-x)\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}5(1-x^2)(1-x)\,dx=5\int_{-1}^{1}1-x-x^2+x^3=5\{x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\}_0^1=5\{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\}=5\,\frac{24-12-8+6}{24}$$

$$=5\{\frac{10}{24}\}=\frac{50}{24}=\frac{25}{12}$$

۲۰- گزینه ۳ صحیح است. زیرا:

$$\iiint_D dx\,dy\,dz=8\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} dz\,dy\,dx$$

$$x^2+y^2=a^2 \rightarrow y=\sqrt{a^2-x^2}$$

در $\frac{1}{8}$ اول y از صفر تا این مقدار تغییر می کند، بنا به تقارن این منطقه 8 بار تکرار می شود.

$$x^2+z^2=a^2 \rightarrow z=\sqrt{a^2-x^2}$$

در $\frac{1}{8}$ اول z از صفر تا این مقدار تغییر می کند.

$$v=8\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2}\,dy\,dx=8\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,\sqrt{a^2-x^2}\,dx=8\int_0^a(a^2-x^2)\,dx$$

$$=8(a^2x-\frac{x^3}{3}\Big|_0^a)=8(a^3-\frac{a^3}{3})=8\times\frac{2}{3}a^3=\frac{16}{3}a^3$$

فصل چهارم: جبر خطی و فضاهای برداری

یکی از مسائل مطرح شده در ریاضیات حل دستگاه معادلات می باشد.

با استفاده از ماتریس و تعاریف مربوط به آن این مسئله در ریاضیات حل خواهد شد.

برای مثال دستگاه معادلات زیر را در نظر می گیریم:

$$a_{11}x + a_{12}y = h_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = h_2$$

برای حل این دستگاه معادله بالا را در a_{22} و معادله پایین را در a_{12} ضرب می کنیم و سپس این دو معادله را از هم کم می کنیم خواهیم داشت:

$$a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y - (a_{21}a_{12}x + a_{22}a_{12}y) = h_1a_{22} - h_2a_{12}$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = h_1a_{22} - h_2a_{12}$$

$$x = \frac{a_{22}h_1 - a_{12}h_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

به همین ترتیب می توان y را مطابق زیر به دست آورد.

$$y = \frac{a_{21}h_1 - a_{11}h_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

همان طور که دیده می شود مخرج این عبارت یکسان به دست آمده است. که همان دترمینان ماتریس 2×2ای مطابق شکل است.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

برای حل دستگاهی که شامل سه مجهول می باشد و سه معادله مطابق روش بالا عمل می کنیم.

برای این منظور به تعریف های لازم ماتریس و قوانین مربوط به آن می پردازیم:

جبر خطی و ماتریس

۴-۱) روش نشان دادن یک ماتریس

اگر A یک ماتریس مستطیلی با الحان های a_{ij} باشد. i نشان دهنده شماره سطر ماتریسی است که این الحان در آن قرار گرفته و j نشان دهنده شماره ستون همان ماتریس است.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

که در مثال بالا ماتریس A یک ماتریس مستطیلی با n ستون و m سطر می باشد.

← a_{ij}: الحانی از این ماتریس است که در سطر i ام و در ستون j ام قرار گرفته.

الحان های قطر یک ماتریس، الحان هایی هستند که شماره سطر و ستون آن یکی باشد.

یعنی وقتی الحانی از ماتریس مانند a_{ij} داشته باشیم که در آن $i=j$ باشد آن گاه a_{ij} الحان قطری ماتریس است.

برابری دو ماتریس

دو ماتریس برابر هستند اگر تک تک الحان های آن دو ماتریس با هم برابر باشند.

$$A=a_{ij} \quad , \quad B=b_{pq}$$

دو ماتریس A و B با هم برابرند:

اگر $p=i$ و $j=q$ ← آن گاه $a_{ij}=b_{pq}$

جمع و تفریق دو ماتریس

اگر $A=a_{ij}$, $B=b_{ij}$, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$ و سپس $C=A\pm B$ باشد.

$$C_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$$

که C نیز یک ماتریس $m\times n$ می باشد. یعنی برای جمع و تفریق دو ماتریس تک تک الحان های آن دو ماتریس بـا هـم جمع و تفریق می شوند.

مثال 4- 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

قوانین: می توان به راحتی اثبات نمود که:

$$\boxed{\begin{array}{l} A+B=B+A \\ A+B+C=A+(B+C) \end{array}}$$

ضرب دو ماتریس

$\leftarrow$ A ماتریسی $m\times n$ است: $A=a_{ij}$

$\leftarrow$ B ماتریسی $n\times q$ است: $B=b_{ij}$

ماتریس ضرب این دو ماتریس $m\times q$ است: $C=AB$

به صورتی که:

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

مثال (۴- ۲):

ماتریس های A و B مطابق شکل زیر داده شده اند. ماتریس C را به صورتی که حاصل ضرب این دو ماتریس باشد بیابید.

$(C=A\times B)$

$$A=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&4&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5&0&0\\4&1&0\\2&4&1\end{pmatrix}$$

$$C=AB=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&0&0\\4&1&0\\2&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(5)+3(4)+4(2)&2(0)+3(1)+4(4)&2(0)+3(0)+4(1)\\1(5)+4(4)+1(2)&1(0)+4(1)+1(4)&1(0)+4(0)+1(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30&19&4\\23&8&1\end{pmatrix}$$

نکته: ضرب دو ماتریس هرگز جا به جا پذیر نیستند.

$$\boxed{AB\neq BA}$$

مثال (4- 2): نشان دهید حاصل ضرب دو ماتریس زیر صفر خواهد شد.

$$A=\begin{pmatrix}2&3&-4\\6&1&2\\8&4&-2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-5&5&10\\14&-14&-28\\8&-8&-16\end{pmatrix}$$

$AB=C \qquad C_{11}=2(-5)+3(14)-4(8)=0$

$C_{12}=2(5)+3(-14)-4(-8)=0$
$C_{13}=2(10)+3(-28)-4(-16)=0$
$C_{23}=6(-5)+1(14)+2(8)=0$
$C_{22}=6(5)+1(-14)+2(-8)=0$
$C_{23}=6(10)+1(-28)+2(-16)=0$

به همین ترتیب $C_{33}=C_{32}=C_{31}$ محاسبه می شوند و صفر خواهند بود.

در نتیجه تمام الحان های یک ماتریس صفر شد پس آن ماتریس صفر است.

$AB=0$

توجه: همان طور که دیده می شود $A\neq 0$ و $B\neq 0$ بود ولی حاصل ضرب این دو ماتریس صفر شد.

نکته: اگر $AB=AC$ باشد لزومی ندارد که $B=C$ باشد.

اثبات:

$$AB=AC\rightarrow A(B-C)=0$$

ضرب دو ماتریس صفر شد که لزومی ندارد یکی از آن دو صفر باشد پس لزومی ندارد که $B=C$ باشد.

ضرب اسکالر

اگر λ عدد موهومی باشد و در یک ماتریس ضرب شود. $\lambda A=A\lambda$

آن عدد در تک تک الحان های ماتریس ضرب می شود.

مثال (۴- ۳):

$$A=\begin{pmatrix}10 & 2 & 0\\ 5 & 2 & 3\end{pmatrix}\ ,\ \lambda=6$$

λA را بیابید:

حل:

$$\lambda A=\begin{pmatrix}60 & 12 & 0\\ 30 & 12 & 18\end{pmatrix}$$

نکته:

$$\boxed{(A\times B)\times C=A\times(B\times C)}$$

اثبات:

$$(A\times B)\times C=\sum_k(\sum_j a_{ij}b_{jk})c_{kp}=\sum_k\sum_j a_{ij}(b_{jk}c_{kp})=\sum_j\sum_k a_{ij}(b_{jk}c_{kp})=\sum_j a_{ij}\sum_k a_{ij}(b_{jk}c_{kp})=\sum_j a_{ij}D_{jp}=AD$$

$$\boxed{b_{jk}c_{kp}=D_{jp}}$$

$$=A(BC)$$

تعریف ماتریس I

I ماتریسی مربعی با الحان های δ_{ij} است.

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ ,\ I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

و به همین ترتیب می توان 3×3 و $n\times n$ این ماتریس را به دست آورد.

ویژگی ماتریس I

این ماتریس در هر ماتریسی ضرب شود، خود آن ماتریس به دست می آید و ضرب آن با ماتریس ها جا به جا پذیر است.

$$AI=IA=A$$

اثبات:

می خواهیم ثابت کنیم که اگر ماتریس دلخواه $(A)_{m\times n}$ در I ضرب شود خودش به دست می آید و ضرب آن جا به جا پذیر است.

$$AI=F\rightarrow F_{ij}=\sum_k a_{ik}\delta_{kj}$$

چون: $\delta_{kj}=\begin{cases}1 & k=j\\ 0 & k\neq j\end{cases}$

$$F_{ij}=a_{ij}\delta_{jj}=a_{ij}$$

که همان ماتریس A است.

$$IA=P\qquad P_{ij}=\sum_k \delta_{ik}A_{kj}=\delta_{ii}A_{ij}=A_{ij}$$

که همان ماتریس A است.

تعریف معکوس یک ماتریس

A^{-1} معکوس ماتریس A است اگر $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ باشد.

ترنسپس یک ماتریس (Transpose)

ترنسپس یک ماتریس را با $\tilde{A}$ و یا A^T نشان می دهیم. ترنسپس ماتریس A و B است. وقتی که $b_{ij} = a_{ji}$ است.

مثال (۴- ۴):

اگر $A = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 1+i \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ باشد $\tilde{A}$ را بیابید.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} i & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1+i & 0 \end{pmatrix}$$

تعریف ماتریس متقارن

یک ماتریس متقارن نامیده می شود وقتی $\tilde{A} = A$

تعریف ماتریس پاد متقارن

یک ماتریس پاد متقارن نامیده می شود وقتی $\tilde{A} = -A$

مثال (۴- ۵):

نشان دهید هر ماتریس مربّعی را می توان به صورت جمع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پاد متقارن نوشت.

ماتریس $(A + A^T)$ یک ماتریس متقارن است $\Rightarrow \quad (A^T + A)^T = A + A^T$

ماتریس $(A^T - A)$ یک ماتریس پاد متقارن است $\Rightarrow \quad (A - A^T)^T = A^T - A$

به دلیل این که $A^T \Rightarrow (a_{ij})^T = a_{ji}$ از آن جا که A یک ماتریس مربّعی $n \times n$ است.

ماتریس A^T نیز یک ماتریس مربّعی A به صورت حاصل جمع یک ماتریس متقارن و یک ماتریس پـاد متقـارن نوشـته شده است.

قوانین:

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$A + B = C \rightarrow C^T = (A + B)^T$$

$$(c_{ij})^T = (a_{ij} + b_{ij})^T = c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$$

$$=(a_{ij})^T+(b_{ij})^T=A^T+B^T$$

$$\to (A+B)^T=A^T+B^T$$

تعریف Complex Conjugate یک ماتریس که با * نشان می دهند.

اگر $A=a_{ij}$ باشد Complex Conjugate آن ماتریس را با A^* نشان می دهیم.

$$A^*=aij^*$$

مثال (۴- ۶):

$A=\begin{pmatrix} 1-i & 10 \\ i & 2+i \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ سپس A^* را بیابید.

$$A^*=\begin{pmatrix} 1+i & 10 \\ -i & 2-i \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

قوانین:

$$(A+B)^*=A^*+B^*$$
$$(AB)^*=A^*B^*$$

(4- 7): نشان دهید $(AB)^*=A^*B^*$ و $(A+B)^*=A^*+B^*$

$$A+B=C\to (A+B)^*=C^*=C_{ij}^*=C_{ji}=a_{ji}+b_{ji}=(a_{ij})^*+(b_{ij})^*=A^*+B^*$$

$$AB=D\to (AB)^*=D^*=(\sum_k a_{ik}b_{kj})^*=\sum_k a_{jk}b_{ki}=D_{ji}=(D_{ij})^*$$

از طرفی $A^*B^*=\sum_k a_{jk}b_{ki}=(AB)^*$

تعریف † یک ماتریس

† ماتریس A را با $A^\dagger$ نشان می دهیم.

$$A^\dagger=A^{\sim *}$$

مثال (4- 8): $A^{\dagger}$ را بیابید.

$$A=\begin{pmatrix}0 & -i & e^{2i+1}\\ 1 & 2 & e\\ 0 & \sqrt{5} & \pi\end{pmatrix}\Rightarrow A^{\dagger}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ +i & 2 & \sqrt{5}\\ e^{-2i+1} & e & \pi\end{pmatrix}$$

قوانین ترنسپس

$$\widetilde{AB}=B^{\sim}A^{\sim}$$

اثبات:

و A یک ماتریس $m\times n$ باشد $A=a_{ij}\to A^{\sim}=a_{ji}$

و B یک ماتریس $n\times p$ باشد $B=b_{ij}\to B^{\sim}=b_{ji}$

$$AB=C\to C_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

$$\widetilde{AB}=C^{\sim}=C_{ji}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}$$

از طرفی $D=\tilde{B}\tilde{A}=\sum_{k=1}^{n}b_{ik}^{1}a_{kj}^{1}=\sum_{k=1}^{n}b_{ki}a_{jk}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}\to\widetilde{AB}=B^{\sim}A^{\sim}$

قوانین †:

$$(AB)^{\dagger}=B^{\dagger}A^{\dagger}$$

اثبات:

$$(AB)^{\dagger}B=(AB)^{\sim *}=(B^{\sim}A^{\sim})^{*}={}^{\dagger}A^{\dagger}$$

تعریف ماتریس Hermition

اگر A به گونه ای باشد که: $A^{\dagger}=A$ آن ماتریس هرمیشن نام دارد.

تعریف ماتریس پاد هرمیشن

اگر ماتریس A به گونه ای باشد که $A^{\dagger}=-A$ آن گاه A پاد هرمیشن نام دارد.

نکته: هر ماتریس مربّعی به صورت جمع یک ماتریس هرمیشن و یک ماتریس پاد هرمیشن نوشته می شود.

اثبات:

$$A=\left(\frac{A+A^\dagger}{2}\right)+\left(\frac{A-A^\dagger}{2}\right)$$

$$\left(\frac{A+A^\dagger}{2}\right)^\dagger=\left(\frac{A^\dagger+A}{2}\right)$$

$$\left(\frac{A-A^\dagger}{2}\right)^\dagger=\left(\frac{A^\dagger-A}{2}\right)=-\left(\frac{A-A^\dagger}{2}\right)$$

بنابراین $\left(\frac{A+A^\dagger}{2}\right)$ یک ماتریس هرمیشن است در حالی که $\left(\frac{A^\dagger-A}{2}\right)$ یک ماتریس پادهرمیشن است.

که در حقیقت نشان دادیم هر ماتریس مربّعی را می توان به صورت جمع یک ماتریس هرمیشن و پادهرمیشن نوشت.

دترمینان یک ماتریس

تعریف کلّی دترمینان یک ماتریس مربّعی $n\times n$ به شکل زیر است:

$$|A|=\sum \varepsilon_{J_1J_2J_3\ldots J_n}a_{1J_1}a_{2J_2}a_{3J_3}\cdots a_{nJ_n}$$

که $\varepsilon_{J_1J_2J_3\ldots J_n}$ برای جا به جایی های زوج $J_1J_2\cdots J_n$ $(+1)$ است و برای جا به جایی های فرد $J_1J_2\cdots J_n$ (-1) است.

مثال (4- 9): با توجه به تعریف فوق دترمینان ماتریس (2×2) را بیابید.

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\varepsilon_{12}a_{11}a_{22}+\varepsilon_{21}a_{12}a_{21}$$

از آن جا که $\varepsilon_{12}=1$ و $\varepsilon_{21}=-1$ است.

$$|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

مثال (4- 10): با توجه به تعریف دترمینان، دترمینان ماتریس (3×3) را به دست آورید:

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\varepsilon_{123}\,a_{11}\,a_{22}\,a_{33}+\varepsilon_{132}\,a_{11}\,a_{23}\,a_{32}+\varepsilon_{213}\,a_{12}\,a_{21}\,a_{33}+\varepsilon_{231}\,a_{12}\,a_{23}\,a_{31}$$

$$+\varepsilon_{312}\,a_{13}\,a_{21}\,a_{32}+\varepsilon_{321}\,a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$$

از آن جا که $\varepsilon_{123}=1$ و $\varepsilon_{132}=-1$ و $\varepsilon_{213}=-1$ و $\varepsilon_{231}=+1$ و $\varepsilon_{312}=1$ و $\varepsilon_{321}=-1$ است.

$$|A_{3\times3}|=a_{11}\,a_{22}\,a_{33}-a_{11}\,a_{23}\,a_{32}-a_{12}\,a_{21}\,a_{33}+a_{12}\,a_{23}\,a_{31}+a_{13}\,a_{21}\,a_{32}-a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$
$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

M_{ij} یک ماتریس مانند ماتریس A که مینور ماتریس A نامیده می شود از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس A بـه دست می آید:

اگر مینور M_{ij} را در $(-1)^{i+j}$ ضرب کنیم Cofactor (a_{ij}) نامیده می شود که بـه صـورت $C_{ij}=(-1)^{(i+j)}M_{ij}$ نشـان می دهیم.

چنانچه جای سطر و ستون C_{ij} را عوض کنیم $AdJ(A)$ به دست می آید (adjoint).

$$C_{ij}=adjA$$

مثال (۴- ۱۱):

ماتریس (3×3) مطابق شکل داده شده است.

ابتدا M_{32} را بیابید. سپس C_{32} این ماتریس را محاسبه کنید.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\rightarrow$$

M_{32} از حذف سطر سوم و ستون دوم به دست می آید $M_{32}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}$

$$C_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}$$

مثال (4- 12): ماتریس A داده شده است $AdJA$ را بیابید.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 5\\ -1 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

$$C_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 0 & 6\end{vmatrix} \qquad C_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 5\\ -1 & 6\end{vmatrix}$$

$$C_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix} \qquad C_{21}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4 & 2\\ 0 & 6\end{vmatrix}$$

$$C_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 6\end{vmatrix} \qquad C_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 4\\ -1 & 0\end{vmatrix}$$

$$C_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix} \qquad C_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 5\end{vmatrix}$$

$$C_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & 2\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$C_{ij}=\begin{pmatrix}12 & -5 & 2\\ -24 & 8 & -4\\ 16 & -5 & 2\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{adj}A=C_{\tilde{ij}}=\begin{pmatrix}12 & -24 & 16\\ -5 & 8 & -5\\ 2 & -4 & 2\end{pmatrix}$$

تعریف

اگر دترمینان ماتریس مرتّبی (A) مخالف صفر باشد $|A|\neq 0$ آن گاه A یک ماتریس معکوس منحصر به فرد دارد که با A^{-1} نشان می دهند که به صورت زیر به دست می آید.

$$A^{-1}=\frac{\mathrm{adj}A}{|A|}$$

به صورتی که $I=A^{-1}A=AA^{-1}$

مثال (4- 13): معکوس ماتریس $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 3\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$ را بیابید:

$$\Rightarrow |A|=2\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix}=2(7)+0+1(+2)=16$$

$$C_{11}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix} \qquad C_{12}=-1\times\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix} \qquad C_{13}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix}$$

$$C_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix} \qquad C_{22}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} \qquad C_{23}=-1\times\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}$$

$$C_{31}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix} \qquad C_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix} \qquad C_{33}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$C_{ij}=\begin{pmatrix}7 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 4\\ -1 & -7 & 2\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Adj}A=\begin{pmatrix}7 & -2 & -1\\ 1 & 2 & -7\\ 2 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}7 & -2 & -1\\ 1 & 2 & -7\\ 2 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

نمونه سوالات تستی

۱- معکوس ماتریس $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}$ کدام است؟

1) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}\\ -1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 2 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}$

۲- مطلوب است تعیین معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 2\\ 1 & 2 & -3\\ 4 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

1) $\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{35}\\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{35} & \frac{11}{35}\\ -\frac{1}{5} & -\frac{11}{35} & \frac{8}{35}\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{7} & \frac{8}{5}\\ -\frac{3}{7} & -\frac{7}{5} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{5}{4}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{8}\\ \frac{1}{8} & \frac{2}{3} & \frac{7}{5}\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}\frac{2}{9} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{9}\\ \frac{1}{8} & \frac{3}{5} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

۳- اگر A یک ماتریس متعامد باشد $\det(A)$ برابر است با:

1) ± 3　　2) ± 4　　3) ± 1　　4) ± 2

۴- مقدار دترمینان $\begin{vmatrix}\cos\theta & 1 & 0\\ 1 & 2\cos\theta & 1\\ 0 & 1 & 2\cos\theta\end{vmatrix}$ کدام مقدار است؟

1) $\cos 3\theta$　　2) $\cos\theta$　　3) $\cos 2\theta$　　4) $\frac{1}{4}\cos\theta$

۵- دترمینان ماتریس مقابل کدام مقدار است؟

$$R=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

1) 0   2) 1   3) 2   4) -1

۶- مقدار x^2 را به دست آورید:

$$\begin{cases} xc_1+c_2=0\\ c_1+xc_2+c_3=0\\ c_2+xc_3+c_4=0\\ c_3+xc_4=0\end{cases}$$

1) $(3\pm\sqrt{5})/2$ 2) $(\pm\sqrt{5}/2)$ 3) 0   4) 1

۷- دترمینان مقابل را بیابید:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0\\ 1 & x & 1 & 0\\ 0 & 1 & x & 1\\ 0 & 0 & 1 & x\end{vmatrix}$$

1) x^4-3x^2 2) x^4-3x^2-1 3) x^4-3x^2+1 4) 0

۸- ماتریس مقابل چه نوع ماتریسی است؟

$$A=\begin{pmatrix} 1 & +i & 1-i\\ -i & 0 & -1+i\\ 1+i & -1-i & 3\end{pmatrix}$$

1) متقارن   2) پادمتقارن   3) هرمیشن   4) معکوس ناپذیر

۹- دترمینان مقابل را بیابید.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

1) 2   2) 3   3) 4   4) 5

۱۰- $\begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x\\ 0 & \cos x & -\sin x\\ 0 & -\sin x & -\cos x\end{vmatrix}$ **کدام عبارت نشان دهنده این دترمینان است؟**

1) -2   2) 2   3) 1   4) -1

پاسخنامه سوالات تستی

1- گزینه 1 صحیح است. زیرا:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow |A|=1\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-2-2=-4$$

$$C_{11}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2 \qquad C_{12}=-1\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=2 \qquad C_{13}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-2$$

$$C_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0 \qquad C_{22}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}=0 \qquad C_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-4$$

$$C_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1 \qquad C_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1 \qquad C_{33}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$C_{ij}=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -2\\ 0 & 0 & -4\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix} \to \mathrm{adj}A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ 2 & 0 & -1\\ -2 & -4 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{\mathrm{adj}A}{|A|}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ 2 & 0 & -1\\ -2 & -4 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

2- گزینه 1 صحیح است. زیرا:

$$|A|=3\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}-2\times(-1)\begin{vmatrix}1 & -3\\ 4 & 2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}=3(7)+2(14)+2(-7)=21+28-14=35$$

$$A^{-1}=\frac{\mathrm{adj}A}{|A|}$$

برای محاسبه معکوس ماتریس محاسبه دو الحان معکوس کافی است:

$$C_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\times(7)=7 \to \mathrm{adj}A=B \qquad B_{11}=7$$

$$A_{11}^{-1}=\frac{7}{35}=\frac{1}{5}$$

$$C_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}1 & -3\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-1\times(14)=-14$$

$$\to \text{adj}A=B \qquad B_{21}=-14\to A^{-1}_{21}=-\frac{14}{35}=-\frac{2}{5}$$

$$C_{13}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-7$$

$$B_{31}=-7\to A^{-1}_{31}=-\frac{7}{35}=-\frac{1}{5}$$

3- گزینه 3 صحیح است.

4- گزینه 1 صحیح است. زیرا:

$$\begin{vmatrix}\cos\theta & 1 & 0\\ 1 & 2\cos\theta & 1\\ 0 & 1 & 2\cos\theta\end{vmatrix}=1(-1)\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\cos\theta\end{vmatrix}+2\cos\theta\begin{vmatrix}\cos\theta & 0\\ 0 & 2\cos\theta\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}\cos\theta & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-2\cos\theta+2\cos\theta(2\cos^2\theta)-\cos\theta$$

$$=4\cos^3\theta-3\cos\theta=\cos 3\theta$$

5- گزینه 2 صحیح است. زیرا:

$$|R|=(1)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=1\times(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=1$$

6- گزینه 1 صحیح است. زیرا:

$$\begin{pmatrix}x & 1 & 0 & 0\\ 1 & x & 1 & 0\\ 0 & 1 & x & 1\\ 0 & 0 & 1 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\end{pmatrix}=0\to\begin{vmatrix}x & 1 & 0 & 0\\ 1 & x & 1 & 0\\ 0 & 1 & x & 1\\ 0 & 0 & 1 & x\end{vmatrix}=0$$

$$x(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}x & 1 & 0\\ 1 & x & 1\\ 0 & 1 & x\end{vmatrix}+1(-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & x & 1\\ 0 & 1 & x\end{vmatrix}=0$$

$$x\left(x\begin{vmatrix}x & 1\\ 1 & x\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & x\end{vmatrix}\right)-1\left(1\begin{vmatrix}x & 1\\ 1 & x\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & x\end{vmatrix}\right)=x(x(x^2-1)-(x))-(x^2-1)=0$$

$$x(x^3-2x)-(x^2-1)=0$$

$$x^4-2x^2-x^2+1=0$$

$$x^4-3x^2+1=0$$

$$\Delta=9-4(1)(1)=5$$

$$x^2=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

7- گزینه 3 صحیح است. زیرا:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x\left(x\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & x \end{vmatrix}\right) - 1\left(1\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & x \end{vmatrix}\right)$$

$$= x(x(x^2-1) - 1\times(x)) - ((x^2-1) - 0) = x(x^3 - x - x) - x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 - x^2 + 1 = x^4 - 3x^2 + 1$$

8- گزینه 3 صحیح است. زیرا:

$$A^{\dagger} = \begin{pmatrix} 1 & +i & 1-i \\ -i & 0 & -1+i \\ 1+i & -1-i & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = A^{\dagger} \Rightarrow$$ این ماتریس هرمیشن می باشد.

9- گزینه 4 صحیح است. زیرا:

$$|A| = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2(2-3) + 1(6+1) = -2 + 7 = 5$$

10- گزینه 4 صحیح است. زیرا:

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = -\sin x(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & \cos x \\ 0 & -\sin x \end{vmatrix} - \cos x(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & \sin x \\ 0 & \cos x \end{vmatrix} = +\sin x(-\sin x) - \cos x(\cos x)$$

$$= -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$$

فصل پنجم: تابع های برداری و حرکت

تابع های برداری و حرکت

در این فصل با ترکیب حساب دیفرانسیل و انتگرال و بردارها به مطالعه حرکت اجسام در فضا می پردازیم.

به این منظور مؤلفه های عددی بردار شعاعی $R(t)$ را (از مبداء تا جسم) توابع مشتق پذیری از زمان در نظر می گیریم.

به این ترتیب بردارهای سرعت و شتاب را با مشتق گیری از مؤلفه های $\vec{R}$ به دست می آوریم.

$$\vec{R}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)k$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2R}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$

بردارهای $\vec{R}$، $\vec{v}$ و $\vec{a}$ توابعی برداری از t اند، و قواعد مشتق گیری از آن ها چنانچه در فرمول های فوق دیده می شود تعمیم طبیعی قواعد مشتق گیری از توابع با مقادیر حقیقی است. (که توابع عددی نامیده می شوند)

قواعد مشتق گیری از حاصل ضرب عددی و حاصل ضرب برداری بردارها، به همان صورت قواعد مشتق گیری از حاصل ضرب توابع عددی است. پس از آشنایی با مشتق گیری توابع به بردارهای مماس و قائم مربوط به حرکت در فضا می پردازیم.

مهم ترین تابع برداری، بردار شعاعی $\vec{R}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ از مبداء تا نقطه $P(x(t), y(t), z(t))$ است. که مکان ذرّه را در هر لحظه t از حرکتش در فضا به دست می دهد.

این بردار، بردار مکان ذره است. مشتق اوّل و دوّمش نسبت به t سرعت و شتاب ذرّه اند.

سرعت یک پرتابه ایده آل

فرض می کنیم پرتابه ای در لحظه t در نقطه (x_0, y_0) واقع در ربع اول صفحه xy باشد و از این نقطه پرتاب شود. مقدار سرعت اوّلیه پرتابه v_0 و زاویه پرتاب α است. پس از t_1 ثانیه می خواهیم مقدار سرعت و جهت پرتابه را بدانیم:

فرض می کنیم بردار مکان پرتابه در لحظه t، $\vec{R}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$ باشد و فرض می کنیم x و y توابع مشتق پذیری از t باشند.

بردار $\overrightarrow{\Delta R}=\vec{R}(t_1+\Delta T)-\vec{R}(t_1)$ جا به جایی پرتابه را در بازه زمانی t_1 تا $t_1+\Delta T$ نشان می دهد. وقتی که ΔT به سمت صفر میل کند، خط قائم بین نقطه های P و Q مماس بر مسیر پرتابه در نقطه P می شود.

توجه:

$$Q(x(t_1+\Delta T), y(t_1+\Delta T)) \quad , \quad P(x(t_1), y(t_1))$$

در این صورت ΔR به صفر نزدیک می شود. اما خارج قسمت $\frac{\overrightarrow{\Delta R}}{\Delta T}=\frac{\Delta x}{\Delta T}\hat{i}+\frac{\Delta y}{\Delta T}\hat{j}$ به سمت صفر میل نمی کند بلکه به بردار $\vec{v}(t_1)=(\frac{dx}{dt}|_{t=T_1})\hat{i}+(\frac{dy}{dt}|_{t=T_1})\hat{j}$ میل می کند. این بردار در P بر خم و مسیر حرکت مماس است. و جهت حرکت پرتابه است و طولش $\frac{ds}{dt}=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}$ مقدار سرعت پرتابه در t_1 است.

مشتق یک تابع برداری

اگر $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$ توابعی با مقادیر حقیقی از t باشد بردار $F(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}$ یک تابع با مقادیر برداری یا به اختصار یک تابع برداری از t است.

دامنه F مجموعه ای است از مقادیر t که در دامنه های x ، y و z مشترک باشد.

در مبحث قبل F بردار مکان یک جسم متحرک بود اما برای این که یک تابع، تابع برداری از t باشد نیازی به چنین تعبیر یا تعبیر دیگری نیست.

اگر $x(t)$، $y(t)$ و $z(t)$ توابع مشتق پذیری از t باشند بردار $\vec{F}'(t)=\frac{\overrightarrow{dF}}{dt}=\frac{dx}{dt}\hat{i}+\frac{dy}{dt}\hat{j}+\frac{dz}{dt}\hat{k}$ مشتق $\vec{F}$ نسبت به t نام دارد.

مثال ۳-۱: اگر $F(t)=(\sin 3t)\hat{i}+(\ln 2t)\hat{j}+(\tan t)\hat{k}$، $\frac{dF}{dt}$ را بیابید.

حل: $\frac{\overrightarrow{dF}}{dt}$ با مشتق گیری از مؤلفه های $\vec{F}$ نسبت به t به دست می آید.

$$F'(t)=(3\cos 3t)\hat{i}+(2\times\frac{1}{2t})\hat{j}+(1+\tan^2 t)\hat{k}$$

$$=3\cos 3t\hat{i}+(\frac{1}{t})\hat{j}+(\frac{1}{\cos^2 t})\hat{k}$$

تعاریف:

مکان: $\vec{R}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}$

سرعت: $\vec{v}=\frac{d\vec{R}}{dt}=\frac{dx}{dt}\hat{i}+\frac{dy}{dt}\hat{j}+\frac{dz}{dt}\hat{k}$

اندازه سرعت: $|v|=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2+(\frac{dz}{dt})^2}$

جهت: $\frac{v}{|v|}=\frac{\frac{dx}{dt}\hat{i}+\frac{dy}{dt}\hat{j}+\frac{dz}{dt}\hat{k}}{\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2+(\frac{dz}{dt})^2}}$

شتاب: $\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}\hat{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\hat{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$

مثال (۳– ۲): جسمی در یک مسیر دایره ای با سرعت زاویه ای w حرکت می کند به صورتی که شعاع این دایره A می باشد. سرعت و جسم را در زمان $t=\frac{\pi}{2w}$ به دست آورید (زاویه اوّلیه صفر می باشد).

حل:

$$\vec{R}=(A\cos wt)\hat{i}+(A\sin wt)\hat{j}$$

سرعت : $\frac{d\vec{R}}{dt}=(-Aw\sin wt)\hat{i}+(Aw\cos wt)\hat{j}$

$$\frac{d\vec{R}}{dt}\Big|_{t=\frac{\pi}{2w}}=(-Aw\sin w\frac{\pi}{2w})\hat{i}+(Aw\cos w\frac{\pi}{2w})\hat{j}=(-Aw)\hat{i}+0\hat{j}$$

مثال (۳– ۳): مکان جسمی مطابق رابطه داده شده است. در چه لحظه ای بردار سرعت و شتاب عمود بر هم قرار می گیرند؟

$$\vec{R}(t)=(t-\sin t)\hat{i}+(\cos t)\hat{j}\qquad 0\le t\le 2\pi$$

حل:

سرعت : $\frac{d\vec{R}}{dt}=(1-\cos t)\hat{i}+(-\sin t)\hat{j}=\vec{v}$

شتاب : $\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}=(\sin t)\hat{i}+(-\cos t)\hat{j}=\vec{a}$

اگر سرعت و شتاب بر هم عمود باشند $\vec{v}\cdot\vec{a}=0$

$$\left((1-\cos t)\hat{i}+(-\sin t)\hat{j}\right)\cdot(\sin t\hat{i}-\cos t\hat{j})=0$$

$\sin t - \sin t \cos t + \sin t \cos t = 0 \rightarrow \sin t = 0$

$\sin t = 0 \ , 0 \le t \le 2\pi \ \rightarrow \ t = 0, \pi, 2\pi$

مثال (۳-۴): حرکت جسمی در صفحه $(y-z)$ در حین این که با سرعت زاویه ای 2 صورت می پذیرد دامنه حرکت دائماً با تابع e^t در حال افزایش می باشد. و در همین حال این جسم در راستای x با تابع e^t در حال حرکت می باشد. ابتدا تابع برداری مکان این جسم را نوشته و سپس توابع برداری سرعت و شتاب این متحرک را به دست آورید. (زاویه اولیه حرکت منحنی وار در صفحه $(y-z)$ صفر می باشد)

حل:

$$\vec{R}(t) = e^t\hat{i} + e^t(\cos wt\hat{j} + \sin wt\hat{k})$$
$$\vec{R}(t) = e^t\hat{i} + e^t\cos wt\hat{j} + e^t\sin wt\hat{k} \qquad (w = 2)$$
$$\vec{R}(t) = e^t\hat{i} + e^t\cos 2t\hat{j} + e^t\sin 2t\hat{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = e^t\hat{i} + (e^t\cos 2t - e^t \times 2 \times \sin 2t)\hat{j} + (e^t\sin 2t + e^t \times 2 \times \cos 2t)\hat{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = e^t\hat{i} + (e^t\cos 2t - e^t 2 \times \sin 2t - 2e^t\sin 2t - 2e^t \times 2 \times \cos 2t)\hat{j}$$
$$+ (e^t\sin 2t + e^t \times 2 \times \cos 2t + 2e^t\cos 2t - 2e^t \times 2 \times \sin 2t)\hat{k}$$

$$= e^t\hat{i} + e^t(\cos 2t - 4\sin 2t - 4\cos 2t)\hat{j} + e^t(-3\sin 2t + 4\cos 2t)\hat{k}$$

مثال (۳- ۴): با استفاده از شتاب و شرایط اوّلیه $R(t)$ را تعیین کنید.

$a(t) = -3t\hat{i}$ $\qquad v(0) = 6\hat{j}$ $\qquad \vec{R}(0) = 5\hat{i}$

حل:

$$a(t) = -3t\hat{i} \rightarrow v(t) = \int a(t)dt = \int -3t\hat{i}dt \rightarrow v(t) = (-\frac{3}{2}t^2\hat{i} + c) \qquad \text{از طرفی} : v(0) = v\hat{j} \rightarrow c = 6\hat{j}$$

$$v(t) = -\frac{3}{2}t^2\hat{i} + 6\hat{j}$$

$$\vec{R}(t) = \int \vec{v}(t)dt = \int -\frac{3}{2}t^2\hat{i} + 6\hat{j} = (-\frac{1}{2}t^3 + a)\hat{i} + (6t + b)\hat{j} + c'\hat{k}$$

$$R(0) = 5\hat{i} \rightarrow (0 + a)\hat{i} + (b\hat{j}) + c'\hat{k} = 5\hat{i} \rightarrow a = 5 \quad b = 0 \quad c' = 0$$

$$\vec{R}(t) = (-\frac{1}{2}t^3 + 5)\hat{i} + 6t\hat{j} + c'\hat{k}$$

پیدا کردن زاویه بین بردار سرعت و بردار شتاب در یک لحظه خاص

چنانچه مکان متحرکی در لحظه (t)، $\vec{R}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}$ داده شود، برای به دست آوردن زاویه بین سرعت متحرک و شتاب آن ابتدا با مشتق گیری از تابع برداری $\vec{R}$ سرعت و شتاب را به دست می آوریم.

$$\text{سرعت} = v(t)=R'(t)=\frac{dx}{dt}\hat{i}+\frac{dy}{dt}\hat{j}+\frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$\text{شتاب} = a(t)=R''(t)=\frac{d^2x}{dt^2}\hat{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\hat{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$

سپس اندازه سرعت و اندازه شتاب را در آن لحظه خاص به دست آورده.

$$\vec{v}(t=t_1)=v_1\hat{i}+v_2\hat{j}+v_3\hat{k}\rightarrow |v(t=t_1)|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$$
$$a(t=t_1)=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}\rightarrow |a(t=t_1)|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

سپس با استفاده از ضرب داخلی زاویه بین بردار $\vec{v}(t=t_1)$ و $\vec{a}(t=t_1)$ به دست می آید.

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}(t=t_1)\cdot\vec{v}(t=t_1)}{|a(t=t_1)||v(t=t_1)|}$$

مثال (3- 5): زاویه بین بردارهای سرعت و شتاب ذرّه را در لحظه $(t=0)$ با فرض این که $R(t)=(\tan t)\hat{i}+(\sinh 2t)\hat{j}+5t^2\hat{k}$ باشد را به دست آورید.

$$R'(t)=(1+\tan^2 t)\hat{i}+2\cosh 2t\hat{j}+5t\hat{k}$$
$$R''(t)=(2\tan t(1+\tan^2 t))\hat{i}+(4\sinh 2t)\hat{j}+5\hat{k}$$

توجه: توابع هذلولی $\sinh x$ و $\cosh x$ به قرار زیر هستند و مشتق این توابع نیز به قرار زیر داده شده است.

$$\mathbf{\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{۲}\quad,\quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{۲}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{(\sinh x)'=\frac{۱}{۲}(e^x+e^{-x})=\cosh x}$$

$$\mathbf{(\cosh x)'=\frac{۱}{۲}(e^x-e^{-x})=\sinh x}$$

$$\Rightarrow \mathbf{\int \sinh x dx=\cosh x+c}$$

$$\mathbf{\int \cosh x dx=\sinh x+c'}$$

ادامه حل (مثال 4- 5):

از آن جا که $\sinh(0)=0$ و $\cosh(0)=1$ است بنابراین $R'(0)=1\hat{i}+2\hat{j}$ و $R''(0)=0\hat{i}+0\hat{j}+5\hat{k}$

$$\rightarrow \cos\alpha=\frac{(\hat{i}+2\hat{j})\cdot(5\hat{k})}{\sqrt{5}\times 5}=0$$

بردار سرعت و شتاب در لحظه صفر بر هم عمود می باشند.

مثال (۳- ۶): تابع برداری $\vec{R}(t)$ به گونه ای داده شده است که $\vec{R}(t=1)=\vec{R}(t=5)=\vec{R}(t=8)$.

در بازه زمانی $[1,8]$ حداقل چند بار سرعت این متحرّک صفر می شود.

فرض می کنیم $\vec{R}(t)$ در $[1,8]$ پیوسته بوده و در بازه $(1,8)$ مشتق پذیر باشد.

حل: با توجه به این قضیه ریاضی که هر گاه f در بازه بسته $[a,b]$ پیوسته بوده و در بازه باز (a,b) مشتق پذیر باشد، $f(a)=f(b)=k$ آن گاه نقطه ای چون $c\in(a,b)$ هست به طوری که $f'(c)=0$ باشد.

بنابراین حداقل 2 بار سرعت متحرک صفر شده. حداقل یک بار در بازه $[1,5]$ و حداقل یک بار در بازه $[5,8]$.

فاصله جهت دار و بردار مماس واحد T

خم مسیر جسمی که بردار مکانش، $\vec{R}(t)$، تابعی مشتق پذیر از t باشد خم مشتق پذیر نام دارد.

خم های مشتق پذیر، به ویژه آن دسته از خم ها که مشتق اوّل و دوم آن ها پیوسته است بـه خـاطر کـاربرد فراوانشـان بسیار مورد بررسی قرار می گیرند. در این جا برخی از ویژگی های خم ها مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

یکی از ویژگی های خاص خم های پیوسته- مشتق پذیر این است که این خم ها آن قدر هموارند که طولی انـدازه پـذیر دارند.

فاصله جهت دار روی یک خم

طول خم $R(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}$ به صورت حد طول های خط های شکسته تقریب زننده خم یعنی:

$$\sum_{a}^{b}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(y_{k+1}-y_k)^2+(z_{k+1}-z_k)^2}$$

تعریف می شود که این تعریف شبیه طول خم واقع در صفحه مسطح می باشد. وقتی x ، y و z مشتقات اول پیوسته داشته باشند، این حد وجود دارد و از فرمول زیر به دست می آید:

$$L=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}$$

بنابراین طول خم از $t=a$ تا $t=b$ با انتگرال گیری از طول بردار سرعت حرکت از a تا b به دست می آید.

تعریف: طول یک خم

طول خم

$\vec{R}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}$ از $t=a$ تا $t=b$ برابر است با:

$$L=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt=\int_a^b|v(t)|\,dt$$

مثال (۳- ۷): ذرّه ای باردار که در یک میدان الکترو مغناطیس واقع شده است. به دلیل وجود میدان الکتریکی در راستای z و میدان الکترومغناطیسی حرکتی طبق فرمول زیر انجام می دهد می خواهیم طول پیچی که این ذرّه در فاصله زمانی 0 تا 2π ثانیه طی می کند را به دست آوریم.

$$\vec{R}(t)=\cos t\hat{i}+\sin t\hat{j}+24t\hat{k}$$

با توجه به فرمول طول خم ابتدا باید اندازه سرعت را به دست آوریم:

$$\vec{v}(t)=-\sin t\hat{i}+\cos t\hat{j}+24\hat{k}$$

$$|v(t)|=\sqrt{(-\sin^2 t)^2+(\cos t)^2+24}=5$$
$$L=\int_0^{2\pi}5dt=5\times2\pi=10\pi$$

فاصله جهت دار روی خم از $P(t_0)$ تا $P(t)$ عبارت است از:

$$S=\int_{t_0}^{t}|v|\,dt$$

$$S=\int_{t_0}^{t}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt=\int_{t_0}^{t}|v|\,dt$$

که مقدار S مثبت است هر گاه t از t_0 بزرگ تر باشد و منفی است هر گاه t از t_0 کوچک تر باشد.

اگر مشتقات زیر رادیکال پیوسته باشند، S تابعی مشتق پذیر از t است و مشتق آن با اندازه بردار سرعت $R(t)$، برابر است

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}=|v(t)|$$

مثال (۳- ۸): نشان دهید اگر بردار $\vec{u}=u_1\hat{i}+u_2\hat{j}+u_3\hat{k}$ برداری واحد باشد فاصله جهت دار روی خط

$x=x_0+5tu_1 \qquad y=y_0+5tu_2 \qquad z=z_0+5tu_3$

باشد از نقطه $P_0(x_0,y_0,z_0)$ تا نقطه $p_t(x_0+5tu_1,y_0+5tu_2,z_0+5tu_3)$ برابر است با $S=5t$.

حل:

$$\vec{R}(t)=(x_0+5tu_1)\hat{i}+(y_0+5tu_2)\hat{j}+(z_0+5tu_3)\hat{k}$$

$$v(t)=5u_1\hat{i}+5u_2\hat{j}+5u_3\hat{k}=5\vec{u}$$

$$|v(t)|=\sqrt{25u_1{}^2+25u_2{}^2+25u_3{}^2}=\sqrt{25}\times\sqrt{u_1{}^2+u_2{}^2+u_3{}^2}=5\times1=5|u|=5$$

$$S\int_0^t|v|\,dt=\int_0^t 5dt=5t$$

مثال (۳- ۹): متحرکی با سرعت $\vec{v}(t)$ که تابعی مشتق پذیر است در حال حرکت است و به طوری که $v\cdot v'=0$ در این صورت نشان دهید سرعت این متحرکت همواره اندازه ای ثابت دارد.

حل: فرض می کنیم:

$$v(t)=A(t)\hat{i}+B(t)\hat{j}+C(t)\hat{k}$$
$$v'(t)=A'(t)\hat{i}+B'(t)\hat{j}+C'(t)\hat{k}$$

$$v\cdot v'=0\rightarrow A(t)A'(t)+B(t)B'(t)+C(t)C'(t)=0$$

از طرفی

$$\frac{d|v(t)|}{dt}=\frac{1}{2}(A^2(t)+B^2(t)+C^2(t))^{-\frac{1}{2}}\times[2A(t)A'(t)+2B(t)B'(t)+2C(t)C'(t)]$$

از طرفی می دانیم که $AA'+BB'+CC'=0\rightarrow 2AA^2+2BB'+2CC'=0$

$\rightarrow\frac{d|v(t)|}{dt}=0\rightarrow|v(t)|=$ ثابت است

بردار مماس واحد T

فرض می کنیم مؤلفه های $\vec{R}(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}$ توابعی باشند که مشتق پیوسته دارند و نیز فرض می کنیم $S(t)$ فاصله جهت دار در روی خمی باشد که انتهای R رسم می کند. $S(t)$ از یک نقطه مبنای از پیش برگزیده چون $p(t_0)$ اندازه گیری می شود. چون dS/dt نباید برابر صفر باشد، S یک به یک است و معکوسی دارد که t را به صورت تابعی

مشتق پذیر از S به دست می دهد. مشتق این تابع معکوس برابر است با:

$$\frac{dt}{dS}=\frac{1}{dS/dt}=\frac{1}{|V|}$$

این امر سبب می شود که R تابعی مشتق پذیر از S باشد و مشتقش را بتوان از قاعده زنجیری چنین به دست آورد.

$$\frac{dR}{dS}=\frac{dR}{dt}\frac{dt}{dS}=\frac{V}{|V|}$$

از این رابطه نتیجه می گیریم:

$$|\frac{dR}{dS}|=\frac{|V|}{|V|}=1$$

این روابط حاکی از آن اند که $\frac{dR}{dS}$ برداری واحد است که متوجه جهت $\vec{V}$ است. dR/dS را بردار مماس واحد خطی می نامیم که انتهای R رسم می کند. این بردار را با T نشان می دهیم.

تعریف: بردار مماس واحد

$$T=\frac{dR}{dS}=\frac{dR/dt}{dS/dt}=\frac{V}{|V|}$$

هر گاه $\vec{V}$ تابعی مشتق پذیر از پارامتر t باشد، T نیز تابعی مشتق پذیر از t است.

T یکی از سه بردار واحد در یک دستگاه مرجع متحرک است که حرکت سفینه های فضایی و سایر اجسام را توصیف می کند، که در فضای سه بعدی حرکت می کنند.

مثال (۳- ۹): مطلوب است تعیین بردار مماس واحد در مورد پیچ زیر:

$$\vec{R}(t)=\cos 2t\hat{i}+\sin 2t\hat{j}+2t\hat{k}$$

$$\vec{V}(t)=-2\sin 2t\hat{i}+2\cos 2t\hat{j}+2\hat{k}$$

$$|v(t)|=\sqrt{(-2\sin 2t)^2+(2\cos 2t)^2+(2)^2}=\sqrt{4(\sin^2 2t+\cos^2 2t)+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$T=\frac{V}{|V|}=\frac{-\sin 2t\hat{i}+2\cos 2t\hat{j}+2\hat{k}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sin 2t}{\sqrt{2}}\hat{i}+\frac{\cos 2t}{\sqrt{2}}\hat{j}+\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}$$

مثال (۳- ۱۰): نشان دهید در مورد متحرکی که روی یک مسیر دایره ای به شعاع $(R=1)$ با سرعت زاویه ای $(w=1)$ در حرکت است و زاویه اولیه حرکت صفر می باشد بردار مماس واحد، بردار سرعت می باشد.

حرکت توصیف شده $\rightarrow R(t)=R\cos(wt+\theta_0)\hat{i}+R\sin(wt+\theta_0)\hat{j}$

$\theta_0=0$

$$\rightarrow \vec{R}(t) = R\cos wt\hat{i} + R\sin wt\hat{j}$$

$$\vec{V}(t) = -Rw\sin wt\hat{i} + Rw\cos wt\hat{j}$$

$$|V| = \sqrt{R^2w^2\sin^2 wt + R^2w^2\cos^2 wt} = Rw = 1$$

$$T = \frac{\vec{V}}{|V|}$$

$$T = \vec{V}$$

مثال (۳- ۱۱): چنانچه $R(t)$ بردار مکان ذره ای است که در فضا حرکت می کند طول قطعـه مشـخص شـده از خـم را بیابید.

$$R(t) = t^3(6\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

طول قطعه از $t=0$ تا $t=1$ محاسبه شود.

حل:

$$x(t) = 6t^3 \rightarrow x'(t) = 3\times 6t^2$$

$$y(t) = 2t^3 \rightarrow y'(t) = 2\times 3t^2$$

$$z(t) = 3t^3 \rightarrow z'(t) = 3\times 3t^2$$

$$L = \int_{t=0}^{t=1}\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = \int t^2\sqrt{3^2\times 6^2 + 6^2 + 9^2}\,dt$$

$$L = \int_{t=0}^{t=1} 21t^2 dt = 21\frac{t^3}{3}\Big|_{t=0}^{t=1} = 7$$

نمونه سوالات تستی

۱- حرکت جسمی در صفحه (x,y) به صورت یک حرکت دایره ای با دامنه A و سرعت زاویه ای $\vec{w}$ است به طوری که زاویه اوّلیه این حرکت صفر می باشد، در عین حال این متحرک در راستای z با سرعت ۲ $\frac{m}{s}$ در حال حرکت است.

شتاب این ذره کدام می باشد؟

1) $-Aw\sin wt\hat{i} + Aw\cos wt\hat{j} + 2\hat{k}$
2) $+Aw\sin wt\hat{i} - Aw\cos wt\hat{j} + 2\hat{k}$
3) $+Aw^2\cos wt\hat{i} + Aw^2\sin wt\hat{j}$
4) $-Aw^2\cos wt\hat{i} - Aw^2\sin wt\hat{j}$

۲- با استفاده از شتاب داده شده و شرایط اوّلیه $R(t)$ کدام می باشد؟

$\vec{R}(۰) = ۵\hat{j}$ $\quad$ $\vec{v}(۰) = ۸\hat{i}$ $\quad$ $\vec{a}(t) = ۳t\hat{i} + ۴\hat{j} + \hat{k}$

1) $(\frac{1}{2}t^3 + 8t)\hat{i} + (2t^2 + 5)\hat{j} + \frac{t^2}{2}\hat{k}$
2) $(\frac{1}{2}t^3 + 8t + 5)\hat{i} + (2t^2)\hat{j} + \frac{t^2}{2}\hat{k}$
3) $(\frac{1}{3}t^3 + 8t)\hat{i} + (2t^2)\hat{j} + (\frac{t^2}{2})\hat{k}$
4) $(\frac{1}{2}t^2 + 8t + 5)\hat{i} + (2t^2 + 5)\hat{j} + \frac{t^2}{2}\hat{k}$

۳- بردار $\vec{R}(t)$ بردار مکان ذره ای است که در فضا حرکت می کند، بردار مماس واحد کدام یک از عبارات زیر می باشد. $(t = ۰)$

$R(t) = \cos^{۳} t\hat{i} + \sin^{۳} t\hat{j}$

1) $T = 0\hat{i} + 0\hat{j}$
2) $T = +\hat{i}$
3) $T = -\hat{i}$
4) $T = \hat{j}$

۴- طول نقطه مشخص شده از خم را کدام است؟ (با شرط این که $\vec{R}(t)$ بردار مکان ذرّه در فضا باشد)

$R(t) = \cos^{۳} t\hat{i} + \sin^{۳} t\hat{j}$ $\quad$ $t = ۰$ تا $t = \frac{\pi}{۲}$

1) 0
2) $\frac{3}{2}$
3)
4)

۵- زاویه بین بردار مماس بر منحنی $f(t) = at\hat{i} + bt^{۲}\hat{j} + t^{۳}\hat{k}$ که در آن $۳a = ۲b^{۲}$ با بردار $U = \hat{i} + \hat{k}$ برابر است با:

1) 0
2) $\frac{\pi}{4}$
3) $\frac{\pi}{2}$
4) π

پاسخنامه سوالات تستی

۱- گزینه 4 صحیح است زیرا:

$$\frac{dz}{dt}=2 \rightarrow z(t)=2t+C$$

$$\vec{R}(t)=A\cos wt\hat{i}+A\sin wt\hat{j}+(2t+C)\hat{k}$$

$$\frac{d\vec{R}}{dt}=-Aw\sin wt\hat{i}+Aw\cos wt\hat{j}+2\hat{k}$$

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}=-Aw^2\cos wt\hat{i}-Aw^2\sin wt+0\hat{k}$$

2- گزینه 1 صحیح است. زیرا:

$$\vec{a}(t)=3t\hat{i}+4\hat{j}+\hat{k}$$

$$\vec{v}(t)=\int\vec{a}(t)dt=\int 3tdt\hat{i}+\int 4dt\hat{j}+\int dt\hat{k}$$

$$=(\frac{3}{2}t^2+C_1)\hat{i}+(4t+C_2)\hat{j}+(t+C_3)\hat{k}$$

از طرفی $v(0)=8\hat{i} \rightarrow (0+C_1)\hat{i}+C_2\hat{j}+C_3\hat{k}=v(0)=8\hat{i}$

$$C_1=8 \quad C_2=0 \quad C_3=0 \quad \rightarrow$$

$$R(t)=\int v(t)dt=(\int\frac{3}{2}t^2+8dt)\hat{i}+(\int 4tdt)\hat{j}+(\int tdt)\hat{k}$$

$$=(\frac{1}{2}t^3+8t+C_4)\hat{i}+(2t^2+C_5)\hat{j}+(\frac{t^2}{2}+C_4)\hat{k}$$

از طرفی $R(0)=5\hat{j} \qquad R(0)=(C_4)\hat{i}+(C_5)\hat{j}+(C_6)\hat{k}$

$$C_4=0 \quad C_5=5 \quad C_6=0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow R(t)=(\frac{1}{2}t^3+8t)\hat{i}+(2t^2+5)\hat{j}+(\frac{t^2}{2})\hat{k}$$

3- گزینه 3 صحیح است. زیرا:

$$\vec{v}(t)=3\cos^2 t\times(-\sin t)\hat{i}+3\sin^2(t)\times\cos t\hat{j}$$

$$T=\frac{\vec{V}(t)}{|V|}=\frac{-3\sin t\cos^2 t\hat{i}+3\sin^2(t)\cos t\hat{j}}{\sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t+9\sin^4 t\cos^2 t}}$$

با توجه به این که این حد $T \to 0$ به صورت عبارت $\frac{0}{0}$ در می آید، باید رفع ابهام شود.

$$T = \frac{-3\sin t(1-\sin^2 t)\hat{i} + 3\sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\,\hat{j}}{3\sin t\cos t\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}}$$

$$T|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t[-3(1-\sin^2 t)\hat{i} + 3\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\,\hat{j}]}{3\sin t\cos t} = \frac{[-3\hat{i}+0\hat{j}]}{3} = -\hat{i}$$

4- گزینه‌ی «2» صحیح است. زیرا:

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

$$L = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

از طرفی

$$x(t) = \cos^3 t \to x'(t) = 3\cos^2 t \times (-\sin t)$$
$$y(t) = \sin^3 t \to y'(t) = 3\sin^2 t\cos t$$

$$L = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^4 t\sin^2 t + 9\sin^4 t\cos^2 t}$$

$$L = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t\sin t$$

$$\frac{3}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}(\sin^2\frac{\pi}{2}) - \frac{3}{2}\sin^2(0) = \frac{3}{2}$$

5- گزینه 2 صحیح است. زیرا:

$$\vec{f}(t) = at\hat{i} + bt^2\hat{j} + t^3\hat{k}$$
$$f'(t) = a\hat{i} + 2bt\hat{j} + 3t^2\hat{k}$$

$$T = \frac{f'(t)}{f(t)}, |T| = 1$$

بنابراین : $T = \dfrac{a\hat{i} + 2bt\hat{j} + 3t^2 k}{\sqrt{a^2 + 4b^2t^2 + 9t^4}}$

$$\cos\theta = \frac{T\cdot U}{|T||U|} = \frac{\dfrac{a}{\sqrt{a^2+4b^2t^2+9t^4}} + \dfrac{3t^2}{\sqrt{a^2+4b^2t^2+9t^4}}}{1\times\sqrt{2}}$$

$$|T| = 1\frac{a^2+4b^2t^2+9t^4}{a^2+4b^2t^2+9t^2} = 1$$

$t=0$ فرض می کنیم

می توان $|T| = 1 \to T = 0$

$$\to \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \theta = \frac{\pi}{4}$$

حد توابع

مفهوم حد یکی از مفاهیم کلیدی حساب دیفرانسیل و انتگرال است و می گوییم $f(x)$ وقتی شناسه اش x به x_0 نزدیک می شود به حد c نزدیک می شود. هر گاه $f(x)$ به ازای هر x به اندازه کافی نزدیک به x_0 به دلخواه نزدیک c باشد.

تعریف ریاضی وار و دقیق آن به صورت زیر است:

فرض می کنیم $f(x)$ تابعی باشد که در همسایگی سفته ای از x_0 تعریف شده است، در این صورت می گوییم $f(x)$ وقتی x به x_0 نزدیک می شود، به حد c نزدیک می شود یا که در x_0 دارای حد c است، هر گاه، به ازای هر $\varepsilon>0$ مفروض $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ ای باشد به طوری که به ازای هر x که $0<|x-x_0|<\delta$ داشته باشیم:

$$|f(x)-c|<\varepsilon$$

این را با نوشتن وقتی $x\to x_0$، $f(x)\to c$ یا

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=c$$

بیان خواهیم کرد. این که می گوییم $f(x)$ در x_0 حد دارد یعنی عددی چون c هست به قسمی که وقتی $x\to x_0$، $f(x)\to c$.

چند قضیه مهم ریاضی:

1- هر گاه $f(x)$، وقتی $x\to x_0$ به حدی نزدیک شود، آن حد منحصر به فرد است.

2- هر گاه $f(x)$، وقتی $x\to x_0$ به حدی نزدیک شود، $f(x)$ در همسایگی سفته ای از x_0 کراندار است.

3- $f(x)\to c$، وقتی $x\to x_0$، اگر و فقط اگر $f(x)=c+\alpha(x)$ که در آن وقتی $x\to x_0$، $\alpha(x)\to 0$.

4- هر گاه $f(x)$، در همسایگی سفته ای از x_0 کراندار باشد و وقتی $x\to x_0$، $\alpha(x)\to 0$، آن گاه وقتی $x\to x_0$، $f(x)\alpha(x)\to 0$.

5- هر گاه وقتی $x\to x_0$، $f(x)\to c$ و $\alpha(x)\to 0$، آن گاه وقتی $x\to x_0$، $f(x)\alpha(x)\to 0$.

6- هر گاه وقتی $x\to x_0$، $f(x)\to a$ و $g(x)\to b$، آن گاه وقتی $x\to x_0$، $f(x)\pm g(x)\to a\pm b$.

7- هر گاه وقتی $x\to x_0$، $f(x)\to a$ و $g(x)\to b$، آن گاه وقتی $x\to x_0$، $f(x)g(x)\to ab$.

8- هر گاه $x\to x_0$، $f(x)\to a$ و $g(x)\to b\neq 0$، آن گاه وقتی $x\to x_0$، $\dfrac{f(x)}{g(x)}\to\dfrac{a}{b}$.

9- فرض کنیم g در x_0 حد a ، و f در a حد A را داشته باشد، به علاوه در همسایگی سفته ای از x_0، x_0، $g(x) \neq a$، در این صورت، تابع مرکب fog در x_0 حد A را خواهد داشت.

10- هر گاه $f_1(x) < f(x) < f_2(x)$

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_2(x) = c$$

آن گاه $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$

توجه: اثبات می شود که حدهای زیر وجود ندارند و برای نمونه یکی را اثبات خواهیم کرد.

$$\lim_{x \to 1} \sin \frac{1}{x-1} = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \to 0} z^{\frac{1}{x}} = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \to \infty} \sin x = \text{وجود ندارد}$$

برای نمونه: دو دنباله $x'_n = 1 + \frac{2}{(4n+1)\pi}$ و $x_n = 1 + \frac{1}{n\pi}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ را انتخاب می کنیم که در آن $\lim_{n \to \infty} x_n = 1 = \lim_{n \to \infty} x'_n = 1$.

دنباله های متناظر به این دو دنباله عبارتند از:

$$f(x_n) = \sin \frac{1}{1 + 1/(n\pi) - 1} = \sin n\pi = 0$$

$$f(x'_n) = \sin \frac{1}{1 + 2/[(4n+1)\pi] - 1} = \sin \frac{4n+1}{2}\pi = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$$

بنابراین $\lim_{x'_n \to 1} f(x'_n) = 1$ و $\lim_{x_n \to 1} f(x_n) = 0$.

یعنی دنباله های $\{f(x_n)\}$ و $\{f(x'_n)\}$ حدهای مختلف دارند، پس حد $\lim_{x \to 1} \sin \frac{1}{x-1}$ وجود ندارد.

* در تمام توابع مقدماتی، در هر نقطه از حوزه تعریف، تساوی

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x) = f(a)$$

برقرار است.

حدهای زیر خیلی مورد استفاده قرار می گیرند.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} (1+\dfrac{1}{x})^{x} = \lim\limits_{\alpha\to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e = 2/71828\,\mathbf{K}$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \qquad (a>0, a\neq 1)$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$

* اگر به ازای تمام مقادیر x از همسایگی معینی از نقطه a ، (a می تواند در این همسایگی باشد و ممکن است نباشد) توابع $\phi(x)$ و $f(x)$ برابر باشند و یکی از این توابع وقتی x به a میل می کند، حد داشته باشد، دیگری هم حدی برابر با آن دارد.

مثال (۵-۱)

حد مقابل را بیابید:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6} = ?$$

حل: حد صورت و مخرج وقتی $x\to 2$ به سمت صفر می رود. بنابراین برای $(x\neq 2)$ داریم:

$$\frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6} = \frac{(x-2)(x^2+5x+1)}{(x-2)(x^2+2x+3)} = \frac{(x^2+5x+1)}{(x^2+2x+3)}$$

در حوزه ای که شامل $(x=2)$ نیست، توابع

$$f(x) = \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6} \quad , \quad \varphi(x) = \frac{x^2+5x+1}{x^2+2x+3}$$

برابر هستند، پس حدشان هم برابر است.

$$\lim_{x\to 2} \varphi(x) = \frac{\lim x^2+5x+1}{x^2+2x+3} = \frac{15}{11}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6} = \frac{15}{11}$$

مثال ۵- ۲:

حد زیر را بیابید:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$$

حل:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(\sqrt{6x^2+3}-3x)}{(\sqrt{6x^2+3}+3x)(\sqrt{6x^2+3}-3x)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(\sqrt{6x^2+3}-3x)}{3-3x^2}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(\sqrt{6x^2+3}-3x)}{3(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to -1}\frac{(\sqrt{6x^2+3}-3x)}{3(1-x)}=\frac{3+3}{3(2)}=\frac{6}{6}=1$$

مثال ۵- ۳:

حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to 3}[\log_a\frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}]$$

حل:

$$\lim_{x\to 3}[\log_a\frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}]=\lim[\log_a\frac{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}]=\lim_{x\to 3}[\log_a\frac{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}{x-3}]=\log_a 6$$

مثال ۵-۴:

حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x-2})$$

این حد به صورت $\infty-\infty$ در می آید با مخرج مشترک گرفتن خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2})=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(3x+2)-x^2(3x^2-4)}{(3x^2-4)(3x+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+4x^2}{9x^3+6x^2-12x+8}=\frac{2}{9}$$

توجه: در چنین مثال هایی می بینیم که حد با نسبت ضرایب جملاتی برابر است که بزرگ ترین توان را دارد. (به شرط این که درجه چند جمله ای های صورت و مخرج برابر باشد)

مثال ۵- ۵:

حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2+1}-3x=?$$

حل:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{9x^2+1}-3x}{1}=\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{9x^2+1}-3x)(\sqrt{9x^2+1}+3x)}{(\sqrt{9x^2+1}+3x)}=\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{9x^2+1}+3x}=0$$

مثال ۵- ۶:

حد زیر را بیابید:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}$$

حل: وقتی با چنین مثال هایی سر و کار داریم، باید به خاطر داشته باشیم کـه تـابع $f(x)=\sqrt[m]{P_n(x)}$ کـه در آن $P_n(x)$ یک چند جمله ای از درجه n است، مثل تابع $\sqrt[m]{x^n}$ به بی نهایت میل می کند. از این رو صورت و مخرج را به جملـه x با بزرگ ترین توان تقسیم می کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}=\lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{3}{\sqrt[6]{x}}+\frac{5}{\sqrt[10]{x^3}}}{\sqrt{3-\frac{2}{x}}+\sqrt[6]{\frac{4}{x}-\frac{12}{x^2}+\frac{9}{x^3}}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{2x-3}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt[6]{4x^2-12x+9}}{\sqrt[6]{x^3}}=\sqrt[6]{\frac{4}{x}-\frac{12}{x^2}+\frac{9}{x^3}}$$

مثال ۵- ۷:

حد زیر را بیابید:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$$

حل:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}}{4+\frac{2}{x}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

روش تغییر متغیر

گاهی برای محاسبه حدهای داده شده باید از روش تغییر متغیر استفاده نمود.

مثال ۵- ۸:

مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$\lim_{x\to1}\frac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}=?$$

حل:

$$x+26=t^3\to x=t^3-26$$
$$x\to1\ \sim\ t\to3$$

$$\lim_{x\to1}\frac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}=\lim_{x\to3}\frac{2(t^3-26)-2}{t-3}=\lim_{x\to3}\frac{2t^3-54}{t-3}=\lim_{x\to3}\frac{2(t-3)(t^2+9+3t)}{(t-3)}=54$$

مثال ۵- ۹:

مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[k]{1+x}-1}{x}$$

حل:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[k]{1+x}-1}{x}=\lim_{z\to1}\frac{z-1}{z^k-1}=\xrightarrow{\text{هوپیتال}}=$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\sqrt[k]{1+x}=z\to x=z^k-1\\ x\to 0\ \sim\ z\to 1\end{array}}$$

$$=\lim_{\ln z\to 1}\frac{1}{kz^{k-1}}=\frac{1}{k}$$

مثال ۵- ۱۰:

مطلوب است محاسبه حدهای زیر:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{7x}=?$$

حل: $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{7x}=\lim_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{x})^{x}]^{7}=e^{7}$

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x}{1+x})^{x}=?$$

حل: $\boxed{\begin{array}{c}1+x=t\to x=t-1\\ x\to\infty\sim t\to\infty\end{array}}\ \lim_{x\to\infty}(\frac{x}{1+x})^{x}\Rightarrow$

$$=\lim_{t\to\infty}(\frac{t-1}{t})^{t-1}=\lim(1-\frac{1}{t})^{t-1}=\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{-u-1}=\lim_{u\to\infty}\left((1+\frac{1}{u})^{u+1}\right)^{-1}=\left(\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^{u}\times(1+\frac{1}{u})\right)^{-1}=e^{-1}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{3x}}=?$$

حل: $x=\frac{1}{t}\Rightarrow x\to 0\sim t\to\infty\quad\to\frac{1}{x}=t$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{3x}}=\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{3}}=\lim_{t\to\infty}\left((1+\frac{1}{t})^{t}\right)^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{1}{3}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}=?$$

حل: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{a+x}}{1}=\frac{1}{a}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}=?$$

حل: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2$

مثال ۵- ۱۱:

مطلوب است محاسبه حد زیر:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^2})^x=?$$

$$\text{حل}:\ \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^2})^x=\lim_{x\to\infty}\left((1+\frac{1}{x^2})^{x^2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^0=1$$

مثال ۵- ۱۲:

مطلوب است محاسبه حد مقابل:

$$\lim_{x\to1}(\frac{1+x}{2+x})^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$$

$$\text{حل}:\ \frac{1+x}{2+x}=f(x)\to\lim_{x\to1}f(x)=\frac{2}{3}$$

$$(1-\sqrt{x})/(1-x)=\varphi(x)\to\lim_{x\to1}\varphi(x)=\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}=\frac{1}{2}$$

$$\to\lim_{x\to1}f(x)^{\varphi(x)}=\lim_{x\to1}f(x)>0\ \text{وقتی}$$

$$=\lim e^{\varphi(x)\ln f(x)}=e^{\frac{1}{2}\ln(\frac{2}{3})}=\frac{2}{3}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2})^{(2x+1)/(x-1)}$$

$$\text{حل}:\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}=\frac{1}{2}\ ,\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x-1}=2$$

$$\to\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2})^{(2x+1)/(x-1)}=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$$

توجه: اگر در عبارت $\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}$ داشته باشیم:

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty\ ,\ \lim_{x\to a}f(x)=1$$

در این حالت روش زیر توصیه می شود:

$$\lim_{x\to a}f(x)^{\varphi(x)}=\lim\{1+f(x)-1\}^{\varphi(x)}=\lim\left\{\{1+(f(x)-1)\}^{1/(f(x)-1)}\right\}^{[f(x)-1]\varphi(x)}=e^{\lim_{x\to a}\varphi(x)[f(x)-1]}$$

مثال ۵- ۱۳:

مطلوب است محاسبه حدّ:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$$

حل: همان طور که دیده می شود این حد به صورت 1^{∞} است، پس:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1+\tan x}{1+\sin x}-1\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0}\left\{\left(1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1+\sin x}{\tan x-\sin x}}\right\}^{\frac{1}{\sin x}\frac{(\tan x-\sin x)}{1+\sin x}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x(1+\sin x)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x-\cos x\sin x}{\cos x}}{\frac{\sin x(1+\sin x)}{1}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\cos x(1+\sin x)}} = e^{0} = 1$$

$$\lim_{x\to 1}(1+\sin \pi x)^{\cot \pi x} = ?$$

حل: همان طور که دیده می شود این حد به صورت 1^{∞} است. بنابراین:

$$\lim_{x\to 1}(1+\sin \pi x)^{\cot \pi x} = \lim\left\{(1+\sin \pi x)^{\frac{1}{\sin \pi x}}\right\}^{\cot \pi x\times\sin \pi x} = \lim e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin \pi x\cos \pi x}{\sin \pi x}} = e^{(-1)} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)} = ?$$

$a \neq k\pi$ عدد صحیح $= k$

حل: $$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x}{\sin a}-1\right)^{\frac{1}{x-a}} = \lim\left\{\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}}\right\}^{\frac{1}{x-a}\times\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}} = e^{\lim\frac{1}{x-a}\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{(x-a)}\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x-a=t \\ \Rightarrow x=t+a \\ x\to a \quad t\to 0 \end{array}}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\times\frac{\sin(t+a)-\sin a}{\sin(t+a)} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{\sin a+\cos a\times t-\sin a}{\sin a+\cos a\times t} = \lim\frac{1}{t}\times\frac{\cos a\times t}{\sin a} = \text{ctga}$$

$\Rightarrow$ جواب $= e^{\cot a}$

تابع $\alpha(x)$ را وقتی $x \to a$ یا $x \to \infty$ یک بی نهایت کوچک گویند اگر

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0 \quad \text{یا} \quad \lim_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$$

تابع $f(x)$ را وقتی $x \to a$ یا $x \to \infty$ یک بی نهایت بزرگ نامند اگر

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

* عکس یک بی نهایت بزرگ را یک بی نهایت کوچک گویند.

توابع بی نهایت کوچک دارای خواص زیر هستند:

1) مجموع یا حاصل ضرب تعداد متناهی بی نهایت کوچک، یک بی نهایت کوچک است.

2) حاصل ضرب یک بی نهایت کوچک در یک تابع کراندار، یک بی نهایت کوچک است.

مقایسه بی نهایت کوچک ها

فرض می کنیم توابع $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ وقتی $x \to a$ بی نهایت کوچک هستند.

اگر $\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$ که در آن C عددی معین متناهی و غیر صفر است، آن گاه توابع $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ را معادل یا هم ارز می نامند و با نماد $\alpha(x) \sim \beta(x)$ نشان می دهند.

اگر $C = 0$ آن گاه $\alpha(x)$ یک بی نهایت کوچک از مرتبه بالاتر نسبت به $\beta(x)$ است و با نماد $\alpha(x) = 0\beta(x)$ نشان می دهند. با همان شرط، $\beta(x)$ یک بی نهایت کوچک از مرتبه پایین تر نسبت به $\alpha(x)$ گویند اگر

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^n} = C \quad 0 < |C| < +\infty$$

آن گاه $\alpha(x)$ یک بی نهایت کوچک مرتبه n ام نسبت به $\beta(x)$ است.

مثال ۵-۱۴:

مطلوب است محاسبه حد $\lim_{x \to 0} x \sin(\frac{1}{x})$.

حل: چون x وقتی $x \to 0$ یک بی نهایت کوچک است و $\sin(\frac{1}{x})$ یک تابع کراندار است پس حاصل ضرب آن ها بی نهایت کوچک است.

یعنی:

$$\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

مثال ۵- ۱۵:

مطلوب است محاسبه حدهای زیر:

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^2\times\sin^3\frac{1}{(x-1)}$$

حل: تابع $\sin^3\frac{1}{(x-1)}$ یک تابع کراندار است.

و حد تابع $(x-1)^2$ وقتی که $x\to 1$ صفر است.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}(x-1)^2\sin^3\frac{1}{x-1}=(0)\times \text{کراندار}=0$$

$$\lim_{x\to 0}x\sin(\frac{1}{x})=$$

حل: تابع $\sin\frac{1}{x}$ یک تابع کراندار است. و حد تابع x وقتی $x\to 0$ صفر است.

بنابراین

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0\times\text{کراندار}=0$$

مثال ۵-۱۶:

حد توابع زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^3}{x}=?$$

tgx^3 یک بی نهایت کوچک از مرتبه بالاتر نسبت به x است.

$$=\lim_{x\to 0}[\frac{\tan x^3}{x^3}x^2]=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^3}{x^3}\lim_{x\to 0}x^2=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\sin^2 x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{\sin^2 x}{x^2}}\times\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\infty$$

$\sqrt[3]{\sin^2 x}$ یک بی نهایت کوچک از مرتبه پایین تر نسبت به x است.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{9+x}+3}\times\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{9+x}+3}=\frac{1}{6}$$

پس دو بی نهایت کوچک $\sqrt{9+x}-3$ و x هم مرتبه هستند.

مثال ۵-۱۷:

حد توابع زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x}}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\times 2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x\quad x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\times 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}$$

بی نهایت کوچک های معادل یا هم ارز

کاربرد آن در محاسبه حد

اگر توابع $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ در $x\to a$ بی نهایت کوچک باشند و اگر

$\alpha(x)\sim\gamma(x)$ و $\beta(x)\sim\delta(x)$

آن گاه

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\delta(x)}$$

(تعویض بی نهایت کوچک با معادل خودش)

اگر

$$\lim_{x\to a}f(x)=k\qquad 0<|k|<\infty$$

آن گاه $f(x)\alpha(x)\sim k\alpha(x)$.

اگر

$$\alpha(x)\sim\gamma(x)$$
$$\beta(x)\sim\gamma(x)$$

آن گاه $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

شرط لازم و کافی برای این که دو بی نهایت کوچک معادل باشند آن است که تفاضل آن ها یک بی نهایت کوچک از مرتبه بالاتر نسبت به هر کدام باشد.

لیست توابع بی نهایت کوچک با معادل هر کدام

در فرمول های زیر وقتی $x\to 0$ و $\alpha(x)$ یک بی نهایت کوچک است.

(1) $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$

(2) $\tan\alpha(x) \sim \alpha(x)$

(3) $1-\cos\alpha(x) \sim \frac{[\alpha(x)]^2}{2}$

$\cos\alpha(x) \sim 1-\frac{[\alpha(x)]^2}{2}$

(4) $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$

(5) $\arctan\alpha(x) \sim \alpha(x)$

(6) $\ln[1+\alpha(x)] \sim \alpha(x)$

(7) $a^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)\ln a$

(8) $e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)$

مثال ۵-۱۸:

با توجه به لیست ارائه شده حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{4x}=\frac{5}{4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+(\cos x-1))}{\frac{x^2}{4}}=4\frac{\cos x-1}{x^2}=-4\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=-2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}}{4x}=\frac{1}{8}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\arcsin^2 3x-\arctan^2 3x}{3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x+(3x)^2-(3x)^2}{(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{3x}=1$$

مثال ۵-۱۹:

جواب حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\ln(1+5x)}$$

حل : $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{5x}=\frac{3}{5}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 4x)}{e^{\sin 5x}-1}$$

حل : $\lim_{x\to 0}\frac{4x}{5x}=\frac{4}{5}$

پیوستگی توابع

تابع $y=f(x)$ را که مجموعه X معین است در نظر می گیریم. فرض می کنیم $x_0\in X$ نقطه حد این مجموعه است.

تابع $f(x)$ را در نقطه x_0 پیوسته گویند هر گاه:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

این شرط معادل است با:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y(x_0)=\lim[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

تابع $f(x)$ در نقطه x_0 پیوسته است اگر و فقط اگر

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$$

تابع $f(x)$ را مجموعه X پیوسته گویند اگر در هر نقطه این مجموعه پیوسته باشد.

نقاط انفصال نوع اوّل

فرض می کنیم مجموعه X حوزه تعریف تابع $f(x)$ بوده و x_0 نقطه حد این مجموعه است.

نقطه x_0 را نقطه انفصال نوع اول تابع $f(x)$ گویند هر گاه تابع در این نقطه حد چپ و راست متناهی و برابر داشته باشد ولی

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$$

در این صورت x_0 را نقطه انفصال نوع اوّل رفع شدنی گویند.

به علاوه اگر

$$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$$

در این صورت آن را نوع اول رفع نشدنی نامند و تفاضل $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ را جهش انفصال تابع $f(x)$ در نقطه x_0 گویند.

نقاط انفصال نوع دوم

اگر حداقل یکی از حدهای $f(x_0-0)$ و $f(x_0+0)$ موجود نباشد و یا بی نهایت باشد آن گاه نقطه x_0 را نقطه انفصال نوع دوم تابع $f(x)$ گویند.

مثال ۵-۲۰:

توابع زیر داده شده اند نقاط انفصال را تعیین کنید (در صورت وجود)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}(2x^2+3) & -\infty<x\leq 1\\ 6-5x & 1<x<3\\ x-3 & 3\leq x<\infty\end{cases}$$

حل: دامنه تابع $(-\infty,\infty)$ می باشد در فاصله های $(3,\infty)$ و $(1,3)$ و $(-\infty,1)$ تابع پیوسته است.

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{5}(2x^2+3)=1$$
$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}6-5x=1$$
$$f(1)=1$$

بنابراین چون حد راست و چپ برابر بوده و برابر مقدار تابع است تابع در $x=1$ پیوسته است.

$$f(3-0)=\lim_{x\to 3-0}6-5x=-9$$
$$f(3+0)=\lim_{x\to 3+0}x-3=0$$

چون تابع دارای حد راست و چپ نابرابر است بنابراین انفصال نوع اول می باشد.

مثال ۵-۲۱:

تابع زیر را برای پیوستگی بیازمایید.

الف): $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$

حل: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1$

$f(0)=1\Rightarrow$ تابع در $(x=1)$ پیوسته است

بنابراین به ازای تمام مقادیر x پیوسته می باشد.

ب) : $f(x)=\sin\frac{1}{x}$

حل : $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x}=$ موجود نیست

$\lim\limits_{x\to 0^-}\sin\frac{1}{x}=$ موجود نیست

بنابراین تابع در $(x=0)$ انفصال نوع دوم را دارد (ناپیوستگی)

ج) $f(x)=\arctan(\frac{1}{x})$

حل : $\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$

بنابراین تابع در $(x=0)$ ناپیوستگی نوع اوّل را دارد.

مثال (۵-۲۲):

توابع زیر را برای انفصال و پیوستگی بررسی کنید.

الف) $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$

حل : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$

حد تابع در $x=0$ موجود است اما مقدار تابع تعریف نشده است.

انفصال رفع شدنی دارد.

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=e^{+\infty}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=e^{-\infty}=0$

$f(0)=0$

تابع $f(x)$ در $x=0$ انفصال نوع دوم را دارا است.

نمونه سوالات تستی

۱- اگر $f(x)=\cot g^4 x$ و $g(x)=e^{x^2}-x\sin x$ حاصل $\lim\limits_{x\to 0}g(x)^{f(x)}$ کدام است؟

1) $\sqrt{e}$ 2) $\sqrt[3]{e}$ 3) $\sqrt{e^3}$ 4) $\sqrt[3]{e^2}$

۲- اگر $S_n = \sum_{n=1}^{n} P^z$ باشد حاصل $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n(2n)!}{(2n+3)!}$ کدام است؟

1) $\frac{1}{12}$ 2) $\frac{1}{18}$ 3) $\frac{1}{24}$ 4) $\frac{1}{36}$

۳- حاصل $\lim_{n\to\infty} n\operatorname{Arctan}\frac{1}{n}$ کدام است؟

1) صفر 2) 1 3) e 4) ∞

۴- حاصل $\lim \frac{1}{n^8}(1^7+2^7+\dots+n^7)$ کدام است؟

1) $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{1}{6}$ 3) $\frac{1}{7}$ 4) $\frac{1}{8}$

۵- حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{tgx^3}{x}$ کدام گزینه است؟

1) 0 2) 1 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{1}{4}$

۶- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x\sqrt{x}}}{x^{\frac{3}{4}}}$ کدام است؟

1) 2 2) 1 3) $\frac{3}{4}$ 4) $\frac{4}{3}$

۷- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}$ کدام است؟

1) $\frac{4}{5}$ 2) $\frac{2}{5}$ 3) $\frac{5}{4}$ 4) $\frac{1}{2}$

۸- $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$ کدام است؟

1) 2 2) 3 3) 4 4) -2

۹- $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 4x)}{e^{\sin 5x}-1}$ کدام است؟

1) $\frac{4}{5}$ 2) $\frac{5}{4}$ 3) $\frac{2}{5}$ 4) $\frac{1}{5}$

۱۰- $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x-3x^2+4x^3)}{\ln(1-x+2x^2-7x^3)}$ کدام است؟

1) 2 2) -2 3) 1 4) -1

پاسخنامه سوالات تستی

۱- گزینه 1 صحیح است. زیرا:

$$\lim_{x\to 0} g(x)^{f(x)} = A$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)\ln g(x) = \ln A$$

$$\to \lim_{x\to 0} \cot^4 x \times \ln(e^{x^2} - x\sin x) = \ln A$$

$$\lim_{x\to 0} \ln\frac{(e^{x^2} - x^2)}{tg^4 x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2} - x^2}{x^4} = \ln A$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2} - 2x}{4x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2x(e^{x^2} - 1)}{2x(2x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2} - 1}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\times 2x}{4x} = \frac{1}{2} \to \ln A = \frac{1}{2} \to A = e^{\frac{1}{2}}$$

2- گزینه 3 صحیح است. زیرا:

$$S_n = \sum_{n=1}^{1} P^z = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n 2n!}{(2n+3)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)2n!}{6(2n+3)(2n+2)(2n+1)(2n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{6(2n+3)(2n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{24n^2} = \frac{1}{24}$$

3- گزینه 2 صحیح است. زیرا:

$$\lim_{n\to\infty} n\mathrm{Arctg}\frac{1}{n} = n\times\frac{1}{n} = 1$$

4- گزینه صحیح است. زیرا:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^7 + 2^7 + \dots n^7}{n^8} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^7}{n^8} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

هیچ کدام از گزینه ها صحیح نمی باشد.

5- گزینه 1 صحیح است. زیرا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^3}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x^3}{x^3}\times\frac{x^3}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

6- گزینه 2 صحیح است. زیرا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x\sqrt{x}}}{x^{\frac{3}{4}}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{x^{\frac{3}{4}}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{1}{4}}\times x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}} = 1$$

7- گزینه 3 صحیح است. زیرا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\ln(1+4x)} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{4x} = \frac{5}{4}$$

8- گزینه 4 صحیح است. زیرا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{\frac{x^2}{4}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\frac{x^2}{4}}=\lim_{x\to 0}\frac{4(1-\frac{x^2}{2}-1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4(-\frac{x^2}{2})}{x^2}=-2$$

9- گزینه 1 صحیح است. زیرا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 4x)}{e^{\sin 5x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{1+\sin 5x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 5x}=\frac{4}{5}$$

10- گزینه 2 صحیح است. زیرا:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x-3x^2+4x^3)}{\ln(1-x+2x^2-7x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-3x^2+4x^3}{-x+2x^2-7x^3}=-2$$

فصل ششم:معادلات دیفرانسیل

هر رابطه ای بین تابع و متغیر مستقل و مشتقات تابع نسبت به مستقل را یک معادله دیفرانسیل می نامیم.

معادلات دیفرانسیل به دو دسته تقسیم می شوند: اگر تابع فقط یک متغیر مستقل داشته باشد، معادله دیفرانسیل معمولی نامیده و اگر بیش از یک متغیر داشته باشد، آن را معادله دیفرانسیل نسبی یا معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می نامند.

برای مثال:

$y'' + 3(y')^2 + \sin x = 4 \quad , \quad y' = 5 \qquad (1)$

معادلات دیفرانسیل معمولی ولی معادلات $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} = 0$ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی نام دارد.

بالاترین مرحله مشتق موجود در معادله دیفرانسیل را، مرتبه معادله دیفرانسیل گوییم.

برای مثال معادله (1) از مرتبه (2) می باشد.

هر تابعی که در معادله دیفرانسیل صدق کند جواب معادله دیفرانسیل نامیده می شود.

برای مثال تابع $y = 2e^{-4x}$ یک جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y' + 4y = 0$ است.

زیرا اگر از این معادله مشتق گرفته و در معادله قرار دهیم در آن صدق می کند.

معادله دیفرانسیل ممکن است بیش از یک جواب داشته باشد، حتّی بی نهایت جواب که همگی تحت یک فرمول که شامل یک ثابت دلخواه است بیان می شوند. چنین جوابی را جواب عمومی می گوییم.

توجه: اگر معادله دیفرانسیل از مرتبه n باشد، جواب عمومی شامل n ، ثابت دلخواه خواهد بود.

جواب خصوصی، جوابی است بدون پارامتر و همیشه از جواب عمومی به دست می آید.

مثال ۶-۱: فرض کنیم ماده ای رادیو اکتیو داریم و می خواهیم بدانیم جرم آن بعد از t ساعت چه قدر خواهد شد. می دانیم که میزان متلاشی شدن متناسب با جرم است. جرم را y فرض می کنیم.

حل:

$$\frac{dy}{dt}=-ky \to \frac{dy}{y}=-kdt \to \int\frac{dy}{y}=\int -kdt$$
$$\ln y=-kt+\ln c \to \ln\frac{y}{c}=-kt \to y=ce^{-kt}$$

حال اگر در این مثال فرض کنیم در $t=0$، $y=7$ گرم بوده است.

$$7=ce^{\circ} \to c=7$$

و جواب خصوصی $y=7e^{-kt}$ است.

1-6) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

صورت کلّی این معادلات به فرم $F(x,y,y')=0$ می باشد. که ممکن است به حالت های زیر نوشته شود.

$$y'=f(x,y)$$
$$x=f(y,y')$$
$$y=f(x,y')$$

معادلات تفکیک پذیر

اگر داشته باشیم $f(x,y)=f_1(x)\ f_2(y)$ که در آن f_1 تابعی تنها از x و f_2 تابعی تنها از y باشد در این صورت داریم:

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)\ f_2(y)$$
$$\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)\,dx$$

یا فرم کلّی

$$q(x)\,dx+g(y)\,dy=0$$

که با انتگرال گیری جواب عمومی به دست می آید.

مثال (۶-۲):

معادله دیفرانسیل $y'=e^{x+2y}$ را حل کنید.

حل:

$$y'=e^{x+2y}\ dy=e^{x+2y}\ dx \to dy\,e^{-2y}=e^{x}dx \to \int e^{-2y}dy=\int e^{x}dx -\frac{1}{2}e^{-2y}=e^{x}+c$$

مثال (۶-۳):

معادله دیفرانسیل $y'\cot x = 2+y$ را حل کنید.

حل:

$$\cot x\, dy = (2+y)\, dx$$
$$\rightarrow \frac{dy}{2+y} = \frac{dx}{\cot x} = \tan x\, dx$$
$$\ln|2+y| = -\ln|\cos x| + \ln c \rightarrow \ln|2+y| = \ln|\frac{1}{\cos x}| + \ln c \rightarrow 2+y = \frac{1}{|\cos x|}\times c \Rightarrow y+2 = c\sec x$$

مثال (۶-۴):

معادله دیفرانسیل $y' = \frac{x(1+y)}{y(x+2)}$ را حل کنید.

حل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(1+y)}{y(x+2)} \rightarrow \frac{dy\, y}{(1+y)} = \frac{x}{(x+2)}\, dx \rightarrow (1-\frac{1}{1+y})\, dy = (1-\frac{2}{x+2})\, dx = y - \ln|1+y| = x - 2\ln|x+2| + c$$

مثال (۶-۵):

معادله دیفرانسیل $y' = \frac{2+y^2}{xy(1+x^2)}$ را حل کنید.

$$xy(1+x^2)\, dy = (1+y^2)\, dx \rightarrow \frac{dy\, y}{(2+y^2)} = \frac{dx}{(1+x^2)\, x}$$

حال از طرفین انتگرال می گیریم.

$$\frac{1}{2}\ln|2+y^2| = \int \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

فرض می کنیم:

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(1+x^2)}$$
$$= \frac{A(1+x^2) + Bx^2 + Cx}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A + Cx + (A+B)x^2}{x(1+x^2)}$$

$$\rightarrow A=1\ ,\ C=0 \quad A+B=0 \rightarrow B=-1$$

$$\rightarrow \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{1+x^2}$$
$$\rightarrow \frac{1}{2}\ln|2+y^2| = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\, dx}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{2}\ln|2+y^2| = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + \ln c$$

$$\ln|(2+y^2)^{\frac{1}{2}}| = \ln|x| + \ln|(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}| + \ln c$$

$$(2+y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{cx}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$2+y^2 = \frac{cx^2}{(1+x^2)}$$

معادلاتی به فرم

$$y' = f(ax+by+c)$$

را می توان با استفاده از تغییر متغیّر زیر تبدیل به فرم متغیّرهای از هم جدا نمود.

$$u = ax+by+c$$

زیرا با مشتق گیری نسبت به x از طرفین معادله داریم:

$$u' = a + by' \rightarrow y' = \frac{1}{b}(u' - a)$$

در نتیجه با جایگذاری در معادلات بالا داریم:

$$\frac{1}{b}(u'-a) = f(u) \rightarrow u' = bf(u) + a = h(u)$$

$$\frac{d(u)}{h(u)} = dx$$

مثال (۶-۶):

معادله دیفرانسیل $y' = \tan(2x+y) - 2$ را حل کنید.

حل:

$$u = 2x+y \rightarrow u' = 2 + y' \rightarrow y' = u' - 2$$

$$\rightarrow u' - 2 = \tan u - 2$$

$$\rightarrow \frac{du}{dx} - 2 = \tan u - 2 \rightarrow \frac{du}{dx} = \tan u \rightarrow \frac{du}{\tan u} = dx$$

$$\cot u \; du = dx = \ln|\sin u| = x + c$$

$$\sin u = e^{x+c}$$

$$\sin(2x+y) = e^{x+c}$$

$$2x + y = \sin^{-1}(ce^x) \rightarrow y = \sin^{-1}(ce^x) - 2x$$

مثال (۶-۷):

معادله دیفرانسیل $y' = 1 + \frac{1}{2x-y}$ را حل کنید.

حل:

$$2x-y=u \to 2-y'=u' \to y'=2-u' \to 2-u'=1+\frac{1}{u}$$
$$-1-\frac{1}{u}+2=u' \quad -\frac{1}{u}+1=u' \to -\frac{1}{u}+1=\frac{du}{dx} \to$$
$$\frac{du}{-\frac{1}{u}+1}=dx \qquad \frac{u\,du}{-1+u}=dx=1+\frac{1}{1+u}du=dx$$
$$u+\ln|1+u|=x \to 2x-y+\ln|1+2x-y|=x$$

2-6) معادلات همگن

تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه n گوییم اگر

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$$

مثال (۶–۸):

نشان دهید معادله $f(x,y)=x^3+5xy^2+3y^3$ همگن از درجه 3 می باشد.

حل: به جای $x \leftarrow \lambda x$ و به جای $y \leftarrow \lambda y$ قرار می دهیم.

$$f(x,y)=\lambda^3x^3+5\lambda^3xy^2+3\lambda^3y^3=\lambda^3(x^3+5xy^2+y^3)=\lambda^3 f(x,y)$$

تعریف: هر معادله دیفرانسیل به فرم $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ را که در آن $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ هر دو همگن از درجه n باشند یک معادله دیفرانسیل همگن می نامند. برای حل این معادلات از تغییر متغیّرهای زیر استفاده می شود.

$$y=Vx \to dy=V\,dx+x\,dV$$

مثال (۶–۹):

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$4xy\,dy+(x^2-y^2)\,dx=0$$

از آن جا که معادله همگن می باشد.

$$4\lambda^2\,xy\,dy+\lambda^2(x^2-y^2)\,dx=f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2 f(x,y)$$
$$y=Vx \to dy=V\,dx+x\,dV$$
$$4x(Vx)(V\,dx+x\,dV)+(x^2-V^2x^2)\,dx=0$$

طرفین را بر x^2 تقسیم می کنیم.

$$4V(V\,dx + x\,dV) + (1 - V^2)\,dx = 0$$
$$(1 + 3V^2)dx + 4xV\,dV = 0$$
$$-\frac{dx}{4x} = \frac{V\,dV}{(1+3V^2)} \Rightarrow -\frac{1}{4}\ln|x| = \frac{1}{6}\ln|1+3V^2| + c$$

$$-\frac{1}{4}\ln|x| = \frac{1}{6}\ln|1+3V^2| + \ln c$$
$$\ln|x^{-\frac{1}{4}}| = \ln|(1+3V^2)^{\frac{1}{6}}| + \ln c$$
$$\to \ln((1+3V^2)^{\frac{1}{6}} \times x^{+\frac{1}{4}}) + \ln c = 0 \qquad y = Vx \to V = \frac{y}{x}$$
$$\to (1+3V^2)^{\frac{1}{6}} \times x^{\frac{1}{4}} \times c = 0$$
$$c(1 + 3\frac{y^2}{x^2})\,x^{\frac{1}{4}} = 0$$

مثال (۶-۱۰):

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$x\,(y - x)y' = y^2$$

$$x\,(y - x)\,dy - y^2dx = 0 \to f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x, y)$$
$$\to y = Vx \to dy = Vdx + x\,dV$$
$$x(Vx - x)\,(Vdx + x\,dV) - V^2x^2\,dx = 0$$
$$(Vx^2 - x^2)\,(Vdx + x\,dV) - V^2x^2dx = 0$$
$$V^2x^2dx - Vx^2dx + Vx^3dV - x^3dV - V^2x^2dx = 0$$

طرفین را تقسیم بر x^2 می کنیم.

$$-V\,dx + Vx\,dV - x\,dV = 0$$
$$dx(-V) + dV(Vx - x) = 0$$
$$x(V-1)\,dV = V\,dx$$
$$\to \frac{dx}{x} = \frac{(V-1)\,dV}{V}$$
$$\frac{dx}{x} = dV - \frac{dV}{V}$$
$$\ln|x| = V - \ln|V| + \ln c$$
$$\ln|x\,V\,c| = V$$
$$x\,V\,c = e^V$$
$$\Rightarrow xV = ce^V$$
$$x\frac{y}{x} = ce^{\frac{y}{x}}$$
$$y = ce^{\frac{y}{x}}$$

مثال (۶–۱۱):

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y' = \frac{y}{x + \sqrt{xy}}$$

با توجه به این که با جایگذاری $x \to \lambda x$ و $y \to \lambda y$ خواهیم دید.

$$dy = \frac{y}{x + \sqrt{xy}} dx \to \begin{cases} x \to \lambda x \\ y \to \lambda y \end{cases} \quad dy = \frac{\lambda y}{\lambda x + \lambda\sqrt{xy}} \quad dx = \frac{y}{x + \sqrt{xy}}$$

معادله یک نوع معادله همگن است $\leftarrow$ $y = Vx$ $\leftarrow$ $dy = Vdx + x\,dV$

$$\to Vdx + x\,dV = \frac{Vx\,dx}{x + \sqrt{x\,Vx}} = \frac{Vdx}{1 + \sqrt{V}}$$
$$\to (1 + \sqrt{V})V\,dx + x(1 + \sqrt{V})dV = Vdx$$
$$\{(1 + \sqrt{V})V - V\}\,dx = -x(1 + \sqrt{V})\,dV$$
$$(V\sqrt{V})\,dx = -x(1 + \sqrt{V})\,dV$$
$$\to -\frac{dx}{x} = \frac{(1 + \sqrt{V})\,dV}{V\sqrt{V}} = V^{-\frac{3}{2}}dV + \frac{dV}{V}$$
$$\to -\ln|x| = -2V^{-\frac{1}{2}} + \ln|V| + \ln c$$
$$2V^{-\frac{1}{2}} = \ln|x\,Vc| \to \ln|cy| = 2(\frac{y}{x})^{-\frac{1}{2}}$$

$$\ln y + \ln c = 2\sqrt{\frac{x}{y}}$$
$$\to y = 2\sqrt{\frac{x}{y}} + c'$$

مثال (۶–۱۲):

معادله دیفرانسیل $y' - \frac{y}{x} + \csc\frac{y}{x} = 0$ را حل کنید.

$$\left.\begin{matrix} x \to \lambda x \\ y \to \lambda y \end{matrix}\right\} \to$$ معادله همگن است.

$$dy = \frac{y}{x}dx - \csc\frac{y}{x}dx$$
$$y = Vx \to dy = Vdx + xdV \to$$
$$xdV + Vdx = \frac{Vx}{x}dx - \csc\frac{Vx}{x}dx$$
$$xdV + Vdx = Vdx - \csc Vdx$$
$$\to x\,dV = -\csc V\,dx$$
$$\to \frac{dV}{\csc V} = -\frac{dx}{x}$$
$$dV \sin V = -\frac{dx}{x} \to -\ln|x| = -\cos V + c$$
$$\to \ln|x| = \cos V + c'$$

توجّه: معادلات به فرم $y' = f(\frac{ax+by}{cx+ey})$ همگن می باشند و با تغییر متغیّر $\frac{dy}{dx} = V + x\frac{dV}{dx}$ و $y = Vx$

تبدیل به نوع متغیّرهای از هم جدا می شود.

معادلاتی به فرم $y' = f(\frac{ax+by+c}{ex+hy+d})$

همگن نمی باشند. ولی قابل تبدیل به همگن هستند. اختلاف این معادله با معادله قبل در این است که هر دو خط صورت و مخرج از مبدأ نمی گذرند. پس کافی است که مبدأ مختصات را به محل تلاقی دو خط انتقال دهیم، البته اگر این دو خط موازی نباشند.

روش حل: ابتدا $ah - be$ را حساب می کنیم. اگر مخالف صفر بود آن گاه دو خط یکدیگر را قطع می کنند.

مختصات نقاط تلاقی را از حل دستگاه

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ex + hy + d = 0 \end{cases}$$

پیدا می کنیم.

فرض می کنیم (x_0, y_0) باشند.

سپس تغییر متغیّر $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$ معادله به فرم همگن زیر در خواهد آمد.

$$\frac{dY}{dX} = f(\frac{aX+bY}{eX+hY})$$

مثال (۶-۱۳):

معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+2}{x-y-4}$ را حل کنید:

حل: ابتدا $ah-be$ را حساب می کنیم $(1)(-1)-(1)(1)\neq 0$. یعنی دو خط موازی نیستند و محل تلاقی دارند.

حال دستگاه زیر را حل می کنیم:

$$\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y-4=0 \end{cases} \Rightarrow 2x-2=0 \to x=1$$

$$(1)+y+2=0 \to y=-3$$

$$\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=-3 \end{cases}$$

حال تغییر متغیّر زیر را انجام می دهیم:

$$x = X+1 \to dx = dX$$
$$y = Y-3 \to dy = dY$$

$$\to \frac{dY}{dX} = \frac{(X+1)+(Y-3)+2}{(X+1)-(Y-3)-4} = \frac{X+Y}{X-Y}$$
$$\to \frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y}$$

که همگن می باشد. حال این معادله همگن را به روش قبلی حل می کنیم.

$$Y = VX \to dY = VdX + X\,dV$$
$$\to (X-Y)\,dY = (X+Y)\,dX$$
$$(X-VX)(V\,dX + X\,dV) = (X+VX)\,dX$$
$$XV\,dX - V^2X\,dX + X^2dV - VX^2dV = X\,dX + VX\,dX$$
$$(XV - V^2X - X - VX)\,dX = dV(VX^2 - X^2)$$
$$(-V^2X - X)\,dX = dV(V-1)\,X^2$$

طرفین تقسیم بر X شود.

$$(-V^2-1)\,dX = (V-1)\,X\,dV$$
$$-\frac{dX}{X} = \frac{(V-1)}{(V^2+1)}\,dV = \frac{V\,dV}{V^2+1} - \frac{dV}{V^2+1}$$
$$-\ln|X| = \frac{1}{2}\ln|V^2+1| - \tan^{-1}(V) + c$$
$$\to \ln|X| + \frac{1}{2}\ln|V^2+1| - \tan^{-1}(V) + c = 0$$
$$\ln|X| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{Y^2}{X^2}+1\right| - \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) + c = 0$$
$$\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(y+3)^2}{(x-1)^2}+1\right| - \tan^{-1}\left(\frac{y+3}{x-1}\right) + c = 0$$

توجه: اگر دو خط موازی باشند $ah-be=0$ با استفاده از تغییر متغیّر

(1) $u = ax + by$

یا

$u = ex + hy$

معادله به نوع متغیّرهای از هم جدا می شود زیرا:

از طرفین نسبت به X مشتق می گیریم.

$$u = ax + by \to \frac{du}{dx} = a + b\frac{by}{dx}$$

$$(2) \quad \to \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}(\frac{du}{dx} - a)$$

با جایگذاری (1) و (2) در معادله $y' = f(\frac{ax+by+c}{ex+hy+d})$ داریم:

$$\frac{1}{b}(\frac{du}{dx} - a) = f(\frac{u+c}{ku+d})$$
$$\to \frac{du}{dx} = bf(\frac{u+c}{ku+d}) + a = H(u)$$
$$\to \frac{du}{H(u)} = dx$$

تذکّر: بعضی از معادلات دیفرانسیل ممکن است با تغییر متغیّر $dy = \alpha t^{\alpha-1}dt$ $y = t^{\alpha}$ به معادله همگن تبدیل شوند.

مثال (۶-۱۴):

معادله دیفرانسیل $(y^4 - 3x^2)\,dy + x\,y\,dx = 0$ را حل کنید.

حل:

$$y = t^{\alpha} \to dy = \alpha\, t^{\alpha-1}dt$$

$$(t^{4\alpha} - 3x^2)(\alpha\, t^{\alpha-1})\,dt + x\,t^{\alpha}dx = 0$$
$$\alpha\,(t^{5\alpha-1} - 3x^2 t^{\alpha-1})\,dt + x\,t^{\alpha}dx = 0$$

برای آن که این معادله همگن باشد.

$$5\alpha - 1 = 2 + \alpha - 1 \to$$
$$4\alpha = 2 \to \alpha = \frac{1}{2}$$

بنابراین به ازای $\alpha = \frac{1}{2}$ معادله همگن از درجه $\frac{3}{2}$ است.

معادله با تغییر متغیّر $y=t^{\frac{1}{2}}$ قابل تبدیل به معادله همگن است.

حال $\alpha=\frac{1}{2}$ را در معادله بالا قرار می دهیم:

$$\frac{1}{2}(t^{\frac{3}{2}}-3x^2t^{-\frac{1}{2}})dt+xt^{\frac{1}{2}}dx=0$$

طرفین را در $t^{\frac{1}{2}}$ ضرب می کنیم.

$$\frac{1}{2}(t^2-3x^2)dt+xt\,dx=0$$
$$(t^2-3x^2)dt+2xt\,dx=0$$

حال این معادله همگن است.

$$t=Vx \rightarrow dt=V\,dx+x\,dV$$
$$(V^2x^2-3x^2)(Vdx+x\,dV)+2Vx^2\,dx=0$$
$$x^2(V^2-3)(Vdx+x\,dV)+2Vx^2\,dx=0$$

حال معادله را به x^2 تقسیم می کنیم.

$$(V^2-3)(Vdx+x\,dV)+2V\,dx=0$$
$$V^3dx-3V\,dx+xV^2dV-3x\,dV+2V\,dx=0$$
$$(V^3-V)dx+(xV^2-3x)dV=0$$
$$(V^3-V)dx+x(V^2-3)dV=0$$

$$\rightarrow -\frac{dx}{x}=\frac{(V^2-3)\,dV}{(V^3-V)}\equiv\frac{A}{V}+\frac{B}{(V-1)}+\frac{C}{(V+1)}$$
$$A(V^2-1)+B(V^2-V)+C(V^2-V)=V^2-3$$

$$(A+B+C)V^2+(B-C)V-A=V^2-3$$
$$\rightarrow A=3$$
$$B=C$$
$$3+2C=1$$
$$\rightarrow 2C=-2\rightarrow C=B=-1$$

$$\int+\frac{dx}{x}+\int\frac{3\,dV}{V}-\int\frac{dV}{V-1}-\int\frac{dV}{V+1}+C_1=0$$

$$\ln|x|+3\ln|V|-\ln|V-1|-\ln|V+1|=\ln c$$

$$\ln\left|\frac{xV^3}{V^2-1}\right|=\ln c$$

$$\rightarrow\frac{xV^3}{V^2-1}=c\rightarrow\frac{x\frac{t^3}{x^3}}{\frac{t^2}{x^2}-1}=c\rightarrow$$

$$y=t^{\frac{1}{2}}\rightarrow t^2=V^2x^2\,,\;y^2=t$$

$$\frac{t^3}{t^2-x^2}=c$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{t^2}{t^2-x^2}=c\\ t=y^2\end{array}\right\}\rightarrow\frac{y^6}{y^4-x^2}=c$$

تعریف: معادله دیفرانسیل به فرم

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

را کامل می گوییم، اگر تابعی مانند $u(x,y)$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$$

شرط لازم و کافی برای آن که معادله دیفرانسیل $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ کامل باشد آن است که:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

روش تحلیلی جهت به دست آوردن جواب عمومی، معادله دیفرانسیل کل به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)$$

با انتگرال گیری نسبت به x از طرفین داریم:

$$u=\int P(x,y)\,dx+f(y)$$

در این جا y به عنوان یک پارامتر محسوب شده است و $f(y)$ به عنوان مقدار ثابت انتگرال گیری مـی باشـد. بـرای پیـدا کردن $f(y)$ به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)$$
$$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[\int P(x,y)\,dx]+\frac{d\,f(y)}{dy}=Q(x,y)$$
$$\rightarrow \frac{d\,f(y)}{dy}=Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}[\int P(x,y)\,dx]$$

از طرفین نسبت به y انتگرال می گیریم.

$$f(y)=\int[Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx]\,dy$$

مثال (۶-۱۵):

معادله دیفرانسیل $(2xy+3)\,dx+(x^2+8y)\,dy=0$ را حل کنید.

ابتدا شرط $\frac{\partial(2xy+3)}{\partial y}=\frac{\partial(x^2+8y)}{\partial x}$

معادله دیفرانسیل کامل است $\rightarrow$ $2x=2x$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=(2xy+3)\rightarrow u=\int P(x,y)\,dx+f(y)$$
$$u=\int(2xy+3)\,dx+f(y)\rightarrow$$
$$u=y\,x^2+3x+f(y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+\frac{\partial f(y)}{\partial y}=x^2+8y$$
$$\rightarrow \frac{\partial f(y)}{\partial y}=8y\rightarrow f(y)=\frac{8y^2}{2}+c$$
$$\rightarrow f(y)=4y^2$$
$$\rightarrow c=y\,x^2+3x+4y^2$$

مثال (۶-۱۶):

معادله دیفرانسیل $(x^2-x+y^2)\,dx-(e^y-2xy)\,dy=0$ را حل کنید.

$$\frac{\partial(x^2-x+y^2)}{\partial y}=\frac{-\partial(e^y-2xy)}{\partial x}$$

معادله دیفرانسیل کامل است $\Rightarrow$ $2y=2y$

$$\to \frac{\partial u}{\partial x} = (x^2 - x + y^2) \to u = \int (x^2 - x + y^2)\,dx + f(y)$$

$$\to u = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + y^2 x + f(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^y + 2xy = 2xy + \frac{df(y)}{dy}$$

$$\to \frac{df(y)}{dy} = -e^y$$

$$\to f(y) = -\int e^y\,dy = -e^y$$

$$\to u = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + y^2 x - e^y = c$$

3-6 معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اوّل

تعریف: اگر یک معادله دیفرانسیل مرتبه اوّل را بتوان به فرم

$$A(x)\frac{dy}{dx} + B(x)y + C(x) = 0$$

نوشت آن را خطی گوییم. در فاصله ای که $A(x) \neq 0$ باشد می توانیم معادله را بر $A(x)$ تقسیم کنیم.

$$\frac{dy}{dx} + y\,f(x) = q(x)$$

اگر $q(x) = 0$ باشد معادله را همگن و در غیر این صورت آن را ناهمگن نامند.

در زیر به بررسی روشی جهت پیدا کردن فرمولی برای جواب عمومی معادله می پردازیم:

روش اوّل: اگر معادله همگن باشد

$$\frac{dy}{dx} + y\,f(x) = 0$$

$$\to \frac{dy}{y} = -f(x)\,dx \to$$

که این معادله از نوع متغیّرهای از هم جدا می باشد. با انتگرال گیری از طرفین خواهیم داشت:

$$\ln y = -\int f(x)\,dx + c_1 \to y = e^{-\int f(x)\,dx}$$

اگر معادله ناهمگن باشد آن را به فرم زیر می نویسیم:

$$(y\,f(x) - q(x))dx + dy = 0$$

در حالت کلّی از نوع متغیّرهای از هم جدا و همگن نیست، لذا شرط کامل بودن را بررسی می کنیم.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=f(x) \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=0$$

P: ضریب dx

Q: ضریب dy

در نتیجه در حالت کلی کامل هم نیست، اگر در فاکتوری انتگرال ساز دو طرف معادله ضرب شود خواهیم داشت:

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(x)$$

$$F=e^{\int f(x)\,dx}$$

طرفین را در F ضرب می کنیم:

$$e^{\int f(x)\,dx}\left(\frac{dy}{dx}+y\,f(x)\right)=q(x)\ e^{\int f(x)\,dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(y\,e^{\int f(x)\,dx}\right)=\frac{dy}{dx}\ e^{\int f(x)\,dx}+y\,f(x)\ e^{\int f(x)\,dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(y\,e^{\int f(x)\,dx}\right)=q(x)\ e^{\int f(x)\,dx}$$

$$y\ e^{\int f(x)\,dx}=\int q(x)\ e^{\int f(x)\,dx}\ dx+c$$

$$y=e^{-\int f(x)\,dx}\left[\int q(x)\ e^{\int f(x)\,dx}\ dx+c\right]$$

با فرض این که $g(x)=\int f(x)\,dx$

$$y=e^{-g(x)}\left[\int q(x)\ e^{g(x)}\ dx+c\right]$$

مثال (۶-۱۷):

معادله دیفرانسیل $y'+3y=e^{x}$ را حل کنید.

حل:

$$f(x)=3 \ \rightarrow\ g(x)=\int 3\,dx=3x$$

$$g(x)=e^{x}$$

$$y=e^{-3x}\left[\int e^{x}\ e^{3x}\ dx+c\right]$$

$$y=e^{-3x}\left[\int e^{4x}\ dx+c\right]=e^{-3x}\left(\frac{1}{4}e^{4x}+c\right)$$

$$=\frac{1}{4}e^{x}+c\,e^{-3x}$$

مثال (۶-۱۸):

معادله دیفرانسیل $y'-xy=x$ را حل کنید.

حل:

$$f(x)=-x \;\rightarrow\; g(x)=\int -x\,dx=-\frac{x^2}{2}$$
$$q(x)=x$$
$$y=e^{+\frac{x^2}{2}}[\int x\,e^{-\frac{x^2}{2}}dx+c]=e^{+\frac{x^2}{2}}[-e^{-\frac{x^2}{2}}+c]$$
$$=-1+c\,e^{\frac{x^2}{2}}$$

مثال (۶-۱۹):

معادله دیفرانسیل $\tan x\,\frac{dy}{dx}+y=3x\sec x$ را حل کنید.

حل:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{\tan x}y=\frac{3x}{\tan x}\times\frac{1}{\cos x}=\frac{3x}{\sin x}\;\frac{\cos x}{\cos x}$$
$$\rightarrow f(x)=\cot x=\frac{1}{\tan x}$$
$$q(x)=\frac{3x}{\sin x}=3x\csc x$$
$$\rightarrow g(x)=\int f(x)\,dx=\int \cot x\,dx=\ln\sin x$$
$$y=e^{-g(x)}[\int q(x)\,e^{g(x)}dx+c]$$
$$y=e^{-\ln\sin x}[\int\frac{3x}{\sin x}\times e^{\ln\sin x}dx+c]=\frac{1}{\sin x}[\int\frac{3x}{\sin x}\times\sin x\,dx+c]=(\frac{3}{2}x^2+c)+\frac{1}{\sin x}=+\frac{3}{2}x^2\csc x+c\times\csc x$$

مثال (۶-۲۰):

معادله دیفرانسیل $y'=\frac{y}{2y\ln y+y-x}$ را حل کنید.

حل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2y\ln y+y-x}\rightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{2y\ln y+y-x}{y}=\frac{y(2\ln y+1)-x}{y}$$
$$(2\ln y+1)-\frac{x}{y}=\frac{dx}{dy}$$
$$\rightarrow\frac{dx}{dy}+x\times\frac{1}{y}=2\ln y+1\rightarrow f(y)=\frac{1}{y}$$

در این مسئله x را به صورت تابعی از y در نظر می گیریم.

$$\rightarrow g(y)=\int f(y)\,dy=\int \frac{1}{y}dy=\ln y$$
$$\rightarrow x=e^{-g(y)}\left[\int q(y)\,e^{g(y)}dy+c\right]$$
$$q(y)=(2\ln y+1)$$
$$\rightarrow x=e^{-\ln y}\left[\int (2\ln y+1)\,e^{+\ln y}\,dy+c\right]$$
$$x=e^{\ln y^{-1}}\left[\int (2\ln y+1)\times y\,dy+c\right]$$
$$x=\frac{1}{y}\left[\int 2\ln y\,y\,dy+\int y\,dy+c\right]$$
$$x=\frac{1}{y}[\frac{y^2}{2}+c+2\int y\ln y\,dy]$$

توجّه:

$$\ln y=u$$
$$y\,dy=dv\rightarrow v=\frac{y^2}{2}$$
$$\rightarrow \frac{dy}{y}=du$$
$$\int y\ln y\,dy=\int u\,dv=uv-\int v\,du=\ln y\,(\frac{y^2}{2})-\int \frac{y^2}{2}\,\frac{dy}{y}=\frac{y^2}{2}\ln y-\frac{1}{2}\,\frac{y^2}{2}=\frac{1}{2}y^2\ln y-\frac{1}{4}y^2$$
$$x=\frac{1}{y}\{\frac{y^2}{2}+c+y^2\ln y-\frac{1}{2}y^2\}$$
$$x=\frac{1}{2}y+c\,y^{-1}+y\ln y-\frac{1}{2}y=\frac{c}{y}+y\ln y$$

معادله برنولی: صورت کلّی این معادله به فرم

$$\frac{dy}{dx}+y\,f(x)=y^n\,g(x)$$

می باشد که در آن $n\in R$ ولی n صفر یا یک نیست. زیرا اگر $n=0$ یا $n=1$ باشد به فرم خطی خواهد بود. برای حل این معادله، طرفین را y^n تقسیم کرده و تغییر متغیّر $u=y^{1-n}$ می دهیم. آن گاه تبدیل به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اوّل می شود. زیرا:

$$u=y^{1-n}\rightarrow \frac{du}{dx}=(1-n)y^{-n}\,\frac{dy}{dx}$$
$$y^{-n}\,\frac{dy}{dx}+y^{1-n}f(x)=g(x)$$

طرفین معادله بالا را در $(1-n)$ ضرب می کنیم.

$$(1-n)\,y^{-n}\frac{dy}{dx}+(1-n)\,y^{1-n}\,f(x)=(1-n)\,g(x)$$
$$\frac{du}{dx}+(1-n)\,u\,f(x)=(1-n)\;g(x)$$

که یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اوّل است (نسبت به u) که به عنوان تابعی از x می باشد جواب عمومی به فرم:

$$u=y^{1-n}=e^{-\int(1-n)\,f(x)\,dx}\left[\int(1-n)\,g(x)\,e^{\int(1-n)\,f(x)\,dx}\,dx+c\right]$$

مثال (۶-۲۱):

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید:

$$\frac{dy}{dx}-y=xy^2$$

حل: معادله فوق برنولی می باشد، لذا طرفین را بر y^2 تقسیم می کنیم.

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}-y^{-1}=x$$

سپس در معادله جایگذاری شود.

$$u=y^{-1}\;\rightarrow\;\frac{du}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx}\;\rightarrow$$
$$-\frac{du}{dx}-u=x\;\rightarrow\;\frac{du}{dx}+u=-x$$

حال این معادله به فرم ساده ای که قبلاً می شناختیم در آمد که در این جا معادله به صورت خطی مرتبه اوّل نسبت بـه u است.

$$f(x)=1 \qquad q(x)=-x$$
$$g(x)=\int f(x)\,dx=x$$

$$u=e^{-x}\left[\int -x\,e^{x}\,dx+c\right]$$
$$=e^{-x}\left[(1-x)\,e^{x}+c\right]$$
$$=1-x+c\,e^{-x}$$

توجّه: $\int x\,e^{x}dx=\int u\,dv=uv-\int v\,du=e^{x}x-\int e^{x}dx=e^{x}(x-1)$

$$e^{x}dx=dv\;\rightarrow\;v=e^{x}$$
$$x=u\;\rightarrow\;dx=du$$
$$\rightarrow u=\frac{1}{y}=1-x+c\,e^{-x}$$

مثال (۶-۲۲):

معادله دیفرانسیل $(3xy^5 - y)\,dx + 3x\,dy = 0$ را حل کنید.

$$3x\frac{dy}{dx} + (3xy^5 - y) = 0$$

معادله برنولی می باشد طرفین را تقسیم بر y^5 می کنیم.

$$\rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{y}{3x} = -y^5$$

$$y^{-5}\frac{dy}{dx} - \frac{y^{-4}}{3x} = -1$$

از تغییر متغیّر $u = y^{-4}$ استفاده می کنیم.

$$u = y^{-4}\ ,\ \frac{du}{dx} = -4y^{-5}\frac{dy}{dx} \rightarrow -\frac{1}{4}\frac{du}{dx} = y^{-5}\frac{dy}{dx}$$

$$-\frac{1}{4}\frac{du}{dx} - \frac{u}{3x} = -1$$

معادله خطی مرتبه اوّل نسبت و تابع u می باشد $\rightarrow \frac{dv}{dx} + \frac{4}{3x}u = +4$

$$f(x) = \frac{4}{3x} \rightarrow g(x) = \int \frac{4}{3x}dx = \frac{4}{3}\ln x$$

$$y^{-4} = u = e^{-g(x)}\left[\int q(x)\,e^{g(x)}dx + c\right]$$

$$q(x) = 4$$

$$\rightarrow u = e^{-\frac{4}{3}\ln x}\left[\int 4e^{\frac{4}{3}\ln x}dx + c\right]$$

$$u = e^{\ln x^{-\frac{4}{3}}}\left[\int 4e^{\ln x^{\frac{4}{3}}}dx + c\right]$$

$$u = x^{-\frac{4}{3}}\left[\int 4x^{\frac{4}{3}}dx + c\right] = (x^{-\frac{4}{3}} \times \{4\frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + c\}) = \frac{4x \times 3}{7} + cx^{-\frac{4}{3}} = \frac{12}{7}x + cx^{-\frac{4}{3}} = y^{-4}$$

مثال (۶-۲۳):

معادله دیفرانسیل $y' = \frac{2x}{x^2\cos y + \sin 2y}$ را حل کنید.

حل:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x^2\cos y+\sin y\cos y\times 2}{2y\ln y+y-x}=\frac{x}{2}\cos y+\frac{1}{x}\sin y\cos y$$
$$\frac{dx}{dy}-x\frac{\cos y}{2}=x^{-1}\sin y\cos y$$

معادله دیفرانسیل برنولی می باشد طرفین را تقسیم x^{-1} می کنیم و از تغییر متغیر $u=x^2$ استفاده می کنیم.

$$x^{+1}\frac{dx}{dy}-x^2\frac{\cos y}{2}=\sin y\cos y$$

$$u=x^2\rightarrow 2x\,dx=du$$
$$\rightarrow x\,dx=\frac{du}{2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{du}{dy}-u\frac{\cos y}{2}=\sin y\cos y\rightarrow\frac{du}{dy}-\cos y\,u=2\sin y\cos y$$

این معادله خطی مرتبه اوّل نسبت به تابع u و متغیّر y می باشد که در آن

$$f(y)=-\cos y\quad,\quad q(y)=2\sin y\cos y$$

$$g(y)=\int-\cos y\,dy=\int f(y)\,dy=-\sin y$$
$$u=e^{-g(y)}\left[\int q(y)e^{g(y)}dy+c\right]=e^{\sin y}\left[\int 2\sin y\cos y\,e^{-\sin y}dy+c\right]=e^{\sin y}\left[\int-2\sin y\;e^{-\sin y}-2e^{-\sin y}+c\right]$$
$$=c\,e^{\sin y}-2(\sin y+1)$$

جواب عمومی به فرم

$$x^2=c\,e^{\sin y}-2(\sin y+1)$$

توجّه: برای محاسبه این انتگرال

$$\int\sin y\cos y\,e^{-\sin y}dy$$

$$e^{-\sin y}=u\rightarrow du=\cos y\;e^{-\sin y}=-du\quad,\ v=\sin y\ \ du=-\cos y\,e^{-\sin y}$$
$$\rightarrow\int\sin y\cos y\;e^{-\sin y}dy=\int-v\,du=-uv+\int udv$$

$$\boxed{v=\sin y\rightarrow dv=\cos y}$$

$$=-\sin y\;e^{-\sin y}+\int e^{-\sin y}\times\cos y\,dy=-\sin y\;e^{-\sin y}-e^{-\sin y}$$
$$\rightarrow e^{\sin y}\left[2\int\sin y\cos y\;e^{-\sin y}dy+c\right]$$

$$=e^{\sin y}+\left[-2(\sin y\, e^{-\sin y}+e^{-\sin y})+c\right]$$
$$=c\,e^{\sin y}-2\sin y-2$$

معادله دیفرانسیل مرتبه اوّل $f'(y)\frac{dy}{dx}+f(y)p(x)=q(x)$ را با تغییر متغیّر $u=f(y)$ تبدیل به معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اوّل می کنیم.

$$u=f(y)\ \rightarrow\ \frac{du}{dx}=f'(y)\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{du}{dx}+u\,p(x)=q(x)$$

که یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اوّل نسبت به تابع u است.

مثال (۶-۲۴):

معادله دیفرانسیل $y'\cos y+\sin y=x+1$ را حل کنید.

حل:

$$f'(y)=\cos y\quad f(y)=\sin y\quad u=\sin y$$
$$\frac{du}{dx}=\cos y\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{du}{dx}+u=x+1$$

$$f(x)=1\quad,\quad q(x)=x+1\quad,\quad g(x)=\int f(x)\,dx=\int dx=x$$

$$u=e^{-g(x)}\left[\int q(x)e^{g(x)}dx+c\right]=e^{-x}\left[\int (x+1)e^{x}\,dx+c\right]$$
$$=e^{-x}[x e^{x}+c]=x+c\,e^{-x}$$

توجّه: $\int (x+1)e^{x}\,dx=\int x e^{x}\,dx+\int e^{x}\,dx=\int x e^{x}\,dx+e^{x}$

$$\int x e^{x}\,dx=\int u\,dv=uv-\int v\,du=x e^{x}-\int e^{x}\,dx=x e^{x}-e^{x}$$

$$e^{x}dx=dv\ \rightarrow\ v=e^{x}$$
$$x=u\ \rightarrow\ du=dx$$
$$\rightarrow\int (x+1)e^{x}\,dx=x e^{x}-e^{x}+e^{x}+c=x e^{x}+c$$

معادله دیفرانسیل مرتبه اوّل

$$y'+y^{2}p_{1}(x)+y\,p_{2}(x)+p_{3}(x)=0\quad,\quad p_{1}(x)\neq 0$$

را معادله ریکاتی می نامند. برای حل این معادله باید یک جواب خصوصی این معادله را داشته باشیم. جواب عمومی این

معادله به فرم $y=y_1+\frac{1}{z}$ می باشد که y_1 جواب خصوصی معادله است و z تابعی از x می باشد. کـه بـا جایگـذاری در معادله خطی تبدیل به یک معادله خطی مرتبه اوّل می شود. زیرا:

$$y=y_1+\frac{1}{z} \rightarrow y'=y_1'-\frac{z'}{z^2}$$

سپس:

$$y'-\frac{z'}{z^2}+(y_1+\frac{1}{z})^2 p_1(x)+(y_1+\frac{1}{z})p_2(x)+p_3(x)=0$$
$$y_1'-\frac{z'}{z^2}+y_1^2\,p_1(x)+\frac{1}{z^2}p_1(x)+2\frac{y_1}{z}p_1(x)+y_1\,p_2(x)+\frac{1}{z}\,p_2(x)+p_3(x)=0$$
$$(y_1'+y_1^2\,p_1(x)+y_1\,p_2(x)+p_3(x))-\frac{z'}{z^2}+\frac{1}{z^2}p_1(x)+2\frac{y_1}{z}p_1(x)+\frac{1}{z}p_2(x)=0$$

y_1 یک جواب خصوصی معادله است:

$$y_1'+y_1^2 p_1(x)+y_1\,p_2(x)+p_3(x)=0$$

در نتیجه داریم:

$$z'-z(2y_1\,p_1(x)+p_2(x))=p_1(x)$$

که یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اوّل با تابع z می باشد.

مثال (۶-۲۵):

معادله دیفرانسیل $y'=x^3+\frac{2}{x}y-\frac{1}{x}y^2$ را حل کنید.

حل: اگر $y_1=-x^2$ باشد جواب عمومی به فرم $y=-x^2+\frac{1}{z}$ خواهد بود.

از طرفین نسبت به x مشتق می گیریم.

$$y'=-2x-\frac{z'}{z^2}$$

و در معادله اصلی قرار می دهیم:

$$-2x-\frac{z'}{z^2}=x^3+\frac{2}{x}(-x^2+\frac{1}{z})-\frac{1}{x}(-x^2+\frac{1}{z})^2$$
$$-2x-\frac{z'}{z^2}=x^3-2x+\frac{2}{xz}-x^3-\frac{1}{xz^2}+\frac{2x}{z}$$
$$z'+z(\frac{2}{x}+2x)=\frac{1}{x}$$

یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اوّل است.

$$f(x)=\frac{2}{x}+2x \quad , \quad q(x)=\frac{1}{x}$$

$$g(x)=\int f(x)\,dx=\int(\frac{2}{x}+2x)\,dx=2\ln x+x^2$$

$$z=e^{-g(x)}\left[\int q(x)e^{g(x)}dx+c\right]=e^{-\ln x^2-x^2}\left[\int\frac{1}{x}e^{\ln x^2+x^2}dx+c\right]=\frac{e^{-x^2}}{x^2}\left[\int x e^{x^2}dx+c\right]=\frac{e^{-x^2}}{x^2}[\frac{1}{2}e^{x^2}+c]$$

$$=\frac{1}{2x^2}+c\frac{e^{-x^2}}{x^2} \ \rightarrow\ y=-x^2+\frac{2x^2e^{x^2}}{e^{x^2}+c}$$

4-6 معادلات دیفرانسیل مرتبه دوّم و بالاتر

در این بخش می خواهیم طریقه حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوّم را بیان کنیم و روش حل را به مراتب بالاتر تعمیم دهیم. صورت کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام به فرم

$$F(x,y,y',y'',\ldots y^{(n)})=0$$

می باشد. این نوع معادلات به دو دسته زیر تقسیم می شوند.

الف) معادلات دیفرانسیل خطی

ب) معادلات دیفرانسیل غیرخطی

معادلات دیفرانسیل خطی نیز خود دو دسته اند:

1- معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

2- معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب متغیّر

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوّم

معادله دیفرانسیل مرتبه دوّم را خطی گوییم اگر به فرم زیر بیان شود.

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$$

اگر در معادله $r(x)\equiv 0$ باشد معادله را معادله همگن و در غیر این صورت غیرهمگن می گویند.

صورت کلّی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوّم همگن به فرم زیر است.

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

توابع $p(x)$ و $q(x)$ را ضرایب معادله می نامیم.

قضیه: اگر توابع $p(x)$ و $q(x)$ و $r(x)$ در فاصله $a_1 < x < a_2$ پیوسته باشند آن گاه یک و فقط یک تابع مانند $g = G(x)$ وجود دارد که در معادله

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \ , \ y(x_0) = y_0 \ , \ y'(x_0) = y'_0$$

صدق کند.

مثال (۶-۲۶):

معادله دیفرانسیل $y'' + y = 0 \ , \ y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 1$ را بررسی کنید.

می دانیم جواب های این معادله $y = \cos x$ و $y = \sin x$ می باشد (چون در معادله صدق می کنند) با توجّه به شرایط اولیه $y = \sin x$ جواب منحصر به فرد معادله است.

قضیه: اگر $y_1 = G(x)$ یک جواب معادله دیفرانسیل خطی همگن $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشد آن گاه $y = CG(x)$ (C ثابت دلخواه) نیز یک جواب معادله خواهد بود.

قضیه: اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله دیفرانسیل خطی همگن باشند، آن گاه $y_1 + y_2$ نیز یک جواب برای آن خواهد بود.

بنابراین می توان از قضیه قبل و قضیه حاضر نتیجه گرفت که اگر y_1 و y_2 دو جواب برای معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم، همگن باشند، در این صورت $c_1 y_1 + c_2 y_2$ نیز یک جواب خواهد بود.

در این جا جواب چند دسته از معادلات دیفرانسیل که بسیار مورد استفاده قرار می گیرد را می نویسیم.

$$y'' + 4y = 0 \rightarrow y_1 = \sin 2x \ , \ y_1 = \cos 2x$$
$$y'' + 9y = 0 \rightarrow y_1 = \sin 3x \ , \ y_1 = \cos 3x$$

می توان نشان داد که این توابع در معادلات دیفرانسیل متناظرشان صدق می کنند.

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \rightarrow y_1 = e^{-2x}$$
$$y_1 = x e^{-2x}$$

$$y'' - 2y' + 5y = 0 \rightarrow y_1 = e^{x} \cos 2x$$
$$y_1 = e^{x} \sin 2x$$

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0 \rightarrow y_1 = x$$
$$y_2 = \frac{1}{x}$$

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0 \rightarrow y_1 = x \ , \ y_2 = x\ln x$$

معادلات خطی مرتبه دوّم همگن با ضرایب ثابت

معادله دیفرانسیل به فرم

$$y'' + ay' + by = 0$$

را معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوّم همگن با ضرایب ثابت می نامیم که در آن $a\,, b \in R$ مقادیر ثابت هستند و دامنه x محور x ها می باشد.

می دانیم که جواب معادله خطی همگن مرتبه اوّل با ضریب ثابت یعنی $y' + ky = 0$ به صورت $y = ce^{-kx}$ می باشد.

$$\int \frac{dy}{y} + k\int dx = c_1 \qquad \ln|y| + kx = c_1$$

$$\ln|y| = c_1 - kx$$

$$y = e^{c_1 - kx} = ce^{-kx}$$

پس طبیعی است که حدس زده شود $y = e^{tx}$ یک جواب باشد.

ابتدا اگر t به صورت مناسب انتخاب شود. حال این جواب و مشتقاتش را در معادله قرار می دهیم و t را طوری تعیین می کنیم که $y = e^{tx}$ در معادله صدق کند.

$$y = e^{tx} \rightarrow y' = te^{tx} \rightarrow y'' = t^2 e^{tx}$$

$$t^2 e^{tx} + ate^{tx} + be^{tx} = e^{tx}(t^2 + at + b)$$

اگر t ریشه معادله $(t^2 + at + b)$ انتخاب شود، t به دست خواهد آمد.

$$t^2 + at + b = 0$$

که به آن معادله مفسّر یا معادله شاخصی می گوییم. چون یک معادله درجه دوّم با ضرایب حقیقی می باشد. پس سه حالت رخ می دهد:

حالت اوّل: معادله مفسّر دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد $(a^2 - 4b > 0)$. اگر این دو ریشه را با t_1 و t_2 نشان دهیم، آن گاه:

$$y_1 = e^{t_1 x} \ , \ y_2 = e^{t_2 x}$$

مثال (۶-۲۷):

جواب های معادله زیر را به دست آورید.

$$y'' - 5y' - 4y = 0$$

حل: ابتدا معادله مفسّر را تشکیل می دهیم:

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25 - 4(1)(4)} = 3 \qquad t = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$t_1 = \frac{8}{2} = 4 \qquad t_2 = \frac{2}{2} = 1$$

$y = e^{4x}$ و $y = e^x$ جواب های معادله می باشد.

$y = c\,e^x + c_2\,e^{4x}$ (جواب عمومی)

مثال (۶-۲۸):

جواب های معادله دیفرانسیل $y'' - 2y' - 3y = 0$ را پیدا کنید.

حل: ابتدا معادله مفسّر را تشکیل می دهیم:

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4 - 4(1)(-3)} = 4 \qquad t = \frac{2 \pm 4}{2} \qquad t_1 = \frac{6}{2} = 3$$

$$t_2 = -\frac{2}{2} = -1$$

$y = e^{-x}$ و $y = e^{3x}$ جواب های معادله می باشند.

حال می خواهیم جواب عمومی معادله بنویسیم:

$$y = c\,e^{-x} + c_2\,e^{3x}$$

تعریف: اگر حاصل $\frac{y_1}{y_2}$ تابعی از x باشد در این صورت y_1 و y_2 مستقل خطی هستند. برای مثـال $y_1 = 6x$ و $y_2 = 7x$ بستگی خطی دارند. زیرا:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{6x}{7x} = \frac{6}{7} \neq f(x)$$

امّا برای مثال: $y = e^{3x}$ و $y_2 = e^{2x}$ مستقل خطی اند. زیرا:

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{e^{3x}}{e^{2x}}=e^{x}$$

تذکّر: اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله باشند و بستگی خطی داشته باشند در این صورت

$$y(x)=c_1\,y_1(x)+c_2\,y_2(x)$$

تبدیل به عبارتی می شود که شامل یک پارامتر دلخواه است:

$$\begin{aligned} y(x)=c_1\,y_1(x)+c_2\,y_2(x)&=c_1\,ky_2(x)+c_2\,y_2(x)\\ &=(c_1k+c_2)\,y_2(x)\\ &=c\,y_2(x)\end{aligned}$$

اما اگر y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی باشند، چنین تبدیلی امکان پذیر نیست.

بنابراین اگر معادله مفسّر دارای دو ریشه حقیقی و متمایز باشد، در ایـن صـورت $y_1=e^{t_1x}$ و $y_2=e^{t_2x}$ ($t_1\neq t_2$ ریشـه های معادله مفسّر هستند) جواب های معادله خواهند بود و چون

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{e^{t_1x}}{e^{t_2x}}=e^{(t_1-t_2)x}$$

مخالف مقدار ثابت است پس y_1 و y_2 مستقل خطی اند و در نتیجه:

$$\begin{aligned} y(x)&=c_1\,y_1(x)+c_2\,y_2(x)\\ &=c_1\,e^{t_1x}+c_2\,e^{t_2x}\end{aligned}$$

شامل دو پارامتر ثابت می باشد، جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه 2 با ضرایب ثابت است.

مثال (۶-۲۹):

جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''-2y'-15y=0$ را بنویسید.

حل: ابتدا معادله مفسّر را تشکیل می دهیم.

$$t^2-2t-15=0$$

$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{(-2)^2-4(1)(-15)}=\sqrt{4+60}=\sqrt{64}=8$$

$$t=\frac{2\pm 8}{2}\;\Rightarrow\; t_1=\frac{10}{2}=5$$

$$t_2=-\frac{6}{2}=-3$$

$$y=c_1\,e^{5x}+c_2\,e^{-3x}$$

مثال (۶-۳۰):

جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''-y'-6y=0\ ,\ y(0)=3\ ,\ y'(0)=-4$ را پیدا کنید.

حل: ابتدا معادله مفسّر را تشکیل می دهیم:

$$t^2-t-6=0$$
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{(-1)^2-4(1)(-6)}=\sqrt{1+24}=\sqrt{25}=5$$
$$t=\frac{1\pm5}{2}\ \Rightarrow\ t_1=\frac{6}{2}=3$$
$$t_2=\frac{-4}{2}=-2$$

جواب عمومی معادله $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-2x}$ می باشد. شرایط اوّل را در آن صدق می دهیم.

$$y'=3c_1e^{3x}-2c_2e^{-2x}$$

$$\left.\begin{cases} y(0)=3\ \rightarrow\ c_1+c_2=3 \\ y'(0)=-4\ \rightarrow\ +3c_1-2c_2=-4 \end{cases}\right\}\Rightarrow 2c_1+3c_1=6-4$$
$$5c_1=+2$$
$$\rightarrow c_1=+\frac{2}{5}$$

$$c_2=3-\frac{2}{5}=\frac{13}{5}$$
$$\rightarrow y=\frac{2}{5}e^{3x}+\frac{13}{5}e^{-2x}$$

حالت دوّم: معادله مفسّر دارای دو ریشه متمایز مختلف یا موهومی باشد. $(a^2-4b)<0$ اگر مبین معادله مفسّر (a^2-4b) منفی باشد در این صورت جواب های معادله مفسّر به صورت $t_2=p-iq$ و $t_1=p+iq$ خواهد بود. در نتیجه جواب های معادله به فرم $y_1=e^{(p+iq)x}$ و $y_2=e^{(p-iq)x}$ می شوند و چون

$$\frac{y_1}{y_2}=\frac{e^{(p+iq)x}}{e^{(p-iq)x}}=e^{2iqx}$$

مخالف مقدار ثابت می باشد پس جواب عمومی معادله به فرم

$$y(x)=c_1e^{(p+iq)x}+c_2e^{(p+iq)x}$$

است. از طرفی می دانیم:

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

با انتخاب $c_1=\frac{1}{2}(A-iB)$ و $c_2=\frac{1}{2}(A+iB)$

$$y(x)=e^{px}(\frac{A-iB}{2})\{\cos qx+i\sin qx\}+e^{px}(\frac{A+iB}{2})\{\cos qx-i\sin qx\}=e^{px}(A\cos qx+B\sin qx)$$

بنابراین: اگر معادله مفسّر دارای دو ریشه به صورت $p\pm iq$ باشد در این صورت، جواب معادله عمـومی بـه فـرم زیـر مـی باشد.

$$y(x)=e^{px}(A\cos qx+B\sin qx)$$

مثال (۶-۳۱):

جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''-2y'+10y=0$ را بنویسید:

حل: ابتدا معادله مفسّر را تشکیل می دهیم:

$$t^2-2t+10=0$$
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{(-2)^2-4(1)(10)}=\sqrt{-36}=6i$$
$$t=\frac{2\pm 6i}{2}\Rightarrow t_1=1+3i$$
$$t_2=1-3i$$
$$p=1\qquad q=3$$

جواب عمومی : $y=e^{x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$

مثال (۶-۳۲):

جواب عمومی معادله $y''+2y'+2y=0$ را به دست آورید:

حل: ابتدا معادله مفسّر را تشکیل می دهیم.

$$t^2+2t+2=0$$
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{(2)^2-4(1)(2)}=\sqrt{-4}=2i$$
$$t=\frac{-2\pm 2i}{2}\Rightarrow t_1=-1+i$$
$$t_2=-1-i$$
$$p=-1\qquad q=1$$
$$\Rightarrow y=e^{px}(A\cos qx+B\sin qx)$$
$$y=e^{-x}(A\cos x+B\sin x)$$

مثال (۶-۳۳):

معادله زیر را با شرایط اولیه اش به دست آورید.

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \ , \ y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 2$$

حل: ابتدا معادله مفسّر را تشکیل می دهیم:

$$t^2 + 3t + 2 = 0$$

$$\rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{9 - 4(1)(2)} = 1 \Rightarrow t = \frac{-3 \pm 1}{2} \rightarrow t_1 = \frac{-2}{2} = -1$$

$$t_2 = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\rightarrow y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ y' = -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x} \\ y'(0) = -c_1 - 2c_2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -c_1 - 2c_2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -c_2 = 2 \ \rightarrow \ c_2 = -2 \ \rightarrow \ c_1 = 2$$

$$\boxed{y = 2e^{-x} - 2e^{-2x}}$$

5-6 معادلات خطی همگن از مرتبه دلخواه n با ضرایب ثابت

صورت کلی یک معادله خطی همگن از مرتبه دلخواه n به فرم

$$y^{(n)} + f_1(x)\,y^{(n-1)} + \mathbf{L} + f_{n-1}(x)\,y' + f_n(x)\,y = 0$$

می باشد توابع $f_1(x)$ و $f_2(x)$ و ... $f_n(x)$ را ضرایب می نامند. حال اگر ضرایب همگی ثابت باشند به فرم

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \mathbf{L}\, a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

در می آید. برای حل این معادله همان روش را که در معادلات خطی همگن مرتبه دوّم با ضرایب ثابت بیان کردیم اعمال می کنیم.

آیا e^{tx} می تواند یک جواب معادله بالا باشد. برای پاسخ کافی است $y = e^{tx}$ و مشتقاتش را در معادله قرار دهیم.

$$y = e^{tx} \ , \ y' = t e^{tx} , \mathbf{K}\, y^{(n)} = t^n e^{tx}$$

با جایگذاری در معادله به رابطه زیر می رسیم:

$$e^{tx}(t^n + a_1 t^{n-1} + \mathbf{L}\, a_{n-1} t + a_n) = 0$$

$$t^n + a_1 t^{n-1} + \mathbf{L} + a_{n-1} t + a_n = 0$$

این معادله را معادله مفسّر می گویند. چون معادله مفسّر یک کثیرالجمله از درجه n با ضرایب ثابت است پس دارای n ریشه و در نتیجه

$$y_1 = e^{t_1 x}\ ,\ y_2 = e^{t_2 x}, \mathbf{K}\, y_n = e^{t_n x}$$

جواب های معادله می باشند.

که $t_1, t_2, \mathbf{K}, t_n$ جواب های معادله $t^n + a_1 t^{n-1} + \mathbf{L} + a_{n-1} t + a_n = 0$ هستند.

قضیه: اگر $y_1, y_2, \mathbf{K}\, y_n$ جواب های معادله

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \mathbf{L} + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

باشند در این صورت

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \mathbf{L} + c_n y_n$$

نیز یک جواب معادله بالا می باشد.

تعریف: توابع $y_1, y_2, \mathbf{K}\, y_n$ را روی فاصله I گوییم بستگی خطی دارند اگر حداقل بتـوان یکـی از آن هـا را بـه صـورت ترکیب خطی از بقیه نوشت به عبارت دیگر

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \mathbf{L} + k_n y_n = 0$$

توجّه: k_iها صفر نباشند و اگر رابطه بالا تا وقتی برقرار گردد که تمام k_iهـا صـفر باشـند گـوییم توابـع $y_1, y_2, \mathbf{K}\, y_n$ مستقل خطی هستند.

قضیه: اگر توابع $y_1, y_2, \mathbf{K}\, y_n$ روی فاصله $[a,b]$ وابسته خطی باشند آن گاه روی فاصله $[a,b]$ دترمینان زیر برابر صفر خواهد بود.

$$w(x) = w[y_1, y_2, \mathbf{K}\, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_n \\ y_1' & y_2' & y_n' \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$w(x)$ را رونسکین $y_1, y_2, \mathbf{K}\, y_n$ می نامند.

مثال (۳-۳۴):

نشان دهید توابع $2x^2$ و x^2 وابستگی خطی دارند.

حل: برای این کار رونسکین این توابع را تشکیل می دهیم.

$$w(x^2, 2x^2) = \begin{vmatrix} x^2 & 2x^2 \\ 2x & 4x \end{vmatrix} = 4x^3 - 4x^3 = 0$$

در نتیجه این توابع وابستگی خطی دارند.

ابتدا باید ریشه های معادله مفسر را پیدا کنیم و سپس با استفاده از ریشه های معادله مفسر، جواب های مستقل خطی $y_1, y_2, \mathbf{K}\, y_n$ را می نویسیم چون معادله مفسر یک کثیرالجمله از در n با ضرایب حقیقی می باشد پس حالات زیر را بررسی می کنیم.

حالت اوّل:

معادله مفسر دارای n ریشه حقیقی $t_1 \neq t_2 \neq \mathbf{L} \neq t_n$ باشد در این صورت جواب های

$$y_1 = e^{t_1 x}\,,\ y_2 e^{t_2 x}, \mathbf{K}\, y_n e^{t_n x}$$

مستقل خطی هستند پس جواب عمومی معادله به فرم

$$y = c_1 e^{t_1 x} + c_2 e^{t_2 x} + \mathbf{L}\, c_n e^{t_n x}$$

می باشد.

مثال (۶-۳۴):

جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''' - 2y'' - 3y' = 0$ را بنویسید.

حل: ابتدا معادله مفسر را تشکیل می دهیم.

$$t^3 - 2t^2 - 3t = 0$$

$$t(t^2 - 2t - 3) = 0 \rightarrow t_1 = 0 \quad t_2 = -1 \quad t_3 = 3$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4 - 4(1)(-3)} = 4 \quad t = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} t_2 = -1 \\ t_3 = 3 \end{array}$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{3x}$$

حالت دوّم: معادله مفسّر دارای n ریشه حقیقی باشد ولی m تای آن ها مساوی.

فرض کنید $t_1 = t_2$ در این صورت $y_1 = e^{t_1 x}, y_2 = xe^{t_1 x}$, $y_3, y_4, \mathbf{K}\, y_n$ مانند حالت اوّل بوده و اگر معادله مفسر دارای سه ریشه مساوی باشد مانند $t_1 = t_2 = t_3$ در این صورت $y_1 = e^{t_1 x}, y_2 = xe^{t_1 x}, y_3 = x^2 e^{t_1 x}$, $y_4, \mathbf{K}\, y_n$ مانند حالت اوّل خواهد بود. و به صورت کلّی اگر معادله مفسّر دارای m ریشه مساوی باشد $t_1 = t_2 = t_m$ در این صورت

$$y_1 = e^{t_1 x}, y_2 = xe^{t_1 x},\ y_3 = x^2 e^{t_1 x}, y_m = x^{m-1} e^{t_1 x}$$

و $y_{m+1}, \mathbf{K}\, y_n$ مانند حالت اوّل هستند.

مثال (۶-۳۵):

جواب عمومی معادله $y''' - y'' = 0$ را بنویسید:

حل: ابتدا معادله مفسر را تشکیل می دهیم:

$$t^3 - t^2 = 0 \to t^2(t-1) = 0 \to t_1 = t_2 = 0$$
$$t_3 = 1$$

در نتیجه ریشه های معادله مفسّر به قرار زیر هستند $(1,0,0)$ و جواب عمومی به صورت

$e^{0x}, xe^{0x}, e^x \to$ جواب های عمومی

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^x$$

حالت سوم: معادله مفسّر دارای ریشه مختلط هم باشد.

فرض کنید $t_2 = p - iq$ و $t_1 = p + iq$ و بقیه ریشه ها حقیقی باشند در این صورت در جواب عمومی به جای $c_1 y_1 + c_2 y_2$ عبارت $e^{px}(c_1 \cos qx + c_2 \sin qx)$ را می نویسیم.

مثال (۶-۳۶):

جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''' - 4y'' + 5y' = 0$ را بنویسید:

$$t^3 - 4t^2 + 5t = 0$$

ابتدا معادله مفسّر را تشکیل می دهیم.

$$t^3 - 4t^2 + 5t = 0$$
$$t(t^2 - 4t + 5) = 0 \to t_1 = 0$$
$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16 + 4(1)(5)} = \sqrt{-4} = 2i \quad t_2 = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i$$
$$t_3 = 2 - i$$

در نتیجه جواب عمومی را به صورت $y = c_1 + e^{2x}(c_2 \cos x + c_3 \sin x)$ می نویسیم.

مثال (۶-۳۷):

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بنویسید.

$$y^{(4)} - y = 0$$

حل: ابتدا معادله مفسّر را تشکیل می دهیم:

$$y^{(4)} - y = 0$$

$$t_4 - 1 = 0 \rightarrow (t^2 - 1)(t^2 + 1) = 0 \rightarrow t_1 = 1 , t_2 = -1 , t_3 = i , t_4 = -i$$

جواب عمومی: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$

حالت چهارم: معادله مفسّر دارای ریشه مختلط تکراری باشد.

فرض کنید پس از تجزیه معادله مفسّر قسمتی که ریشه مختلط دارد، تکراری باشد یعنی به توان m. در این صورت 2m جواب مربوط به این قسمت به صورت تکراری خواهد بود.

$$\begin{aligned}
&c_1 e^{px} \cos qx + c_2 e^{px} \sin qx \\
&c_3 x\, e^{px} \cos qx + c_2 x\, e^{px} \sin qx \\
&c_5 x^2 e^{px} \cos qx \ , \ c_6 x^2 e^{px} \sin qx \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&c_{2m-1} x^{m-1} e^{px} \cos qx \ , \ c_{2m} x^{m-1} e^{px} \sin qx
\end{aligned}$$

و آن را به صورت زیر بیان می کنیم.

$$e^{px}(c_1 + c_{2x} + \mathbf{L} + c_m x^{m-1}) \cos qx + e^{px}(c_{m+1} + c_{m+2} x + \mathbf{L} + c_{2m} x^{m-1}) \sin qx$$

مثال (۶-۳۸):

جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y^{(6)} + y^{(4)} - y'' - y = 0$ را بنویسید.

حل: ابتدا معادله مفسّر را تشکیل می دهیم:

$$\begin{aligned}
&t^6 + t^4 - t^2 - 1 = 0 \\
&t^4 (t^2 + 1) - (t^2 + 1) = 0 \\
&(t^2 + 1)(t^4 - 1) = (t^2 - 1)(t^2 + 1)^2 \\
&= (t^2 + 1)^2 (t - 1)(t + 1) = 0
\end{aligned}$$

پس معادله مفسّر دارای ریشه های $t_1 = 1 \ , \ t_2 = -1 \ , \ t_3 = t_4 = i \ , \ t_5 = t_6 = -i$ می باشد.

و جواب عمومی به صورت

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + (c_3 + c_4 x) \cos x + (c_5 + c_6 x) \sin x$$

تذکّر با انتخاب بسمبول $D^n = \dfrac{d^n}{dx^n}$ $\mathbf{L}$ $D^2 = \dfrac{d^2}{dx^2}$ $D = \dfrac{d}{dx}$ معادله دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت به فرم زیر در می آید.

$$(D^n + a_1D^{n-1} + \ldots a_{n-1}D + a_n)y = 0$$

مثال (۶-۳۹):

جواب عمومی معادله دیفرانسیل $D^2(D-1)^3(D^2+4)^2(D^2+2D+2)(D+1)y=0$ را بنویسید.

حل: با توجّه به $F(D)$ ریشه های معادله مفسّر

$$t_1 = t_2 = 0\,,\ t_3 = t_4 = t_5 = 1\,,\ t_6 = 2i = t_7\ ,\ t_8 = t_9 = -2i\ ,\ t_{10} = -1+i\ ,\ t_{11} = -1-i\ ,\ t_{12} = -1$$

و جواب عمومی

$$y = c_1 + c_2x + (c_3 + c_4x + c_5x^2)e^x + (c_6 + c_7x)\cos 2x + (c_8 + c_9x)\sin 2x + e^{-x}(c_{10}\cos x + c_{11}\sin x) + c_{12}e^{-x}$$

مثال (۶-۴۰):

جواب خصوصی معادله دیفرانسیل را پیدا کنید.

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

حل: معادله مفسّر را تشکیل می دهیم:

$$t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$$
$$t_1 = 1\,,\ t_2 = 1\,,\ t_3 = 1$$

و جواب عمومی معادله به صورت $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^x$ است.

6-6 معادلات خطی غیرهمگن مرتبه دوّم

صورت کلّی این معادلات به فرم $y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = f_3(x)$ می باشد و $f_1(x)$ و $f_2(x)$ را ضرایب می نامند.

قضیه: جواب عمومی معادله به فرم مجموع دو جواب $y_h(x)$ و $y_p(x)$ می باشد که $y_h(x)$ جواب عمومی معادله همگن متناظر است. یعنی:

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = 0$$

و y_p یک جواب ساده بدون پارامتر، معادله می باشد. یعنی جواب عمومی معادله به فرم

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

قضیه: اگر $f_3(x)$ به فرم مجموع چند تابع به فرم زیر باشد.

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = r_1(x) + r_2(x) + \ldots + r_k(x)$$

و فرض کنید $y_1(x)$ یک جواب معادله

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = r_1(x)$$

و فرض کنید $y_2(x)$ یک جواب معادله

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = r_2(x)$$

و به همین ترتیب $y_k(x)$ یک جواب معادله

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = r_k(x)$$

باشد، آن گاه $y(x) = y_1(x) + y_2(x) + \mathbf{L} + y_k(x)$ یک جواب معادله خواهد بود.

مثال (۶-۴۱):

نشان دهید $y_p = e^x$ جواب خصوصی معادله $y'' + y = 2e^x$ است.

$$y_p = e^x \rightarrow y'' = e^x \rightarrow e^x + e^x = 2e^x$$

برای به دست آوردن جواب عمومی باید از معادله همگن استفاده نمود.

$$y'' + y = 0$$

معادله مفسر را تشکیل می دهیم.

$$t^2 + 1 = 0$$
$$t_1 = i \quad t_2 = -i$$
$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x \rightarrow y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + e^x$$

مثال (۶-۴۲):

نشان دهید $y_p = x \sin x$ یک جواب معادله $y'' + y = 2\cos x$ باشد.

حل:

$$y_p = x \sin x \rightarrow y' = \sin x + x \cos x$$
$$y'' = \cos x + \cos x + x(-\sin x) = 2\cos x - x \sin x$$
$$2\cos x - x \sin x + x \sin x = 2\cos x$$

برای یافتن جواب عمومی از معادله همگن متناظر استفاده می کنیم.

$$t^2 + 1 = 0 \rightarrow t_1 = i \ , \ t_2 = -i$$
$$\rightarrow y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \sin x + c_4 e^x$$

حال روش به دست آوردن جواب خصوصی $y_p(x)$ را بررسی می کنیم. ساده ترین روش، روش ضرایب نـامعیّن اسـت. از این روش فقط در مورد معادلات خطی با ضرایب ثابت می توان استفاده کرد.

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$$

و $f(x)$ باید تابعی باشد که در حالت های مختلف ذکر می شود. در این روش سـعی مـی کنـیم y_p را مشـابه بـا $f(x)$ انتخاب کنیم.

روش ضرایب نامعین

از این روش فقط در حالات زیر می توان استفاده کرد.

حالت اوّل: اگر $f(x)$ به صورت یک چند جمله ای از درجه n باشد.

مثال (۶-۴۱):

جواب عمومی معادله $y'' - 4y = 2$ را به دست آورید.

حل: ابتدا جواب عمومی معادله همگن $y'' - 4y = 0$ را پیدا می کنیم. ابتدا معادله مفسّر را تشکیل می دهیم.

$$t^2 - 4 = 0$$
$$(t-2)(t+2) = 0 \rightarrow t_1 = 2 \ , \ t_2 = -2$$
$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

حال برای به دست آوردن y_p، چون $f(x)$ یک عدد است y_p را به صورت یک عدد انتخاب کرده یعنی $y_p = A$، حـال y_p و y''_p را در آن قرار می دهیم.

$$y_p = A \rightarrow y''_p = 0 \rightarrow 0 - 4A = 2 \rightarrow A = -\frac{1}{2}$$
$$y_p = -\frac{1}{2}$$
$$\rightarrow y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}$$

مثال (۶-۴۲):

جواب عمومی معادله $y'' - 4y' = 4$ را پیدا می کنیم.

حل: ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را پیدا می کنیم.

$$y'' - 4y' = 0$$

معادله مفسر را تشکیل می دهیم و ریشه های آن را حساب می کنیم.

$$t^2-4t=0 \rightarrow t(t-4)=0 \rightarrow t_1=0 \quad t_2=4$$

و جواب عمومی معادله همگن متناظر به صورت زیر است:

$$y_h=c_1+c_2e^{4x}$$

می باشد.

حال اگر y_p را به صورت یک عدد انتخاب کنیم. مثلاً $y_p=A$ ، y'_p و y''_p را در معادله قرار می دهیم.

$$y_p=A \rightarrow y'_p=y''_p=0$$
$$0+0=4$$

علت آن که y_p را نمی توان یک عدد انتخاب کرد آن است که در جواب معادله همگن c_1 وجود دارد و علت آن کـه c_1 در جواب معادله همگن وجود دارد آن است که در معادله مفسّر ریشه 0 وجود دارد.

حال y_p را به صورت Ax انتخاب می کنیم خواهیم داشت:

$$y_p=Ax \rightarrow y'_p=A\ ,\ y''_p=0$$
$$0-4A=4 \rightarrow A=-1 \rightarrow y_p=-x$$

و جواب عمومی به صورت $y=c_1+c_2e^{4x}-x$ خواهد بود.

مثال (۶-۴۳):

جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''+2y'+y=4x^2$ را بنویسید.

حل: ابتدا جواب عمومی معادله همگن متناظر را پیدا می کنیم.

$$y''+2y'+y=0$$
$$t^2+2t+1=0$$
$$\sqrt{\Delta}=\sqrt{4-4(1)(1)} \Rightarrow t_1=t_2=\frac{-2}{2}=-1$$
$$y_p=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}$$

حال برای به دست آوردن جواب خصوصی: چون طرف دوم معادله یک چند جمله ای درجه 2 است.

پس y_p را نیز به صورت یک چند جمله ای درجه 2 انتخاب می کنیم.

$$y_p=Ax^2+Bx+C \rightarrow y'_p=2Ax+B \rightarrow y''_p=2A$$

حال در معادله اصلی جایگزین می کنیم.

$$2A+2(2Ax+B)+Ax^2+Bx+C=4x^2$$
$$Ax^2+(B+4A)x+2A+2B+C=4x^2 \to A=4 \to B=-16$$
$$2(4)+2(-16)+C=0 \to C=32-8=24$$

$$y_p=4x^2-16x+24$$
$$\to y=(c_1+c_2x)e^{-x}+4x^2-16x+24$$

قانون کلّی: اگر $f(x)$ [طرف دوم معادله غیرهمگن با ضرایب ثابت] یک چند جمله ای از درجه n باشد، جواب خصوصی را به فرم زیر در نظر می گیریم:

$y_p=x^m$ (یک چند جمله ای کامل از در n)

که m تعداد ریشه های صفر معادله مفسر می باشد.

مثال (۶-۴۶):

فرم جواب خصوصی معادله $y'''-2y''=x^3+1$ را بنویسید.

حل: با توجه به این که معادله مفسر دارای ریشه های $t_1=t_2=0\ \ t_3=2$ $t^3-2t^2=0$ می باشد دو ریشه آن صفر می باشد در نتیجه

$$y_p=x^2(Ax^3+Bx^2+Cx+D)$$

قانون کلّی: اگر $f(x)$ در معادله غیرهمگن با ضرایب ثابت به صورت

$$f(x)=M(x)e^{px}$$

باشد که در آن $M(x)$ یک چند جمله ای از درجه n باشد آن گاه y_p را به فرم

$y_p=x^m e^{px}$ (یک چند جمله ای کامل از درجه n)

قانون کلّی: اگر $f(x)$ در معادله غیرهمگن با ضرایب ثابت به صورت

$$f(x)=M(x)\cos qx+N(x)\sin qx$$

که $M(x)$ و $N(x)$ دو چند جمله ای باشند، قانون کلّی زیر را خواهیم داشت.

$$y_p=x^m[R(x)\cos qx+S(x)\sin qx]$$

که m تعداد ریشه های $(+iq)$ معادله مفسّر و $R(x)$ و $S(x)$ دو چند جمله ای کامل از درجه n می باشد و n بزرگ ترین درجه بین $M(x)$ و $N(x)$ است.

مجموعه تست

۱- جواب معادله $y' \operatorname{tg} x = 3 + y$ کدام است؟

1) $y = c\sin x - 3$ 2) $y = \cos x + 3$ 3) $y = 1 + \tan^2 x$ 4) $\cot x$

۲- جواب معادله $2y' = \frac{x(2+y)}{y(x+3)}$ کدام است؟

1) $y - 4\ln|2+y| - x + 3\ln|x+3| = 0$ 2) $y - 2\ln|2+y| - x + 3\ln|x+3| = 0$

3) $2y - 4\ln|2+y| - x + 3\ln|x+3| = 0$ 4) $y = 4\ln|2+y| + 3\ln|x|$

۳- جواب معادله دیفرانسیل $y' = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$ کدام گزینه است؟

1) $1 + y^2 = \frac{cx^2}{1+x^2}$ 2) $1 + y^2 = \frac{x^2+1}{x}$ 3) $y^2 = \frac{x^2}{1+x^2} + c$ 4) $y^2 = \frac{x}{1+x^2} + c$

۴- جواب معادله دیفرانسیل $y' = \tan(x+y) - 1$ کدام گزینه است؟

1) $y = \sin^{-1} ce^x$ 2) $y = \sin ce^x$ 3) $y = \sin^{-1} ce^x - x$ 4) $y = \sin ce^x - x$

۵- جواب معادله دیفرانسیل $y' = 1 + \frac{1}{x-y}$ کدام گزینه است؟

1) $(x-y)^2 = -2x + c$ 2) $(x+y)^2 = -2x + c$

3) $(x+2y)^2 = 2x + c$ 4) $(x-2y)^2 = 2x + c$

۶- معادله دیفرانسیل $(x^3 + y^3)dx + 3xy^2 dy = 0$ دارای چه جوابی است؟

1) $x^2 + 4xy^2 = c$ 2) $x^4 + 4xy^3 = c$ 3) $x^4 + xy^3 = 0$ 4) $4x^2 + 3xy^3 = 0$

۷- جواب معادله دیفرانسیل $y' = \frac{y-x}{x+y}$ کدام گزینه است؟

1) $\ln|x^2 + y^2| + 2\tan^{-1}\frac{y}{x} = c$ 2) $\ln|2x + 2y| + 2\tan^{-1}\frac{y}{x} = c$

3) $\ln|x^2 + 2y| + 2\tan^{-1}\frac{y}{x} = c$ 4) $\ln|x^2 + y^2| + 2\tan\frac{y}{x} = c$

۸- جواب معادله دیفرانسیل زیر کدام گزینه است؟

$$y' = \frac{x+y}{1-x-y}$$

1) $y = \frac{1}{2}(x-y) + c$
2) $y = (x+y)^2 + c$
3) $y = \frac{1}{2}(x+y) + c$
4) $y = \frac{(x+y)^2}{2} + c$

۹- معادله دیفرانسیل $y' = \frac{x^3 - y}{x}$ را حل کنید. جواب کدام گزینه است؟

1) $-xy + x^4 = c$
2) $xy + x^4 = c$
3) $-xy + \frac{x^4}{4} = c$
4) $xy - x^3 = c$

۱۰- جواب معادله دیفرانسیل $\cos y\, dx + (y^2 - x\sin y)\, dy = 0$ کدام گزینه است؟

1) $\cos y + \frac{y^3}{3} = c$
2) $x\cos y + \frac{1}{3}y^3 = c$
3) $\cos y + y^3 = c$
4) $y^3 + \sin y = c$

۱۱- جواب معادله دیفرانسیل $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$ کدام است؟

1) $e^{2x^2}(x^2 + x)$
2) $e^{x^2}(x^2 + c)$
3) e^{x^2}
4) xe^{2x}

۱۲- جواب معادله دیفرانسیل $(1+x^2)y' = 2xy + (1+x^2)^2$ کدام است؟

1) $x^3 + cx^2 + x + c$
2) $\ln x + e^x$
3) $x^3 + 2e^x$
4) $e^x + x$

۱۳- جواب معادله دیفرانسیل $xy' + y = 2x^2 y y' \ln y$ کدام گزینه است؟

1) $e^y + cy$
2) $ye^y + \ln y$
3) $-y(\ln y)^2 + cy$
4) $\ln y + cy$

۱۴- معادله دیفرانسیل $y' - 2 = 2xe^{-y}$ را حل کنید. جواب کدام گزینه است؟

1) $ce^{2x} + 2x$
2) $xe^{3x} + x$
3) $ce^{3x} - x - \frac{1}{3}$
4) $e^{-6x} + x$

۱۵- جواب عمومی معادله زیر کدام گزینه است؟

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

1) $c_1 e^{4x} + c_2 e^x$
2) $c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$
3) $c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x}$
4) $c_1 e^{2x} + c_2 e^x$

۱۶- جواب معادله دیفرانسیل زیر کدام گزینه است؟

$$y'' + y' + 2y = 0$$

1) $e^{\frac{1}{2}x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$

2) $Ax\sin x + Bx\cos x$

3) $e^{\frac{1}{2}x}(A\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x)$

4) $e^{\frac{3}{2}x}(A\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x)$

۱۷- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''' - y'' - y' + y = 0$ کدام گزینه است؟

1) $c_1 e^{-x} + c_2 x e^{x}$ 2) $c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$

3) $c_1 e^{x} + c_2 x e^{x}$ 4) $c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 e^{-x}$

۱۸- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$ کدام گزینه است؟

1) $c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$ 2) $c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 e^{-2x}$

3) $c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{x}$ 4) $c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

۱۹- جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$ کدام گزینه است؟

1) $c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$ 2) $c_1 e^{x} + c_2 x e^{-x}$

3) $e^{x}(c_1 + c_2 x) + e^{-x}(c_3 + c_4 x)$ 4) $c_1 e^{-x} + c_2 x e^{x}$

۲۰- جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ با شرایط اوّلیه $y''(0) = 3$، $y'(0) = 2$ و $y(0) = 1$ کدام گزینه است؟

1) $(1+x)e^{x}$ 2) $(1-x)e^{x}$ 3) $1 + xe^{x} + x^2 e^{x}$ 4) $x^2 e^{x} + x^3 e^{x}$

۲۱- یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y''' - 2y'' + y = \cos x + e^{2x}$ کدام است؟

1) $y_p = e^{2x} + \frac{1}{10}(\cos x - 3\sin x)$ 2) $y_p = 2e^{2x} + \frac{1}{10}(3\cos x - 3\sin x)$

3) $y_p = e^{2x} + \frac{1}{10}(3\cos x - \sin x)$ 4) $y_p = 2e^{2x} + \frac{1}{10}(\cos x - 3\sin x)$

۲۲– معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} - y = xy^5$ برابر است با:

1) $y^4 = \frac{1}{ce^{-2x} + x^2 + c}$ 2) $y = xe^{-2x} + x^2 + c$

3) $\frac{1}{y^4} = -x + \frac{1}{4} + ce^{-4x}$ 4) $y^2 = ce^{-2x} + 2x + c$

۲۳– جواب معادله دیفرانسیل $y' = 2xy$ برابر است با:

1) $y = ce^{\frac{1}{x}}$ 2) $y = \frac{1}{e^x}$ 3) $y = ce^{x^2}$ 4) ce^{-x^2}

۲۴– جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''' - 5y'' + 3y' + y = b$ کدام است؟

1) $y_c = Ae^x + e^{2x}(B\cos\sqrt{5}x + C\sin\sqrt{5}x)$

2) $y_c = Ae^x + Be^{(2+\sqrt{5})x} + ce^{(2-\sqrt{5})x} + b$

3) $y_c = Ae^x + e^{2x}(B\cos\sqrt{3}x + C\sin\sqrt{3}x)$

4) $y_c = Ae^{-2x} + Be^{(2+\sqrt{5})x} + ce^{(2-\sqrt{5})x} + b$

۲۵– جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $\frac{dy}{dx} = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{y}$ با شرایط اوّلیه $(y = 1 , x = 0)$ کدام است؟

1) $y^2 = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}$ 2) $y = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}$

3) $y^2 = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}$ 4) $y = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}$

۲۶– معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$y' = 3x^2e^{-y}$

1) $y' = \frac{3x^2}{x^3 + c}$ 2) $y' = (x^3 + c)\frac{1}{3}$ 3) $y' = \frac{x^2 + c}{x^2 - c}$ 4) $y' = \frac{x^2 - 1}{x} + c$

۲۷– جواب معادله دیفرانسیل به صورت $\frac{dy}{dx} - y = xy^5$

1) $\frac{1}{y^4} = -x + \frac{1}{4} + ce^{-4x}$ 2) $y = x^2 + x - \frac{1}{4} + e^x$

3) $y = x^3 + x^2 + \frac{1}{4} + e^x$ 4) $y = -x^2 + \frac{1}{x} + c + B^x$

۲۸– جواب دوم معادله نوسانگر خطی به معادله $y'' + y = 0$ به صورت:

1) $y_2 = -\cos x$ 2) $y = \cos x$ 3) $y = -\sin x$ 4) $y = \sin x \cos x$

پاسخنامه سوالات تستی

۱- گزینه 1 صحیح است، زیرا:

$$\frac{dy}{dx}\tan x = 3+y \rightarrow \frac{dy}{(3+y)} = \frac{dx}{\tan x} = \cot x\,dx$$
$$\rightarrow \ln|3+y| = \ln|\sin x| + \ln c$$
$$\rightarrow (3+y) = c\times\sin x \rightarrow y = c\sin x - 3$$

2- گزینه 3 صحیح است، زیرا:

$$2\frac{dy}{dx} = \frac{x(2+y)}{y(x+3)}$$
$$\frac{2dy\,y}{(2+y)} = \frac{x\,dx}{(x+3)} \rightarrow 2\frac{y\,dy}{(2+y)} = \frac{x\,dx}{x+3}$$
$$2\{1-\frac{2}{2+y}\}dy = (1-\frac{3}{x+3})dx$$
$$2y - 4\ln|2+y| = x - 3\ln|x+3|$$

3- گزینه 1 صحیح است، زیرا:

$$\frac{dy\,y}{(1+y^2)} = \frac{dx}{(1+x^2)x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(1+x^2)} = \frac{A+Ax^2+Bx^2+Cx}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x(1+x^2)}$$
$$\rightarrow A=1,\ B=-1,\ C=0$$
$$\rightarrow \frac{1}{2}\ln|1+y^2| = \int\frac{A}{x}dx + \int\frac{Bx+C}{1+x^2}$$
$$\frac{1}{2}\ln|1+y^2| = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + \ln C$$
$$\ln|(1+y^2)^{\frac{1}{2}}| = \ln|x| + \ln|(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}| + \ln C$$
$$\rightarrow (1+y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{Cx}{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}} \rightarrow 1+y^2 = \frac{Cx^2}{(1+x^2)}$$

4- گزینه 2 صحیح است، زیرا:

$$y' = \tan(x+y) - 1$$
$$x+y = u \rightarrow 1+y' = u' \rightarrow y' = u' - 1$$
$$u' - 1 = \tan u - 1 \rightarrow \frac{du}{dx} = \tan u \rightarrow du\cot u = dx \rightarrow \int\cot u\,du = \int dx \rightarrow \ln|\sin u| = x + c \rightarrow \sin u = e^{x+c}$$
$$\rightarrow \sin(x+y) = ce^x \rightarrow x+y = \sin^{-1}ce^x \rightarrow y = \sin^{-1}ce^x - x$$

5- گزینه 1 صحیح است. زیرا:

$$y'=1+\frac{1}{x-y} \to x-y=u \to 1-y'=u' \to 1-u'=y' \to y'=1+\frac{1}{u} \to 1-u'=1+\frac{1}{u} \to -\frac{du}{dx}=\frac{1}{u} \to -du\,u=dx$$

$$\to \frac{u^2}{2}+c=-x \to u^2+c=-2x \to (x-y)^2+c=-2x \to (x-y)^2=-2x+c$$

6- گزینه 2 صحیح است. زیرا:

$$(x^3+y^3)\,dx+3x\,y^2dy=0$$

$\to$ معادله همگن می باشد $\lambda^3(x^3+y^3)\,dx+3\lambda^3x\,y^2dy=f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^3 f(x,y)$

$$y=Vx \to dy=V\,dx+x\,dV$$

$$\to (x^3+V^3x^3)\,dx+3x(x^2V^2)(x\,dV+V\,dx)=0$$

طرفین تقسیم بر x^3 شود.

$$(1+V^3)\,dx+3(V^2)(x\,dV+V\,dx)=0$$

$$(1+V^3+3V^3)\,dx=(-3V^2x)\,dV$$

$$-\frac{dx}{x}=\frac{3V^2dV}{(1+4V^3)}$$

$$\to \frac{dx}{x}+\frac{3V^2dV}{1+4V^3}=0$$

$$\ln|x|+\frac{1}{4}\ln|1+4V^3|=\ln|c|$$

$$\ln|x|(1+4V^3)^{\frac{1}{4}}|=\ln c$$

$$x(1+4V^3)^{\frac{1}{4}}=c$$

$$x^4(1+4V^3)=c$$

$$x^4+4x^4\frac{y^3}{x^3}=c$$

$$x^4+4x\,y^3=c$$

7- گزینه 1 صحیح است. زیرا:

$\left.\begin{array}{l} x\to\lambda x \\ y\to\lambda y\end{array}\right\} \to$ معادله همگن است $\qquad y=Vx \to dy=V\,dx+x\,dV$

$$\rightarrow (V\,dx + x\,dV) = \frac{Vx - x}{x + Vx}\,dx$$
$$\rightarrow V\,dx + x\,dV = \frac{V-1}{1+V}\,dx$$
$$V(1+V)\,dx + (1+V)\,x\,dV = (V-1)\,dx$$
$$\{V + V^2 - V + 1\}\,dx = -(1+V)x\,dV$$
$$\rightarrow (V^2+1)\,dx = -(1+V)\,dV\,x$$
$$\rightarrow -\frac{dx}{x} = \frac{(1+V)\,dV}{(V^2+1)}$$
$$\rightarrow -\ln|x| = \int\frac{dV}{1+V^2} + \int\frac{V\,dV}{V^2+1}$$
$$\Rightarrow -\ln|x| = \tan^{-1}V + \frac{1}{2}\ln|V^2+1| + \ln c$$
$$\rightarrow \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|V^2+1| + \tan^{-1}V = c$$
$$2\ln|x| + \ln|V^2+1| + 2\tan^{-1}V = c$$
$$\rightarrow \ln|x^2(1+V^2) + 2\tan^{-1}V = c$$
$$\ln|x^2+y^2| + 2\tan^{-1}\frac{y}{x} = c$$

8- گزینه 4 صحیح است. زیرا:

$$y' = \frac{ax + by + c}{ex + hy + d} \qquad ah - be = (1)(-1) - (1)(-1) = 0$$

$$y' = \frac{x+y}{-x-y+1} \rightarrow$$
$$u = x + y \rightarrow u' = 1 + y' \rightarrow y' = u' - 1$$
$$\rightarrow (u'-1) = \frac{u}{-u+1} = \frac{u-1+1}{-u+1} = -1 + \frac{1}{-u+1}$$
$$\rightarrow u' = \frac{1}{-u+1} \rightarrow (1-u)\,du = dx$$
$$u - \frac{u^2}{2} = x + c$$
$$x + y - \frac{(x+y)^2}{2} = x + c$$
$$y = \frac{(x+y)^2}{2} + c$$

9- گزینه 3 صحیح است. زیرا:

$$x\,dy=(x^3-y)\,dx$$
$$-x\,dy+(x^3-y)\,dx=0$$

$$\frac{\partial(-x)}{\partial x}=\frac{\partial(x^3-y)}{\partial y}=-1\rightarrow$$ معادله دیفرانسیل کامل است

$$\rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=(x^3-y)\rightarrow u=\int(x^3-y)\,dx+f(y)\rightarrow u=\frac{x^4}{4}-yx+f(y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-x+\frac{d\,f(y)}{dy}=-x$$
$$\rightarrow\frac{d\,f(y)}{dy}=0\rightarrow f(y)=cte$$
$$\rightarrow u=\frac{x^4}{4}+-yx+cte=c$$
$$\rightarrow\frac{x^4}{4}-yx=cte$$

10- گزینه 2 صحیح است. زیرا:

$$\frac{\partial\cos y}{\partial y}=\frac{\partial(x^2-x\sin y)}{\partial x}=-\sin y\rightarrow$$ معادله دیفرانسیل کامل است

$$\rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\cos y\rightarrow u=\int\cos y\,dx+f(y)\rightarrow u=\cos y\,x+f(y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\sin(y)\times x+\frac{d\,f(y)}{dy}=y^2-x\sin y$$
$$\rightarrow\frac{d\,f(y)}{dy}=y^2\rightarrow f(y)=\frac{y^3}{3}$$
$$\rightarrow\cos y\,x+\frac{y^3}{3}=c$$

11- گزینه 2 صحیح است. زیرا:

$$f(x)=-2x\ \rightarrow\ g(x)=\int f(x)\,dx=\int-2x\,dx=-x^2$$
$$q(x)=2x\,e^{x^2}\quad y=e^{-g(x)}\left[\int q(x)\,e^{g(x)}\,dx+c\right]$$
$$y=e^{+x^2}\left[\int 2x\,e^{x^2}\,e^{-x^2}dx+c\right]=e^{x^2}(x^2+c)$$

-12 گزینه 1 صحیح است. زیرا:

$$(1+x^2)y' = 2xy + (1+x^2)^2 \to y' - \frac{2x}{(1+x^2)}y - (1+x^2) = 0$$

$$f(x) = \frac{-2x}{1+x^2} \quad q(x) = (1+x^2)$$

$$\to g(x) = \int f(x)\,dx = \int \frac{-2x}{1+x^2}\,dx = -\ln|1+x^2|$$

$$y = e^{-g(x)}\left[\int q(x)e^{g(x)}dx + c\right] = e^{\ln|1+x^2|}\left[\int (1+x^2)e^{-\ln|1+x^2|}\,dx + c\right] = (1+x^2)\left[\int (1+x^2)\frac{1}{(1+x^2)}dx + c\right] = (1+x^2)(x+c)$$

$$= x + c + x^3 + x^2c = x^3 + cx^2 + x + c$$

-13 گزینه 3 صحیح است. زیرا:

$$xy' + y = 2x^2 y\, y' \ln y \;\to\; y'(x - 2x^2 y \ln y) + y = 0$$

$$y' = \frac{-y}{x - 2x^2 y \ln y} \;\to\; \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x - 2x^2 y \ln y}$$

$$\to \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{y}x + 2x^2 \ln y \to \frac{dx}{dy} + \frac{1}{y}x = 2x^2 \ln y$$

معادله دیفرانسیل برنولی می باشد طرفین را تقسیم بر x^2 می کنیم.

$$x^{-2}\frac{dx}{dy} + x^{-1}\frac{1}{y} = 2\ln y$$

از تغییر متغیّر $u = x^{-2+1} = x^{-1}$ استفاده شود.

$$u = x^{-1} \to \frac{du}{dy} = -x^{-2}\frac{dx}{dy}$$

$$\to -\frac{du}{dy} + u(-\frac{1}{y}) = 2\ln y \to \frac{du}{dy} + \frac{1}{y}u = -2\ln y$$

حال این معادله خطی مرتبه اوّل است.

$$f(y) = -\frac{1}{y} \;,\; q(y) = -2\ln y$$

$$g(y) = \int f(y)\,dy = -\int \frac{dy}{y} = -\ln y$$

$$y = e^{-g(y)}\left[\int q(y)e^{g(y)}dy + c\right] = e^{\ln y}\left[\int -2\ln y\, e^{-\ln y}\,dy + c\right] = y\left[\int -\frac{2}{y}\ln y\,dy + c\right] = y\left[-2\frac{(\ln y)^2}{2} + c\right] = y\left[-(\ln y)^2 + c\right]$$

$$= -y(\ln y)^2 + cy$$

-14 گزینه 3 صحیح است. زیرا:

حل: ابتدا طرفین را در e^y ضرب می کنیم.

$y' - 3 = 3x\,e^{-y}$

$y'e^{y} - 3e^{y} = 3x$

حال $u = e^{y} \rightarrow u' = y'e^{y}$

$u' - 3u = 3x$

معادله خطی مرتبه اوّل می باشد.

$f(x) = -3 \;,\; q(x) = 3x$

$g(x) = \int f(x)\,dx = \int -3\,dx = -3x$

$u = e^{-g(x)}\left[\int q(x)\,e^{g(x)}dx + c\right] = e^{3x}\left[\int 3x\;e^{-3x}\,dx + c\right] = e^{3x}\left[-\int -3x\;e^{-3x}dx + c\right] = e^{3x}\left[-\int v\,dv + c\right]$

$-3e^{-3x}\,dx = du \;,\; x = v \rightarrow dv = dx$

$u = e^{-3x} \rightarrow$

$= e^{3x}\left[-uv + \int u\,dv + c\right] = e^{3x}\left[-e^{-3x}\;x + \int e^{-3x}\,dx + c\right] = e^{3x}\left[-e^{-3x}\;x + \dfrac{e^{-3x}}{-3} + c\right] = -x - \dfrac{1}{3} + c\,e^{3x}$

15- گزینه 4 صحیح است. زیرا:

ابتدا معادله مفسّر را تشکیل می دهیم.

$y'' - 3y' + 2y = 0$

$t^2 - 3t + 2 = 0 \qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)} = \sqrt{1} = 1$

$t = \dfrac{3 \pm 1}{2} \rightarrow t_1 = 2$

$t_2 = 1$

$y = c_1\,e^{2x} + c_2\,e^{x}$

16- گزینه 3 صحیح است. زیرا:

ابتدا معادله مفسّر را تشکیل می دهیم:

$y'' + y' + 2y = 0$

$t^2 + t + 2 = 0$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(1)^2 - 4(1)(2)} = \sqrt{-7} = \sqrt{7}\,i$

$t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}\,i}{2} \qquad t_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{7}}{2}i$

$t_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{7}}{2}i$

$\rightarrow p = \dfrac{1}{2} \;,\; q = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

$y = e^{px}(A\cos qx + B\sin qx)$

$y = e^{\frac{1}{2}x}(A\cos\dfrac{\sqrt{7}}{2}x + B\sin\dfrac{\sqrt{7}}{2}x)$

17- گزینه 4 صحیح است. زیرا:

ابتدا معادله مفسّر را تشکیل می دهیم:

$$t^3 - t^2 - t + 1 = 0$$
$$(t-1)^2 \times (t+1) = 0 \qquad t_1 = t_2 = 1\ ,\ t_3 = -1$$
$$y_1 = e^x\ ,\ y_2 = x e^x\ ,\ y_3 = e^{-x}$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x}$$

18- گزینه 2 صحیح است. زیرا:

ابتدا معادله مفسّر را تشکیل می دهیم:

$$t^3 - 2t^2 - 4t + 8 = 0$$
$$t^2(t-2) - 4(t-2) = 0$$
$$(t-2)(t^2-4) = 0 \rightarrow (t-2)^2(t+2) = 0$$
$$t_1 = t_2 = 2 \rightarrow t_3 = -2$$
$$y_1 = e^{2x} \quad y_2 = x e^{2x} \quad y_3 = e^{-2x}$$

و جواب عمومی معادله به فرم زیر است:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 e^{-2x}$$

19- گزینه 3 صحیح است. زیرا:

ابتدا معادله مفسّر را تشکیل می دهیم:

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0 \rightarrow$$
$$t^4 - 2t^2 + 1 = 0 \quad t^4 - t^2 + 1 - t^2 =$$
$$t^2(t^2-1) + -1(t^2-1) = (t^2-1)(t^2-1)$$
$$t^2 = 1 \rightarrow t_1 = 1\ ,\ t_2 = 1\ ,\ t_3 = -1\ ,\ t_4 = -1$$
$$\rightarrow y_1 = e^x\ ,\ y_2 = x e^x\ ,\ y_3 = x e^{-x}\ ,\ y_4 = e^{-x}$$

جواب عمومی به صورت $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x}$

$$y = e^x (c_1 + x c_2) + e^{-x}(c_3 + c_4 x)$$

20- گزینه 1 صحیح است. زیرا:

ابتدا معادله مفسّر را تشکیل می دهیم:

$t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$

$\rightarrow (t-1)^3 = 0 \rightarrow t_1 = t_2 = t_3 = 1$

$\rightarrow y_1 = e^x \quad y_2 = x e^x \quad y_3 = x^2 e^x$ جواب عمومی $= e^x (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)$

حال شرایط اوّلیه را در آن صدق می دهیم.

$$y' = e^x (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) + (c_2 + 2c_3 x) e^x$$
$$y'' = e^x (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) + (c_2 + 2c_3 x) e^x + e^x (c_2 + 2c_3 x) + 2c_3 e^x$$
$$= e^x (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + 2c_2 + 4c_3 x + 2c_3)$$

21- گزینه 3 صحیح است. زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} y''' - 2y'' + y = \cos x \rightarrow yp_1 \\ y''' - 2y'' + y = e^{2x} \rightarrow yp_2 \end{array}\right\} y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

در معادله اول به دلیل این که سمت راست معادله یک عبارت cos است جواب خصوصی اش به صورت $A \sin x + B \cos x$ فرض شده است.

در معادله دوم به دلیل این که سمت راست معادله به صورت e^{2x} است. جواب خصوصی به صورت $c e^{2x}$ فرض می شود.

$$y_p = A \cos x + B \sin x \rightarrow y'_p = -A \sin x + B \cos x$$
$$y''_p = -A \cos x - B \sin x \rightarrow y'''_p = A \sin x - B \cos x$$

$$\rightarrow A \sin x - B \cos x - 2(-A \cos x - B \sin x) + A \cos x + B \sin x = \cos x$$
$$(A + 2B + B) \sin x + (-B + 3A - 1) \cos x = 0$$
$$A + 3B = 0 \rightarrow A = -3B$$
$$-B + 3A - 1 = 0 \qquad -B(3)(-3B) - 1 = 0$$
$$10B = -1 \rightarrow B = -\frac{1}{10}$$
$$A = -3B \rightarrow A = \frac{3}{10}$$
$$y_{p_1} = \frac{3}{10} \cos x - \frac{1}{10} \sin x$$

$$y''' - 2y'' + y = e^{2x} \rightarrow 2_{p_2} = c e^{2x} \rightarrow y'_{p_2} = 2c e^{2x}$$
$$y''_{p_2} = 4c e^{2x} \rightarrow y'''_{p_2} = 8c e^{2x}$$

$$8c e^{2x} - 2(4c e^{2x}) + c e^{2x} = e^{2x}$$
$$8c - 8c + c = 1 \rightarrow c = 1 \rightarrow y_{p_2} = e^{2x}$$
$$\rightarrow y_p = \frac{3}{10} \cos x - \frac{1}{10} \sin x + e^{2x}$$

22- گزینه 3 صحیح است. زیرا:

$\frac{dy}{dx}-y=xy^5$ معادله برنولی است

$y^{-5+1}=y^{-4}=u \rightarrow -4y^{-5}\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx} \rightarrow y^{-5}\frac{dy}{dx}-y^{-4}=x$

$-\frac{1}{4}\frac{du}{dx}-u=x \rightarrow y^{-5}\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{4}\frac{du}{dx}$ معادله مرتبه 1

$\frac{du}{dx}+4u=-4x \rightarrow f(x)=4 \rightarrow g(x)=\int f(x)\,dx$

$g(x)=\int 4\,dx=4x \qquad q(x)=-4x$

$\rightarrow u(x)=e^{-g(x)}\left[\int q(x)e^{g(x)}dx+c\right]=e^{-4x}\left[\int -4x\,e^{4x}\,dx+c\right]=e^{-4x}\left[-x\,e^{4x}+\frac{1}{16}e^{4x}+c\right]$

$u(x)=c\,e^{-4x}+(\frac{1}{4}-x)=\frac{1}{y^4}$

$e^{4x}\,dx=dv$

$\rightarrow v=\frac{1}{4}e^{4x}$

$du=dx \rightarrow u=x$

توجه: $-\int 4x\,e^{4x}\,dx=-4\int x\,e^{4x}\,dx$

$=-4\left\{\frac{1}{4}e^{4x}x-\int\frac{1}{4}e^{4x}\,dx\right\}$

$=x\,e^{4x}+\int e^{4x}\,dx=-x\,e^{4x}+\frac{1}{4}e^{4x}+c$

$\Rightarrow u(x)=-x+\frac{1}{4}+c\,e^{-4x}=y^{-4}$

$\rightarrow \frac{1}{y^4}=c\,e^{-4x}+\frac{1}{4}-x$

23- گزینه 3 صحیح است. زیرا:

$\frac{dy}{dx}=2xy \rightarrow dx\,2x=\frac{dy}{y} \rightarrow \ln|y|=x^2+c \rightarrow y=c\,e^{x^2}$

24- گزینه 2 صحیح است. زیرا:

ابتدا جواب معادله همگن را می یابیم.

$y'''-5y''+3y'+y=0$

معادله مفسر را تشکیل می دهیم:

$$t^3-5t^2+3t+1=0$$
$$t_1=1 \quad t_2=(\sqrt{5}+2) \quad t_2=(-\sqrt{5}+2)$$
$$y(x)=c_1e^x+c_2e^{(\sqrt{5}+2)x}+c_3e^{(2-\sqrt{5})x}+b$$

25- گزینه 3 صحیح است. زیرا:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x\sqrt{1+x^2}}{y} \to y\,dy=x\sqrt{1+x^2}\,dx \to \int y\,dy=\int x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx \to \frac{y^2}{2}=\frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c$$
$$\to y^2=\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+c \qquad (x=0\,,\ y=1) \to 1=\frac{2}{3}+c \to c=\frac{1}{3} \to y^2=\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}$$

26- گزینه هیچ کدام صحیح است. زیرا:

$$\frac{dy}{dx}=3x^2e^{-y} \to \frac{dy}{e^{-y}}=3x^2\,dx \to dy\,e^y=3x^2\,dx \to \int e^y\,dy=\int 3x^2\,dx \Rightarrow e^y=x^3+c$$

27- گزینه 1 صحیح است. زیرا:

$\frac{dy}{dx}-y=xy^5$ برنولی است

$$y^{-5}\frac{dy}{dx}-y^{-4}=x \to u=y^{-5+1}=y^{-4} \to -4y^{-5}dy=du \to y^{-5}\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{4}\frac{du}{dx} \to -\frac{1}{4}\frac{du}{dx}-u=x \to \frac{du}{dx}+4u=-4x$$

$$f(x)=4 \to g(x)=\int 4\,dx=4x \qquad q(x)=-4x$$
$$u=e^{-g(x)}\left[\int q(x)e^{g(x)}dx+c\right]$$
$$u=e^{-4x}\left[\int(-4x)\,e^{4x}\,dx+c\right]$$
$$\frac{1}{y^4}=u=c_1e^{-4x}+(\frac{1}{4}-x)$$

28- گزینه 2 صحیح است. زیرا:

$$y_1=\sin x$$
$$y_2=\cos x$$

منابع

1- حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی. مؤلف: جورج توماس- راس فینی

2- معادلات دیفرانسیل. مؤلف: دکتر مسعود نیکوکار

3- Mathematical Methods for scientists and Engineers - Donald A.Mc Quarrie

4- معادلات دیفرانسیل مقدماتی و مسائل مقدار مرزی. مؤلف: بویس- دیپریما

5- پرسش های چهارگزینه ای کنکور کارشناسی ارشد ژئوفیزیک و هواشناسی. مؤلف: دکتر داود مؤمنی

6- جزوات آموزشی (ریاضیات فیزیک) دکتر هرفردیاری استاد دانشگاه شهید بهشتی