فیزیک پزشکی و پرتوها

(قسمت دوم)

فیزیک پزشکی و پرتوها

(قسمت دوم)

فهرست مطالب

فصل اول: نسبیت خاص

نظریه نسبیت خاص در سال 1905 توسط آلبرت اینشتین ارائه گردید. اصول نسبیت خاص در دستگاههای مختصات لخت بیان می شوند. ابتدا به تعریف دستگاه مختصات لخت می پردازیم.

1-1-دستگاه مختصات لخت

یک دستگاه لخت به چارچوب مرجع مختصاتی گفته می شود که در آن قانون اول نیوتن صادق است. به عبارت دیگر اگر جسمی دریک دستگاه لخت قرار داشته باشد و هیچ نیروی خارجی خالصی به آن وارد نشود با سرعت ثابت حرکت خواهد کرد.

1-2- اصول نسبیت خاص

نسبیت خاص براساس دو اصل قرار گرفته است:

الف) قوانین فیزیک در تمام دستگاههای لخت یکسان هستند. هیچ دستگاه مختصات ارجحی وجود ندارد و شکل ریاضی یک قانون فیزیکی در تمام دستگاههای لخت یکسان باقی می ماند.

ب) سرعت نور در تمام دستگاههای لخت یکسان و مستقل از دستگاه لخت، چشمه و ناظر است. مقدار آن برابر $C = 2.997925\times10^{8}\, m/s$ می باشد.

1-3- تبدیلات لورنتس

تبدیلات لورنتس معادلات تبدیل مختصاتی هستند که با اصول موضوع الف و ب هماهنگ می باشند. روابط تبدیل از یک دستگاه لخت S_1 با مختصات فضا و زمان (x_1,y_1,z_1,ct_1) به دستگاه لخت دیگر S_2 با مختصات فضا-زمانی (x_2,y_2,z_2,ct_2) که با سرعت v نسبت به دستگاه اول در امتداد محور xها ، حرکت می کند به شکل زیر است:

$$\begin{cases} x_2 = g\left(x_1 - vt_1\right) \\ y_2 = y_1 \\ z_2 = z_1 \\ t_2 = g\left(t_1 - \dfrac{v}{c^2}\right) \end{cases} \qquad g = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \qquad (1\text{-}1)$$

همچنین تبدیلات لورنتس سرعت را می توان به دست آورد:

$$\dot{x}_2 = \frac{\dot{x}_1 - v}{1-\left(\frac{v}{c^2}\right)\dot{x}_1}$$

(2-1)

$$\dot{y}_2 = \frac{\dot{y}_1\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1-\left(\frac{v}{c^2}\right)\dot{x}_1} \qquad \dot{z}_2 = \frac{\dot{z}_1\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1-\left(\frac{v}{c^2}\right)\dot{x}_1}$$

معادلات تبدیل که بازه های طول و زمان را به هم مربوط می کنند، چنین اند:

(3-1)

$$L = \frac{L_0}{g}$$

$$T = T_0 g$$

که در آنها L_0 و T_0 بازه طول و زمان اندازه گیری شده توسط ناظر ساکن درS_1 و L و T بازه طول وزمان اندازه گیری شده توسط ناظر ساکن در S_2 می باشند

1-4- رویدادهای فضا- زمانی و مخروط نوری

فرض می کنیم رویـداد A دارای مختصـات فضـا- زمـانی (x, y, z, ct) و رویـداد B دارای مختصـات فضـا- زمـانی (x', y', z', ct') هر دو در دستگاه S باشند. بازه فضا- زمانی (Δs) بین دو رویداد بصورت زیر تعریف می شود:

(4-1)

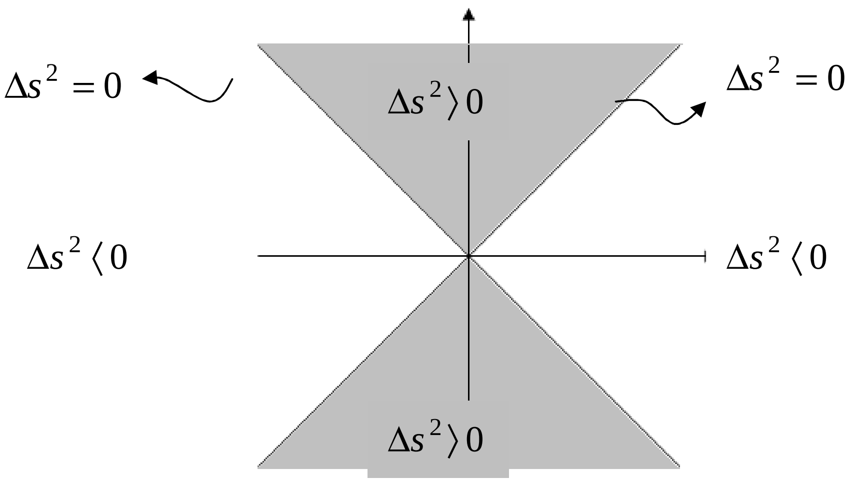
$$\Delta s^2 = c^2(t'-t)^2 - (x'-x)^2 - (y'-y)^2 - (z'-z)^2$$

این بازه فضا- زمانی تحت تبدیلات لورنتس ناوردا می باشد. یعنی مقدار آن در تمام دستگاههای لخت یکسان است.

اگر $Ds^2 \rangle 0$ بازه فضا- زمانی را زمان گونه می گویند. در این حالت دو رویداد با یکدیگر رابطه علی خواهند داشت.

اگر $Ds^2 \langle 0$ بازه فضا- زمانی را فضا گونه می گویند. در این حالت دو رویداد با یکدیگر رابطه علی نخواهند داشت.

در $Ds^2=0$ دو رویداد فقط با علامتهای نوری به یکدیگر مر بوط می شوند. تمام نقاط فضا- زمانی که با $Ds^2=0$ به یکدیگر مربوط می شوند، مخروط نوری را ایجاد می کنند.



شکل 1-1 مخروط نوری

1-5- جرم نسبیتی، اندازه حرکت و انرژی نسبیتی

اگر جرم جسم توسط ناظر ساکن نسبت به آن جسم اندازه گیری شود، آن را جرم ویژه یا جرم سکون آن جسم می نامند. اما اگر ناظر نسبت به جسم در حال حرکت باشد، جرم اندازه گیری شده جرم نسبیتی است که رابطه آن به صورت زیر است:

(5-1)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

اندازه حرکت نسبیتی P یک ذره باسرعت V ، از رابطه زیر محاسبه میشود:

$$P = mV = \frac{m_0 V}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \qquad (6-1)$$

همچنین E_0 انرژی سکون به شکل زیر به صورت زیر محاسبه می شود:

$$E_0 = m_0 c^2$$

و E که نمایشگر انرژی کل ذره است به صورت زیر تعیین می شود:

(7-1)

$$E = mc^2$$

رابطه بالا رابطه مشهور اینشتن است که هم ارزی انرژی وجرم را نشان می دهد. اغلب بیان انرژی E بر حسب P مناسب تر است.

(8-1)

$$E_K = E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2$$

$$E^2 = (pc)^2 + {E_0}^2$$

در رابطه بالا انرژی کل نسبیتی E به صورت تابعی از اندازه حرکت نسبیتی P نشان داده شده است.

6-1-چار بردار فضا-زمان وچار بردار اندازه حرکت انرژی

در حرکت شناسی نسبیتی سه مختصه فضایی x,y,z و یک مختصه زمانی t یک رویداد را به عنوان مؤلفه های یک بازه فضا- زمانی چهار بعدی در نظر می گیریم، که به آن چار بردار فضا-زمان می گویند. در دینامیک نسبیتی نیز ترکیب سه مؤلفه اندازه حرکت و یک مقدار انرژی تشکیل یک چار بردار می دهند که چار بردار اندازه حرکت- انرژی نامیده می شود. روابط تبدیلی که مولفه های اندازه حرکت و انرژی کل یک ذره در چارچوب S_2 را بر حسب مؤلفه های اندازه حرکت و انرژی کل همان ذره در چارچوب لخت دیگر S_1 بیان می کند به شکل زیر هستند:

$$p_{x_2} = \frac{p_{x_1} - v\left(\frac{E_1}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad E_2 = \frac{E_1 - vP_{x_1}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$P_{y_2} = P_{y_1}$$

$$P_{z_2} = P_{z_1}$$

(9-1)

در مسائل برخورد بین ذرات، دیگر بقای جرم مشابه مکانیک کلاسیک وجود ندارد، بلکه سه مؤلفه اندازه حرکت نسبیتی کل ذرات و انرژی نسبیتی کل بقا دارند.کمیت ناوردایی که می توان از این چار بردار ساخت، $\frac{E^2}{C^2} - P_x^2 - P_y^2 - P_z^2$ است که برابر مربع جرم سکون $\left(m_0^2\right)$ می باشد که تحت تبدیلات لورنتس ناورداست.

مسائل نمونه

1- در بین کمیات زیر کدام کمیت تحت تبدیلات لورنتس ناوردا نیست؟ (که در آنها E انرژی کل، P اندازه حرکت خطی، I جریان الکتریکی و z,y,x مختصات مکانی و t زمان می باشند.)

الف) $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ ب) $xd(x)$

ج) $E^2-c^2p^2$ د) I^2

2- مختصات فضا-زمانی دو رویداد به ترتیب برابر است با :

$(x_1,y_1,z_1,t_1)=\left(1,2,-1,\frac{4}{c}\right)$, $(x_2,y_2,z_2,t_2)=\left(-1,3,1,\frac{1}{c}\right)$ کدامیک از عبارات صحیح است؟(مقدار ثابت c برابر مقدار سرعت نور است.)

الف)ارتباط علی میان دو رویداد امکان پذیر است.

ب)در مورد ارتباط علی دو رویداد نمی توان هیچ نتیجه ای گرفت.

ج)رویداد دوم نمی تواند از رویداد اول اثر پذیرد.

د)رویداد اول نمی تواند از رویداد دوم اثر پذیرد.

3- کهکشانی با تندی v از زمین دور می شود و نوری با طول موج l ساطع می کند، طول موجی که ناظر زمینی از نور این کهکشان دریافت می کند، کدام است؟

الف) $l\sqrt{\dfrac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$ ب) $l\sqrt{\dfrac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$ ج) $l\sqrt{1-\frac{v}{c}}$ د) $l\sqrt{1+\frac{v}{c}}$

4- مکان،زمان در دو چار چوب S, S' توسط تبدیل لورنتز $x'=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ بیان می شود. تبدیل لورنتز اندازه حرکت خطی،انرژی کدام است؟

الف) $P'_{x'}=\left(P_x-mvt\right)\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ ب) $P'_{x'}=P_x\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

ج) $P'_{x'}=P_x\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ د) $P'_{x'}=\left(P_x-\frac{vE}{c}\right)\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

5- در دستگاه S دو واقعه یکی در مبدا و دیگری در طول محور x ها و به فاصله L همزمان در لحظه t=0 اتفاق می افتند. فاصله زمانی این دو واقعه در سیستم S' که در جهت محور xها حرکت می کند برابر T می باشد. فاصله مکانی این دو واقعه در سیستم S' کدام است؟

الف) $\sqrt{L^2+c^2T^2}$ ب) $\sqrt{c^2T^2-L^2}$ ج) $L+cT$ د) $\sqrt{L^2-c^2T^2}$

حل مسائل نمونه

1- (گزینه 4)،معادله پیوستگی بار بیان می کند که کمیت $J^2 - r^2c^2$ ناورداست و بنابراین I^2 ناوردا نیست.

2- (گزینه 1)، دو رویداد می توانند با یکدیگر را بطه علی داشته باشند، زیرا این فاصله فضا- زمانی توسط پالس نوری می تواند پیموده شود.

$$\Delta S^2 = C^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$
$$= (3)^2 - (2)^2 - (1)^2 - (2)^2 = 0$$

3- (گزینه 2)،چون کهکشان از زمین دور می شود طول موج نوری که به زمین می رسد باید بیشتر از طول مـوج ساطع شده باشد، پس گزینه (2) صحیح است.گزینه های (3)و(4) مربوط به اثر دوپلر نسبیتی نیستند.

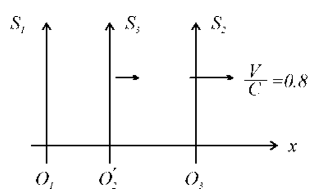
4- (گزینه4)،با استفاده از چهار بردار ممنتوم انرژی به جای چهار بردار مکان- زمان در تبدیلات لورنتس جـواب صـحیح بدست می آید.

5- (گزینه 4)،با کمک ناوردایی بازه فضا- زمانی می توانیم فاصله مکانی را بدست آوریم.

$$\Delta S = \Delta s' \Rightarrow \sqrt{L^2 - C^2(0)^2} = \sqrt{L'^2 + C^2T^2} \Rightarrow L' = \sqrt{L^2 - C^2T^2}$$

مجموعه تست سال های گذشته

1ـ ناظر s_2 در جهت مثبت محور مشترک x نسبت به ناظر s_1 با سرعت $\frac{v}{c} = 0/8$ حرکت می‌کند. نـاظر s_3 مطابق شکل بین s_2, s_1 به موازات محور x ها در حرکت است. به طوری که اهنگ کار کردن ساعت واقـع در آن از دید ناظرهای s_1 , s_2 یکسان است . تندی ناظر s_3 نسبت به s_1 چقدر است؟



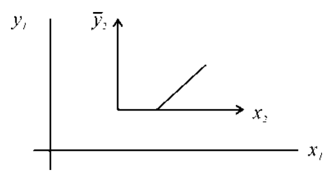
1) $0/4c$

2) $\frac{c}{2}$

3) $0/8c$

4) $2c$

2ـ ناظری در دستگاه s_2 که با سرعت $v = 0/98c$ نسبت به ناظر s_1 در جهت مثبت محور x_1 حرکـت مـی نـد. یک میله ی یک متری را به طور یکسان تحت زاویه 45° نسبت به محور x_2 قرار داده است. طول میلـه از نظر ناظر s_1 تقریبا چند متر است؟



1) 0/2 2) 0/72

3) 0/98 4) 1/40

حل)

$$l = \frac{l_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}$$

می دانیم طول خط کش در دستگاهی نسبت به آن ساکن است. بیشـترین مقـدار را دارد . بنـابراین گزینـه (4) صـحیح نیست. علاوه بر آن چون

$$g = \frac{1}{\sqrt{1 - (0/8)^2}} = 5$$

بنابراین $l_{0}=\frac{l}{r}=\frac{1}{5}=0/2$

گزینه (1) صحیح است.

3ـ کدام عبارت صحیح است؟

1) سرعت یک ذره در یک محیط غیر از خلاء می تواند بین از سرعت نور در همان محیط باشد.

2) سرعت یک ذره در یک محیط غیر از خلاء نمی تواند بیش از سرعت نور در همان محیط باشد.

3) بر اساس پدیده ی جرنکوف سرعت یک ذره باردار می تواند بیش از سرعت نور درخلاء باشد.

4) سرعت گرده موج وابسته به ذره می تواند بیش از سرعت نور در خلا باشد

حل) گزینه (1) صحیح است.

چون $v=\frac{c}{n}<c$ سرعت در محیط به ضریب شکست n

4ـ یک ذره در حال سکون طول عمری برابر با 10 ثانیه دارد. اگر این ذره با سرعتی برابر با $0/6c$ حرکت کند. مسافتی را که قبل از تلاشی طی می‌کند چند متر است؟ $\left(c=3\times10^{8}\frac{m}{s}\right)$

1) $1/8\times10^{9}$ 2) $2/25\times10^{9}$ 3) $2/4\times10^{9}$ 4) $7/5\times10^{9}$

گزینه (3) صحیح است.

حل) $x=vt_{0}=0/6c\frac{10(s)}{\sqrt{1-(0/6)^{2}}}=2/25\times10^{9}$ زمان ذره در دستگاه خودش

5ـ r جرم حجمی (چگالی حجمی) مکعبی است که با سرعت V قابل مقایسه با سرعت نور در امتداد یکی از اضلاعش در حرکت است. کدام گزینه درست است؟ r_{0} جرم حجمی در دستگاه سکون حجم است.

1) $r=r_{0}$ 2) $r=r_{0}\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}$ 3) $r=\frac{r_{0}}{\sqrt{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}}$ 4) $r=\frac{r_{0}}{1-\frac{v^{2}}{c^{2}}}$

حل) می دانیم

$$l=\frac{l_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \leftarrow \quad r=\frac{m}{v}=\frac{m}{Al}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,r_0$$

6ـ انرژی جنبشی ذره ای که در بالای جو شاهده شده است 200mev و اندازه حرکت آن $F_3=\frac{mev}{c}$ است.

جرم سکون آن ذره تقریبا چند برابر جرم سکون الکترون است؟

1) 125   2) 250   3) 900   4) 1300

حل) گزینه (1) صحیح است.

$$E_K=200\ (mev) \qquad P=300\left(\frac{mev}{c}\right)$$

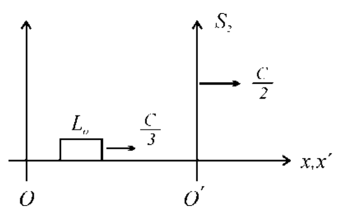
$$E_K=\sqrt{P^2C^2+E_0^2}-E_0$$

$$(E_K-E_0)^2=P^2C^2+E_0^2$$

$$\Rightarrow 2E_KE_0+E_K^2=P^2C^2 \rightarrow E_0=\frac{P^2C^2-E_K^2}{2EK}$$

$$=\frac{9\times10^4-4\times10^4}{2\times200}=\frac{5\times10^4}{4\times10^2}=1/25\times10^2=125$$

7ـ مطابق شکل میله ای با طول L_0 با سرعت $\frac{c}{3}$ نسبت ناظر s در راستای مثبت x در حرکت است ناظر s' که با سرعت $\frac{c}{2}$ نسبت به ناظر s در راستای مثبت x در حرکت است. طول میله را چقدر اندازه می گیرد؟ (c= سرعت نور در خلاء است)



1) $L_0\frac{2\sqrt{6}}{7}$ 2) $\frac{2\sqrt{6}}{5}L_0$

3) $\sqrt{\frac{35}{6}}L_0$ 4) $\frac{1}{2}L_0$

حل) گزینه 2.

$$V' = \frac{V-U}{1-\frac{V}{C^2}u} = \frac{c/2-c/3}{1-\frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{6}c}{\frac{5}{6}} = \frac{1}{5}c$$

$$V = \frac{c}{2} \qquad g = \sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$u = \frac{c}{3}$$

$$l = L_0 - 1 = \frac{2\sqrt{6}}{5}L_0$$

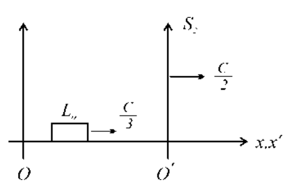
8ـ اتومبیلی باطول سکون l_0 به سمت گاراژ با همان طول سکون با سرعت $\mathbf{V}$ در حرکت است. طول اتومبیل در مقایسه با طول گاراژ به ترتیب از نظر ناظر اتومبیل و گاراژ چگونه است؟

1) ناظر اتومبیل: کوچکتر از طول گاراژ . ناظر گاراژ : بزرگتر از طول گاراژ

2) ناظر اتومبیل: کوچکتر از طول گاراژ . ناظر گاراژ: کوچکتر از طول اتومبیل

3) ناظر اتومبیل: بزرگتر از طول گاراژ.ناظر گاراژ: بزرگتر از طول گاراژ

4) ناظر اتومبیل: بزرگتر از طول گاراژ . ناظر گاراژ: کوچکتر از طول گاراژ



حل) گزینه 1صحیح است.

9ـ در بین کمیات زیر کدام کمیت تحت تبدیلات لورنتس ناوردا نیست؟ (که در آنها $\mathbf{E}$ انرژی کل، $\mathbf{p}$ اندازه و حرکت خطی، $\mathbf{I}$ جریان الکتریکی ، $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ و $\mathbf{z}$ مختصات مکانی و $\mathbf{t}$ مختصه زمانی می‌باشد)

1) $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ 2) $xd(x)$

3) $E^2-c^2p^2$ 4) I^2

10ـ کهکشانی با سرعت $\mathbf{V}$ از زمین دور میشوذد و نوری با طول موج l را قطع می‌کند. طول موجی که ناظر زمینی از نور این کهکشان دریافت می‌کند کدام است؟

1) $l\sqrt{\dfrac{1-v/c}{1+v/c}}$ 2) $l\sqrt{\dfrac{1+v/c}{1-v/c}}$ 3) $l\sqrt{1-\dfrac{v}{c}}$ 4) $l\sqrt{\dfrac{1+v}{c}}$

حل) کهکشانی که دور میشود v همواره ضعیف تر می شود پس $v_0 > v$ = ناظر زمین

$$\Rightarrow l = \frac{c}{v} \rightarrow l > l_0$$

از بین فاکتورهای انتقال به قرمز چون $\frac{v}{c} < 1$ تنها:

$$\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} > 1$$

پس گزینه 2 صحیح است.

11ـ انرژی جنبشی الکترونی برابر $\frac{1}{4}$ انرژی سکون آن است. سرعت الکترون برابر است با:

1) $0/4c$ 2) $0/6c$ 3) $0/63c$ 4) $0/86c$

حل) گزینه 2 صحیح است.

$$E_K = \frac{1}{4}E_0 \Rightarrow E_K = -E_0 + \sqrt{P^2C^2 + E_0^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{4}E_0 = \sqrt{P^2C^2 + E_0^{\,2}}$$

$$\frac{25}{16}E_0^{\,2} - E_0^{\,2} = P^2C^2$$

$$\frac{9}{16}E_0 = P^2C^2 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{E_0}{C} \cdot \frac{3}{4}$$

$$P = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{v}{c} \Rightarrow \frac{9}{16}(1-\frac{v^2}{c^2}) = \frac{v^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{25}{16}\frac{v^2}{c^2} = \frac{9}{16}$$

فصل2 - ساختار کلی مکانی کوانتمی

مقدمه: در این فصل با معرفی مفاهیم بسته موج و رابطه عدم قطعیت و ساختار کلی بحث را سازماندهی خواهیم کرد.

1ـ بسته موج

از نظر ریاضی هر تابع f(x) (در فضای x) را می توان به تابع متناظرش g(k) (در فضای k) تبدیل کرد طبق رابطه تبدیل فوریه :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{+\infty}dk\ \ g(k)e^{ikx} \\ g(k)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{+\infty}dx f(x)e^{-ikx} \end{cases}$$

قضیه پارسوال: برای هر تابع f(x) و تبدیل فوریه g(k) آن رابطه زیر همواره برقرار است:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(x)\right|^2 dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|g(k)\right|^2 dk$$

یک بسته موج گاوسی شکل تابع زیر را داراست:

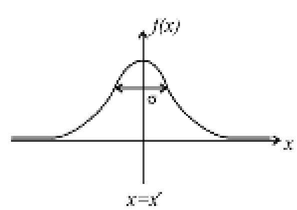
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2ps^2}}\quad \exp\left\{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2s^2}\right\}$$

که در آن :

$$\bar{x}=x \quad \text{میانگین} \quad =\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}x\left|f(x)\right|^2 dx$$

$$s^2=\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2$$

$$\langle x^2\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\ \left|f(x)^2\right|dx$$



مثال) تبدیل فوریه تابع $f(x)=Ae^{-ax^2}$ را بدست آورید. پهنای فضای $(\Delta x)x$, $(\Delta k)k$ را بدست آورید. تحقیق کنید.

$\Delta x \quad \Delta k \geq 1$

حل)

$$g(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2p}}f(x)e^{ikx} \quad d_x=\frac{A}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2+ikx}$$

رابطه زیر را داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ax^2+bx} \quad dx=\sqrt{\frac{p}{a}}e\,xp\,(\frac{b^2}{4a})$$

بنابراین :

$$g(k)=\frac{A}{\sqrt{2p}}\sqrt{\frac{p}{a}} \quad \exp\left\{\frac{(ik)^2}{4a}\right\}=\frac{A}{\sqrt{2a}}\exp\left\{-\frac{k^2}{4a}\right\}$$

از مقایسه با رابطه

$$:\frac{1}{\sqrt{2p\,6^2}} \quad lxp\left\{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2s^{\,2}}\right\}:$$

$$2(s_x)^2=\frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad s_x=\Delta_x=\frac{1}{\sqrt{2a}}$$
$$2(s_k)^2=4a \quad \Rightarrow \quad s_k=\Delta_k=\sqrt{2a}$$
$$\Delta x.\Delta k=1$$

نکته مهم : تنها بسته موج گاوسی است که

$$\Delta x\Delta k=1$$

تحول زمانی بسته موج:

اگر تابع $f(x,t)$ را در نظر بگیریم در این صورت داریم:

$$f(x,t)=\int dk\, g(k)e^{ikx-w(k)t1}$$

رابطه $w(k)$ را رابطه پاشندگی می گویند با بسط $w(k)$ حول k_0:

$$w(k)\approx w(k_0)+(k-k_0)\left(\frac{dw}{dk}\right)_{ko}+\frac{1}{2}(k-k_0)^2\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{ko}$$

معرفی کنیم:

$$V_g=\left(\frac{dw}{dk}\right)_{ko} \quad \text{(سرعت گروه)}$$

$$V_p=\frac{w}{k} \quad \text{(سرعت فاز)}$$

$$b=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2w}{dk^2}\right)_{ko}$$

با محاسبه انتگرال بالا:

$$f(x,t)=e^{i[k_0x-w(ko)t]}\left(\frac{p}{a+ibt}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\left[\frac{x-vgt}{4(a+ibt)}\right]}$$

مقایسه با رابطه $(D_x)^2=d_x^2$:

$$(\Delta x)_t=2\sqrt{a+ibt}$$

$$|(\Delta x)_t|^2=(\Delta x)^*_t\ (\Delta x)_t\ =\left(a^2+b^2t^2\right)$$

نکته: اگر a بزرگ باشد یعنی اگر بسته موج در زمان اولی از لحاظ فضایی بزرگ باشد آهنگ پهن شدن کوچک خواهد بود.

رابطه عدم قطعیت: برای هر بسته موج f(x) وتبدل فوریه آن g(k) رابطه زیر برقرار است.

$$(\Delta x)\ (\Delta k)\geq 1$$

حالت تساوی برای موج گاوسی صحیح می‌باشد.

معادله شرویندگر و ویژه توابع:

تعریف عملگر: یک عملگر موجود ریاضی است که بر روی یک تابع اثر و پاسخ آن می توان مضربی از یک تابع، مشتق تابع ، انتگرال تابع، و ..... باشد.

در مکانیک کوانتمی کمیتهای فیزیکی همگی نوع خاصی از عملگرها هستند. (هرمیتی)

←عملکرد خطی: عملگر $\hat{o}$ خطی است اگر

$$\hat{O}(af(x)+bg(x))=a\hat{O}f(x)+b\hat{O}g(x)$$

مثال) نشان دهید عملگر * (مزدوج مختلط) خطی نست.

حل) اگر $a,b\in c$ ، $g(x), f(x)$ دو تابع دلخواه:

$$\hat{O}(f(x)+bg(x))=a^*\hat{o}f(x)+b^*\hat{o}g(x)\neq a\hat{O}f(n)+b\hat{o}g(x)$$

← عملکرد هرمیتی: عملگر $\hat{A}$ هرمیتی است اگر و تنها اگر:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}y^*\hat{A}j\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}(Ay)^*j\,d_x$$

که در آن y و j دو تابع دلخواه هستند.

مثال) نشان دهید عملگر $A=-i\dfrac{d}{dx}$ هرمیتی است.

حل)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}y^*\left(-i\frac{d}{dn}\right)j\,dx\overset{?}{=}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-i\frac{d}{dx}y\right)^*j\,dx$$

$$\downarrow\quad -i\int_{-\infty}^{+\infty}y^*j'dx=-i[y^*j]_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy^*}{dn}j\,dx]$$

فرض کنید yو j در بی نهایت صفر شوند.

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-i \frac{d}{dx} y \right)^{*} j \, dx$$

پس A هرمیتی است

نکته: در مکانیک کوانتی عملگر تکانه خطی $\hat{P}_x = -i\hbar \frac{d}{dx}$ تعریف می‌شود.

← تعریف معادله ویژه مقداری ویژه تابع، ویژه مقدار: برای هر عملگر خطی معادله ویژه مقداری معادله زیر است:

$$\hat{A}y = ay$$

اگر A هرمیتی باشد یعنی $A^{+} = A$ آنگاه:

قضیه:

1ـ ویژه مقادیر A (a_iها) حقیقی اند. $ai^{*} = ai$

2ـ ویژه توابع A ($y_a(x)$) متعامدند یعنی:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y_a^{*}(x) y_{a'}(x) dx = \begin{cases} \neq 0 & a = a' \\ 0 & a \neq a' \end{cases}$$

تمرین: نشان دهید عملگر های $x = \hat{x}$, $\hat{p} = -id/dx$ هرمیتی اند.

نکات مهم:

1ـ حاصلضرب دو عملگر هرمیتی A و B هرمیتی است اگر این دو با هم جابجا شوند یعنی:

$$(AB)^{+} = AB \leftrightarrow [A, B] = AB - BA = 0$$

2ـ اگر $\hat{A}$ هرمیتی باشد $f(\hat{A})$ تابع دلخواهی از $\hat{A}$ نیز هرمیتی است.

3ـ اگر $\hat{A}$ هرمیتی باشد هر توانی از $\hat{A}$ نیز هرمیتی است.

4ـ عملگر $\frac{d}{dx}$ ضد هرمیتی است یعنی: $(\frac{d}{dx})^{t}=-\frac{d}{dx}$

5ـ عملگر $\hat{x}$ در فضای x به صورت خود x در فضای p به صورت:

$\hat{x}=i\mathbf{h}\frac{d}{dp_x}$ است .

6ـ عملگر $\hat{p}$ در فضای x به صورت $-i\mathbf{h}\frac{d}{d_x}$ و در فضای p به صورت خود p است.

7ـ عملگرها هامیلتونی (انرژی کل):

$$H=\hat{T}+\hat{V}$$

$$=\frac{\hat{P}^2}{2m}+V(\hat{x})=\frac{(-ih\ d/dx)^2}{2m}+V(\hat{x})=-\frac{h^2}{2m}\ \frac{d^2}{dx^2}+V(x)$$

7ـ ویژه توابع عملگر $\hat{p}=-i\mathbf{h}\,d/dx$ در فضای x به صورت: $y_{\ p}(x)=\frac{1}{\sqrt{2p\mathbf{h}}}e^{\frac{ipx}{\mathbf{h}}}$

شرط تعامد $\int_{-\infty}^{+\infty}y_{\ p}^{*}(x)\ y_{\ p'}(x)d_n$

$=d\left(p-p'\right)$ است که در آن $d\left(p-p'\right)$ تابع دلتای ایراک است.

8ـ ویژه مقادیر عملگر $\hat{p}$ هر مقداری از $-\infty<p<+\infty$ (ذره آزاد) را به خود اختصاص می دهد.

← معادله شروینددگر

معادله ویژه مقداری $\hat{H}y=\hat{E}y$ برای عملگر هاملیتونی $\hat{H}$ و انرژی $\hat{E}$ را معادله شروینددگر می گویند که به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\hat{H}&=-\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\\ \hat{E}&=i\mathbf{h}\frac{\partial}{\partial t}\end{aligned}\Rightarrow\left(-\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\frac{\partial^2 y}{\partial n^2}+V(x)y\right)=i\mathbf{h}\ \frac{\partial y}{\partial t}$$

کلی ترین حل معادله بالا از روش جداسازی متغیرها:

$$y(x,t) = y(x) f(t)$$

$$i\mathbf{h}\frac{df}{dt} = Ep \qquad \text{که در آن :}$$

$$\Rightarrow f(t) = Ae^{-iEt/h}$$

$$-\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\frac{d^2y}{dx^2} + V(n)y = Ey \qquad \text{و}$$

به معادله بالا معادله شرویندگر مستقل از زمان می گویند.

منظور از حل معادل شرویندگر بدست آوردن مقادیر E,y تحت شرایط مرزی خاص می‌باشد.

نکته: چون عملگر $\hat{H}$ هرمیتی است پس طبق قضیه قبل:

1ـ ویژه مقادیر H یعنی E حقیقی اند.

2ـ ویژه توابع H یعنی $y(x)$ها متعامدند یعنی:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y^*_n(x)\, y_{n'}(x)dx \sim d_{nn'}$$

تعریف طیف پیوسته ـ گسسته:

طیف عملگر $\hat{H}$ (یا عملگر دلخواهی دیگری مثل $\hat{A}$ هرمیتی می توان به دو صورت باشد:

1ـ طیف گسسته :

یعنی بین هر دو ویژه مقدار E_n از آن هیچ ویژه مقدار دیگری نباشد با:

$$\hat{H}y_n = E_n y_n$$

$$\hat{H}y_m = E_m y_m$$

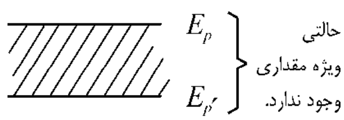
E_n
E_m
حالتی ویژه مقداری وجود ندارد.

در این حالت :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y_n^*(x) y_m(x) dx \sim d_{nm}$$

2ـ طیف پیوسته:

یعنی بین هر دو ویژه مقدار E_p از آن بینهایت حالت (ویژه مقدار) وجود داشته باشد یا:



$$\hat{H} y_p(x) = E_p y_p(x)$$

$$\hat{H} y_{p'}(x) = E_{p'} y_{p'}(x)$$

در این حالت :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y_p(n) y_{p'}(x) dx \sim d(p - p')$$

اصل تمامیت

برای ویژه توابع عملگر هرمیتی H همواره رابطه زیر برقرار است:

$$\sum_n y_n(x) y_n^*(x') = d(x - x') \qquad \text{(اصل تمامیت)}$$

اصل بسط

هر تابع دلخواه $y(x)$ را می توان به صورت ترکیب خطی از ویژه توابع عملگر هرمیتی H نوشت طوری که:

$$y(x) = \sum_n a_n y_n(x)$$

برای محاسبه a_n: با ضرب طرفین در $y_m^*(x)$ و انتگرال گیری از $-\infty$ تا $+\infty$ و استفاده از رابطه تعامد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y_m^*(n) y_n(x) = d_{nm}$$

نکته: با ضرایب تناسب 1 برای عبارت بالا به تعریف توابع بهنجار می رسیم .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y_m^*(x) y(x) dx = \sum_n a_n \int_{-\infty}^{+\infty} y_m^*(x) y_n(x) \ dx$$

$$\Rightarrow a_m = \int_{-\infty}^{+\infty} y_m^*(x) \ y \, dx$$

نکته: می توان نشان داد که اگر

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y(x)|^2 dx = 1$$

باشد آنگاه :

$$y(x) = \sum_n a_n y_n \rightarrow \sum |a_n^2| = 1$$

تعریف: تابع احتمال

برای ویژه تابع عملگر هرمیتی $\hat{H}$ (هامیلتونی) احتمال حضور ذره در بازه $(x, x+dx)$ را تعریف می کنیم:

$$p(x,t) \ dx = |y(x;t)|^2 \ dx$$

نکته مهم: چون جمع احتمالها برابر واحد است پس:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x,t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(x,t)|^2 dx = 1$$

تعریف ارزش انتظاری

ارزش انتظاری عملگر $\hat{A}$ در حالت $y_{(x)}$ چنین تعریف می‌شود:

$$<\hat{A}> = \int_{-\infty}^{+\infty} y^* \hat{A} y(x) \ dx$$

نکته: اگر $y(x)$ ترکیب خطی از ویژه حالتهای هامیلتونی باشد یعنی:

$y(x) = \sum_n a_n \ y_n(x)$ آنگاه :

$$< \hat{A} >= \sum_{n,m} a_n^* a_m \quad A_{nm}$$

که در آن :

$A_{nm} = \int_{-\infty}^{+\infty} y_n^*(x) A' y_m(n)$ موسوم به عنصر ماتریسی عملگر A است.

اصل برهم نهی حالتهای کوانتمی

حالت هر سستم فیزیکی ترکیب خطی از ویژه حالتهای هامیلتونی $(y_n(x))$ ها است. یعنی:

$$y(x) = \sum a_n \; y_n(x)$$

نکته:

1ـ احتمال یافت شدن سیستم با انرژی E_n (احتمال یافتن سیستم در حالت n) برابر است با : $|a_n|^2$

2ـ چون y_n ها بهنجارند پس :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y(x)|^2 dx = \sum_n |a_n|^2$$

چنانچه $y_{(x)}$ نیز بهنجار باشد آنگاه :

$$\sum |a_n|^2 = 1$$

یعنی : جمع احتمال ها حضور ذره در حالتهای مختلف n برابر واحد است.

حل) تابع حالت یک جعبه 0 تا L به صورت :

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{1}{L}} & \mathbf{0} < X < \dfrac{L}{2} \\ \mathbf{0} & \dfrac{L}{2} < X < L \end{cases}$$

است. احتمال یافت شدن سیستم در انرژی E_n را بدست آوریم.

حل) این احتمال برابر است با : $(a_n)^2$

چون:

$$a_n = <y_n(x)|y>= \int_0^L y_n^*(x) y(x) dx$$

$$= \int_0^{L/2} y_n^*(x) y(x) dn$$

و:

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{np}{L}x\right)$$

$$= \int_0^{\frac{L}{2}} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\frac{np}{L} x \left(\frac{1}{L}\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \sin\frac{np}{L} x dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{L} - \frac{L}{np} \cos\frac{np}{L} x \Big|_0^{\frac{L}{2}} = \frac{2}{np}\left(1 - \cos\frac{np}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{np} 1 - (-)^{\frac{n}{2}}$$

$$\Rightarrow |a_n|^2 = \text{احتمال یافت شده سیستم در انرژی } E_n \text{ (حالت n)} = \frac{2}{n^2 p^2}(1 - (-)^{\frac{n}{2}})^2$$

نکته: اگر پتانسیل ذره ای مستقل از زمان باشد یعنی $V = V(x)$ آنگاه $\hat{H}$ مستقل از زمان است. و در این حالت وابستگی زمانی $y_n(x,t)$ به زمان فقط به صورت $\exp(-i\frac{Et}{t})$ می‌باشد. در این حالت ارزش انتظاری هر عملگر $\hat{A}$ مستقل از زمان است.

نکته: اگر $\hat{A} = \hat{H}$ باشد ارزش انتظاری $\hat{H}$ (هامیلتونی) در حالت دلخواه y (که برهم‌نهی حالتهای $y_n(x)$ است) به صورت زیر است:

$$< \hat{H} >= \sum_n |a_n|^2 E_n$$

که در آن E_nویژه مقادیر عملگر $\hat{H}$ برای ویژه حالت y_n, a_n ضرایب بسط و y بر حسب y_n (در پایه y_n) می‌باشد. یعنی:

$$\begin{cases} H\hat{y}_n = E_n y_n \\ y = \sum_n a_n y_n \end{cases}$$

مثال) حالت یک سیستم کوانتومی به صورت

$$y(x,t) = \left[ae^{-i\frac{E_0 t}{\mathbf{h}}} y_0(x) + be^{-iE_1\frac{t}{\mathbf{h}}} y_1(x) \right]$$

است که در آن y_1, y_0 حالتهای پایه و برانگیخته اول سیستم و E_1, E_0 انرژی آنها هستند . ارزش انتظاری عملگر H را در این حالت حساب کنید؟

حل)

$$< \hat{H} >= \int_{-\infty}^{+\infty} y^* \hat{H} y \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y^* \{H\} \left\{ ae^{-iE_0 t/\mathbf{h}} y_0 + be^{-iE\frac{t}{h}} y_1 \right\} d_n$$

چون :

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y^*_{(x)} \{ ae^{-iE_0 t/h} E_0 y_0 + be^{-iE_1 t/\mathbf{h}} E_1 y_1 \} dn$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ a^* e^{-iE_0 t/\mathbf{h}} y_0 + b^* e^{iE_1 t/\mathbf{h}} y_1 \right\} \{ ae^{-iE\,t/h} E_0 y_0 + be^{-iE_1 t/h} E_1 y_1 \} dn$$

می دانیم: $\int_{-\infty}^{+\infty} y^{*0}_n \, y_m \, dn = d_{nm}$

پس: $=|a|^2\ E_0+|b|^2\ E_1$

نکته مهم: اگر حالت یک سیستم کوانتومی به صورت زیر باشد:

$$y\,(x;t)=\sum a_n\ e^{-iEnt/\mathbf{h}}\ y_{\,n}(x)$$

که در آن $y_{\,n}(x)$ ویژه توابع بهنجار و E_n ویژه مقادیر باشند آنگاه :

$$< H >_y = H = \sum_n |a_n|^2 E_n$$

تعریف حالتهای مانا (static)

حالتهای مانا $y\ (x;t)$ حالتهایی هستند که تابع احتمال $p(x,t)$ آنها با زمان تغییر نکند یعنی:

$$p(x,t=\mathbf{0})\quad |p(x,t)|$$

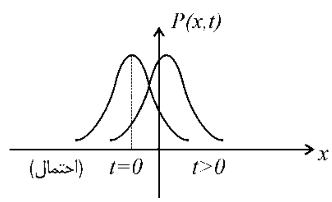
$$|y\ (x,t=\mathbf{0})|^2=|y\ (x,t)|^2$$

بر خلاف آن حالتهای stationary (ایستواره) را داریم که:

$$p(x,t)\neq p(x,t=\mathbf{0})$$

نکته مهم : اگر $V(x)=V$ تابعی از t نباشد حالتهای سیستم $y_{\,n}$ (ویژه توابع) هامیلتونی باشند انگاه سیستم همواره در حالتهای مانا باقی می ماند یعنی:

$$|y\ (x,t=\mathbf{0})|^2=|y\ (x,t)|^2$$



تعریف دقیق جایی جابجاگر کوانتمی:

1ـ جابجاگر دو عملگر $\hat{A}$, $\hat{B}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]y = \hat{A}\left(\hat{B}y\right)+\hat{B}\left(\hat{A}y\right)$$

2ـ پاد جابجاگرد و عملگر $\hat{B},\hat{A}$ به صوت زیر تعریف می‌شود:

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]y = \left\{\hat{A},\hat{B}\right\}y = \hat{A}\left(\hat{B}y\right)+\hat{B}\left(\hat{A}y\right)$$

نکته مهم: اگر $\hat{B},\hat{A}$ هرمیتی باشند:

1ـ جابجا گرد و عملگر $\hat{B}_1,\hat{A}$ مساوی است با :

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]=i\hat{C}$$

که در آن $\hat{C}$ پادهرمیتی است یعنی $\hat{C}=-\hat{C}$ (یا ثابت)

2ـ حاصل ضرب $\hat{A}\hat{B}$ وقتی هرمیتی است که :

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right]=\mathbf{0}$$

مثال: نشان دهید $\left[\hat{x},\hat{p}\right]=i\mathbf{h}$. در چه حاتی عملگر $\hat{A}\hat{x}$ هرمیتی است؟

حل)

$$\left[\hat{x},\hat{p}\right]y = \left[\hat{x},-i\mathbf{h}\frac{d}{dx}\right]y$$

$$=\hat{x}\left(-i\mathbf{h}\frac{dy}{dx}\right)-\left(-i\mathbf{h}\frac{d}{dx}\right)\left(\hat{x}y\right)$$

$$=-i\mathbf{h}\,xy'+i\mathbf{h}\left(xy'\right)=-i\mathbf{h}\;\;xy'+i\mathbf{h}\;xy'+i\mathbf{h}y$$

$$\Rightarrow\left[\hat{x},\hat{p}\right]y = i\mathbf{h}y \Rightarrow \left[\hat{x},\hat{p}\right]=i\mathbf{h}$$

همچنین $\hat{x}\hat{A}$ در حالتی است که:

$$\left[\hat{x}_1,\hat{A}\right]=\mathbf{0}$$

ولی می دانیم $\hat{x}$ با هر تابعی از $\hat{x}$ جابجا می شوند یعنی:

$$[\hat{x}, f(\hat{x})]=0$$

روابط مهم:

در مکانیک کوانتمی ترکیبات زیر هرمیتی هستند:

$$\frac{1}{2}(\hat{x}\hat{p}+\hat{p}\hat{x})$$

$$\frac{1}{4}\left(\hat{x}^2\,\hat{p}+2\hat{x}\hat{p}\hat{x}+\hat{p}\hat{x}^2\right)$$

نکته مهم: اگر A هرمیتی باشد انرژی انتظاری آن $<A>$ همواره حقیقی است یعنی:

$$<A>^*=<A>$$

تعریف چگالی جریان کوانتمی

اگر y ویژه تابع عملگر هامیلتونی باشد $\hat{H}y=Ey$ آنگاه تعریف می کنیم:

$$J=\frac{\mathbf{h}}{m}\,\mathrm{Im}\left(y^*\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

که در آن Im (قسمت موهومی) است.

بعضی روابط مهم:

1ـ اگر

$y=Ae^{ikx}$ آنگاه: $J=|A|^2\ \frac{\mathbf{h}k}{m}$

$$J=|A|^2\ \frac{p}{m}$$

2ـ اگر $y(r) = A\dfrac{e^{ikr}}{r}$ $\left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ آنگاه:

$$J = \frac{\mathbf{h}k}{mr^3}\,|A|^2$$

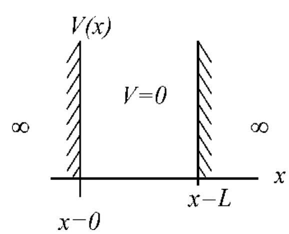
3ـ اگر $y = u(x)e^{ik}$ آنگاه : $J = \dfrac{\mathbf{h}k}{m}\,|u(x)|^2$

نکته: در مورد حالتهای مانا: $J(x, t = 0) = J(x, t)$

4ـ اگر $y = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ آنگاه $J = \dfrac{\mathbf{h}u}{m}\left(|A|^2 - |b^2|\right)$

حل معادله شرویندگر برای بعضی سیستمهای مهم کوانتومی (در یک بعد)

1ـ جعبه کوانتمی



پتانسیل این سیستم به صورت زیر است:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < L \\ \infty & x > l \end{cases}$$

با حل معادله :

$$\begin{pmatrix} 0 < x < L \\ V = 0 \end{pmatrix} - \frac{\mathbf{h}^2}{2m}\,d\,\frac{d^2y}{dx^2} = Ey$$

(چون ذره بیرون جعبه وجود ندارد پس:)

$$\begin{pmatrix} x > L \\ V = \infty \end{pmatrix} \quad y = 0$$

$$|y|^2 = 0 \rightarrow y = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = A\{\sin kx + B \cos kx\}$$

$k^2 = 2m\frac{E}{\mathbf{h}^2}$ که در آن

اعمال شرایط مرزی:

$$y(x = 0) = y = (x = L)$$

ویژه مقادیر:

$$\begin{cases} E_n = \dfrac{n^2 p^2 \mathbf{h}^2}{2mL^2} \\ k_n = \dfrac{np}{L} \end{cases}$$

ویژه توابع:

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \ \sin \frac{np}{L} x)$$

نرمالیزاسیون (بهنجارش) :

$$\int_O^L y_n^*(x)\, y_m(x) dx = d_{nm}$$

ویژه حالتهای کلی سیستم:

$$y_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \ E^{-iE_n t/\mathbf{h}} \ \sin\left(\frac{np}{L} x\right)$$

<u>بعضی مقادیر مهم ارزشهای انتظاری برای حالت nام کوانتمی جعبه</u>

1ـ ارزش انتظاری $\hat{p}$ مساوی صفر است: $< \hat{p} >= \mathbf{0}$

2ـارزش انتظاری عملگر $\hat{x}$: $< \hat{n} >= \dfrac{L}{2}$

3ـ ارزش انتظاری عملگر $\hat{p}^2$: $\hat{H} = \dfrac{\hat{P}^2}{zm}$ چون

$$\rightarrow \hat{p}^2 = 2m\hat{H} \rightarrow < \hat{p}^2 > = < 2m\hat{H} >$$

$$= \frac{n^2 p^2 \mathbf{h}^2}{L^2}$$

4ـ انرژی انتظاری عملگر

$$< x^2 >= L^2 \left\{ \frac{1}{3} - \frac{2(-)^n}{n^2 p^2} \right\} \qquad : \hat{x}^2$$

برای $n >>$ (حالتهای کلاسیکی) :

$$< x^2 >= \frac{L^2}{3}$$

اصل عدم قطعیت در حالت کلی:

اگر $\hat{A}$, $\hat{B}$ دو عملگر هرمیتی: $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = i\hat{C}$ آنگاه:

$$< \left(\Delta\hat{A}\right) >=< \hat{A}^2 > - < \hat{A} >^2$$

$$< \left(\Delta\hat{B}\right)^2 >=< \hat{B}^2 > - < \hat{B} >^2 \Rightarrow < \left(\Delta\hat{A}\right) >< \left(\Delta\hat{B}\right)^2 > \geq \quad \frac{1}{4}\left|< \hat{C} >\right|$$

$$< \left(\Delta\hat{C}\right)^2 >=< \hat{C}^2 > - < \hat{C} >^2$$

نتیجه اصل عدم قطعیت در مورد بعضی عملگرهای مهم

1ـ

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\mathbf{h} \Rightarrow (\Delta x)^2 \Delta p^2 \geq \frac{h^2}{4}$$

یا

$$(\Delta x)\,(\Delta p) \geq \frac{\mathbf{h}}{2}$$

2ـ

$\left[\hat{t},\hat{E}\right]=-i\mathbf{h}$, $\hat{E}=i\mathbf{h}\, d/dt$:چون : $\hat{t}$, $\hat{E}$

یا $\left(\left[\hat{E},\hat{t}\right]=i\mathbf{h}\right)$

یا:

$$(\Delta E)\,(\Delta t)\geq\frac{\mathbf{h}}{2}$$

عملگر پاریته:

این عملگر چنین تعریف می‌شود:

$$\hat{p}\,y\,(x)=y\,(-x)$$

ویژه مقادیر عملگر: $p=\pm 1$

اگر

$\hat{p}y\,(x)=+y\,(x)$ ($y\,(x)$ پاریته زوج دارد)

$\hat{p}y\,(x)=-y\,(x)$ ($y\,(x)$ پاریته فرد دارد)

نکته مهم: اگر $V(x)$ نسبت به x زوج باشد آنگاه هر ویژه تابع هامیلتونی ویژه تابع پاریته هم هست یعنی:

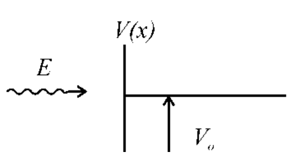
$$\hat{H}y_{\,n}(x)=E_n y_{\,n}(n)\Rightarrow\ py\,(x)=\pm y\,(x)$$

یا $\left[\hat{H},\hat{p}\right]=\mathbf{0}$

تعریف ضرایب بازتاب و عبور کوانتمی

ذره ای با انری E در نظر بگیرید که از بی نهایت $(-\infty)$ به سمت یک پله پتانسیل با ارتفاع v حرکت می‌کند یعنی:

واضح است که از نظر کلاسیکی اگر $E>V_0$ ذره از دیواره عبور می‌کند. می خواهیم از نظر کوانتمی احتمال عبور (و یا بازتاب) را حساب کنیم.



با حل معادله شرویندگر

$X > 0$, برای $-\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\frac{d^2t}{3x^2}+7y = Ey$

داریم :

$$y(x)=\begin{cases} e^{ikx}+\mathrm{Re}^{-ikn} & x<0 \\ Te^{iqx} & x>0 \end{cases}$$

که در آن : $k^2 = 2\frac{mE}{\mathbf{h}^2}$

و $q^2 = 2m\frac{(E-V_0)}{\mathbf{h}^2}$

$$:\begin{cases} y(x=0+)=y(x=0-) \\ y'=(x=0+\ )=y'(x=0-) \end{cases}$$

$R=\frac{k-q}{k+q}$ ضریب بازتاب $= |R|^2 = (\frac{k-q}{k+q})^2$

$T=\frac{2k}{k+q}$ ضریب عبور $= |T|^2 = (\frac{2k}{k+q})^2$

نکته: اگر $E<V_0 \leftarrow q$ موهومی است پس:

$$y(x)=\{Te^{-|q|x}\} \quad x>0$$

بنابراین با جایگذاری $q \to iq$

$$|R|^2=\left(\frac{k-iq}{k+iq}\right)\left(\frac{k-iq}{k+iq}\right)^* = 1$$

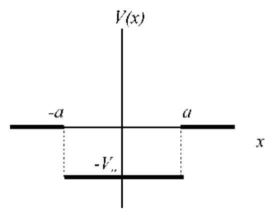
$$|T|^2=\left(\frac{2k}{k+iq}\right)\left(\frac{2k}{k+iq}\right)^*=\frac{4k^2}{k^2+q^2}$$ و

این روابط کاملا کوانتمی هستند.

چاه پتانسیل:

پتانسیل این سیستم به صورت زیر است :

$$V(x)=\begin{cases}0 & x<-a\\ -V_0 & -a<x<a\\ 0 & x>a\end{cases}$$



دو حالت می توان تصور کرد:

جوابهای حالت $E>0$:

$$k^2=\frac{2mE}{\mathbf{h}^2}\qquad q^2=2m\frac{(E+V_0)}{\mathbf{h}^2}\Rightarrow y(x)=\begin{cases}e^{ikx}+\mathrm{Re}^{-ikn} & x<-a\\ Ae^{iqx}+Be^{-iqx} & -a<x<a\\ Te^{ikx} & x>a\end{cases}$$

با اعمال شرایط مرزی در $x=\pm a$:

پیوسته $y\,(x=\pm a)$

پیوسته $y\,'(x=\pm a)$

$$R=ie^{-2ika}\quad\frac{(q^2-k^2)\sin 2qa}{2kq\cos 2qa-i(q^2+k^2)\sin 2qa}$$

$$T=e^{-2kia}\quad\frac{2kq}{2kq\cos 2qai(q^2+k^2)\sin 2qa}$$

نکته: در حالت خاصی که : $\sin 2qa=0\leftarrow$ (هیچ بازتابی وجود ندارد)

$$E=-V_0+\frac{n^2p^2\mathbf{h}^2}{8ma^2}$$

نکته: احتمال عبور ذره ای با انرژی E از پتانسیل پیوستهٔ . $V(x)$:

$$|T|^2\approx\exp\left\{-2\int dx\sqrt{2mv(m)-E}\right\}$$

که در آن انتگرال روی ناحیه $V(x)-E>0$ است.

مثال) فرمول فاولر – نوردهایم : $V(x)=eex$ (گسیل سردفلز)

$$|T|^2=e^{-4\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{mE}{\mathbf{h}^2}}}\left(\frac{E}{ee}\right)$$

پتانسیل های دلتای (Dirac) دیراک :

$$V(x)=x\frac{-\mathbf{h}^2 l}{2ma}\ d(x)$$

(برای حالت $E<0$) با حل:

$$y(n)=\begin{cases}A\,e^{-kx} & x>0\\ A\,e^{kx} & x<0\end{cases}$$

از آنجا با اعمال شرط ناپیوستگی مشتق اول:

$$-\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\frac{d^2y}{dx^2}+V(x)y=Ey$$

$$\underset{e\to\bullet}{Lim}\int_{0-e}^{0+e}dn\left\{\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{\mathbf{h}^2 l}{2ma}d(x)y(x)>\right\}=E\int_{a-e}^{a+e}y(x)dx$$

$$\Rightarrow-\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\{y'(0+e)-y'(0-e)\}-\frac{\mathbf{h}^2 l}{2ma}y(0)=0$$

$$\Rightarrow-\frac{2mE}{\mathbf{h}^2}=\frac{l}{2a}\Rightarrow E=-\frac{l\mathbf{h}^2}{4ma}$$

پتانسیل دلتای دیراک دافع:

$$V(x)=V_{.}d(x)$$

$$(x\neq \mathbf{0}) \qquad -\frac{\mathbf{h}^2}{2m}y''=Ey$$

$$\left(k^2=\frac{2mE}{\mathbf{h}^2}\right) \quad y''+k^2y=Ey$$

$$\left(k^2=\frac{2mE}{\mathbf{h}^2}\right) \quad y''+k^2y=\mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} Te^{ikx} & x>\mathbf{0} \\ e^{ikx}+\mathrm{Re}^{-ikx} & x<\mathbf{0} \end{cases}$$

(اعمال شرایط مرزی)

$$y \rightarrow y(x=\mathbf{0}+e)=y(x=\mathbf{0}-e) \Rightarrow T=1+R$$

$$-\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\left[y'(\mathbf{0}+e)-y'(\mathbf{0}-e)\right]=-V_{\mathbf{0}}y(\mathbf{0})$$

$$\Rightarrow -\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\left[\underset{\downarrow}{T}(ik)-ik(1-R)\right]=-V_{\mathbf{0}}y(\mathbf{0})$$

$$R=T-1$$

$$ik\left[T-1+T-1\right]=2\frac{mv_{\mathbf{0}}}{ik\mathbf{h}^2}T$$

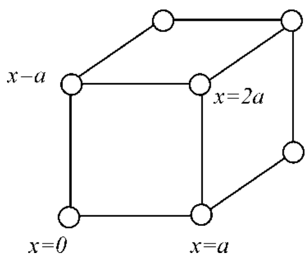
$$\Rightarrow \mathbf{l}T-1=\frac{mv_{\mathbf{0}}}{ikh^2}T=1 \rightarrow \qquad T=\frac{1}{1-\frac{mv_{\mathbf{0}}}{ik\mathbf{h}^2}}$$

$$R=T-1=\frac{\frac{mv_{\mathbf{0}}}{ik\mathbf{h}^2}}{1-\frac{mv_{\mathbf{0}}}{ik\mathbf{h}^2}} \qquad R=\frac{1}{i\frac{k\mathbf{h}^2}{mv_{\mathbf{0}}}-1}$$

پتانسل کرونینگ ـ پنی :

در این مدل: $V(x+a)=V(x)$

خواص تاع موج : $\psi(x+a)=e^{ika}\psi(x)$



نمادگذاری دیراک

تعریف بردار کت ket:

$$|a>=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

تعریف فضای هلیبرت :

فضایی است که پایه های فضا بردارهای ket باشند.

تعریف بردار بر

Bera: $<b|=(b_1 b_2 .... b_n .....)$

تعریف ضرب داخلی:

$$<a|b>= \quad =\sum_n a_n^* b_n$$

تعریف عملگر واحد:

$$1=\sum_a |a><a|$$

اثبات : باید ثابت دهیم:

$$\hat{1}|a'>| = \sum_a |a><a|a'> = \sum_a a>\delta_{aa'} = 1a'>$$

$d_{aa'}$ اگر بهنجار باشد

تعریف تابع موج سیستم فیزیکی در فضای x:

فرض کنید حالت یک سیستم را به صورت بردار حالت $|a>$ نشان دهیم.

تعریف می کنیم:

$$y_a(x) \equiv \text{تابع موج} = <x|a>$$

نکته: اگر $\sum_a |a><a| = \hat{1}$ عملگر واحد باشد آنگاه:

$y_a^*(x) = <x|a>^* = <a|x>$ (جای سطر و ستونها عوض می‌شود)

بازنویسی روابط ارزش انتظاری معادله ویژه مقداری، تعامد و ... بر حسب نمادگذاری دیراک

1ــ بازنویسی انرژی انتظاری

$$<A>_y = <y|\hat{A}|y> = \int_{-\infty}^{+\infty} y^* \hat{A} y \, dx$$

2ــ تابع احتمال

$$p(x't) \equiv <y(x,t)|y|(x;t)> = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(x;t)|^2 dx$$

3ــ رابطه تعامد بین ویژه توابع $y_n(x)$:

$$<y_n(x)|y_m(x)> = \int_{-\infty}^{+\infty} y_n^* y_m(x) dx = d_{nm}$$

4ــ رابطه تعامد بین ویژه توابع $y_n(x)$:

$$<y_n(x)|y_n(x)> = \int_{-\infty}^{+\infty} y_n^2 dx = 1$$

تحول زمانی یک عملگر و انرژی انتظاری آن

فرض کنید یک عملگر $\hat{A}$ در زمان $t=0$ به صورت $\hat{A}(\mathbf{0})$ باشد. اکنون می خواهیم تحول آن را تحت عملگر $\hat{H}$ (هامیلتون) در زمان دلخواه t بدست آوریم فرض می کنیم:

$$\hat{A}(t)=\hat{S}(t)\hat{A}(\mathbf{0})\ \hat{S}^{-1}(t)$$

که در آن $\hat{S}(t)$ (یا $\hat{U}(t)$) عملگر تحول زمانی خوانده می‌شود.

می توان نشان داد:

$$\hat{A}(t)=e^{+i}\hat{A}(\mathbf{0})e^{-i\hat{H}t/\mathbf{h}}$$

مثال) وابستگی زمانی عملگر $\hat{p},\hat{x}$ را برای ذره‌ای که در یک جعبه قرار دارد بر حسب زمان بدست آورید.

حل)

$$\hat{x}(t)=e^{+i\,\hat{H}t/\mathbf{h}}\ \ \hat{x}(\mathbf{0})e^{-i\hat{H}t/\mathbf{h}}=\exp(\frac{i\hat{p}^2}{2m\mathbf{h}}t)\hat{x}(\mathbf{0})\ \ \ \exp(\frac{-i\hat{p}^2}{2m\mathbf{h}}t)$$

$$\hat{H}=\frac{\hat{P}^2}{2m}$$

نکته مهم: لِم‌بیکر ـ هاوسدورف

$$e^{iGl}\,Ae^{-iGl}=A+i\frac{l}{1!}[G,A]+\frac{i\,l^2}{2!}[G,[G,A]]+.....$$

در نتیجه:

$$\hat{x}(t)=\hat{x}(\mathbf{0})+\frac{it}{\mathbf{h}}.\frac{1t}{\mathbf{h}}.\frac{1}{1!}[H,x]+\left(\frac{it}{h}\right)^2.\frac{1}{2!}\ [H_1[H,u]]+.....$$

ولی : $H=\dfrac{\hat{P}^2}{2m}$

$$[H,x]=\frac{1}{2m}\left[p^2,x\right]=\frac{1}{2m}(-2i\hbar p)=-\frac{i\hbar p}{m}$$

$$[H,[H,x]]=\left[\frac{\hat{P}^2}{2m},-i\hbar\frac{\hat{p}}{m}\right]=0$$

و بقیه همه صفر هستند پس:

$$\hat{x}(t)=\hat{x}(0)+\frac{it}{\hbar}.-i\hbar\frac{\hat{p}}{m}=\hat{x}(0)+\hat{p}\frac{(0)}{m}t$$

و به طور مشابه: $\hat{p}(t)=\hat{p}(0)$

نکته مهم:

جابجاگر x یا هر تابعی ازp:

$$[x,f(p)]=i\hbar\frac{df}{dp}$$

جابجا گر p با هر تابعی از x:

$$[p,g(x)]=-i\hbar\frac{dg}{dx}$$

تمرین: برای نوسانگر هماهنگ ساده :

$\hat{H}=\frac{\hat{P}^2}{2m}+\frac{1}{2}mw^2x^2$: نشان دهید

$$\hat{x}(t)=\hat{x}(0)\cos wt+\frac{\hat{p}(0)}{mw}\sin wt$$

معادله حرکت هایزنبرگ برای عملگر $\hat{A}$:

می توان تحولات زمانی $\hat{A}$ را در معادله زیر خلاصه کرد:

$$d\frac{\hat{A}}{dt}=\frac{\partial\hat{A}}{dt}+\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{A}\right]$$

که در آن $\hat{H}$ هامیلتونی سیستم است.

نکات مهم:

(1) $\frac{d\hat{H}}{dt}=\frac{\partial\hat{H}}{\partial t}$

(2) اگر $\hat{A}$ ثابت وکت باشد یعنی $\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}=0\ ,\ \frac{d\hat{A}}{dt}=0$

آنگاه: $\left[\hat{H}_1,\hat{A}\right]=0$

(3) قضیه اهرنفست $\frac{d\hat{x}}{dt}=\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{x}\right]$

Ehrenfest $\frac{d\hat{p}}{dt}=\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{P}\right]$

(4) برای یک سیستم دلخواه کوانتمی با هامیلتونی $\hat{H}$ در حالت کلی:

$$\left[\hat{x}(t_1),\hat{x}(t_2)\right]_- \neq 0 \quad , \quad \left[\hat{p}(t_1),\hat{p}(t_2)\right]\neq 0$$

مثال) اگر $\hat{x}(t)$ عملگر $\hat{x}$ برای ذره ای در جعبه باشد. مقدار جابجاگر $\left[\hat{x}(0),\hat{x}(t)\right]$ چقدر است ؟

1) صفر 2) $i\hbar$ 3) $i\hbar t/m$ 4) $-i\hbar/m\,t$

حل) گزینه (3) صحیح است.

از مسائل قبل

$$\hat{x}(t)=\hat{x}(0)+\hat{p}\frac{(0)}{m}t$$

$$\left[\hat{x}(0)\hat{x}(t)\right]=\left[\hat{x}(0),\hat{x}(0)+\hat{p}\frac{(0)}{m}t\right]=\left[\hat{x}(0),\hat{x}(0)\right]$$

$$+t/m\left[\hat{x}(0),\hat{p}(0)\right]=i\hbar t/m$$

مجموعه تست

1ـ متغیرهای کلاسیکی p,x^2 را در نظر می گیریم. معادل اپراتوری $x^2 p$ کدام است ؟

1) $\frac{1}{2}\left(x^2 p+px^2\right)$
2) $\frac{1}{2}\left(x^2 p-px^2\right)$
3) $\frac{1}{4}\left(x^2 p-2x\,px+px^2\right)$
4) $\frac{1}{4}\left(x^2 p+2xpx+px^2\right)$

2ـ اگر عملگر $\hat{o}$ به صورت $\hat{o}y\left(x\right)=\int_{-\infty}^{x}dx'\left[y\left(x'\right)x'\right]$ تعریف شود. ویژه تابع آن با توجه به معادله ویژه مقداری $\hat{o}y = l\,y\left(x\right)$ کدام است؟

1) $y\left(x\right)=e^{+l^2\frac{x^2}{2}}\ ,\ \ l\neq \mathbf{0}$
2) $y\left(x\right)=e^{-l^2\frac{x^2}{2}}\ ,\ \ l\neq \mathbf{0}$
3) $y\left(x\right)=e^{lx^2}\ ,\ \ l<\mathbf{0}$
4) $y\left(x\right)=e^{\frac{x^2}{2l}}\ ,\ \ l<\mathbf{0}$

3ـ رابطه عدم قطعیت بین مختصات $\mathbf{x}$ و انرژی جنبشی $T=\frac{P_x^{2}}{2m}$ عبارت است از $\Delta x\Delta T\geq .....$

1) $\frac{\mathbf{h}}{2}\left[<\frac{p}{m}>\right]$
2) $\frac{\mathbf{h}}{2}.\frac{1}{m}$
3) $\frac{\mathbf{h}}{2}<\frac{p^2}{2m}>$
4) $\frac{\mathbf{h}}{2}$

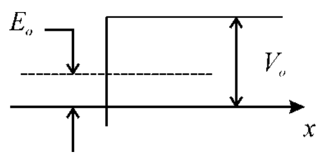
4ـ اگر کوچکترین ویژه مقدار عملگر $\mathbf{A}$ برابر $\mathbf{a}$ و کوچکترین ویژه مقدار عملگر $\mathbf{B}$ ، $\mathbf{b}$ باشد در این صورت کوچکترین ویژه مقدار عملگر $\mathbf{C=A+B}$ برابر است با $\mathbf{c}$ به طوری که :

1) $c=a+b$
2) $c>a+b$
3) $c\geq a+b$
4) $c<a+b$

5ـ هرگاه تابع حالت یک ذره حقیقی باشد مقدار انتظاری، p ، $<p>$ برابر می‌شود با:

1) صفر
2) بستگی به نوع تابع دارد
3) موهومی خالص
4) مقدار حقیقی اما مخالف صفر

6ـ ذره ای با انرژی مثبت $E < V_0$ با پله پتانسیل مقابل روبرو می شویم می توانیم بگوییم :



1) شار عبوری برابر صفر است

2) تابع موج ذره در سمت راست سینوسی است

3) احتمال وجود ذره در $X > 0$ صفر است

4) انرژی ذره در سمت راست بیشتر از مقدار آن در سمت چپ است .

7ـتوابع ویژه یک ذره در یک چاه پتانسیل ∞ که در فاصله صفر و L قرار دارد، عبارتند از : $\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{np}{L}x$

. تابع موج ذره چنان است که در لحظه $t=0$ با احتمال مساوی در حالات اول و دوم قرار دارد. مقدار مورد

انتظار انرژی در لحظه $t=0$ بااحتمال مساوی در حالات اول و دوم قرار دارد. مقدار مورد انتظار انرژی در

لحظه t چقدر است؟

1) E_1+E_2 2) $\frac{1}{2}(E_1-E_2)$

3) $\frac{1}{2}(E_1+E_2)$ 4) تابع t است اما نامعین است

8ـ ذره آزادی که جرم آن m ات با تابع موج یک بعدی $y=\sqrt{c}\, e^{ip\frac{x}{\hbar}}$ توصیف می‌شود. شار احتمال این ذره کدام است؟

1) $\frac{p}{m}$ 2) $\frac{cp}{m}$ 3) $2\sqrt{c}\,\frac{p}{m}$ 4) $\sqrt{c}\,\frac{p}{m}$

9ـکدامیک از عملگرهای زیر هرمیتی نیستند؟

1) xy   2) xp_x 3) xp_y 4) xzp_y

10ـ در چاه پتانسیل $V(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le a\\ \infty & \text{بقیه نقاط}\end{cases}$ کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟

1) $<x>=0$ 2) $<x^2>=0$ 3) $<p>=0$ 4) $<p^2>=0-4$

11ــ در مکانیک کوانتمی تابع موج و مشتق اول مکانی آن باید......

1) متناهی تک مقدار پیوسته باشد.
2) متناهی چند مقدار و ناپیوسته باشند.
3) مساوی باشند
4) تک مقدار و پیوسته باشند.

12ــکدام یک از توابع ذیل برای یک تابع حالت حداقل عدم یقین را در بر دارد؟

1) دلتای دیراک
2) سینوسی
3) گوسی
4) لورنتسی

13ــ احتمال انعکاس یک ذره با انرژی 100**Mev** از یک سد پتانسیل به ارتفاع 19**Mev** برابر است با :

1) $\frac{1}{(91)^2}$
2) $\frac{1}{(19)^2}$
3) $\frac{1}{9^2}$
4) $\frac{1}{19}$

14ــ تبهگنی هاملیتونی ذره آزاد با 1 درجه آزادی برابر است با :

1) 1
2) 2
3) 3
4) ندارد

15ــ فرض کنید احتمال عبور یک ذره از یک سد پتانسیل به صورت e^{-2ka} باشد که در آن **a** عرض سد و $k_i = \frac{[2m(E_i - V)]^{\frac{1}{2}}}{\mathbf{h}}$ باشد. احتمال عبور برای اینکه ذره‌ای از **N** سد پتانسیل در عبور کند عبارتست از:

1) $\exp\left(-2\sum_{i=1}^{N} k_i a_i\right)$
2) $\sum_{i=1}^{N} \exp(-2k_i a_i)$
3) $\sum_{i=1}^{N} \exp(-2k_i a_i)/N$
4) $N \exp\left[-\sum_{i=1}^{N} k_i a_i\right]$

15ــ در نظریه کوانتمی فیزیک کدام گزینه صحیح است ؟

1) باید از کمیات غیر کوانتیده صرفنظر کرد
2) باید تمام مفاهیم کلاسیکی را کنار گذاشت
3) باید کلیه کمیتهای کلاسیکی را کوانتیزه کرد
4) باید مفهوم قطعیت کلاسیکی را با مفهوم احتمالی جایگزین کرد.

16ـ اصل انطباق بیان می‌کند که نتایج فیزیک کلاسیکی باید:

1) به صورت حالات حدی مکانیک کوانتمی باشند.

2) با نتایج مکانیک کوانتمی منطبق باشند

3) در ابعاد ماکروسکوپیکی مکانیک کوانتمی درست نیست

4) مکانیک کوانتمی فقط در انرژی های پایین درست است

17ـچنانچه B,A عملگر و a عددی غیر حقیقی باشد کدام گزینه نادرست است؟

1) $\left(A^t\right)^t = A$

2) $(A+B)^t = A^t + B^t$

3) $(aA)^t = aA^t$

4) $(AB)^t = B^t A^t$

18ـ عملگرهای A و B هر دو هرمیتی هستند. جابه جاگر این دو عملگر $[A,B]$ عملگری ... است .

1) پادهرمیتی 2) صفر 3) نامشخص 4) هرمیتی

19ـ شرط آنکه عملگر $\exp\left(\frac{-iHt}{\hbar}\right)$ یکانی (یونیتری) باشد چیست؟ (H مستقل از زمان است)

1) $H^{-1} = H^{+}$ 2) $H = H^{t}$ 3) $H = H^{*}$ 4) $H = H^{-1}$

20ـ در اندازه گیری یک عملگر تنها مقادیر ... عملگر اندازه گیری می‌شود ؟

1) ارزش انتظاری 2) متوسط 3) نامشخص 4) ویژه

21ـ اگر تابع موج ذره ای در فضای مکان حقیقی باشد چگالی شار احتمال آن برابر کدام است ؟

1) صفر 2) حقیقی غیر صفر 3) مختلط 4) موهومی

22ـ هرگاه $p_{ab}(t)$ احتمال یافتن ذره در فاصله $a \le x \le b$, $J(x,t)$ شار احتمالی آن باشد داریم:

1) $\frac{d}{dt} p_{ab}(t) = 0$

2) $\frac{d}{dt} p_{ab}(t) = J(a,t) - J(b,t)$

3) (c ثابت است) $\frac{d}{dt} = p_{ab} = c$

4) $d\frac{p_{ab}(t)}{dt} = J(a,t) + J(b,t)$

23ــ پرتوی از ذرات با تابع موج $y = Ae^{ikx}$ با مانع پتانسیل یک بعدی $V(x) = V_0 d(x)$ برخورد می‌کند.

احتمال انعکاس این پرتو برابر کدام است ؟

1) 1

2) $\dfrac{m^2 v_0{}^2}{\left(m^2 V_0^2 + \mathbf{h}^2 k^2\right)}$

3) $\dfrac{\mathbf{h}^2 k^2}{m^2 V_0^2}$

4) $\dfrac{m v_0}{m v_0 + \mathbf{h}^2 k}$

24ــ ذره ای در پتانسیل ی بعدی دلتای دیراک $V(x) = -V_0 d(x)$ $(V_0 > 0)$ قرار دارد. تعداد حالات مقید این ذره کدام است ؟

1) صفر

2) یک

3) دو

4) بی نهایت

25ــ جوابهای معادله شرویندگر $\left(-\dfrac{\mathbf{h}^2}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2} + kx\right)u = Eu$ پاریته ...

1) زوج دارند

2) فرد دارند

3) مشخصی ندارند

4) های زوج و فرد مجزا دارند

26ــدر مورد نوسانگر هارمونیک رابطه جابجایی بین اپراتور مختصات هایزبنرگی در زمان t_1 و اپراتور مختصات هایزبنرگی در زمان t_2 به کدام صورت است ؟.

1) 0

2) غیر صفر ولی مستقل از زمان های t_2, t_1

3) متناسب با $\sin w[t_1 - t_2]$

4) متناسب با $\cos w(t_1 - t_2)$

27ــ اگر هامیلتونی سیستمی $H = \dfrac{p^2}{2m} + V(x)$ باشد مقدار $\dfrac{d}{dt} < x^2 >$ برابر است با :

1) $\dfrac{1}{m}[< px > - < xp >]$

2) $\dfrac{2}{m} < px >$

3) $\dfrac{1}{m}[< px > + < xp >]$

4) $\dfrac{1}{m}[< p^2 >< x^2 >]$

28ـ چنانچه $o_i\ ,\ i=1,\dots n$ ویژه مقادیر عملگر هرمیتی **o** باشند در این صورت عملگر $\underset{i=1}{\overset{n}{p}}\left(o-o_i\ I\right)$ برابر است با عملگر :

1) صفر   2) 1   3) O   4) O^2

29ـ پاد جابجایی دو عملگر B, A صفر است اگر y ویژه حالت مشترک این دو عملگر باشند کدام گزینه در مورد ویژه مقدار **b,a** آنها درست است ؟

1) $a\neq \mathbf{0}\ ,\ b\neq \mathbf{0}$ 2) $ab=\mathbf{0}$ 3) $a=b\neq \mathbf{0}$ 4) $a=-b\neq \mathbf{0}$

30ـ چنانچه کلیه حالتهای دستگاهی دارای پاریته مشخص باشند مقدار چشم داشتی عملگر اندازه حرکت $\vec{p}$ برابر است با :

1) صفر   2) غیر صفر   3) نامشخص   4) $\mathbf{h}$

31ـ اگر هاملیتونی دستگاهی **H** و تابع موج آن y باشد چنانچه به هاملیتونی عدد ثابت V_0 را اضافه کنیم تابع موج کدام است ؟

1) $e^{iV_0 t/h}\ y$ 2) $\left(1+e^{-iV_0\ t/\mathbf{h}}\right)y$ 3) $\left(1-e^{-iV_0\ t/\mathbf{h}}\right)y$ 4) $e^{-iV_0\ t/\mathbf{h}}\ y$

32ـ کدامیک از مقادیر زیر ویژه مقدار عملگر $\hat{A}=e^{-ia\frac{\hat{p}_X}{\mathbf{h}}}$ است که در آن **a** کمیتی ثابت و $\hat{p}_x$ عملگر تکانه خطی در راستای **x** است. (در گزینه ها **p** عدد حقیقی دلخواهی است)

1) a   2) p   3) ap   4) $e^{-iap/\mathbf{h}}$

33ـ اگر $U_n^{(+)}\ (x)$ ویژه توابع با پارتیه فرد هامیلتونی ذره ای در چاه پتانسیل متقارن یک بعدی باشند کدامیک از کمیات صفر نیست؟ (در گزینه ها **x** عملگر مکان و **p** عملگر تکانه در راستای **x** است) ویژه توابع با پارتیه زوج و $U_n^{(-)}\ (x)$

1) $<u_n^{(+)}(x)\left|x^3 p\right|U_n^{(+)}>$ 2) $<U_n^{(-)}\left|x^2 p\right|U_n^{(-)}>$

3) $<U_n^{(+)}\left|xp^2\right|U_n^{(+)}>$ 4) $<U_n^{(+)}\left|xp\right|U_n^{(-)}$

34ــ در یک بعد ذره ای در پتانسیل $V(x)$ قرار دارد و تابع حالت آن $y\ (x)$ یکی از ویژه حالات هامیلتونی سیستم است ناگهان پتانسل فوق در همه جا صفر می‌شود (پتانسیل خاموش می شود) در این صورت دامنه احتمال آنکه اندازه حرکت خطی سیستم دو بازه تکانه $p\ ,\ p+dp$ باشد چقدر است ؟

1) متناسب با تبدیل معکوس فوریه $y_{(x)}$

2) متناسب با $|y\ (x)|^2$

3) متناسب با ارزش انتظاری اندازه حرکت خطی در حالت $y\ (x)$

4) صفر

35ــ دو کمیت فیزیکی B,A چنان اند که $[A,B]=aI$ و a عدد ثابت مختلطی و I عملگر همانی است در این صورت کدام گزاره درست است؟

1) B,A می توانند به صورت عملگرهای دیفرانسیلی باشند.

2) وجود نمایش ماتریس با بعد محدود یا نمایش عمگر دیفرانسیلی برای این کمیتها بستگی به این دارد که A و B چه نوع کمیت های فیزیکی باشند.

3) تنها می توان نمایش ماتریس با بعد محدود برای A و B پیدا کرد.

4) برای A و B می توان هم نمایش ماتریسی با بعد محدود و هم نمایشی دیفرانسیلی پیدا کرد.

36ــ $y\ (x)=Ae^{-bx3}$ که در آن A و b ضرایبی ثابت می‌باشند یکی از ویژه حالات هامیلتونی ذره ای در یک بعد $H=\frac{p^2}{2m}+V(x)$ است. پتانسیل $V(x)$ چنان است که $V(x=0)=0$ ویژه مقدار انرژی در این حالت و تابع پتانسیل $V(x)$ به ترتیب برابرند با :

1) $V(x)=\frac{3\mathbf{h}^{20}bx}{2m}\left(3-3bx^3\right)\ ,\ E=0$

2) $V(x)=\frac{3\mathbf{h}^2b}{m}\left(2-3bx^3\right)\ ,\ E=\frac{3\mathbf{h}^2b}{2m}$

3) $V(x)=-3\frac{\mathbf{h}^2bx}{2m}\left(2-3bx^3\right)\ ,\ E=0$

4) $V(x)=\frac{3\hbar^2 b}{m}\left(2+3bx^3\right)\ ,\ E=\frac{3\hbar^2 b}{2m}$

37ـ در مسایل یک بعدی که ذره در راستای محور x ها حرکت می‌کند اگر تابع حالت ذره علاوه بر آنکه ویژه حالت H هامیلتونی ذره است . ویژه حالت عملگر پاریته p نیز باشد در این صورت :

1) بسته به آنکه پاریته تابع حالت سیستم زوج و یا فرد باشد پتانسیل نسبت به x تابعی زوج یا فرد است

2) پتانسیلی که این سیستم در آن قرار دارد تابع زوجی از مختصه x است

3) پتانسیلی که این سیستم در آن قرار دارد تابع فردی از مختصه x است

4) پتانسیلی که این سیستم در آن قرار دارد نه تابع زوج و نه تابع فردی از مختصات است.

38ـ اگر دو عملگر B,A باشند در چه مواردی اتحاد $e^{A+B}=e^A e^B$ برقرار است ؟

1) فقط اگر B, A یکانی (unitary) باشند.

2) فقط اگر B,A هرمیتی باشند

3) اگر B,A جابه جا شوند.

4) همواره برقرار است

39ـ اگر عدم قطعیت در یقین انرژی یک ذره آزاد به جرم m که در راستای x حرکت می‌کند از مرتبه انرژی آن باشد در این صورت کدام گزینه برای عدم قطعیت در یقین مکان ذره صحیح است؟

1) $\Delta x \le \sqrt{\frac{2}{mE}}\,\hbar$　　2) $\Delta X \cong x$

3) $\Delta x = 0$　　4) $\Delta x \le \frac{\hbar}{\sqrt{2mE}}$

40ـ ویژه تابع عملگر اندازه حرکت خطی ویژه حالت عمگر پاریته با چه ویژه مقداری است؟

1) با ویژه مقادیر ± 1 است　2) ویژه تابع پاریته است

3) با ویژه .مقدار +1 است　4) با ویژه مقدار -1 است.

41ـ ذره ای را در پتانسیل $V(x)=-l\,d(x)$ در نظر بگیرید که در آن l عدد ثابت ثبتی است. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

1) تابع حالت این ذره در x=0 پیوسته نیست .

2) مشتق تابع حالت ذره تابع پیوسته ای از مکان x است.

3) همواره عدم قطعیت در مکان ذره صفر است

4) اندازه حرکت خطی ذره تابع ناپیوسته ای از مکان x است.

42ـ ذره ای با انرژی E در چاه پتانسیل نیمه بی نهایت $V(x)=\begin{cases}\infty & x\le 0\\ -V_0 & 0\le x<a\\ 0 & x\le a\end{cases}$ **شرطی که مقدار انرژی ذره را تعیین می‌کند چیست؟**

1) $k_1=k_2\cos k_2a$

2) $k_2=-k_1\cot g\left(k_1a\right)$

3) $k_2=k_1\tan\left(k_2a\right)$

4) $k_1=-k_2\cot g\left(k_2a\right)$

43ـ شاری از ذرات به یک سد پتانسیل یک بعدی می تابد. اگر ماتریس پراکندی به صورت $S=\frac{1}{x}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & y\end{pmatrix}$ **باشد (که در آن x و y حقیقی و $i^2=-1$) مقادیر y,x بترتیب از راست به چپ عبارتند از:**

1) $-1,\ \sqrt{2}$

2) $-1,\frac{1}{\sqrt{2}}$

3) $1,\sqrt{2}$

4) $1,\frac{1}{\sqrt{2}}$

44ـ هامیلتونی یک سیستم دو حالته به صورت:

$$H=E_0\left(|1><1|+2|1><2|+2|2><1|+4(2><2|\right)$$

داده شده است. در صورت اندازه گیری انرژی چه مقداری نتیجه می‌شود؟

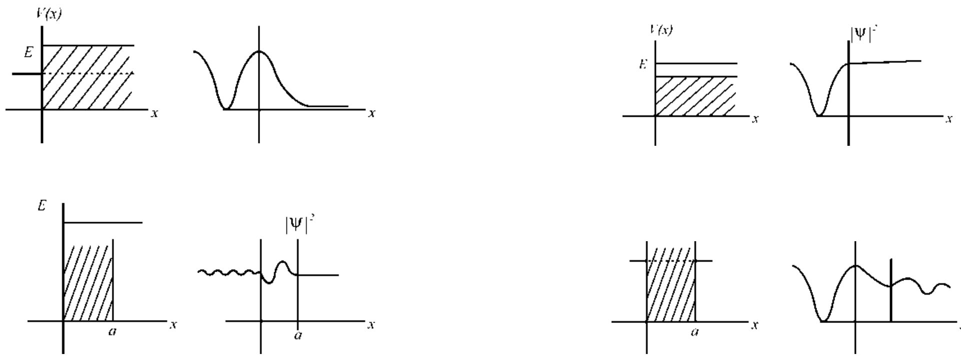
1) $4E_0\ ,\ E_0$

2) $2\left(1-\sqrt{2}\right)E_0\ ,\ 2\left(1+\sqrt{2}\right)E_0$

3) $5E_0$ و صفر

4) $6E_0\ ,\ 3E_0$

45ـ در تمام نمودارهای زیر شار ذرات با انرژی $\mathbf{E}$ از سمت چپ به روی سه پله پتانسیل تابیده است. کدام یک از نمودارها برای چگالی احتمالی $|y|^2$ نمی تواند صحیح باشد؟



46ـ ذره ای به جرم $\mathbf{m}$ در پتانسیل $V(x)=\begin{cases}\mathbf{0} & \mathbf{0}<x\\ \infty & \text{بقیه جاها}\end{cases}$ درامتداد محور $\mathbf{x}$ حرکت می کند در لحظه $t=\mathbf{0}$ تابع حالت ذره به صورت زیر است:

$$y(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\left[\frac{3}{5}\sin\left(\frac{2px}{a}\right)+\frac{4}{5}\sin\left(\frac{px}{a}\right)\right]$$

47ـ احتمال یافتن ذره در حالت پایه و اولین حالت بر انگیخته به ترتیب از راست به چپ کدام است ؟

1) $\frac{d<p>}{dt}=A-B<p>$

2) $\frac{d<p>}{dt}=<p>-B<x>$

3) $\frac{d<p>}{dt}=-A-B<p>$

4) $\frac{p<p>}{dt}=B<x>-<p>$

48ـ ذره ای به جرم $\mathbf{m}$ تحت تاثیر پتانسیل یک بعدی $V(x)=A|x|P$ در راستای $\mathbf{x}$ حرکت می کند $\mathbf{A}$ و $\mathbf{p}$ مقادیری ثابت و مثبتند شرط کوانتش ویلسون – زمرفیلد تابعیت مقدار انرژی $E_n>\mathbf{0}$ بر حسب $\mathbf{n}$ را چگونه پیش بینی می‌کند؟ توجه کنید که $\oint\sqrt{1-|t|}\ \ Pdt<\infty$

1) $E_n\sim n^{\frac{2p}{p+2}}$

2) $E_n\sim n^{\frac{p+2}{2p}}$

3) $E_n \sim n^{\frac{p-2}{2p}}$　　4) $E_n \sim n^{\frac{2p}{p-2}}$

49ـ ذره ای در یک بعد تحت پتانسیل $V(x)=A|x|$ قرار دارد. **A** عدد مثبتی است . انرژی حالت پایه این ذره با استفاده از اصل عدم قطعیت چه تابعی از **A** است؟

1) A　　2) $A^{\frac{1}{3}}$　　3) $A^{\frac{2}{3}}$　　4) $A^{\frac{4}{3}}$

50ـ ذره ای در چاه پتانسیل یک بعدی $V(x)=\begin{cases} Ax & x>0 \\ \infty & x<0 \end{cases}$ که **A** مقدار ثابت مثبتی است قرار دارد ویژه تابع دقیق انرژی در نمایش ممنتوم $f(p)$ با ویژه مقدار انرژی $E>0$ باشد و $f(0)=C$ ، کدام است ؟

1) $Ce^{-i\frac{A}{\hbar}}\ \frac{p^3}{3m}-Ep$　　2) $Ce^{-\frac{i}{\hbar}}\ \frac{p^3}{2m}-Ep$

3) $Ce^{-\frac{i}{A\hbar}}(\frac{p^3}{3m}-Ep)$　　4) $Ce^{\frac{i}{\hbar}}\ (\frac{p^3}{6m}-Ep)$

51ـ عملگر **A** به صورت $\hat{A}\, f(x)=\int_0^x f(x')dx'$ تعریف می‌شود حاصل جابجاگر $[\hat{x},\hat{A}]$ کدام است؟

1) 0　　2) $\hat{A}$　　3) $\hat{x}$　　4) $\hat{A}^2$

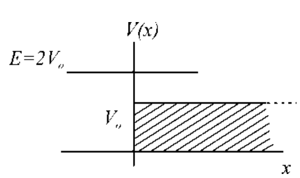
52ـ تابع موج ذره ای به جرم **m** در یک بعد **x**، $y\,(x,t)=\left[Ae^{\frac{ipx}{\hbar}}+Be^{-\frac{ipx}{\hbar}}\right]e^{-i\frac{p^2t}{2m\hbar}}$ است. چگالی جریان متناظر این موج کدام است؟ (**B,A** اعداد ثابت مختلطی هستند)

1) $\frac{p}{m}\left(|A^2|+|B^2|\right)$　　2) $\frac{p}{m}\left(|A^2|-|B^2|\right)$

3) $\frac{P}{m}\left(|A|^2-|B|^2\right)\cos\frac{p^2t}{2m\hbar}$　　4) $\frac{p}{m}\left(|A|^2\cos\frac{px}{\hbar}-|B|^2\sin\frac{px}{\hbar}\right)$

53ـ ذره ای به جرم **m** در یک بعد به یک پله پتانسیل به ارتفاع V_0 برخورد می‌کند. اگر انرژی $2V_0$ باشد احتمال انعکاس ذره از این سد تقریبا چند درصد است ؟

1) 0　　2) 3/4



11 (3   16/6 (4

54ـ ذره ای به جرم m در چاه پتانسیل یک بعدی نامتناهی که دیواره های آن در x=0 و x=a است قرار دارد. تابع حالت این ذره تابع بهنجار $y(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{px}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\sin\frac{p\,x}{a}\right)$ است. ارزش انتظاری انرژی ذره در این حالت چقدر است ؟

1) $\frac{5\mathbf{h}^2p^2}{4ma^2}$ 2) $\frac{5\mathbf{h}^2p^2}{16ma^2}$ 3) $\frac{17\mathbf{h}^2p^2}{4ma^2}$ 4) $\frac{17\mathbf{h}^2p^2}{2ma^2}$

55ـ ذره ای به جرم m در بعد تحت پتانسیل $V(x)=-V_0d(x)$ قرار دارد. V_0 مقدار ثابت مثبتی است . رفتار تابع موج ذره با انرژی منفی در ناحیه $x\leq 0$ کدام است؟

1) $e^{i\frac{mv_0}{2\mathbf{h}^2}x}$ 2) $e^{-\frac{mv_0}{2\mathbf{h}^2}x^2}$ 3) $e^{-\frac{mv_0}{4\mathbf{h}^2}x}$ 4) $e^{-\frac{mv_0}{\mathbf{h}^2}x}$

56ـ عملگر هایزبنرگی مکان یک ذره آزاد در یک بعد (راستای x) در حرکت در لحظه t کدام است؟ ($\hat{x}(0)$ عملگر مکان و $\hat{p}(0)$ عملگر ممنتوم در لحظه صفر است)

1) $\frac{\hat{p}(0)}{m}t$ 2) $\hat{x}(0)$ 3) $\hat{x}(0)+t\frac{\hat{p}(0)}{m}$ 4) $\hat{x}(0)+2t\frac{\hat{p}(0)}{m}$

57ـ انرژی کل یک توپ بعد از زمین خوردن به صورت $E=\frac{pz^2}{2m}+mgz$ است که در آن z ارتفاع توپ و p_z اندازه حرکت آن است. چنانچه از قانون کوانتش زومرفلد $\oint pdq=nh$ استفاده کنیم. انرژی ترازهای مختلف توپ کدام است؟

1) $E_n=\left(\frac{4}{3}ng\ h\sqrt{\frac{m}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$ 2) $E_n=\left(\frac{4}{3}ngh\sqrt{\frac{m}{4}}\right)^{\frac{3}{2}}$

3) $E_n=\left(\frac{3}{4}ngh\sqrt{\frac{m}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$ 4) $E_n=\left(\frac{3}{4}ngh\sqrt{\frac{m}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}$

58ـ هامیلتونی یک ذره کلاسیک به صورت $H = l x^2 p$ است. هامیلتونی کوانتمی این ذره به کدام شکل می تواند باشد؟ (l ثابت حقیقی است)

1) $\frac{l}{2}\left(x^2 p - p x^2\right)$
2) $l x^2 p$
3) $\frac{l}{4}\left(x^2 p + 2xpx + p x^2\right)$
4) $\frac{l}{2}\left(x^2 p + 2xpx + p x^2\right)$

59ـ عملگر $\mathbf{L}$ در ناحیه $-a \le x \le a$ به صورت $L\, f(x) = \frac{h}{i}\frac{df}{dx} - bx$ تعریف شده است و توابع $\mathbf{f}$ در شرط مرزی $f(a) = f(-a)$ صدق می‌کند. ویژه مقادیر این عملگر کدام است؟ ($\mathbf{n}$ عددی صحیح است)

1) $l = \frac{2pn}{a}$
2) $l = \frac{np}{2a}$
3) $l = \frac{np\mathbf{h}}{a}$
4) $l = \frac{np\mathbf{h}}{2a}$

60ـ تابع موج ذره ای آزاد در فضای یک بعدی به صورت بسته موجی است که با رابطه $y(x) = \left(\frac{a}{p}\right)^{\frac{1}{4}} e^{a\frac{x^2}{2}}$ تعریف می‌شود. مقدار انتظاری اندازه حرکت خطی ذره کدام است؟ $y(x) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{p}}{a}\right)$

1) 0
2) $\mathbf{h}\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a}{p}}$
3) $\sqrt{\frac{p}{a}}$
4) $\frac{\mathbf{h}}{\sqrt{a}}$

61ـ ذره ای در چاه بی نهایت ک بعدی که دیواره ای آن در $x = 0$, $2L$ قرار دارد. حرکت می‌کند کدام یک زا توابع نمی تواند تابع موج ذره باشد؟ .

1) $y(x) = \begin{cases} \sin\frac{px}{L} & 0 < x < 2L \\ 0 & \text{سایر} \end{cases}$

2) $y(x) = \begin{cases} x(x - 2L) & 0 < x < 2L \\ 0 & \text{سایر} \end{cases}$

3) $y(x) = \begin{cases} x\cos\frac{px}{2L} & 0 < x < 2L \\ 0 & \text{سایر} \end{cases}$

4) $y(x) = \begin{cases} 1 - \cos\frac{px}{L} & 0 < x < 2L \\ 0 & \text{سایر} \end{cases}$

62ـ تابع موج ذره است در جعبه ی بعدی به طول $2\mathbf{a}$ به شکل $y\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2a}}\left[\sin\frac{p}{a}x+\sin\frac{2p}{a}x\right]$ ارزش انتظاری عملگر پاریته در این حالت کدام است ؟ (**a**، **b** مقادیر ثابت حقیقی هستند)

1) -1   2) 0   3) $\frac{1}{a}$ 4) +1

63ـ a^{+} , a عملگر های پایین آورنده و بالا برنده برای نوسانگر هم آهنگ یک بعدی هستند. متوسط عملگر $e^{aa+ba^{t}}$ در حالت پایه این نوسانگر کدام است؟ (**b,a** مقادیر ثابت حقیقی هستند)

1) صفر   2) $e^{\mathbf{h}(a+b)}$ 3) $e^{\frac{1}{2}a\mathbf{h}}$ 4) $e^{-\frac{1}{2}ab\mathbf{h}}$

64ـ هامیلتونی یک سیستم کوانتومی به صورت : $H=\mathbf{h}w\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$ است. اگر انرژی این سیستم اندازه گیری شود چه مقادیری ممکن است به دست آید؟

1) $\mathbf{h}w$,$2\mathbf{h}w$, $3\mathbf{h}w$ 2) $\mathbf{h}w$, $2\mathbf{h}w$

3) $\mathbf{h}w$, $3\mathbf{h}w$ 4) $\mathbf{h}w$, $2\mathbf{h}w$ و صفر

65ـ پتانسیل $V\left(x\right)$ یک تابع زوج است کدام گزینه در مورد ویژه توابع انرژی ذره ای در این پتانسیل درست است؟

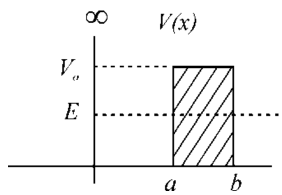
1) حتما حقیقی هستند   2) حتما مختلط هستند

3) حتما زوج هستند   4) توابع زوج و فرد امکان پذیر است

66ـ هامیلتونی نوسانگری یک بعدی با بار **e** در میدان الکتریکی یکنواخت $H=\frac{p^{2}}{2m}+\frac{1}{2}mw^{2}x^{2}-eEx$ است. معادله حرکت عملگر $x\left(t\right)$ کدام است؟

1) $\ddot{x}=-e\;\;E/m$ 2) $\ddot{x}=w^{2}x+\frac{eE}{2m}$ 3) $\ddot{x}=w^{2}x-\frac{eE}{2m}$ 4) $\ddot{x}=-w^{2}x+\frac{eE}{m}$

67ـ ذره‌ای با انرژی $E<V_0$ در پتانسیل شکل زیر قرار دارد. کدام یک از توابع موج می تواند ذره را به درستی در فاصله بین $0<x<a$ توصیف کند؟ c_2, c_1 اعداد ثابتی غیر صفرند و $k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$



1) $C_1\cos(e^{kx})$

2) $C_1 \sin kx$

3) $C_1\left[\sin(kx)+\cos(kx)\right]$

4) $c_1e^{kx}+c_2e^{-kx}$

68ـ $\vec{V}_g$ شرعت گروه بسته موج $\psi\left(\vec{r},t\right)$ مربوط به یک ذره است. اگر $\vec{V}_g$ ثابت باشد در خصوص پخش شدن بسته موج و مکان آن در لحظه t (نسبت به مکان ذره در $t=0$) چه می توان گفت؟

1) پخش نمی شود و مکان آن به اندازه $\vec{V}_g t$ جابجا میشود.

2) پخش می‌شود و مکان آن به اندازه $\vec{V}_g t$ جابجا می‌شود.

3) پخش می‌شود و مکان آن ثابت است

4) پخش نمی شود و مکان آن ثابت است

69ـ عملگر $\hat{B}$ بر حسب عملگر $\hat{A}$ به صورت $\hat{B}=e^{i\hat{A}}$ تعریف شده است. شرط خطی و یکانی بودن عملگر $\hat{B}$ کدام است ؟

1) عملگر A باید خطی و هرمیتی باشد

2) عملگر A باید خطی و متقارن باشد.

3) عملگر $\hat{A}$ باید خطی و یکانی باشد

4) عملگر $\hat{A}$ باید پادخطی و متقاصد (ارتوگونال) باشد

70ـ عملگر $B=x+a\ d/d_x$ که در آن a مقدار ثابت حقیقی است در نظر بگیرید. جابجا گر $\left[B,B^t\right]$ کدام ات؟

1) $-2a\hbar$

2) صفر

3) $2a$

4) $a\hbar$

71ـ اگر $|y>$ یک حالت دستگاه و $\hat{U}$ عملگری یکانی و $|f>=\hat{U}|y>$ باشد کدام گزینه همواره درست است ؟

1) $<y|f>=\mathbf{o}$

2) $<j|y>$ مقداری حقیقی است

3) $<y|\mathbf{l}>=<j|y>$

4) $<y|y>=<j|j>$

72ـتابع موج ذره ای در فضای اندازه حرکت خطی در یک بعد به شکل: $f(P)=\left(\frac{a}{p}\right)e^{-\frac{a p^2}{2}}$ است که در آن a مقدار ثابت حقیقی است . مقدار عدم قطعیت در سنجش اندازه حرکت خطی کدام است؟

1) $\frac{1}{\sqrt{2a}}$

2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

3) $\frac{1}{2a}$

4) $\sqrt{2a}$

73ـ کدام یک از عبارات زیر برای تبهگنی (واگنی) ویژه مقادیر انرژی در یک بعد درست است؟

1) برای حالات مقید و غیر مقید تبهگنی وجود ندارد

2) برای حالات مقید و غیره، امکان تبهگنی وجود دارد

3) برای حالات مقید تبهگنی وجود ندارد

4) برای حالات غیر مقید تبهگنی وجود ندارد

74ـ $|a>$ ویژه بردار عملگر A با ویژه مقدار $\mathbf{a}$ است و عملگر $\hat{B}$ با خاصیت $[A,B]=-B+2BA^2$ موجود است. در مورد بردار $B|a>$ کدام گزینه درست است؟

1) ویژه بردار عملگر A با همان ویژه مقدار aاست

2) چون جابجار $[A,B]$ غیر صفر است پس $B|a>$ ویژه بردار A نخواهد بود.

3) ویژه بردار عملگر A با ویژه مقدار a^2+a+1

4) ویژه بردار عملگر A با ویژه مقدار $2a^2+a-1$ است

75ـ هامیلتونی ذره‌ای را به جرم **m** در یک بعد به شکل $H=\frac{p^2}{2m}+V(x)$ است. و کدامیک از عبارات زیر صحیح است؟

1) $[x,[x,H]]=\frac{-\mathbf{h}^2}{m}$

2) $[x,[x,H]]=\frac{\mathbf{h}^2}{m}$

3) $[x,[p,H]]=\frac{\mathbf{h}^2}{m}$

4) $[p,[x,H]]=-\frac{ip^2}{2m}$

76ـ $f_1(\overset{\mathbf{r}}{x})$, $f_2(\overset{\mathbf{r}}{x})$ ویژه توابع بهنجار باویژه مقادیر یکسان عملگر **o** هستند اگر $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1^* f_2 d^3x = d$ که **d** مقداری حقیقی است کدام ترکیب خطی از f_1 , f_2 بهنجار و بر f_1 عمودی است .

1) $\frac{d}{\sqrt{1+3d^2}}\, f_1-\frac{1}{\sqrt{1+3d^2}}f_2$

2) $\frac{1}{\sqrt{1-d^2}}\, f_1+\frac{1}{\sqrt{1-d^2}}f_2$

3) $\frac{1}{\sqrt{2}}f_1+\frac{1}{\sqrt{2}}f_2$

4) $\frac{d}{\sqrt{1-d^2}}f_1-\frac{1}{\sqrt{1-d^2}}f_2$

77ـ تابع موج ذره ای در یک بعد در لحظه $t=\mathbf{o}$ به شکل $j\,(x)=\sqrt{\frac{a}{2}}e^{-a|x|}$ است که a ثابتی مثبت است.

تابع موج این ذره در فضای ممنتوم $j\,(p)$ کدام است ؟

1) $\frac{1}{\sqrt{2p\mathbf{h}}}\ \frac{2a\mathbf{h}^2}{p^3+a^2\mathbf{h}^2}$

2) $\frac{1}{\sqrt{2p\mathbf{h}}}\cdot\frac{2a\mathbf{h}^2}{p^2-a^2\mathbf{h}^2}$

3) $\frac{1}{\sqrt{2p\mathbf{h}}}\cdot\frac{1}{p^2+a^2\mathbf{h}^2}\ e^{-\frac{|p|}{a\mathbf{h}}}$

4) $\frac{1}{\sqrt{2p\mathbf{h}}}\cdot\frac{1}{p^2-a^2\mathbf{h}^2}\ e^{-\frac{|p|}{a\mathbf{h}}}$

78ـ ذره ای با انرژی $E<V_0$ در یک بعد روی یک پله پتانسیل با ارتفاع V_0 و عرض نامحدود فرود می آید.

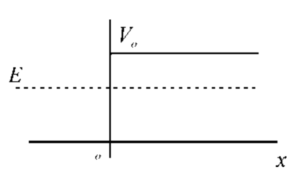
اگر $K=\sqrt{\frac{2mE}{\mathbf{h}^2}}$, $K'=\sqrt{2m\frac{(V_0-E)}{\mathbf{h}}}$ باشد اندازه ضریب عبور کدام است؟

1) صفر

2) 1

3) $\frac{4K^2}{(K^2+K'^2)}$

4) $\frac{4K'}{(k+k')^2}$



79ـ متوسط انرژی جنبشی ذره ای به جرم $\mathbf{m}$ در چاه پتانسیل یک بعدی $V(x)=\begin{cases}0 & 0<x<a\\ \infty & \text{سایر}\end{cases}$ در حالت $j(x)=l\,x(a-x)$ کدام است ؟ $\left(l=\sqrt{\dfrac{30}{a^5}}\right)$

1) صفر
2) $\dfrac{5\mathbf{h}^2}{ma^2}$
3) $-\dfrac{\mathbf{h}^2}{2ma^2}$
4) $\dfrac{p^2\mathbf{h}^2}{2ma^2}$

80ـ تابع موج ذره ای در ی بعد به شکل $j(x)=\begin{cases}Ae^{ikm}+Be^{-ikx} & 0<x<\dfrac{p}{k}\\ 0\end{cases}$ است. برای آنکه تابع موج بهنجار باشد

مقادیر ممکن $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ کدام است ؟

1) $A=B=\sqrt{\dfrac{2K}{p}}$
2) $A=-B=\sqrt{\dfrac{K}{2p}}$
3) $\dfrac{B}{A}=\sqrt{\dfrac{2K}{p}}$, A دلخواه است
4) $A=-B=\sqrt{\dfrac{2K}{p}}$

81ـ بعد (دیمانسیون) تابع موج در فضای دو بعدی کدام است؟

1) L^{-1}
2) L^{-2}
3) 1
4) L^2

82ـ عملگر $x^2\dfrac{d}{dx}$ چه نوع عملگری است ؟

1) هرمیتی و خطی
2) هرمیتی و غیر خطی
3) غیر هرمیتی و خطی
4) غیر هرمیتی غیر خطی

83ـ ماتریس $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه در مورداین ماتریس درست است؟

1) ماتریس هرمیتی است پس ویژه مقادیر آن حقیقی است
2) ویژه مقادیر مختلط است پس ویژه بردارهای آن مجموعه کامل نمی سازند.
3) ویژه مقادیر آن حقیقی است و بنابراین ویژه بردارها مجموعه کامل می سازند.
4) ویژه مقادیر آن حقیقی است اما ویژه بردارهای آن یک مجموعه کامل نمی سازند.

84ـ عملگر به شکل $Cy = y^*$ تعریف می‌شود. ویژه مقادیر این عملگر کدامند؟

1) ± 1 , $\pm i$ 2) فقط ± 1 3) فقط $\pm i$ 4) فقط $1 \pm i$

85ـ کدامیک از توابع موج زیر به عنوان تابع موج یک ذره فیزیکی در یک بعد قابل قبول است؟

(k عدد حقیقی مثبتی است)

1) $y(x) = Ae^{-kx}\ ,\ x < \mathbf{0}$

2) $y(x) = \begin{cases} e^{kx} & x < \mathbf{0} \\ 1 - e^{-kx} & x \geq \mathbf{0} \end{cases}$

3) $y(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx},\ -L \leq x \leq L$

4) $y(x) = A\tan(kx)\ \ x > \mathbf{0}$

86ـ تابع حالت وابسته به زمان ذره ای به جرم **m** در یک چاه پتانسیل با ارتفاع بی نهایت یک بعدی در فاصله $\mathbf{0} < x < 2L$ به شکل :

$$y(x,t) = A\left[3\sin\left(\frac{px}{L}\right)e^{-iEt/\mathbf{h}} - \sin\left(\frac{2px}{L}\right)e^{-iE_2\, t/\mathbf{h}}\right]$$

است. E_1 انرژی حالت پایه و E_2 انرژی اولین حالت برانگیخته است. ارزش انتظاری هامیلتونی کدام است ؟

1) $\frac{13}{8}E_1$ 2) $1/3E_1$ 3) $13E_1$ 4) $5E_1$

پاسخهای تشریحی

1ـ حل می دانیم

پس $xp \to \frac{1}{2}(xp+px)$

$$x^2 p \to \frac{1}{2}\left(x^2 p + 2xp + px^2\right)$$

گزینه 4 صحیح است.

2ـ

$$\int_{-\infty}^{x} dx'\, x' y\,(x') = l\,y \;\to xy \;= l\,y\,' \to \frac{y\,'}{y} = \frac{x}{l}$$

$$Lny \;= \frac{x^2}{2\,l} + c.t.e \to y \;\sim e^{\frac{x^2}{2\,l}}$$

گزینه (4) صحیح است

3ـ می‌دانیم

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right] = i\hat{C}$$

$$<(\Delta A)^2><(\Delta B)^2> \geq \frac{1}{4}\left|<C>\right|^2$$

$$\left[\frac{p_x^{\;2}}{2m}, x\right] = \frac{1}{2m}\left[p^2, x\right] = \frac{1}{2}\,.-2i\mathbf{h}p = -\frac{i\mathbf{h}p}{m}$$

$$(\Delta T)^2 (\Delta x)^2 \geq \frac{1}{4}(\mathbf{h}p/m)^2 = \frac{p^2\mathbf{h}^2}{4m^2}$$

گزینه 1 صحیح است.

$$(\Delta T)\,(\Delta x) \geq \frac{p\mathbf{h}}{2m}$$

4ـ گزینه 3 صحیح است .

$A|a'>=a'|a'> \qquad \min a'=a$

$B|b'>=b'|b'> \qquad \min b'=b$

$(A+B)|C'>=C'|C'> \ \min c'=? \qquad |C'>=|a'><a'|\ c'>$

$C \geq a+b$

اگر $|c'>=|a'>$ یا $|c'=|b'>$

5ـ گزینه 1 صحیح است.

$<p>=<p>^*$

$<p>=\int_{-\infty}^{+\infty} y^*(-i\hbar y')dn=-i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty} y^* y'\,dn=-i\frac{\hbar}{2}(y^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0$

6ـ گزینه 1 صحیح است. چون در $x>0$, $y\sim e^{-kx}$ و

$J=\frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}(y^* y')=0$

7ـ گزینه 3 صحیح است

$y\ (x,t=0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(y_1(x)+y_2(x))$

$y\,(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_1\frac{t}{\hbar}}y_1(x)+e^{-iE_2\,t/\hbar}\,y_2(x)\right)$

$<H>=\sum|C_n(t)|^2 E_n=\frac{1}{2}(E_1+E_2)$

8ـ شار :

$J=\frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\,(y^* y')=\frac{\hbar k}{m}\left|\sqrt{c}\right|^2$

$=\frac{\hbar k}{m}C=\frac{cp}{m}$

گزینه (2) صحیح است

9ـ گزینه (2) صحیح است.

xp_x هرمیتی نیست چون $[x, p_x] \neq 0$

10ـ می دانیم:

گزینه (3) صحیح است

$< p >= 0$

چون yحقیقی است .

11ـ گزینه (1) صحیح است

12ـ گزینه (3) صحیح است

13ـ گزینه (2) صحیح است

$E = 100 \; Mev$

$V = 19 Mev \qquad R = \left(\frac{k-q}{k+q}\right)^2$

$K^2 = 2m\frac{E}{\mathbf{h}^2} \quad q^2 = 2\frac{m}{\mathbf{h}^2}(E-V)$

$$R = \left(\frac{\sqrt{E}-\sqrt{E-V_0}}{\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{100}-\sqrt{(100-19)}}{\sqrt{100}+\sqrt{100+19}}\right)^2 = \left(\frac{10-9}{10+\sqrt{119}}\right)^2 = \left(\frac{1}{10+\sqrt{119}}\right)^2$$

$$T = 1-R = 1-\frac{1}{\left(10+\sqrt{119}\right)^2} = \frac{9+\sqrt{119}}{\left(10+\sqrt{119}\right)^2} = \frac{10}{(19)^2}$$

14ـ گزینه 4 صحیح است

15ـ گزینه (1) صحیح است

$$t=\prod_{i=1}^{N}T_i=\prod_{i=1}^{N}e^{-2k_ia_i}=e^{-2\sum k_ia_i}$$

15ـ گزینه (4) صحیح است

16ـ گزینه (1) صحیح است

17ـ گزینه (3) صحیح است

18ـ گزینه (1) صحیح است

$$[A,B]^t=(AB+BA)^t=(AB)^T-(BA)^t=B^tA^t-A^tB^t$$

$$=\left[B^t,A^t\right]=-\left[A^t,B^t\right]$$

19ـ گزینه 2 صحیح است

$$U^t=U^{-1}\Rightarrow H^+=H$$

20ـ گزینه 1 صحیح است

21ـ گزینه 1 صحیح است

22ـ گزینه 2 صحیح است

$$\frac{dJ}{dx}+\frac{dp}{dt}=\mathbf{0}\rightarrow\frac{dp_{ab}}{dt}=-\frac{dJ}{dx}=-J(b,t)+J(a,t)$$

23ـ گزینه (2) صحیح است

24ـ گزینه (2) صحیح است

25ـ گزینه (3) صحیح است

$$\left[-\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\frac{d^2}{d(-x)^2}+k(-x)\right]u(-x)=Eu(-x)$$

$u(-x)$ با $u(x)$ رابطه ای ندارد

26ـگزینه (3) صحیح است چون

$$x(t)=x(0)\cos wt+\frac{p(0)}{mw}\sin wt$$

$$[x(t_1),x(t_2)]=\left[x(0),\frac{p(0)}{mw}\right]\cos wt,\sin wt_2+\left[\frac{p(0)}{mw},x(0)\right]\sin wt_1\ \cos wt_2$$

$$=\frac{i\mathbf{h}}{mw}\sin w\ (t_2-t_1)$$

27ـ گزینه (1) صحیح است

$$=\frac{i}{\mathbf{h}}<\left[\frac{p^2}{2m}\ ,\ x\right]>=\frac{i}{2m\mathbf{h}}<[p^2,x]>$$
$$=\frac{i}{2m\mathbf{h}}<p[p,x]+[p,x]>=\frac{1}{2m}<px+xp>$$

28ـ گزینه (1) صحیح است

$$\prod_{i=1}^{n}(o-o_i II)|o_i>=\prod_{i=1}^{n}(\hat{o}\,|\,o_i>-o_i\,|o_i>)$$

29ـ گزینه 2 صحیح است

$$[A,B]_+=0$$

$$A\,|\,y\ >=a\,|y\ >\rightarrow BA|y\ >=a\,B\,|\,y\ >=ab\,|\,y\ >$$

$$B\,|\,y\ >=b\,|\,y\ >\rightarrow AB\,|y\ >=bA|\,y\ >=ba\,|y\ >$$

$$[A,B]\,|\,y\ >=2ab\,|y\ >\rightarrow ab=0$$

30ـ گزینه 1 صحیح است

$$<\vec{p}>=\int_{-\infty}^{+\infty}(-i\mathbf{h})y^{*}y'dx=i\mathbf{h}\left\{\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{\infty}\right\}$$

$$=-i\mathbf{h}\left\{\int_{0}^{\infty}y^{*}(-x)y'\cancel{(-x)}dx+\int_{0}^{\infty}\cancel{y^{*}}(x)y(x)dx\right\}=0$$

$$\pm y^{*}=\pm y$$

31ـ گزینه (4) درست است

$$H\to H+V_0$$

$$\underbrace{e^{-iHt/\mathbf{h}}\,y}_{\text{اولیه}\,y}\to e^{-iHt/\mathbf{h}}\,.\,\underbrace{e^{-iV_0t/\mathbf{h}}y}_{y\ \text{اولیه}}=e^{-ivot/\mathbf{h}}\underbrace{y}_{y\ \text{اولیه}}$$

32ـ گزینه (4) صحیح است

$$e^{-i\frac{a\hat{p}_x}{\mathbf{h}}}|p_x>=e^{-i\frac{ap_x}{\mathbf{h}}}|p_x>$$

33ـ گزینه (4) صحیح است

$x^2p\to$ فرد

$x^3p\to$ زوج

$xp\to$ زوج   < فرد |زوج| فرد> $\neq 0$

$xp\to$ فرد   < زوج |فرد| زوج> $=0$

34ـ گزینه (1) صحیح است . بعد از خاموشی پتانسیل ذره آزاد می‌شود و

معکوس فوریه $f(p)$ ~ $|f(p)|^2dp$= اعمال

35ـ گزینه (1) صحیح است

$$[A,B]=ai$$

$a \rightarrow$ مختلط $\qquad a \in \not\subset$

36ـ گزینه (3) صحیح است.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} y'' + V(x) y = E y$$

$$V(x) = \frac{E y + \frac{\hbar^2}{2m} y''}{y} = E + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{y''}{y}$$

$$y = A e^{-bx^3} = A e^{u}$$

$$y'' = A(u'' + u')^2 e^{u} = (u'' + u')^2 y$$

$$\frac{y''}{y} = u'' + u^{12} = (-6bx) + (-3bx^2)^3$$

$$= -6bx + 9b^2 x^4$$

$$V(x) = E + \frac{\hbar^2}{2m}\left(-6bx + 9b^2 x^4\right)$$

$$V(0) = 0 \Rightarrow E = 0$$

$$V(x) = \frac{3\hbar^2}{2m} x\left(-2x + 3b^2 x^3\right)$$

$$= 3\hbar^2 \frac{bx}{2m} x\left(-2 + 3bx^3\right)$$

37ـ گزینه (1) صحیح است

$[H, p] = 0 \rightarrow$ (یا زوج است یا فرد است.) $v(x)$ پاریته مشخص دارد.

38ـ گزینه (3) صحیح است

$$e^{A+B} = e^{A}e^{B}e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$$

39ـ گزینه (4) صحیح است

$$\Delta E \sim E = \frac{p^{2}}{2m} \to \frac{p\Delta p}{m} = \Delta E \to \Delta p = \frac{m\Delta E}{p} = \frac{mE}{p} = m\frac{\frac{p^{2}}{2m}}{p} = \frac{p}{2}$$

$$\Delta x\,\Delta p \ge \frac{\mathbf{h}}{2} \Rightarrow \Delta x \ge \frac{\mathbf{h}}{2\Delta p} = \frac{\mathbf{h}}{2\,p/2} = \frac{\mathbf{h}}{\sqrt{2mE}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2mE}}\ \mathbf{h}$$

40ـ گزینه (2) صحیح است

$$y_{\,p}(x) = \frac{1}{\sqrt{2M\mathbf{h}}}e^{ip\frac{x}{\mathbf{h}}}$$

$$y_{\,p}(-x) = \frac{1}{\sqrt{2p\mathbf{h}}}\ e^{-ip\frac{n}{\mathbf{h}} \neq \pm y_{\,p}(x)}$$

41ـ گزینه (2) صحیح است

$$\hat{p}_{x}y = -i\mathbf{h}\,\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = -i\mathbf{h}\left(\frac{dy_{\,+}}{dx}\right)_{0} - \left(\frac{dy_{\,-}}{dx}\right) \neq 0$$

42ـ گزینه (2) صحیح است

$$y\,(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ A\sin k_{1}x & 0 < x < a \\ B\ e^{k_{2}x} & x > a \end{cases}$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m}y'' - V_0 y = Ey$$

$$y'' = \frac{-2m}{\hbar^2}(E+V_0)y$$

$$= \frac{2m}{\hbar^2}(|E|-V_0)y$$

$$\frac{A \sin k_1 a = Be^{-k_2 a}}{Ak_1 \cos k_1 a = -Bk_2\ e^{-k_2 a}}$$

$$\tan\frac{k_1 a}{k_1} = -\frac{1}{k_2}$$

$$k_1 = -k_2 \tan k_1 a$$

$$k_1 \cot g\, k_1 a = -k_2$$

43ـ شرایط ماتریس s :

$$S^t S = 1$$

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = II \rightarrow \begin{pmatrix} S_{11}^t & S_{21}^t \\ S_{12}^t & S_{22}^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = II$$

$$\begin{cases} |S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1 \\ S_{11}^* S_{12} + S_{21}^* S_{22} = 0 \\ S_{12}^* S_{11} + S_{22}^* S_{21} = 0 \\ |S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 1$$

$$\frac{2}{x^2} = 1 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{*}\left(\frac{i}{x}\right)+\left(\frac{i}{x}\right)^{*}\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

$$\frac{i}{x^2}-\frac{iy}{x^2}=0 \qquad y=1$$

$$\left(\frac{1}{x^*}\right)\left(\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^{*}\left(\frac{i}{x}\right)=0$$

$$-\frac{i}{x^2}+\frac{iy}{x^2}=0 \rightarrow y=1$$

3 صحیح است

44ـ گزینه (3) صحیح است

$$|1>=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$|2>=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$H=E_0\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{pmatrix}$$

$$H|E>=E|E \Rightarrow>\begin{vmatrix}E_0-E & 2E_0\\2E_0 & 4E_0-E\end{vmatrix}=0 \rightarrow E^2-5E_0E+4E_0^2-4E_0^2=0$$

$$E=E_0,5E_0$$

45ـ گزینه (3) صحیح است

46ـ گزینه (2) صحیح است.

احتمال: $|C_n|^2$

$$|C_1|^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$|C_2|^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

47ـ گزینه 1 صحیح است

$$\frac{d<P>}{dt} = \frac{i}{\hbar} < [H, P] > = \frac{i}{\hbar} < [Ax + Bpx, p] >$$

$$= < i/\hbar \, \{A(-i\hbar) + Bp(i\hbar)\} > = A - B < P >$$

48ـ باتوجه به جزوه 1 صحیح است

49ـ گزینه (3) صحیح است

$$E = \frac{p^2}{2m} + A|x|$$

$$px \geq \frac{\hbar}{2} \to p \simeq \frac{\hbar}{2x}$$

$$E(x) = \frac{\hbar^2}{8mx^2} + A|x|$$

$$E'(x) = \frac{-\hbar^2}{4mx^3} + A = 0 \to x^3 = \frac{\hbar^2}{4mA} \to x = \frac{\hbar^2/3}{\sqrt[3]{4mA}}$$

$$E = \frac{\hbar^2}{8m} \cdot \left(\frac{4mA}{\hbar^2}\right)^{\frac{2}{3}} + A.\frac{\hbar^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{4mA}} \sim A^{\frac{2}{3}}$$

50ـ گزینه (4) صحیح است.

$$\left[\frac{p^2}{2m} + A\left(i\hbar\frac{d}{dp}\right)\right] f(p) = E f(p)$$

$$Ai\mathbf{h}\frac{df}{dp}=\left(E-\frac{p^{2}}{2m}\right)f(p)$$

$$\frac{df}{f}=\int\frac{1}{Ai\mathbf{h}}\left(E-\frac{p^{2}}{2m}\right)dp\rightarrow\ln f=\frac{1}{Ai\mathbf{h}}\left(Ep-\frac{p^{3}}{6m}\right)+\ln c$$

$$f\sim\exp\left\{\frac{-i}{A\mathbf{h}}\left(Ep-\frac{p^{3}}{6m}\right)\right\}=C\ \exp\left\{\frac{i}{A\mathbf{h}}\left(\frac{p^{3}}{6m}-Ep\right)\right\}$$

51ـ گزینه (4) صحیح است

$$\left[\hat{x},\hat{A}\right]y=x\int_{0}^{x}y(x')dx'-\int_{0}^{x}x'y(x')dx'$$

$$=x\int_{0}^{x}y(x')dx'-x\int_{0}^{x}y(x')dx'+\int_{0}^{x}dx'\int_{0}^{x'}dx''\,y(x'')$$

$$=A^{2}y$$

52ـ گزینه (2) صحیح است

53) گزینه (2) صحیح است

$$R=\left(\frac{k-q}{k+q}\right)^{2}=\left(\frac{\sqrt{E}-\sqrt{E-V_{0}}}{\sqrt{E}+\sqrt{E-V_{0}}}\right)^{2}=\left(\frac{\sqrt{2V_{0}}-\sqrt{2V_{0}-V_{0}}}{\sqrt{2V_{0}}+\sqrt{2V_{0}-V_{0}}}\right)^{2}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^{2}=\left(\frac{0/4}{2/4}\right)^{2}=(0/161)^{2}\sim(3/4)$$

54) گزینه (1) صحیح است

$$y(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}j_{1}(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}y_{2}(x)\right\}$$

$$y=\sqrt{\frac{2}{a}}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}y_{1}(x)+\frac{1}{\sqrt{2}}y_{3}(x)\right\}$$

$$< H >=\sum|c_n|^2E_n=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2E_1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)E_2=\frac{1}{2}(E_1-E_2)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{h}^2p^2}{2ma}+\frac{4p^2\mathbf{h}^2}{2ma^2}\right)=\frac{5p^2\mathbf{h}^2}{4ma^2}$$

55ـ گزینه (4) صحیح است

$$-\frac{\mathbf{h}^2}{2m}y''=Ey \quad (x\neq\mathbf{0})$$

$$y=\begin{cases}Ae^{-kx} & x>\mathbf{0}\\ Ae^{kx} & x<\mathbf{0}\end{cases}$$

$$y'(\mathbf{0}+e)-y'(\mathbf{0}-e)=-\frac{m}{\mathbf{h}^2}\{y(\mathbf{0})V_{\mathbf{0}}\}$$

$$k=-m\frac{V_{\mathbf{0}}}{\mathbf{h}^2}$$

$$\underset{X<\mathbf{0}}{y(X)} \sim E^{\frac{-mV_{\mathbf{0}}}{\mathbf{h}^2}X}$$

56ـ گزینه (3) صحیح است

57ـ چون $V(x)\sim|x|^p$ پس: $E\sim n^{\frac{2p}{p+2}}$

گزینه (3) صحیح است

$$p=1$$
$$E\sim n^{\frac{2}{3}}$$

$$\oint pdq=nh \quad 2\int_{\mathbf{0}}^{z_{\mathbf{0}}}pdq=nh\Rightarrow 2\int_{\mathbf{0}}^{\frac{E}{mg}}\sqrt{2m(E-mgz)}dz=nh$$

$$p=\sqrt{2m(E-mgz)} \qquad 2\sqrt{2m}\ .\ \frac{2}{3}\left(E-mgz^{\frac{3}{2}}\right)_{0}^{\frac{E}{mg}}=nh$$

$$Z_0=\frac{E}{mg} \qquad \frac{4}{3}\frac{\sqrt{2m}}{mg}\times E^{\frac{3}{2}}=nh$$

$$E=\left(\frac{3gnh}{4}\sqrt{\frac{m}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

58ـ گزینه (3) صحیح است

$$H=lx^2p\rightarrow\frac{l}{4}\left(x^2p+2xpx+px^2\right)$$

59ـ گزینه (3) صحیح است

$$Lf=lf$$

$$\frac{\hbar}{i}\ .\ f'-bf=lf\rightarrow\int\frac{f'}{f}=\int\frac{i}{\hbar}\left(l+b^{x}\right)dx$$

$$Lnf=\frac{i}{\hbar}\left(l^{x}+b\frac{x^2}{2}\right)$$

$$f=Ae^{\frac{i}{\hbar}\left(l^{x}+b\frac{x^2}{2}\right)}$$

$$f(-a)=f(a)\Rightarrow e^{2i/\hbar(l)a}=1\rightarrow 2i\frac{l}{\hbar}=2ipn$$

$$l=np\,\hbar/a$$

60ـ گزینه (1) صحیح است.

چون y حقیقی است $<p>=0$

61ـ گزینه (3) صحیح است چون:

$$x\cos\frac{px}{2L}|_{x=2L}\neq 0$$

62ـ گزینه (1) صحیح است.

$$y(-x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sin\frac{p}{a}(-x)+\sin\frac{2p}{a}(-x)\right]=-y(x)$$

$$p=-1$$

63ـ

$$<0|e^{a.a+ba^t}|0>=<0|e^{aa}e^{ba^t}e^{-\frac{1}{2}ab[a,at]h}|0>$$

$$=e^{-\frac{1}{2}abh}<0\left|e^{aa}e^{bat}\right|0>=e^{-\frac{1}{2}abh}$$

$$<0\left|e^{a\,a}e^{ba^t}\right|0>=<0\left|e^{aa}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ba^t)}{n!}\right|0>$$

$$\equiv<0\left|e^{aa}\left\{1+\frac{ba^t}{1!}+....\right\}\right|0>=<0\left|e^{aa}\right|0>$$

$$=<0|1+aa+...|0>=1$$

64ـ گزینه (3) صحیح است.

$$|H-EII|=0$$

$$\begin{vmatrix} hw-E & 0 & 0 \\ 0 & 2hw-E & hw \\ 0 & hw & 2hw-E \end{vmatrix}=0\rightarrow(hw-E)\left[(2hw-E)^2-h^2w^2\right]=0$$

$$E_1=hw\quad,\quad 2hw-E=\pm hw$$

$E_1 = \hbar w\ ,\ E_2 = \hbar w\ ,\ E_3 = 3\hbar w$

65ـ گزینه (3) صحیح است مثل S.H.O

66ـ گزینه (3) صحیح است

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}mw^2x^2 - eEx\right)$$

$$m\ddot{x} = -mw^2x + eE$$

$$\ddot{x} = -w^2x + \frac{eE}{m}$$

67ـ روشن است باید $\psi(x=0)=0$ سپس: 2 صحیح است

68ـ گزینه (2) صحیح است

69ـ گزینه (1) صحیح است

$$\hat{B} = e^{i\hat{A}}$$

$\hat{B}^t = \hat{B}^{-1} \rightarrow A^t = A \quad , \quad A=$ خطی باشد

70ـ گزینه (3) صحیح است.

می دانیم $\left[x, \frac{d}{dx}\right] = -1$ و $\left(\frac{d}{dx}\right)^t = -\frac{d}{dx}$

$$[B, B^t] = \left[x + a\, {}^{d}\!/_{dx},\, x - a\, {}^{d}\!/_{dx}\right] = -a(-1) + a(+1) = 2a$$

71ـ $<\varphi|\varphi> = <\varphi|U^tU|\varphi> = <\psi|\psi>$ 4 صحیح است

72ـ گزینه (1) صحیح است

$$f(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\quad e^{-\frac{p^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow 2\pi\sigma^2=\frac{\pi}{a}$$

$$\sigma=\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

73ـ گزینه (3) صحیح است

74ـ گزینه (4) صحیح است.

$$[A,B]|a>=(-B+2BA^2)|a>$$

$$(AB-BA)|a>=(-B+2BA^2)|a>$$

$$\Rightarrow \quad A(B|a>)=(a+2a^2-1)(\hat{B}|a>)$$

$\Rightarrow B|a>$ ویژه عملگر A با ویژه مقدار $2a^2+a-1$ است.

75ـ گزینه (1) صحیح است

$$[x,[x,H]]=\left[x,\frac{\hbar}{i}\ d\frac{dx}{dt}\right]=\left[x,\frac{\hbar}{im}p\right]=\frac{\hbar}{im}\times -i\hbar=-\frac{\hbar^2}{m}$$

76ـ گزینه (4) صحیح است

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1^*f_1dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_2^*f_2\ dx=1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1^*f_2dx=d$$

$$(a f_1+b f_2,f_1)=0\rightarrow a(f_1,f_1)+b(f_2,f_1)=0$$

$$a+bd=0\ \rightarrow b=-\frac{a}{d}$$

$$a^2+b^2=1\Rightarrow\frac{a^2}{d^2}+a^2=1\Rightarrow$$

$$\frac{a^2}{d^2}\left(1+d^2\right)=1 \Leftarrow a^2=\frac{d^2}{1+d^2} \rightarrow a=\frac{\pm d}{\sqrt{1+d^2}}$$

$$b=-\frac{a}{d}=\frac{\pm 1}{\sqrt{1+d^2}}$$

$$af_1+bf_2=\frac{\pm d}{\sqrt{1+a^2}}f_1 \, \mathrm{m} \, \frac{f_2}{\sqrt{1+d_2}}$$

$$=\frac{\pm}{\sqrt{1+d^2}}\left(df_1-f_2\right)$$

77ـ گزینه (1) صحیح است

$$j(p)=\frac{1}{\sqrt{2p\mathbf{h}}}\int_{-\infty}^{+\infty} j(x)e^{-i\,px/\mathbf{h}}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2p\mathbf{h}}}\sqrt{\frac{a}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|-i\,px/\mathbf{h}}dx$$

$$=\sqrt{\frac{a}{4p\mathbf{h}}}\left\{\int_{-\infty}^{0}+\int_{0}^{\infty}\right\}=\sqrt{\frac{a}{4p\mathbf{h}}}\int_{0}^{\infty} e^{-ax+ip\,x/\mathbf{h}}\,dx^t\int_{0}^{\infty} e^{-ax-ip\,n/\mathbf{h}}dx$$

$$=\sqrt{\frac{a}{p\mathbf{h}}}\int_{0}^{\infty} e^{-ax}\cos\left(\frac{px}{\mathbf{h}}\right)dx=\sqrt{\frac{a}{p\mathbf{h}}}\cdot\frac{a}{a^2+\frac{p^2}{\mathbf{h}^2}}=\sqrt{\frac{a}{p\mathbf{h}}}\frac{a\mathbf{h}^2}{a^2\mathbf{h}^2+p^2}$$

78ـ گزینه (4) صحیح است

$$k=\sqrt{\frac{2mE}{\mathbf{h}^2}}$$

$$k'=\sqrt{2m\frac{v_0-E}{\mathbf{h}^2}}$$

$$T=1-\left(\frac{k-k'}{k+k'}\right)^2=\frac{4kk'}{(k+k')^2}$$

79ـ گزینه (2) صحیح است.

$$<\frac{\hat{p}^2}{2m}>_j=-\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty}j''\ j\,dx=-\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty}-2l\,.\,l\ x(a-x)dx$$

$$=\frac{2\mathbf{h}^2 l^2}{2m}\int_0^a x(a-x)dx$$

$$=\frac{2\mathbf{h}^2 l^2}{2m}.\left[\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}\right]=\frac{2\mathbf{h}^2 l^2 a^3}{12m}=\frac{2\mathbf{h}^2}{6m}.a^3.\frac{30}{a^5}$$

$$=\frac{5\mathbf{h}^2}{ma^2}$$

80ـ گزینه (4) صحیح است .

$$\int_0^{\frac{p}{4}}|y|^2dx=1$$

$$Ae^{ikn}+Be^{-ikx}=C\sin kx$$

$$B=-A\qquad C=2iA$$

$$C=\sqrt{\frac{2}{a}}=\sqrt{\frac{2}{p/k}}=\sqrt{\frac{2k}{p}}$$

81ـ گزینه (1) صحیح است

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|y|^2d^2x=1$$

بعد$|y|=\frac{1}{L}=L^{-1}$

82ـ

$\left[x^2,\frac{d}{dx}\right]\neq \mathbf{0}\rightarrow$ $\qquad x^2\frac{d}{dx}=$ هرمیتی نیست ولی خطی است

$$\left(x^2\frac{d}{dx}\right)(y_1+y_2)=x^2\frac{dy_1}{dn}+x^2\frac{dy_2}{dx}$$

83ـ گزینه (4) صحیح است

$A^t=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 \\ 1 & \mathbf{0}\end{pmatrix}\neq A$ هرمیتی نیست

$$A\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}=l\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} -l & 1 \\ \mathbf{0} & -l\end{pmatrix}=\mathbf{0}\rightarrow\ l=\pm1$$

$$l=+1:\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}\ \Rightarrow\begin{pmatrix} 0 \\ a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases} a=\mathbf{0} \\ b=\mathbf{0}\end{cases}$$

$$l=-1:\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}\ \Rightarrow\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a \\ -b\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases} a=\mathbf{0} \\ b=\mathbf{0}\end{cases}$$

84ـ گزینه (1) صحیح است

$$\begin{matrix} Cy=y^* \\ Cy=l\,y\end{matrix}\Rightarrow y^*=l\,y$$

$$y=y_r+iy_i\ \rightarrow y^*=y_r-iy_i$$

$$l=l_t+il_i$$

$$y_r-iy_i=(l_i+il_i)\,(y_r+iy_i)$$

$$y_r-l_ry_r-l_iy_i\Rightarrow l_iy_i=(d_r-1)y_r$$

$$-y_i=l_iy_r+l_ry_i\Rightarrow(1+l_r)y_i=l_iy_r$$

$$\Rightarrow\frac{l_i}{l_r+1}=\frac{l_r-1}{-l_i}\Rightarrow-l_i^2=(l_r^2-1)$$

$$l_r^2+l_i^2=1$$

$$|l|^2=1$$

$$l = \pm 1 \, , \, \pm i$$

85ـ گزینه (1) صحیح است چون:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y|^2 \, dx < \infty$$

86ـ گزینه (2) صحیح است

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{1}{L}} \sin \frac{npx}{2L}$$

$$y(x,t) = A\sqrt{L} \ \left[3 j_2(x) e^{-iE_1 t/\mathbf{h}} - j_t(x) e^{-iE2\,t/\mathbf{h}}\right]$$

$$< H > = \sum |c_n|^2 \ E_n$$

$$< y(x,t) \, |y(x,t)| >= 1 \rightarrow A(2L \times 10) = 1 \rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{20L}}$$

$$< H >= \frac{9}{20} E_1 + \frac{1}{20} E_4 = \frac{9E_1 + E_4}{20} = \frac{9E_1 + 16E_1}{20}$$

$$= \frac{25}{20} E_1 = \frac{5}{4} E_1 = (1/2) E_1$$

فصل سوم: نوسانگر هماهنگ کوانتمی (S.H.O)

مقدمه: این فصل بسیار مهم است و بخاطر سپردن روابط اصلی ازاهمیت بالایی برخوردار است هامیلتونی نوسانگر کوانتمی :

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2} m w^2 \hat{x}^2$$

تعریف حالت فوتونی $|n>$: می دانیم انرژی هر نوسانگر کوانتمی بسیار مشابه یک سیستم فوتونی است یعنی انرژی هر n کوانتا (به نام فوتون) مضربی از یک مقدار پایه است. $\left(\frac{1}{2} mw\right)$ بنابراین برای نشان دادن سیستم در حالت انرژی E_n (با تابع موج y_n) می توان مقدار فوتون ها (n) را مضرب حالت سیستم گرفت یعنی:

$$y_n(x) \equiv < x | n \rightarrow \ \equiv |n>$$

تعریف عملگرهای بالا و پایین برنده:

$\hat{a} | n >= \sqrt{n} \ |n-1>$: (عملگر نابودی | $\hat{a}$ و $\hat{a}|n >= \sqrt{n+1}|n+1>$: (عملگر خلق) $\hat{a}$

$\hat{a}$ یک واحد فوتون نابود می‌کند.

بازنویسی هامیلتونی بر حسب عملگرهای $\hat{a}$, $\hat{a}^t$

می توان نشان داد:

$$\begin{cases} \hat{x} = \sqrt{\dfrac{\mathbf{h}}{2mw}} \left(\hat{a} + \hat{a}^t\right) \\ \hat{p} = -i\sqrt{\dfrac{mw\mathbf{h}}{2}} \left(\hat{a} - \hat{a}^t\right) \end{cases}$$

بنابراین :

$$\hat{H} = \mathbf{h}w\left(\hat{a}^t\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$$

از عمل دادن $\hat{H}$ بر حالت n فونونی :

$$\hat{H}\,|\,n> = \mathbf{h}w\left(\hat{a}^t\hat{a}\,|\,n\right) + \frac{1}{2}\,|\,n> = \mathbf{h}w\left(\sqrt{n}\left((n-1)+1\right)|\,n> \frac{1}{2}n\right)$$

$$= \mathbf{h}w\left(n + \frac{1}{2}\right)|\,n>$$

بنابراین :

$$H\,|\,n> E_n\,|n>$$

نکته: تعریف عملگر عدد (N) :

$$\hat{N} = \hat{a}^t\hat{a} \rightarrow \hat{N}\,|\,n> = n|\,n>$$

نکته: از عملگرهای $a^t, \hat{a}$ می توان برای محاسبه ویژه توابع $y_n(x)$ نوسانگر استفاده کرد.

$$\frac{(\hat{a}^t)^n}{\sqrt{n!}}\,|\,\mathbf{o}> = |\,n> \tag{1}$$

$$\left[\hat{a}\ ,\ \hat{a}^t\right] = 1 \tag{2}$$

$$\left[\hat{H}\,,\hat{a}\right] = \mathbf{h}w\left[\hat{N} + \frac{1}{2}, \hat{a}\right] = \mathbf{h}w\ \left[\hat{a}^t\ \hat{a}, \hat{a}\right] \tag{3}$$

نکته:

$$\left[\hat{A}\hat{B}\,,\hat{C}\right] = \hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right] + \left[\hat{A},\hat{C}\right]B$$

$$= \mathbf{h}w\left\{\hat{a}^t\ \left[\hat{a},\hat{a}\ \right] + \left[\hat{a}^t\,,\hat{a}\right]\hat{a}\right\} = -\mathbf{h}w\hat{a}$$

$$\begin{cases}[\hat{H},\hat{a}]=-\mathbf{h}wAa \rightarrow \dfrac{d\hat{a}}{dt}=-iw\hat{a} \\ [\hat{H},\hat{a}^t]=\mathbf{h}w\hat{a}^t \rightarrow \dfrac{d\hat{A}}{dt}=\dfrac{i}{\mathbf{h}}[H,A]=iw\hat{a}^t\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\hat{a}(t)=\hat{a}(\mathbf{o})e^{-iwt} \\ \hat{a}^t(t)=\hat{a}^t(\mathbf{o})e^{iwt}\end{cases}$$

$$y_{\mathbf{o}}(x)=<x\,|\,\mathbf{o}>=\sqrt{\frac{\sqrt{mw}}{p\mathbf{h}}}\ e^{-\frac{mw}{2\mathbf{h}}x^2} \qquad (4)$$

با تعریف $z=\sqrt{l}\ x\ ,\ l=\sqrt{\dfrac{mw}{\mathbf{h}}}$

$$y_{\mathbf{o}}(z)=\sqrt{\sqrt{l/p}}\,e^{-l\frac{x^2}{2}} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}|y_{\mathbf{o}}(x)|^2 d_x=1$$

$$y_n(x)=\sqrt{\frac{\sqrt{l/p}}{2^n,n!}}\ e^{-\frac{z^2}{2}}\ H_n(z) \qquad (5)$$

که در آن $H_n(z)$ توابع هرمیت nام به صورت زیر تعریف میشوند:

$$H_n(x)=e^{x^2}\ \frac{d^n}{dx^n}\ e^{-x^2}$$

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}=\sum_n\frac{H_n(x)}{n!}\ t^{\mathbf{o}x}$$

6) ارزش انتظاری عملگرهای $\hat{x}\ ,\ \hat{p}\ ,\ \hat{x}^2\ ,\hat{p}^2$ و $T^8=\dfrac{\hat{p}^2}{2m}\ \ ,\ V=\dfrac{1}{2}mw^2x^2$

$$<\hat{x}>_n=<n\,|\,\hat{x}\,|\,n>=\sqrt{\frac{\mathbf{h}}{2mw}}\ <n\,|\,a+a^t\,|\,n>=\sqrt{\frac{\mathbf{h}}{2mw}}\ \left\{\sqrt{n}<n\,|\,n-1>+\sqrt{n+1}<n\,|\,n+1>\right\}=\mathbf{o}$$

$$<\hat{x}^2>_n=<n\,|\,\hat{x}^2\,|\,n>=\frac{\mathbf{h}}{2mw}<n\,|\,\hat{a}^2+\hat{a}^2+2\hat{N}+1\,|\,n>=\frac{\mathbf{h}}{2mw}<n\,|\,2\hat{N}+1\,|\,n>$$

$$=\frac{\mathbf{h}(2n+1)}{2mw}=\frac{\mathbf{h}w}{mw^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{E_n}{mw^2}$$

$$<\hat{p}>_n=\mathbf{0}$$

$$<\hat{p}^2>_n=<n|\left(-i\sqrt{\frac{mw\mathbf{h}}{2}}\left(\hat{a}-\hat{a}^2\right)\right)^2|n>$$

$$=-\frac{mw\mathbf{h}}{2}<n|\hat{a}^2+\hat{a}^2-2\hat{N}-1|n>$$

$$=-\frac{mw\mathbf{h}}{2}\times-(2n+1)=mE_n$$

$$<V(x)>_n=<\frac{1}{2}mw^2x^2>_n=\frac{E_n}{mw^2}$$

$$<\hat{T}>_n=<\frac{\hat{p}^2}{2m}>_n=\frac{1}{2}E_n$$

سپس:

$$<\hat{x}>_n=\mathbf{0}$$

$$<\hat{x}^2>_n=\frac{E_n}{mw^2}$$

$$<\hat{p}>_n=\mathbf{0}$$

$$<\hat{p}^2>_n=mE_n$$

$$<V(x)>=\frac{E_n}{2}$$

$$<T>=\frac{E_n}{2}$$

مثال) ارزش انتظاری عملگر $\hat{U}=e^{-iHt/\mathbf{h}}$ برای حالت پایه نوسانگر هماهنگ چقدر است ؟

1) 1   2) $e^{-i\frac{wt}{2}}$ 3) e^{-iwt} 4) صفر

حل) گزینه 2 صحیح است چون:

$$<\hat{U}>_0 = <0|e^{-i\hat{H}t/\hbar}|0> = <0|e^{-i\hat{H}|0>t/\hbar}$$

$$= <0|e^{-iE_0t/\hbar}|0> = <0|e^{-iw\frac{t}{2}}|0> = e^{-iw\frac{t}{2}}<0|0>$$

$$= e^{-iw\frac{t}{2}}$$

مثال) مقدار در (trrace) عملگر $\hat{U} = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ برای نوسانگر چقدر است؟

1) 1   2) $e^{-iEt/\hbar}$ 3) $\sum_n ne^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)wt}$ 4) $\dfrac{1}{+2i\sin\frac{wt}{2}}$

حل) گزینه (4) صحیح است

$$tr(\hat{U}) = \sum_n U_{nn} = \sum_n <n|e^{-i\hat{H}t/\hbar}|n>$$

$$= \sum_{n=0} <n|e^{-iEt/\hbar}|n> = \sum_{n=0} e^{-iEnt/\hbar}<n|n>$$

$$= \sum_{n=0} e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)wt} = e^{-i\frac{wt}{2}}\sum_{n=0} e^{-(iwt)n}$$

$$= e^{-iwt_2}.\frac{1}{1-e^{-iwt}} = \frac{1}{e^{iw\frac{t}{2}}-e^{iw\frac{t}{2}}} = \frac{1}{2i\sin\frac{wt}{2}}$$

مثال) حاصل عبارت $<0|e^{ikx}|0>$ برای حالت پایه نوسانگر چقدر است؟

1) صفر   2) $e^{-\frac{\hbar k^2}{2mw}}$ 3) $e^{-\frac{\hbar k^2}{4mw}}$ 4) $e^{-\frac{\hbar k^2}{mw}}$

حل) گزینه (3) صحیح است . چون

$$<0|e^{ikx}|0>=<0|e^{ik\sqrt{\frac{h}{2mw}}(a+a^t)}|0>$$

$$=<0|e^{aa+ba^t}|0>$$

$$a=b=ik\sqrt{\frac{h}{2mw}}$$

$$e^{aA+bat}=e^{bat}e^{aa}e^{\frac{1}{2}ab}$$

$$<0|e^{aa+bat}|0>=<0|e^{bat}e^{aa}e^{\frac{1}{2}ab}|0>$$

$$=e^{\frac{1}{2}\left(ik\sqrt{\frac{h}{2mw}}\right)^2}<0|e^{bat}\ e^{aa}|0>$$

نشان می دهیم:

$$<0|e^{b\hat{a}t}\ e^{a\hat{a}}|0>=1$$

ابتدا :

نکته مهم: چون

$$[\hat{a},\hat{a}^t]=1$$
$$\left[\frac{d}{dx},x\right]=1 \Rightarrow \hat{a}^t=\frac{d}{d\hat{a}}$$

$$<0|e^{bat}\sum_{n=0}\frac{(a\hat{a})^n}{n!}|0>=<0|e^{bat}(1+a\hat{a}+......)|0>$$

$$=<0|e^{bat}|0>=<0|1+ba^t+....|0>$$

$$=<0|0>+b<0|1>+.....=1$$

پس: $=<0|e^{ikx}|0>=e^{\frac{-k^2h}{4mw}}$

نکته:

1ـ پاریته تابع موج نوسانگر حالت n ام عبارت است از : $(-)^n$

2ـتعداد صفرهای تابع موج نوسانگر حالت nام برابر است با : n

3- $e^{l\hat{a}} \; f(\hat{a}^t) e^{-l\hat{a}} = f(\hat{a}^t + l)$

-4 $e^{a\hat{a}+b\hat{a}^t} = e^{a\hat{a}} e^{b\hat{a}t} e^{-\frac{1}{2}ab}$

5- $e^{l\hat{a}} \; f(\hat{a}^t)|\mathbf{0}> = f(\hat{a}^t + l)|\mathbf{0}>$

مثال) نوسانگر کوانتومی در میدان خارجی ثابت

فرض کنید نوسانگر کوانتومی بار (e- و جرم m) در میدان الکتریکی ثابت e قرار گرفته باشد معادله شرویندگر ذره عبارتست از :

پتانسیل میدان خارجی

$$\hat{H} = -\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2}mw^{20}x^2 + W$$

$$W = qf = -(-e)\left(-\int edx\right) = eex$$

پس:

موج کامل می کنیم

$$\hat{H} = -\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2}mw^2x^2 + eex$$

$$\hat{H} = \frac{-\mathbf{h}^2}{2m}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2}mw^2\left[\left(x + \frac{eE}{mw^2}\right)^2 - \frac{e^2e^2}{m^2w^2}\right]$$

$$x' = x + \frac{ee}{mw^2} \rightarrow p' = -i\mathbf{h}\frac{d}{dx'} = -i\mathbf{h}\frac{d}{dx} = p$$

$$\hat{H} = -\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\frac{d^2y}{dx'^2} + \frac{1}{2}mw^2x'^2 - \frac{-e^2e^2}{2mw^2}$$

بنابراین:

جمله ثابت

$$E_n = E_n +$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\mathbf{h}w - \frac{e^2e^2}{2mw^2}$$

و تابع موج جدید:

$$y_n(x') = y_n\left(x + \frac{ee}{mw^2}\right)$$

مثال) به هامیلتون ی سیستک کوانتمی نوسانی جمله ثابت (eex) را اضافه می کنیم. جابجایی ترازهای انرژی حالت پایه چقدر تغییر می‌کند؟ $(a > \mathbf{o})$

1) $\frac{-e^2e^2}{mw^2}$ 2) $\frac{-e^2e^2}{2mw^2}$ 3) $\frac{e^2e^2}{mw^2}$ 4) صفر

حل) گزینه (2) صحیح است

مثال) حالت یک سیستم نوسانگر کوانتمی به صورت زیر است:

$$y(x_1,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-iwt/2}y_{\mathbf{o}}(x) + e^{-3\frac{iwt}{2}}y_1(x)\right]$$

ارزش انتظاری هامیلتونی H وجابجایی x به ترتیب کدام است ؟

1) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathbf{h}}{2mw}}\left(1+e^{iwt}\right), hw$ 2) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathbf{h}}{2mw}}, \mathbf{h}w$

3) $\frac{1}{2}, \frac{\mathbf{h}w}{2}$ 4) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathbf{h}w}{2m}}, \frac{\mathbf{h}w}{2}$

حل) گزینه (1) صحیح است

$$< \hat{H} > = \sum_n (an)^2 E_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 E_0 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) E_1 = \frac{1}{2}(E_0 + E_1) = \mathbf{h} w$$

$$< \hat{x} > = \sqrt{\frac{\mathbf{h}}{2mw}} \; < \frac{1}{\sqrt{2}} e^{+iw\frac{t}{2}} y_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{+3iw\frac{t}{2}} y_1 \, |_{\hat{a}+\hat{a}^t} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iw\frac{t}{2}} y_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-3iw\frac{t}{2}} y_1 \right. >$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathbf{h}}{2mw}} < e^{iw\frac{t}{2}} y_0 + e^{3iw\frac{t}{2}} y_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{+3iw\frac{t}{2}} y_1 | e^{-3iw\frac{t}{2}} y_0 + e^{-iw\frac{t}{2}} y_1 + \sqrt{2} e^{-3iw\frac{t}{2}} y_2 >$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathbf{h}}{2mw}} \left\{1 + e^{2iw\frac{t}{2}}\right\} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathbf{h}}{2mw}} \left(1 + e^{iwt}\right)$$

مثال) تابع موج تکانه ای حالت پایه نوسانگر هماهنگ کدام است؟ $\left(l = \sqrt{\frac{mw}{\mathbf{h}}}\right)$

1) $\frac{1}{\sqrt{l}} \exp\left\{\frac{-p^2}{4\mathbf{h}^2 l^2}\right\}$

2) $\frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left\{\frac{-p^2}{\mathbf{h}^2 l^2}\right\}$

3) $\frac{1}{\sqrt{l}} \exp\left\{\frac{-p^2}{2\mathbf{h}^2 l^2}\right\}$

4) $\frac{1}{\sqrt{l}} e^{-\frac{2p^2}{e^4\mathbf{h}^2 l^2}}$

حل) گزینه (3) صحیح است

$$y_0(x) = \sqrt{\sqrt{l}} \; e^{-\frac{mwx^2}{2\mathbf{h}}}$$

$$g(p) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(x) e^{i\frac{px}{\mathbf{h}}} dx = \frac{\sqrt[4]{l}}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mwx^2}{2\mathbf{h}}} + i^{p\frac{x}{\mathbf{h}}} dx$$

$$= \sqrt{\sqrt{\frac{l}{2p}}} \sqrt{\frac{2p\mathbf{h}}{mw}} \; \exp\left\{\frac{(i\,p/\mathbf{h})}{4\left(\frac{mw}{2\mathbf{h}}\right)}\right\} = \frac{1}{\sqrt{l}} \exp\left\{\frac{-p^2}{2\mathbf{h}^2 l^2}\right\}$$

نکته مهم: تابع توزیع تکانه‌ای به صورت زیر است:

$$|g(p)|^2 \, dp = \frac{1}{l} \exp\left\{\frac{-p^2}{\mathbf{h}^2 l^2}\right\} dp$$

آزمونهای طبقه بندی شده

1ـ a , a^t عملگرهای بالا برنده پایین برنده و $|u_n>$ حالت ویژه یک نوسان کننده هارمونیک هستند.

کدامیک از کمیات زیر مخالف صفر است ؟

1) $<U_m|(At)A^n|u_n> \quad m<n$

2) $<u_m|(A^m A^t)^n|n_n> \quad m \neq n$

3) $<u_m|A^n A^{t^n}|u_n> \quad m>n$

4) $<u_0|A^n|u_n>$

2ـ یک نوسانگر هارمونیک در میدان الکتریکی خارجی قرر دارد به طوری که $V(x)=\frac{1}{2}mw^2x^2-qex$ می

دانیم که طیف انرژی های مجاز برای نوسانگری با هامیلتونی $H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}mw^2x^2$ عبارت است از :

$\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar w$ طیف انرژی های مجاز این نوسانگر در .میدان الکتریکی اعمال شده کدام است ؟

1) $\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar w-\frac{q^2e^2}{2mw^2}$

2) $\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar w-qex$

3) $\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar w+\frac{q^2e^2}{2mw^2}$

4) $\left(n+\frac{3}{2}\right)\hbar w$

3ـ کدام گزینه در مورد یک نوسانگر n بعدی صحیح است ؟

1) به جز در یک ، یا دو سه بعد، نوسانگر n بعدی قابل حل نیست.

2) معادل N نوسانگر یک بعدی است ولی طیف آن قابل حل نیست.

3) معادل n نوسانگر ی بعدی است وطیف آن کاملا قابل محاسبه است

4) هیچکدام

4ـ ترازهای انرژی برای پتانسیل $V(x)=\begin{cases}\infty & x<0\\ \frac{1}{2}mw^2x^2 & x>0\end{cases}$ **برابر است با :**

1) $\left(2n+\frac{3}{2}\right)\mathbf{h}w$ ، n عدد صحیح غیر منفی است

2) $\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathbf{h}w$ ، n عدد صحیح زوج غیر منفی است

3) $\left(2n+\frac{1}{2}\right)\mathbf{h}w$ ، n عدد صحیح مثبت است

4) $\left(n+\frac{3}{2}\right)\mathbf{h}w$ ، n عدد صحیح است

5ـ در مورد نوسانگر هارمونیک رابطه جابجایی بین اپراتور مختصات هایزبنرگی در زمان t_1 واپراتور مختصات هایزبنرگی در زمان t_2 به کدام صورت زیر است ؟

1) 0

2) غیر صفر ولی مستقل از زمان های t_2, t_1

3) متناسب با $\sin\left[w(t_1-t_2)\right]$

4) متناسب با $\cos\left[w_1(t_1-t_2)\right]$

6ـ تابع موج دستگاهی به صورت $y=\frac{1}{4}u_0+i/2\,u_1+i\frac{\sqrt{11}}{4}\,u_2$ **نوشته می‌شود. u_n ها ویژه حالتهای $(n=1,2,3)$ نوسانگر هماهنگ ساده اند. مقدار چشمداشتی انرژی این دستگاه کدام است ؟**

1) $\frac{3}{4}\,\mathbf{h}w$

2) $\frac{3}{2}\mathbf{h}w$

3) $\frac{13}{4}\mathbf{h}w$

4) $\frac{17}{8}\mathbf{h}w$

7ـ ویژه حالت عملگر $\hat{a}=\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{p}}{a\mathbf{h}}-iax\right)$ **نوسانگر هماهنگ ساده با ویژه مقدار l کدام است ؟**

1) $Ae^{-\frac{l^2a^2x^2}{2}}$

2) $Ae^{-l^2x^2-e^{-ax}}$

3) $A\sin\,lx$

4) $Ae^{\frac{-a^2x^2}{2}}+\sqrt{2}\,l\,a\,x$

8ـ کدام مقدار برای نوسانگر هماهنگ یک بعدی صفر است ($|n>$ ویژه حالت هامیلتونی نوسانگر هماهنگ یک بعدی با انرژی E_n است).

1) $<2|x^5|8>$ 2) $<8|x^7|3>$ 3) $<2|x^4|4>$ 4) $<9|\hat{x}|3>$

9ـ اگر H هامیلتونی نوسانگر هماهنگ a, a^t به ترتیب عملگرهای بالا برنده و پایین آورنده باشند. مقادیر $[H,a],\ [H,a^t]$ را حساب کرده و بگویید این جابجاگرها با توجه به مقادیرشان مشابه کدام دسته از جابجاگرهای زیرند (در زیر Lها عملگرهای اندازه حرکت زاویه اند)

1) $[L_z, L_-],\ [L_z, L_+]$ 2) $[L_y, L],\ [L_y, L_+]$

3) $[L_x, L_-],\ [L_x, L_+]$ 4) $[L^2, L_-],\ [L^2, L_+]$

10ـ تابع حالت نوسانگر یک بعدی در راستای x چنین است :

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}|0> + \frac{1}{2}|2> + \frac{1}{2}|4>$$

که در آن $|n>$ ها ویژه حالتهای انرژی سیستم هستند. مقدارچشمداشتی عملگر x دراین حالت چقدر است؟

1) $\frac{2+3\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}\sqrt{\frac{\mathbf{h}}{2mw}}$ 2) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathbf{h}}{2mw}}$

3) $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\mathbf{h}}{2mw}}$ 4) صفر

11ـ تابع حالت یک نوسانگر هماهنگ ساده یک بعدی با بسامد w در لحظه $t=0$ به صورت زیر است:

$$y(x,0) = \frac{2}{\sqrt{6}}U_0(x) + \frac{1}{\sqrt{6}}U_1(x) + \frac{1}{\sqrt{6}}U_2(x)$$

که در آن U_iها ویژه توابع بهنجار هامیلتونی آن نوسانگر با انرژی E_i هستند. تابع حالت سیستم در $t=2$ ثانیه کدام است ؟

1) $\frac{2}{\sqrt{6}}U_0(x)e^{-i\mathbf{h}w} + \frac{1}{\sqrt{6}}U_1(x)^{-i(3\mathbf{h}w)} + \frac{1}{\sqrt{6}}U_3(x)^{-i(7\mathbf{h}w)}$

2) $\frac{2}{\sqrt{6}}U_0(x)e^{-i\frac{\mathbf{h}w}{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}U_1(x)e^{-i(2\mathbf{h}w)} + \frac{1}{\sqrt{6}}U_3(x)^{-i(6\mathbf{h}w)}$

3) $\frac{2}{\sqrt{6}}U_0(x)^{-i\frac{\mathbf{h}w}{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}U_1(x)e^{-i\mathbf{h}w} + \frac{1}{\sqrt{6}}U_3(x)e^{-i(3\mathbf{h}w)}$

4) $\left(\frac{2}{\sqrt{6}}U_0(x)+\frac{1}{\sqrt{6}}U_1(x)\right)e^{-i(2\hbar w)}$

12ــ هامیلتونی نوسانگر هماهنگ یک بعدی $H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}mw^2x^2$ **است.**

تغییرات زمانی متوسط عملگر $\hat{A}=\hat{x}+\frac{\hat{p}}{m}t$ **کدام است ؟ (m جرم ذره، t زمان و** w **بسامد زاویه ای نوسانگر است) .**

1) $\frac{<\hat{p}>}{m}-w^2t<\hat{x}>$

2) $\frac{2}{m}<\hat{p}>-w^2t<\hat{x}>$

3) $\frac{-2}{m}<\hat{p}>+2w^2t<\hat{x}>$

4) $-\frac{1}{m}<\hat{p}>+w^2t<\hat{x}>$

13ــ A^t, A **عملگرهای پایین آورنده و بالا برنده برای نوسانگر هم آهنگ یک بعدی هستند.**

متوسط عملگر e^{aA+bA^t} **در حالت پایه این نوسانگر کدام است ؟ (b,a مقادیر ثابت حقیقی هستند.)**

1) صفر

2) $e^{\hbar(a+b)}$

3) $e^{\frac{1}{2}ab\hbar}$

4) $e^{-\frac{1}{2}a\hbar}$

14ــ هامیلتونی نوسانگری یک بعدی با بار e در میدان الکتریکی یکنواخت $H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}mw^2x^2-eEx$ **است. معادله حرکت عملگر** $x(t)$ **کدام است ؟**

1) $\ddot{x}=-eE/m$

2) $\ddot{x}=w^2x-e\frac{E}{2m}$

3) $\ddot{x}=-w^2x+eE/m$

4) $\ddot{x}=-w^2\frac{x}{2}-e\frac{E}{m}$

15ــ اگر $|n>$ n**امین ویژه حالت انرژی نوسانگر هماهنگ یک بعدی باشد مقدار ماتریسی** $<n|x|n+1>$ **کدام است ؟ (راهنمایی :** $\hat{a}=\sqrt{\frac{mw}{2\hbar}}\,.\hat{x}+i\sqrt{\frac{1}{2mwk}}\hat{p}$ **)**

1) صفر

2) $\sqrt{\frac{(n+1)\hbar}{2mw}}$

3) $\sqrt{\frac{(n-1)\mathbf{h}}{2mw}}$ 4) $\sqrt{\frac{\mathbf{h}}{2mw}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)$

16ـ تابع حالت نوسانگر هماهنگ ساده ای در لحظه $t=\mathbf{0}$ به صورت

$$y\left(x,\mathbf{0}\right)=A\left[\sum_{n=\mathbf{0}}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}f_{n}(x)\right]$$

است که $f_n(x)$ تابع موج بهنجار تراز **n** نوسانگر هماهنگ یک بعدی است. در اندازه گیری انرژی احتمال یافتن ذره در تراز پایه کدام است ؟

1) صفر 2) $\frac{1}{2}$ 3) 1 4) $\frac{|A|}{2}$

17ـ برای نوسانگر هماهنگ یک بعدی کدامیک از عبارات غیر صفر است؟ ($|n>$ ها ویژه حالتهای انرژی این نوسانگر با انرژی a^t, a, E_n عملگرهای نردبانی هستند).

1) $<1|ax|2>$ 2) $<1|a^t\,x|2>$ 3) $<2|a^t xa|3>$ 4) $<2|a_x a^t|3>$

18ـ تابع موج یک نوسانگر هماهنگ یک بعدی به شکل $y\left(x\right)=u_{\mathbf{0}}(x)+u_1(x)$ است. مقدار چشمداشتی عملگر پاریته در این حالت کدام است؟ $U_n(x)$ ویژه تابع بهنجار هامیلتون ذره با انرژی E_n است ؟

1) صفر 2) $\frac{1}{2}$ 3) 1 4) 2

19ـ متوسط انرژی پتانسیل نوسانگر هماهنگ یک بعدی در ویژه حالت **n**ام انرژی آن چقدر است؟

(راهنمایی $a=\sqrt{\frac{mw}{2}}x+i\sqrt{\frac{1}{2mw}}\;p$)

1) $n\mathbf{h}w$ 2) $\frac{n}{2}\mathbf{h}w$ 3) $\frac{2n+1}{4}\mathbf{h}w$ 4) $(n+1)\mathbf{h}w$

20ـ نوسانگر هماهنگ یک بعدی ساده (در راستای **x**) تحت تاثیر ؟؟؟ثابت $\vec{F}=F_{\mathbf{0}}\hat{i}$ قرار می گیرد. ویژه مقادیر انرژی این سیستم کدام است ؟ (w بسامد زاویه ای نوسانگر و **m** جرم آن است)

1) $\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathbf{h}w-\frac{1}{2}\left(\frac{F_0}{mw^2}\right)^2$

2) $\left(\frac{1}{2}+n\right)\mathbf{h}w+\frac{F_0^2}{2mw^2}$

3) $\left(\frac{1}{2}+n\right)\mathbf{h}w-\left(\frac{F_0}{mw^2}\right)$

4) $\left(\frac{1}{2}+n\right)^{\mathbf{h}w}-\frac{F_0^2}{2mw^2}$

21ـ اگر درمساله نوسانگر هماهنگ یک بعدی $|\,b\ \mathbf{f}$ ویژه حالت بهنجار عملگر پایین بر $\hat{a}$ باشد یعنی $\hat{a}\,|\,b\ \mathbf{f}=b\,|\,b\ \mathbf{f}$ مقدار چشمداشتی انرژی نوسانگر در این حالت کدام است ؟

$$\left(a=\sqrt{\frac{mw}{2\mathbf{h}}}x+i\frac{p}{\sqrt{mw\mathbf{h}}}\right)$$

1) $\mathbf{h}w\left(-\frac{1}{2}+(b)^2\right)$

2) $\mathbf{h}w\left(b^2\right)$

3) $\mathbf{h}\frac{w}{2}\left(1+(b)^2\right)$

4) $\mathbf{h}w\left(\frac{1}{2}+(b)^2\right)$

22ـ ویژه مقادیر انرژی وابسته به یک ذره به جرم m در پتانسیل یک بعدی $\frac{1}{2}mw^2(x^2-2bx)$ کدام است؟

1) $n\mathbf{h}w-b^2\frac{mw^2}{2}$

2) $b^2\frac{mw^2}{2}$

3) $\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathbf{h}w+b^2\frac{mw^2}{2}$

4) $\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathbf{h}w-b^2\frac{mw^2}{2}$

پاسخ تشریحی

1ـ گزینه (4) صحیح است

$$<0|A^n|n>\sim<0|n-n>=<0|0>\neq 0$$

2ـ گزینه (3) صحیح است .

$$V(x)=\frac{1}{2}mw^2\left(x^2-\frac{2qe}{mw^2}x\right)=\frac{1}{2}mw^2\left[\left(x-\frac{qe}{mw^2}\right)^2-\frac{q^2e^2}{m^2w^4}\right]$$

$$=\frac{1}{2}mw^2\left(x-\frac{qe}{mw^2}\right)^2-\frac{q^2e^2}{2mw^2}$$

$$E\to E+\frac{q^2e}{2mw^2}$$

3ـ گزینه (3) صحیح است.

$$H=\sum_i^N H_i$$

$$E=\sum_{i=1}^N E_i=\sum_{i=1}^N\left(n_i+\frac{1}{2}\right)\mathbf{h}w$$

4ـ گزینه (1) صحیح است.

$$y\,(x=0)=0\to y_n(x)=\text{فرد}\quad\to n\ \text{فرد}$$

$$y_n(x)=\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{l}{p}}}{2pn!}}\quad e^{-z^2/2}H_n(z)$$

$$E_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\mathbf{h}w=\left(2n+\frac{3}{2}\right)\mathbf{h}w$$

$$n' = 2n + 1$$

5ـ گزینه (3) صحیح است.

6ـ گزینه (4) صحیح است.

$$< H > = \sum_n |c_n|^2 E_n = \left|\frac{1}{4}\right|^2 E_0 + \left(\frac{i}{2}\right)^2 E_1 + \left|\frac{i\sqrt{11}}{4}\right|^2 \ E_2$$

$$= \frac{1}{16} E_0 + \frac{1}{4} E_1 + \frac{11}{16} E_2 = \frac{E_0 + 4E_1 + 11E_2}{16}$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{h}w \frac{(1 + 4\times 3 + 11\times 5)}{16} = \frac{\mathbf{h}w}{32}(13 + 55) = \frac{68}{32}\mathbf{h}w$$

$$= \frac{17}{8}\mathbf{h}w$$

7ـ گزینه (4) صحیح است

$$\hat{a}y = l y$$

$$\frac{i}{\sqrt{2}}\left(-\frac{i}{a}\, {}^{d}\!/\!_{dx} - iax\right)y = l y$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}\frac{dy}{dx} + axy = \sqrt{2}l y \ \rightarrow \frac{1}{a}\frac{dy}{dx} = \left(\sqrt{2}l - ax\right)\frac{dy}{y} = a(\sqrt{2}l - ax)dx$$

$$Lny = a(\sqrt{2}lx - a\frac{x^2}{2}$$

$$y = e^{a\sqrt{2}lx}e^{-\frac{a^2x^2}{2}}$$

8ـ گزینه (1) صحیح است

9ـ گزینه (1) صحیح است

$$[H,a] = \left[\mathbf{h}w\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right), a\right] = \mathbf{h}w[N,a] = \mathbf{h}w\left[a^t, a\right]a = -\mathbf{h}wa$$

$$\left[H, a^t\right] = \mathbf{h} w a^t$$

10ـ گزینه (4) صحیح است

$$< x >_y = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} < \mathbf{0}\right| + \frac{1}{2} < 2\left| + \frac{1}{4} < 4 \right|\Bigg\} \left\{ \sqrt{\frac{\mathbf{h}}{2mw}} \left(a + a^t\right) \right\} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left|\mathbf{0} > + \frac{1}{2}\right|2 > + \frac{1}{2} \,|\, 4 > \right\}$$

$$= \sqrt{\frac{\mathbf{h}}{2mw}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} < \mathbf{0}\right| + \frac{1}{2} < 2\left| + \frac{1}{4} < 4 \right|\Bigg\} \left\{ \frac{1}{2}\left|1 > + \frac{1}{2}\right|3 > + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|1 > + \frac{31}{2}\right|3 > + \frac{\sqrt{5}}{2}\left|5 > \right.\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{\mathbf{h}}{2mw}} \left\{\mathbf{0}\right\} = \mathbf{0}$$

11ـ گزینه (1) صحیح است

$$y\,(x, t) = \sum j_{\,n}(x) e^{-iE_n t/\mathbf{h}}$$

12ـ گزینه (1) صحیح است

$$\frac{d}{dt} < \hat{A} > = \frac{i}{\mathbf{h}} < \left[H, \hat{A}\right] > = \frac{i}{\mathbf{h}} < \left[\hat{H}, \hat{x} + \frac{\hat{p}}{m} t\right] >$$

$$= \frac{i}{\mathbf{h}} < \left[\hat{H}, \hat{x}\right] + t/m \left[\hat{H}, \hat{p}\right] >$$

$$= \frac{i}{\mathbf{h}} < \frac{\mathbf{h}}{i} \left(\frac{\hat{p}}{m} + \frac{t}{m} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) >$$

$$= \frac{i}{\mathbf{h}} \left\{ \frac{1}{m} < \hat{p} > - \frac{t}{m} < + m w^2 x > \right\} \frac{\mathbf{h}}{i}$$

$$= \frac{i}{\mathbf{h} m} \left\{ < \hat{p} > - t m w^2 < x > \right\} \frac{\mathbf{h}}{i} = \frac{< \hat{p} >}{m} - t w^2 < x >$$

13ـ گزینه (4) صحیح است

14) گزینه (3) صحیح است

$$m\ddot{x}=-\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{\partial V}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}mw^2x^2-eEx\right\}$$

$$m\ddot{x}=-mw^2x+eE$$

$$\ddot{x}=-w^2x+\frac{eE}{m}$$

15ـ گزینه (2) صحیح است

$$<n|x|n+1>=\sqrt{\frac{\hbar}{2mw}}<n|a+a^t|n+1>$$

$$=\sqrt{\frac{\hbar}{2mw}}\ <n\left|\sqrt{n+1}\right|n>=\sqrt{\frac{\hbar}{2mw}}\sqrt{n+1}$$

16ـ گزینه (2) صحیح است

$$|C_o|^2=\left|A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^0\right|^2=|A|^2=\frac{1}{2}$$

$$<\psi(x,0)|\psi(x,0)>=1$$

$$|A|^2\sum_{n,m=0}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+m}<\varphi_n(x)\varphi_m(x)>=|A|^2\sum_{n=0}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{|A|^2}{1-\frac{1}{2}}=1$$

$$2|A|^2=1\rightarrow|A|^2=\frac{1}{2}$$

17ـ گزینه (3) صحیح است.

$$<2|a^txa|3>$$

$$=\sqrt{\frac{\hbar}{2mw}}<2|a^t\left(a+a^t\right)a|3>$$

$$=\sqrt{\frac{\hbar}{2mw}}<2\left|a^{t}\left(a^{2}+\hat{N}\right)\right|3>=\sqrt{\frac{\hbar}{2mw}}<2\left|a^{t}(\sqrt{3\times 2}\right|1>+3\left|3>\right)$$

$$=\sqrt{\frac{\hbar}{2mw}}\left\{\sqrt{6}<2\left|\underset{\sqrt{3}|2>}{\underset{\downarrow}{a^{t}}}\right|1>+3<2\left|\underset{\sqrt{4}|4>}{\underset{\downarrow}{a^{t}}}\right|3>\right\}\neq 0$$

18ـگزینه (1) صحیح است

$$\hat{p}y(x)=\hat{p}y\ u_0+\hat{p}\ u_1=(-)^{0}u_0+(-)^{1}u_1=u_0-u_1\Rightarrow<y(x)|p\ y(x)>=<u_0+u_1|u_0-u_1>$$

$$=<u_0|\underbrace{u_0}_{1}>-<u_0|\underbrace{\cancel{u_1}}_{0}>+<u_1|\underbrace{\cancel{u_0}}_{0}>-<u_1|\underbrace{u_1}_{1}>=1-1=0$$

$$\hat{p}u_n=(-)^{n}u_n$$

19ـ گزینه (3) صحیح است

$$<\frac{1}{2}mw^{2}x^{2}>_n=\frac{1}{2}mw^{2}<x^{2}>_n=\frac{1}{2}mw^{2}.\frac{E_n}{mw^{2}}=\frac{E_n}{2}$$

20ـ گزینه (4) صحیح است

j = انرژي $=-F_0x=-qex$

جابجایی $E=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar w-\frac{q^{2}e^{2}}{2mw^{2}}$

$$=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar w-\frac{F_0^{2}}{2mw^{2}}$$

21ـ گزینه (4) صحیح است

$$\hat{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(z-\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\hat{a}\,|\,b> = b\,|\,b> \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(z - \frac{\partial}{\partial z}\right)|\,b> = b\,|\,b> \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}|\,b> = \left(z - \sqrt{2}b\right)|\,b>$$

$$Ln\,|\,b> = \left(\frac{z^{2}}{2} - \sqrt{2}bz\right) + Lnc \rightarrow |\,b> = c\exp\left\{\frac{z^{2}}{2} - \sqrt{2}bz\right\}$$

$$|\,b> = \sum_{n=0} C_n\,|\,n> \qquad \hat{a}\,|\,b> = b\,|\,b>$$

$$\sum_{n=1} C_n \hat{a}\,|\,n> = b\sum_{n=0} C_n\,|\,n> \rightarrow \sum_{n=1} C_n\sqrt{n}\,|\,n-1> = b\sum_{n=0} C_n\,|\,n>$$

$$\sum_{n=0} C_{n+1}\sqrt{n+1}\,|\,n> = b\sum_{n=0} C_n\,|\,n> \rightarrow \sum_{n=1} C_n\sqrt{n}\,|\,n-1> = b\sum_{n=0} C_n\,|\,n>$$

$$C_n = b\,\frac{C_{n-1}}{\sqrt{n}} \rightarrow C_n = \frac{b^{n}c_o}{\sqrt{n!}}$$

$$|\,b> = c_o\sum_{n=0}\frac{b^{n}}{\sqrt{n!}}\,|\,n>$$

$$<b\,|\,b> = 1 \rightarrow |c_o|^{2}\sum_{n,m}\frac{b^{*n}b^{m}}{\sqrt{n!\,m!}} <n\,|\,m> = 1 \rightarrow |c_o|^{2}\sum_{n}\frac{|b|^{2n}}{n!} = 1$$

$$|c_o|^{2}\exp\left(|b|^{2}\right) = 1 \rightarrow |c_o| = \exp\left(-\frac{|b|^{2}}{2}\right)$$

$$|\,b> = \exp\left(\frac{-|b|^{2}}{2}\right)\sum_{n=0}\frac{b^{n}}{\sqrt{n!}}\,|\,n>$$

$$<H>_b = \exp\left(-|b|^{2}\right)\sum_{n,m}\frac{b^{*n}b^{m}}{\sqrt{n!m!}}\underbrace{<m|H|m>}_{E_m\,|\,m>}$$

$$= \exp\left(-|b|^{2}\right)\sum_{n=0}\frac{|b|^{2n}}{n!}\;E_n$$

$$= \exp\left(|b|^2\right)\{\hbar w\}\left\{\sum_{n=0}\frac{|b|^{2n}}{(n-1)!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}\frac{(b)^{2n}}{n!}\right\}$$

$$= \exp\left\{-|b|^2\right\}\{\hbar w\}\left\{|b|^2 \exp\left\{|b|^2\right\}+\frac{1}{2}\exp\left\{|b|^2\right\}\right\}$$

$$= \hbar w\left\{(b)^2+\frac{1}{2}\right\}$$

22ـگزینه (3) صحیح است

$$V(x)=\frac{1}{2}mw^2\left[(x-b)^2-b^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}mw^2(x-b)^2-\frac{1}{2}mw^2b^2$$

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar w+\frac{1}{2}mw^2b^2$$

فصل چهارم : دستگاه های بین ذره ای

مقدمه: در این فصل بعضی مفاهیم مهم دستگاه های تک ذره ای یک بعدی را به حالتی که تعداد ذرات N باشد تعمیم می دهیم.

تعریف تابع موج حالت N ذره ای

ذره یکسان در نظر بگیرید که مختصات $x_1, x_2, ..., x_N$ با جرمهای $m_1, ..., m_N$ قرار گرفته اند. تابع حالت سیستم N ذره ای را تعریف می‌کنیم.

$$y = y\left(x_1, x_2, ..., x_N\right)$$

طوری که:

$$\int ....\int dx_1 ....dx_N \left|y\left(x\right)..., x_N\right|^2 = 1$$

هامیلتونی سیستم:

$$H = \sum_{i=1}^{N} Hi = \sum_{i=1}^{N} \frac{\hat{p}_i^2}{2mi} + V\left(x_i\right)$$

برای هر ذره:

$$\left[x_i, p_i\right] = i\,\mathbf{h}$$

و چون ذرات مجزایند:

$$\left[x_i, p_j\right] = i\mathbf{h}dij$$

اگر میدان خارجی وجود داشته باشد

$$V = \sum_{i>j} V\left(x_i - x_j\right)$$

بعضی مفاهیم مهم سیستم های N ذره ای

مشابه با مکانیک کلاسیک:

$$\hat{p} = \sum \hat{p}_i = \sum_{i=1}^{N} -i\hbar \frac{d}{dx_i}$$

اگر میدان خارجی صفر باشد:

ثابت حرکت $\hat{p} =$

نکات:

ـ اگر سیستمی تحت انتقال ناوردا باشد یعنی $\psi(x+a)=\psi(x)$ آنگاه $\hat{p}$ بقا دارد.

ـ اگر سیستم ناوردای انتقالی باشد $[\hat{H}, \hat{p}] = \mathbf{0}$

دستگاه دو ذره ای

ـ دستگاه دو ذره ای بدون بر هم کنش

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = \frac{\hat{P}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m_2}$$

تعریف می کنیم

$$\psi(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$$

$$E = E_1 + E_2$$

برای هر ذره:

$$\frac{-\hbar^2}{2m_i} \frac{d^2 f_i(x_i)}{dx_i^2} = E_i f_i(x_i)$$

حل عمومی: $f_i(x_i) = A_i e^{ik_i x_i}$

$$y\left(x_1,x_2\right)=f_1\left(x_1\right)f_2\left(x_2\right)=Ce^{i\left(k_1x_1+k_2x_2\right)}$$

$$E=E_1+E_2=\mathbf{h}^2\left(\frac{k_1^2}{2m_1}+\frac{k_2^2}{2m_2}\right)$$

ـ اگر دو ذره در بر هم کنش مستقیم با همدیگر باشند یعنی:

$$V\left(x_1,x_2\right)=V\left(x_1-x_2\right)$$

با معرفی دستگاه :

$$\begin{cases}\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}=x\\ x_1-x_2=x\end{cases}$$

و

$$\hat{H}=\frac{\hat{P}_1^2}{2m_1}+\frac{\hat{p}_2^2}{2m_2}+V\left(x_1-x_2\right)$$

$$\hat{H}=\hat{H}_{rel}+\hat{H}_{c.m}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+V(x)+\frac{\hat{p}^2}{2M}$$

$$E=e+E_{c.m}$$ و

$$y\left(x_1,x_2\right)=y\,(x)j\,(x)\quad,\quad m=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

پس:

$$-\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\frac{d^2y}{dx^2}=\underset{C.M}{Ey}$$

$$-\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\frac{d^2j}{dx^2}+V(x)j\,(x)=ej\,(x)$$

نکات:

ـ مرکز جرم در دستگاه دو ذره ای با پتانسیل نسبی $V\left(x_1-x_2\right)$ با تکانه ثابت حرکت می‌کند.

(موج تخت)

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,e^{i\frac{p_0 x}{\hbar}}$$

ـ معادله حرکت نسبی یک معادله شروبندگر یک بعدی است

تقسیم بندی سیستم های N ذره ای

ـ فرمیون: ذراتی اسپین $\frac{1}{2}$ دارند. (نیم‌صحیح) تابع موج سیستم های فرمیونی پاد متقارن است

نکته: یعنی:

$$\psi\left(x_1,x_2,\dots,x_i,x_j,\dots x_N\right)=-\psi\left(x_1,\dots,x_j,x_i,\dots,x_N\right)$$

ـ بوزونی : ذراتی که اسپین صحیح دارند. تابع موج سیستم های بوزونی متقارن است .

پاد متقارن سازی و متقارن سازی

فرض کنید بخواهیم از N ویژه تابع $\psi_1(x_1),\psi_2(x_2)\dots\psi_N(x_N)$ یک تابع پاد متقارن بسازیم. دستور زیر را بکار می بریم.

$$\psi_{asym}(x_1,\dots,x_N)=\frac{1}{N!}\begin{vmatrix}\psi_1(x_1) & \psi_1(x_2) & \cdots & \psi_1(x_N)\\ \psi_2(x_1) & \psi_2(x_2) & \cdots & \psi_2(x_N)\\ \vdots & & & \\ \psi_N(x_1) & \psi_N(x_2) & \cdots & \psi_N(x_N)\end{vmatrix}$$

نکته: در رابطه بالا (دترمینان slatter) :

$$\psi_N(x_i)=\begin{cases}N= & \text{شماره تراز}\\ i= & \text{شماره ذره iام}\end{cases}$$

تابع موج کلی یک سیستم فرمیونی

$$\psi_{tot}=\psi\times\psi$$

نکات مهم (فرمیونها) :

ـ اگر اسپین دو ذره در یک جهت باشد. ψ_{spin}= متقارن و طبق اصل پانولی پاد $\psi_{فضایی}$ پا و متقارن باشد (یعنی دو ذره در یک موقعیت نباشند)

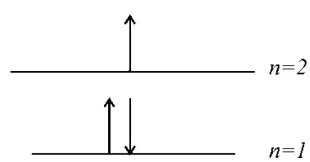
ـ اگر اسپین دو ذره پاد همدیگر باشند $\psi_{فضایی}$ متقارن است . (دو ذره می تواند در یک تراز باشند)

مثال) 3 ذره فرمیون در یک جعبه یک بعدی قرار گرفته اند. انرژی حالت پایه این سیستم را بنویسید.

حل) طبق اصل طرد پانولی هیچ دو ذره فرمیونی نمی تواند در یک حالت کوانتمی همه اعداد کوانتمی آنها یکی باشد.

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{x\pi}{L}x$$



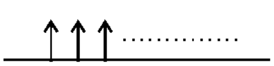
انرژی پایه سیستم:

$$E = 2\times E_1 + 1\times E_2$$

$$= 2\left(\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\right) + 1\times\left(\frac{4\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\right) = \frac{3\pi^2\hbar^2}{mL^2}$$

مثال) N: بوزون در یک جعبه یک بعدی به طول l قرار گرفته اند. انرژی حالت پایه چقدر است؟

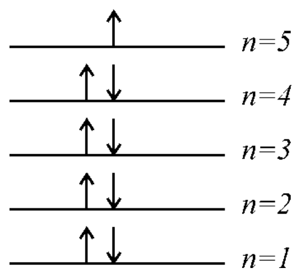
حل) N بوزون می توانند در یک تراز قرار گیرند بنابراین:



$n=1$ $E = NE_1 = N\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$

مثال) 9 ذره فرمیون در یک جعبه یک بعدی به طول L قرار گرفته اند. انرژی حالت پایه چقدر است؟

حل)



$$E = 2\sum_{n=1}^{4} E_n + E_5$$

$$= 2\sum_{n=1}^{4} \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} + \frac{5^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$= \frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2}\sum_{n=1}^{4} n^2 + \frac{25\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

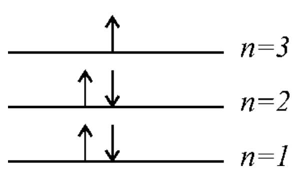
پایه $E = \frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2} \cdot \frac{4\times5\times9}{6} + 25\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$

پایه $E = \frac{85}{2mL^2}\pi^2\hbar^2$

مثال) 5 فرمیون در یک جعبه به طول L قرار گرفته اند. چه تعداد بوزون قرار دهیم تا انرژی حالت پایه تغییر نکند؟

حل) برای فرمیونها :

پایه $E = 2(E_1 + E_2) + E_3$



$$= 2\left(\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} + \frac{4\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\right) + \frac{9\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$= \frac{19\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = 19E_1$$

برای N بوزون :

$$E = NE_1$$

با مساوی قرار دادن: $19E_1 = NE_1 \rightarrow N = 19$

بنابراین: 19 بوزون معادل 5 فرمیون است.

مثال) به دو نوسانگر کوانتمی با جرم یکسان و فرکانس مشابه پتانسیل زیر وارد می شد:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} b\,(x_1, x_2)$$

انرژی حالت پایه سیستم را بدست آورید.

حل)

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + V(x_1, x_2)$$

$$= \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_1^2 + p_2^2\right) + \frac{1}{2} m w^2\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \frac{1}{2} b\,(x_2 \cdot x_2)$$

با معرفی

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2)$$

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 + q_2) \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 - q_2) \end{array} \rightarrow V = \frac{1}{2} b\,(x_1 \cdot x_2) = \frac{1}{4} b\left(q_1^2 - q_2^2\right)$$

$$x_1^2 + x_2^2 = q_1^2 + q_2^2$$

$$\hat{p}_1^2 + p_2^2 = -\mathbf{h}^2\left(\frac{d^2}{dx_1^2} + \frac{d^2}{dx_2^2}\right)$$

$$\frac{d}{dx_1} = \frac{d}{dq_1} \cdot \frac{dq_1}{dx_1} + \frac{d}{dq_2} \cdot \frac{dq_2}{dx_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dq_1} + \frac{d}{dq_2}\right)$$

$$\frac{d}{dx_2}=\frac{d}{dq_1}.\frac{dq}{dx_2}+\frac{d}{dq_2}.\frac{dq_2}{dx_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dq_1}-\frac{d}{dq_2}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{p}_1^2+\hat{p}_2^2=-\hbar^2\left(\frac{d^2}{dq_1^2}+\frac{d^2}{dq_2^2}\right)$$

$$\Rightarrow \hat{H}=\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2}{dq_1^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\underbrace{mw^2+\frac{b}{2}}_{mw_1^2}\right)q_1^2\right\}+\left\{\frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2}{dq_2^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\underbrace{mw^2-\frac{b}{2}}_{mw_2^2}\right)q_2^2\right\}$$

$$\Rightarrow E_n=E_1+E_2$$

$$E_{nn'}=\hbar w_1\left(x+\frac{1}{2}\right)+\hbar w_2\left(n'+\frac{1}{2}\right)$$

$$n,n'=0,1,2,......$$

مجموعه تست

1ـ یک چـاه پتانســیل هارمونیــک دو بعــدی را درنظــر مــی گیــریم کــه انــرژی الکتــرون در آن بــا رابطــه $E=(n_x+n_x+1)\mathbf{h}y$ داده می‌شود. اگر تعداد 110100 الکترون در پایین ترین حالت خود در این چـاه باشـند انرژی فرض کدام است ؟ (راهنمایی $(\sum_{n=0}^{n'}2(n+1)=(n'+1)(n'+2)$

1) $5046\ \mathbf{h}w$ 2) $101\ \mathbf{h}w$ 3) $100\ \mathbf{h}w$ 4) $99\mathbf{h}w$

2ـ درون یک چاه پتانسیل متقارن یک بعدی غیر قابل نفوذ به طول $\mathbf{L}$ تعداد هشت الکترون قـرار دارد. اگـر m_e جرم الکترون باشد بالاترین تراز انرژی پر شده در این چاه کدام است؟

1) $\frac{4h^2}{meL^2}$ 2) $\frac{h^2}{2m_eL^2}$ 3) $\frac{h^2}{4m_eL^2}$ 4) $\frac{2h^2}{m_eL^2}$

3ـ چهار ذره یکسان با اسپین $\frac{1}{2}$ که اسپین کل آنها در راسـتای $\mathbf{z}$ برابـر $2\mathbf{h}$ اسـت در پتانسـیل نوسـانگر هارمونیک ساده بعدی قرار دارند. انرژی پایه این سیستم چقدر است؟

1) $2\mathbf{h}w$ 2) $4\mathbf{h}w$ 3) $12\mathbf{h}w$ 4) $8\mathbf{h}w$

4ـ ویژه مقادیر انرژی ذره ای به جرم $\mathbf{m}$ در چاه پتانسیل بی نهایت یک بعدی بـه طـول $\mathbf{a}$ برابـر $E_n=\frac{An^2}{m}$ است که در آن $A=\frac{p^2\mathbf{h}^2}{2a^2}$, $n=1,2,3,....$ است. در صورتی که این چاه حـاوی سـه ذره فرمیـون بکسـان بـا اسپین $\frac{1}{2}$ و جرم m_f و سه ذره بوزون به جرم m_b باشد انرژی حالت پایه این سیستم چقدر است؟ (ذرات بـا یکدیگر بر هم کنشی ندارند)

1) $A\left(\frac{3}{m_b}+\frac{17}{m_f}\right)$ 2) $A\left(\frac{6}{m_b}+\frac{3}{m_f}\right)$

3) $A\left(\frac{3}{m_b}+\frac{6}{m_f}\right)$ 4) $A\left(\frac{3}{m_b}+\frac{3}{m_f}\right)$

5ـ سیستم فیزیکی متشکل از 5 ذره مشابه غیر بر هم کنش به جرم $\mathbf{m}$ و اسپین $\frac{1}{2}$ است. این ذرات تحت تاثیر پتانسیل هماهنگ ساده یک بعدی قرار دارند.این سیستم در حالت پایه خود می‌باشد. به جای این پنج ذره چه تعداد ذره بوزونی مشابه با همان جرم $\mathbf{M}$ و تحت تاثیر همان پتانسیل دارای حالت پایه ای با همان انرژی حالت پایه سیستم اولیه می‌باشند؟

5 (1   13 (2   17 (3   25 (4

6ـ $j\,(x_1, x_2)$ تابع موج یک نوسانگر دو بعدی با اسپین $\frac{1}{2}$ و مختصات x_1, x_2، $y\,(x_1, x_2)$ تابع موج یک سیستم شامل دو نوسانگر با اسپین یک بعدی مشابه که x_1 مختصه نوسانگر اول x_2 مختصه نوسانگر دوم است می‌باشند.

کدام گزینه همواره درست است ؟

1) نسبت به جابجایی x_1 یا x_2، $j\,(x_1, x_2)$ باید متقارن باشد

2) نسبت به جابجایی x_1 یا x_2 ، $j\,(x_1, x_2)$ می تواند متقارن یا پاد متقارن باشد اما $y\,(x_1, x_2)$ باید متقارن باشد.

3) نسبت به جابجایی x_1 یا x_2، $j\,(x_1, x_2)$ و $y\,(x_1, x_2)$ باید متقارن باشند.

4) نسبت به جابجایی x_1 یا x_2 ، $j\,(x_1, x_2)$ و $y\,(x_1, x_2)$ باید پاد متقارن باشند.

7ـ شش الکترون در یک چاه انرژی پتانسیل مربعی دو بعدی به اضلاع $\mathbf{L}$ محبوس اند. انرژی پتانسیل در بیرون چاه نامتناهی و در داخل صفر است. انرژی هر الکترون از رابطه $\frac{h^2}{8mL^2}(n_x^2 + n_y^2)$ به دست می آید که در آن n_y, n_x اعداد صحیح بزرگتر از صفرند

اگر الکترون هفتم به این دستگاه اضافه شود انرژی آن در حالت پایه چقدر است؟

($\mathbf{m}$ جرم الکترون و $\mathbf{h}$ ثابت پلانک است)

1) $\frac{11h^2}{8mL^2}$ 2) $\frac{5h^2}{8mL^2}$ 3) $\frac{h^2}{2mL^2}$ 4) $\frac{5h^2}{4mL^2}$

8ـ در یک چاه بی نهایت یک بعدی در فاصله $0<x<L$ چهار الکترون قرار دارند اگر اسپین کل دستگاه برابر 2 باشد کمترین انرژی ممکن این مجموعه کدام است ؟ $\left(E_n = \frac{n^2p^2\mathbf{h}^2}{2mL^2}, n = 1,2,3,....\right)$

1) $\frac{4p^2\mathbf{h}^2}{2m_eL^2}$ 2) $\frac{5p^2\mathbf{h}^2}{m_eL^2}$ 3) $\frac{8p^2\mathbf{h}^2}{m_eL^2}$ 4) $\frac{5p^2\mathbf{h}^2}{m_eL^2}$

9ـ تابع موج سیستم متشکل از دو ذره به جرمهای m_2, m_1 در داخل یک چاه پتانسیل نامحدود به طول $\mathbf{L}$ به شکل:

$$y\left(x_1, x_2\right) = \frac{1}{5}\left[3u_5\left(x_1\right)u_4\left(x_2\right) - 4u_9\left(x_1\right)u_8\left(x_2\right)\right]$$

که در آن $u_n(x)$ ها ویژه توابع بهنجار هامیلتونی تک ذره در چاه نامحدود با انرژی E_n هستند. احتمال یافتن ذره به جرم m_1 در بازه Δx_1 کدام است ؟

1) $\frac{\Delta x_1}{25}\left[9\left|u_5(x)\right|^2 + 16\left|u_9(x)\right|^2\right]u_4\left(x_2\right)^2\left[u_8\left(x_2\right)\right]^2$

2) $\frac{\Delta x_1}{25}\left[9\left|u_5(x)\right|^2 + 16\left|u_9\left(x_1\right)\right|^2\right]$

3) $\frac{\Delta x_1}{25}\left[9\left|u_5(x)\right|^2\left|u_4\left(x_2\right)\right|^2 + 16\left|u_9(x)\right|^2\left|u_8\left(x_2\right)\right|^2\right]$

4) $\frac{\Delta x_1}{25}\left[9\left|u_5(x)\right|^2\left|u_8\left(x_2\right)\right| + 16\left|u_9(x)\right|^2\left|u_4\left(x_2\right)\right|^2\right]$

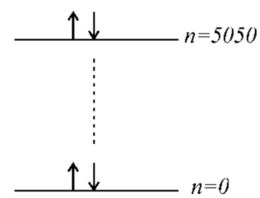
پاسخ تشریحی

1ـ گزینه (1) صحیح است .

$(5050-1)\mathbf{h}w=5049^{\mathbf{h}w}$

$\frac{10100}{2}=5050$

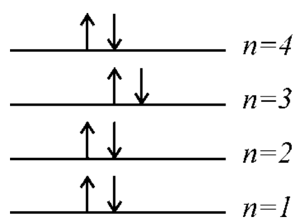
$E_0=\mathbf{h}w$



2ـ گزینه (2) صحیح است .

$$E_4=\frac{(4)^2p^2\mathbf{h}^2}{2m_e L^2}=8\frac{p^2\mathbf{h}^2}{m_e L^2}$$

$$=\frac{8p^2.h^2}{16p^2 m_e L^2}=\frac{h^2}{2m_e L^2}$$

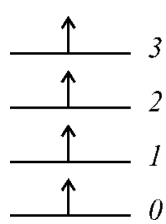


3ـ گزینه (4) صحیح است

چون $s_{\text{کل}}=2\mathbf{h}$ $\Leftarrow$ آرایش

انرژی حالت $4\times\frac{1}{2}\mathbf{h}=2\mathbf{h}$

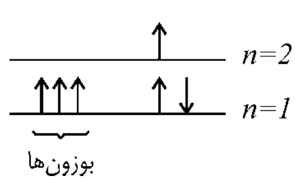
پایه $E=\sum_{n=0}^{3}E=\frac{1}{2}\mathbf{h}w(1+3+5+7)=8\mathbf{h}w$



4ـ گزینه (3) صحیح است

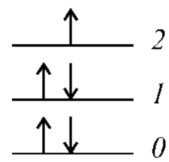
$$E=3E_1^b+2E_1^f+E_2^f$$

$$=\frac{3A(1)^2}{m_b}t\,2\frac{(1^2)A}{m_f}t\frac{A(2)^2}{m_f}=\frac{3A}{m_b}+\frac{4A}{m_f}$$



5ـ گزینه (؟) صحیح است .

$$N\left(\frac{1}{2}\mathbf{h}w\right)=\frac{9}{2}\mathbf{h}w$$



فرمیونی

$$N=9$$

پایه $E=\frac{1}{2}\mathbf{h}w\,(1+3+5)=\frac{9}{2}\mathbf{h}w$

6ـ گزینه (1) صحیح است

$$y\ (x_1,x_2)=j\ (x_1,x_2)\,c_1c_2$$

$c \rightarrow \{$ متقارن / پادمتقارن

اسپینی

$\Rightarrow y =$ پادمتقارن

$\Rightarrow j$ می تواند متقارن یا پاد متقارن باشد

7ـ گزینه (2) صحیح است

الکترون اضافی $\rightarrow (1,2) \rightarrow \frac{5h^2}{8mL^2}$

$$(\mathbf{o},1) \rightarrow \frac{4h^2}{8m\frac{1}{2}}$$

$$(1,1) \rightarrow E_2=\frac{h^2}{8mL^2}$$

$$(\mathbf{o},1) \rightarrow E_1=\frac{\mathbf{h}^2}{8mL^2}$$

8ـ گزینه (4) صحیح است

$$S=4\times\frac{1}{2}=2$$

$$E=\sum_{i=1}^{z}E_i=\frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{2mL^2}\,p^2\mathbf{h}^2$$

$$=\frac{30p^2\mathbf{h}^2}{2mL^2}=\frac{15p^2\mathbf{h}^2}{mL^2}$$

9ـ گزینه (2) صحیح است

1 چگالی احتمال ذره 1 $=\int \Delta x_1 \left|y\left(x_1,x_2\right)\right|^2 dx_2$

$$=\frac{\Delta x_1}{25}\,[9\left|u_5\left(x_1\right)\right|^2\int\left|u_4\left(x_2\right)\right|^2dx_2+16\left|u_9\left(x_1\right)\right|^2\int\left|u_8\left(x_2\right)\right|^2dx_2$$

$$-24\;u_5\left(x_1\right)u_9\left(x_1\right)\int u_4\left(x_2\right)u_8\left(x_2\right)dx_2\,]$$

$$=\frac{\Delta x_1}{25}\left[9\left|u_5\left(x_1\right)\right)^2+16\left|u_9\left(x\right)\right)^2\,|\right]$$

یادآوری: $\int dx u_n(x)u_m(x)=d_{nm}$

فصل پنجم: معادله شرویندگر سه بعدی – جبر تکانه زاویه ای – اتم هیدروژن

هامیلتونی ذره ای با حرکت سه بعدی به شکل زیر است:

$$H=\frac{P_x^2+P_y^2+P_z^2}{2m}+V(x,y,z)=\frac{P^2}{2m}+V(\vec{r})$$

عملگر P در فضای سه بعدی را به صورت زیر می نویسیم:

$$P=\frac{\hbar}{i}\nabla$$

برای دو ذره هامیلتونی می توان به شکل زیر نوشت:

$$H=\frac{P_1^2}{2m_1}+\frac{P_2^2}{2m_2}+V(r_1,r_2)$$

اگر پتانسیل فقط به فاصله دو ذره $\vec{r}=r_1-r_2$ بستگی داشته باشد می توان معادله شرودینگر را به روش جداسازی حل کرد. $V(r)$ تابعی از فاصله از مبدا است. بنابراین هامیلتونی به صورت زیر در می آید:

$$H=\frac{P^2}{2m}+V(r)$$

این هامیلتون تحت هر دورانی ناورداست و به طور معادل $P^2=-\hbar^2\nabla^2$ نیز تحت هر دورانی ناورداست. اگر دورانها حول محورهای z,y,x در نظر گرفته شود داریم:

$$L=r\times P$$

$$[H,L_x]=0 \qquad [H,L_y]=0 \qquad [H,L_z]=0$$

بنابراین L اندازه حرکت زاویه ای یک ثابت حرکت است.

برای مؤلفه های z,y,x اندازه حرکت زاویه ای داریم:

$$L_x = yP_z - zP_y = -i\mathbf{h}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$L_y = zP_x - xP_Z = -i\mathbf{h}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$L_z = -i\mathbf{h}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right) = xP_y - yP_X$$

روابط جابجایی زیر بین مؤلفه های مختلف برقرار می باشد:

$$\left[L_i, L_j\right] = ie_{ijk}L_k$$

همچنین $\boldsymbol{L}^2 = \boldsymbol{L}_x^2 + \boldsymbol{L}_y^2 + \boldsymbol{L}_z^2$ با هریک از مؤلفه های خود جابجا می شود:

$$\left[L^2, L_i\right] = 0$$

می توانیم $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{L}_2, \boldsymbol{L}^2$ رابعنوان یک مجموعه کامل از مشاهده پذیرهای جابجا شونده انتخاب کنیم. و باید ویژه توابع و ویژه مقادیر آنها را تعیین کنیم. می توان اتحاد زیر را با کمی عملیات ریاضی ثابت کرد:

$$L^2 + (r \cdot p)^2 = r^2 p^2 + i\mathbf{h} r \cdot p$$

P^2 را از معادله بالا پیدا کرده و در معادله شرودینگر جایگزین می کنیم:

$$-\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\mathbf{h}^2 r^2}\ L^2\right]u_E(r) + v(r)u_E(r) = Eu_E(r)$$

در مختصات کروی تنها L^2 به j, q بستگی دارد. بنابراین می توانیم قسمت زاویه ای و شعاعی را بصورت زیر جدا کنیم:

$$u_E(r) = Y_l(q, j)R_{El}(r)$$

در این صورت $\boldsymbol{Y}_l(q, f)$ ویژه توابع L^2 با ویژه مقادیر l خواهد بود:

$$L^2 Y_l(q, j) = l\,Y(q, j)$$

برای پتانسیل خاصی به شکل $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{V}_1(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{V}_2(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{V}_3(\boldsymbol{z})$ جواب معادله شرودینگر به صورت زیر خواهد بود :

$$\boldsymbol{u}_E(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{u}_{E_1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}_{E_2}(\boldsymbol{y})w_{E_3}(\boldsymbol{z}) \qquad , \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3$$

برای ذره ای در مکعب با ضلع L که پتانسیل آن به صورت زیر می باشد:

$$V_1(x)=\begin{cases}\infty & x<0\\ 0 & 0<x<L\\ \infty & x>L\end{cases}$$

جواب عمومی به صورت زیر می باشد:

$$u_E(x,y,z)=\sin\frac{n_1px}{L}\sin\frac{n_2py}{L}\sin\frac{n_3pz}{L}$$

$$E=\frac{\mathbf{h}^2p^2}{2mL^2}\left(n_1^2+n_2^2+n_3^2\right)$$

این سیستم دارای تبهگنی بالایی است، زیرا n_3,n_2,n_1 های زیادی می توان پیدا کرد که انرژی یکسانی داشته باشند. حال مسأله N را در یک جعبه سه بعدی بررسی می کنیم. می دانیم در هر تراز فقط دو الکترون قرار می گیرد. اگر فضایی با ابعاد N_3,N_2,N_1 را در نظر بگیریم، به هر نقطه از این فضا می توان دو الکترون نسبت داد. اگر تعداد نقاط زیاد باشند، آنگاه تعداد نقاطی که انرژیی کمتر از E_F انرژی فرمی دارند، باید داخل کره ای به شعاع R قرار بگیرند:

$$n_1^2+n_2^2+n_3^2=R^2=\frac{2mE_F}{\mathbf{h}^2p^2}L^2$$

تعداد نقاط برابر با یک هشتم کره است، زیرا n ها باید مثبت باشند. تعداد الکترونها دو برابر تعداد نقاط شبکه است. بنابراین تعداد الکترونها که برای آنها $E<E_F$ است، به قرار زیر می باشد:

$$N=\frac{p}{3}L^3\left(\frac{2mE_F}{\mathbf{h}^2p^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

اگر E_F را از رابطه بالا بدست آوریم و برحسب چگالی الکترونها $\left(\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{L}^3}\right)$ بنویسیم، داریم:

$$E_F=\frac{\mathbf{h}^2p^2}{2m}\left(\frac{3n}{p}\right)^{\frac{2}{3}}$$

برای محاسبه انرژی کل باید روی تعداد نقاط شبکه به شکل زیر انتگرال بگیریم:

$$\frac{1}{8}\int |n| \le R \;\; d^3n$$

میدانیم انرژی هر نقطه از شبکه بصورت زیر است:

$$E = \frac{\mathbf{h}^2 p^2}{2mL^2} n^2$$

پس از انتگرال گیری انرژی کل بر حسب چگالی الکترونها $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{L}^2}$ بصورت زیر محاسبه می شود:

$$E_{tot} = \frac{p^3 \mathbf{h}^2}{2om}\left(\frac{3n}{p}\right)^{\frac{5}{3}} L^3$$

چون مقادیر5-10 ev می باشند، تنها با اعمال میدان الکتریکی می توانند برانگیخته شوند. در مورد فلزات که دارای یک یا دو الکترون آزاد هستند، در صورت اعمال میدان الکتریکی تنها الکترونهای نزدیک به سطح دریای فرمی می توانند برانگیخته و شتابدار شوند. زیرا برای حالتهای با عمق بیشتر، لایه های بالایی پر هستند و قابل دسترس نیستند. آنهایی که شتابدار می شوند، مسیر آزاد میانگین بزرگی دارند زیرا ترازهای پایین تر اشغال شده اند.

اندازه حرکت زاویه ای

معادله ویژه مقداری L^2 وL_z بصورت زیر می باشد:

$$L_z Y_{lm} = m\mathbf{h} Y_{lm}$$
$$L^2 Y_{lm} = l(l+1)\mathbf{h}^2 Y_{lm}$$

عملگرL_z در دستگاه محتصات کروی به شکل زیر است:

$$L_z = \frac{\mathbf{h}}{i}\frac{\partial}{\partial j}$$

دو عملگر $L_\pm$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$L_\pm = L_x \pm iL_y$$

این عملگرها در مختصات کروی بصورت زیر بیان می شود:

$$L_{\pm} = \mathbf{h} e^{\pm ij}\left(\pm \frac{\partial}{\partial q} + i \cot q \frac{\partial}{\partial j} \right)$$

عملگر L^2 را می توان بصورت زیر بر حسب $L_{\pm}$ و L_z بیان کرد:

$$L^2 = L_+ L_- + L_z^2 - \mathbf{h} L_z$$

معادله ویژه مقداری $L_z Y_{lm} = m\mathbf{h} Y_{lm}$ را می توان در مختصات کروی به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial j} Y_{lm}(q, j) = imY_{lm}(q, j)$$

جواب را می توان به صورت $\boldsymbol{Y}_{lm}(q, f) = q_{lm}(q) F_{lm}(f)$ نوشت و معادله را به روش جدا سازی متغیرها حل نمود. برای F خواهیم داشت:

$$\frac{d\Phi(j)}{dj} = im\Phi_m(j)$$

و جواب بهنجار شده به صورت زیر خواهد بود:

$$\Phi_m(j) = \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{imj}$$

چون سیستم باید تحت تبدیل $f \to f + 2p$ ناوردا باشد، بنابراین m باید یک عدد صحیح باشد.

با استفاده از روابط $\left\langle \boldsymbol{Y}_{lm} \middle| \boldsymbol{L}^2 \middle| \boldsymbol{Y}_{lm} \right\rangle \geq 0$ و $\left\langle \boldsymbol{Y}_{lm} \middle| \boldsymbol{Y}_{l'm'} \right\rangle = d_{mm'} d_{ll'}$ می توانیم نتیجه بگیریم که:

$$\boldsymbol{l}(\boldsymbol{l} + 1) \geq 0$$

همچنین با استفاده ازروابط $\boldsymbol{L}^2 = \boldsymbol{L}_- \boldsymbol{L}_+ + \boldsymbol{L}_z^2 + \boldsymbol{h}\boldsymbol{L}_z$ و $\boldsymbol{L}^2 = \boldsymbol{L}_+ \boldsymbol{L}_- + \boldsymbol{L}_z^2 - \boldsymbol{h}\boldsymbol{L}_z$ و نیز روابط مربوط به $L_{\pm}$ می توان روابط جابجایی زیر را اثبات نمود:

$$[L_+, L_-] = 2\mathbf{h} L_z \qquad [L^2, L_{\pm}] = 0$$

$$[L_+, L_z] = -\mathbf{h} L_z \qquad [L_-, L_z] = \mathbf{h} L_z \qquad [L^2, L_z] = 0$$

با توجه به جابجا پذیر بودن L^2 با $L_{\pm}$ و L_z می توان نوشت:

$$L^2 L_\pm Y_{lm} = l(l+1)\mathbf{h}^2 L_\pm Y_{lm}$$
$$L_z L_+ Y_{lm} = (m+1)\mathbf{h} L_+ Y_{lm}$$
$$L_z L_- Y_{lm} = (m-1)\mathbf{h} L_- Y_{lm}$$

از روابط بالا می توان نتیجه گرفت که $L_\pm Y_{lm}$ نیز تابع ویژه L^2 می باشند، با همان ویژه مقدار . $\boldsymbol{l}(\boldsymbol{l}+1)\boldsymbol{h}^2$ همچنین $L_+ Y_{lm}$ و $L_- Y_{lm}$ نیز توابع ویژه L_z هستند، اما با ویژه مقادیر بترتیب یک واحد بیشتر و یک واحد کمتر. پس می توان گفت که عملگرهای L_+, L_- عملگرهای نردبانی یا بالابرنده و پایین آورنده می باشند.

با استفاده از رابطه $\langle \boldsymbol{L_\pm Y_{lm}} | \boldsymbol{L_\pm Y_{lm}} \rangle \geq 0$ می توان ثابت کرد که $-l \leq m \leq l$ می باشد.

یعنی بازای یک مقدار l ما 2l+1 مقدار برای m خواهیم داشت که بصورت زیر خواهد بود:

$$m = -l, -l+1, -l+2, \mathbf{K}, l-1, l$$

با اعمال $L_\pm$ روی Y_{lm} می توانیم مقادیر ویژه L_+, L_- را به قرار زیر بدست آوریم:

$$L_\pm Y_{lm} = \mathbf{h}\left[l(l+1) - m(m\pm1)\right]^{\frac{1}{2}} Y_{lm}$$

قبلا گفتیم که می توان $\boldsymbol{Y_{lm}}(q,f) = q_{lm}(q)\boldsymbol{e}^{imf}$ را در نظر گرفت. معادله مربوط به q بصورت زیر درمی آید:

$$\left(\frac{\partial}{\partial q} - l\cot q\right) q_{ll}(q) = 0 \qquad (14\text{-}11)$$

جواب معادله بصورت $q_{ll}(q) = (\boldsymbol{\sin} q)^{\boldsymbol{l}}$ می باشد. حال با اعمال پیاپی L_- روی $\boldsymbol{Y_{ll}}(q,f)$، ویژه توابع Y_{lm} را بدست می آوریم:

$$Y_{lm}(q,j) = (-1)^m \left[\frac{2l+1}{4p}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{\frac{1}{2}} p_l^m(\cos q) e^{imj}$$

که در آن $\boldsymbol{p_l^m}(\boldsymbol{\cos} q)$ چند جمله ایهای لژاندر می باشد و داریم:

$$Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{lm}^*$$

مسائل نمونه

1- تابع حالت برای یک اتم هید روژن بصورت $y = \frac{1}{\sqrt{18}}\left(3y_{310} - 2y_{320} + \sqrt{5}y_{300}\right)$ **است . این تابع، ویــژه حالت کدام دسته از عملگرهاست؟**

الف) L_z, L^2 ب) L_z, L^2, H ج) L_z, H د) L^2, H

2-برای سیستمی که حول محور zها دارای تقارن است کدامیک از توابع حالات زیر نمی توانند ویــژه حالــت یک سیستم فیزیکی باشد؟(q, j **مختصه های کروی اند)**

الف) e^{i3f} ب) $e^{\frac{3i}{2}f}$ ج) $e^{i3f}\sin q$ د) e^{i4f}

3- تابع موج چرخنده ای بصورت:

$$y(q) = 1 + 3\cos q + 4\cos^2 q$$

است. در اندازه گیری مربع اندازه حرکت زاویه ای کدام دسته مقادیر امکان پذیرند؟

الف)صفر $8h^2, 4h^2$ ب) صفر $6h^2, 2h^2$

ج) $12h^2, 6h^2, 2h^2$ د) $12h^2, 3h^2, h^2$

حل مسائل نمونه

1- (گزینه 3)،اعداد کوانتومی m,n در تمام سه قسمت تابع موج یکسان است و بنابراین مجموع این توابع نیز ویـژه تـابع عملگر H و L_z می باشند.

2- (گزینه 2)،سیستم باید جهت دوران $2p$ ناوردا باشد و این خاصیت در جواب (2) وجود ندارد (باید توجه داشــت کـه این حالت می تواند ویژه حالت اسپین باشد ولی نمی تواند ویژه حالت اندازه حرکت زاویه ای باشد.

3- (گزینه2)،باید مقادیر $\cos q, \cos^2 q$ را بر حسب Y_{lm} ها نوشت:

$$y(q) = 1 + 3\cos q + 4\cos^2 q = \sqrt{4p}\,Y_{00} + 3\sqrt{\frac{4p}{3}}\,Y_{10} + \frac{4}{3}\left(\sqrt{\frac{16p}{5}}\,Y_{20} - \sqrt{4p}\,Y_{00}\right)$$

$$y(q) = -\frac{\sqrt{4p}}{3}Y_{00} + 3\sqrt{\frac{4p}{3}}\,Y_{10} + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{16p}{5}}\,Y_{20}$$

مقادیر l=0،1،2 مقادیری هستند که احتمال دارد در اندازه گیری بدست آید پس $L^2 = l(l+1)h^2$ می تواند مقادیر $0, 2h^2, 6h^2$ را بگیرد.

فصل ششم :بخش شعاعی معادله شرودینگر

جوابهای بخش شعاعی

بخش شعاعی معادله شرودینگر بصورت زیر می باشد:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)R_{nlm}(r)-\frac{2m}{h^2}\left[V(r)+\frac{l(l+1)h^2}{2mr^2}\right]R_{nlm}(r)+\frac{2mE}{h^2}R_{nlm}(r)=0$$

در معادله بالا n عدد کوانتومی انرژی است و فرض می کنیم پتانسیل سریعتر از $\frac{1}{r}$بسمت صفر میل می کند. بـرای حـل معادله، تبدیل $u_{nlm}(r)=rR_{nlm}(r)$ را در نظر می گیریم. با جاگذاری در معادله بالا داریم:

$$\frac{d^2u_{nlm}(r)}{dr^2}+\frac{2m}{h^2}\left[E-V(r)-\frac{l(l+1)h^2}{2mr^2}\right]u_{nlm}(r)=0$$

می توان فرض کرد که در معادله بالا $V(r)$ به $V(r)+\frac{l(l+1)h^2}{2mr^2}$تبدیل شده اسـت، کـه عامـل $\frac{l(l+1)h^2}{2mr^2}$ نقش یک دافعه مرکزگریز را برای ذره دارد. همچنین تابع موج باید در مبدا متناهی باشد. بنابراین داریم:

$$u_{nlm}(0)=0$$

در نزدیکی مبدا جمله های غالب بصورت زیر هستند:

$$\frac{d^2u}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}u\cong 0$$

بنابراین برای r های کوچک جواب بصورت r^{l+1}اسـت کـه بـه آن جـواب مـنظم مـی گوینـد، زیـرا بـرای ایـن جـواب $u(0)=0$می باشد و یا r^{-l} که به آن جواب نامنظم می گویند. برای r های بزرگ از جمله پتانسیل چشم پوشـی مـی کنیم، داریم:

$$\frac{d^2u}{dr^2}-\frac{2mE}{h^2}u\cong 0$$

با توجه به اینکه تابع موج در بی نهایت صفر می شود برای E<0 جواب بصورت e^{-ar} است، که در آن $a^2=-\frac{2mE}{h^2}$ می باشد. برای $E\rangle 0$ جواب ترکیب خطی e^{ikr}, e^{-ikr} است که در آن:

$$k^2=\frac{2mE}{h^2}$$

ذره آزاد

برای ذره آزاد $V(r)=0$ می باشد. اما بخش مرکزگریز پتانسیل باقی است. بنابراین معادله بصورت زیر در می آید:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R(r)+k^2R(r)=0$$

با تغییر متغیر $r=kr$ داریم:

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{l(l+1)}{r^2}R+R=0$$

جوابهای این معادله توابع بسل کروی هستند:

جواب منظم:
$$j_l(r)=(-r)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\left(\frac{\sin r}{r}\right)$$

جواب نامنظم:
$$n_l(r)=-(-r)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\left(\frac{\cos r}{r}\right)$$

برای r های بزرگ جوابها توابع هنکل کروی هستند. برای $r\langle\langle l$ یعنی در نزدیکی مبدا داریم:

$$j_l(r)\approx\frac{r^l}{1\times3\times5\times L\times(2l+1)}$$

$$n_l(r)\approx-\frac{1\times3\times5\times L\times(2l-1)}{r^l}$$

برای $r\rangle\rangle l$ داریم:

$$j_l(r) \approx \frac{1}{r}\sin\left(r - \frac{lp}{2} \right)$$
$$n_l(r) \approx -\frac{1}{r}\cos\left(r - \frac{lp}{2} \right)$$

برای جوابی که در مبدا منظم است زمانیکه $r \rangle\rangle \boldsymbol{l}$ باشد داریم:

$$R_l(r) \approx -\frac{1}{2ikr}\left[e^{-i\left(kr-\frac{lp}{2}\right)} - e^{i\left(kr-\frac{lp}{2}\right)} \right]$$

می توان جواب بالا را به صورت مجموع یک موج ورودی ویک موج خروجی در نظر گرفت.

برای جوابی بصورت $y\,(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{C}\,\frac{\boldsymbol{e}^{\pm \boldsymbol{ikr}}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{Y}_{\boldsymbol{lm}}(q,f)$ مقدار شار به شکل $\pm\frac{\boldsymbol{hk}\,|\boldsymbol{C}|^2}{m}\frac{1}{\boldsymbol{r}^2}$ می باشـد کـه علامتهـای $\pm$ برای توصیف شار خروجی و ورودی بکار می رود. مقدار شار برای (12-13) برابر $-\frac{\boldsymbol{hk}}{m}\frac{1}{4\boldsymbol{k}^2}$ می باشد که برابر بـا شار خروجی است. اما شار خالص صفر است زیرا منبع شاری نداریم.

چاه مربعی، حالتهای مقید

قسمت شعاعی معادله شرودینگر برای پتانسیلی بشکل $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} -\boldsymbol{V}_0 & \boldsymbol{r}\langle \boldsymbol{a} \\ 0 & \boldsymbol{r}\rangle \boldsymbol{a} \end{cases}$ بصورت زیر می باشد:

$$\frac{\boldsymbol{d}^2\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{dr}^2} + \frac{2}{\boldsymbol{r}}\frac{\boldsymbol{dR}}{\boldsymbol{dr}} - \frac{\boldsymbol{l}(\boldsymbol{l}+1)}{\boldsymbol{r}^2}\boldsymbol{R} + \frac{2m}{\boldsymbol{h}^2}(\boldsymbol{V}_0 + \boldsymbol{E})\boldsymbol{R} = 0 \qquad \boldsymbol{r}\langle \boldsymbol{a}$$
$$\frac{\boldsymbol{d}^2\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{dr}^2} + \frac{2}{\boldsymbol{r}}\frac{\boldsymbol{dR}}{\boldsymbol{dr}} - \frac{\boldsymbol{l}(\boldsymbol{l}+1)}{\boldsymbol{r}^2}\boldsymbol{R} + \frac{2m\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{h}^2}\boldsymbol{R} = 0 \qquad \boldsymbol{r}\rangle \boldsymbol{a}$$

$$\frac{2m}{\boldsymbol{h}^2}(\boldsymbol{V}_0 + \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{k}^2 \qquad \frac{2m}{\boldsymbol{h}^2}\boldsymbol{E} = -a^2$$

برای حالتهای مقیدی که $\boldsymbol{E}\,\langle 0$ است داریم:

برای $r\langle a$ جواب باید در مبدا منظم باشد: $R(r) = A\, j_l(kr)$

برای $r\rangle a$ جواب وقتی $r \longrightarrow \infty$ صفر می شود: $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{h}_l^{(1)}(\boldsymbol{i}\,a\boldsymbol{r})$

با اعمال شرایط مرزی و با شرط $|E| \ll V_0$ و $ka \gg l$ داریم:

$$\frac{E}{2V_0} = -1 + \frac{\left[n + (l+1)/2\right]p}{k_0 a} \qquad k_0^2 = \frac{2mV_0}{h^2}$$

یک مسئله خاص در این مورد پتانسیلی بصورت $V(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \infty & r > a \end{cases}$ می باشد. برای این پتانسیل داریم:

$\frac{2mE}{h^2} = k^2$ جواب منظم در $r = 0$ بصورت $R(r) = A\, j_l(kr)$ می باشد که ویژه مقدارهای آن صفرهای معادله بسل در $r = 0$ هستند:

$$j_l(ka) = 0$$

در نماد بیناب نمایی نمادگذاریهای زیر را داریم:

$$s: l = 0 \quad p: l = 1 \quad D: l = 2 \quad F: l = 3 \quad G: l = 4$$

ترتیب پر شدن ترازها به صورت زیر است:

$$1s\ ;\ 1p\ ;\ 1D\ ;\ 2s\ ;\ 1F\ ;\ 2p\ ;\ 1G\ ;\ 2D\ ;\ 2D\ ;\ 1H\ ;\ 3s$$

به ازای هر l ، 2l+1 تبهگنی داریم و در هر لایه 4l+2 الکترون (فرمیون) قرار می گیرند. بنابراین در لایه اول 2 الکترون در لایه دوم 8 الکترون در لایه سوم 18 الکترون و... قرار می گیرند.

چاه مربعی، جوابهای پیوسته

برای $E > 0$ جواب معادله شرودینگر بصورت زیر می باشد:

$$\begin{cases} R_l(r) = B\, j_l(kr) + C\, n_l(kr) & r > a \qquad k^2 = \dfrac{2mE}{h^2} \\ R_l(r) = A j_l(qr) & r < a \qquad q^2 = \dfrac{2m(E + V_0)}{h^2} \end{cases}$$

نسبت $\frac{C}{B}$ را می توان با اعمال شرایط مرزی به شکل زیر بدست آورد:

$$\frac{C}{B} = -\tan d_l(k)$$

تنها بـرای حالـت $l = 0$ مـی تـوان جـواب را بـا مسـاوی قـرار دادن $A\sin qr$ و $B\sin kr + C\cos kr$ در $r = a$ ، $d_0(x)$ را بدست آورد.

یک جواب برای ذره آزاد که از بر هم نهش جوابهای منظم بدست می آید، بصورت زیر است:

$$y(r) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm}\, j_l(kr) Y_{lm}(q, j)$$

یک جواب دیگر برای ذره آزاد $y(r) = e^{ik\cdot r}$ بود. اگر محور z را در جهت k در نظر بگیریم، داریم:

$$e^{ik\cdot r} = e^{ikr\cos q}$$

حال با مساوی قرار دادن دو جواب می توانیم A_{lm} ها را پیدا کنیم. داریم:

$$e^{ikr\cos q} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\, i^l\, j_l(kr)\, p_l(\cos q)$$

رابطه بالا در بررسی نظریه برخورد مفید خواهد بود.

اتم هیدروژن

اتمهای هیدروژن گونه اتمهایی هستند که فقط شامل یک الکترون می باشند اما هسته می تواند بیش از تنها یک پروتون داشته باشد. چنین اتمهایی دارای پتانسیل زیر می باشند:

$$V(r) = -\frac{ze^2}{r}$$

بـرای حالـت $E \langle 0$ اگـر تغییـر متغیرهـای $r = \left(\frac{8m|E|}{h^2}\right)^{\frac{1}{2}} r$ ، $l = z a \left(\frac{mc^2}{2|E|}\right)$ را در نظـر بگیـریم، معادلـه شرودینگر (قسمت شعاعی) به صورت زیر درمی آید ($a = \frac{1}{137}$):

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}R + \left(\frac{l}{r} - \frac{1}{4}\right)R = 0$$

برای r های بزرگ معادله بشکل زیر می باشد:

$$\frac{d^2R}{dr^2}-\frac{1}{4}R\approx 0$$

جواب معادله بالا بصورت $R(r)=e^{-\frac{r}{2}}G(r)$ خواهد بود. برای بدست آوردن $G(r)$ باید آنرا در معادله شرودینگر قرار دهیم. بدست می آوریم:

$$G(r)=r^l\sum_{n=0}^{\infty}a_n r^n=r^l H(r)$$

برای بدست آوردن a_n باید مقداری عملیات ریاضی انجام دادکه به نتایج زیر منجر می شود:

n عدد کوانتومی اصلی یک عدد حقیقی است که بصورت $n\geq l+1$ می باشد. ویژه مقدارهای انرژی به شکل $E=-\frac{1}{2}mc^2\frac{(za)^2}{n^2}$ بدست می آیند.

فرکانسهای حاصل از تغییر تراز الکترون از i به j بصورت زیر می باشد:

$$w_{ij}=\frac{E_i-E_j}{h}=\frac{\frac{mc^2}{2h^2}}{1+\frac{m}{M}}(za)^2\left(\frac{1}{n_i^2}-\frac{1}{n_j^2}\right)$$

که در آن m جرم الکترون M جرم هسته می باشد.

تعداد کل تبهگنی انرژی برابر است با:

$$\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1)=n^2$$

با داشتن توابع موج می توان مقدار چشم داشتی r^k را حساب کرد :

$$\langle r^k\rangle=\int_0^{\infty}dr\, r^{k+2}\left[R_{nl}(r)\right]^2$$

در زیر مقدار چشمداشتی بازای چند مقدار مختلف k حساب شده است:

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{z}{a_0 n} \qquad \langle r \rangle = \frac{a_0}{2z}\left[3n^2 - l(l+1)\right]$$

$$\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{z}{a_0^2 n^3\left(l+\frac{1}{2}\right)} \qquad \langle r^2 \rangle = \frac{a_0 n^2}{2z^2}\left[5n^2 + 1 - 3l(l+1)\right]$$

مجموعه تست

1ـ یک ذره در پتانسیل $v(x,y,z)=\frac{1}{2}mw^2\left(x^2+y^2+z^2\right)$ قرار دارد. تبهگنی سومین تراز انرژی چقدر است؟

12 (1   10 (2   9 (3   3 (4

2ـ اگر تابع بهنجار الکترون در پتانسیل کولنی یک پروتون $y(\vec{r})=C(r^3+r)e^{-ar^2}$ باشد احتمال اینکه اندازه گیری :

1) L^2 به صفر منجر می‌شود برابر صفر است

2) L^2 به $2n^2$ منجر شود برابر یک است

3) همزمان L_z, L^2 هر دو به صفر منجر شود برابر یک است

4) همزمان L_z, L^2 هر دو به صفر منجر شود برابر یک است

3ـتابع موج یک اتم هیدروژن چنین است :

$$y(\vec{r}, t=0)=\frac{1}{\sqrt{14}}\left[2y_{100}(\vec{r})-3y_{200}(\vec{r})+y_{322}(\vec{r})\right]$$

1) $\left(0,\frac{2}{7}\right)$ 2) $\left(0,\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$ 3) $\left(\frac{1}{14},\frac{2}{14}\right)$ 4) $\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$

4ـ ذره ای تحت پتانسیل $V=V(|\hat{r}|)$ است. توابع ویژه هامیلتونی ذره میتواند همزمان توابع ویژه عملگرهای L^2 و L_z باشد به شرطی که :

1) $[L_i\ ,\ H]=0$ 2) $[L^2, L_i]=0$

3) $[L_i, L_j]=i\mathbf{h}\in_{ijk}\ L_k$ 4) $[L_i, p_j]=i\mathbf{h}\in_{ijk} x_k$

5ـ رابطه $\sum_n |x_{n,a}|^2 (E_n - E_a)$ که در آن x_{na} عناصر ماتریسی عملگر $\mathbf{x}$ می‌باشد برابر است با:

1) $\frac{3\mathbf{h}^2}{m}$ 2) $\frac{3\mathbf{h}^2}{m}$ 3) $\frac{2\mathbf{h}^2}{m}$ 4) $\frac{\mathbf{h}^2}{2m}$

6ـ تابع موج شعاعی الکترون اتم هلیوم یکبار یونیزه شده با تابع $e^{-\frac{2r}{a_0}}$ متناسب است . در یک واکنش هسته ای یکی از پروتونها از هسته خارج می‌شود. احتمال این که الکترون در حالت زمینه هسته باقیمانده باشد چقدر است؟

1) 0 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{5}{7}$ 4) $\frac{512}{729}$

7ـ یک الکترون در میدان کولنی یک پروتون توسط تابع موج زیر توصیف می‌شود:

$$\frac{1}{6}\left[6\,j_{1,0}(\overset{\mathbf{r}}{r})+3j_{211}(\overset{\mathbf{r}}{r})-j_{210}(\overset{\mathbf{r}}{r})+\sqrt{10}j_{21-1}\right]$$

احتمال اینکه انرژی آن E_2 باشد برابر است با :

1) $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{4}{9}$ 3) $\frac{5}{9}$ 4) $\frac{5}{18}$

8ـ کدام رابطه قضیه ارنست را دقیقا بیان می‌کند؟

1) $<\frac{d\overset{\mathbf{r}}{p}}{dt}>=+<\overset{\mathbf{r}}{\nabla}V(r)>$ 2) $\frac{d\overset{\mathbf{r}}{p}}{dt}=-\overset{\mathbf{r}}{\nabla}<V(\overset{\mathbf{r}}{r})>$

3) $\frac{d\langle \vec{p}\rangle}{dt} = -\langle \vec{\nabla} V(r)\rangle$ 4) $md^2\frac{\langle \vec{r}\rangle}{dt^2} = \vec{\nabla}\langle V(\vec{r})\rangle$

9ـ تابع موج برای دوترون در فاصله $a \le r \le a+b$ با $j(r)=\frac{A}{r}\sin[k(r-a)]$ و در فاصله $r > a+b$ با: $j(r)=\frac{Be^{-kr}}{r}$ داده شده است. احتمال اینکه نوترون و پروتون در فاصله بین **a** و **(a+b)** قرار گیرند برابر کدام است ؟

1) $B^2\left(e^{-k(a+b)}-e^{-ka}\right)$ 2) $A^2\frac{b}{2}$

3) $A^2\left(\frac{b}{2}-\frac{1}{4k}\sin 2kb\right)$ 4) 1

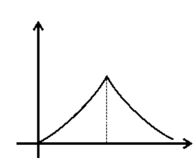
10ـ حالت $n_x = 0$, $n_y = 0$, $n_z = 1$ نوسانگر هماهنگ سه بعدی را در نظر بگیرید. درجه تبهگنی انرژی این حالت برابر کدام است ؟

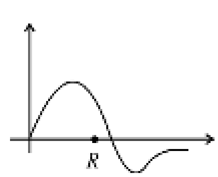
1) 1 2) 2 3) 3 4) 6

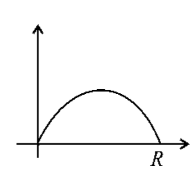
11ـ جابجاگر عملگرهای $[L_i , p^2]$ برابر کدام است ؟

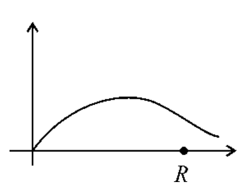
1) 0 2) p_i 3) L_i 4) r_i

12ـ تابع موج حالت زمینه چاه پتانسیل کروی $V(r)=\begin{cases}-V_0 & r < R\\ 0 & r > R\end{cases}$ به کدام شکل بیشتر شبیه است؟









13ـ بسط موج تخت e^{ikz} برابر کدام است ؟

1) $\sum_{l=0}^{\infty} i^{l}(2l+1)n_l(kr)p_l(\cos\theta)$

2) $\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)j_l(kr)\,pl(\cos\theta)$

3) $\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{m=+l} i^{l}(2l+1)\partial_l(kr)\,pl(\cos\theta)$

4) $\sum_{l=0}^{\infty} i^{l}(2l+1)j_l(kr)\,p_l(\cos\theta)$

14ـ تابع موج شعاعی یک حالت اتم هیدروژن به صورت زیر است:

$$4\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{3a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\ \frac{r}{a_0}\left(1-\frac{r}{6a_0}\right)e^{-\frac{r}{3a_0}}$$

اعداد کوانتمی این حالت کدام است ؟

1) $n=1\ ,\ \mathbf{l}=1$
2) $n=3\ ,\ \mathbf{l}=1$
3) $n=1\ ,\ \mathbf{l}=3-3$
4) $m=3\ ,\mathbf{l}=3-4$

15ـ تابع حالت برای یک اتم هیدروژن به صورت :

$$y=\frac{1}{\sqrt{18}}\left(3y_{310}-2y_{320}+\sqrt{5}y_{300}\right)$$

است . این تابع ویژه حالت کدام دسته از عملگرها است ؟

1) $L_z\ ,\ L^2$
2) $L_Z\ ,\ L^2,H$
3) $L_Z\ ,H$
4) $L^2\ ,H$

16ـ اپراتور $\mathbf{A}$ داده شده بطوریکه $[L_y,A]\ ,\ [L_x,A]=\mathbf{o}$ در این رابطه ها $L_y\,,L_x$ مولفه های **y,x** اندازه حرکت زاویه ای هستند. کدام گزینه درست است ؟

1) $[L_z,A]=i\mathbf{h}L_x$
2) $[L_z,A]=i\mathbf{h}$
3) $[L_z,A]=\mathbf{o}$
4) $[L_z,A]=i\mathbf{h}\left(L_x+L_y\right)$

17ـ برای سیستمی که حول محور **z** ها دارای تقارن است کدامیک از توابع حالات زیر نمی توانند ویژه حالت L_z یک سیستم فیزیکی باشد (q,j مختصه های کروی اند)

1) e^{3ij}
2) $e^{3\frac{ij}{2}}$
3) $e^{2ij}\sin q$
4) e^{4ij}

18ـ کدامیک از عملگرهای زیر می تواند معرف یک کمیت مشاهده پذیر فیزیکی باشد؟ (س 79)

1) $\frac{1}{2}(xp_x+p_xx)$
2) L_xL_y
3) $x^2p_x^2$
4) $[L_x,L_y]$

19ـ تابع موج اتم هیدروژن در حالت $m=2\ ,\ \mathbf{l}=1\ ,\ m=\mathbf{0}$ به صورت:

$y_{210}=\frac{1}{2\sqrt{p}\,(2a_0)^{\frac{3}{2}}}\ \frac{r}{a_0}\ e^{-\frac{r}{2a_0}}$ است. محتملترین فاصله الکترون از هسته در این حالت چقدر است؟

1) $5a_0$ 　 2) $2a_0$ 　 3) a_0 　 4) $4a_0$

20ـ تابع حالت یک اتم هیدروژن عبارت است از :

$$y(\vec{r})=(2y_{100}+5y_{200}+6y_{210}+8y_{320})x_{+}$$

این تابع حالت می تواند ویژه حالت همزمان چه عملگرهایی باشد؟ (c_t ویژه حالت عملگر $s_{\hat{z}}$ با ویژه مقدار $\frac{\mathbf{h}}{2}$ است)

1) L^2, S^2, S_z 　 2) $L_z^2\ ,\ s_z, s^2$ 　 3) H, S_Z, S^2 　 4) H, L^2, S^2

21ـ جابجاگر $[L_x, \vec{r}_0\vec{p}]$ که در آن $\vec{r}$ عملگر مکان، $\vec{p}$ عملگر ممنتوم و L_x مولفه x عملگر ممنتوم و زاویه ای مداری است کدام است ؟

1) $\mathbf{o}$ 　 2) $2i\mathbf{h}(\vec{r}\times\vec{p})_x$ 　 3) $i\mathbf{h}(\hat{x}-px)$ 　 4) $2i\mathbf{h}\,\hat{x}\,p_{\hat{x}}$

22ـ هامیلتونی ذره ای در سه بعد $H_0=\frac{A}{\mathbf{h}^2}\left[L_x^2+L_y^{\ 2}\right]+\frac{B}{\mathbf{h}}L_z$ است اگر مقدار اندازه حرکت مداری ذره $\mathbf{l}=1$ باشد مقادیر انرژی آن کدام گزینه می تواند باشد؟

1) $B, A, -B$ 　 2) $2A\ ,\ 2A-B, 2A+B$

3) $A-B\ ,\ 2A, A+B$ 　 4) $A-B\ ,\ A\ ,\ A+B$

23ــ تابع موج الکترون و اتم هیدروژن : $j = \frac{1}{\sqrt{3}}[y_{100}(\mathbf{r}) - y_{211}(\mathbf{r}) + y_{320}(\mathbf{r})]x_L$ است. $y_{nlm} =$ ها ویژه توابع بهنجار هامیلتونی $H = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$ ، c_t تابع موج مربوط به اسپین الکترون است. مقدار انتظاری عملگر L^2 در این حالت چیست؟

1) $8\frac{\mathbf{h}^2}{3}$ 2) $2\mathbf{h}^2$ 3) $\frac{4\mathbf{h}^2}{3}$ 4) $\frac{20\mathbf{h}^2}{3}$

24ــ ذره ای به جرم **m** در چاه کروی $V(r)=\begin{cases}\mathbf{0} & \mathbf{0}<r<a\\ \infty & r\geq a\end{cases}$ قرار دارد. ویژه مقادیر هامیلتونی ذره از کدامیک از روابط زیر بدست می آید؟

1) $\mathbf{hl}^{(2)}(ka)=\mathbf{0}$ با $k^2=\frac{2mE}{\mathbf{h}^2}$

2) $\mathbf{hl}^{(1)}(ka)=\mathbf{0}$ با $k^2=\frac{2mE}{\mathbf{h}^2}$

3) $n\mathbf{l}(ka)=\mathbf{0}$ با $k^2=\frac{2mE}{\mathbf{h}^2}$

4) $l\,\mathbf{l}(ka)=\mathbf{0}$ با $k^2=\frac{2mE}{\mathbf{h}^2}$

25ــ تابع موج الکترون در حالت پایه اتم هیدروژن $\frac{2}{\sqrt{4p}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{r}{a_0}}$ است. a_0 شعاع اتم بوهر است.

میانگین نیروی کولنی وارد از طرف هسته اتم به الکترون در این حالت $c<-\frac{e^2}{r^2}>$ کدام است؟)

1) $-e^2a_0^{-2}$ 2) $-2e^2a_0^{-2}$ 3) $-\frac{1}{2p}e^2a_0^2$ 4) $-\frac{1}{p}e^2a_0^{-2}$

26ــ هامیلتونی یک چرخنده در صفحه **x-y** به صورت $H=\frac{\hat{L}Z^2}{2I}$ است. اگر در لحظه $t=\mathbf{0}$ حالت چرخنده:

$y=-\sqrt{\frac{3}{8p}}e^{ij}\sin q$ باشد تابع حالت آن در زمان **t** کدام است ؟

1) $-\sqrt{\frac{3}{8p}}\left(\frac{\mathbf{h}^2t}{2I}\right)e^{ij}\sin q$

2) $-\sqrt{\frac{3}{8p}}e^{-\frac{it\mathbf{h}}{2I}}\sin q$

3) $-\sqrt{\frac{3}{8p}}\left(\frac{\mathbf{h}^2t}{2I}\right)e^{ij}\sin q$

4) $-\sqrt{\frac{3}{8p}}e^{-\frac{it\mathbf{h}^2}{I}}e^{ij}\sin q$

27ـ کدام یک از مجموعه ها که به ترتیب از راست به چپ بیانگر اعداد کوانتومی $(md, me, \mathbf{l}, n)$ یک حالت برای الکترون در اتم هیدروژن می‌باشند. غیر ممکن است ؟

1) $\left(\frac{1}{2},-1,1,3\right)$

2) $\left(-\frac{1}{2},-2,2,3\right)$

3) $\left(\frac{1}{2},\mathbf{0},2,6\right)$

4) $\left(-\frac{1}{2},1,1,3\right)$

28ـ تابع حالت ذره ای در مختصات کروی $y = ce^{-\frac{r}{a_0}} y_{\mathbf{l}m}(q,j)$ است. ΔL_z عدم قطعیت در L_z در این حالت کدام است ؟ c عدد ثابتی است و $\Delta^2 L_Z = <L_z^2> - <L_z>^2$.

1) صفر

2) $m(m-1)$

3) $m\mathbf{h}|c|^2$

4) $\frac{m^2\mathbf{h}^2}{2}|c|^2$

29ـ تابع موج الکترون در اتم هیدروژن :

$y_{210} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2pa^3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{a_0}\right)e^{-\frac{r}{2a_0}}\cos q$ است. احتمال یافتن الکترون در بازه

$\left(\int r^n e^{-ar}dr - (-)^n \frac{d}{da^n}\int e^{-ar}dr\right)$.

1) $1-e^{-4}$

2) 1

3) $\frac{1}{4}\left(1-e^{-4}\right)$

4) $\frac{3}{2p}\left(1-e^{-4}\right)$

30ـ اگر y_{nlm} ویژه تابع انرژی اتم هیدروژن باشد مقدار میانگینی عملگر L_x در این حالت چقدر است؟

1) صفر

2) $m\mathbf{h}$

3) $\sqrt{(\mathbf{l}-m)(\mathbf{l}+m-1)}\mathbf{h}$

4) $\frac{\mathbf{h}}{2}\left[\sqrt{(\mathbf{l}-m)(\mathbf{l}+m-1)}+\sqrt{(\mathbf{l}+m)(\mathbf{l}-m-1)}\right]$

31ـ اگر هامیلتونی ذره ای تحت دوران حول محوری ناوردا باشد کدام گزینه درست است ؟

1) متوسط تکانه زاویه ای ذره همیشه صفر است

2) متوسط مولفه تکانه خطی ذره ثابت حرکت است

3) متوسط مولفه تکانه زلیه ای ذره در راستای این محور دوران بطور خطی با زمان تغییر میکند.

4) متوسط مولفه تکانه زاویه ای ذره در راستای این محور دوران ثابت حرکت است

32ـ ذره ای در حالت بهنجار $\psi(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ **قرار دارد. مقدار متوسط** $L_{\hat{z}}$ **ذره دراین حالت کدام است؟**

1) $-\frac{1}{3}\hbar$ 2) $\frac{\hbar}{2}$ 3) $\frac{2}{3}\hbar$ 4) $\hbar$

33ـ نوسانگر هماهنگ غیر همسانگر سه بعدی به جرم m و انرژی پتانسیل:

$V(x,y,z)=\frac{1}{2}m\omega_1^2\left(x^2+y^2\right)+\frac{1}{2}m\omega_2^2z^2$ **را در نظر بگیرید. اگر** $\omega_2=2\omega_1$ **مرتبه تبهگنی. اولین حالت برانگیخته این نوسانگر کدام است ؟**

1) 1   2) 2   3) 3   4) 4

34ـ تابع موج $\psi(r,\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{1}{3}}R(r)Y_{10}(\theta,\varphi)\chi_{+}+\sqrt{\frac{2}{3}}R(r)Y_{11}(\theta,\varphi)\chi_{-}$ **ذره ای با اسپین** $\frac{1}{2}$ **را توصیف می‌کند. چگالی احتمال یافتن ذره در یک نقطه دلخواه از فضا با مختصات کروی** r,θ,φ **بدون توجه به اسپین چگونه تابعی از مختصات آن نقطه است ؟ (** $\chi_{\pm}$ **وژه توابع اسپین در راستای z است)**

(راهنمایی $Y_{10}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$ **,** $Y_{11}(\theta_1,\varphi)=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\varphi}$**)**

1) تابعی فقط از مختصه φ است

2) تابعی فقط از مختصه های r,θ است

3) تابعی فقط از مختصه r است

4) تابعی از هر سه مختصه r,θ,φ است.

35ـ تابع موج ذره ای در مختصات کروی به شکل : $j(\overset{\mathbf{r}}{r}) = R_n(r)Y\mathbf{l}_m(q, j)$ است. به ازای $\mathbf{l} = m = 2$ $\Delta^2 L_y$ کدام است ؟

$$\Delta^2 B = < B^2 > - < B >^2 \quad , \quad A_{nl} = \int_0^\infty r^2 \; R_{nl}(r) dr$$

1) h^2 2) $2\mathbf{h}^2$ 3) $\mathbf{h}^2 |A_{nl}|^2$ 4) $5\mathbf{h}^2 |A_{nl}|^2$

36ـ تابع موج الکترونی دو اتم هیدروژن به شکل:

$j(\overset{\mathbf{r}}{r}) = \frac{1}{6}\left[4j_{300}(\overset{\mathbf{r}}{r}) - \sqrt{11} f_{21} - (\overset{\mathbf{r}}{r})\right]$ است که $f_{nlm}(\overset{\mathbf{r}}{r})$

ویژه توابع: هنجار انرژی سیستم است. احتمال آنکه در اندازه گیری عملگر L^2 مقدار $6\mathbf{h}^2$ بدست آید. کدام است؟

1) صفر 2) $\frac{1}{18}$ 3) $\frac{7}{18}$ 4) $\frac{5}{9}$

37ـ اتم پوزیترونیم (متشکل از یک الکترون یک پوزیترون) در یک حالت تکانه زاویه ای عددی متناظر با اعداد کوانتمی $m, \mathbf{l}$ است. پاریته این حالت کدام است ؟

1) $(-)^m$ 2) $(-)^{\mathbf{l}}$ 3) $(-)^{\mathbf{l}+1}$ 4) $(-)^{m+1}$

38ـ $y(x, y, z)$ تابع حالت یک سیستم فیزیکی است. تابع $y(x - y\in, x\in + y, z)$ را که در آن $e << 1$ بر حسب $y(x, y, z)$ به کدام شکل می توان نوشت؟

1) $\left(1 + \frac{ie}{\mathbf{h}}\hat{L}_z\right) y(x, y, z)$

2) $\left(1 - i\frac{e}{\mathbf{h}}\hat{p}_z\right) y(x, y, z)$

3) $\left(1 + \frac{ie}{\mathbf{h}}\hat{p}_z\right) y(x, y, z)$

4) $\left(1 - \frac{ie}{\mathbf{h}}\hat{L}_z\right) y(x, y, z)$

39ـ هامیلتونی نوسانگر سه بعدی به جرم $\mathbf{m}$ به شکل $H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}mw^2\overset{\mathbf{r}}{r}^2$ است که در آن $\overset{\mathbf{r}}{r}^2=x^2+y^2+z^2$ انرژی تراز سوم کدام است ؟

1) $\frac{5}{2}\mathbf{h}w$ 2) $\frac{7}{2}\mathbf{h}w$ 3) $\frac{9a}{2}\mathbf{h}w$ 4) $3\mathbf{h}w$

40ـ تابع موج شعاعی الکترون اتم هلیوم یکبار یونیزه شده به شکل $R(r)=Ar^2e^{-\frac{2r}{a_0}}$ است. $\mathbf{A}$ و a_0 اعداد ثابتی هستند. محتمل ترین شعاع برای این الکترون کدام است ؟ (س 84)

1) $\frac{3a_0}{4}$ 2) a_0 3) $\frac{3a_0}{2}$ 4) $2a_0$

41ـ تابع موج الکترون در یک اتم هیدرون به شکل : $y(\overset{\mathbf{r}}{r})=\frac{1}{\sqrt{2}}[y_{210}(\overset{\mathbf{r}}{r})-y_{211}(\overset{\mathbf{r}}{r})]$ است. اگر ضرایب تناسب عملگرهای بالا برنده L_+ و پایین آورنده L_- به صورت:

$\mathbf{h}[(\mathbf{l}\pm m)(\mathbf{l}\pm m+1)]^{\frac{1}{2}}$ باشند. مقدار چشمداشتی $\hat{L}_X$ این اتم کدام است ؟ $y_{nlm}(\overset{\mathbf{r}}{r})$ ویژه توابع بهنجار انرژی ذره است)

1) $-\sqrt{2}\,\mathbf{h}$ 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{h}$ 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{h}$ 4) $\sqrt{2}\mathbf{h}$

42ـ تابع موج الکترون درحالت پایه اتم هیدروژن به شکل $y(\overset{\mathbf{r}}{r})=\frac{1}{\sqrt{pa^3}}e^{-\frac{r}{a}}$ است. که $a=\frac{\mathbf{h}^2}{m_e.e^2}$ متوسط انرژی جنبشی الکترون در این حالت چقدر است؟ (راهنمایی: $\int_0^\infty r^n e^{-ar}dr=\frac{n!}{a^{n+1}}$)

1) $\frac{\mathbf{h}^2}{2m_ea^2}$ 2) $\frac{3\mathbf{h}^2}{2m_ea^2}$ 3) $\frac{4\mathbf{h}^2}{3mea^2}$ 4) $\frac{4\mathbf{h}^2}{pm_ea^2}$

43ـ تابع موج اتم هیدروژن به صورت $y(\overset{\mathbf{r}}{r})=\frac{1}{\sqrt{3}}[y_{100}(\overset{\mathbf{r}}{r})+y_{210}(\overset{\mathbf{r}}{r})-y_{312}(\overset{\mathbf{r}}{r})]$ توصیف می گردد. مقدار ارزش انتظاری مجذور عملگر اندازه حرکت زاویه ای این اتم کدام است ؟ (y_{nlm} ویژه توابع بهنجار اتم هیدروژن هستند)

1) $\frac{4}{3}\mathbf{h}^2$ 2) $\frac{8}{3}\mathbf{h}^2$ 3) $\mathbf{h}^2$ 4) $3\mathbf{h}^2$

44ـ جسم صلب با گشتاور لختی I مقید به چرخش حول یک محور ثابت است. فرکانس فوتونی که باید توسط چرخنده جذب گردد، تا سیستم را از تراز انرژی m به تراز بالاتر انرژی n انتقال دهد کدام است ؟

1) $(n-m)\frac{h^2}{p^2 I}$ 2) $(n-m)\frac{h^2}{2p^2 I}$

3) $(n^2-m^2)\frac{h^2}{4p^2 I}$ 4) $(n^2-m^2)\frac{h^2}{8p^2 I}$

پاسخنامه

1ـ گزینه (2) صحیح است

$$E_{n_x,n_y,n_z} = \hbar w\left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}\right) = \hbar w\left(N + \frac{3}{2}\right)$$

تبهگنی: $\frac{E}{\hbar w} - \frac{3}{2} = N = \sum_{t=1}^{3} n_i \Rightarrow \frac{(N+3-1)}{(3-1)!\,N!}$

درجه تبهگنی $= \frac{(N+2)!}{2N!} = \frac{(N+2)(N+1)}{2}$

سومین تراز: $\begin{matrix} n_x = 0 \\ n_y = 2 \\ n_z = 1 \end{matrix} \rightarrow N = 3 \quad \frac{(2+3)\,(3+1)}{2} = \frac{5\times 4}{2} = 10$

2ـ گزینه (4) صحیح است

$$m = 0 \Leftarrow l = 0 \leftarrow y = y\,(r)$$

3ـ گزینه (1) صحیح است

$$|C_{100}|^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^2 = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

$$|c_{321}|^2 = 0$$

4ـ گزینه (3) صحیح است

$$[L^2\ ,\ L_Z] = 0$$

$$[H\,, L^2] = 0$$

$$[H\,, L_Z] = 0$$

5ـ گزینه (4) صحیح است

$$(E_2 - E_a)\sum_n \left|< n|x|a >\right|^2 (E_n - E_a) = \sum_n < n|x|a >^t < n|x|a >$$

$$= \sum_n < a|x|n >< n|x|a > (E_n - E_a)$$

$$= \sum_n < a|xE_n|n >< n|x|a > - < a|E_a(x)|n >< n|x|a >$$

$$= \sum_n < a|xH|n >< n|x|a > - < a|Hx|n >< n|x|a >$$

$$=< a|(xH)(x) - (Hx)x|a >$$

$$=< a|[x,H]x|a >$$

$$< a|[x,[x,H]]a| >=< a|x[x,H] - [x,H]x|a >$$

$$=< a|x[x,H]|a > - < a|[x,H]x|a >$$

$$\frac{i}{\mathbf{h}}[x,H] = \frac{p}{m} \Rightarrow [x,H] = \frac{\mathbf{h}p}{im}$$

$$< a|[x,[x,H]]|a >=< a\left|\left[x,\frac{\mathbf{h}p}{im}\right]\right|a >= \frac{\mathbf{h}}{im} < a|i\mathbf{h}|a >$$

$$= \frac{\mathbf{h}^2}{m}$$

$$< a|[x,H]|a >=< a|x(xH - Hx)|a >$$

$$=< a|x^2H|a > - \cancel{< a|xHx|a >}$$

$$= E_a|a >$$

$$< a|x[x,H]|a > = \frac{\hbar^2}{2m}$$

6ـ گزینه (4) صحیح است

7ـ گزینه (3) صحیح است

احتمال $E_2 = \sum_{m,\ell} |C_{2m\ell}|^2 = |c_{211}|^2 + |c_{201}|^2 + |c_{21,-1}|^2$

$$= \frac{1}{36}\{9+1+10\} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

8ـ گزینه(3) صحیح است

9ـ احتمال (3) صحیح است

$$\int_a^{a+b} |\psi(r)|^2 4\pi r^2 dr = \int_a^{a+b} \frac{A^2}{r^3} \sin^2(k(r-a)) 4\pi r^3 dr$$

$$= \frac{4\pi A^2}{2} \int_a^{a+b} [1-\cos 2k(r-a)] dr$$

$$= 2\pi A^2 \left\{ r - \frac{1}{2k} \sin 2k(r-a) \right\} \Bigg|_a^{a+b}$$

$$= 2\pi A^2 \left\{ b - \frac{1}{2k} \sin 2kb \right\}$$

10ـ گزینه (3) صحیح است

$$N = n_x + n_y + n_z = 1$$

$$g = \frac{(1+2)(1+1)}{2} = \frac{3\times 2}{2} = 3$$

11ـ گزینه (1) صحیح است

$$\left[L_i, x_j\right] = i\mathbf{h} \in_{ijk} p_k$$

$$\left[L_i, p_j\right] = i\mathbf{h} \in_{ijk} p_k$$

$$\left[L_i, p^2\right] = \sum_{k} \left[L_i, p_k^2\right] = \sum_{\substack{k \\ ikj}} \hat{p}_k \left[\hat{L}_i, \hat{p}_k\right] + \left[\hat{L}_i, \hat{p}_k\right] \hat{p}_k$$

$$= zi\mathbf{h} \sum \in_{ijk} \left(p_k p_j + p_j p_k\right) = \mathbf{0}$$

$$j \Leftrightarrow k$$

12ـ گزینه (3) صحیح است .

چون

پیوسته $= y\left(r = R\right)$

13ـ گزینه (4) صحیح است

14ـ گزینه (2) صحیح است

$$y_{nlm} \sim e^{-\frac{r}{na_0}}$$

$$n = 3 \ , \ \mathbf{l} = 1$$

چون یک صفر دارد

15ـ گزینه (3) صحیح است

چون $\begin{array}{l} n = 3 \rightarrow H \\ m = \mathbf{0} \rightarrow L_z \end{array}$

16ـ گزینه (3) صحیح است

$$\left[L_x, L_y\right] = i\mathbf{h} L_z$$

$$[L_Z, A] = \left[\frac{1}{i\mathbf{h}}[L_x, L_y], A\right]$$

از طرفی $\rightarrow \frac{1}{i\mathbf{h}}\{[L_x, L_y, A]\} + [[L_y, A], L_x] + [[A, L_x), L_y] = 0$

$$[L_z, A] = 0$$

17ـ گزینه (2) صحیح است

$$e^{imf}\ \overset{m}{\underset{l}{p}}(\cos q)$$

18ـ گزینه (1) صحیح است

19ـ گزینه (2) صحیح است. محتمل ترین $R_{nl} \sim e^{-\frac{r}{na_0}}$

$$r^* = na_0$$

20ـ گزینه (2) صحیح است

$$c_t \rightarrow S_z$$

$$m = 0 \rightarrow L_z$$

$$c_t \rightarrow s^2$$

21ـ گزینه (1) صحیح است

$$\sum_i [L_x, x_i p_i] = \sum_i x_i \underbrace{[\hat{L}_x, p_i]}_{i\mathbf{h}\in_{lij}\hat{p}_i} + \underbrace{[L_x, x_i]}_{i\mathbf{h}\in_{lij}x_i} p_i$$

$$= i\mathbf{h} \sum_i e_{1ij}(x_i p_j + x_j p_i) = 0$$

22ـ گزینه (3) صحیح است

$$H_0 = \frac{A}{\hbar^2}\left\{\hat{L}^2 - {L_Z}^2\right\} + \frac{B}{\hbar} L_Z$$

$$E = \frac{A}{\hbar^2}\left\{\hbar^2 \ell(\ell+1) - m^2\hbar^2\right\} + \frac{b}{\hbar} m\hbar$$

$$E = A\left\{\ell(\ell+1) - m^2\right\} + Bm$$

$$\ell = 1$$
$$m = \pm 1, 0$$

$$E = A\left\{2 - m^2\right\} + Bm = \begin{cases} A+B \\ A-B \\ 2A \end{cases}$$

23ـ گزینه (1) صحیح می‌باشد.

$$< L^2 > = ? \qquad\qquad y = \sum C_{nlm} f_{nlm}$$

$$< L^2 > = \sum C^*{}_{nlm} C_{nl'm'} < f_{nlm} | L^2 | f_{nlm'} >$$

$$\hbar^2 \ell\ (\ell'+1) d_{\ell\ell'} d_{mm'}$$

$$= \hbar^2 \sum_{\ell} |C_{nlm}|^2\ \ell(\ell+1)$$

$$= \frac{\hbar^2}{3}\ \{0 + 1\times 2 + 6\times 1] = \frac{8h^2}{3}$$

24ـ گزینه (4) صحیح می‌باشد .

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left[\hbar^2\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]R = ER$$

$$R(r=a) = 0$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left[\underbrace{\frac{2mE}{\mathbf{h}^2}}_{k^2}-\mathbf{l}\frac{(\mathbf{l}+1)}{r^2}\right]R=\mathbf{0}$$

$$R(r)=\partial_{\mathbf{l}}(kr)$$

$$\partial_{\mathbf{l}}(ka)=\mathbf{0}$$

$$k^2=\frac{2mE}{\mathbf{h}^2}$$

25ـ گزینه (2) صحیح است

$$<-\frac{e^2}{r^2}>=\frac{4}{4a}\left(\frac{1}{a_{\mathbf{0}}}\right)^3\int_{\mathbf{0}}^{\infty}\frac{-e^2}{r^2}.e^{-2r/a_{\mathbf{0}}}.4pr^2dr$$

$$=\frac{-4e^2}{a_{\mathbf{0}}^3}\int_{\mathbf{0}}^{\infty}e^{-2r/a_{\mathbf{0}}}dr=-4\frac{e^2}{a_{\mathbf{0}}^3}.\frac{a_{\mathbf{0}}}{2}=-\frac{2e^2}{a_{\mathbf{0}}^2}$$

26ـ گزینه (1) صحیح می‌باشد.

$$E=\frac{m^2\mathbf{h}^2}{2I}$$

$$y_n(x,t)=y_n(x,\mathbf{0})e^{-iE_n t/\mathbf{h}}$$

$$y_n(x,\mathbf{0}): m=1 \quad E_1=\frac{\mathbf{h}^2}{2I} \quad =-\sqrt{\frac{3}{8p}}e^{ij}\sin q\, e^{-i\frac{ht}{2I}}$$

27ـ گزینه(1) صحیح است

$$n=1,2,...$$

$$\mathbf{0}\le\mathbf{l}\le n-1$$

$$-\mathbf{l}\le m_{\mathbf{l}}\le\mathbf{l}$$

$$-\frac{1}{2} \le m_s \le \frac{1}{2}$$

$$n = -3$$

$$\ell = 1$$

$$m \ne -2$$

28ـ گزینه () صحیح است

$$(\Delta L_z)^2 = <\underbrace{L_z^2}_{m^2\hbar^2}> - <\underbrace{L_z>^2}_{(m\hbar)^2} = 0$$

29ـ گزینه (2) صحیح است

$$P = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2\pi a_0^3}\int_0^{4a_0} 2\pi \int_0^{2\pi} r^2 \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{a_0}} \cos^2\theta \, \sin\theta \, d\theta \quad d\varphi \; dr$$

$$= \frac{1}{32\pi a_0^3} \cdot \frac{2\pi}{a_0^2} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta}_{\frac{2}{3}} \; \underbrace{\int_0^{\infty} r^4 e^{-r/a_0} \, dr}_{\frac{4!}{\left(\frac{1}{a_0}\right)^5}}$$

$$= \frac{1}{24 a_0^5} . a_0^5 \; 4! = 1$$

30ـ گزینه (1) صحیح است.

$$< L_x >_{\ell m} = 0$$

31ـ گزینه (4) صحیح است

$$\frac{d}{dt} < L > = 0 \rightarrow < L > = \text{ثابت}$$

32ـ گزینه (3) صحیح است

$$\begin{array}{l} -\sqrt{\dfrac{3}{8p}}e^{i}\sin q = y_{11} \\ \sqrt{\dfrac{3}{4p}}\cos q = y_{10} \end{array} \Rightarrow y\,(r,q,mj) = \frac{1}{\sqrt{4p}}\left(-\sqrt{\frac{8p}{3}}y_{11} + \sqrt{\frac{4p}{3}}y_{10}\right)g(r)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{2}y_{11} + y_{10}\right)g(r)$$

$$< L_z > = \sum_m |C_m|^2\, m\mathbf{h} = \frac{\left(-\sqrt{2}\right)^2 \mathbf{h} + (1)^2 \times \mathbf{o}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\mathbf{h}$$

33ـ گزینه (3) صحیح است

$$E = \mathbf{h}w_1\left(n_x + n_y + 1\right) + \mathbf{h}w_2\left(n_z\right)$$

$$w_2 = 2w_1$$

$$E = \mathbf{h}w_1\left(\underbrace{n_x + n_y + 2n_z + 1}_{N}\right)$$

اولین حالت برانگیخته $(1,\mathbf{0},\mathbf{0})$ $\qquad N = 1 \Rightarrow \dfrac{(1+3-1)!}{(3-1)!(1-1)!} = \dfrac{3!}{2!} = 3$

34ـ گزینه (3) صحیح است

$$|y|^2 = \frac{1}{3}|R(r)|^2\;|Y_{10}|^2 + \frac{2}{3}|R(r)|^2|y_{11}|^2$$

$$+\frac{2\times\sqrt{2}}{3}\;y_{10}^{*}y_{11}\;R^{*}(r)R(r)c_{+}c_{1}$$

$$= \frac{|R(r)|^2}{3}\left(\cos^2 q.\frac{3}{4p} + 20\frac{3}{8p}\sin^2 q\right) = \frac{1}{4p}\;|R(r)|^2$$

نکته: $c_{+}c_{-} = \mathbf{0}$, $|c_{+}|^2 = |c_{-}|^2 = 1$

35ـ گزینه (1) صحیح است

$$(\Delta L_y)^2 = <L_y{}^2> - <L_y>^2 = \frac{1}{2}\mathbf{h}^2\left[\mathbf{l}(\mathbf{l}+1)-m^2\right] = \frac{1}{2}\mathbf{h}^2\left[2\times 3-2^2\right]$$

$$\mathbf{l} = 2 = m \qquad\qquad = \mathbf{h}^2$$

36ـ گزینه (4) صحیح است

$$6\mathbf{h}^2 \Rightarrow \mathbf{l}(\mathbf{l}+1)\mathbf{h}^2 \Rightarrow \mathbf{l} = 2$$

احتمال $P_{\mathbf{l}=2} = \sum \left|c_{2m}\right|^2 = \left|c_{21}\right|^2 + \left|c_{2(-1)}\right|^2 = \frac{1}{36}\left(3^2+11\right) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

37ـ گزینه (2) صحیح است

$$y_{\,n\,\mathbf{l}m}\,(r,q,e) \rightarrow (-)^{\mathbf{l}}\,y_{\,n|m}$$

38ـ گزینه (1) صحیح است

$$y\,(x-ye\,,xe+y_1z) = y\,(x_1y_1z) - ye\,\frac{\partial y}{\partial x} + xe\,\frac{\partial y}{\partial y}$$

$$= y\,(x_1y_1z) + e\left(x\frac{\partial y}{\partial y} - y\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

$$= y\,(x_1y_1z) + \frac{e}{-i\mathbf{h}}\left(\underbrace{\hat{x}\hat{p}_y y - \hat{y}\hat{p}_x y}_{\hat{L}=4}\right) = y\,(x,y,z) + \frac{ie}{\mathbf{h}}\hat{L}_z = (1+i\frac{e}{\mathbf{h}}\hat{L}_z)y$$

39ـ گزینه (2) صحیح است

$$E = \left(N+\frac{3}{2}\right)\mathbf{h}w = \left(2+\frac{3}{2}\right)\mathbf{h}w = \frac{7}{2}\mathbf{h}w$$

$$N = \sum_{r=1}^{3} n_i$$

تراز سوم $N = 2$

40ـ گزینه (3) صحیح است

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\left|R(r)^2\right|\right)_{r=\mathbf{o}}=\mathbf{o}\rightarrow\left(r^6e^{-\frac{4r}{a\mathbf{o}}}\right)'=\mathbf{o}\rightarrow 6r_{\mathbf{o}}^{\ 5}-\frac{4}{a_{\mathbf{o}}}r_{\mathbf{o}}^{6}=\mathbf{o}$$

$$r_{\mathbf{o}}=a_{\mathbf{o}}\frac{3}{2}$$

41ـ گزینه (4) صحیح است

$$<L_x>=\frac{1}{2}\ \{<10|-<11|\}\ \hat{L}_x\{|10>-|11>\}$$

$$=\frac{1}{2}\ \{<10|-<11|\}\ \{(L_++L_-)\}\ \{|10>-|11>\}$$

$$=\frac{1}{2}\ \{<10|-<11|\}\ \ \{c_+(1,\mathbf{o})\}\ |11>-c_+(1,1)\ |1,2>+0-c(1,1)|1,\mathbf{o}>\}$$

$$=\frac{1}{2}\ \left\{-c_-\ (1,1)-c_+(1,\mathbf{o})\right\}$$

$$c_+(1,1)+c_-\ (1,\mathbf{o})=\mathbf{h}\left\{\sqrt{1(1+1)-l(1+1)}\ +\sqrt{11(1+1)-\mathbf{o}(\mathbf{o}-1)}\right\}=\mathbf{h}\sqrt{2}$$

$$<L_x>=-\mathbf{h}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

42ـ گزینه (2) صحیح است

$$<\frac{p^2}{2m}>=\int-\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\,y^*\nabla^2 j\,dV$$

$$\nabla^2 j=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dy}{dr}\right)=\frac{1}{\sqrt{pa^3}}\ \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2(-\frac{1}{a}e^{-\frac{r}{a}})\right)$$

$$=\frac{-1}{a\sqrt{pa^3}}\ \frac{1}{r^2}\left\{2re^{-\frac{r}{a}}-\frac{r^2}{a}e^{-\frac{r}{a}}\right\}=\frac{-1}{a\sqrt{pa^3}}\ \left\{(\frac{2}{r}-\frac{1}{a})e^{-\frac{r}{a}}\right\}$$

$$<\frac{p^2}{2m}>=-\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\cdot\frac{1}{pa^3}\cdot-\frac{1}{a}\int_{\mathbf{o}}^{\infty}e^{-2\frac{r}{a}}\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)4pr^2dr$$

$$=\frac{+2\mathbf{h}^2}{ma^4}\int_{\mathbf{o}}^{\infty}e^{\frac{-2r}{a}}\left(2r-\frac{r^2}{a}\right)dr$$

$$=\frac{2\mathbf{h}^2}{ma^4}\left\{2.\frac{1!}{\left(\frac{2}{a}\right)^2}-\frac{1}{a}.\frac{2!}{\left(\frac{2}{a}\right)^2}\right\}$$

$$=\frac{2\mathbf{h}^2}{ma^4}\left\{\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right\}=\frac{4\mathbf{h}^2}{4ma^2}$$

$2<T>=-<\nabla V>$ قضیه ویریال

$$V=\frac{-e^2}{r}><T>=-\frac{1}{2}<\nabla\left(-\frac{e^2}{r}\right)>=-\frac{e^2}{2}<\frac{1}{r^2}>$$

$$=\frac{-e^2}{2}.\frac{1}{a_{\mathbf{o}}^2n^3\left(\mathbf{l}+\frac{1}{2}\right)}=-\frac{e^2}{2}\cdot\frac{1}{a_{\mathbf{o}}^2\times1\left(\mathbf{o}+\frac{1}{2}\right)}=-\frac{e^2}{a_{\mathbf{o}}^2}$$

43ـ گزینه (1) صحیح است

$$<L^2>=\sum_{\mathbf{l}=\mathbf{o}}|c_{\mathbf{l}}|^2\,\mathbf{h}^2\,\mathbf{l}|\mathbf{l}+1|$$

$$=\frac{\mathbf{h}^2}{3}\{\mathbf{o}(\mathbf{o}+1)+1(1+1)+2(2+1)\}=\frac{2+6}{3}\mathbf{h}^2=\frac{+8}{3}\mathbf{h}^2$$

فصل هفتم: اسپین و نمایشهای ماتریسی عملگرها:

مقدمه: در این فصل روابط مهم سیستمهای اسپین‌دار نمایش ماتریسی عملگرها را مرور می کنیم.

عملگر اسپین و نمایش ماتریسی آن

اسپین یک تکانه زاویه ای ذاتی است که به هنگام قرار گرفتن ذره در میدان مغناطیسی سبب می‌شود ترازهای آن جابجا شوند.

$$\vec{S} = s_x\hat{i} + s_y\hat{j} + s_s\hat{k}$$

برای سیستمهای با اسپین $\frac{1}{2}\hbar$:

$$S_x = \frac{\hbar}{2} d_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2} d_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2} d_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ویژه مقادیر عملگر $(s_x, s_{y1}, s\ ): \pm\frac{\hbar}{2}$

ویژه حالتهای عملگر اسپین:

ویژه بردار (حالت) عملگر

$$S_{\hat{x}} \quad |s_x+> = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow +\frac{\hbar}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(c_+ + c_-)$$

$$|s_{x1}-> = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow -\frac{\hbar}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(c_+ - x_-)$$

$$S_{\hat{y}} \qquad |s_y + > = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} \rightarrow +\frac{\mathbf{h}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(c_+ + ic_-)$$

$$|s_y, - > = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix} \rightarrow -\frac{\mathbf{h}}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(c_+ - ic_-)$$

$$S_{\hat{z}} \qquad |s_z, + > = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \rightarrow \frac{\mathbf{h}}{2}, \Rightarrow c_+$$

$$|s_z, - > = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \rightarrow -\frac{\mathbf{h}}{2} \rightarrow c_-$$

روابط اساسی جابجاری اسپین – عملگرهای بالا و پایین برنده و ...

$$\left[s_{\hat{x}}, \hat{s}_y\right] = i\hat{\mathbf{h}} s_z$$

$$\left[s_{\hat{y}}, s_{\hat{z}}\right] = i\,\mathbf{h}\; s_{\hat{x}}$$

$$\left[s_{\hat{z}}, s_{\hat{x}}\right] = i\,\mathbf{h}\, s_{\hat{y}}$$

$$S^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = \frac{3\mathbf{h}^2}{4}\begin{pmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & 1\end{pmatrix}$$

$$s_+ = s_x + is_y = \frac{\mathbf{h}}{2}\begin{pmatrix}\mathbf{0} & 1\\ \mathbf{0} & 1\end{pmatrix}$$

$$s_- = s_x - is_y = \mathbf{h}\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ 1 & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

نکته مهم:

$$\begin{cases}\hat{S}_+ x_+ = \hat{S}_- x_- = \mathbf{0}\\ S_+ x_- = \mathbf{h} x_+\\ S_- x_+ = -\mathbf{h} x_-\end{cases}$$

تابع حالت اسپینی یک ذره $s=\frac{1}{2}\hbar$:

این تابع حالت به صورت زیر است :

$$c=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=ax_{+}+bx_{-}$$

نکته:

روابط مهم :

$$<s_{\hat{x}}>=c^{t}S_{x}\,c=\hbar\,\mathrm{Re}\{a^{*}b\}$$

$$<s_{\hat{y}}>=c^{t}s_{y}c=-\hbar\,\mathrm{Im}\{a^{*}b\}$$

$$<s_{\hat{z}}>=c^{t}\,s_{z}c=\frac{\hbar}{2}\left(|a^{2}|-|b|^{2}\right)$$

همیلتونی بر هم کنشی یک ذره با اسپین $\frac{1}{2}$ در میدان مغناطیسی $\vec{B}$

$$H=\frac{eg\hbar}{4mc}\,\vec{s}\,.\vec{B}$$

$$\vec{d}=d_{x}\hat{i}+d_{y}\hat{j}+d_{z}\hat{k}=\begin{pmatrix} \hat{k} & \hat{i}+i\hat{j} \\ \hat{i}-i\hat{j} & -\hat{k} \end{pmatrix}$$

معادله شرویندگر برای حالت اسپینی (تابع موج اسپینی)

$$i\hbar\frac{dc}{dt}=\left(\frac{eg\hbar}{4mc}\,\vec{d}\,.\vec{B}\right)c$$

پاسخهای معادله موج اسپینی برای میدان ثابت $\vec{B}=B\hat{K}$

$$i\hbar\frac{dc}{dt}=\frac{eg\hbar B}{4mc}(\vec{d}\;\vec{c})$$

تشدید پارامغناطیس:

فرض کنید ذره با اسپین $\frac{1}{2}$ در میدان

$\vec{B}=B_o\hat{k}+B_1\cos wt\ \hat{i}$ قرار گرفته است.

با حل معادله شرویندگر برای بردار حالت اسپینی $c(t)$ داریم:

$$\hat{H}=\frac{eg\hbar}{umc}\vec{d}\cdot\vec{B}=\frac{eg\hbar}{4mc}\begin{pmatrix} B_0 & B_1\cos wt \\ B_1\cos wt & -B_0 \end{pmatrix}$$

با تعریف :

$$w_0=\frac{egB_0}{4mc}=\frac{1}{2}w_c$$

$$w_1=\frac{egB_1}{4mc}$$

$$c(t)=\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \qquad i\hbar\frac{dc}{dt}=\hat{H}c$$

$$\begin{cases} i:\ \dfrac{da(t)}{dt}=w_0a(t)-w_1\cos wt\, b(t) \\ i\ \dfrac{db(t)}{dt}=w_1wwt\, d^{(t)}-w_0b(t) \end{cases}$$

فرض می کنیم:

$$A(t)=a(t)e^{iw_ot}$$

$$b(t)=B(t)e^{-iwot}$$

$$\Rightarrow iA=w_1\ \cos wt\, B(t)e^{iw_ct} \quad \approx\frac{1}{2}w_1e^{i(w_c-w)t}\ B(t)$$

$$i\dot{B} = w_1 \cos wt\, A(t)^{-iw_c t} e \approx \frac{1}{2} w_1 e^{-i(w_c - w)} A(t)$$

که در آن تقریب زیر را استفاده کرده ایم:

$$\cos wt\; e^{iw_c t} = \frac{1}{2}\left[e^{i(w_c + w)t} + e^{i(w_c - w)t}\right]$$

$$\approx \frac{1}{2} e^{i(w_c - w)t}$$

با حل معادله برای $A(t)$:

$$\frac{d^2 A}{dt^2} - -i\,(w_c - w)\,\frac{dA}{dt} + \frac{w_1^2}{4} A(t) = 0$$

$$A(t) = A(0) e^{ilt}$$

$$-\,l^2 + (w_c - w)\,l + \frac{w_1^2}{4} = 0$$

$$l_\pm = \frac{w_c - w \pm \sqrt{(w_c - w)^2 + w_1^2}}{2}$$

جواب عمومی:

$$A(t) = A_+ e^{il+t} + A_- e^{ilt}$$

در نتیجه :

$$B(t) = \frac{-2}{w_1} e^{-i(w_c - w)t}\,\left(l_+ A_+ e^{il_+ t} + \underset{-}{l}\,\underset{-}{A} e^{ilt}\right)$$

سرانجام بدست می آوریم:

$$a(t) = e^{-i\,w\frac{ct}{2}}\,\left(A_+ e^{il_+ t} + l_-\, A_-\, e^{il_-}\right)$$

اگر در $t=0$ اسپین الکترون در جهت $|z,+>$ باشد.

$$c(0)=\begin{pmatrix} a(0) \\ b(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to A_+=\frac{l-}{l_- - l_+}$$

$$A_-=\frac{-l_+}{l_- - l_+}$$

احتمال اینکه در $t>0$ اسپین در جهت $-z$ باشد:

$$|B(t)|^2=\frac{w_1^2}{(w_c-w)^2+w_1^2}\cdot\frac{1-\cos\left(\sqrt{(w_c-w)^2+w_1^2}\,t\right)}{2}$$

اگر $w_c\ ,\ w>>w_1$

$$|b(t)|^2\to\frac{1-\cos w_1 t}{2}$$

نمایش ماتریس عملگرهای تکانه زاویه ای

تعریف می کنیم:

نمایش ماتریس عملگر A در پایه a:

$$|a>=\sum_n c_a|a>$$

که $A|a>=a|a>$

$$A_{aa'}=<a|A|a'>$$

بعضی نمایشهای ماتریسی مهم:

ـ نمایش ماتریس $L_x\pm iL_{\hat{y}},\ L_{\hat{x}}\ ,\ L_{\hat{z}},\hat{L}_z$

$$<a\left|\hat{L}^2\right|a>=<\mathbf{l},m\left|\hat{L}^2\right|\ \mathbf{l}',m'>=\mathbf{h}^2\ \mathbf{l}'(\mathbf{l}'+1)\ d_{\mathbf{ll}'}d_{mm'}$$

$$<\mathbf{l},m\left|L_{\hat{z}}\right|\mathbf{l}',m'>=m'\mathbf{h}\ d_{\mathbf{ll}'}\ d_{mm'}$$

$$<\mathbf{l},m\left|L_{\hat{x}}\right|\mathbf{l}',m'>=\frac{1}{2}\left\{C_{+}(\mathbf{l}',m')d_{mm'+1}+\underset{-}{C}(\mathbf{l}',m')d_{m,m'-1}\right\}d_{\mathbf{ll}'}$$

$$<\mathbf{l},m\left|L_{\hat{y}}\right|\mathbf{l}',m'>=\frac{1}{2i}\left\{c_{+}(\mathbf{l}',m')d_{m,m'-1}-\underset{-}{c}(\mathbf{l}',m')d_{m,m'+1}\right\}d_{\mathbf{ll}'}$$

$$<\mathbf{l},m\left|\hat{L}_{\pm}\right|\mathbf{l}',m'>=c_{\pm}(\mathbf{l}',m')\ d_{\mathbf{ll}'}d_{mm'}$$

ـ نمایش ماتریس عملگرهای $\hat{H},\hat{p}_x,\hat{x},\hat{a}^t,\hat{a}$ برای نوسانگر کوانتمی:

$$<n|\hat{a}|n'>=\sqrt{n'}<n\,|\,n'-1>=\sqrt{n'}d_{n,n'-1}$$

$$<n\left|\hat{a}^t\right|n'>=\sqrt{n'+1}<n\,|\,n'+1>=\sqrt{n'+1}d_{n,n'+1}$$

$$<n|\hat{x}|n'>=\sqrt{\frac{\mathbf{h}}{2mw}}<n\left|\hat{a}+\hat{a}^t\right|n'>=\sqrt{\frac{\mathbf{h}}{2mw}}\left\{\sqrt{n'}<n\,|\,n'-1>+\sqrt{n'+1}<n\,|\,n'+1>\right\}$$

$$=\sqrt{\frac{\mathbf{h}}{2mw}}\ \sqrt{n'}d\ n,n'-1+\sqrt{n'+1}\ d_{n,n'+1}\}$$

$$<n\left|\hat{p}_x\right|n'>=-i\sqrt{\frac{mw\mathbf{h}}{2}}\ \left\{\sqrt{n'}d_{n,n'-1}-\sqrt{n'+1}d_{n,n'+1}\right\}$$

3ـ فرم صریح ماتریسهای نوسانگر کوانتمی :

$$\hat{a}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\sqrt{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{K}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\sqrt{2}&\mathbf{0}&\mathbf{K}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\sqrt{3}&\mathbf{K}\\\mathrm{M}&\mathrm{M}&\mathrm{M}&\mathrm{M}&\mathrm{M}\end{pmatrix}$$

$$\hat{a}^{t}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\hat{H}=\hbar\omega\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

مثال) بردار حالت یک نوسانگر کوانتمی به صورت زیر است:

$$\psi=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

کمیتهای $\langle H\rangle , \langle x\rangle$, $\langle x^{2}\rangle$, $\langle p\rangle$, $\langle p^{2}\rangle$ را حساب کنید.

حل) $$\langle H\rangle_{\psi}=\psi^{t}H\psi=\frac{1}{\sqrt{6}}(1\ 2\ 1\ 0\ \cdots)\hbar\omega\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & \\ & \frac{3}{2} & & \\ & & \frac{5}{2} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}\times\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$=\frac{\hbar\omega}{6}(1\ 2\ 1\ 0\ \cdots)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$=\frac{\hbar\omega}{6}\left(1\times\frac{1}{2}+2\times3+1\times\frac{5}{2}+0\cdots\right)=\frac{9\hbar\omega}{6}=\frac{3\hbar\omega}{2}$$

$$\hat{x}=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a+a^{\dagger}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\begin{pmatrix}0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots\\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & \cdots & \cdots\\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots\end{pmatrix}$$

$$\langle x\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\frac{1}{6}\,\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0 & \cdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \cdots\\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots\\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\\ \vdots\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1+\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2}\\ 0\\ \vdots\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\left(4+4\sqrt{2}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\left(1+\sqrt{2}\right)$$

محاسبه $<x^2>$, $<p_x>$, $<p_x^2>$ از روابط زیر به عنوان تمرین به دانشجو واگذار می شوند.

$$<x^2>=\frac{\hbar}{2m\omega}\left\{<a^2>+<\hat{a}^{\dagger 2}>+<2\hat{N}+1>\right\}$$

$$\hat{N}=\hat{a}^{\dagger}\hat{a}$$

$$<p_x>=-i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left\{<a>-<a^{\dagger}>\right\}$$

$$<p_x^2>=-\frac{m\omega\hbar}{2}\left\{<a^2>+<a^{\dagger 2}>-<2\hat{N}+1>\right\}$$

فصل هشتم: جمع تکانه های زاویه ای

مقدمه: این فصل برای مباحث آینده از اهمیت ویژه ای برخوردار است

دستگاه دواسپینی

دو ذره 1و2 را در نظر بگیرید فرض کنید که اسپین آنها $\vec{s}_1, \vec{s}_2$ باشد. اکنون اسپین کل را با رابطه زیر تعریف می کنیم:

$$\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$$

برای هر یک از دو ذره 1و2 داریم:

$$\begin{cases} \hat{s}_1^2 x_\pm^{(1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\hbar^2 x_\pm^{(1)} \\ s_1\hat{z}x_\pm^{(1)} = \pm\frac{1}{2}\hbar x_\pm^{(1)} \end{cases}$$

به طریق مشابه:

$$S_z x_+^{(1)} x_+^{(2)} = \hbar x +^{(1)} x_+^{(2)}$$

$$s_z x_+^{(1)} x_-^{(2)} = s_z x_-^{(1)} x_+^{(2)} = 0$$

$$s_z x_-^{(1)} x_-^{(2)} = -\hbar x_-^{(1)} x_-^{(2)}$$

باتعریف :

$$:s_- = s_{1-} + s_{2-}$$

$$s\_x^{(1)} x_+^{(2)} = \sqrt{2}\,\hbar\, \frac{x_+^{(1)} x_-^{(2)} + x_-^{(1)} x_+^{(2)}}{\sqrt{2}}$$

تابع موج سیستم دو الکترونی

میدانیم

$$\vec{S}_1 = \vec{S}_2 = \frac{\hbar}{2}$$

$$\vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \frac{\hbar}{2} + \frac{\hbar}{2} = \vec{S}$$

$$S = \begin{cases} 1 \rightarrow triplet \\ \mathbf{0} \rightarrow \sin glet \end{cases}$$

در حالت singlet:

$$S = \mathbf{0} \rightarrow \uparrow\downarrow \quad s_{\sin glet} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_{+}^{(1)}\, x_{-}^{(2)} x_{-}^{(1)}\right)$$

← در حالت triplet:

$$\uparrow\uparrow$$

$$\frac{1}{2}\hbar\frac{1}{2}\hbar$$

$$x_{triplet} = \begin{cases} x_{+}^{(1)} x_{+}^{(2)} \\ x_{-}^{(1)} x_{-}^{(2)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_{+}^{(1)} x_{-}^{(2)} x_{-}^{(1)} x_{+}^{(2)}\right) \end{cases}$$

جمع اسپین $\frac{1}{2}$ و تکانه زاویه ای مداری

می دانیم که اسپین نوعی تکانه زاویه ای است پس میتوان علی الاصول آن را با تکانه مداری $\vec{L}$ که در فصل هـای قبـل شناختیم جمع کنیم داریم:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

میدانیم:

$$\hat{S}_z x_{\pm} = \frac{\hbar}{2} X_{\pm}$$

از مقایسه با رابطه :

$$\hat{L}_y\, y_{lm} = m\hbar y_{lm}$$

میتوانیم به $\hat{s}_z$ یک عدد زاویه ای m_s نسبت دهیم

$$m_s = \pm\frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$\hat{J} = \hat{L}_Z + \hat{S}_Z$$

$$\hat{J}^2 = \hat{L}^2 + \hat{S}^2 + 2LS_{Z_+} L_+ S_- + L_- S_+$$

ترکیب زیر را می سازیم:

$$y_{j,m+\frac{1}{2}} = a y_{lm} x_+ b y_{l,m+1} x_-$$

با اعمال عملگر $\hat{J}^2$ روی ترکیب و مساوی قرار دادن با $J(J+1)\hbar^2$ داریم:

$$J = \begin{Bmatrix} l - \frac{1}{2} \\ l + \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \quad , \quad \begin{cases} a = \sqrt{\frac{l+m+m}{2l+1}} & b = \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}} \quad J = L + \frac{1}{2} \\ a = \sqrt{\frac{l-m}{2l+1}} & b = -\sqrt{\frac{l+m+1}{2l+1}} \quad J = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

مثال : دو فرمیون اسپین $\frac{1}{2}$ در یک جعبه کوانتمی به طول L در حالت s=0 قرار دارند. تابع موج سیستم و انرژی حالت پایه را بنویسید

حل)

$$s = \mathbf{0} \rightarrow \sin glet\ x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_+^{(1)}x_-^{(2)} - x_-^{(1)}x_+^{(2)}\right)$$

طبق اصل طرد پائولی باید تابع موج کل پاد متقارن باشد چون

متقارن = $y = x \times f$

پادمتقارن اسپینی $\mathbf{x}$

$$\rightarrow y\left(x_1x_2;d\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_+^{(1)}x_-^{(2)} - x_-^{(1)}x_+^{(2)}\right)y_1\left(x_1\right)y_1\left(x_2\right)$$

$y = y_1\left(x_1\right)y_1\left(x_2\right)$ که

$$y = \left(x_1, x_2; d\right) = \sqrt{\frac{2}{L}}\left(a_+^{(1)}x_-^{(2)} - x_-^{(1)}x_+^{(2)}\right)\left(\sin\frac{p}{L}x_1\right)\left(\sin\frac{p}{L}x_2\right)$$

پایه $= 2E_1 = 2\left(\frac{p^2\mathbf{h}^2}{2mL^2}\right) = \frac{p^2\mathbf{h}^2}{mL^2}$

سوالات طبقه بندی شده اسپین و ....

فصل ششم و هفتم

1ـ اپراتورهای اندازه حرکت زاویه ای در حالت $l=1$ عبارتند از : (فرض کنید $\hbar=1$)

$$L_x=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad L_y=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}\quad L_z=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

حالتی را که در آن مقدار ویژه L_z برابر است در نظر بگیرید. ارزش انتظاری اپراتور L_X^2 در این حالت چقدر است؟

1) $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) صفر 4) 2

2ـ بردار حالت دستگاهی به صورت $\psi=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\\vdots\end{pmatrix}$ و ماتریس هامیلتونی آن به صورت $H_{mn}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega\,\delta_{mn}$ ارائه شده است. مقدار مورد انتظار هامیلتونی $<\psi|H|\psi>$ کدام است ؟

1) $\frac{\hbar\omega}{2}$ 2) $3\frac{\hbar\omega}{2}$ 3) $\hbar\omega$ 4) $2\hbar$

3ـ اگر پتانسیل بین دو الکترون به صورت $V(\vec{r})=V_1(\vec{r})+\frac{1}{2}\vec{s}_i.\vec{s}_2\ V_2(\vec{r})$ باشد کدام یک از مجموعه عملگرهای زیر جابجا پذیرند؟ (توجه: $\vec{S}=\vec{s}_1+\vec{s}_2$)

1) $s_z, s^2, s_2^3, s_1^2, H$ 2) s^2, s_2^2, s_1^2, H

3) $s_{2z}, s_{1z}, s_2^2, s_1^2, H$ 4) $S_{2z}, s_{1z}, s_z, s^2, H$

4ـ بردار حالت چهار اسپینی مقابل داده شده است:

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} c_-^{(3)} c_-^{(4)} \left[c_t^{(1)} c_-^{(2)} - c_-^{(1)} c_+^{(2)} \right]$$ که

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + \vec{S}_4$$

و اسپینها $\frac{1}{2}$ هستند. مقدار مورد انتظار s_z برابر کدام است ؟

1) $-\frac{\hbar}{2\sqrt{2}}$ 2) $\frac{\hbar}{2\sqrt{2}}$ 3) $\frac{\hbar}{2}$ 4) $-\hbar$

5ـ اسپینی در $t = 0$ با اسپنور $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ توصیف می‌شود. اسپین را در این لحظه در میدان $\vec{B} = B\hat{Z}$ قرار می دهیم. پس از یک ثانیه احتمال اینکه ذره در حالت آغازین باشد برابر کدام است ؟

1) صفر 2) 1 3) e^{-iwt} 4) $\cos^2 wt$

6ـ در یک اندازه گیری مقدار s_x الکترونی $\frac{\hbar}{2}$ است. در آزمایش بعدی مقدار اندازه حرکت مداری آن را یک به دست می آوریم. احتمال یافتن مقدار $m_s = \frac{\hbar}{2}$ در تکرار آزمایش اول بر روی همان الکترون برابر است با:

1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) 1

7ـ یک الکترون که اسپین آن در امتداد مثبت محور z ها است. در میدان مغناطیسی یکنواخت B که آنهم در راستای محور zهاست قرار دارد. مقدار چشمداشتی s_x در لحظه t برابر است با :

$$w = \frac{egB}{4mc}$$

1) 0 2) $\frac{\hbar}{2}$ 3) $\frac{\hbar}{2}\cos^2 wt$ 4) $\frac{\hbar}{2}\sin 2wt$

8ـ چنانچه d_x مولفه x ماتریس پائولی (pauli) باشد. $\exp\left[\frac{ib}{2}dx\right]$ برابر کدام است ؟

1) $\begin{pmatrix} \cos\frac{b}{2} & \sin\frac{b}{2} \\ \sin\frac{b}{2} & \cos\frac{b}{2} \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} \cos\frac{b}{2} & i\sin\frac{b}{2} \\ i\sin\frac{b}{2} & \cos\frac{b}{2} \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} \cos\frac{b}{2} & -i\sin\frac{b}{2} \\ -i\sin\frac{b}{2} & \cos\frac{b}{2} \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} \cos b & i\sin b \\ i\sin b & \cos b \end{pmatrix}$

9ـ اگر $\overset{r}{L}, \overset{r}{S}$ به ترتیب به اندازه حرکت زاویه ای اسپینی و کل یک ذره باشد در آن صورت مقدار $[J^2, s_z]$ برابر کدام است ؟

1) $2i\mathbf{h}\hat{k}\cdot(\overset{r}{s}\,8\,\overset{r}{L})$

2) $2\mathbf{h}\hat{k}.(\overset{r}{s}\,8\,\overset{r}{L})$

3) $i\mathbf{h}\hat{k}.(\overset{r}{s}8\overset{r}{L})$

4) $2\mathbf{h}\hat{k}\cdot(\overset{r}{s}.\hat{L})$

10ـ الکترون با $S = -\frac{1}{2}\boldsymbol{h}$ وارد دستگاه اشترن گرلاخ می‌شود. اگـر دسـتگاه اشـترن گـرلاخ دارای میـدان مغناطیسی در جهت محور y باشد احتمال اینکه الکترون با اسپین $s_y = \pm\frac{1}{2}\boldsymbol{h}$ از دستگاه خارج شود برابـر است با

1) صفر

2) $\frac{1}{4}$

3) $\frac{1}{2}$

4) یک

11ـ باتوجه به اینکه هر ماتریس 2×2 بر حسب ماتریسهای پائولی و ماتریس واحد 2×2 قابـل بسـط اسـت مقدار عبارت $(2I + d_x)^{-1}$ برابر است با :

1) $\frac{1}{3}I + \frac{1}{3}d_z$

2) $\frac{1}{3}I + \frac{1}{3}d_y$

3) $\frac{2}{3}I + \frac{1}{3}d_x$

4) $\frac{2}{3}I - \frac{1}{3}d_x$

12ــ حالت اسپینی 2 الکترون را با $x_{\pm}^{(1)}, x_{\pm}^{(2)}$ نشان می دهیم. کدام گزینه حالت $s_{tot}=1$ و $s_{totz}=0$ است؟

1) $x_{+}^{(1)}\, x_{+}^{(2)}$ 2) $x_{-}^{(1)}\, x_{-}^{(2)}$

3) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_{+}^{(1)}\, x_{-}^{(2)}+x_{-}^{(1)}\, x_{+}^{(2)}\right)$ 4) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_{+}^{(1)}\, x_{-}^{(2)}-x_{-}^{(1)}\, x_{+}^{(2)}\right)$

13ــ دستگاهی از ذرات با بار e و اسپین $\frac{1}{2}$ در میدان مغناطیسی $\vec{B}=B_0\hat{k}$ قرار میگیرد. مقـدار چشمداشــتی عملگر $\hat{s}_z$ کدام است ؟ $w=\frac{eB_0}{mc}$

1) ثابت 2) $\frac{\hbar}{2}$ 3) $\frac{\hbar}{2}\cos wt$ 4) $\frac{\hbar}{2}\sin wt$

14ــ تابع حالت ذره ای با اسپین یک با $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}e^{iwt}$ که در آن t زمان و w عدد ثـابتی اســت توصــیف می‌شود. احتمال آنکه در لحظه t مقدار اسپین ذره در راستای x برابر $\hbar$ باشد چقدر است؟ در صورتی که:

$$S_x=\frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

1) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ 2) $\frac{1}{4}$ 3) $\frac{3+2\sqrt{2}}{8}$ 4) $\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}e^{iwt}$

15ــ تابع حالت ذره ای با اسپین $\frac{1}{2}$ در لحظه t برابر است با :

$$y(t)=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}e^{-iwt}\\2e^{iwt}\end{pmatrix}$$

است. ارزش انتظاری عملگر s_y در این حالت کدام است؟

1) صفر 2) $\frac{2\hbar}{5}\sin(2wt)$ 3) $\frac{2\hbar}{5}\cos(2wt)$ 4) $\frac{2\hbar}{5}\sin(wt)$

16ـ در یک آزمایش اشترن گرلاخ از اتمهایی که اسپین کل آنها $\frac{3}{2}$ است استفاده شده است.ابتدا باریکه ای از این اتمها را از یک میدان مغناطیسی غیر یکنوات که در امتداد محور x است عبور می دهیم پس از خروج باریکه ای از اتمهایی که مولفه اسپین آنها در راستای محور x، $\frac{1}{2}$ است را از یک میدان مغناطیسی غیر یکنواخت دیگر که در میدان آن در امتداد محور z است عبور می دهیم. در این صورت این باریکه پس از عبور میدان مغناطیسی دوم به چند باریکه تقسیم خواهد شد؟

1 (1   2 (2   4 (3   8 (4

17ـ پروتونی در ویژه حالت عملگر $\hat{s}_y$ قرار دارد. احتمال این که در اندازه گیری عملگر s_x مقدار $\frac{\hbar}{2}$ بدست آید چقدر است ؟

$\frac{1}{2}$ (1 0 (2 $-\frac{1}{2}$ (3   1 (4

18ـ الکترونی تحت میدان مغناطیسی ثابت و در راستای محور z به صورت $\vec{B}=B_0\hat{K}$ قرار دارد. تابع حالت این ذره در لحظه $t=0$ به صورت $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ است. تابع حالت آن در لحظه دلخواه t کدام است ؟ $\left(w=\frac{egB_0}{4mc}\right)$

$\frac{e^{-iwt}}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ (1 $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}e^{-iwt}\\2e^{iwt}\end{pmatrix}$ (2

$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2e^{-iw\frac{t}{2}}\\2e^{iw\frac{t}{2}}\end{pmatrix}$ (3 $\frac{e^{iwt}}{\sqrt{5}}$ (4

19ـ برای ذره ای در حالت $l=1$ نمایش عملگر L_+ در یک پایه خاص به شکل

$$L_+=\hbar\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

می‌باشد. دراین پایه عملگر L_x کدام است ؟

$L_x=\hbar\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$ (1 $L_x=\hbar\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ (2

$L_x=\hbar\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ (3 $L_x=\hbar\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ (4

20ـ تابع حالت ذره ای با اسپین $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{e^{\frac{ij}{2}}\left|+>+e^{-\frac{ij}{2}}\right|->\right\}$ است که $|\pm>$ ویژه حالتهای بهنجار s_z با ویژه مقدار $\pm\frac{h}{2}$ است. متوسط عملگر s_x در این حالت چیست؟ (j مقدار حقیقی ثابتی است)

1) $\frac{\mathbf{h}}{2}$ 2) $\frac{\mathbf{h}}{2}\cos j$ 3) $\frac{\mathbf{h}}{2}\sin j$ 4) $\frac{\mathbf{h}}{2}(\sin j+\cos j)$

21ـ هامیلتونی ذره ای با اسپین $\frac{1}{2}$ که در میدان مغناطیسی ثابت در راستای محور z قرار گرفتــه، $\hat{H}=2ws_{\hat{z}}$ است. مقدار ثابتی است . اگر در لحظه $t=0$ ذره در ویژه حالت عملگر $\hat{s}_z$ با ویژه مقدار $\frac{\mathbf{h}}{2}$ باشــد احتمــال آنکه در لحظه $t>0$ در همان ویژه حالت باشد چقدر است ؟

1) $\frac{1}{2}$ 2) 1 3) $\cos^2 wt$ 4) $\sin^2 wt$

22ـ هامیلتونی یک سیستم کوانتمی به صورت: $H=\mathbf{h}w\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$ است. اگر انرژی ایــن سیســتم انــدازه گیری شود چه مقادیری ممکن است بدست آید؟

1) $-\mathbf{h}w, 2\mathbf{h}w, 3\mathbf{h}w$ 2) $\mathbf{h}w, 3\mathbf{h}w$

3) $\mathbf{h}w\ \ 3\mathbf{h}w$ 4) $\mathbf{h}w$, $2\mathbf{h}w$14 و صفر

23ـ حالت یک ذره اســپین $\frac{1}{2}$ در لحظــه t توســط بــردار $|a\ f\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{iwt}\\1\end{pmatrix}$ توصــیف مــی گــردد مقــدار چشمداشتی مولفه x بردار اسپین این ذره در این حالت کدام است ؟

1) $\frac{\mathbf{h}}{2}\sin wt$ 2) $\frac{\mathbf{h}}{2}\cos wt$

3) $\frac{\mathbf{h}}{2}e^{iwt}$ 4) $\frac{\mathbf{h}}{4}[\sin wt+\cos wt]$

24ـ تابع حات ذره ای $\frac{1}{\sqrt{9}}\begin{pmatrix}2\\2\\1\\\vdots\end{pmatrix}$ است. عناصر ماتریسی هامیلتونی این ذره به شکل $H_{nm}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega\,\delta_{nm}$ با $(n,m=1,\dots,6)$ است. مقدار چشمداشتی انرژی آن در این حالت کدام است ؟

1) $\frac{7}{6}\hbar\omega$ 2) $\frac{3}{2}\hbar\omega$ 3) $\frac{13}{2}\hbar\omega$ 4) $\frac{21}{2}\hbar\omega$

25ـ در آزمایش برای ذره ای با اسپین $\frac{1}{2}$ ابتدا عملگر s_x را اندازه گیری کرده و مقدار $+\frac{\hbar}{2}$ به دست می اید. سپس عملگر $\vec{s}^{\,2}$ را اندازه می گیریم. در نهایت اگر بار دیگر عملگر s_x را اندازه گیری کنیم احتمال آنکه مقدار $\left(-\frac{\hbar}{2}\right)$ به دست آید کدام است ؟

1) صفر 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{4}$ 4) $\frac{3}{8}$

26ـ تابع حالت ذره ای با اسپین $\frac{1}{2}$ در لحظه $t=0$، $\hat{x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ است. در این لحظه میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B}=B.\hat{j}$ را بر آن اعمال می کنیم. احتمال اینکه در لحظه $t>0$ در اندازه گیری $\hat{s}_x$ مقدار $+\frac{\hbar}{2}$ بدست آید کدام است ؟

1) صفر 2) $\frac{1}{4}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) 1

27ـ هامیلتونی ذره ای به جرم m و بار e به شکل: $H=\frac{eg}{2mc}\vec{s}(t).\vec{B}$ است. تغییرات زمانی بردار اسپین این ذره $\frac{d\vec{s}(t)}{dt}$ کدام است؟ g مقدار ثابتی است

1) $\frac{eg}{2mc}\vec{B}$ 2) $\frac{-eg}{2mc}\vec{s}\times\vec{B}$

3) $\frac{eg}{2mc}\vec{s}$ 4) $-\frac{eg}{mc}\vec{s}\times\vec{B}$

28ـ سیستمی دو حالته (مثلا سیستم اسپین $\frac{1}{2}$) را درنظر بگیرید. اگر $|+>, |->$ بردارهای پایه فضای هیلبرت آن باشند کدامیک از عملگرهای زیر نمی‌تواند به عنوان هامیلتونی این سیستم در نظر گرفته شود ؟

1) $|+><-|-\frac{1}{\sqrt{3}}|-1><+|\frac{1}{\sqrt{3}}|-><-|\frac{1}{\sqrt{2}}|+><+|\frac{1}{\sqrt{2}}$

2) $|+><-|+\frac{1}{\sqrt{3}}|-><+|+\frac{1}{\sqrt{3}}|-><+|+\frac{1}{\sqrt{3}}|-><-|\frac{1}{\sqrt{2}}|+><+|\frac{1}{2}$

3) $|+><+|-|+><-|+|$

4) $|+><-|+\frac{1}{\sqrt{3}}|-><+|+\frac{1}{\sqrt{2}}|-><-|+\frac{1}{\sqrt{3}}|+><+|\frac{1}{\sqrt{2}}$

29ـ تابع حالت ذره ای با اسپین $\frac{1}{2}$ با $x=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ توصیف می‌شود. احتمال اینکه اندازه گیری عملگر S_x به مقدار $-\frac{h}{2}$ منجر شود کدام است ؟

1) صفر 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 4) 1

30ـ دو الکترون در حالت یکتایی قرار دارند و اندازه گیری s_{1z} به مقدار $\left(-\frac{1}{2}\mathbf{h}\right)$ منجر می گردد. اگر پس از این اندازه گیری ، s_{2z} اندازه گیری شود احتمال انکه مقدار $\left(-\frac{1}{2}\mathbf{h}\right)$ حاصل شود چیست؟

(s_{1z} مولفه اسپین ذره اول در راستای s_{2z}, z مولفه عملگر اسپین ذره دوم در راستای $\mathbf{z}$ است)

1) 1 2) $\frac{1}{4}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) صفر

31ـ یک چشمه پروتون $\mathbf{N}$ تا پروتون در واحد زمان با تابع حالت $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\i\end{pmatrix}$ گسیل میکند. این باریکه از یک میدان مغناطیسی غیر یکنواخت در جهت محور $\mathbf{y}$ عبور داده میشد. پس از عبور از میدان مغناطیسی چند درصد از ذرات اسپینشان در جهت منفی محور $\mathbf{y}$ خواهد بود؟

1) 90 2) 50 3) 20 4) 10

32ــ در لحظه $t = 0$ الکترونی با اسپینور $c = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ توصیف می‌شود. این الکترون در میدان مغناطیسی ثابت $B = BZ$ قرار می گیرد. احتمال مثبت بودن مولفه اسپین در راستای z پس از گذشت زمان دلخواه t ...

1) کمتر می‌شود.
2) بیشتر می‌شود
3) تغییر نمی کند
4) بستگی به شدت میدان مغناطیسی ثابت دارد

پاسخ تشریحی

1ـ گزینه (3) صحیح است

$$m=1 \quad \ell=1$$

$$L_x^2=\frac{1}{2}\left\{\ell(\ell+1)-m^2\right\}=\frac{1}{2}\left\{1(1+1)-1^2\right\}=\frac{1}{2}$$

2ـ گزینه (2) صحیح است

$$<\psi|H|\psi>=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & \ldots\ldots\end{pmatrix}\frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & 3 & & & \\ & & 5 & & \\ & & & 7 & \\ & & & & \ddots\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\\vdots\end{pmatrix}$$

$$=\frac{3\hbar\omega}{2}$$

3ـ گزینه (2) صحیح است

چون:

$$V(\vec{r})=v_1(\vec{r})+\frac{1}{2}v_2(\vec{r})\sum_{i=1}s_{1i}s_{2i}$$

$$\left[s_1^2\,,s_{1i}\right]=\left[s_2^2\,,s_{2i}\right]=\mathbf{0}$$

$$\left[s^2,s_1^2\right]=\left[s^2,s_2^2\right]=\mathbf{0}$$

$$\left[s_z,s_{1i}\right]\neq\mathbf{0}\quad(i=x,y)$$

$$\left[s_z,s_{2i}\right]\neq\mathbf{0}\ (i=x,y)$$

4ـ هیچ گزینه ای صحیح نیست

$$< s_z > = x^t\, s_z x = \frac{1}{2} x^t{}_-^{(3)} x_-^{t(4)} \left[x_+^{t(1)} x_-^{t(2)} - x_-^{t(1)} x_+^{t(2)}\right] x$$

$$\left\{x_-^{(3)} x_-^{(4)}\right\} \left[x_+^{(1)} x_-^{(2)} - x_-^{(1)} x_+^{(2)}\right]$$

$$= \frac{1}{2} x^t \ \{-\frac{\hbar}{2} x - \frac{\hbar}{2} x + \frac{\hbar}{2} x_-^{(3)} x_-^{(4)} \left[x_+^{(1)} x_-^{(2)} + x_-^{(1)} x_+^{(2)}\right]$$

$$-\frac{\hbar}{2} x_-^{(3)} x_-^{(4)} \left[x_+^{(1)} x_-^{(2)} + x_-^{(11)} x_+^{(2)}\right]$$

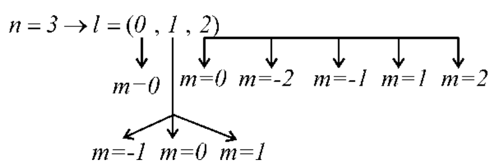
$$= \frac{\hbar}{4} \ \{-2x^t x + \left[x_+^{t(1)} x_-^{t(2)} - x_-^{t(1)} x_+^{t(2)}\right] \left[x_+^{(1)} x_-^{(2)} + x_-^{(1)} x_+^{(2)}\right]$$

$$-\left[x_+^{t(1)} x_-^{t(2)} - x_-^{t(1)} x_+^{t(x)}\right] \ \left[x_+^{(1)} x_-^{(2)} + x_-^{(11)} x_+^{(2)}\right]$$

$$= -\frac{\hbar}{2}$$

5ـ گزینه (2) صحیح است

- $x(0) = c_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $H = \frac{-eg\hbar}{4mc} \vec{d}.\vec{B} = \frac{-eg}{2mc} \vec{s}.\vec{B} = \frac{-egB_0}{2mc} s_z$
- $e^{-iHt/h} x = e^{\frac{iegB_0 t}{2\hbar m} s_z} x = e^{\frac{iegB_0 t}{2mc}} \left|s_{z_1 t>}\right.$
- $\left|< x^t \left|e^{iwt}\right| x_+ >\right|^2 = \left|e^{iwt}\right|^2 \ \left|< x_t \left| x_t + >\right.\right|^2 = 1$



6ـ گزینه (4) صحیح است

7ـ گزینه (2) صحیح است

$$x(0) = \left|s_{z,+>}\right.$$

$$x_{(t)} = e^{iwt}\, x_t = \begin{pmatrix} e^{iwt} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$< s_z > \frac{\hbar}{2}\left((a^2) - (b)^2\right) = \frac{\hbar}{2}\left(\left|e^{iwt}\right|^2 - |0|^2\right) = \frac{\hbar}{2}$$

8ـ گزینه (2) صحیح است

$$\exp\left(i\frac{b}{2}d_x\right) = 1\cos\frac{b}{2} + i d_x \sin\frac{b}{2}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{b}{2} & i\sin\frac{b}{2} \\ i\sin\frac{b}{2} & \cos\frac{b}{2} \end{pmatrix}$$

9ـ گزینه (2) صحیح است

$$\left[J^2, s_z\right] = \left[L^2 + S^2 + 2\vec{L}.\vec{S}, SZ\right] = \left[L^2, S_Z\right] + \left[S^2, S_Z\right]$$

$$+ 2\left[\vec{L}.\vec{S}, S_Z\right]$$

$$= 2\sum_i \left[L_i s_i, s_z\right] = 2\sum_i L_i i\hbar \in_{izj} s_j$$

$$= 2i\hbar \sum_i \in_{izj} L_i s_j$$

$$= 2i\hbar \sum_i \in_{jiz} s_j L_i$$

$$= 2i\hbar\left(\vec{s} \times \vec{L}\right)_Z = 2i\hbar \hat{k}.\left(\vec{s} \times \vec{L}\right)$$

10ـ گزینه (3) صحیح است

$$\hat{H} = -\frac{eg}{4mc}\,\vec{s}.\vec{B} = -\frac{egB}{4mc}\hat{s}_y$$

$$x(0)=x_-=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$x(t)=e^{-i\hat{H}\,t/\hbar}x_-=e^{\frac{ieg\,Bt}{4mc}s\hat{y}}x_-$$

$$\left.\begin{aligned}|y,+>&=\frac{1}{\sqrt{2}}\{x_++ix_-\}\\ |y,->&=\frac{1}{\sqrt{2}}\{x_+-ix_-\}\end{aligned}\right\}\rightarrow ix_-=\frac{1}{\sqrt{2}}\{|y,+>-|y_1,->\}$$

$$x(t)=\frac{1}{i\sqrt{2}}\;e^{i\frac{egBt}{4mc}}\;\frac{\hat{S}_y}{\hbar}\{|y,+>-|y,->\}$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{2}}\left\{e^{\frac{igBt}{4mc}\frac{\hbar}{2}/\hbar}\,|y,+>-e^{-i\frac{egBot}{4mc}\cdot\frac{\hbar}{2}\hbar}\,|y,->\right\}$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{2}}\;\{e^{iwt}\,|y,+>-e^{-iwt}\,|y,->\}$$

$$|<y,+|x(t)>|^2=\left|\frac{e^{iwt}}{i\sqrt{2}}\right|^2=\frac{1}{2}$$

11ـ گزینه (4) صحیح است

$$(2I+d_x)^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2\times2-1\times1}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\{2II-d_x\}=\frac{2}{3}II-\frac{1}{3}d_x$$

12ـ گزینه (4) صحیح است

$$x(t)=\begin{pmatrix}e^{iwt}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

13ـ گزینه (2) صحیح است

$$< s_z >= \frac{\mathbf{h}}{2}\left(|a|^2 - |b|^2\right)$$

$$s_x = 1 \rightarrow \frac{\mathbf{h}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ g \end{pmatrix} = \mathbf{h}\begin{pmatrix} a \\ b \\ g \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} b \\ a+b \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ g \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} b = \sqrt{2}a \\ a+b = \sqrt{2}b \\ b = \sqrt{2}g \end{matrix}\right\} \rightarrow a = g$$

$$g = \mathbf{0}$$

$a^2 + b^2 + g^2 = 1$ ویژه بردار نرمالیزه است

$$a^2 + \left(\sqrt{2}a\right)^2 + a^2 = 1$$

$$4a^2 = 1 \rightarrow a = \pm\frac{1}{2}$$

$$a + \sqrt{2}a = \sqrt{2}.\sqrt{2}a \Rightarrow a = \mathbf{0}$$

$$| s_x = 1 >= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1\ \sqrt{2}\ 1\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} e^{iwt}\right|^2 = \frac{1}{4}\left(1\times1 + \sqrt{2}\times1\right) = \frac{1+\sqrt{6}}{4}$$

هیچ گزینه ای صحیح نیست

15ـ گزینه(1) صحیح است

$$<\hat{s}_y>_y=\mathbf{h}\,\mathrm{Im}\left(x^t x\right)=\mathbf{h}\,\mathrm{Im}\left((\frac{1}{\sqrt{5}})^2\left(e^{iwt}\,2e^{-iwt}\right)\begin{pmatrix}e^{-iwt}\\2e^{iwt}\end{pmatrix}\right)$$

$$=\frac{\mathbf{h}}{5}\mathrm{Im}\left(1+4\right)=\mathbf{0}$$

16ـ گزینه (2) صحیح است

$$s=\frac{3}{2}\rightarrow m_s=\pm\frac{3}{2},\pm\frac{1}{2},\mathbf{0}$$

17ـ گزینه (1) صحیح است

$$|\,s_y,\pm>=\frac{1}{\sqrt{6}}\{x_+\pm ix_-\}$$

$$|\,s_n,\pm>=\frac{1}{\sqrt{6}}\{x_+\pm x_-\}$$

$$|<s_x,+1|s_y,\pm>|^2=|\frac{1}{2}\{x_+\pm x_-\}\{x_+\pm ix_-\}|^2$$

$$=|\frac{1}{2}\left(1+i\right)|^2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

18ـ گزینه (2) صحیح است

$$x\left(t\right)=e^{-i\hat{H}t/\mathbf{h}}x\left(\mathbf{0}\right)=e^{-i\hat{H}t/\mathbf{h}}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(x_++2x_-\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{e^{iwt\hat{d}_z}\right\}\{x_++2x_-\}$$

$$x\left(t\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{e^{-iwt}x+2e^{iwt}x_-\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e^{-iwe}\\2e^{iwt}\end{pmatrix}$$

19ـ گزینه (2) صحیح است

$$L_x = \frac{L_+ + L_-}{2} = \frac{\hbar}{2}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

20ـ گزینه (1) درست است

$$< s_x > = \frac{\hbar}{2}\operatorname{Re}\left(x^t x\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2}\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-ij} & e^{-i\frac{j}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\frac{j}{2}} \\ e^{-\frac{ij}{2}} \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \frac{\hbar}{y}\operatorname{Re}\{1+1\} = \hbar$$

21ـ گزینه (2) صحیح است

$$\hat{H} = 2w_l s_z \left|< x_+ \mid e^{-i\hat{H}} t \mid x_+ >\right|^2 = \left|< x_t \mid e^{-iwt}\right| x + >\Big|^2 = 1$$

22ـ گزینه (3) صحیح است

$$|H - 2I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \hbar w - E & 0 & 0 \\ 0 & 2\hbar w - E & \hbar w \\ 0 & \hbar w & 2\hbar w - E \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (\hbar w - E)\left[(2\hbar w - E)^2 - \hbar^2 w^2\right] = 0$$

$$E_1 = \hbar w$$

$$2\hbar w - E = \pm \hbar w \rightarrow E_2 = \hbar w$$

$$E_3 = 3\hbar w$$

23ـ گزینه (3) صحیح است

$$<s_n> = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} a^* & b^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} a^* & b^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\left(a^* b + b^* a\right)$$

$$= \hbar \operatorname{Re}\left(a^* b\right)$$

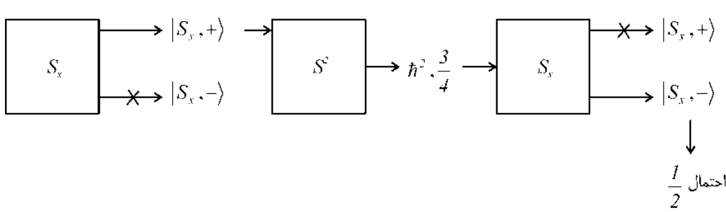
$$<s_x> = \hbar \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iwt} . \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} = \frac{\hbar}{2}\cos wt$$

24ـ گزینه (2) صحیح است

$$<H>_y = \frac{1}{\sqrt{9}}(2 \;\; 2 \; 1 \; 0 \ldots\ldots)\frac{\hbar w}{2}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 5 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{9}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar w}{18}(2 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 0 \ldots\ldots)\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \\ \vdots \end{pmatrix} = \frac{\hbar w}{18}(2\times 2 + 2\times 6 + 1\times 5 + \ldots.)$$

$$= \frac{\hbar w}{18}(1 + 12 + 5) = \frac{2\hbar w}{18} = \frac{7\hbar w}{6}$$



26ـ

$$x(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_{+}+x_{-}\right)$$

$$x(t)=e^{-iwt\,dy}x(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iwt}x_{+}+e^{iwt}x_{-}\right)$$

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-iwt} \\ e^{iwt} \end{pmatrix}$$

$$< s_{x,}+|\, x(t)>=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-iwt} \\ e^{iwt} \end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{2}\left(e^{-iwt}+e^{iwt}\right)$$

$$=\cos wt$$

احتمال$=\cos^2 wt$

- هیچ گزینه ای صحیح نیست.

27ـ گزینه (2) صحیح است .

- $$\frac{d\,\hat{s}_x}{dt}=i/\hbar\left[H,s_x\right]=\frac{i}{\hbar}\cdot\frac{eg}{2mc}\left[s_xB_x+s_yB_ys_zB_z,S_x\right]$$

- $$=-\frac{ieg}{2mc\hbar}\left\{B_y\underbrace{\left[s_y,s_x\right]}_{-i\hbar s_z}+B_z\underbrace{\left[s_z,s_x\right]}_{i\hbar sy}\right\}$$

- $$=\frac{-eg\hbar}{2mch}\left\{-B_ys_z+B_zs_y\right\}=\frac{-eg}{2mc}\left\{\underbrace{S_yB_z-S_zB_y}_{(\vec{s}\times\vec{B})_x}\right\}$$

- $$\frac{d\vec{s}}{dt}=\frac{-eg}{2mc}\left(\vec{s}\times\vec{B}\right)$$

28ـ گزینه (4) صحیح است.

$$H^{+}=H$$

$$H_{12}=H_{21}$$

29ـ گزینه (4) صحیح است.

$$<S-|\,x>=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}(1+1)=1$$

احتمال $=|<s-|x>|^{2}\ 1$

30ـ گزینه (4) صحیح است

$$X_{\sin glet}\Rightarrow S=\mathbf{0}\qquad s_{1z}=-\frac{1}{2}\mathbf{h}$$

$$<s_{2z},->\ s_{1z},->=x_{-}^{t(2)}x_{-}^{(1)}=\mathbf{0}$$

31ـ گزینه (2) صحیح است

$$x(t)=e^{-iwtd_{y}}\ x(\mathbf{0})=\frac{1}{\sqrt{5}}e^{-iw\hat{d}_{y}}\ \{2x_{+}+i\,x_{-}\}$$

$$x_{\pm}=\frac{1}{i\sqrt{2}}\ \{|y,+>\pm|y,->|\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}e^{-wt\hat{d}_{y}}\left\{\frac{1}{i\sqrt{2}}\right\}\{2(|y,+>+|y,->)+i(|\,y_{1}+>-|\,y_{1}->)\}$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{10}}\ e^{-iwtd\hat{y}}\ \{(2+i)|\,y_{1}+>+(2-i)(y_{1}->)\}$$

$$=\frac{1}{i\sqrt{10}}\ e^{-iwtd\hat{y}}\ \{(2+i)e^{-iwt}\,|\,y\,|+>+(2-i)e^{iwt}\,(y|->)\}$$

$$< d\ y - | x(t) > \frac{1}{i\sqrt{10}}(2-i)e^{iwt}$$

احتمال $= \frac{1}{10} \times 5 = 50\%$

32ـ گزینه (3) صحیح است

$$x(t) = e^{-iwt\hat{d}_z}\ \ x(\mathbf{0}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ e^{-iwt\hat{d}_z}\ \{x_+ + x_-\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\{e^{-iwt}\ \ x_+\ \ + e^{iwt} d\ -\}$$

$$< x_+ \mid x(t) >= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iwt}$$

$$|< x+ \mid (t) >|^2 = \frac{1}{2}$$

فصل نهم : **ذرات باردار در میدان مغناطیسی**

مقدمه: هامیلتونی ذره باردار در میدان خارجی را بدست آورده و به حل آن برای بعضی حالتهای خاص میپردازیم.

$$\hat{H}=\frac{1}{2m}\left(\hat{p}-\frac{e}{c}\hat{A}\right)^2 h2+ef$$

$$\hat{H}=\frac{\hat{P}^2}{2m}+ef-\frac{e}{mc}\overset{\mathbf{r}}{A}.\hat{p}+\frac{e^2}{2mc^2}A^2=\hat{H}_{\mathbf{0}}-\frac{e}{mc}\overset{\mathbf{r}}{A}.\hat{p}+\frac{e^2}{2mc^2}A^2$$

$$\hat{H}y = i\mathbf{h}\frac{\partial y}{\partial t}$$

ناوردایی پیمانه ای

اگر در معادله شرویندگر تبدیلات :

$$\overset{\mathbf{r}}{A}'=\overset{\mathbf{r}}{A}+\overset{\mathbf{r}}{\nabla}f$$

$$f'=f-\frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$$

را اعمال کنیم و جواب ها حالتهای فیزیکی یکسانی را توصیف کنند. گوییم معادله شرویندگر ناردای پیمانه ای است. در این حالت $y \to y' = y\ \exp\left\{\frac{ie}{\mathbf{h}c} f(\overset{\mathbf{r}}{r},t)\right\}$

مثال) حالتهای لاندائو (Landau)

حل معادله شرویندگر برای حرکـت ذره بـاردار در میـدان مغناطیسـی ثابـت $\overset{\mathbf{r}}{B}=B\hat{K}$, $f=\mathbf{0}$ را بـا پتانسـیل بـرداری $\overset{\mathbf{r}}{A}=(-By,\mathbf{0},\mathbf{0})$ بدست آورید.

حل) به ترتیب داریم:

$$\hat{H}=-\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\Delta-i\frac{\mathbf{h}eB}{mc}y\frac{\partial}{\partial x}+\frac{e^2B^2}{2mc^2}y^2$$

چون :

$$\left[\hat{H},\hat{p}x\right]=\left[\hat{H},\hat{p}_z\right]=\mathbf{0}$$

پس تابع موج در راستای z,x موج تخت است یعنی:

$$y\left(x,y,z\right)=e^{i(ax+bz)}\ j\left(y\right)$$

$a=p_x\ ,\ b=p_z$ که در آن

با جاگذاری :

$$\left(-\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\frac{d^2}{dy^2}+\frac{\mathbf{h}eBa}{mc}y+\frac{e^2B^2}{2mc^2}y^2\right)j\left(y\right)=\left(E-\frac{\mathbf{h}^2a^2}{2m}-\frac{\mathbf{h}^2b^2}{2m}\right)j\left(y\right)$$

با تغییر متغیرهای :

$$y=y'-\frac{\mathbf{h}ca}{eB}=y'-\frac{\mathbf{h}a}{mw_{\mathbf{0}}}$$

$$w_{\mathbf{0}}=\frac{eB}{mc}\quad,\quad e=E-\frac{\mathbf{h}^2b^2}{2m}$$

$$\left[-\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\frac{d^2}{dy'^2}+\mathbf{h}w_{\mathbf{0}}a\left(y'-\frac{\mathbf{h}a}{mw_{\mathbf{0}}}\right)+\frac{m}{2}w_{\mathbf{0}}^2\left(y'-\frac{\mathbf{h}a}{mw_{\mathbf{0}}}\right)^2\right]j'(y')$$

$$=\left(\in-\frac{\mathbf{h}^2a^2}{2m}\right)j'(y')$$

که پس از ساده کردن به صورت زیر در می آید:

$$\left(-\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\frac{d^2}{dy'^2}+\frac{m}{2}w_{\mathbf{0}}^2y'^2\right)j'(y')=ej'(y')$$

$$e_n=\mathbf{h}w_{\mathbf{0}}\left(n+\frac{1}{2}\right)\qquad n=\mathbf{0},1,2,\ldots\ldots$$

$$E_n(b)=\frac{\mathbf{h}^2 b^2}{2m}+\mathbf{h}w_0\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

نکته:

برای a معین تابع موج

$$y(x,y,z)=\exp(iax+ibz)j(y)$$

در جهت y جایگزین شده ولی در راستای x چنین نیست. این موضوع غیر منتظره است زیرا هر دو جهت بایستی به طور یکسانی ظاهر میشد با این حال همانطور که در بالا دیدیم انرژی مستقل از a است بنابراین تبهگنی نامتناهی است.

بنابراین بسته های موج به شکل زیر:

$$y_{nb}(x,y,z)=\int_{-\infty}^{+\infty} c(a)e^{i(ax+bz)}j_a(y)da$$

نیز جوابهای معادله شرویندگر هستند.

مجموعه تست

1ـ گشتاور و مغناطیس الکترون با اندازه حرکت زاویه ای $\vec{L}$ (با در نظر گرفتن اسپین) در دستگاه SI کدام است؟

1) $\vec{m}=0$ 2) $\vec{m}=\frac{|e|}{2m}\vec{L}\times\vec{L}$

3) $\vec{m}=-\frac{|e|}{2m}\vec{L}$ 4) $\vec{m}=\frac{|e|}{2m}\vec{L}$

2ـ پدیده فرومغناطیس ناشی از کدام نیرو است ؟

1) تعویضی   2) جفت شدگی اسپین مدار

3) جفت شدگی اسپین الکترون اسپین هسته   4) جفت شدگی اسپین پروتون و اسپین نوترون

3ـ دراتم هیدروژن تعداد حالتهای الکترون با اعداد کوانتمی $n\leq 5$ کدام است ؟

1) 55   2) 60   3) 110   4) 120

4ـ تابع حالت ذره ای با بار e که تحت تاثیر پتانسیل برداری $\vec{A}(x)$ است برابر است با $\psi_{(x)}$ می‌باشند. بعد از تبدیل پیمانه ای $\vec{A}(x)\rightarrow\vec{A}(x)+x\hat{i}$ این تابع حالت به چه صورتی تبدیل خواهد شد؟

1) $e^{i\frac{ex}{\hbar}}\psi(x)$ 2) $e^{-i\frac{(ex^2)}{2\hbar c}}\psi(x)$

3) $e^{-i\left(\frac{ex}{\hbar c}\right)}\psi(x)$ 4) $\psi(x)$

5ـ هامیلتونی الکترون در اتم هیدروژنی که در یک میدان مغناطیسی ثابت $\vec{B}=B_0\hat{z}$ قرار دارد. به صورت $H=\frac{p^2}{2m}-\frac{ke^2}{r}+\omega L_z$ است. که در آن $\omega=\frac{eB_0}{2mC}$, B_0 عدد کوچکی و m جرم کاهش یافته الکترون است . تراز $n=3$ در مقایسه با حالتی که B_0 صفر است . با در نظر داشتن اسپین الکترون به چند تراز از انرژی تجزیه می‌شود؟

6 (1 | 10 (2 | 3 (3 | 5 (4

6ـ در اثر بهنجار زمین در میدان مغناطیسی ثابت 3/14 تسلا اختلاف فرکانس بین فوتونهای گسیل متناظر با گذار از زیر ترازهای مغناطیسی مجاور $(Dm = 1)$ به الت نهایی یسان تقریبا چند هرتز است؟

$m_e = 9\times10^{-31}\ kg$

$1/1\times10^{2}$ (1 | $2/2\times10^{10}$ (2 | $4/4\times10^{10}$ (3 | $8/8\times10^{10}$ (4

پاسخ تشریحی

1ـ گزینه (3) صحیح است.

$$\overset{\mathbf{r}}{m} = -\frac{|e|}{2m}\overset{\mathbf{r}}{L}$$

2ـ گزینه (3) صحیح است.

3ـ گزینه (3) صحیح است .

$$\sum_{n=1}^{5} 2n^2 = 2\sum_{n=1}^{5} n^2 = 2\frac{5(5+1)(2\times 5+1)}{6} = \frac{2\times 5\times 6\times 11}{6} = 110$$

4ـ گزینه (2) صحیح است

$$y(x) \to y(x)e^{-\frac{ief}{\mathbf{h}c}} = \mathbf{h}(x)e^{-\frac{iex^2}{2\mathbf{h}c}}$$

$$\begin{array}{l} A \to A + \nabla f \\ A \to A + x\hat{i} \end{array} \Rightarrow f = \frac{x^2}{2}$$

5ـ گزینه (4) صحیح است.

$$H|n,m> = E_{nm}|n,m>$$

$$E_{nm} = E_n + m\mathbf{h}w \to m = \mathbf{o}, \pm 2, \pm 1$$

$$n = 3 \to \mathbf{l} = (\mathbf{o},1,2)$$

6ـ گزینه (4) صحیح است .

$$n = \frac{1}{2pw} = \frac{1}{2p}\frac{E_n - E_{n'}}{\mathbf{h}} = \frac{E_n - E_{n'}}{h}$$

$$= \frac{n\mathbf{h}w - n'\mathbf{h}w}{\mathbf{h}} = \left(\underset{\Delta n=1}{n - n'}\right)w$$

$$w=\frac{egB}{4mc}\ {}_{g=2}=\frac{eB}{2mc}=\frac{1.6\times10^{-19}\times3.14}{2\times9\times10^{-31}\times3\times10^{8}\times10^{5}}$$

$$=\frac{0/8\times3/14}{27}\times10^{4}\times10^{5}$$

$$Tasla=10^{5}\ GAuss$$

$$=10^{9}\times10^{-3}\times8/8\times10^{4}$$

فصل دهم: نظریه اختلال و میانی تابش

مقدمه: معادله شرویندگر فقط برای چند مساله آرمانی جواب دقیق دارد. معمولا معادله با استفاده از روش تقریبی حل می‌شود. نظریه اختلال در حالتی بکار می رود که دستگاه واقعی را بتوان با تغییری کوچک نسبت به دستگاه آرمانی حل پذیر بیان کرد. در آن صورت هامیلتونی دستگاه به صورت زیر است:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + e\hat{W}$$

e پارامتری حقیقی است که اجازه می دهد که تابع موج و انرژی ها را بر حسب سری توانی از e بسط دهیم.

نظریه اختلال پایا (static)

فرض کنید که H_0 هامیلتونی غیر اختلال و ویژه مقادیر انرژی $\boldsymbol{E_n^0}$ و ویژه توابع y_n^0 باشند:

$$\hat{H}_0 y_n^0 = E_n^0 y_n^0$$

ما به دنبال ویژه مقادیر و ویژه توابع هامیلتون $\hat{H}$ هستیم یعنی:

$$(H_0 + ew)y = Ey$$

$$y = \sum_n a_n y_n^0(r)$$

$$a_m = a_m^{(0)} + e a_m^{(0)} + e_m^{(2)} .....$$

$$E = E_K = E^0 + eE^{(1)} + e^2 E^{(2)} + ...$$

$$\begin{cases} E_n^{(0)} = E_n \\ E_n^{(1)} = W_{nn} = < n|w|n > \\ E_n^{(2)} = \sum\limits_{k \geq \neq m} \dfrac{W_{mk}}{E_K^0 - E_m^0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_m^{(0)} = a_m \\ a_m^{(1)} = \sum\limits_{k \neq m} \dfrac{W_{mk}}{E_k^0 - E_m^0} \end{cases}$$

$$a_m^{(2)} = -\frac{w_k w_{mk}}{\left(E_m^0 - E_k^0\right)^2} + \sum_{n \neq k} \frac{w_{mn} w_{nk}}{\left(E_K^0 - E_n^0\right)\left(E_K^0 - E_m^0\right)} \quad m, n \neq k$$

اختلال تبهگن:

در این حالت به ازای یک انرژی E^{0} یک سری تابع موج $y_{a}^{0}(x)$ وجود دارد.

هدت نظریه اختلال تبهگن شکست تراز E^{0} به $a=1,2,....,g$ مجزاست .در این حالت تابع موج جدید $j_{a}(x)$ $a=1,3,...,g$

است.

انرژی های تراز E^{0} بعد از اختلال (g= درجه تبهگنی) از حل معادله درجه $g^{2}=g\times g$ دترمینان زیر بدست می آید:

$$\begin{vmatrix} E^{0}+eW_{11}-E & eW_{12} & \mathbf{K} & eW_{1g} \\ eW_{21} & E^{0}+eW_{22}-E & \mathbf{K} & eW_{2}g \\ \mathrm{M} & & & \\ eW_{g1} & \mathbf{K} & & E^{0}+eW_{gg}-E \end{vmatrix}=\mathbf{0}$$

که در آن:

$$W_{ab}=<y_{a}^{0}(x)|\,w\,|y_{b}^{0}(x)>$$

نظریه اختلال وابسته به زمان

در این حالت هدف حل معادله شرویندگر :

$$i\mathbf{h}\frac{\partial y}{\partial t}=\hat{H}_{0}(\overset{\mathbf{r}}{r})y+V(\overset{\mathbf{r}}{r},t)y$$

برای v<< (کوچک) است.

فرض می کنیم جوابهای معادله غیر اختلالی

$i\mathbf{h}\dfrac{\partial\tilde{y}}{\partial t}=\hat{H}_{0}\tilde{y}^{0}$ معلوم است که:

$$\tilde{y}_{k}^{0}(r,t)=y_{k}(r)e^{-iE_{k}^{0}\frac{t}{\mathbf{h}}}$$

مشابه با روش اختلال مانا :

$$y(\overset{\mathbf{r}}{r},t)=\sum_{k}a_{k}(t)y_{k}(r)\,\exp\left\{-iE_{k}^{0}\frac{t}{\mathbf{h}}\right\}$$

با جاگذاری و بدست آوردن ضرایب $a_{k}(t)$:

$$i\hbar\frac{da_m(t)}{dt}=\sum_k a_k(t)V_{mk}(t)e^{i\omega_{mk}t}$$

برای حل معادله بالا از روش تکرار (iteration) استفاده می شود.

$$a_m(t)=a_m^{(0)}+a_m^{(1)}+a_m^{(2)}+.....$$

فرض می کنیم در t=0 سیستم در حالت kام باشد یعنی:

$$a_m^{(0)}=\delta_{mk}$$

آنگاه با جاگذاری $a_m^{(0)}$ سمت راست معادله دیفرانسیل بالا داریم:

$$i\hbar\frac{da_m^{(1)}}{dt}=\sum_k \underbrace{a_k^{(0)}(t)}_{\delta_{kn}}V_{mk}(t)e^{i\omega_{mk}t}$$

$$a_m^{(1)}(t)=-\frac{i}{\hbar}\int_0^t V_{mn}(t')e^{i\omega_{mn}t'}dt'$$

$$\Rightarrow a_m^{(2)}(t)=\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\sum_k\int_0^t dt''V_{mk}(t'')e^{i\omega_{mk}t''}\int_0^{t''}dt'V_{kn}(t')e^{i\omega_{kn}t'}$$

نکته: معمولا تقریب مرتبه اول مورد نیاز است

نکته مهم:

فرض کنید در t=0 سیستم در حالت n معلوم باشد یعنی $a_m(t=0)=\delta_{mn}$

آنگاه احتمال اینکه سیستم تحت پتانسیل $V(\vec{r},t)$ یک گذار به حالت k انجام دهد. عبارتست از

$$|a_k(t)|^2=\left|\delta_{kn}-\frac{i}{\hbar}\int_0^t V_{kn}(t')e^{i\omega_{kn}t'}\right|^2$$

$\delta_{kn}=1\leftarrow k=n$ اگر

$\delta_{kn}=0\leftarrow k\neq 0$

احتمال گذار بر واحد زمان (تابش)- قاعده طلایی فرمی (Fremi's Colden Rule)

احتمال گذار از حالت b به یک حالت پیوسته $B\,(E)$ از رابطه زیر بدست می آید:

$$p_{b\to B(E)}=\frac{2\pi}{\hbar}|V_{ab}(E)|^2\rho_a(E)$$

روش اصل آمیز وردشی (Ritz's variational principle) رتیز:

برای محاسبه انرژی پایه یک سیستم با هامیلتونی H میتوان از تابع آزمایشی $y = y_a(x)$ استفاده کرد که در این حالت یک حد بالا برای انرژی پایه عبارت است از :

$$E_0 = \underset{y \in H}{Min}\left[\frac{< y\left|\hat{H}\right|y >}{< y | y >}\right]$$

مثال: یک نوسانگر کوانتم مکانیکی تحت اختلال خطی ax $(a <<)$قرار میگیرد. جاجایی ترازهای انرژی تا مرتبه دوم برای حالت پایه چقدر است؟

حل) طبق نظریه اختلال

$$E_n = E_n^{(0)} + ew_{nn} + e^2 \sum_{m \neq n} \frac{\left|W_{mn}\right|^2}{E_n^0 - E_m^0}$$

$$y_n = y_n^{(0)} + \sum_{m \neq n} \frac{W_{nm}}{E_n^0 - E_m^0} y_m^{(0)}$$

$E_0^{(0)} = \frac{1}{2}\mathbf{h}w \leftarrow n = 0$ برای حالت پایه

$$eW = ax$$

$$E_0 = \frac{1}{2}\mathbf{h}w + < 0|ax| > + \sum_{m \neq 0} \frac{\left|< m|an|0\right|^2}{E_0^0 - E_m^0}$$

به سادگی: $< 0|ax|0 >= 0$

و $< m|an|0 >= a\sqrt{\frac{\mathbf{h}}{2m - w}} < m|a + a^t|0 >= a\sqrt{\frac{\mathbf{h}}{2mw}}\, d_{m,1}$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{1}{2}\mathbf{h}w + 0 + \frac{a^2 \frac{\mathbf{h}}{2mw}}{\underbrace{\frac{1}{2}\mathbf{h}w - \frac{3}{2}\mathbf{h}w}_{m=1}}$$

$E_0 = \frac{1}{2}\mathbf{h}w + \frac{a^2\mathbf{h}}{2mw} \cdot \frac{1}{-\mathbf{h}w} = \frac{1}{2}\mathbf{h}w - \frac{a^2}{2mw^2}$ (تامرتبه (1))

و برای تابع موج $W_{0m} = <0|ax|m>$

$$= a\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} <0|a+a^{t}|m> = a\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{\sqrt{m}<0|m-1>+\sqrt{m+1}<0|m+1>\right\}$$

$$= a\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\times 1\{m=1\}$$

$$\Rightarrow \psi_{(x)} = \overset{0}{\psi}(x) + \frac{a\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}}{\underbrace{\frac{1}{2}\hbar\omega - \frac{3}{2}\hbar\omega}_{m=1}}\overset{0}{\psi}_1(x)$$

$$\psi(x) = \overset{0}{\psi}_0(x) - \frac{a}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\overset{0}{\psi}_0(x)$$

نکته مهم:

حل معادله شرویندگر نوسانگر با اختلال ax به طور کلی به صورت زیر است :

$$E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{a^2}{2m\omega^2}$$

مثال) در روش وردشی ریتز برای محاسبه انرژی پایه نوسانگر هماهنگ یک بعدی تـابع $A\exp(-\alpha^2\frac{x^2}{2})$ بکـار میـرود مقدار α از روش وردشی چقدر است ؟

1) $\frac{m\omega}{2\hbar}$ 2) $\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ 3) $\frac{m\omega}{\hbar}$ 4) $\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}$

حل) گزینه (2) صحیح است

$$H = \frac{\hat{P}}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

$$<\hat{H}>_{\psi} = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\hat{H}\psi\,dx}_{\text{محاسبه انتگرال}} = |A|^2\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2\frac{x^2}{2}}\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right\}e^{-\alpha^2\frac{x^2}{2}}dx$$

$$= |A|^2\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2\frac{x^2}{2}}\left[\frac{d^2}{dx^2}(e^{-\alpha^2\frac{x^2}{2}})+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\cdot e^{-\alpha^2\frac{x^2}{2}}\right]\right.$$

$$=|A|^2\left\{=\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\cdot\int_{\infty}^{+\infty}\left\{\left[(-a^2x)^2-a^2\right]e^{-a^2x^2}+\frac{1}{2}mw^2x^2e^{-a^2x^2}\right]dx\right.$$

برای محاسبه انتگرالها: $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-bx^2}dx_z\sqrt{\frac{p}{b}}\ \&\ \int$

$$<y|y>=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|^2dx=A^2\sqrt{\frac{p}{a}}$$

$$\frac{dE}{da}=\mathbf{0}\Rightarrow a=\sqrt{\frac{mw}{\mathbf{h}}}$$

مثال) یک اتم هیدروژن در $t=-\infty$ درحالت پایه قرار دارد در میان صفحات یک خازن با میدان الکتریکی ثابت $\overset{\mathbf{r}}{E}=E\overline{e}^{t^2}\hat{k}$ قرار می گیرد. که در آن $e<<1$ است. احتمال گذار به حالت در $t=+\infty$، 2p را بدست آورید.

حل) پتانسیل اختلال عبارت است از:

$$V(\overset{\mathbf{r}}{r},t)=-\int ee^{-at}dz=-eze^{-at^2}$$

$$=-e\,e^{-at^2}\,r\cos q$$

$$t=-\infty\rightarrow|n>=|100>\frac{1}{\sqrt{pa_{\mathbf{0}}^3}}\,e^{-r/a_{\mathbf{0}}}$$

$$t=+\infty|m>=|\underset{n}{\underset{\downarrow}{2}}\,\underset{\mathbf{1}}{\underset{\downarrow}{1}}\,m>$$

$$m=\mathbf{0},-1,+1$$

$$C_{21m}^{(t)}=d_{nm}-\frac{i}{\mathbf{h}}\int_{-\infty}^{+\infty}V_{21m,100}(t')e^{iw_{21m,100}t'}\,dt'$$

با گرفتن $\frac{E_2-E_1}{n}=w_{21m,100}=w_{\mathbf{0}}$

$$V_{21m,100}=-ee^{-at^2}\int_{\mathbf{0}}^{\infty}rR_{21}(r)R_{10}(r)\,r^2dr\int_{\mathbf{0}}^{2p}e^{imf}df$$

$$\int_{\mathbf{0}}^{p}p_1^m(\cos q)\cos q\,d(\cos q)$$

واضح است $2pd_{m10}=\int_{\mathbf{0}}^{2p}e^{imf}df$

$$\Rightarrow V_{210,100} = -\in e^{-at^2} \int_0^\infty r R_{21} R_{10} r^2 dr \int_p^0 \cos^2 q d\ (\cos q)$$

$$V_{210,100} = -\in e^{-at^2} \int_0^\infty r R_{21} R_{10} r^2 dr \int_{-1}^{+1} x^2\ dx$$

$$= -\frac{2\in}{3} e^{-at^2} \int_0^\infty \{ \qquad \} \left\{ \frac{1}{\sqrt{pa_0^3}} e^{-r/a_0} \right\} r^3 dr$$

$$R_{21}(r) = \frac{2}{\sqrt{3}} r_2^{\frac{5}{2}}\ r\ e^{-r_2 r} \sqrt{\frac{3}{4p}}$$

که در آن: $r_n = \dfrac{1}{2na_0}$

$$R_{21} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2a_0} \right)^{\frac{5}{2}} e^{\frac{r}{2a_0}}\ r \sqrt{\frac{3}{4p}}$$

$$\rightarrow V_{210,100} = \frac{-2\in}{3} \frac{e^{-at^2}}{\sqrt{pa_0^3}} \left(\frac{1}{2a_0} \right)^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{3}{4p}} \int_0^\infty r^4\ e^{-\frac{r}{a_0}}\ dr$$

با استفاده از :

$$\int_0^\infty r^n e^{-ar}\ dr = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$V_{210,100} = -\frac{\in}{\sqrt{3a_0^3}} \cdot \frac{1}{p} \left(\frac{1}{2a_0} \right)^{\frac{5}{2}} e^{-at^2} \cdot \frac{4!}{\left(\frac{1}{a_0} \right)^5}$$

احتمال گذار به حالت 210 $\Rightarrow |C_{210}(t)|^2 = \left| \dfrac{-\in}{\sqrt{2a_0^3}} \cdot \dfrac{24}{p} \left(\dfrac{a_0}{2} \right)^{\frac{5}{2}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at'^2 + iwt'}\ dt' \right|^2$

$$= \left| \frac{-e}{\sqrt{2a_0^3}} \cdot \frac{24}{p} \left(\frac{a_0}{2} \right)^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{p}{a}}\ e^{-\frac{w^2}{4a}} \right|^2$$

$$= \frac{e^2}{\sqrt{3a_0^3}} \cdot \frac{756}{p^2} \cdot \frac{a_0^5}{32} \cdot \frac{p}{a}\ e^{-} \frac{w^2}{2a}$$

$$= \frac{e^{2}}{3a_0^{3}} \cdot \frac{36}{p^{2}} \cdot \frac{a_0^{5}}{2} \cdot \frac{p}{a} e^{-\frac{w^{2}}{2a}}$$

احتمال$= \frac{6e^{2}a_0^{2}}{pa}\ e^{-\frac{w^{2}}{2a}}$

اثر اشتارک

همانطور که می دانیم تراز n اتم هیدروژن تبهگنی n^2گانه دارند. یعنی چهار ویژه توابع متعلق بـه انـرژی $E_n^0 = E_2^0$ اتم هیدروژن مختل نشده هستند این توابع عبارتند از :

$$j_1 = y_{200} = \frac{1 - \frac{r}{2a_0}}{\sqrt{2a_0^3}}\ e^{-\frac{r}{2a_0}}\, Y_{00} \qquad \text{(حالت 2s)}$$

$$j_2 = y_{210} = \frac{\frac{r}{2a_0}}{\sqrt{4a_0^3}}\ e^{-\frac{r}{2a_0}}\ Y_{10} \qquad \text{(حالت 2p)}$$

$$j_{3,4} = y_{21,\pm1} = \frac{\frac{r}{2a_0}}{\sqrt{6a_0{}^3}}\ e^{\frac{r}{2a_0}}\ \ Y_{1,\pm1}$$

با اعمال میدان:

$$V = -e\vec{r}.\vec{E} = -e|E|\ \ r\sqrt{\frac{4p}{3}}\ \ Y_{10}$$

پس:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$$

$$V_{ab} = \int_{-\infty}^{+\infty} j_a^{*}\ \hat{V}\ j_b\, dV$$

تنها عناصر غیر صفر:

$$V_{12} = V_{21} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \frac{r}{2a_0}}{\sqrt{2a_0^3}}\ e^{-\frac{r}{2a_0}}\ \left(-e|E|\right)\ \frac{\frac{r}{2a_0}}{\sqrt{6a_0^3}}\ e^{-\frac{r}{2a_0}}\ r\ \ Y_{00}^{*}\ Y_{10}Y_{10}$$

$$\times\sqrt{\frac{4p}{3}}dV$$

$$=-e|E|\int_0^\infty\left(1-\frac{r}{2a_0}\right)\frac{r^2}{12a_0^4}\,e^{-\frac{r}{a_0}}\,r^3dr\int d\Omega|Y_{10}|^2$$

$$=\frac{-e|E|}{12}a_0\int_0^\infty r^2dr\left(1-\frac{r}{2}\right)e^{-r}\times1=3e|E|a_0$$

به دلیل تبهگنی دستگاه:

$$\begin{vmatrix} E_2^0-E & V_{12} & 0 & 0 \\ V_{12} & E_2^0-E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_2^0-E_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_2^0-E \end{vmatrix}=0$$

$$E_1-E_2=E_2^0 \quad , \quad E_C=E_2^0+V_{12} \quad , \quad E_d=E_2^0-V_{12}$$

توابع موج متناظر :

$$E=E_2^0\ :\ y_{III}=a_3j_3+a_4j_4=a_3y_{211}+a_4y_{21-1}$$

$$a_4^2+a_3^2=1$$

$$E=E_2^0+V_{12}:\ \ y_I=\frac{1}{\sqrt{2}}(j_1+j_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}(y_{200}+y_{210})$$

$$E=E_{20}^0-V_{12}:\ y_{II}=\frac{1}{\sqrt{2}}(j_1-j_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}(y_{200}-y_{210})$$

مجموعه تست

1ـ اختلال $\frac{1}{2}l\,m\,w^2x^2$ را به هامیلتون $H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\,w^2x^2$ میافزاییم . جابجایی تراز پایه تا مرتبه اول بر حسب l کدام است ؟

1) $2l\,\mathbf{h}w$ 2) $l\,\mathbf{h}w$ 3) $\frac{1}{4}l\,\mathbf{h}w$ 4) $2l\,\mathbf{h}w$

2ـ اختلال را بر ذره ای واقع در یک چاه پتانسیل بی نهایت در فاصله صفر و L اعمال می کنیم. جابجایی تراز پایه در مرتبه اول برابرکدام است ؟

1) صفر 2) $\frac{V_0}{2}$ 3) $2V_0$ 4) $3V_0$

3ـ تغییر انرژی الکترون اتم هیدروژن در حالت زمینه تحت تاثیر میدان الکتریکی یکنواخت در اختلال مرتبه اول برابر است با :

1) 0 2) eEa_0 3) $\frac{3}{2}eEa_0$ 4) $3eEa_0$

4ـ در روش وردشی اگر ارزش انتظاری تابع هامیلتونی را با هر تابع آزمایش نرمالیزه دلخواه $<H>$ و انرژی حالت زمینه دستگاه را با E_0 نشان دهیم داریم:

1) $<H>\leq E_0$ 2) $<H>\geq E_0$

3) $<H>=E_0$ 4) $<H>E_0$

5ـ در پراکندگی باریکه ای با تابع موج Ae^{ikz} از یک کره سخت $V(r)=\begin{cases}\infty & r<R\\ 0 & r\geq R\end{cases}$ مقطع کل وپراکندگی برای موج جزئی $\mathbf{l}=0$ کدام است ؟

1) صفر 2) $2pR^2$ 3) $4pR^2$ 4) $\frac{4p}{k^2}\sin^2(KR)$

6ـ چاه پتانسیل بی نهایت که دیواره های آن در $x=0$, $x=p$ قرار دارد با پتانسیل $V(x)=\begin{cases} a x & 0\le x\le \frac{p}{2} \\ 0 & \frac{p}{2}<x<p \end{cases}$ مختل میشود. در این صورت تغییر انرژی حالت پایه در مرتبه اول اختلال برابر است با :

1) $\frac{a}{8p}\left(p^2+2\right)$

2) $\frac{a}{2}\left(p^2+\frac{1}{2}\right)$

3) $\frac{a}{8p}\left(p^2+\frac{1}{2}\right)$

4) $\frac{ap}{2}$

7ـ تراز $\mathbf{n}$ام از یک سیستم دارای تبهگنی دوگانه است. اگر مولفه های مـاتریس هـامیلتونی اخـتلال H_1 در این زیر فضای دو بعدی $\boldsymbol{h}_{ij}=<f_n^{(i)}\mid \boldsymbol{H}_1\mid f_n^{(j)}>$ باشـد کـه در آن $h_{21}=-h_{22}=1,\ h_{21}=h_{12}=1$ اولـین مرتبه اختلال در انرژی برای این زیر فضا چه مقدار است؟

1) 2و3

2) 1- و 1

3) $\sqrt{5},-\sqrt{5}$

4) $i\sqrt{3}\ ,\ i\sqrt{3}$

8ـ هامیلتونی ذره ای دوران کننده در صفحه $\mathbf{xy}$ به صورت $H=a^2L_z^2$ است. a مقدار ثابتی است. اگـر ایـن هامیلتونی با هامیلتونی $H_1=lV\left(\cos^2 j+2\right)$ مختل شودکه درآن V_0 مقدار ثابت مثبتی و l مقـدار ثابـت بسیار کوچکی است تصحیح مرتبه اول انرژی برای حالت پایه و اولین حالت تحریکی به ترتیب از راسـت بـه چپ کدام است ؟

1) $9plV_0,5plV_0$

2) $5plV_0,5plV_0$

3) $\frac{9}{2}lV_0,\frac{5}{2}lV_0$

4) $\frac{5}{2}lV_0,\frac{5}{2}lV_0$

9ـ اگر برای حالت پایه ذره ای به جرم $\mathbf{m}$ که در چاه پتانسیل نامتناهی یک بعدی که دیـواره هـایش آن در $x=a\ ,\ x=-a$ قرار دارد تابع $y(x)=\begin{cases} A\left(a^2+n\right)^2 & |x|\le a \\ \mathbf{0} & \end{cases}$ حدس زده شود E_0 انرژی حالـت پایـه پـیش بینی شده کدام است ؟

1) $E_0\ge\frac{5\mathbf{h}^2}{7a^2}$

2) $E_0\le\frac{5\mathbf{h}^2}{7a^2}$

3) $E_0 \le \frac{5\hbar^2}{4a^2}$ 4) $E_0 \ge \frac{5\hbar^2}{4a^2}$

10ــ به نوسانگر هماهنگ یک بعدی که با پتانسیل $V(x)=\frac{1}{2}mw^2x^2$ توصیف میشود پتانسیل اختلالی وابسته به زمان $V_1(x,t)=l\,mw^2x^2t$ در لحظه $t=0$ به هامیلتونی ذره افزوده میشود. اگر در لحظه t_0 درحالت پایه باشد احتمال آنکه در لحظه $t>t_0$ به اولین حالت برانگیخته نوسانگر هماهنگ گذار یابد کدام است؟

1) 0 2) $\frac{4\,l\,mw^2}{\hbar^2}$

3) $\frac{2\,l^2mw^2}{\hbar^2}\cos w(t-t_0)$ 4) $\frac{2\,l^2mw^2}{\hbar^2}\sin w(t-t_0)$

11ــ پتانسیل $V(x)=\begin{cases} V_0 & \frac{L}{2}\le x\le L \\ 0 & \end{cases}$ را به یک چاه پتانسیل بی نهایت که در فاصله صفر و L قرار دارد میافزاییم. مقدار جابجایی تراز انرژی nام چاه بی نهایت در مرتبه اول اختلال کدام است ؟(ته چاه بی نهایت در پتانسیل صفر است و $V_0>0$)

1) nV_0 2) $\frac{nV_0}{2}$ 3) V_0 4) $\frac{V_0}{2}$

• احتمال $=\left|\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-iwt}\right|^2=\frac{1}{2}$

12ــ هامیلتونی سیستمی $H_0=\begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}$ است که در آن $E_1>E_2$. هامیلتونی اختلالی $H_1=\begin{bmatrix} 0 & d \\ d & 0 \end{bmatrix}$ را به این هامیلتونی می افزاییم. با فرض اینکه $d<<E_1-E_2$ ترازهای انرژی هامیلتونی $H=H_0+H_1$ تا مرتبه اول اختلال کدامند؟

1) $E_1+d\ ,\ E_1$ 2) E_2,E_1

3) E_2,E_1+d 4) $E_2+d\ ,\ E_1+d$

13ـ یک نوسانگر هماهنگ ساده یک بعدی به جرم m توسط انرژی پتانسیل $V(x)=\frac{1}{2}em w^2 x^2 + l m w^2 x^3$ **مختل می شود که در آن** $e<<1$, $l<<1$ **مقادیر ثابتی هستند. تصحیح انرژی حالت پایه نوسانگر تا مرتبه اول اختلال کدام است ؟ (راهنمایی: تابع حالت پایه** $j(x)=\sqrt[4]{\frac{mw}{hp}}(-\frac{2w^2}{2h})$ **است)**

1) $\frac{3}{2}e\mathbf{h}w$

2) $\frac{e\mathbf{h}w}{2}$

3) $\left(\frac{4}{2}-\frac{l}{2}\right)\mathbf{h}w$

4) $\left(\frac{4}{4}+\frac{l}{3}\right)\mathbf{h}w$

14ـ کدام گزینه در مورد مقدار اختلال مرتبه دوم در نظریه اختلال مستقل از زمان غیر تبهگنی حالت پایه درست است ؟

1) همیشه عددی مثبت است

2) همیشه عددی منفی است

3) بسته به علامت پتانسیل اختلال ممکن است مقدار آن مثبت یا منفی باشد.

4) همواره صفر است

15ـ هامیلتونی سیستم مختل شده به شکل $H=\begin{pmatrix} 2-2e & e & 2e \\ e+1 & +e & e \\ 2e & e & 3+e \end{pmatrix}$ **است که در آن** $0<e<<1$ **پایین ترین مقدار انرژی این سیستم تا مرتبه اول** e **کدام است ؟**

1) $1-e$

2) $1+e$

3) $1-2e$

4) $2-e$

16ـ نوسانگر هماهنگ دو بعدی با هامیلتونی $H=\frac{1}{2m}\left(p_x^2+p_y^2\right)+\frac{1}{2}mw^2\left(x^2+y^2\right)$ **را در نظر بگیرید. تغییر انرژی مربوط به اختلال** $V=2a_{xy}$ **را برای اولین حالات تحریکی کدام است ؟**

$$\left(x=\sqrt{\frac{\mathbf{h}}{2mw}}\left(a+a^t\right), 0<a<<1\right)$$

1) $\pm\frac{a\mathbf{h}}{2mw}$

2) $\pm\frac{a\mathbf{h}}{mw}$

3) صفر

4) $\pm\frac{2a\mathbf{h}}{mw}$

پاسخ تشریحی

1ـ گزینه (3) صحیح است

$$H=\frac{1}{2}\frac{P^2}{m}+\frac{1}{2}mw^2(l+1)x^2$$

$$w\rightarrow w\sqrt{1+l}=w'$$

$$E_n\rightarrow\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar w'=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar w\sqrt{1+l}$$

2ـ گزینه (3) صحیح است

$$\underset{\underset{1}{\downarrow}}{<}|V|n\underset{\underset{1}{\downarrow}}{>}=\int_0^L\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\overset{\uparrow}{n}px}{L}(V_o)\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{px}{L}dx$$

$$=\frac{2}{L}Vol\sin^2\frac{p}{2}=2V_0$$

3ـ گزینه (1) صحیح است

$$<100|EeZ|100>=eE\sqrt{\frac{3}{4p}}\int_0^\infty r^2dr\left(\frac{1}{\sqrt{pa^3}}e^{-r/a}\right)^2\int_0^p 2p\cos q\sin q dq=0$$

4ـ گزینه (2) صحیح است

$$<H>_j=<j|H|j>=\sum_{n,m}C_n^*c_m<j_n|H|\underbrace{j_m}_{Em|jm>}>=\sum_n|C_n|^2E_n\geq\sum|C_n|^2E_0$$

$$E_0\leq\frac{<H>j}{<j|j>}=<H>$$

5ـ گزینه (3) صحیح است

6ـ گزینه (1) صحیح است

$$<n|V|n>=\int_0^p\left(\sqrt{\frac{2}{p}}\sin nx\right)^2.axdx$$

$$=\frac{2}{p}a\int_0^{p/2}x\sin^2nx\,dx=\frac{2a}{2}\int_.^{\frac{p}{2}}x\frac{(1-\cos 2nx)}{2}dn$$

$$=\frac{a}{p}\int_0^{\frac{p}{2}}[x-x\cos 2nx]\,dx=\frac{a}{p}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2n}\sin(2n\,x)-\frac{\cos 2n\,x}{4n^2}\Big|_0^{\frac{p}{2}}\right]$$

$$\int x\cos ndx=\frac{x}{2n}\sin 2nx+\frac{\cos 2nx}{4n^2}$$

$$\frac{a}{2p}\left[\frac{p^2}{4}+\frac{2}{4}\right]=\frac{a}{8p}\left(p^2+2\right)$$

$$=\frac{a}{2p}\left[\frac{p^2}{4p^2}\right]\left\{(-)^n-1\right\}\Big|_{n=1}$$

7ـ گزینه (3) صحیح است

$$H=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1-E & 2\\ 2 & -1-E\end{vmatrix}=0\rightarrow-\left(1-E^2\right)-4=0\rightarrow\ 1-E^2+4=0$$

$$E^2=5\rightarrow E=\pm\sqrt{5}$$

8ـگزینه (4) صحیح است

$$H=a^2L_z^2\rightarrow j_{3m}(j)=\frac{1}{\sqrt{2p}}e^{imj}$$

$$<m|H_1|\underset{m=1}{m}>=\frac{1}{2p}\int_0^{2p}e^{-ij}H_1\,e^{ij}\,dj=\frac{1}{2p}\,l\,V\int_0^{2p}\left(\cos^2 j+2\right)dj$$

$$=\frac{l\,V}{2p}\left[p+2\times 2p\right]=\frac{5\,l\,V}{2}$$

$$<2|H_1|2>=\frac{1}{2p}\int_0^{2p}e^{-2ij}H_1e^{2ij}\,dj=\frac{l\,V}{2p}\int_0^{2p}\left(\cos^2 j+2\right)dj=\frac{5\,l\,7}{2}$$

9ـ گزینه (3) صحیح است

$$E_0\le\frac{<j|H|j>}{<j\,|\,j>}$$

$$<j\,|\,j>=\int_{-a}^{a}A^2\left(a^2-x^2\right)dx=2A^2\int_0^{a}\left(a^2-x^2\right)^2dx$$

$$= 2A^2 \int_0^a \left[a^4 + x^4 - 2a^2x^2\right] dx$$

$$= 2A^2 \left[a^5 + \frac{a^5}{5} - 2a^2 . \frac{a^3}{3}\right] = 2A^2a^2\left[\frac{6}{5} - \frac{2}{3}\right]$$

$$= 2A^2\left[\frac{8}{15}\right] = \frac{16A^2a^2}{15}$$

$$< j\,|H|j\ > = \int_{-a}^{a} \frac{-\mathbf{h}^2}{2m} j\, j'' dx = \frac{\mathbf{h}^2}{2m}\int_{-a}^{a} |A|^2 \left(a^2 - x^2\right) dx$$

$$= \frac{2\mathbf{h}^2A^2}{m} \int_0^a \left(a^2 - x^2\right) dx$$

$$= \frac{2\mathbf{h}^2A^2}{m}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{2\mathbf{h}^2A^2}{m} . \frac{2a^3}{3} = \frac{4\mathbf{h}^2A^2a^3}{3m}$$

$$E_0 \le \frac{\dfrac{4\mathbf{h}^2A^2a^3}{3m}}{\dfrac{16A^2a^2}{15}} = \frac{5}{4}\frac{\mathbf{h}^2}{ma^2}$$

10ـ گزینه ( ) صحیح است

$$V(x) = \frac{1}{2} m w^2 x^2$$

$$V_1(x,t) = l\, m w^2 x^2 e t$$

$$y\,(x, t_0) = j_0(x) = |\mathbf{0}>$$

$$c_f(t) = d_{if} - \frac{i}{\mathbf{h}} \int_{t_0}^{t} V_{fi}(t') e^{-iw_{fi}t'} dt'$$

$$V_{fi}(t') = < f|V(t')|i > = l\, m w^2 t < 1|x^2|\mathbf{0} >$$

$$|f> = |1>$$
$$|i> = |\mathbf{0}>$$

$$= l\, m w^2 t . \frac{\mathbf{h}}{2mw} < 1|\left(a + a^t\right)^2|\mathbf{0} >$$

$$= \frac{l\,\mathbf{h} w e^{-gt}}{2} < 1|a^2 + a^{t2} + 2\hat{N} + 1|\mathbf{0} > \qquad = \mathbf{0}$$

$$C_1(t) = d_{10} = \mathbf{0}$$

$$\text{احتمال}\left|c_1, t\right|^2 = \mathbf{0}$$

11ـ گزینه (4) صحیح است

$$< n|V(x)|n > = \frac{2}{L}\int_{\frac{L}{2}}^{L} V_\mathbf{0} \sin^2 \frac{np}{L} x dx = \frac{V_\mathbf{0}}{L}\int_{\frac{L}{2}}^{L}\left(1-\cos\frac{2npx}{L}\right)dx$$

$$= \frac{V_\mathbf{0}}{L}\left(x - \frac{L}{2np}\sin(2npx)\Big|_{L/2}^{L}\right) = \frac{V_\mathbf{0}}{2}$$

12ـ گزینه (2) صحیح است.

$$H = H_\mathbf{0} + H_1 = \begin{pmatrix} E_1 & d \\ d & E_2 \end{pmatrix}$$

$$|H - EII| = \mathbf{0} \rightarrow \begin{vmatrix} E_1 - E & d \\ d & E_2 - E \end{vmatrix} = \mathbf{0} \rightarrow E^2 - (E_1 + E_2)E + E_1 + E_2 - d^2 = \mathbf{0}$$

$$E = \frac{E_1 + E_2 \pm \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - 4(E_1 E_2 - d^2)}}{2}$$

$$= \frac{E_1 + E_2 \pm \sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4d^2}}{2} \sim \frac{E_1 + E_2 \pm (E_1 - E_2)}{2}$$

13ـ گزینه ( ) صحیح است

$$e << 1$$

$$l << 1$$

$$< \mathbf{0}| l m w^2 |\mathbf{0} > = l m w^2 \left(\frac{\mathbf{h}}{2mw}\right)^{\frac{3}{2}} < \mathbf{0}|(a + a^t)3|\mathbf{0} >$$

$$= l m w^2 \left(\frac{\mathbf{h}}{2mw}\right)^{\frac{3}{2}} < \mathbf{0}|a^3 + at^3 + a^2 at + ...|\mathbf{0} > = \mathbf{0}$$

$$H \rightarrow \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m w^2 (1 + e) x^2$$

$$w \rightarrow w\sqrt{1 + e}$$

$$E_n \to E_{n'} = \hbar w(1+e)^{\frac{1}{2}}\left(2+\frac{1}{2}\right)\Big|_{n=0} \begin{array}{l} =\frac{1}{2}\hbar w\left(1+\frac{1}{2}e\right) \\ =E_0+\frac{1}{4}\hbar we \end{array}$$

14ـ گزینه (2) صحیح است

15ـ گزینه (2) صحیح است

$$H = H_0 + H_1$$

$$H_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} E_1^{(0)} = 2 \\ E_2^{(0)} = 1 \\ E_3^{(0)} = 3 \end{array}$$

$$H_1 = e\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = E_2^{(0)} + (H_1)_{22} = 1+e$$

16ـ گزینه (3) صحیح است

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}mw^2\left(x^2+y^2\right) + axy$$

$$x \to \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$$

$$y \to \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}$$

$$H = \frac{p_{x'}^2 + p_{y'}^2}{2m} + \frac{1}{2}mw^2\left(x'^2+y'^2\right) + \frac{a}{2}\left(x'^2-y'^2\right)$$

$$= \frac{p_{x'}^2 + p_{y'}^2}{2m} + \left(\frac{1}{2}mw^2 + \frac{a}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}mw^2 - \frac{a}{2}\right)y'^2$$

$$= \frac{p_{x'}^2 + p_{y'}^2}{2m} + \frac{1}{2}mw^2\left(1+\frac{a}{mw^2}\right)x'^2 + \frac{1}{2}mw^2\left(1-\frac{a}{mw^2}\right)y'^2$$

$$w_x \to w\sqrt{1+\frac{a}{mw^2}} \cong w\left(1+\frac{a}{2mw^2}\right)$$

$$w_{xy} \to w\sqrt{1-\frac{a}{mw^2}} \cong w\left(1-\frac{a}{2mw^2}\right)$$

$$E=\left(n_{n'}+\frac{1}{2}\right)\mathbf{h}w_{n'}+\left(n_{y'}+\frac{1}{2}\right)\mathbf{h}w_{y'}$$

$$E'^{n_{x'}n_{y'}}_{\infty}=\frac{1}{2}\mathbf{h}w\left(1+\frac{a}{2mw^2}\right)+\frac{1}{2}\mathbf{h}w\left(1-\frac{a}{2mw^2}\right)$$

$$\Delta E_{00}=\mathbf{0}$$

فصل یازدهم: اتم هیدروژن واقعی – اتم هلیوم

مقدمه: در این فصل با بکار بستن نظریه اختلال تصحیحات اتم هیدروژن واقعی را بدست می آوریم.

سپس به بحث درمورد حالتهای اورتو و پارا در اتم هلیوم می پردازیم.

اثرات انرژی جنبشی نسبیتی

رابطه نسبیتی برای انرژی جنبشی الکترون عبارت است از :

$$K=\sqrt{\hat{p}^2c^2+m^2c^4}-m,c^2\approx\frac{p^2}{2m}-\frac{1}{8}\frac{p^4}{m^3c^2}+.......$$

$$H_1=\frac{-1}{8}\frac{P^4}{m^3c^2}=\frac{-1}{2mc^2}\left(\frac{p^2}{2m}\right)^2$$

چون:

$$H_0=\frac{P^2}{2m}-\frac{e^2}{r}$$

$$\Rightarrow H_1=-\frac{1}{2mc^2}\left(H_0+\frac{e^2}{r}\right)\left(H_0+\frac{e^2}{r}\right)$$

در نظریه اختلال مرتبه اول جابجایی انرژی عبارت است از :

$$<n\mathbf{l}m|H_1|n\mathbf{l}m>=-\frac{1}{2mc^2}<n\mathbf{l}m\left|\left(H_0+\frac{d^2}{r}\right)\left(H_0+\frac{e^2}{r}\right)\right|n\mathbf{l}m>$$

$$=-\frac{1}{2}mc^2a^2\left[\frac{a^2}{n^3\left(\mathbf{l}+\frac{1}{2}\right)}-\frac{3a^2}{4p^4}\right]$$

در این محاسبات از روابط زیر استفاده شده است:

$$<\frac{1}{r}>_{nl}=\frac{1}{a_0n^2}\qquad\qquad <\frac{1}{r^2}>_{nl}=\frac{1}{a_0^2n^3\left(\mathbf{l}+\frac{1}{2}\right)}$$

جفت شدگی اسپین – مدار

هامیلتون اختلالی عبارت است از :

$$\hat{H}_2 = -\frac{1}{2m^2c^2}\vec{S}.\vec{L}\frac{1}{r}\frac{d[ef(r)]}{dr}$$

برای اتم هیدروژن $ef = -\frac{e^2}{r}$

$$\Rightarrow \hat{H}_2 = \frac{e^2}{2m^2c^2}\vec{S}.\vec{L}\frac{1}{r^3}$$

چون:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \Rightarrow \vec{S}.\vec{L} = \frac{1}{2}\left(\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2\right)$$

$$< S.L > = \frac{1}{2}\hbar^2\left[J\left(J + \frac{1}{2}\right) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4}\right]$$

$J = \ell \pm \frac{1}{2} \quad \leftarrow \vec{L}.\vec{S} = \frac{1}{2}$ برای

$$\Rightarrow < \vec{S}.\vec{L} > = \begin{cases} J = \ell + \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\hbar^2\ell \\ J = \ell - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\hbar^2(\ell+1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow < \hat{H}_2 > = \frac{{}^2}{2m^2c^2}.\frac{\hbar^2}{2}.\begin{Bmatrix} \ell \\ -\ell-1 \end{Bmatrix} \times \underbrace{\int_0^\infty dr.r^2\left[R_{nl}(r)\right]^2\frac{1}{r^3}}_{<\frac{1}{r^3}>_{nl}}$$

$$a_0 = \frac{\hbar}{mc\alpha}$$

$$\Rightarrow < \hat{H}_2 > = \Delta E = \frac{1}{4}mc^2\alpha^4\frac{\begin{Bmatrix} \ell \\ -\ell-1 \end{Bmatrix}}{n^3\ell(\ell+1)\left(\ell + \frac{1}{2}\right)}$$

اثر نابهنجار زیمان

هامیلتونی این اختلال :

$$H_3 = \frac{e}{2mc}\left(\vec{L} + 2\vec{S}\right)\cdot\vec{B} = \frac{e}{2mc}\left(\vec{J} + \vec{S}\right)\cdot\left(B\hat{K}\right)$$

$$< jm_j \ell \left| H_3 \right| jm_j \ell > = \frac{eB}{2mc}\left(\hbar m_j + < jm_j \ell \left| s_x \right| jm_j \ell >\right)$$

با استفاده از روابط فصل های قبل:

$$\Rightarrow < H_3 > = \Delta E = \frac{eB\hbar}{2mc} m_j \left(1 \pm \frac{1}{2\ell + 1}\right)$$

$J = \ell \pm \frac{1}{2}$ نکته مهم: قاعده گزینش $\Delta m_j = \pm 1, 0$

ساختار فوق زیر:

هامیلتونی اختلالی این حالت عبارت است از :

$$H_y = -M_{ei} M_i \, d(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi} M_{ei} Mj \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right)$$

محاسبه نشان میدهد:

$$< H_4 > = \Delta E = \frac{4}{3}(5/56) \cdot \frac{1}{1840} \cdot \frac{1}{(137)^2} \cdot mc^2$$

نکته مهم: تاثیرات جرم کاهیده

$$m = \frac{memp}{me + mp} = \left(1 - 5/4 \times 10^{-4}\right) me$$

تراز	جابجایی انرژی با $m = me$	جابجایی انرژی شامل اثرات جرم کاهیده
$1S_{\frac{1}{2}}$	-0/18113	-0/18075
$2S_{\frac{1}{2}}$	-0/05660	-0/05648
$2p_{\frac{1}{2}}$	-0/05660	-0/05654
$2p_{\frac{3}{2}}$	-0/01132	-0/01128

اتم هلیوم

اتم هلیوم بدون دافعه الکترون – الکترون

اتم هلیوم از یک هسته با بار z=2 و دو الکترون که انها را با 1و2 نشانه گذاری می کنیم تشکیل شده است. اگر هسته را در مبدا بگیریم و مختصات الکترونها را با $\vec{r}_2,\vec{r}_1$ نشان دهیم:

$$H=\frac{p_1^2}{2m}+\frac{p_2^2}{2m}-\frac{ze^2}{r_1}-\frac{ze^2}{r_2}+\frac{e^2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$$

که در آن m جرم الکترون است.

می‌نویسیم:

$$H=H_1+H_2+V$$

$$H_{(i)}=\frac{p_i^2}{2m}-\frac{ze^2}{r_i}\ ,\ V=\frac{e^2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$$

جواب مساله ویژه مقداری را برای دستگاه دوذره ای (الکترون) به دست میاوریم:

$$\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\phi_{n_1l_1m_1}(\vec{r}_1)\,\phi_{n_2l_2m_2}(\vec{r}_2)$$

که در معادله زیر صدق میکند:

$$\left[H^{(1)}+H^{(2)}\right]\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=(E_1+E_2)\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$$

نکته:

در الگویی ایده آل که در آن الکترونها همدیگر را نمی بینند $(V=0)$ انرژی حالت پایه برابر است با :

$$E=2E_1=-mc^2(2\alpha)^2=-108/89\ (ev)$$

که 8 برابر انرژی پایه الکترون $(-13/6)\boldsymbol{er}$ است.

بنابراین: $E=E_1+E_2=-68/0(ev)$ (برای اولین حالت برانگیخته)

اثرات اصل طرد پائولی $(V=0)$

دو الکترون فرمیون هستند. حالت پایه را در نظر می گیریم:

$$\text{حالت پایه}\rightarrow\psi_0(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\psi_{100}(\vec{r}_1)\psi_{100}(\vec{r}_2)\chi_{singlet}$$

که:

$$X_{\sin g} let = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_{+}^{(1)} x_{-}^{(2)} - x_{-}^{(1)} x_{+}^{(2)}\right)$$

اولین حالت برانگیخته

$$\begin{cases} y_{0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[y_{100}(\vec{r})y_{100}(\vec{r}_2) + y_{21m}(\vec{r}_1)y_{100}(\vec{r}_2)\right]X_{\sin g\, let} \\ y_{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[y_{100}(r_1)y_{21m}(r_2) - y_{21m}(r_1)y_{100}(\vec{r}_2)\right]X_{triplet} \end{cases}$$

که در آن :

$$X_{triplet} = \begin{cases} X_{+}^{(1)} X_{+}^{(2)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_{+}^{(1)} x_{-}^{(2)} + f_{-}^{(1)} x_{+}^{(2)}\right) \\ x_{-}^{(1)} x_{-}^{(2)} \end{cases}$$

مجموعه تست

1ـ دو ذره بدون اسپین با اندازه حرکتهای زاویه ای $\mathbf{l}_1 = 1$, $\mathbf{l}_2 = 3$ را در نظر میگیریم. مجموع تعداد حالات ممکن برای اندازه حرکت زاویه ای کل برابر کدام است ؟

1) 7 2) 9 3) 13 4) 31

2ـ سیستمی متشکل از الکترونهای p,s است. نمایشهای اسپکتروسکوپی حالتهای مجاز مختلف سیستم در نمایش جفت شدگی اسپین – مدار کدام است ؟

1) $1P_0$, $3P_{2,1,0}$
2) $3P_{1,3,0}, 1P_2$
3) $1P_1$, $3P_{1,2,0}$
4) $1S_1$, $3P_{2,1,0}$

3ـ آرایش حالت زمینه $19\mathbf{K}$ کدام است ؟

1) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1$
2) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5 4s^2$
3) $1s^2 2s^2 3s^2 2p^6 3p^6 4s^1$
4) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^1$

4ـ در آرایش الکترون بصورت $1s^2 2p$ بیشترین مقدار عدد J مربوط به اندازه حرکت زاویه ای کل برابر است با :

1) $\frac{3}{2}$ 2) $\frac{5}{2}$ 3) $\frac{7}{2}$ 4) $\frac{9}{2}$

5ـ در تابش دو قطبی قواعد انتخاب کدام است ؟

1) $\Delta m = 0, \pm 1$, $\Delta \mathbf{l} = 0$
2) $\Delta m = 0$, $\Delta \mathbf{l} = 0$
3) $\Delta m = \pm 1, 0$, $\Delta \mathbf{l} = \pm 1$
4) $\Delta m = \pm 1$, $\Delta \mathbf{l} = \pm 1, 0$

6ـ توصیف بیناب نگاری حالت پایه اتم ازت (هفت الکترون) کدام است ؟

1) $2p_{\frac{3}{2}}$ 2) $4p_{\frac{1}{2}}$ 3) $2s_0$ 4) $4s_{\frac{3}{2}}$

7ـ در تابش اتمها، آهنگ گذار در شکل ساده آن متناسب با مربع عنصر ماتریســی $< n' \, l' \, m' \mid \vec{r} \mid n <$ است. قاعده انتخاب در مورد مولفه سوم (z) اندازه حرکت زاویه ای $\Delta m = m - m$ کدام است؟

1) صفر و 1+ 2) صفر و ± 1 3) صفر و1- 4) 1و1-

8ـ دور ذره با اندازه حرکتهای $l_1 = 1$, $l_2 = 2$ در نظر بگیرید. کدام گزینه ویژه حالت مولفــه ســوم انــدازه حرکت مداری کل است؟

1) $Y_{10}Y_{11} + Y_{11}Y_{2,-1}$

2) $Y_{11,-1}Y_{21}Y_{2,-2}$

3) $Y_{11}Y_{20} + Y_{10}Y_{1}$

4) $Y_{11}Y_{10} + Y_{10}Y_{2,-1}$

9ـ سیستمی متشکل از دو نوترون در حالت اندازه حرکت زاویه ای مداری است نمایش های طیفی مجاز ایــن سیستم کدام است ؟

1) $3S_2, 3P_2, 3P_0$

2) $2P1, 1P_3, 1P1$

3) $1P_1, 3P_1, 3P_0$

4) $3P_2, 3P_1, 3P_0$

10ـ اولین حالت برانگیخته در اتم هلیوم چندگانه واگن است ؟ از اندرکنش دو الکترون صرفنظر می شود؟

1) 2 2) 4 3) 12 4) 16

11ـ دستگاهی از دو الکترون تشکیل گردیده است. کدام یک از حالات زیر برای این دستگاه مجاز نیست؟

1) $1s_0$ 2) $3p_2$ 3) $3D_2$ 4) $3F_4$

پاسخنامه

1ـ گزینه (4) صحیح است

$N = 2\ell + 1$

$|\ell_1 - \ell_2| \le \ell \rightarrow |1-3| \le \ell \le |1+3|$

$2 \le \ell \le 4$

$\ell = 2,3,4$

$N_1 + N_2 + N_3 = 5 + 7 + 9 = 21$

2ـ هیچ گزینه ای صحیح نیست .

$$\begin{matrix} \ell = 0 \\ \ell = 1 \end{matrix} \rightarrow \ell = 1 \rightarrow P$$

$$J\,O_{\underset{\downarrow}{2s+1}} \equiv {}^{2s+1}o_j$$

$$\vec{J} = \vec{\ell} + \vec{S}$$

$$\vec{S} = \vec{\frac{1}{2}}$$

$$J = \vec{1} + \vec{\frac{1}{2}} = \left\{ \begin{matrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \rightarrow S = \frac{1}{2} \\ \rightarrow = \frac{-1}{2} \end{matrix}$$

$${}^{\frac{3}{2}}p_{2\times\frac{1}{2}+1} \ , \ {}^{\frac{1}{2}}P_{2\times-\frac{1}{1}+1} \Rightarrow {}^{\frac{3}{2}}P_3, {}^{\frac{1}{2}}p_0$$

3ـ گزینه (1) صحیح است

$^{19}k: 1s^2/2s^2/2p^6/3s^2/3p^6/4s^1$

4ـ گزینه (1) صحیح است

$$\vec{J} = \vec{\ell} + \vec{S}$$

$$\vec{J}_1 = \vec{0} + \vec{0} = 0$$

$$\vec{J}=\vec{1}+\vec{\frac{1}{2}}=\begin{Bmatrix}\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\end{Bmatrix}\to x$$

5ـ گزینه (3) صحیح است

$$1s^2/2s^2/2\underset{\ell=1}{\underset{\downarrow}{p}}{}^3$$

6ـ گزینه (1) صحیح است

$$\vec{J}=\vec{\ell}+\vec{s}=\vec{1}+\vec{\frac{1}{2}}=\begin{cases}\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\end{cases}\qquad {}^{2s+1}p_j={}^{2\times\frac{1}{2}+1}p_j={}^{2}p_{\frac{3}{2}}$$

7ـ گزینه (2) صحیح است

$$<n\ell m|z|n'l'm'>\sim<n\ell m\left|\underset{k}{\underset{\downarrow}{Y}}\ \underset{10M}{\downarrow}\right|n'l'm'>$$

8ـ گزینه (3) صحیح است

$$\Delta\ell=\ell-\ell'=k=1$$

باید m یکی داشته باشند $\qquad m=0,1$

9ـ گزینه (1) صحیح است

$$\vec{\ell}=1\qquad \vec{\ell}_{tot}=\vec{\ell}_1+\vec{\ell}_2$$

$$\vec{\ell}=1\qquad |1-1|\le\ell\le|1+1|$$

$$0\le\ell\le2$$

$$\ell=\underset{s}{\underset{\downarrow}{0}},\underset{p}{\underset{\downarrow}{1}},\underset{p}{\underset{\downarrow}{2}}$$

$$\vec{J}=\vec{\ell}+\vec{S}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\ell_{tot}=0 \quad \vec{J}=\vec{0}+\vec{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\to 2s+1=2\Rightarrow 3s_{2}^{1} \\
\ell_{tot}=1\to \vec{J}=\vec{1}+\vec{\frac{1}{2}}\Rightarrow \begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2}\end{Bmatrix}\to 2+1\Rightarrow 2P_{2} \\
\ell_{tot}=2+\vec{J}=\vec{2}+\vec{\frac{1}{2}}=\begin{Bmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{3}{2}\end{Bmatrix}\to 2+1=2\Rightarrow 3P_{0}
\end{array}\right\}$$

10ـ گزینه (2) صحیح است.

11ـ گزینه (4) صحیح است.

$$\begin{array}{l}\vec{S}_1=\vec{\frac{1}{2}}\\ \vec{S}_2=\vec{\frac{1}{2}}\end{array} \quad \vec{S}=\vec{S}_1+\vec{S}_2=\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\to 2S+1\begin{Bmatrix}1\\3\end{Bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}\vec{\ell}_1=\vec{1}\\ \vec{\ell}_2=\vec{1}\end{array} \quad \ell_{tot}=\underset{s}{\underset{\downarrow}{0}},\underset{p}{\underset{\downarrow}{1}},\underset{d}{\underset{\downarrow}{2}}$$

F مجاز نیست.

مبحث تکمیلی ریاضی

عملگر یکانی

عملگر $\hat{U}$ را یکانی (Unitary) گویند هرگاه : $UU^t = U^t = II$

نکته: چون $UU^{-1} = U^{-1}U = II$ پس شرط یونیتاری بودن عملگر U این است که:

$$U^t = U^{-1}$$

نکته: فرض کنید $U, U = e^{iH}$ یونیتاری باشدآنگاه H هرمیتی است

اثبات :

$$\left.\begin{aligned} U^t &= \left(e^{iH}\right)^t = e^{-iH^+} \\ U^{-1} &= \left(e^{iH}\right)^{-1} = e^{-iH} \end{aligned}\right. \rightarrow U^t = U^{-1}$$

$$e^{-iH^t} = e^{-iH} \Rightarrow H^t = H$$

تحول زمانی حالت اسپیونی یک ذره

فرض کنید حالت یک ذره با اسپین $\frac{1}{2}$ در $t = 0$ به صورت x_t باشد. چنانچه یک میدان مغناطیسی در راستای z به آن

واردشود هامیلتونی بر هم کنش عبارت است از :

$$H = -\frac{eg\mathbf{h}}{4mc}\vec{d}.\vec{b}$$

برای سادگی فرض کنید $\vec{B} = B\hat{K}$:

$$H = -\frac{eg\mathbf{h}b}{4mc}dz$$

که در آن $d_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

تعریف میکنیم

$$w = \frac{egb}{4mc}$$

$$\hat{H} = -\mathbf{h}w\hat{d}_z$$

حالت سیستم در هر لحظه t برابر است با :

$$\left|a>_t = e^{-i\hat{H}t/\hbar}\right|a>_{t=0} = e^{iwtd\hat{z}}x_t$$

نکته:

$$e^{iadz}\ x_\pm = e^{\pm ia}x_\pm$$

$$\left(1+iad_z+\frac{(ia)^2}{2!}d_z^2\right)x_\pm = \left(1\pm ia+\frac{(tia)^2}{2!}+....\right)x_\pm$$

سپس:

$$X(t) = e^{iwtd\,\hat{z}}x_t = e^{iwt}x_t$$

مثال) یک ذره در $t=0$ در حالت x_t قرار دارد، اگر $\vec{B}=Bi$ باشد. احتمال اینکه در لحظه t ذره در حالت $|x,+>$ باشد چقدر است؟

حل)

احتمال $\left|<x,+1\left|e^{-iwtd_x}\right|x+>\right|^2$

$$\hbar w = \frac{eg\hbar b}{4mc}$$

چون:

$$\left.\begin{array}{l} |x_1+> = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_+ + x_-) \\ |x_1-> = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_+ - x_-) \end{array}\right\} \rightarrow x_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|x,+>+|x,->\}$$

$$\Rightarrow <x,+\left|e^{-iwtd_x}\right|\frac{1}{\sqrt{2}}(|x,+>+|x,->)>$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{<x,+1\left|e^{-iwt}\right|x,+>+<x,+|e^{iwt}|x,->\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-iwt}$$

منابع

مکانیک کوانتوم ساکورایی

مکانیک کوانتوم گازیوروویچ

مکانیک کوانتوم گریفیتس

مکانیک کوانتوم زتیلی

مکانیک کوانتوم گرینر