# فیزیک (1)
# (مجموعه فیزیک)

مجموعه فیزیک

# فیزیک(1)

# فهرست مطالب

## فصل اول: فیزیک

برای اینکه قوانین فیزیک در تمام نقاط جهان به‌کار برده شوند لازم است که کمیت‌های مختلفی که این قوانین بر حسب آن‌ها تعریف می‌شوند، بر حسب یکاهای استانداردی تعریف شوند. این استانداردها باید اولاً در دسترس کسانی باشند که می‌خواهند استانداردهای ثانویه خود را مدرج کنند، ثانیاً با گذشت زمان یا تغییر در شرایط محیط، تغییرناپذیر باشند.

به‌طور کلی لازم نیست برای هر کمیت فیزیکی، استاندارد اندازه‌گیری تعریف کنیم، می‌توان بعضی از کمیت‌ها را بنیادی در نظرگرفت، و استاندارد سایر کمیت‌ها را از کمیت‌های بنیادی به دست آورد.

در جدول زیر یکاهای اصلی معرفی شده توسط دستگاه بین المللی یکاها و نحوه بیان آن‌ها آمده است[1]:

| نام | نماد | کمّیت | تعبیر |
|---|---|---|---|
| متر | m | طول | "متر طول مسیری است که نور در خلا در بازه زمانی 1/299792458 ثانیه طی می‌کند". <br> CGPMهفدهم (1983)97 ,Resolution 1, CR , |
| کیلوگرم | kg | جرم | "کیلوگرم یکای جرم است؛ برابر جرم نمونه بین‌المللی کیلوگرم". <br> CGPMسوم(1901, CR, 70) |
| ثانیه | s | زمان | "ثانیه برابر است با مدت 9192631770 ارتعاش تابشی (مشخص) که از ایزوتوپ معینی از اتم سزیم گسیل می‌شود". <br> CGPMسیزدهم (1967/68)103 ,Resolution 1; CR , <br> "این تعریف در مورد اتم سزیم در دمای 0 کلوین است". <br> CIPMدر 1997 |
| آمپر | A | جریان الکتریکی | "یک آمپر شدّت جریانی است که اگر از دو سیم نازک راست به طول بی‌نهایت که به فاصله یک متر و به موازات هم در خلأ قرار دارند، بگذرد، به هر متر از سیم‌ها نیروی $2\times10^{-7}$ نیوتون وارد شود". <br> CGPMنهم (1948) |
| کلوین | K | دمای ترمودینامیک | "یک کلوین برابر 273,16/1 دمای نقطه سه‌گانه آب است". <br> CGPMسیزدهم (1967/68)104 ,Resolution 4; CR , |
| مول | mol | مقدار ماده | "یک مول جرم دستگاهی است که تعداد اجزای سازنده آن (تعداد اتم، مولکول، یون، ...) برابر تعداد اتم‌های موجود در 0,012 کیلوگرم کربن 12 باشد؛ نماد آن «mol» است. |
| کاندلا | cd | شدت تابش | |

۱- ویکیپدیا

اگر بعضی ویژگی‌های فیزیکی را بخواهیم بر حسب یکاهای SI بیان کنیم، اعداد بسیار بزرگ یا بسیار کوچکی را به دست می‌آوریم. کنفرانس عمومی اوزان و مقادیر برای راحتی، پیشوندهای جدول زیر را توصیه کرده است[2]:

| $10^n$ | پیشوند | نماد | مقیاس کوچک | مقیاس بزرگ |
|---|---|---|---|---|
| $10^{24}$ | یوتا | Y | سپتیلیون | کادریلیون |
| $10^{21}$ | زتا | Z | سکستیلیون | تریلیارد (هزار تریلیون) |
| $10^{18}$ | اگزا | E | کوینتیلیون | تریلیون |
| $10^{15}$ | پتا | P | کادریلیون | بیلیارد (هزار میلیارد) |
| $10^{12}$ | ترا | T | تریلیون | بیلیون |
| $10^{9}$ | گیگا | G | بیلیون | میلیارد(هزار میلیون) |
| $10^{6}$ | مگا | M | میلیون | |
| $10^{3}$ | کیلو | k | هزار | |
| $10^{2}$ | هکتو | h | صد | |
| $10^{1}$ | دکا | da | ده | |
| $10^{0}$ | *(none)* | *(none)* | یک | |
| $10^{-1}$ | دسی | d | دهم | |
| $10^{-2}$ | سانتی | c | یک صدم | |
| $10^{-3}$ | میلی | m | هزارم | |
| $10^{-6}$ | میکرو | µ (u) | یک میلیونم | |
| $10^{-9}$ | نانو | n | میلیاردم | میلیاردم |
| $10^{-12}$ | پیکو | p | تریلیونم | میلیاردم |
| $10^{-15}$ | فمتو | f | کادریلیونم | بیلیاردیم |
| $10^{-18}$ | آتو | a | کوینتیلیونم | تریلیونم |
| $10^{-21}$ | زپتو | z | سکستلنیوم | تریلیاردم |
| $10^{-24}$ | یوکتو | y | سپتیلیونم | کادریلیونم |

[2] - ویکیپدیا

## 1-2- تحلیل ابعادی

به هر کمیت فیزیکی اندازه‌گیری یا محاسبه شده بعدی وابسته است، همانطور که استانداردهای اندازه‌گیری به صورت کمیت‌های اصلی تعریف می‌شوند، می‌توان مجموعه‌ای از ابعاد اصلی را بر مبنای استانداردهای اندازه‌گیری مستقل تعریف کرد. برای کمیت‌های مکانیکی، جرم، طول و زمان، بنیادی و مستقل هستند، بنابراین می‌توانند به عنوان ابعاد اصلی به کار روند. جرم را با M، طول با L و زمان را با T نشان خواهیم داد.

هر معادله باید به لحاظ ابعادی سازگار باشد، یعنی دو طرف آن باید بعد یکسان داشته باشند. توجه به ابعاد در هنگام نوشتن معادله‌ها می‌تواند به جلوگیری از خطا و اشتباه کمک کند. برای نشان دادن بعد از کروشه [] استفاده می‌کنیم.

به عنوان یک مثال از مفید بودن تحلیل ابعادی در حل مسائل، نیروی مرکزگرا را در نظر گرفته و تحلیل ابعادی می‌کنیم. در ابتدا باید بدانیم نیروی مرکزگرای F تابع کدام متغیرهای مکانیکی است. می‌دانیم که یک جسم متحرک می‌تواند سه ویژگی مهم داشته باشد: جرم m، سرعت v، و شعاع r مدار دایره‌ای آن. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$F \propto m^a v^b r^c$$

a، b و c ثابتهای عددی هستند که باید با تحلیل ابعادی مشخص شوند. می‌دانیم که یکای نیرو $Kg.m/s^2$ است و در نتیجه ابعاد آن برابر $[F]=MLT^{-2}$ است. بنابراین می‌توانیم معادله نیروی مرکزگرا بر حسب ابعاد را به صورت زیر بنویسیم:

$$[F]=[m^a][v^b][r^c]$$
$$MLT^{-2}=M^a(L/T)^b L^c$$
$$MLT^{-2}=M^a L^{b+c} T^{-b}$$

بر اساس سازگاری ابعادی، باید ابعاد اصلی در دو طرف یکسان باشند بنابراین با مساوی قرار دادن نماها داریم:

M نماهای ؛ $a=1;$

T نماهای ؛ $b=2;$

$b+c=1 \rightarrow c=-1$ L

در نهایت عبارت حاصل به صورت زیر خواهد بود:

$$F \propto \frac{mv^2}{r}$$

البته این نکته قابل توجه است که با استفاده از تحلیل ابعادی نمی‌توانیم اطلاعاتی درباره ثابت‌های بدون بعد موجود در روابط بدست آوریم.

**بردارها** :

بردار پاره خطی است جهت دار ، که طول آن معرف کمیت برداری و جهتش جهت کمیت مذکور است .

**کمیت :**

هر چیزی که قابل افزایش یا کاهش بوده و بتوان مقدار آن را با یک عدد مشخص کرد .

کمیت :

1)نرده‌ای یا اسکالر یا عددی　　　　2)برداری

**اسکالر :**

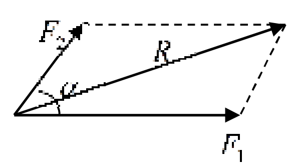
کمیت‌هایی هستند که فقط با بیان یک عدد مقدارشان مشخص می‌شود . مثال : طول، سطح، حجم، زمان، جرم، دما، چگالی، کار، انرژی، بار الکتریکی، اختلاف پتانسیل الکتریکی، شدت جریان الکتریکی، توان، فشار، شارمغناطیسی

**کمیت‌های برداری :**

کمیت‌هایی هستند دارای راستا (امتداد) جهت ،(سو)، نقطه اثر، (مبدأ) و بزرگی (مقدار یا اندازه) .

مثال : جا به جایی، سرعت ، شتاب، نیرو ، اندازهٔ حرکت ، ضربه ، گشتاور ، نیرو، شدت میزان جاذبه شدت میدان الکتریکی ، شدت میدان مغناطیسی .

**برآیند بردارها :**




$R^{\rightarrow} = F_1^2 + F_2^2 \quad \left|R^{\rightarrow}\right|^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2Cos\,a$

1)وقتی بردارهای F1 , F2 هم جهت باشند در این صورت α صفر است .　$(a \sim 0) \rightarrow |R| = F_1 + F_2$

2)وقتی بردارهای F1 , F2 در خلاف جهت هم هستند در این صورت α = 180 است .

$(a = 180) \rightarrow |R| = |F_1 - F_2|$

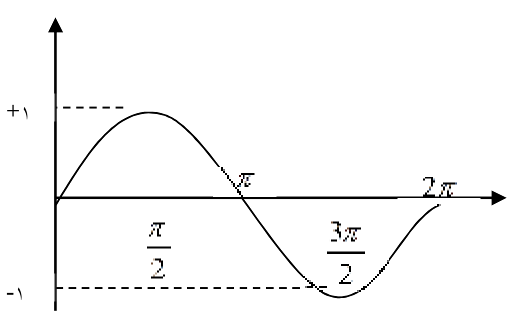
3)وقتی که F2 , F1 بر هم عمود باشند در اینصورت :

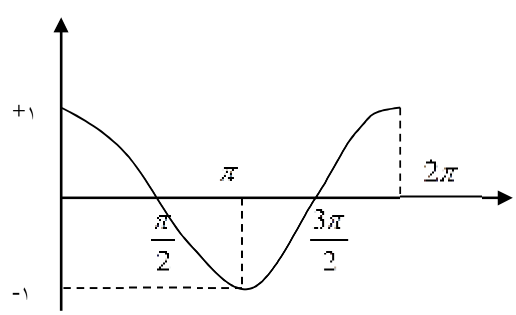
$(a = 90) \rightarrow R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$

4)وقتی که بردارها از نظر عددی یکسان باشند وقتی که بردارها با هم برابر باشند .

$$R = 2F\cos\frac{a}{2} \begin{cases} a = 120 \rightarrow R = F \\ a = 90 \rightarrow R = \sqrt{2}\,F \\ a = 60 \rightarrow R = \sqrt{3}\,F \end{cases}$$

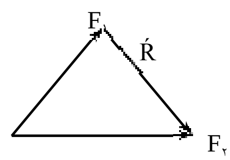
| x | Sin | Cos | tg | Cot |
|---|---|---|---|---|
| 30 | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{\frac{3}{2}}$ | $\sqrt{\frac{3}{3}}$ | $\sqrt{3}$ |
| 45 | $\sqrt{\frac{2}{2}}$ | $\sqrt{\frac{2}{2}}$ | 1 | 1 |
| 60 | $\sqrt{\frac{3}{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{\frac{3}{3}}$ |



**تفاضل بردارها :**

$$\vec{R}' = \vec{F}_2 - \vec{F}_1$$
$$|R'|^2 = F_1^2 + F_1^2 - 2F_1F_2Cos a$$




**نکته :**

اگر بردارها در جهت همدیگر باشند تفاضلشان می‌شود

$$O \xrightarrow{\to F1} {}_{F2}(a = 0) \to R = |F_1 - F_2|$$

اگر بردارها در جهت مخالف جهت همدیگر باشند تفاضلشان می‌شود .

$$_{F2}\leftarrow 0 \to_{F1} (a = 180) \to R' = F_1 + F_2$$

اگر بردارها در جهت عمود هم باشند تفاضلشان می‌شود .

$$(a = 90) \to R' = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

اگر بردار با هم برابر باشند تفاضلشان می‌شود .

$$R = 2FSin\frac{a}{2}\begin{cases} a = 120 \to R = \sqrt{3}\,F \\ a = 90 \to R = \sqrt{2}\,F \\ a = 60 \to R = F \end{cases}$$

**نکته :**

نسبت تفاضل به برآیند دو بردار مساوی از فرمول زیر محاسبه می‌شود .

$$\frac{R'}{R} = \tan\frac{a}{2}$$
$$R' = \frac{2FSin\frac{a}{2}}{2FCos\frac{a}{2}} + \tan\frac{a}{2}$$

**مثال :** دو نیروی مساوی با هم زاویهٔ 600 می‌سازند اگر برآیند این دو نیرو $10\sqrt{3}$ باشد هـر یـک از ایـن دو نیـرو چنـد نیوتن است .

$$R = 2F Cos\frac{a}{2}$$

$$10\sqrt{3} = 2\times F\times Cos\frac{60}{2}$$

$$10\sqrt{3} = 2\times F\times\frac{\sqrt{3}^2}{2} = F = 10N$$

$$R = 2F Sin\frac{a}{2}$$

برایند دو نیروی عمود بر هم $3\sqrt{5}$ نیوتن و اندازهٔ یکی از آنها دو برابر دیگری است اندازهٔ نیروی کوچکتر چند نیوتن است .

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \qquad 3\sqrt{5} = \sqrt{2F_2^2 + F_2^2}$$

$$F_1 = 2F_2 \qquad 3\sqrt{5} = \sqrt{5}F_2$$

دو نیروی $F', F$ بر همدیگر اثر می‌کنند برآیند این دو بر F عمـود و $\sqrt{3}$ برابـر آن اسـت نسـبت $F, F'$ چنـد اسـت ؟

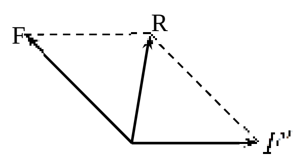
$$R = \sqrt{3}F$$

$$\vec{F'} = \vec{R} + \vec{F}$$

$$F' = \sqrt{R^2 + F^2}$$

$$F' = \sqrt{\left(\sqrt{3}F\right)^2 + F^2} = \sqrt{4F^2} = 2F$$

$$F' = 2F \qquad \frac{F'}{F} = 2$$




اگر تفاضل دو بردار با اندازهٔ هر یک از دو بردار برابر باشد زاویهٔ بین آن در چند درجه است ؟

$$R' = 2F\,Sin\frac{a}{2} \qquad R' = F \rightarrow R' = 2R'\,Sin\frac{a}{2}$$

$$Sin\frac{a}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{2} = 30^0 \rightarrow a = 60$$

هرگاه برآیند دو نیروی 16N و 10N برابر 6N باشند زاویهٔ بین امتداد دو نیرو چند درجه است ؟

( α = 180)

**نکته :**

اندازهٔ برآیند یا تفاضل دو بردار همواره عددی بین جمع اندازهٔ آن دو تفاضل اندازهٔ بین دو بردار است.

$$|F_1 - F_2| \le R \le F_1 + F_2$$
$$|F_1 - F_2| \le R' \le F_1 + F_2$$

**تست :**

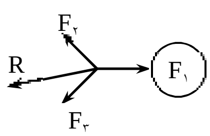
کدام دسته از نیروهای زیر ممکن است صفر شود ؟

1)5 و 3　　　　2)7 و 4 و2

3)5 و4 و 3　　　　4)7 و 3 و3


ضریب آنها دارای همان خاصیت می‌باشد .　　　عدد فیثاقورثی

برآیند سه نیرو زمانی صفر می‌شود . که اولاً یکی از نیروها متقابل با برآیند دو نیروی دیگر باشد ثانیاً هر نیـرو از مجمـوع دو نیروی دیگر کوچکتر و از تفاضل آنها بزرگتر باشد .



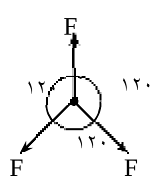

**نکته :**

هرگاه بردارها 3 عدد یکسان یا 3 عدد متوالی مثل 7 ، 6 ، 5 ، یا سه عدد زوج متوالی مثل 14 ، 12 ، 10 باشند برآ ینـد شان می‌تواند صفر شود تحت یک شرایط خاص

**برآیند دو نیروی متقابل :**

حالات استثناء :

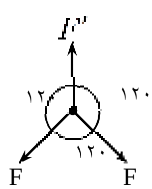
1)وقتی که سه بردار مساوی با هم زاویهٔ 1200 تشکیل دهند .




R همه

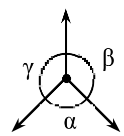
2)وقتی که روی بردار دوتای آنها با هم مساوی و زاویهٔ همشان با هم برابر باشد .

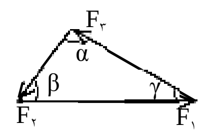
$$R = |F' - F|$$



3)وقتی که بردارهای ما غیر مشخصند هیچکدام مساوی نیستند .

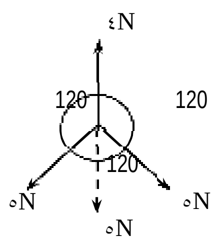
$$\frac{F_1}{Sin a}=\frac{F_2}{Sin b}=\frac{F_3}{Sin g}$$




**مثال:**سه نیرو مطابق شکل زیر بر جسمی وارد می‌شود اندازهٔ نیروی چهارمی که باید به بر جسم وارد شود تا جسم در حالت تعادل بماند چند نیوتن است ؟

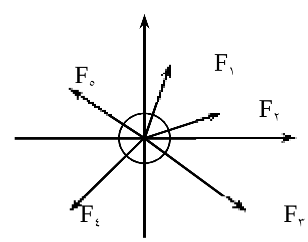
1 نیوتن به طرف بالا




**شرط تعادل :**

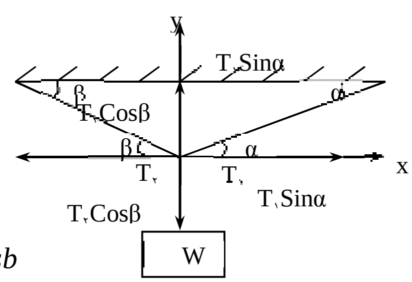
به منظور ایجاد تعادل باید برانید نیروهای وارد بر جسم در راستای محور x , y صفر باشد .

$$\sum Fx=0$$
$$\sum Fy=0$$




**مثال :** در شکل زیر وزنهٔ W به انتهای دو طناب کیسه بسته شده است کشش نخ T2 را محاسبه کنید .

$$T_1=\frac{WCos b}{Sin(a+b)}$$
$$T_2=\frac{WCos a}{Sin(a+b)}$$
$$\sum Fx=0\rightarrow \quad T_1Cos a=T_2Cos b$$
$$\sum Fy=0\rightarrow \quad T_1Sin a+T_2Sin b=W$$




**نکته :**

اگر α = β باشد T1 = T2 و مقدار آن از رابطه زیر بدست می‌آید. α با β برابر باشد

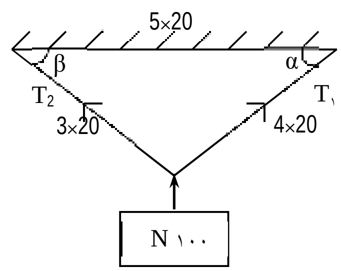
$$T_1=T_2=\frac{W}{2Sin a}$$

**مثال :**

$$W=100N\ ,\ a=b=30$$

$$T = \frac{100}{2Sin30} \to 100N$$

$$T_1 = \frac{100Cos}{Sin(a+b)}$$

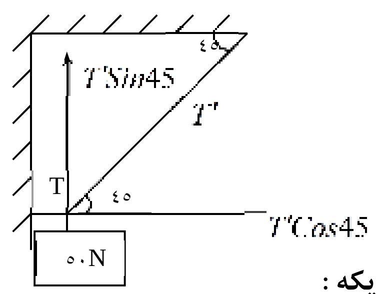



$$= \frac{100Cosb}{Sin(a+b)} \to T_1 = \frac{100 \times \frac{3}{5}}{1} = 60$$

$$Cosb = \frac{3}{5} \quad Sin(90) = 1$$

$$Cosa = \frac{4}{5} \quad T_2 = \frac{WCosa}{Sin(a+b)} \to T_2 = \frac{100 \times \frac{4}{5}}{1} = 80$$

در شکل مقابل نیروی کشش نخ افقی چند نیوتن است .




$$T = T'Cos45$$

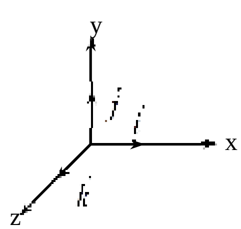
$$50 = T'Sin45 \to T' = \frac{100}{\sqrt{2}}$$

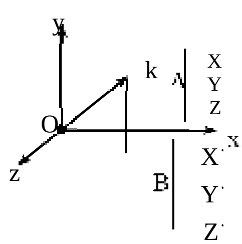
$$T = \frac{100}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 50N$$

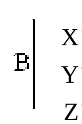
**بردار یکه :**

برداری است به طور قائم که روی محورهای x , y , z به ترتیب عبارتند از :

$\vec{K}, \vec{j}, \vec{i}$ که دو به دو بر هم عمودند .




$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{k} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{j}$$

اندازهٔ بردار r را از رابطه زیر بدست می‌آوریم :

$|r|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ اگر از مبدأ مختصات شروع شده باشد .

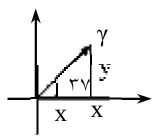
حالت کلی این فرمول

$$|r|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

اگر $\vec{\gamma}_1=2\vec{i}+3\vec{j}$ , $\vec{\gamma}_2=3\vec{i}-2\vec{j}$

$$\vec{g}_1+\vec{g}_2=5\vec{i}+\vec{j}$$

**مثال :** دو بردار $\vec{a}=4\vec{i}+\beta\vec{j}$ , $\vec{b}=\alpha\vec{i}+3\vec{j}$ مفروض است




اگر برآیند این بردارها بـا محـور x هـا زاویهٔ 370 بسازد نسبت $\frac{\alpha}{\beta}$ چقدر است ؟

$Sin\overline{37^\circ}=0/6$

$Cos\overline{37^\circ}=0/8$

$Tan\ 37=\frac{3}{4}$

$$\vec{r}=\vec{a}+\vec{b}=(\underbrace{4+a}_{x})\vec{i}+(\underbrace{b+3}_{y})\vec{j}$$

$$\tan a=\frac{y}{x}\rightarrow\frac{2}{4}=\frac{b+3}{4+a}\rightarrow 4b+13=12+3a\rightarrow\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$$

اسم یک بردار از موقعیت $A\left|\begin{matrix}a\\a'\end{matrix}\right.$ به موقعیت مختصات $B\left|\begin{matrix}b\\b'\end{matrix}\right.$

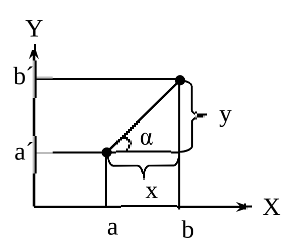
$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

$$\vec{r}=(b-a)\vec{i}+(b'+a')\vec{j}$$

$$|r|=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$|r|=\sqrt{(b-a)^2+(b'-a')^2}$$

$$Tan\,a=\frac{y}{x}=\frac{b'-a'}{b-a}$$




$B\left|\begin{matrix}a_2=a\\b_2=b\end{matrix}\right.$

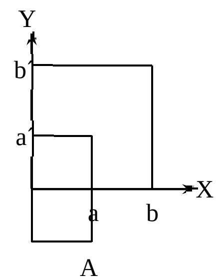
$A\left|\begin{matrix}X_1=1\\Y_1=-1\end{matrix}\right.$

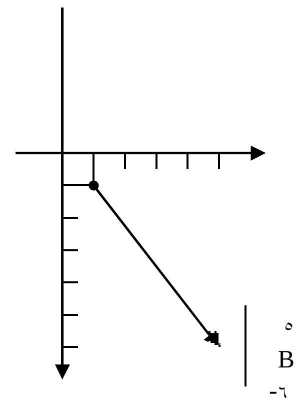
اگر مختصات ابتدای بردار $\vec{r}=4\vec{i}-5\vec{j}$ منطبق بر نقطهٔ باشد مختصات انتهای بردار و $\alpha$ , $\beta$ را پیدا کنید.

$$(\underbrace{b-a}_{x})\quad(\underbrace{b'-a'}_{y})$$

$$4=a-1\rightarrow a=5$$

$$-5=b-(-1)\rightarrow b=-6$$




**بردارها** :

الف)حاصلضرب داخلی: کمیتی است اسکالر یا نرده‌ای که حاصل آن یک عدد است که جواب یک نقطه است.

**مثال :**

$\vec{A}.\vec{B}=|A||B|\ \overline{Cosa}\ =$ ∂ƏN

$W=\vec{F}.\vec{D}:|F|\,|d|\ Cosa$

$f\ =\vec{B}\,.\vec{A}=|B|\,|A|\ Cosa$

$(2i+3j).(-3i+4j)=(2\times-3)+(-3\times4)=-18$

$2i-3j+4k\ \rightarrow$

**چند نکته مهم :**

(3) در حاصلضرب داخلی خاصیت جابه‌جایی وجود دارد.

(1) $\vec{i}-\vec{i}=\vec{j}-\vec{j}=\vec{k}.\vec{k}=1$

(2) $\vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{k}=\vec{i}.\vec{k}=0$

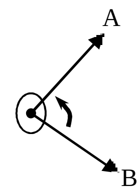
(3) $\vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{i}=0$ Ŭj $\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$

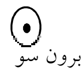
(4) در صورتی دو بردار بر هم عمودند که حاصلضرب داخلی‌شان صفر شود.

(4) $\vec{A}.\vec{B}=0\leftrightarrow A\perp B$

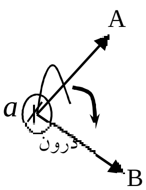
### حاصلضرب خارجی :

کمیتی است برداری که حاصل آن یک بردار است که به دوبردار دیگر عمود می‌باشد.




$$\vec{A}\times\vec{B}=|A||B|Sina$$
$$\Rightarrow \vec{B}\times\vec{A}=|B||A|Sina$$




$$A\times B\neq B\times A$$

**نکات :**

در جهت عقربه‌های ساعت

در خلاف عقربه‌های ساعت

$$(1)\qquad \vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$$

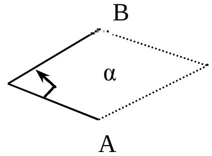
$$(2)\qquad \begin{cases}\vec{i}\times\vec{j}=+1 \quad \text{Ùj} \quad \vec{j}\times\vec{i}=-1\\ \vec{i}\times\vec{k}=+1 \quad \text{Ùj} \quad \vec{k}\times\vec{j}=-1\\ \vec{k}\times\vec{i}=+1 \quad \text{Ùj} \quad \vec{i}\times\vec{k}=-1\end{cases}$$

$$(3)\qquad \vec{A}\times\vec{B}\neq\vec{B}\times\vec{A}$$
$$\vec{A}\times\vec{B}=-\left(\vec{B}\times\vec{A}\right)$$

$$(4)\qquad \vec{A}\|\vec{B}\leftrightarrow\vec{A}\times\vec{B}=0$$

### جهت و راستای حاصلضرب خارجی دو بردار :

حاصلضرب خارجی دو بردار، برداری است عمود برصفحه حاصل از آن دو بردار که اندازهٔ آن برابر مساحت متوازی الاضلاع که توسط دو بردار تشکیل می‌شود.




$$\vec{P}=\vec{A}\times\vec{B}$$
$$|P|=?\sqrt{x^2+y^2}$$

جهت بردار حاصلضرب به گونه‌ای است که اگر 4 انگشت دست راست را در سوی بردار اول قرار دهـیم واز طـرف زاویـهٔ کوچکتر آن را بچرخانیم تا به سوی بردار دوم منتقل شود دراین صورت انگشت شست جهت بردار حاصلضرب را نشان می‌دهد.

**مثال :**

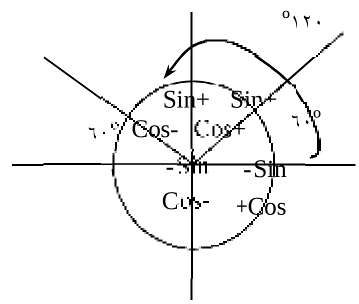
زاویهٔ بین دو بردار $\vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \sqrt{\frac{3}{2}}\vec{j}$ , $\vec{B} = \sqrt{\frac{3}{2}}\vec{i}$ کدام است؟

$$A.B = |A||B|Cos\,a \quad \rightarrow \quad Cos\,a = \frac{A.B}{|A||B|}$$

$$\vec{A}.\vec{B} = -\sqrt{\frac{3}{4}} \qquad Cos\,a = \frac{-\sqrt{\frac{3}{4}}}{1\times\sqrt{\frac{3}{4}}} = -\frac{1}{2}$$

$$|A| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = 1$$

$$|B| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0} = \sqrt{\frac{3}{2}} \qquad a = 120$$




**مثال :**

کار نیروی $\vec{F} = 10\vec{i} + 7/5\vec{j}$ در جابه‌جایی $\vec{d} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$ در سیستم SI چقدر است ؟

$$F.d = 120$$

$$\vec{A} = 10\vec{i} + 7/5\vec{j} \qquad \vec{A}\times\vec{B} = \vec{P} \qquad \begin{vmatrix} 10 & 7/5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = (7/5\times6) - (10\times8) = ?$$

$$\vec{B} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$$

$$\vec{A} = (ai + b\vec{j}) \qquad \vec{p} = (ba - ab')$$

$$\vec{B} = (a'i + b'y)$$

اگر بردار $A = 5\vec{i} + 3\vec{j}$ و بردار $B = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$ با هم موازی باشد نسبت $\frac{a}{b}$ چقدر است ؟

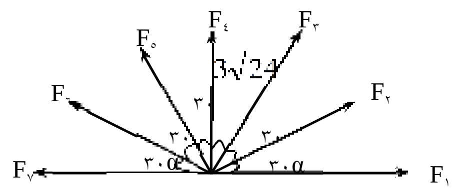
$\vec{A}\|\vec{B} = \vec{A}\times\vec{B} = 0$

$(3a-5b)=0 \rightarrow 3a=5b \qquad \frac{a}{b}=\frac{5}{3}$

$|F| = F_1 + F_2 + \sqrt{3}F$

$= 2F + \sqrt{3}F$

$= F(2+\sqrt{3})$



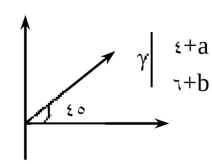

**دو بردار هم اندازه برآیند آنها $\sqrt{3}$ برابر تفاضلشان است زاویهٔ بینشان چقدر است؟**

**اگر بردار $\vec{A}=a\vec{i}+b\vec{j}$ , $\vec{B}=4\vec{i}+6\vec{j}$ , $\vec{A}.\vec{B}=38$ و برایند دو بردار A , B با محور x ها زاویهٔ ۴۵° بسازد a , b چقدر است ؟**

$\vec{g} = (4+a)\vec{i} + (6+b)\vec{j} \qquad \tan\alpha = \frac{6+b}{4+a} = 1$

$A.B = 4a + 6b = 38$

$\left.\begin{array}{l} 6+b = 4+a \\ 6a+4b = 38 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} a=5 \\ b=3 \end{array}$




### بردارهای مکان، سرعت و شتاب

در سینماتیک، می‌توان حرکت ذره را با استفاده از بردارهای مکان، سرعت و شتاب توصیف کرد. بنابراین می‌توان در هر زمان t، محل ذره را با سه مختصه x، y و z مشخص کرد. که سه مولفه بردار مکان $\vec{r}$ هستند:

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

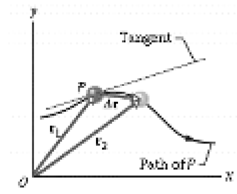
فرض می‌کنیم ذره در زمان $t_1$ در مکان $\vec{r}_1$ قرار دارد، این ذره در زمان $t_2$ به نقطه $\vec{r}_2$ از مسیرش می‌رسد، در اینصورت بردار جابه‌جایی $\Delta\vec{r}$ تغییر مکان در این بازه بوده و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

### سرعت

سرعت متوسط در هر بازه بصورت جابجایی (تغییر مکان) تقسیم بر بازه زمانی که تغییر مکان در آن صورت می‌گیرد تعریف می‌شود:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$




**نکته:** همانند جابجایی، سرعت متوسط در هر بازه فقط به مکان ذره در آغاز و پایان بازه بستگی دارد؛ و تابع این نیست که ذره سرعت بگیرد یا کند شود یا حتی جهتش را در آن بازه معکوس کند. دراینصورت اگر ذره به نقطه شروع حرکت بازگردد، سرعت متوسط آن صفر است.

با کوچک‌تر کردن بازه زمانی $\Delta t$ و میل دادن آن به سمت صفر، سرعت لحظه‌ای که جهت آن مماس بر مسیر ذره است بدست می‌آید:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

بنابراین با مشتق‌گیری از مولفه‌های بردار مکان، سرعت لحظه‌ای در آن مکان بدست می‌آید.

**شتاب**

در حرکت ذره، اندازه سرعت و جهت آن می‌تواند تغییر کند. تغییر سرعت بر حسب زمان را شتاب می‌نامند. بنابراین می‌توان شتاب متوسط را به‌صورت تغییر سرعت در واحد زمان تعریف کرد:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

همانند سرعت لحظه‌ای، شتاب لحظه‌ای را نیز می‌توان از حد معادله بالا برای بازه‌های زمانی بسیار کوچک به‌دست آورد:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

**نکته:** به طور کلی جهت شتاب رابطه‌ای با جهت سرعت $\vec{v}$ ندارد. $\vec{v}$ و $\vec{a}$ می‌توانند موازی، پادموازی، عمود بر هم، یا با هر زاویه‌ای نسبت به هم باشند.

**نکته۲:** چون $\vec{v}$ کمیتی برداری است، تغییر جهت آن، حتی بدون تغییر اندازه، باعث شتاب می‌شود. بنابراین حرکت با سرعت ثابت می‌تواند حرکت شتابدار باشد.

## حرکت با شتاب ثابت

حرکت یک بعدی و در امتداد محور $x$ را در نظر می‌گیریم، $a_x$ را مولفه $x$ بردار شتاب در نظر می‌گیریم، یعنی $a_x$ می‌تواند مثبت یا منفی باشد. سرعت اولیه ذره $v_{0x}(t=0)$ و مکان اولیه آن $x_0$ است، که هر دوی آنها نیز مولفه‌های $x$ بردارها بوده و در نتیجه می‌توانند مستقل از هم مثبت یا منفی باشند. در اینصورت روابط زیر را برای مکان و سرعت در زمان $t$ خواهیم داشت:

$$a_x = a_{av,x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_x - v_{0x}}{t-0}$$

برای شتاب ثابت، شتاب لحظه‌ای و متوسط همه جا باهم برابرند بنابراین داریم:

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

چون در این حالت سرعت ثابت است، سرعت میانگین در هر بازه با متوسط سرعت‌های اولیه و نهایی در آن بازه برابر است. بنابراین:

$$v_{av,x} = \frac{1}{2}(v_x + v_{0x})$$

بنابراین برای مکان رابطه زیر را بدست خواهیم آورد:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

## سقوط آزاد اجسام

در نقطه معینی نزدیک سطح زمین، همه اجسام بدون توجه به اندازه، شکل یا ترکیب خود، با شتاب یکسان سقوط می‌کند. این شتاب که با $g$ نشان داده می‌شود، شتاب سقوط آزاد یا شتاب ناشی از گرانی نامیده می‌شود. در حوالی سطح زمین اندازه $g$ تقریباً $9/8\ m/s^2$ است. در مورد مسائل مربوط به سقوط آزاد اجسام، امتداد سقوط آزاد را محور $y$ و جهت مثبت را رو به بالا در نظر می‌گیریم و به جای شتاب ثابت $a$ از $-g$ استفاده می‌کنیم. با در نظر گرفتن این فرضیات، معادله‌های سقوط آزاد اجسام عبارت‌اند از:

$$v_y = v_{0y} - gt$$
$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

**مثال:** مکان یک ذره توسط بردار $\vec{r} = t^3\hat{i} - 3t^2\hat{j} + 2t\hat{k}$ داده می‌شود، در لحظه $t=1$ زاویه بین بردارهای مکان و شتاب کدام است؟

**حل:**

مکان این ذره در لحظه t=1 برابر است با:

$$\vec{r} = t^3\hat{i} - 3t^2\hat{j} + 2t\hat{k} \xrightarrow{t=1} \vec{r}(t=1) = 1\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} \rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$$

شتاب ذره برابر است با مشتق دوم مکان یعنی:

$$\vec{a} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt}(3t^2\hat{i} - 6t\hat{j} + 2\hat{k}) = 6t\hat{i} - 6\hat{j}$$

شتاب ذره در لحظه t=1 برابر است با:

$$\vec{a}(t=1) = 6\hat{i} - 6\hat{j} \rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{36+36} = 6\sqrt{2}$$

از تعریف ضرب نقطه‌ای بردارها داشتیم:

$$\vec{a}.\vec{b} = ab\cos\phi$$

که در آن $\Phi$ زاویه بین دو بردار است، بنابراین در این مورد داریم:

$$\vec{a}.\vec{r} = |a||r|\cos\phi$$

$$\vec{a}.\vec{r} = (6t\hat{i} - 6\hat{j}).(t^3\hat{i} - 3t^2\hat{j} + 2t\hat{k}) = 6t^4 + 18t^2 \xrightarrow{t=1} 6 + 18 = 24$$

در نتیجه با جاگذاری مقادیر بدست آمده داریم:

$$\cos\phi = \frac{\vec{a}.\vec{r}}{|a||r|}$$

$$\cos\phi = \frac{24}{(6\sqrt{2})(\sqrt{14})} \rightarrow \phi = \cos^{-1}(\frac{2}{\sqrt{7}})$$

**نمونه سوالات تستی تحلیل ابعاد**

**۱- دوره نوسان یک نوسانگر غیر خطی با کمیت‌های جرم، ثابت نیروی بازگرداننده و دامنه متناسب است. دوره نوسان این نوسانگر متناسب با کدام گزینه می‌باشد؟**

1) $A^2 m/k$ 2) $A\sqrt{m/k}$ 3) $A^{-1}\sqrt{m/k}$ 4) $A^2 k^3/m$

**۲- دانشجویی می‌خواهد مساحت یک ورق کاغذ را محاسبه کند. او طول آن را** $l = 27/9\text{cm}$ **و عرض آن را** $w = 21/6\text{cm}$ **اندازه می‌گیرد. این دانشجو باید مساحت کاغذ را به چه صورتی ثبت کند؟**

1) $602/64\text{cm}^2$ 2) $602/6\text{cm}^2$ 3) $602\text{cm}^2$ 4) $603\text{cm}^2$

**۳- دانشجویی ضخامت یک ورق کاغذ را محاسبه می‌کند. او ضخامت بسته‌ای از ۸۰ ورق را با ورنیه اندازه می‌گیرد و** $l = 2/13\text{cm}$ **را بدست می‌آورد. برای محاسبه ضخامت یک ورق عمل تقسیم را انجام می‌دهد. رقم‌های بامعنی کدام یک از پاسخهای زیر صحیح است؟**

1) $0/2662\text{mm}$ 2) $0/266\text{mm}$ 3) $0/27\text{mm}$ 4) $0/3\text{mm}$

**۴- جسمی از ارتفاع $h$ رها می‌شود. هنگام برخورد به زمین، سرعتش با استفاده از ارتفاع $h$ و شتاب گرانش، تعیین می‌شود. فرمول چه ترکیبی از این کمیت‌ها باشد تا سرعت برخورد به زمین را به $h$ و $g$ مربوط کند؟**

1) $v \propto \sqrt{gh}$ 2) $v \propto gh$ 3) $v \propto (gh)^2$ 4) $v \propto \frac{g}{h}$

**۵- چه ترکیبی از واحد نیرو و یک یا چند تا از واحدهای اصلی (جرم، طول و زمان) برابر دیمانسیون انرژی می‌شود؟**

1) $E \propto Ft$ 2) $E \propto \frac{F}{t}$ 3) $E \propto Fx$ 4) $E \propto Fx^2$

**پاسخنامه سوالات تستی**

1- گزینه 1 صحیح است زیرا:

بعد جرم m برابر M، ثابت نیروی بازگرداننده k برابر $ML^{-2}T^{-2}$ و دامنه A برابر L می‌باشد. بعد دوره نوسان T برابر با T می‌باشد. در اینصورت داریم:

$$T \propto m^a k^b A^c$$

با نوشتن این معادله بر حسب ابعاد داریم:

$$[T]=[m]^a[k]^b[A]^c$$
$$T=M^a(ML^{-2}T^{-2})^b L^c$$
$$T=M^{a+b}L^{-2b+c}T^{-2b}$$

با مساوی هم قرار دادن نماهای طرفین خواهیم داشت:

$$-2b=1 \Rightarrow b=-1/2$$
$$a+b=0 \Rightarrow a=-b \Rightarrow a=1/2$$
$$-2b+c=0 \Rightarrow c=2b \Rightarrow c=1$$

در نهایت با جاگذاری نماهای بدست آمده در رابطه اصلی، دوره نوسان بصورت زیر بدست می‌آید:

$$T \propto m^{1/2}k^{-1/2}A^1$$
$$T \propto A\sqrt{m/k}$$

2- گزینه 2 صحیح است زیرا:

**نکته:** در تصمیم‌گیری درباره تعداد رقم‌های بامعنی چند قاعده ساده وجود دارد:

قاعده 1: با شمارش از طرف چپ و نادیده گرفتن صفرها، تمام رقم‌ها را تا اولین رقم مشکوک نگه می‌داریم.

قاعده 2: هنگام ضرب یا تقسیم، تعداد دقم‌های بامعنی در حاصل‌ضرب یا خارج قسمت نباید بیش از رقمهای بامعنی عامل با کمترین دقت باشد.

قاعده 3: در جمع و تفریق، کوچکترین رقم بامعنی مجموع یا تفاضل، همان محل نسبی را اشغال می‌کند که کوچکترین رقم‌های بامعنی کمیت‌هایی که باهم جمع یا از هم کم می‌شوند. در این مورد تعداد رقم‌های بامعنی اهمیت ندارد بلکه محل آنها حائز اهمیت است.

3- گزینه 2 صحیح است.

با توجه به نکته گفته شده در سوال پیش گزینه 2 صحیح می‌باشد.

4- گزینه 1 صحیح است.

با استفاده از تحلیل ابعادی داریم:

$$\begin{cases}[g]=\dfrac{[L]}{[T]^2}\\ [h]=[L]\end{cases}\Rightarrow [g][h]=\dfrac{[L]}{[T]^2}[L]\Rightarrow [g][h]=\dfrac{[L]^2}{[T]^2}$$

از طرف دیگر داریم:

$$[v]=\dfrac{[L]}{[T]}\Rightarrow [v]=\sqrt{[g][h]}\Rightarrow v\propto\sqrt{gh}$$

5- گزینه 3 صحیح است.

$$\begin{cases}[E]=\dfrac{[M][L]^2}{[T]^2}\\ [F]=\dfrac{[M][L]}{[T]^2}\end{cases}\Rightarrow \dfrac{[E]}{[F]}=\dfrac{\dfrac{[M][L]^2}{[T]^2}}{\dfrac{[M][L]}{[T]^2}}\Rightarrow \dfrac{[E]}{[F]}=[L]$$

در نهایت داریم:

$$[E]=[F][L]\Rightarrow E\propto Fx$$

**نمونه سوالات تستی بردار وحرکت یک بعدی**

**۱- قطاری از حالت سکون به راه می‌افتد و با شتاب ثابت به حرکت ادامه می‌دهد. در یک لحظه سرعتش m/s ۹ و پس از طی مسافت ۵۰ متر سرعتش به m/s ۱۵ می‌رسد. شتاب این قطار و مدت زمان لازم برای طی مسافت ۵۰ متر به ترتیب برابر کدام گزینه خواهد بود؟**

1) $4/11\ m/s^2$، 1/2s    2) $1/44\ m/s^2$، 4/2s    3) $4\ m/s^2$، 1 s    4) $1\ m/s^2$، ۲/4 s

**۲- شخصی از پنجره‌ای به بلندی ۱/۵ متر توپی را می‌بیند که به طرف پایین برمی‌گردد. اگر کل مدت زمانی که توپ در معرض دید شخص بوده است ۱ ثانیه باشد، توپ تا چه ارتفاعی از لبه بالایی پنجره بالاتر رفته است؟**

1) 1 متر    2) 0/0145 متر    3) 0/154 متر    4) 0/0154 متر

**۳- شخصی توپی را با سرعت اولیه ۱۲ متر بر ثانیه به سمت بالا پرتاب می کند با صرف نظر از مقاومت هوا، زمان رسیدن توپ به بالاترین نقطه، ارتفاع اوج و زمان رسیدن توپ در نقطه ای به فاصله ۵ متری بالای نقطه پرتاب برابر کدام گزینه خواهد بود؟**

1) 1/2 ثانیه، 7/3 متر، 0/53 ثانیه    2) 1 ثانیه، 7/3 متر، 53 ثانیه

3) 1/2 ثانیه، 3/7 متر، 1/9 ثانیه    4) 1 ثانیه، 3/7 متر، 1/9 ثانیه

**۴- جسمی دو قطعه مساوی ده متری متوالی از مسیرش، s، را با شتاب ثابت می‌پیماید. اگر اولین قطعه در مدت $t_1 = 1/06s$ و دومین قطعه در مدت $t_2 = 2/2s$ پیموده شود، شتاب جسم برابر کدام گزینه خواهد بود؟**

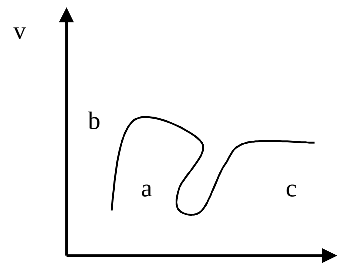
1) $3m/s^2$    2) $2m/s^2$    3) $-3m/s^2$    4) $-4m/s^2$

**۵- در شلیک افقی گلوله‌ها، سرعت گلوله را می‌توان با استفاده از فاصله انحراف به پایین آن نسبت به افق، $\Delta h$، در برد معین L پیدا کرد. در مسیر حرکت گلوله دو پرده قائم به طور متوالی قرار دارند. انحراف $\Delta h$ را می‌توان از سوراخ‌هایی که گلوله در این دو پرده ایجاد می‌کند بدست آورد. در صورتی که $\Delta h$ و L معلوم باشند و از مقاومت هوا صرفنظر شود، سرعت گلوله برابر کدام گزینه خواهد بود؟**

1) $v = L\sqrt{\frac{g}{2\Delta h}}$    2) $v = \Delta h\sqrt{\frac{g}{2L}}$    3) $v = L\sqrt{\frac{2\Delta h}{g}}$    4) $v = L\frac{2g}{\Delta h}$

۶- ذره‌ای در امتداد مسیر مسطح نشان داده شده در شکل زیر به طور یکنواخت حرکت می‌کند در کدام نقطه شتاب ذره بیشینه است؟

1) نقطه a  2) نقطه b  3) نقطه c  4) هیچکدام




۷- دو هواپیما به طور همزمان و در دو جهت عمود بر هم، از یک نقطه به پرواز در می‌آیند. سرعت هواپیمای اول $v_1 = 300 km/h$ و سرعت هواپیمای دوم $v_2 = 400 km/h$ است. فاصله بین دو هواپیما یعنی s چگونه با زمان افزایش می‌یابد؟

1) $200 km/h$  2) $100 km/h$  3) $20 m/s$  4) $500 km/h$

۸- یک گلوله سربی از بالای تخته شیرجه‌ای که در ارتفاع ۴/۹ متری بالای سطح آب دریاچه قرار دارد رها می‌شود. گلوله با سرعت معینی با آب برخورد می‌کند و سپس با همین سرعت، که ثابت باقی می‌ماند، به داخل دریاچه فرو می‌رود. گلوله ۵ ثانیه بعد از رها شدن به ته دریاچه می‌رسد. عمق دریاچه چقدر است؟

1) 39/2 متر  2) 29/3 متر  3) 30 متر  4) 23 متر

۹- شخصی روی پلی مشرف به یک بزرگراه ایستاده است و سیبی از بالای نرده‌های پل از دستش رها می‌شود. درست در همان لحظه قسمت جلوی کامیونی از زیر نرده‌ها عبور می‌کند. اگر سرعت کامیون $55 km/h$ و طول آن ۱۲ متر باشد، نرده باید در چه ارتفاعی بالای کامیون قرار داشته باشد تا سیب درست با قسمت عقب کامیون برخورد کند؟

1) 3 متر  2) 3/02 متر  3) 3/4 متر  4) 2/03 متر

**۱۰- یک قطار زیرزمینی از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و نیمه اول فاصله میان یک ایستگاه تا ایستگاه بعدی را با شتاب $1/2 m/s^2$ می‌پیماید. سپس نیمه دوم مسیر را با همان شتاب ولی با حرکت کندشونده طی می‌کند. اگر فاصله دو ایستگاه ۱۱۰۰ متر باشد. مدت مسافرت میان دو ایستگاه برابر کدام گزینه خواهد بود؟**

1) 30/3 ثانیه　　2) 60/6 ثانیه　　3) 32/23 ثانیه　　4) 56 ثانیه

**پاسخنامه سوالات تستی**

1- گزینه 2 صحیح است زیرا:

با استفاده از معادله مستقل از زمان برای حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1)$$

بنابراین با جاگذاری مقادیر عددی داده شده در صورت سوال برای شتاب داریم:

$$(15)^2 - (9)^2 = 2a(50) \Rightarrow a = 1/44 m/s^2$$

برای بدست آوردن مدت زمان طی مسافت 50 متر از رابطه مربوط به شتاب حرکت داریم:

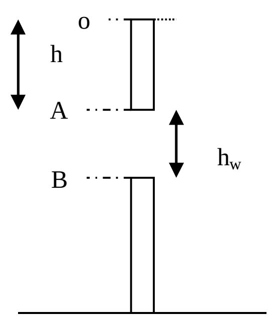
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta v}{a} = \frac{v_2 - v_1}{a}$$
$$\rightarrow \Delta t = \frac{15-9}{1/44} = 4/2s$$

2- گزینه 4 صحیح است.

با توجه به شکل رسم شده به حل مسئله می‌پردازیم:

مفروضات مسئله عبارتند از :

$$h_W = 1.5m$$
$$t_{AB} = t_{BA} = \frac{1}{2} = 0/5S$$




توپ حداکثر تا نقطهo بالا می‌رود و سپس به طرف پایین برمی‌گردد، اگر در مسیر برگشت، t مدت زمان لازم برای رسیدن توپ از نقطه o به A باشد، برای مسیر OA خواهیم داشت:

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

چون توپ به مدت 1 ثانیه در معرض دید شخص بوده است، پس مدت زمان رسیدن توپ از A به B برابر 0/5 ثانیه بوده است بنابراین معادله حرکت برای مسیر OB برابر است با:

$$h + h_W = \frac{1}{2}g(t + 0/5s)^2$$

از جاگذاری معادله مربوط به h در این معادله خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}gt^2 + h_w = \frac{1}{2}g(t+0/5)^2$$
$$\frac{1}{2}gt^2 + h_w = \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{2}gt + \frac{1}{2}g(\frac{1}{2})^2$$
$$\Rightarrow t = \left[h_w - \frac{g}{8}\right]/g \Rightarrow t = 0/056s$$

در نهایت برای ارتفاعی که توپ نسبت به لبه بالایی پنجره بالاتر ر فته از جانشانی مقدار $t$ بدست آمـده از رابطـه بـالا در رابطه مربوط به ارتفاع $h$ داریم:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = 0/0154m$$

3-گزینه 1 صحیح است زیرا:

زمان رسیدن توپ به اوج زمانی است که سرعت نهایی توپ برابر صفر خواهد بود بنابراین داریم:

$$t = \frac{v_0 - v}{g} = \frac{12-0}{9/8} = 1/2s$$

به همین ترتیب ارتفاع اوج نیز برابر است با:

$$y = \frac{v_0^2 - v^2}{2g} = \frac{(12)^2 - (0)^2}{2(9/8)} = 7/3m$$

زمان رسیدن توپ در نقطه‌ای به فاصله 5 متری بالای نقطه پرتاب برابر است با: با حل معادله درجه دوم، زمانهای متوالی رسیدن توپ به این نقطه بدست می‌آید:

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$4/9t^2 - 12t + 5 = 0$$
$$t = 0/53s$$
$$t = 1/9s$$

4- گزینه 3 صحیح است:

با استفاده از روابط مربوط به سینماتیک داریم:

در 10 متر اول حرکت برای مسافت طی شده داریم:

$$x_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2}a t_1^2$$

در 10 متر دوم، چون حرکت با شتاب ثابت است، سرعت اولیه جسم برابر می‌شود با:

$$v = a t_1 + v_0$$

همچنین در این حالت مسافت طی شده برابر است با:

$$x_2 = (at_1 + v_0)t_2 + \frac{1}{2}at_2^2$$

اما از صورت سوال داریم:

$$x = x_1 = x_2$$

بنابراین با حذف $v_0$ از این دو معادله خواهیم داشت:

$$x = (at_1 + (\frac{x}{t_1} - \frac{1}{2}at_1))t_2 + \frac{1}{2}at_2^2$$

بنابراین در نهایت خواهیم داشت:

$$a = \frac{2x(t_1 - t_2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)}$$

بنابراین با جاگذاری مقادیر داده شده در صورت سوال داریم:

$$a = \frac{2(10)(1/06 - 2/2)}{(1/06)(2/2)(1/06 + 2/2)} = -3m/s^2$$

5- گزینه 1 صحیح است زیرا:

مسافت افقی‌ای که گلوله طی می‌کند برابر است با:

$$L = v_{0x}t$$

اما از طرفی برای ارتفاعی که گلوله سقوط کرده است داریم:

$$\Delta h = \frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t$$

اما چون گلوله بصورت افقی شلیک شده است سرعت اولیه آن در راستای $y$ برابر صفر خواهد بود. از روی معادله بالا داریم:

$$t = \sqrt{\frac{2\Delta h}{g}}$$

از جاگذاری زمان لازم برای طی مسافت $\Delta h$، در رابطه مربوط به مکان افقی داریم:

$$L = v_{0x}\sqrt{\frac{2\Delta h}{g}}$$

بنابراین در نهایت برای سرعت گلوله داریم:

$$v = L\sqrt{\frac{g}{2\Delta h}}$$

6- گزینه 1 صحیح است زیرا: از آنجایی که شتاب ذره برابر شیب منحنی سرعت ذره می‌باشد بنابراین هر چه انحنای منحنی بیشتر باشد یعنی اینکه شتاب ذره بیشتر خواهد بود بنابراین در نقطه a که انحنای منحنی بیشترین مقدار است شیب ذره بیشینه است.

7- گزینه 4 صحیح است.

فاصله بین دو هواپیما برابر خواهد بود با:

$$\Delta x = vt$$

که اندازه سرعت دو هواپیما نسبت به هم برابر است با:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{(300)^2 + (400)^2} = 500$$

بنابراین فاصله دو هواپیما از هم برابر است با:

$$\Delta x = 500 \times 1 = 500 km/h$$

8- گزینه 1 صحیح است:

زمانی که طول می‌کشد که گلوله سربی از تخته به سطح آب برسد برابر است با:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \to t^2 = \frac{2h}{g} = \frac{2(4/9)}{(9/8)} = 1s$$

بنابراین مدت زمانی که طول کشیده تا گلوله از سطح آب به ته دریاچه برسد برابر است با:

$$\Delta t = 5 - 1 = 4s$$

چون سرعت گلوله در طی حرکت ثابت باقی مانده است بنابراین سرعت اولیه گلوله در هنگام داخل شدن در آب برابر است با:

$$v = gt \to v = (9/8)(1) = 9/8 m/s$$

بنابراین عمق دریاچه برابر خواهد بود با:

$$h_2 = vt \to h_2 = (9/8)(4) = 39/2 m$$

9- گزینه 2 صحیح است.

از روابط مربوط به سقوط آزاد داریم:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \to t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

این زمان مربوط به رسیدن سیب به سطح زمین می‌باشد.

اما برای زمان حرکت اتومبیل داریم:

$$x = vt_2 \rightarrow t_2 = \frac{x}{v}$$

برای اینکه سیب با قسمت عقب اتومبیل برخورد کند باید: $t_1 = t_2$

بنابراین داریم:

$$t_1 = t_2 \rightarrow \frac{2h}{g} = \frac{x^2}{v^2} \Rightarrow h = \frac{gx^2}{2v^2}$$

بنابراین با جاگذاری مقادیر داده شده در صورت سوال داریم:

$$h = \frac{(9/8)(12)^2}{2(55 \times \frac{36}{10})} = 3/02m$$

10- گزینه 2 صحیح است.

برای بدست آوردن مدت زمان طی نیمه اول مسیر داریم:

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \rightarrow t^2 = \frac{d}{a}$$

با جاگذاری مقادیر بدست می‌آوریم:

$$t_1 = \sqrt{\frac{1100}{1/2}} = 30/3s$$

اما برای نیمه دوم مسیر هم همین روابط را داریم، زیرا مدت زمانی که طول می‌کشد که قطار با شتاب مثبت از حالت سکون به سرعت دلخواه$v$ برسد برابر است با مدت زمانی که طول می‌کشد که قطار از سرعت $v$ با شتاب منفی به حالت سکون برسد بنابراین داریم:

$$t_2 = \sqrt{\frac{d}{a}} = 30/3s$$

بنابراین مدت زمان طی فاصله دو ایستگاه برابر است با:

$$t = t_1 + t_2 = 60/6s$$

## فصل دوم: سینماتیک یک بعدی و دو بعدی

حرکت در حالت کلی در سه بعد ممکن است:

1- حرکت تک بعدی : ساده ترین حرکت ، حرکت بر روی خط راست است.

در این حرکت جابه جائی فاصله بین مبدا و مقصد است $\Delta \vec{r} = x_2 - x_1$ و سرعت آهنگ تغییر مکان ذره نسبت به زمان است.

$$\bar{V}' = \frac{dx}{dt}$$

و در این حرکت چون یک بعدی است کلیه کمیت ها اسکالر هستند و از روابط برداری اســتفاده نمــی کنــیم. در بررســی فیزیکی دو کمیتی باید ابتدا متوسط آن را محاسبه کرد سپس با کوچک کردن بازه تغییرات و میل دادن آن به صفر آنــرا به لحظه ای تبدیل کنیم که در این بحث بازه زمانی را باید تغییر داد.

که این روش توسط نیوتن ابداع شد که در واقع علم حساب دیفرانسیل از اینجا شروع شد.

**سرعت متوسط :**

برابر است با تغییرات جابه جائی محل بر روی تغییرات زمان محل . $\vec{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ پس سرعت لحظه ای برابراست با :

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

**شتاب متوسط :**

برابر است با تغییرات سرعت نسبت به تغییرات زمان. $\bar{a} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ پس شتاب لحظه ای برابر خواهد بود با :

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt} = \ddot{x}$$

حال با حل معادلات بالا با فرض ثابت بودن $a$ :

که از ترکیب دو معادله بالا معادله مستقل از زمان بدست می آید :

حال اگر بخواهیم از معادله (1) شتاب را حذف کنیم :

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}at^2+v_o t+x_o & (1)\\ V=at+V_o & (2)\\ V^2-V_o^2=2a(\Delta x) & \\ x=x_o+(\frac{V+V_o}{2})t & \end{cases}$$

**مثال:** متحرکی $\frac{2}{5}$ مسیر خود را با سرعت $20\frac{m}{s}$ و مابقی را با سرعت $60\frac{m}{s}$ می پیماید سرعت متوسط متحرک چند متربرثانیه است؟

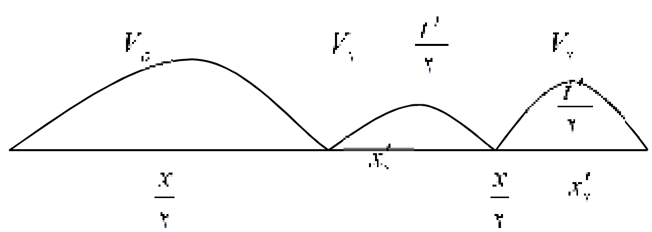
1) $\frac{200}{3}$ 2) $\frac{100}{3}$ 3) $\frac{400}{3}$ 4) $\frac{50}{3}$

$$\bar{V}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}x}{t_1+t_2}=\frac{x}{\frac{\bar{x}_1}{V_1}+\frac{\bar{x}_2}{V_2}}=\frac{x}{\frac{2/5\,x}{20}+\frac{3/5\,x}{60}}=\frac{300x}{9x}=\frac{100}{3}m/s$$

**مثال:** ذره ای بر روی یک مسیر مستقیم نصف مسیری را با سرعت $V_o$ طی می کند، باقیمانده مسیر را در نصف زمان باقیمانده با سرعت $V_1$ و در نصف زمان دیگر با سرعت $V_2$ طی می کند. سرعت متوسط ذره در کل مسیر کدام است؟

1) $\frac{V_o+V_1+V_2}{3}$ 2) $\frac{V_o(V_1+V_2)}{V_o+V_1+V_2}$

3) $\frac{2V_o(V_1+V_2)}{2V_o+V_1+V_2}$ 4) $\frac{2V_o(V_o+V_1+V_2)}{2V_o+V_1+V_2}$



$$\bar{V}=\frac{x_1+x_2}{t+t'}$$

$$x_1=\frac{x}{2}=V.t\Rightarrow t=\frac{x}{2V_o}$$

$$x_2=\frac{x}{2}=V_1\frac{t'}{2}+V_2\frac{t'}{2}\Rightarrow t'=\frac{x}{V_1+V_2}$$

$$x_1'=V_1\frac{t'}{2}\ ,\ x_2'=V_2\frac{t'}{2}$$

$$\bar{V}=\frac{x}{\frac{x}{2V_o}+\frac{x}{V_1+V_2}}=\frac{2V_o(V_1+V_2)}{2V_o+V_1+V_2}$$

**حرکت در راستای قائم** :

این حرکت مانند حرکت بر روی خط راست است با این تفاوت که $x$ به $y$ تبدیل خواهد شد و $a$ به $g\pm$ تبدیل خواهد شد که اگر سوی بالای محور $y$ ها را مثبت بگیریم آنگاه $-g$ را به جای $a$ قرار خواهیم داد.

توجه : در حرکت در راستای قائم مهم ترین نکته این است که در نقطه اوج سرعت صفر است.

$$V_{\text{اوج}}=0 \quad \Rightarrow t_{\text{اوج}}=\frac{V_o}{g} \quad \Rightarrow t_{\text{محل}}=2t_{\text{اوج}} \quad \Rightarrow y_{\text{اوج}}=\frac{V_o^2}{2g}$$

حال اگر دو گلوله پرتاب شود دو حالت داریم که اولاً سمت یکدیگر حرکت کنند $V_1+V_2$ و اگر هم راستا حرکت کنند $V_1-V_2$ خواهد بود.

**مثال :** دو جسم به فاصله زمانی یک ثانیه از حالت سکون و از ارتفاع مساوی به طور آزاد سقوط می کنند. چند ثانیه بعد از رها شدن جسم اول ، فاصله دو جسم به 10 متر می رسد؟

1) $0/52$    2) $1/52$    3) $1/26$    4) $0/48$

$$V_{o1}=0$$
$$V_{o2}=0 \ \Rightarrow y=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}\times 10\times(1)=5\,m$$

سرعت در لحظه رها شدن جسم (1)

$$V_2^2-V_1^2=2gh \Rightarrow V_2^2=2(10)(5)=100 \Rightarrow V_2=10$$

$$y_1=\frac{1}{2}gt^2+V_o t+y_o=\frac{1}{2}(10)t^2+10t+5=5t^2+10t+5$$

$$y_2=\frac{1}{2}gt^2+V_o t+y_o=\frac{1}{2}(10)(t^2)=5t^2$$

$$Dy=y_1-y_2=10m \Rightarrow 5t^2+10t+5-5t^2=10 \Rightarrow 10t=5 \Rightarrow t=\frac{1}{2}$$
$$t'=t+1=1/5$$

**مثال :** جسمی از حال سکون سقوط می کند و یک چهارم مسیر حرکت را در ثانیه آخر می پیماید. ارتفاع سقوط تقریباً چند متر است؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$

1) $146$    2) $73$    3) $36/5$    4) $292$

اگر کل زمان طی شده $n$ باشد $\Leftarrow$ $x_n=(\frac{2n-1}{2})g$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gn^2$$

$$x_n = \frac{1}{4}h \Rightarrow \frac{1}{8}\ g\,n^2 = (\frac{2n-1}{2})g \Rightarrow n^2 = 8n-4 \Rightarrow n^2 - 8n + 4 = 0$$

$$n = \frac{8 \pm \sqrt{64-16}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{2} \rightarrow n = 2 \pm 2\sqrt{3} \Rightarrow n = 5/4$$

$$h = \frac{1}{2}g(5/4)^2 \cong 146$$

**مثال :** گلوله ای با سرعت $700 m/s$ به سوی هدفی که در فاصله 30متری قرار دارد شلیک مـی شـود. چـه ارتفـاعی در بالای هدف را باید نشانه بگیریم تا گلوله به هدف بخورد؟

$$35 = 700t \Rightarrow t = \frac{0/1}{200}s$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_o t \Rightarrow -\frac{1}{2}\times 10(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{40}m$$

باید محاسبه شود.

* **مثال:** از سطح زمین گلوله ای را با سرعت $25\,m/s$ به بالا پرتاب می کنیم. این گلوله در مدت 2 ثانیه دو بار از مقابل پنجره ای می گذرد ارتفاع پنجره از زمین چند متر است؟ $(g = 10)$

1) $27/25$  2) $27/5$  3) $26/5$  4) $26/25$

از لبه پنجره تا ارتفاع اوج برابر یک ثانیه است. $V_o = 25\,m/s$

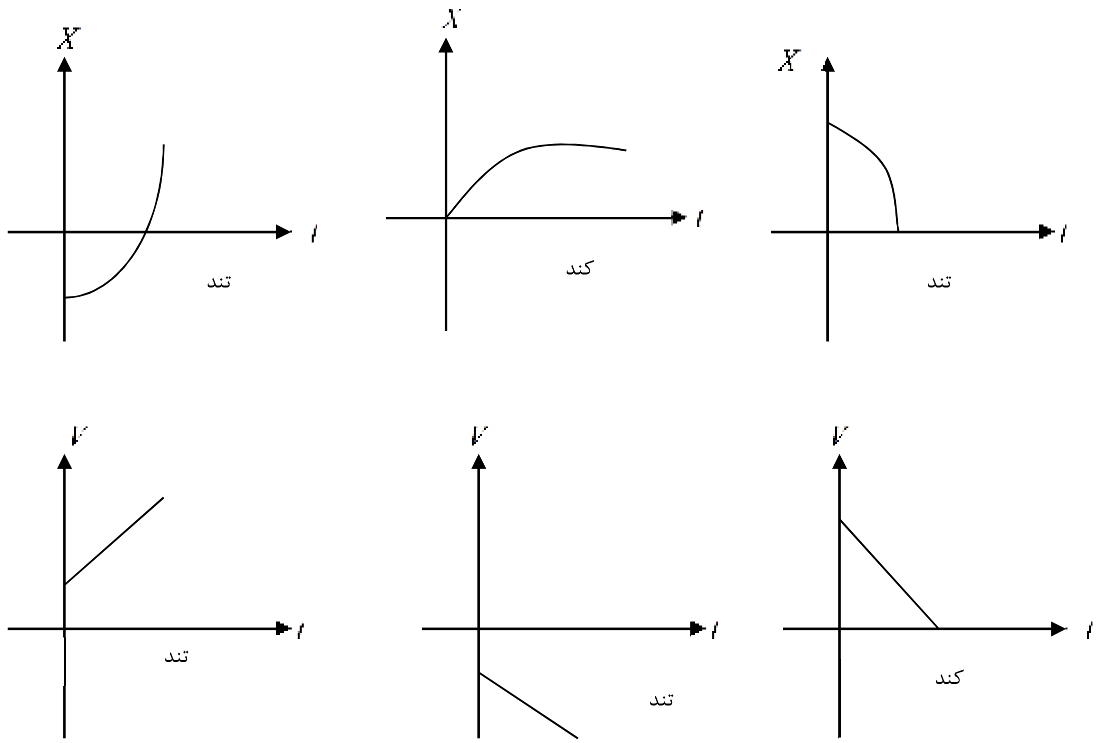
در ارتفاع اوج $V^2 = 0$

$$V_2 = -gt + V_1$$

$$V_1 = gt = 10m/s \Rightarrow V_1^2 - V_o^2 = 2gh \Rightarrow 100 - 625 = 2(-10)h \Rightarrow h = 26/25$$

**نکته :** سطح زیر نمودار $V-t$ برابر جابه جائی و سطح زیر نمودار $a-t$ برابر سرعت است.

**توجه :** اگر $aV > 0$ حرکت تند شونده و اگر $aV < 0$ باشد حرکت کند شونده خواهد بود . فقط در نمودارها صعودی یـا نزولی بودن را توجه داشته باشید اگر پایین نمودار باشیم به سمت پایین تند شونده و اگر بالای نمودار باشیم بـالا بـرویم تند شونده است و در دو حالت دیگر بر عکس $(V-t)$ و برای نمودار $(X-t)$ اگر پایین ، بالا رود تند شونده و اگر بـالا ، بالا رود و یا پایین ، پایین رود کند شونده .




**حرکت پرتابی :**

حرکت پرتابی هم دو بعدی است و هم سه بعدی که ما اینجا حرکت دو بعدی را بررسی خواهیم کرد.

اولین نکته که باید توجه داشته باشیم این است که سرعت در راستای محور $X$ ها در همه جا یکسان است $V_{oX} = V_X$ برابر خواهدبود و در راستای $y$ معادلات حرکت سقوط آزاد را خواهیم داشت با یک سری تغییرات کوچک $V_{oY} = V_o$ و $V_y = V$ . و نکته دیگر این است که شتاب در راستای محور $X$ ها صفر خواهد بود و شتاب در راستای محور $y$ ها برابر $-g$ خواهد بود سپس معادلات حرکت برابر خواهد بود با :

$$\begin{cases} X = V_o \cos a \, t \\ a_X = 0 \\ R_{\text{برد}} = \dfrac{V_o^2 \sin 2a}{g} \end{cases}$$

از ترکیب $x$ و $y$ خواهیم داشت :

$$y = \frac{-gx^2}{2V_o^2 \cos^2 a} + x \tan a + y_o$$

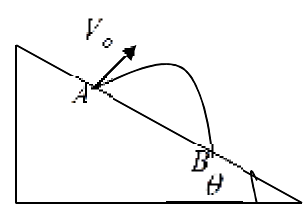
در سهمی ها کاربرد دارد

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}gt^2+v_o\sin a\, t+y_o \\ V_y^2-V_{oy}^2=2g\Delta y \\ V_y=-gt+V_{oy} \\ y_{\text{اوج}}=\frac{V_o^2\sin^2 a}{2g} \\ t_{\text{اوج}}=\frac{V_o\sin a}{g} \\ t_{\text{محل}}=\frac{2V_o\sin a}{g} \end{cases}$$

**مثال :** پرتابه ای از بالای تپه ای مطابق شکل ، عمود بر سطح تپه پرتاب شده است. اندازه سرعت اولیه $V_o$ چند $m/s$ است؟ (از مقاومت هوا چشم پوشی شود و $\sin q=\frac{3}{5}$ و $AB=75\,m$ و $g=10$)

1) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$  2) 10  3) 15  4) 20

$$\begin{cases} y=x\tan a\,\frac{-gx^2}{2v_o^2\cos^2 a} \\ x_o=AB\cos q \\ y_o=-AB\sin q \end{cases} \quad \begin{array}{l} \sin q=\frac{3}{5}\Rightarrow\cos q=\frac{4}{5} \\ \sin^2 q+\cos^2 q=1 \\ \cos^2 q=\frac{16}{25}\Rightarrow\cos q=\frac{4}{5} \end{array} \Rightarrow$$




$$-AB\sin q=(AB\cos q)\tan(\frac{p}{2}-q)-\frac{g(AB\cos q)^2}{2V_o^2\cos^2(\frac{p}{2}-q)}\Rightarrow-\sin q=\cos q\cot q-\frac{gAB\cot^2 q}{2V_o^2}$$

$$-\frac{3}{5}=\frac{4}{5}\times\frac{4}{2}-\frac{10}{2V_o^2}\times75\times(\frac{4}{3})^2\Rightarrow V_o^2=400\Rightarrow V_o=20$$

**توجه :** زاویه بین بردار سرعت پرتابه و شتاب پرتابه قبل از اوج در حال کاهش است .

**توجه :** با توجه به اینکه $y=\frac{V_o^2\sin^2 a}{2g}$ است زمانی max خواهد شد که $a=90^\circ$ باشد و چون برد پرتابه برابر $R=\frac{V_o^2\sin 2a}{g}$ است زمانی max خواهد بود که زاویه $a=\frac{p}{4}$ باشد.

**توجه :** در نقطه اوج $V = V_{oX}$ است.

**مثال :** سرعت اولیه پرتابه ای 3 برابر سرعت پرتابه در اوج است. زاویه پرتاب چند درجه است؟

$$V_{oX} = V_o \cos a \Rightarrow \cos a = \frac{V_{oX}}{V_o} = \frac{V_{oX}}{3V_{oX}} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \cos^{-1}\frac{1}{3}$$

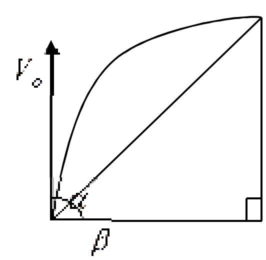
$$V_o = 3V_{oX}$$

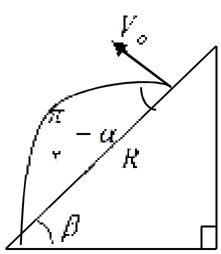
**نکته :** $\tan a = \frac{4y}{R}$ که $a$زاویه پرتاب نسبت به افق است.

در پرتاب های روی سطح شیبدار برد برابر است با یکی از حالت های زیر :

$$R = \frac{2V_o^2 \cos(a+b)\sin a}{g\cos^2 b}$$

max برد $a + \frac{b}{2} = \frac{p}{4}$

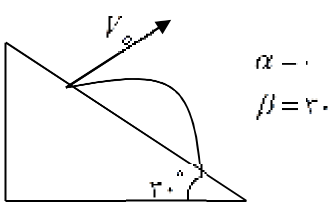



از بالا به پایین پرتاب شود

$$R = \frac{2V_o^2 \cos a \sin(a+b)}{g\cos^2 b}$$

**مثال :** گلوله ای با سرعت اولیه $20m/s$با زاویه قائم نسبت به سطح تپه از روی تپه ای که شیب آن نسبت بـه افـق $30^\circ$ است شلیک می شود. برد پرتابه چقدر است؟




$$R = \frac{2V_o^2 \cos a \sin(a+b)}{g\cos^2 b} = \frac{2\times 400\cos(0)(\sin(0+30))}{g\cos^2 30} = \frac{40}{\frac{3}{2}} = \frac{80}{3}m$$

در پرتاب افقی به نکات زیر باید توجه کرد :

اولاً $V.y=0$ است و $V_y$ در حال پایین آمدن در حال افزایش خواهد بود و مقدار سرعت در هر لحظه برابر $V=\sqrt{V_o^2+g^2t+2}$ و به این نکته هم باید توجه داشت که زمان رسیدن پرتابه به زمین اصلاً به سرعت اولیه بستگی ندارد زیرا $t^2=\frac{\Delta y}{-\frac{1}{2}g}$ است.

**مثال :** گلوله ای را از ارتفاع $40m$ زمین با سرعت افقی $10m/s$ پرتاب می کنیم :

الف) گلوله چند ثانیه بعد به زمین برخورد می کند؟

ب) برد گلوله چقدر است؟

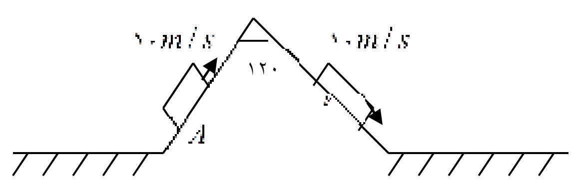
$V_{ax}$ $V_o$

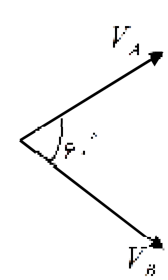
$$t^2=\frac{\Delta y}{-\frac{1}{2}g}=\frac{-45}{-\frac{1}{2}\times 10}=9\Rightarrow t=3\,s$$

$$R=r_o\times t=V_o\times t=10\times 3=30m$$

**مثال :** متحرکی مطابق شکل در مدت 2 ثانیه از نقطه $A$ به نقطه $B$ می رسد. بزرگی شتاب متوسط متحرک در این مدت کدام است؟

1) صفر　　2) $5\sqrt{3}$　　3) 5　　4) $10\sqrt{3}$

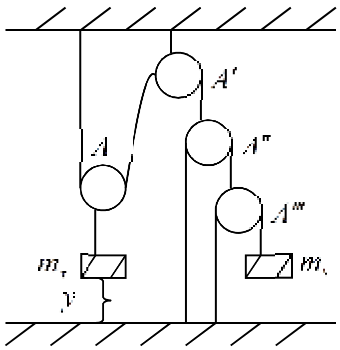



$$\Rightarrow|V_B-V_A|=\sqrt{V_B^2+V_A^2-2V_AV_B\cos 60}=\sqrt{100+100-100}=10m/s$$

$$\overline{a}=\frac{|V_B-V_A|}{t}=\frac{10}{2}=5\,m/s^2$$

**مثال :** در دستگاه نشان داده شده در شکل زیر جابه جائی $m_2$ بر حسب زمان به صورت $y=\frac{1}{2}at^2$ است. شتاب رو به پایین $m_1$ برابر است با :




1) $2a$

2) $4a$

3) $6a$

4) $8a$

**نکته :** مسافتی که قرقره متحرک طی می کند دو برابر مسافت قرقره ثابت است.

پس اگر $m_2$ به اندازه $y$ پایین بیاید $A'$ به اندازه $2y$ و $A''$ به اندازه $4y$ و $A'''$ به اندازه $8y$ پایین می آید.

پس جسم $m_1$ شتابش رابطه مستقیم دارد و برابر $8a$ خواهد بود .

$y=\frac{1}{2}a+2\Rightarrow$

## تست های طبقه بندی شده فصل دوم

**۱- توپی از ارتفاع h رها شده به سطح زمین برخورد می کند. تندی برخورد با زمین ۰/۷ تندی قبل از برخورد آن است. ارتفاعی که توپ بالا می رود برابر است با:**

1) 0/49 h　　2) 0/7 h　　3) h　　4) 1/4 h

**۲- راننده ترنی که با سرعت $V_1$ حرکت می کند، در لحظه ای در مقابل خود ترنی باری را دید که با سرعت ثابت $V_2$ ($V_2 < V_1$) و در فاصله d از ترن حرکت می کند و تصمیم گرفت با شتاب a ترمز نماید تا ترن برخورد نکند. بنابراین متوجه شد که در هر صورت با ترن باری تصادف خواهد کرد، زمان لازم برای برخورد دو ترن برابر کدام است؟**

1) $\frac{V_1-V_2+\sqrt{(V_1-V_2)^2-2ad}}{a}$　　2) $\frac{V_1-V_2}{a}$

3) $\frac{\sqrt{(V_1-V_2)^2-2ad}}{a}$　　4) $\frac{V_1-V_2-\sqrt{(V_1-V_2)^2-2ad}}{a}$

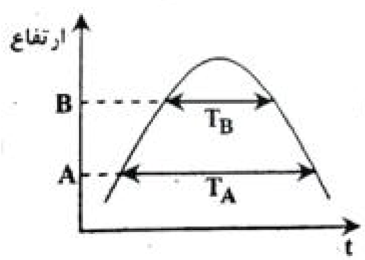
**۳- برد پرتابه ای دو برابر ارتفاع اوج آن است، تانژانت زاویه پرتاب آن کدام است؟**

1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$　　2) 1　　3) $\sqrt{3}$　　4) 2

**۴- پرتابه ای را مطابق شکل پرتاب کرده ایم. چنانچه $T_A$ و $T_B$ زمان عبور پرتابه از دو نقطه مفروض بر خطوط افقی باشند، مقدار شتاب گرانشی، g کدام است؟**

1) $\frac{8h}{T_A^2+T_B^2}$　　2) $\frac{8h}{T_A^2-T_B^2}$

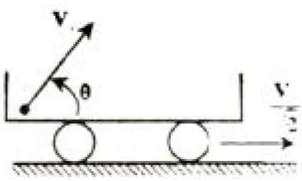
3) $\frac{2h}{T_A^2-T_B^2}$　　4) $\frac{2h}{T_A^2+T_B^2}$




**۵- انرژی جنبشی یک پرتابه در نقطه اوجش یک چهارم انرژی جنبشی آن ر نقطه پرتاب است. با فرض ناچیز بودن مقاومت هوا زاویه پرتاب این پرتابه کدام است؟**

1) 30 درجه　　2) 45 درجه　　3) 60 درجه　　4) $tg^{-1}4$

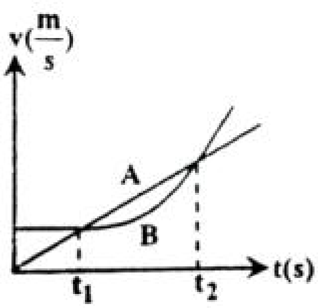
6- از روی واگنی که با تندی ثابت $\frac{V_0}{\sqrt{2}}$ در جاده مستقیمی در حرکت است. گلوله ای با سرعت اولیه $V_0$ و زویه $\theta_0$ نسبت به نظر ساکن در واگن پرتاب می شود. زاویه $\theta_0$ چقدر باشد تا از دید ناظر ساکن بر روی زمین، برد گلوله بیشینه باشد؟ (سرعت واگن همواره ثابت است.)



1) $\theta_0 = 45$     2) $tg\,\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

3) $\sin\theta_0 - \cos\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$     4) $\cos\theta_0 - \sin\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

۷- نمودار سرعت – زمان دو متحرک $A$ و $B$ مطابق شکل زیر است. اگر بزرگی سرعت متوسط آن ها بین دو لحظه $t_1$ و $t_2$ به ترتیب $V_A$ و $V_B$ باشد، کدام رابطه درست است؟



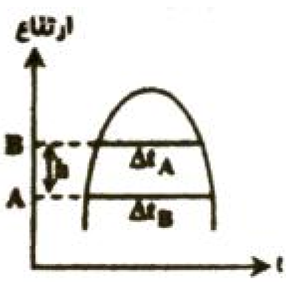

1) $V_B \geq V_A$

2) $V_B < V_A$

3) $V_B \leq V_A$

4) $V_B > V_A$

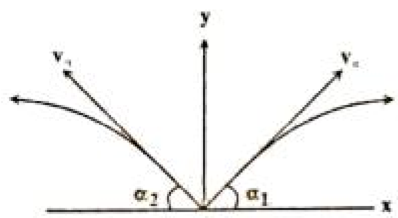
۸- در شکل مقابل نمودار ارتفاع یک پرتابه نسبت به زمان رسم شده است. چه رابطه ای میان شتاب جاذبه g، فواصل زمانی $\Delta T_A$ و $\Delta T_B$ و اختلاف ارتفاع نقاط A و B ، (h) برقرار است؟




1) $g = \frac{8h}{\Delta T_A^2 - \Delta T_B^2}$     2) $g = \frac{h}{\Delta T_A^2 - \Delta T_B^2}$

3) $g = \frac{\Delta h}{\Delta T_A^2 + \Delta T_B^2}$     4) $g = \frac{h}{\Delta T_A^2 + \Delta T_B^2}$

۹- دو جسم ، همزمان و با سرعت اولیه یکسان $(V_0)$ از نقطه $x = y = 0$ با زوایای مختلف $\alpha_1$ و $\alpha_2$ نسبت به افق مطابق شکل زیر پرتاب می شوند فاصله آنها از یکدیگر پس از گذشت زمان t برابر است با :




1) $2V_0\cos\left(\frac{\alpha+\alpha}{2}\right)t$     2) $V_0\cos\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)t$

3) $2V_0\cos(\alpha_1+\alpha_2)t$     4) $V_0\cos(\alpha_1+\alpha_2)t$

**۱۰- سنگی تحت زاویه ۳۰ نسبت به افق پرتاب می شود. انرژی جنبشی سنگ در آغاز پرتـاب ۶۰ ژول بـوده است. اگر از مقاومت هوا صرفنظر شود انرژی جنبشی در بالاترین نقطه مسیر آن چند ژول است؟**

1) 15    2) 35    3) 45    4) 55

**۱۱- دو جسم به فاصله زمانی یک ثانیه ازحالت سکون و از ارتفاع مساوی به طور آزاد سقوط می کننـد. چنـد ثانیه بعد از رها شدن جسم اول، فاصله دو جسم به ۱۰ متر می رسد؟**

1) 0/52    2) 1/52    3) 1/26    4) 0/48

**۱۲- یک دیسک که در صفحه قائم قرار گرفته است، در طول وتر هایی که از نقطه $A$ رسم شده اند ، چندین شیار دارد(مطابق شکل)، چند جسم در این شیار ها به طور همزمان از نقطه $A$ شروع به لغزیدن به طرف پایین می کنند، زمان رسیدن هر یک از آنها به لبه دیسک، ازکدام رابطه به دست می آید؟( $a$ زاویه هریک ازشیارها با قطر $AB$ و $X$ طول هر یک از وترها فرض شود. از اصطکاک و مقاومت هوا صرفنظر می شود، $g$ شتاب ثقل است).**

1) $t=\sqrt{\dfrac{2X}{g\cos a}}$    2) $t=\sqrt{\dfrac{2X}{2g\cos a}}$

3) $t=\sqrt{\dfrac{2X}{g\cos a}}$    4) $t=\dfrac{X}{2g\cos a}$

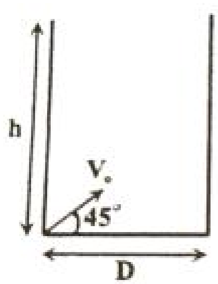

**۱۳- اتومبیلی به وزن $13000N$ باسرعت $80\frac{km}{h}$ در حرکت است. راننده ترمز می کندو اتومبیـل پـس از طـی مسافت $6m$ می ایستد. نیروی ترمز چند نیوتن است؟ $g=10\frac{m}{s^2}$**

1) $5200N$    2) $5260N$    3) $10400N$    4) $10500N$

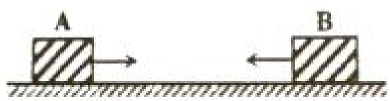
**۱۴- چاهی به عمق $h$ و عرض $D$ در اختیار داریم. گلوله ای به جرم $m$ را با زاویـه $45°$ نسـبت بـه افـق و بـا سرعت $V_0$ از یک گوشه چاه پرتاب می کنیم. این گلوله پس از ۲۰ بار برخورد با دیواره های چاه، از چاه خـارج می شود. حداقل مقدار $D$ چقدر است؟(برخورد بین گلوله و دیواره چاه الاستیک است)**

1) $\frac{h}{20}$    2) $\frac{h}{10}$

3) $\frac{h}{5}$    4) $h$



**۱۵- پرتابه ای را مطابق شکل به نحوی پرتاب می کنیم که در نقطه $A$ بر روی سطح شیب دار ثابتی فرود آید و سپس بر روی ضلع $AB$ سطح شیبدار به پایین بلغزد. سرعت اولیه $V_0$ و زاویه $\theta$ به ترتیب کدامند؟**




1) $\operatorname{arctg}(1)\,,\ \sqrt{2gl}$  2) $\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\right),\ \sqrt{gl}$

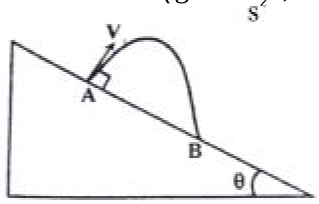
3) $\operatorname{arctg}(2)\,,\ \sqrt{5gl}$  4) $\operatorname{arctg}(3)\,,\ \sqrt{\frac{5gl}{2}}$

**۱۶- دو متحرک $A$ و $B$ روی یک خط مستقیم به سمت یکدیگر در حرکت اند. تندی متحرک $A$، $16\frac{m}{s}$ و تندی متحرک $B$، $8\frac{m}{s}$ است. لحظه ای که فاصله دو متحرک از هم $45m$ است هر دو ترمز می کنند. متحرک $A$ با شتاب ثابت $2\frac{m}{s^2}$ و متحرک $B$ با شتاب $4\frac{m}{s^2}$ ترمز می کنند پس از چند ثانیه از شروع به ترمز، دو متحرک به یکدیگر برخورد می کنندو تندی متحرک $B$ در لحظه برخورد تقریبا کدام است؟**


1) $2/8s$ و صفر  2) $13/2s$ و صفر

3) $4\frac{m}{s}\,,\ 3s$  4) $12\frac{m}{s}\,,\ 5s$

**۱۷- پرتابه ای از بالای تپه ای مطابق شکل ، عمود بر سطح تپه پرتاب شده است. اندازه سرعت اولیه $V_0$ چند $\frac{m}{s}$ است؟ (از مقاومت هوا چشم پوشی شود و $\left(g=10\frac{m}{s^2}\,,\ AB=75m\,,\ \sin\theta=\frac{3}{5}\right)$**




1) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$  2) 10

3) 15  4) 20

**۱۸- ذره ای بر روی یک مسیر سهمی شکل به معادله $y=\frac{x^2}{4}$ حرکت می کند. شتاب مماسی این ذره در نقطه $x=2m$ کدام است؟ (از اصطکاک بین ذره و مسیر صرف نظر کنید)**

1) $\frac{g}{2\sqrt{2}}$  2) $\frac{g}{\sqrt{2}}$  3) $g$  4) $g\sqrt{2}$

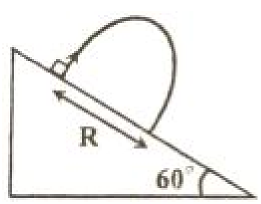
۱۹- گلوله $m_1$ را در حضور مقاومت هوا و گلوله $m_2$ را در غیاب نیروی مقاومت هوا، به طور همزمان از سطح زمین به سوی بالا پرتاب می کنیم اگر ارتفاع نهایی گلوله ها یکسان و برابر $h$ باشد ، کدام گزینه درست است؟

1) $m_1$ زودتر به ارتفاع $h$ می رسد.
2) $m_2$ زودتر به ارتفاع $h$ می رسد.
3) هر دو با هم به ارتفاع $h$ می رسند.
4) $m_2$ زودتر به زمین باز می گردد.

۲۰- یک توپ بسکتبال به قطر $30cm$ به سمت حلقه ای افقی به قطر $60cm$ پرتاب می شود. اگر توپ بدون برخورد به حلقه از درون آن بگذرد ، کمترین مقدار زاویه بین راستای حرکت توپ و افق کدام است؟

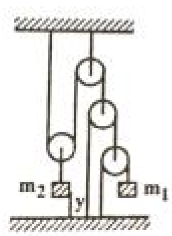
1) صفر
2) $15^\circ$
3) $30^\circ$
4) $60^\circ$

۲۱- گلوله ای با سرعت $V_0$ با زاویه قائم نسبت به سطح تپه از روی تپه ای که شیب آن نسبت به افق $60^\circ$ است شلیک می شود. برد پرتابه ، $R$، برابر است با :



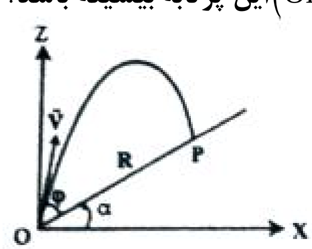

1) $4\frac{V_0^2}{g}$
2) $4\sqrt{3}\frac{V_0^2}{g}$
3) $2\sqrt{3}\frac{V_0^2}{g}$
4) $\frac{4\sqrt{3}}{3}\frac{V_0^2}{g}$

۲۲- در دستگاه نشان داده شده در شکل زیر، جابجایی $m_2$ بر حسب زمان به صورت $y=\frac{1}{2}at^2$ است. شتاب رو به پایین $m_1$ برابر است با :




1) $2a$
2) $4a$
3) $6a$
4) $8a$

۲۳- پرتابه ای با سرعت اولیه $\vec{V}_0$ و با زاویه $\varphi$ نسبت به سطح شیبداری که خود با افق زاویه $\alpha$ می سازد در صفحه $XOZ$ و از مبدا $O$ شلیک می گردد. زاویه $\varphi$ چقدر باشد تا برد $\left(\overline{OP}=R\right)$ این پرتابه بیشینه باشد؟




1) $\varphi=45^\circ$
2) $\varphi=45^\circ-\frac{\alpha}{2}$
3) $\varphi=45^\circ-\alpha$
4) برد پرتابه $\left(\overline{OP}=R\right)$ بیشینه ندارد.

**۲۴- ذره ای بر روی یک مسیر مستقیم نصف مسیری را با سرعت $V_0$ طی می کند، باقیمانده مسیر را در نصف زمان باقیمانده با سرعت $V_1$ و در نصف زمانی دیگر با سرعت $V_2$ طی می کند. سرعت متوسط ذره در کل مسیر کدامست؟**

1) $\frac{V_0+V_1+V_2}{3}$ 2) $\frac{V_0(V_1+V_2)}{V_0+V_1+V_2}$ 3) $\frac{2V_0(V_1+V_2)}{2V_0+V_1+V_2}$ 4) $\frac{2V_0(V_0+V_1+V_2)}{2V_0+V_1+V_2}$

**۲۵- ذره ای با تندی $V$ در صفحه ی $xy$ روی یک مسیر دایره ای به شعاع $R$ و به مرکز مبدا مختصات حرکت می کند. کدام یک از گزینه های زیر در مورد حرکت این ذره صحیح است؟**

**($(a_x, a_y), (V_x, V_y), (x, y)$ به ترتیب مولفه های شتاب ، سرعت و مکان ذره در لحظه ی دلخواه $t$ هستند.)**

1) $V^2 = x\left[\frac{v_x a_y + v_y a_x}{v_y}\right]$ 2) $V^2 = x\left[\frac{v_x a_y - v_y a_x}{v_y}\right]$

3) $V^2 = y\left[\frac{v_x a_y + v_y a_x}{v_x}\right]$ 4) $V^2 = y\left[\frac{v_x a_y - v_y a_x}{v_x}\right]$

**۲۶- پرتابه ای از ارتفاعی بالاتر از سطح زمین ، در غیاب مقاومت هوا ، در لحظه ی $t=0$ باسرعت اولیه $V_0$ به صورت افقی (موازی سطح زمین) پرتاب می شود. شعاع انحنای مسیر در لحظه ی دلخواه $t$، قبل از برخورد به زمین چقدر است؟**

1) $\frac{V_0^2}{g}$ 2) $\frac{V_0^2+g^2t^2}{g}$ 3) $\frac{(V_0^4+g^4t^4)^{\frac{1}{2}}}{g}$ 4) $\frac{(V_0^2+g^2t^2)^{\frac{3}{2}}}{V_0 g}$

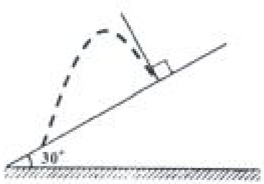
**۲۷- سنگی از بام ساختمانی به طور قائم به طرف پایین پرتاب می شود. سنگ از مقابل پنجره ای که ۱۴ متر پایین تر از بام است با سرعت $22\frac{m}{s}$ می گذرد و ۲/۸ ثانیه پس از پرتاب به زمین می رسد. ارتفاع ساختمان چند متر است؟ $g=(9/8\frac{m}{s^2})$**

1) 52/5 2) 60/5 3) 78/5 4) 81/5

۲۸- شخصی از پنجره ای به بلندی $1/5\mathrm{m}$ توپی را می بیند که به طرف بالا صعود می کند و بعد به پایین بر می گردد. اگر کل مدت زمانی که توپ در معرض دید بوده یک ثانیه باشد، توپ چند متر از لبه فوقانی پنجره بالاتر رفته است؟ $g=(9/8\frac{m}{s^2})$

1) 1/515 2) 0/150 3) 0/015 4) 0/055

۲۹- پرتابه ای با سرعت اولیه $V_0$ بر روی یک سطح شیب دار پرتاب می شود. زاویه سطح شیبدار نسبت به افق $30^0$ است. اگر در لحظه ی فرود ، مسیر حرکت پرتابه بر سطح شیبدار عمود باشد ، برد پرتابه بر روی سطح شیبدار کدام است؟




1) $\frac{4}{7}\frac{V_0^2}{g}$ 2) $\frac{3}{4}\frac{V_0^2}{g}$

3) $\frac{4}{5}\frac{V_0^2}{g}$ 4) $\frac{4}{3}\frac{V_0^2}{g}$

۳۰- دو متحرک یکی بر روی محور $x$ و دیگری بر روی محور $y$ با سرعت ثابت در حرکتند. اگردر لحظه ی $t=0$ مکان و سرعت متحرک اول به ترتیب $-2\hat{i}$ و $3\hat{i}$ و مکان وسرعت متحرک دوم به ترتیب $-4\hat{j}$ و $\hat{j}$ باشند، در چه لحظه ای فاصله ی دو متحرک کمترین مقدار ممکن خواهد بود؟ (واحد ها در دستگاه SI است.)

1) $t=1$ 2) $t=2$ 3) $t=4$ 4) $t=5$

۳۱- معادله تغییر مکان جسمی به جرم $2\mathrm{kg}$ نسبت به زمان در دستگاه *SI* به صورت $x=-t^2+4t^3$ است ، توان لحظه ای این جسم در $t=1\mathrm{s}$ چند وات است؟

1) 13 2) 29 3) 584 4) 44

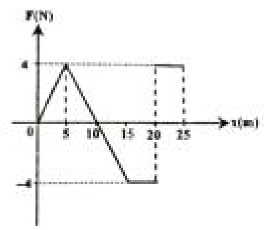
۳۲- سرعت قایقی در آب ساکن $10\frac{km}{h}$ است و قایق در عرض رودخانه ای به پهنای $2\mathrm{km}$ حرکت می کند. سرعت آب $6\frac{km}{h}$ است. قایقران جهت قایق را طوری تنظیم می کند که به نقطه ی روبه روی نقطه ی آغاز حرکت در ساحل دیگر برسد. چند دقیقه طول می کشد تا قایق به ساحل روبه رو برسد؟

1) 7/5 2) 10/4 3) 15 4) 30

۳۳- بالونی با شتاب رو به بالای $6\frac{m}{s^2}$ صعود می کند. در لحظه ای که سرعت رو به بالای آن $3\frac{m}{s}$ است لامپی از سقف بالون که $2m$ بالاتر از کف آن قرار دارد می افتد. مدت زمان حرکت لامپ از سقف تا کف بالون چند ثانیه است؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$

1) 0/5     2) 0/6     3) 0/75     4) 1

۳۴- شکل مقابل نمودار نیرو – مسافت جسمی به جرم $2kg$ که در مبداء از حال سکون شروع به حرکت می کند را نشان می دهد. سرعت جسم در ۱۶/۵ متری از مبداء چند $\frac{m}{s}$ است؟




1) 2     2) 4

3) 6     4) 8

**پاسخنامه تست های طبقه بندی شده در فصل دوم**

1) گزینه «1»

برای حل این مسئله کافی است بین پارامتر های قبل و بعد از برخورد با زمین ارتباط برقرار کنیم:

$V'=\sqrt{2gh'} \Rightarrow V'=0/7V=0/7\sqrt{2gh}$ در هنگام صعود و $V=\sqrt{2gh}$ در هنگام فرود

$H$: ارتفاع اولیه

$h'$: ارتفاع بالا آمدن

$$h'=\frac{V'^2}{2g}=\frac{(0/7)^2(2gh)}{2g}=0/49h$$

2- گزینه «4»

$$y=\frac{1}{2}at^2+v_ot \to d=-\frac{1}{2}at^2+vt=-\frac{1}{2}at^2+(v_1+v_2)t$$

$$\frac{1}{2}at^2-(v_1-v_2)t+d=0 \longrightarrow t=\frac{(v_1-v_2)\pm\sqrt{(v_1-v_2)^2-2ad}}{a}$$

اگر $d=0$ باشد برخورد در $t=0$ رخ می دهد یعنی علامت منفی فقط قابل قبول است.

3- گزینه «4»

$\alpha$: زاویه اولیه پرتابه

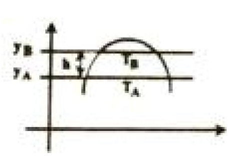
$$R=\frac{V_o{}^2\sin 2a}{g} \qquad h=\frac{V_o{}^2\sin^2 a}{2g} \qquad R=2h \longrightarrow \frac{V_o{}^2\sin 2a}{g}=\frac{2V_o{}^2\sin^2 a}{2g}$$

برد پرتابه

$$\Rightarrow \sin 2a=\sin^2 a \Rightarrow 2\sin a\cos a=\sin^2 a \Rightarrow tg\,a=2$$

4- گزینه «2» .

$$y_A=-\frac{1}{2}gt_A{}^2+V_ot_A \Rightarrow y_A-V_ot_A+\frac{1}{2}gt_A{}^2=0$$



$$\begin{cases} t_{1A}=\dfrac{V_o+\sqrt{V_o^{\,2}-2gy_A}}{g} \\ t_{2A}=\dfrac{V_o-\sqrt{V_o^{\,2}-2gy_A}}{g} \end{cases} \Rightarrow T_A=t_{1A}-t_{2A}=\frac{2}{g}\sqrt{V_o^{\,2}-2gy_A} \quad ; \quad T_B=\frac{2}{g}\sqrt{V_o^{\,2}-2gy_B}$$

$$T_A^{\,2}-T_B^{\,2}=\frac{4}{g^2}\left[V_o^{\,2}-2gy_A-V_o^{\,2}+2gy_B\right]=\frac{4}{g^2}(2g)(y_B-y_A)\Rightarrow T_A^{\,2}-T_B^{\,2}=\frac{8h}{g}\Rightarrow g=\frac{8h}{T_A^{\,2}-T_B^{\,2}}$$

5- گزینه «3»

چون سرعت پرتابه همیشه مماس به مسیر حرکت آن است در نقطه اوج که ماکزیمم ارتفاع مسیر است سرعت پرتابه فقط مولفه افقی دارد.

در نقطه اوج $\vec{V}_1=V_o\cos\theta\,\vec{i}+0=V_o\cos\theta\,\vec{i}$

در نقطه پرتاب $\vec{V}_2'=V_o\cos\theta\,\vec{i}+V_o\sin\theta\,\vec{j}$

همچنین مقادیر انرژی جنبشی در این دو نقطه (نقطه پرتاب $T_1$ و نقطه اوج $T_2$) برابر است با:

$$T_1=\frac{1}{2}mv_1^{\,2} \quad ; \quad T_2=\frac{1}{2}mv_2^{\,2}$$

$$T_2=\frac{T_1}{4}\Rightarrow\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}mv_1^{\,2}\right]=\frac{1}{2}mv_o^{\,2}\cos^2\theta\xrightarrow{v_1^2=v_o^2}\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}mv_o^{\,2}\right]=\frac{1}{2}mv_o^{\,2}\cos^2\theta\Rightarrow\cos^2\theta=\frac{1}{4}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

6- گزینه «3»

$$\begin{cases} V_{ox}=V_o\cos\theta_o+\dfrac{V_o}{\sqrt{2}} \\ V_{oy}=V_o\sin\theta_o \end{cases}\Rightarrow tg\theta=\frac{V_{oy}}{V_{ox}}=\frac{\sin\theta_o}{\cos\theta_o+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$$

برد پرتابه $R=\dfrac{V_0^2\sin 2\alpha}{2g}$ وقتی بیشینه است که $\sin 2\alpha=1$ یعنی $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ باشد. پس در رابطه بالا به جای $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ قرار می دهیم.

$$\frac{\sin\theta_o}{\cos\theta_o+\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=tg\frac{\pi}{4}=1\Rightarrow\sin\theta_o-\cos\theta_o=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

7- گزینه «2»

با توجه به نمودار مشاهده می شود در هر لحظه سرعت A از سرعت B بزرگتر است و مسافت بیشتری را در مقایسه با B طی می کند.

در نتیجه سرعت متوسط A از سرعت متوسط B بزرگتر است.

8- گزینه «1»

اگر $V_A$ سرعت پرتابه در نقطه A و $V_B$ سرعت آن در نقطه B باشد آن گاه با توجه به رابطه مستقل از زمان داریم:

$$V_B^2 - V_A^2 = -2gh$$

زمان رسیدن به اوج هر دو پرتابه از نقطه A و B برابر است.

$$t_A = \frac{V_A}{g} \quad , \quad t_B = \frac{V_B}{g}$$

$T_A$ و $T_B$ دو برابر $t_A$ و $t_B$ می باشند :

$$\Delta T_A = \frac{2V_A}{g} \quad , \quad \Delta T_B = \frac{2V_B}{g}$$

$$\frac{g^2 T_B^2}{4} - \frac{g^2 T_A^2}{4} = -2gh \rightarrow g = \frac{8h}{\Delta T_A^2 - \Delta T_B^2}$$

9- گزینه «1»

برای محاسبه فاصله دو پرتابه کافی است با استفاده از معادلات حاک بر حرکت پرتابه، مکان x و y پرتابه ها را در زمان t حساب کنیم.

$$\begin{cases} x_1 = V_o \cos a_1 t \\ y_1 = -\frac{1}{2} g t^2 + V_o \sin a_1 t \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -V_o \cos a_2 t \\ y_2 = -\frac{1}{2} g t^2 + V_o \sin a_2 t \end{cases}$$

پس برای طول و عرض نسبی دو پرتابه می توان نوشت:

$$x = x_1 - x_2 = v_o(\cos a_1 t + \cos a_2 t) \ , \ \ y = y_1 - y_2 = v_o(\sin a_1 t - \sin a_2 t)$$

از طرفی برای فاصله دو پرتابه می توان نوشت :

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = v_o \sqrt{(\cos a_1 t + \cos a_2 t)^2 + (\sin a_1 t - \sin a_2 t)^2}$$

$$R = v_o \sqrt{\cos^2 a_1 t + \cos^2 a_2 t + 2\cos a_1 t \cos a_2 t + \sin^2 a_1 t + \sin^2 a_2 t - 2\sin a_1 t \sin a_2 t}$$

$$R = v_o \sqrt{2 + 2(\cos a_1 t \cos a_2 t - \sin a_1 t \sin a_2 t)}$$

$$R = v_o\sqrt{2+2\cos(a_1t+a_2t)} = v_o\sqrt{2[1+\cos(a_1t+a_2t)]} = v_o\sqrt{2(2\cos^2(\frac{a_1t+a_2t}{2}))} = 2v_o\cos(\frac{a_1+a_2}{2})t$$

10- گزینه «3»

این مسئله نمونه ای از یک حرکت پرتابی است.در چنین حرکتی سرعت اولیه دارای دو مؤلفه $V_{oy} = V_o \sin\alpha , V_{ox} = V_o\cos\alpha$ است. حرکت در راستای عمودی شتابدار و در راستای افقی بدون شتاب است، بنابراین در تمام لحظات $v_x = v_{ox}$ است. در ابتدای حرکت هر دو مؤلفه $x_{ox}$ و $x_{oy}$ موجودند ولی در بالاترین نقطه مسیر سرعت عمودی صفر شده و فقط $v_x = v_{ox}$ باقی می ماند. با توجه به این توضیحات به حل مسئله می پردازیم.

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}m{v_o}^2 = 60(j) & (1) \\ k_2 = \frac{1}{2}m{v_x}^2 = \frac{1}{2}m{v_o}^2\cos^2 a & (2) \end{cases} \xrightarrow{(1),(2)} k_2 = 60\times\cos^2 30 = 60\times(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 60\times\frac{3}{4} \Rightarrow k_2 = 45(j)$$

11- گزینه «2»

مبدا مختصات را در نقطه رها شدن دو جسم در نظر گرفته و سوی مثبت محور y را به سمت پایین اختیار می کنیم. در1ثانیه تاخیری که بین دو سقوط وجود دارد، جسم اول به اندازه 5 متر پایین می آید.

$$y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}\times10\times(1)^2 = 5(m)$$

بنابراین می توانیم مسئله را اینگونه در نظر بگیریم که دو جسم همزمان شروع به سقوط کرده اند، اما نقطه سقوط اولی 5 مترپایین تر از دومی بوده است. همچنین جسم اول در $y = 5(m)$ دیگر ساکن نیست و سرعت آن از معادله مستقل از زمان قابل محاسبه است.

$$V_2^2 - V_1^2 = 2gh \Rightarrow V_2^2 = 2(10)(5) = 100 \Rightarrow V_2 = 10(\frac{m}{s})$$

اکنون می توانیم فرض کنیم برای جسم اول $y_o = 5(m)$ و $y_o = 10(\frac{m}{s})$ بوده و برای جسم دوم $y_o = 0$ و $V_o = 0$ می باشد.

$$y_1 = \frac{1}{2}gt^2 + V_ot + y_o = \frac{1}{2}(10)t^2 + 10t + 5 = 5t^2 + 10t + 5$$
$$y_2 = \frac{1}{2}gt^2 + V_ot + y_o = \frac{1}{2}(10)t^2 = 5t^2$$
$$\Delta y = y_1 - y_2 = 10m \Rightarrow 5t^2 + 10t + 5 - 5t^2 = 10 \Rightarrow 10t = 5 \Rightarrow t = 0/5(s)$$

اما این زمانی که به دست می آوریم، زمان بعد از سقوط جسم دوم است وبرای اینکه زمان بعد از سقوط جسم اول را حساب کنیم کافی است آن 1 ثانیه تاخیر اولیه را به این مقدار اضافه کنیم. در نتیجه داریم :

$$t' = t + 1 = 0/5 + 1 = 1/5(s)$$

12- گزینه «1»

از همان ابتدا به راحتی می توانیم گزینه های 3 و 4 را رد کنیم، زیرا هیچ یک از این دو گزینه دارای دیمانسیون زمان نیستند. از طرفی با مجذور کردن گزینه های 1 و 2 به راحتی می توان پاسخ صحیح را پیدا کرد.

گزینه 1: $$t^2 = \frac{2x}{g\cos a} \Rightarrow 2x = gt^2 \cos a \Rightarrow x = \frac{1}{2} gt^2 \cos a$$

گزینه 2: $$t^2 = \frac{x}{2g\cos a} \Rightarrow x = 2gt^2 \cos a$$

هر جسمی که بر روی یکی از این شیارها قرار دارد دارای شتابی برابر $g\cos\alpha$ است. به وضوح معلوم است که گزینه 1 معادله مکان – زمان درست را به دست می دهد.

13- گزینه «2»

ابتدا سرعت اتومبیل را بر حسب $\frac{m}{s}$ پیدا می کنیم:

$$V = 80\frac{km}{h} = \frac{80}{3/6}\frac{m}{s} = 22/22\frac{m}{s}$$

وزن اتومبیل برابر $13000N$ است بنابراین با توجه به $g = 10\frac{m}{s^2}$ جرم اتومبیل محاسبه می شود:

$$w = mg \Rightarrow m = \frac{w}{g} = \frac{13000}{10} = 1300kg$$

اکنون برای محاسبه شتاب توقف ، از رابطه مستقل از زمان استفاده می کنیم :

$$v^2 - v_o^2 = 2a\Delta x \quad , \quad v = 0 \Rightarrow 0 - (22/22)^2 = 2(61) \times a \Rightarrow a \approx -4/04(\frac{m}{s^2})$$

علامت منفی در بالا به این دلیل است که شتاب توقف را محاسبه کرده ایم.

$$F = ma = 1300 \times 4/04 = 5261(N)$$

14- گزینه «2»

$$V=-gt+v_{oy}=-gt+v_o\sin 45^\circ \overset{V=o}{\Rightarrow} gt=\frac{V_o}{\sqrt{2}} \qquad (1)$$

$$x=V_{ox}t \Rightarrow 20D=V_o\cos 45^\circ t \Rightarrow 20D=\frac{V_o t}{\sqrt{2}} \qquad (2)$$

از معادله (1) و (2) می توان $V_o$ را بر حسب D نوشت معادله (1) را بر (2) تقسیم می کنیم :

$$\frac{gt}{20D}=\frac{\frac{v_o}{\sqrt{2}}}{\frac{v_o t}{\sqrt{2}}} \Rightarrow t^2=\frac{20D}{g} \Rightarrow t=\sqrt{\frac{20D}{g}} \Rightarrow v_o=\sqrt{40Dg} \qquad (3)$$

$$h=-\frac{1}{2}gt^2+v_o\sin 45t \xrightarrow{(3)} h=(-\frac{1}{2}g)(\sqrt{\frac{20D}{g}})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})(\sqrt{40Dg})(\sqrt{\frac{30D}{g}}) \Rightarrow h=10D \Rightarrow D=\frac{h}{10}$$

از

طرفی

15- گزینه «3»

ارتفاع اوج پرتابه L است. همچنین نصف برد پرتابه هم L است.

$$R=\frac{V_o^2\sin 2q}{g} \Rightarrow L=\frac{V_o^2\sin 2q}{2g}=\frac{2V_o^2\sin q\cos q}{2g} \qquad (1)$$

$$h=\frac{V_o^2\sin^2 q}{2g} \Rightarrow L=\frac{V_o^2\sin^2 q}{2g} \qquad (2)$$

$$(1);(2) \Rightarrow \frac{2V_o^2\sin q\cos q}{2g}=\frac{V_o^2\sin\ q}{2g} \Rightarrow 2\cos q=\sin q \Rightarrow tgq=2 \Rightarrow q=arctg(2)$$

تنها در گزینه (3) این مقدار برای θ ذکر شده است.

16- گزینه «1»

برای حل مسئله نمی توان از راه حل سرعت وشتاب نسبی دو جسم استفاده کرد زیرا اگر زمان توقف هر کدام از قطار ها را حساب کنیم داریم :

$$t_A=\frac{V_{oA}}{a_A}=\frac{16}{2}=8s \quad ; \quad t_B=\frac{V_{oB}}{a_B}=\frac{8}{4}=2s$$

در دو ثانیه چه مسافتی را طی می کند:

$$\Delta x_A = -\frac{1}{2}at^2 + V_o t = -\frac{1}{2}\times 2\times 2^2 + 16\times 2 = -4+32 = 28m$$

پس مسافت باقی مانده بعد از توقف B برابر است با :

$$45-28=17m$$

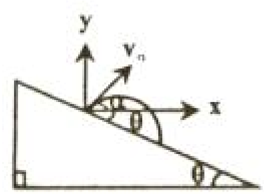
$$V^2 - V_o^2 = -2a\Delta x \Rightarrow V = (-2a\Delta x + V_o^2)^{\frac{1}{2}} = (-2\times 2\times 28+16)^{\frac{1}{2}} = 12$$

$$17 = -\frac{1}{2}at^2 + V_o t \quad \Rightarrow \quad t = 2/8s$$

17- گزینه «4»

در اصل چون پرتابه روی یک سطح شیبدار حرکت می کند لذا باید بتوانیم حرکت را تصویر کنیم.

$$\begin{cases} y = x\,tg\alpha - \dfrac{gx^2}{2v_o^2\cos^2\alpha} \\ x_o = AB\cos\theta \\ y_o = -AB\sin\theta \end{cases}$$




$$-AB\sin\theta = (AB\cos\theta)tg(\frac{\pi}{2}-\theta) - \frac{g(AB\cos\theta)^2}{2v_o^2\cos^2(\frac{\pi}{2}-\theta)} \Rightarrow -\sin\theta = \cos\theta\cot g\theta - \frac{g}{2v_o^2}AB\cot g^2\theta$$

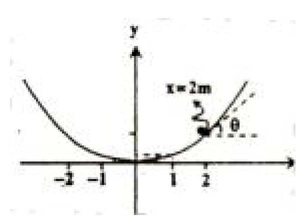
$$-\frac{3}{5} = \frac{4}{5}\times\frac{4}{2} - \frac{10}{2v_o^2}\times 75\times(\frac{4}{3})^2 \Rightarrow v_o^2 = 25\times 16 \Rightarrow v_o = 20(\frac{m}{s})$$

توجه : برای حل این مسئله از نکته تستی گفته شده در متن در س نیز می توان استفاده کرد.

18- گزینه «2»

مسیر این ذره مطابق شکل زیر است:

$$y = \frac{x^2}{4} \Rightarrow y' = \frac{x}{2} \Rightarrow x=2 \Rightarrow y'=1$$



شیب خط مماس بر منحنی مسیر در نقطه $x=2$ برابر 1 به دست آمد. بنابراین در این نقطه $\theta = 45^\circ$ است. اما شتاب مماسی به طریق زیر محاسبه می شود:

$$a = g\cos q = \frac{\sqrt{2}}{2}g = \frac{g}{\sqrt{2}}$$

19- گزینه «2»

نیروی مقاومت هوا با سرعت گلوله متناسب است. یعنی : $a = \frac{f}{m} = \frac{-\mu v}{m}$ مقاومت هوا $\Leftarrow f = -\mu v$ مقاومت هوا علامت منفی در بالا به این دلیل است که نیروی مقاومت هوا در خلاف جهت حرکت گلوله است. بنابراین شتاب گلوله $m_1$ که در حضور مقاومت هوا به سمت بالا حرکت می کند از رابطه ی مقابل به دست می آید:

$$a_{m1} = -(g + m\frac{v}{m}) \qquad (1)$$

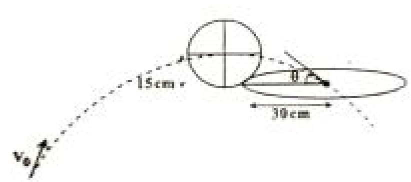
اما شتاب گلوله $m_2$ که در غیاب مقاومت هوا به سمت بالا حرکت می کند برابر است با :

$$a_{m2} = -g \qquad (2)$$

هر دو شتاب های $a_{m1}, a_{m2}$ کند شونده هستند. اما با توجه به روابط(1)و (2) معلوم می شود که شتاب جسم $m_1$ منفی تر(کند شونده تر) است و لذا مدت بیشتری طول می کشد تا $m_1$ به ارتفاع $h$ برسد. پس $m_2$ زودتر می رسد.

20- گزینه «3»

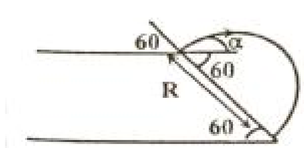
$$q = \sin^{-1}\frac{15}{30} = 30^\circ$$




21- گزینه «2»

معمولا برای حل اینگونه سؤال هایی که پرتابه را روی یک سطح شیبدار پرتاب می کنیم کافی است که به جای $x$ و $y$ از معادله اصلی پرتابه $x$ و $y$ نقطه ای روی سطح شیبدار را قرار دهیم.

طبق شکل :




$$\frac{p}{6} = \frac{p}{2} - \frac{p}{3} = a \quad ; \qquad y = x\,tag\,a - \frac{gx^2}{2v_o \cos^2 a}$$ معادله اصلی پرتابه

$$\begin{cases} x = R\cos 60^\circ \\ y = -R\sin 60^\circ \end{cases} \Rightarrow R = \frac{V_0^2}{g}4\sqrt{3}$$

معادله نقطه روي سطح شيب دار

چون پرتابه به سمت پايين حركت مي‌كند $y$ را منفي قرار مي‌دهيم

$$-R\sin 60^{\circ} = R\cos 60^{\circ}\tan 30^{\circ} - \frac{gR^2\cos^2 60^{\circ}}{2v_o^2\cos^2 30^{\circ}}$$

توجه : برای حل این مسئله از نکته تستی گفته شده در متن درس نیز می توان استفاده کرد.

22- گزینه «4»

اگر یک قرقره ثابت داشته باشیم و یک قرقره متحرک ، مسافتی که قرقره متحرک طی می کند دو برابر مسافت قرقره ثابت است در اینجا 4 قرقره داریم مه 3 تای آن ها متحرک است $(A''', A'', A)$ چون شتاب جرم متصل به یکی از آن ها (قرقره $A$) $a$ به ازای جابجایی $y$ می باشد طبق شکل می توان گفت که اگر جرم $m_2$ به اندازه $y$ پایین بیاید. قرقره $A''$ به اندازه $2y$ بالا می رود و این باعث می شود که قرقره $A'''$ به اندازه $2\times 2y$ بالا رود و چون برای یک قرقره متحرک جابه جایی خودش دو برابر جابه جایی جرم متصل به آن است پس جابه جایی جرم $m_1$, $2\times 2\times 2y$ می باشد یعنی $8y$

از آنجا که بین جابه جایی و شتاب طبق رابطه $y = \frac{1}{2}at^2$ رابطه مستقیم وجود دارد می توان گفت که شتاب جرم $m_1$ نیز $8a$ می باشد.

23- گزینه «2»

برای بیشینه شدن برد ، کافی است مشتق $R$ نسبت به زاویه $\varphi$ برابر صفر شود.

$$R = \frac{2v_o^2\cos(a+j)\sin j}{g\cos^2 a} \Rightarrow \frac{dR}{dj} = 0 \Rightarrow -\sin(a+j)\sin j + \cos(a+j)\cos j = \cos(a+2j) = 0$$

$$\xrightarrow{\quad} a + 2j = \frac{p}{2} \Rightarrow j = \frac{p}{4} - \frac{a}{2}$$

24- گزینه «3»

اگر کل مسیر را با $x$ نشان دهیم نصف مسیر $\frac{x}{2}$ می شود $V_0 t = \frac{x}{2}$. نصف دیگر مسیر را متحرک با دو سرعت پیش رفته است نصف زمان یعنی $\frac{t'}{2}$ را باسرعت $V_1$ و نصف دیگرش یعنی ($t'$ را زمان نیمه دوم مسیر حرکت در نظر می گیریم) $\frac{t'}{2}$ را نیز با سرعت $V_2$ طی کرده است. توضیح اینکه سرعت متوسط از رابطه $\vec{V} = \frac{x_1 + x_2}{t + t'}$ به دست می آید

$$\frac{x}{2} = V_1\frac{t'}{2} + V_2\frac{t'}{2}.$$

$$t=\frac{x}{2V_o}\ ,\ t'=\frac{x}{v_1+v_2}\Rightarrow \vec{V}=\frac{x}{\frac{x}{2v_o}+\frac{x}{v_1+v_2}}=\frac{2v_o(v_1+v_2)}{2v_o+v_1+v_2}$$

25- گزینه «2»

$$\begin{cases}\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}\\ \vec{V}=V_x\hat{i}+V_y\hat{j}\\ \vec{a}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}\end{cases}$$

اگر $V_r$ ، $V_\theta$ را مؤلفه های سرعت در دستگاه قطبی در نظر بگیریم می توان گفت :

$$\vec{r}=R\cos\theta\,\hat{i}+R\sin\theta\,\hat{j}\Rightarrow \vec{V}=(V_r\cos\theta-RV_\theta\sin\theta)\hat{i}+(V_r\sin\theta+RV_\theta\cos\theta)\hat{j}$$

از طرفی چون ذره روی یک دایره حرکت می کند یعنی شعاع ثابت است می توان گفت که $V_r\,,\,V_r^{\circ}$ نیز صفرند پس (تنها سرعت $V_\theta$ یعنی سرعت مماسی وجود دارد) $\vec{V}=(-RV_\theta\sin\theta)\hat{i}+(RV_\theta\cos\theta)\hat{j}$

می دانیم که : $\dot{\theta}=V_\theta$.

$$\text{شتاب}\quad \vec{a}=\left[(-R)(V_\theta^{\circ}\sin\theta+V_\theta^2\cos\theta)\hat{i}+R(V_\theta^{\circ}\cos\theta-V_\theta^2\sin\theta)\hat{j}\right]$$

$$\vec{a}=\left[-RV_\theta^{\circ}\sin\theta-RV_\theta^2\cos\theta\right]\hat{i}+\left[RV_\theta^{\circ}\cos\theta-RV_\theta^2\sin\theta\right]\hat{j}$$

$$\frac{d}{dt}(V_\theta\sin\theta)=(\frac{dV_\theta}{dt})\sin\theta+V_\theta\frac{d\sin\theta}{d\theta}=V_\theta^{\circ}\sin\theta+V_\theta\frac{d\theta}{dt}.\frac{d\sin\theta}{d\theta}=V_\theta^{\circ}\sin\theta+V_\theta^2\cos\theta$$

پس از محاسبات جبری

$$\vec{V}\times\vec{a}=R^2V_\theta^3\quad (1)\quad ,\quad V^2=R^2V_\theta^2$$

همچنین :

$$\vec{V}\times\vec{a}=V_xa_y-a_xV_y\qquad (2)$$

از طرفی طبق معادله سرعت مختصات قطبی (با شعاع ثابت)

$$\vec{V}=-RV_\theta\sin\theta\,\hat{i}+RV_\theta\cos\theta\,\hat{j}$$

و چون $R\cos\theta$ همان $x$ است و $RV_\theta\cos\theta$ همان $V_y$ است لذا :

$$V_y = V_q x \qquad (3)$$

$$\xrightarrow{(1),(2),(3)} \vec{V} \times \vec{a} = V_x a_y - a_x V_y = \frac{V^2 V_y}{x} \Rightarrow V^2 = x\left(\frac{V_x a_y - V_y a_x}{V_y}\right)$$

26- گزینه «4»

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} \quad V_y = gt \ , \ V_x = V_o$$

$$\vec{V} = V_o \vec{i} + gt\vec{j} \ , \ \vec{a} = g\vec{j} \quad .$$

$\left|\vec{V} \times \vec{a}\right| = \frac{V^3}{\rho}$ و $\rho$ شعاع انحنای مسیر است.

$$\left|\vec{V} \times \vec{a}\right| = V_o g \qquad \left|V^3\right| = \sqrt{(V_o^2 + g^2 t^2)^3}$$

$$r = \frac{\left[V_o^2 + g^2 t^2\right]^{\frac{3}{2}}}{V_o g}$$

27- گزینه «3»

$$V^2 - V_o^2 = 2gy$$

$$(22)^2 - V_o^2 = 2 \times 9/8 \times 14 \Rightarrow 484 - V_o^2 = 274/4 \Rightarrow V_o^2 = 209/6 \Rightarrow V_o = 14/4\left(\frac{m}{s}\right)$$

اکنون از معادله مکان – زمان استفاده کرده و ارتفاع ساختمان را محاسبه می کنیم.

$$y = \frac{1}{2} g t^2 + V_o t = \frac{1}{2} \times 9/8 \times (2/8)^2 + 14/4(2/8) = 78/7(m)$$

28- گزینه «3»

کل زمانی که توپ در معرض دید بوده 1 ثانیه است که شامل یک حرکت رفت وبرگشتی است. پس در یک رفت (برگشت)، 0/5 ثانیه زمان طی شده است. اگر $V_0$ سرعت توپ هنگام رسیدن به لبه پنجره باشد، داریم:

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+V_o t \Rightarrow 1/5=-\frac{1}{2}\times(9/8)(0/5)^2+(0/5)V_o$$

$$1/5+1/225=(0/5)V_o \Rightarrow V_o=\frac{2/725}{0/5}=5/45(\frac{m}{s})$$

$$v^2-v_o^2=-2gh \Rightarrow 0-(5/45)^2=-2\times 9/8\times h \Rightarrow h=1/515(m)$$

$$H=1/515-1/5=0/015(m)$$

29- گزینه «4»

با توجه به نکاتی که در متن درس در باره پرتاب بر روی سطح شیبدار گفتیم می توانیم از فرمول زیر

$$R=\frac{2V_o^2\cos a\sin(a+b)}{g\cos^2 b}$$

توجه داشته باشید که برای استفاده از فرمول بالا، مسئله را به صورت یک پرتاب از بالای سطح شـیبدار و $a=0$(عمـود بر سطح ) به پایین آن در نظر می گیریم که البته اشکالی در حل مسئله ایجاد نمی کند.

$$\begin{cases} a=0 \\ b=30^\circ \end{cases} \Rightarrow R=\frac{2V_o^2\cos(0)\sin(0+30)}{g\cos^2 30}=\frac{2V_o^2(\frac{1}{2})}{g(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \Rightarrow R=\frac{4}{3}\frac{V_o^2}{g}$$

30- گزینه «1»

متحرک (1): $\begin{cases} t=0 \\ x_o=-2 \\ V_o=3 \end{cases}$ متحرک (2): $\begin{cases} t=0 \\ y_o=-4 \\ V_o=1 \end{cases}$

چون سرعت ها ثابت است نتیجه می گیریم که سرعت متحرک (1) در تمام زمان ها برابر $3\frac{m}{s}$و سرعت متحرک (2) در تمام زمان ها برابر $1\frac{m}{s}$ است.:

$$(1): x=V_1 t+x_o \Rightarrow x=3t-2 \quad , \quad (2): y=V_2 t+y_o \Rightarrow y=t-4$$

فاصله بین متحرک ها در هر لحظه از رابطه مقابل به دست می آید:

$$d=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(3t-2)^2+(t-4)^2}=\sqrt{10t^2-20t+20}$$

برای اینکه فاصله بین دو متحرک min شود کافی است از d نسبت به زمان مشتق گرفته و برابـر صـفر قـرار دهـیم. امـا $\sqrt{10t^2-20t+20}$ زمانی min می شود که عبارت زیر رادیکال min شود :

$$(10t^2-20t+20)' = 20t-20 = 0 \Rightarrow t = 1(s)$$

31- گزینه «4»

$x=-t^2+4t^3 \Rightarrow v=\frac{d_x}{d_t}=-2t+12t^2 \Rightarrow a=\frac{d^2x}{dt^2}=-2+24t$ سرعت در لحظه $t=1$ برابر است با :

$$v(1)=-2(1)+12(1)^2=10(\frac{m}{s})$$

و برای نیروی لحظه ای در $t=1$ داریم :

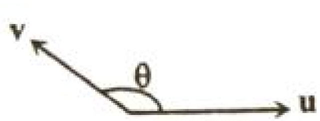
$$F=ma\xrightarrow{\begin{cases}t=1s\\ m=2kg\end{cases}}F=2(-2+24\times1)=44(N)$$

$$P=F.v=44\times10=440(w)$$

32- گزینه «3»

قایقران باید با زاویه $\theta$ نسبت به جهت جریان آب پارو بزند تا درست به نقطه مقابل برسد.

$$\begin{cases}u=6\frac{km}{h}\\ V=10\frac{km}{h}\\ V'\end{cases}$$



$$\begin{cases}v\sin\theta=u\\ v\cos\theta=v'\end{cases}\Rightarrow v'^2+u^2=v^2\Rightarrow v'=\sqrt{v^2-u^2}$$

پهنای رودخانه $(D=2km)$ مسافت طی شده توسط قایق با سرعت $V'$ نسبت به آب متحرک در زمان t است.:

$$D=v't\Rightarrow t=\frac{D}{v'}=\frac{2}{\sqrt{(10)^2-(6)^2}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}(h)$$

اما $\frac{1}{4}$ ساعت برابر است با 15 دقیقه.

33- گزینه «1»

وقتی لامپ از سقف بالون می افتد شتاب سقوط برابر $g-a$ است. سوی مثبت محورها را به سمت پایین اختیار می کنیم.

$$y=\frac{1}{2}(g-a)t^2+v_o t+y_o \Rightarrow 2=\frac{1}{2}(10-6)t^2+3t+0 \Rightarrow 2t^2+3t-2=0$$

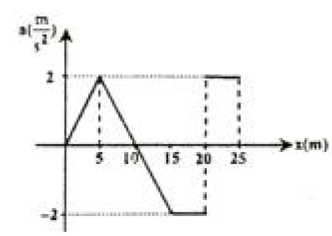
$$\Delta = 9+16=25 \Rightarrow t= \begin{matrix} \mathbf{N} & -2\ (s) & \Sigma\Sigma\Theta \\ \mathbf{O} & 0/5\,(s) & \Sigma\Sigma\Theta \end{matrix}$$

34- گزینه «1»

با توجه به رابطه $F=ma$ نمودار شتاب – مکان جسم به صورت زیر به دست می آید :

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\times\frac{dx}{dt} \Rightarrow a=v\frac{dv}{dx} \Rightarrow adx=vdv \qquad (1)$$

از $x=0$ تا $x=5$ معادله شتاب – مکان به صورت $a=\frac{2}{5}x$ است. از طرفین رابطه (1) انتگرال می گیریم :




$$\int_o^5 adx=\int_o^V vdv \Rightarrow \int_o^5 \frac{2}{5}xdx=\frac{V^2}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{5}\Big]_o^5=\frac{V^2}{2} \Rightarrow 5=\frac{V^2}{2} \Rightarrow V^2=10 \Rightarrow V=\sqrt{10}\frac{m}{s}$$

بنابراین $x=5m$ در مقدار سرعت ذره برابر $\sqrt{10}\frac{m}{s}$است. با کمی دقت در نمودار می توان دریافت که از $x=5$ تا مقدار $x=5m$ $\int adx$ برابر صفر است ، زیرا دو شکل با مساحت های برابر در پایین و بالای محور $x$ها را شامل می شود. پس سرعت در $x=15m$ نیز همان $\sqrt{10}\frac{m}{s}$ است. اکنون برای یافتن سرعت در $x=16/5$ از رابطه مستقل از زمان استفاده می کنیم :

$$V^2-V_o^2=2a(x-x_o) \Rightarrow V^2-10=2(-2)(16/5-15) \Rightarrow V^2-10=-6 \Rightarrow V^2=4 \Rightarrow V=2\frac{m}{s}$$

## فصل سوم: دینامیک

در این فصل ما قوانین نیوتن را بررسی خواهیم کرد.

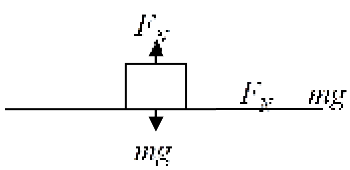
قانون اول نیوتن : قانون اینرسی (اجسام تمایل به ماندن در وضعیت قبل خود را دارند.)

قانون دوم نیوتن :

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

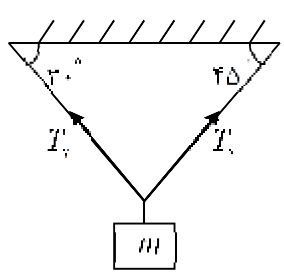
قانون سوم نیوتن : برای هر عملی عکس العملی است هم اندازه با آن و در خلاف جهت آن. هر کنشی ، واکنشی دارد.

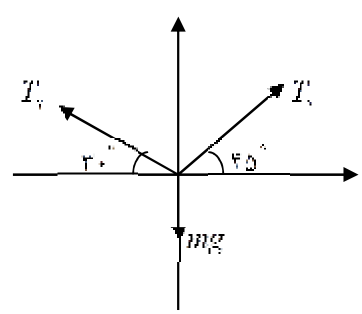
پس همواره نیروی عمود بر سطح وجود دارد که عکس العمل نیروی وزن است.




برای حل این سؤالات کافی است که بردارها را تجزیه نمود و حاصل جمع کل نیروها را محاسبه نمود. سپس $\sum F_x$ و $\sum F_y$ را محاسبه کرد و $a_x$ و $a_y$ را محاسبه نمود. سپس از معادلات سینماتیک هم می توان استفاده کرد.

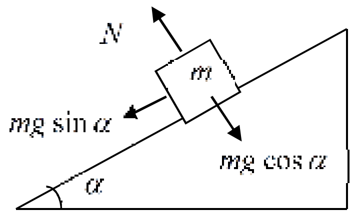
**مثال :** شکل مقابل وزنه ای به جرم $m$ را نشان می دهد که به وسیله ریسمانهایی آویخته شده است. نمودار جسم آزاد را برای نیروهای وارد به این جسم رسم کنید. اگر وزن جسم $200N$ باشد بزرگی سایر نیروها را بدست آورید؟




$$\begin{cases} \sum F_x : T_1 \cos 45^\circ - T_2 \cos 30^\circ = 0 \\ \sum F_y : T_1 \sin 45^\circ + T_2 \sin 30^\circ - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} T_1 - \frac{T_2\sqrt{3}}{2} = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} T_1 + \frac{T_2}{2} = 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_2 = \frac{400}{1+\sqrt{3}} \\ T_1 = \frac{200(3-\sqrt{3})}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

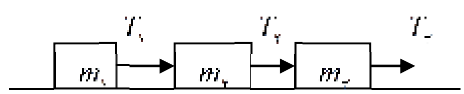
در این فصل سؤال بسیار مهمی که مطرح خواهد شد مسائل سطح شیبدار است که کافی است برای حل به نکات زیر توجه کنید.




* همواره اصطکاک در خلاف جهت حرکت است.

* همواره نیروی کشش نخ در خلاف جهت حرکت جسم.

**مثال :** سه جسم مطابق شکل روی یک میز افقی بدون اصطکاک به هم وصل شده اند و با نیروی $T_3 = 60N$ به سمت راست کشیده می شوند. اگر $m_1 = 10kg$ و $m_2 = 20kg$ و $m_3 = 30kg$ باشد نیروهای کششی $T_1$ و $T_2$ را پیدا کنید؟



$$\sum F_x = \sum m a_X$$

$$T_3 = (m_1 + m_2 + m_3)a_X \Rightarrow a_X = \frac{T_3 = 60}{10+20+30} = 1m/s^2$$

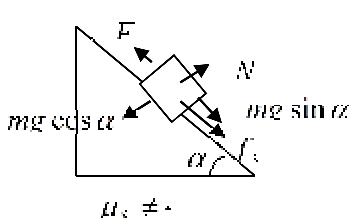
$$T_2 = (m_1 + m_2)a_X \Rightarrow T_C = 30\times1 = 30$$

$$T_1 = m_1 a_X \Rightarrow T_1 = 10\times1 = 10$$

### 3-1نیروی اصطکاک :

نیروی اصطکاک برابر است با ضریب اصطکاک در نیروی عمود بر سطح $f_K = m_K N$ نیروی اصطکاک جنبشی.حال قبل از حرکت ما یک نیروی اصطکاک داریم که به نام $f_S$ یا نیروی اصطکاک ایستایی معرفی می گردد و شرط وجود حرکت این است که نیروی وارده از نیروی اصطکاک ایستائی بزرگ تر باشد.

مثال : با وجود نیروی $F_1$ جسم در آستانه ی لغزش به پایین است نیروی $F_1$را چه مقدار زیاد کنیم تا جسم در آستانه ی لغزش به بالا قرار گیرد؟




$N = mg\cos a$ $\qquad$ $f_S = m_S mg\cos a$

در هنگام شروع به حرکت به بالا

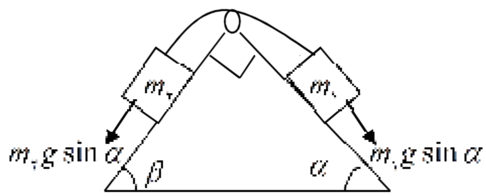
$F = \mu_S mg\cos\alpha + mg\sin\alpha$

در هنگام شروع حرکت به پایین

$F_1 = mg\sin\alpha - \mu_S mg\cos\alpha$

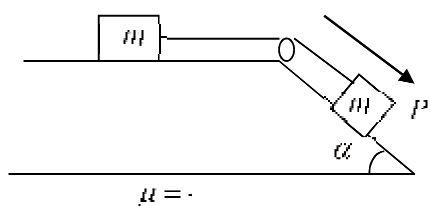
$\Delta F = F - F_1 = 2\mu_S mg\cos\alpha$

مثال : سیستم در حال تعادل است ، جرم $m_2$ چند برابر جرم $m_1$ است؟




$m_1 g\sin\alpha = m_2 g\sin\beta \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$ $\qquad$ $\alpha + \beta = 90 \Rightarrow \sin\alpha = \cos\beta$

**مثال :** وزنه ها از حال سکون به راه می افتند و پس از $4s$ هر یک به اندازه $20m$ جابه جا می شوند $\alpha$ کدام است؟



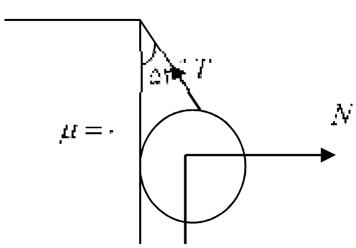

$P = \sum ma = (m_1 + m_2)a = 2ma$

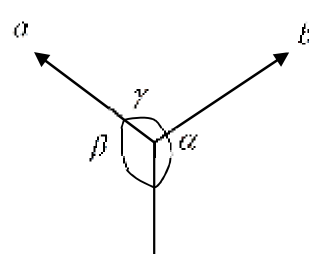
$P = mg\sin\alpha \Rightarrow mg\sin\alpha = 2ma \Rightarrow 10\sin\alpha = 2a \Rightarrow 10\sin\alpha = 5 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

$\Delta_X = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t \Rightarrow 20 = \frac{1}{2}a(16) \Rightarrow a = \frac{5}{4}$

**مثال :** در شکل مقابل اگر کشش ریسمان برابر $200N$ باشد نیرویی که از طرف دیوار به کره وارد می شود چند نیوتن است؟

120 (1 $\qquad$ 160 (2 $\qquad$ 240 (3 $\qquad$ 200 (4



**نکته :** اگر سه نیروی مساوی که برایند آنها صفر است رابطه ی زیر برقرار است :

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0 \Rightarrow \frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\frac{N}{\sin 127^{\circ}}=\frac{T}{\sin 90^{\circ}} \Rightarrow \frac{N}{\frac{4}{5}}=\frac{200}{1} \Rightarrow N=160N$$

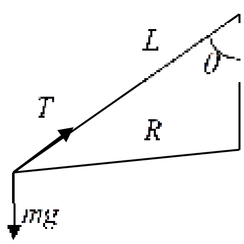
## 2-3دینامیک حرکت دایره ای یکنواخت :

در این حرکت کافی است که شتاب را برابر $a=\frac{v^2}{r}$ قرار داد که $r$ شعاع دایره است که روی آن حرکت می کند.

$$F=ma=m\frac{v^2}{r}$$

توجه داشته باشید که سه نیروئی که حرکت دایره ای ایجاد می کند مرکز گرا است.

**مثال :** آونگ مخروطی شکل مقابل جسمی به جرم $m$ را نشان می دهد که با سرعت $V$ در انتهای نخی به طول $L$ روی یک دایره افقی دوران می کند. وقتی جسم دورمی زند،نخ سطح یک مخروط را جاروب می کند. زمان لازم برای یک دور کامل جسم را پیدا کنید؟




قائم : $a=0 \Rightarrow \sum F=0 \Rightarrow T\cos\theta-mg=0 \Rightarrow T\cos\theta=mg$

شعاعی : $a \Rightarrow a=\frac{v^2}{r} \Rightarrow \sum F=m\frac{v^2}{R} \Rightarrow T\sin\theta=\frac{mv^2}{R} \Rightarrow T=\frac{mv^2}{R\sin\theta}$

$$\frac{mv^2}{R\sin\theta}\cos\theta=mg \Rightarrow v^2=Rg\tan\theta \Rightarrow v=\sqrt{Rg\tan\theta}$$

$x=vt \Rightarrow 2\pi R=vt \Rightarrow$ زمان یک دور ه تناوب $t=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi R}{\sqrt{Rg\tan\theta}}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g\tan\theta}}$

$$t = 2p\sqrt{\frac{L\sin q}{g\tan q}} = 2p\sqrt{\frac{L\cos q}{g}} \qquad \Leftarrow R = L\sin q$$

حال در حرکت دایره ای یک سری تغییرات در معادلات حرکت ایجاد خواهیم کردبه این صورت که $w$را سرعت زاویه ای یا بسامد زاویه ای می نامند و مقدارش برابر است با:

$$\overline{w} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \Rightarrow w = \frac{dq}{dt}(\frac{rad}{s})$$

از طرفی اگر حرکت دایره ای یکنواخت باشد :

$$\overline{w} = w \qquad \Rightarrow \qquad q = wt + q_o$$

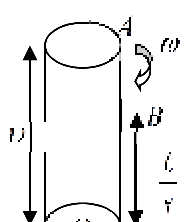
$$w = \frac{2p}{T} = 2p\ v$$

حال رابطه بین سرعت خطی و زاویه ای را بدست می اوریم:

$$v = Rw \Rightarrow a = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2w^2}{R} = Rw^2 \Rightarrow F = \frac{mv^2}{R} = mRw^2 = mvw$$

توجه داشته باشید که شیب نمودار زاویه – زمان همان بسامد زاویه ای است.

**مثال :** میله ای به طول **l** با سرعت زاویه ای $w$حول نقطه $O$ دوران می کند. سرعت خطی نقطه $A$چند برابر سرعت خطی نقطه $B$است؟




$$v = R\omega$$

$$\omega_A = \omega_B = \omega \to \frac{v_A}{v_B} = \frac{R\omega}{\frac{R}{۲}\omega} = ۲$$

1) 2

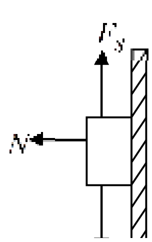
2) $\frac{1}{2}$

3) 1

4) $\sqrt{2}$

**مثال :** حداقل سرعت اتومبیل چقدر باشد تا اتومبیل از دیوار مرگ که به صورت استوانه است سقوط نکند؟ $(m \neq 0)$

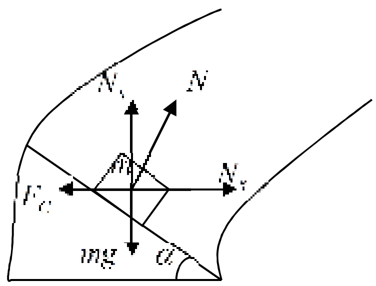
1) $\sqrt{\frac{g}{Rm}}$ 2) $\sqrt{mRg}$ 3) $\sqrt{\frac{mg}{R}}$ 4) $\sqrt{\frac{Rg}{m_S}}$




$$f_s \geq mg$$

$$\mu_s N \geq mg \Rightarrow \mu_s m\frac{v^2}{R} \geq mg \Rightarrow v^2 \geq \frac{Rg}{\mu} \Rightarrow v \geq \sqrt{\frac{Rg}{\mu_s}}$$

در حالتی که جاده شیبدار باشد آنگاه نیروی عمود بر سطح را باید تجزیه کرد.




$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \sqrt{w^2 + F_C^2} = \sqrt{(mg)^2 + (m\frac{v^2}{R})^2}$$

$$N_1 = N\sin\alpha$$

$$N_2 = N\cos\alpha \quad \Rightarrow \tan\alpha = \frac{a}{g} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{v^2}{Rg}$$

در شیب عرض جاده ; $N > mg$

**مثال :** در یک پیچ جاده حداکثر سرعت مجاز را $72\frac{Km}{h}$ نوشته اند اگر شعاع چرخش $40\sqrt{3}\ m$باشد شیب عرض جـاده کدام است؟

1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 2) $\frac{30\sqrt{3}}{3}$ 3) 20 4) $30\sqrt{3}$

شیب عرضی جاده منظور $\tan\alpha$ است.

$$\tan a = \frac{v^2}{Rg} = \frac{400}{40\sqrt{3}\times 10} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

حال حرکت دایره ای غیر یکنواخت را بررسی می نمائیم :

$$a = \frac{dw}{dt} \Rightarrow w = a\,t + w_o \qquad q = \frac{1}{2}a\,t^2 + w_o t + q_o$$

$$w^2 - w_o^2 = 2a(\Delta q)$$

در سئوالات مربوط به فنر کافی است به نکات زیر توجه بفرمائید :

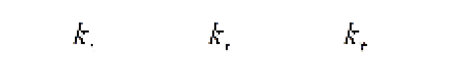
$K$برابر است با سختی فنر ⇐ طبق قانون هوک

$$F = k\,\Delta x$$

کار انرژی ذخیره شده: $W = U = Fd = \frac{F_1 + F_2}{2}d = \frac{k\Delta x_1 + k\Delta x_2}{2}d \xrightarrow{X = X_o} U = \frac{kx^2}{2}$

### 3-3بستن فنر :

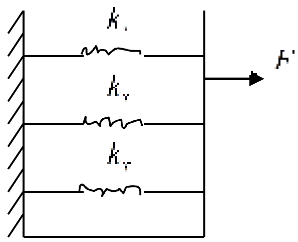
اگر فنرها را به صورت سری ببندیم :



$F_1 = F_2 = F_3 = F_{\text{محل}}$ $\Rightarrow \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \frac{F}{k_3} = \frac{F}{k_{\text{محل}}} \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$

$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = \Delta x_{\text{محل}}$

**در بهم بستن موازی :**



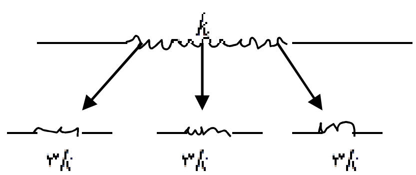

$F = F_1 + F_2 + F_3$

$\Delta x = \Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3$

$k\Delta x = k_1\Delta x_1 + k_2\Delta x_2 + k_3\Delta x_3 \Rightarrow k_{\text{محل}} = k_1 + k_2 + k_3$

**تکه تکه کردن فنر :**

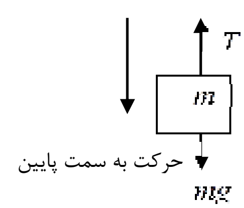
اگر فنری به ضریب سختی $k$ را به $n$ قسمت مساوی تقسیم کنیم هر فنر کوچک ضریب سختی برابر $nk$ دارد.




4-3**آسانسور :**

1) اگر وزن آسانسور از کشش کابل بیشتر باشد حرکت آسانسور به سمت پایین و شتابدار تند شونده خواهد بود.

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow mg - T = ma \Rightarrow T = mg - ma = m(g-a)$$

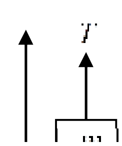



2) اگر وزن آسانسور با کشش کابل برابر باشد حرکت آسانسور یکنواخت یا به سمت پایین به سمت بالا خواهد بود در نتیجه شتاب حرکت صفر می شود.

$$mg = T$$

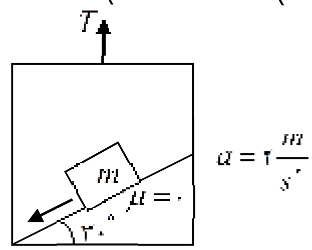
3) اگر وزن آسانسور از کشش کابل کمتر باشد حرکت آسانسور به سمت بالا و شتابدار تند شونده خواهد بود.

$$\sum F_y = ma_y = 0 \Rightarrow T - mg = ma \Rightarrow T = m(g+a)$$



**مثال :** آسانسوری با شتاب $2\frac{m}{s^2}$تند شونده به بالا می رود شتاب حرکت جسم بر روی سطح شیبدار کدام گزینه است؟

1) 5    2) 6    3) 7    4) 4



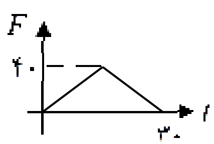
$$mg'\sin 30 = ma \Rightarrow a = g'\sin 30 = 6$$
$$g' = g + a = 10 + 2 = 12$$

### 5-3اندازه حرکت :

اندازه حرکت در واقع یعنی جرم با چه سرعتی حرکت خواهد کرد پس شیب نمودار $F-t$ برابر نیرو است و مساحت زیر نمودار $F-t$ برابر اندازه حرکت است.

$$\vec{P} = m\vec{v}$$
$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

**مثال :** نمودار نیرو – زمان جسم $30kg$ که در مبدا زمان از حال سکون به راه می افتد به صورت روبه رو است، سرعت جسم در $t = 30s$ چند $\frac{km}{h}$ است؟



$$S = \Delta P = P_2 - P_1 = mv_2 = 30v_2 = \frac{1}{2}(40\times 30) \Rightarrow v_2 = 20m/s \Rightarrow v_2 = 72km/h$$

نیروی پایستار نیرویی است که کار آنها به مسیر حرکت بستگی نداشته باشد. مانند نیروی وزن ، نیروی فنر.

$$\vec{F} = -\nabla\vec{u}$$

شرط اینکه یک نیرو پایستار باشد این است که کرل نیرو صفر باشد.

$$\nabla \propto F = 0$$
$$\nabla \times (-\nabla U) = 0$$

نیرو های مرکز گرا $\vec{F}=|F|\hat{e}_r$ پایستار هستند ولی $\vec{k}=r\vec{c}$ که $\vec{c}$ برداری ثابت هستند پایستار نیستند.

کار انجام شده برای نیروی پایستار در یک مسیر رفت و بر گشت برابر صفر است.

* اگر نیروی اصطکاک یا هیچ نیروی اتلافی دیگر نداشته باشیم انرژی مکانیکی پایستار است.

$$U_1+k_1=U_2+k_2$$

برای بدست آوردن نوسانات کوچک حول نقطه تعادل پایدار از فرمول زیر استفاده می کنیم :

چون $\frac{d^2U}{dx^2}>0$ تعادل پایدار و اگر $\frac{d^2U}{dx^2}<0$ تعادل ناپایدار و اگر $\frac{d^2U}{dx^2}=0$ تعادل خنثی است $\Leftarrow$

$$w=\frac{\sqrt{\frac{d^2U}{dx_2}\Big|_{X=x_o}}}{m}$$

که $x_o$ نقطه اکسترمم است

$$\frac{dU}{dx}=0\Rightarrow x_o$$

**مثال :** ذره ای به جرم $2kg$ در راستای $x$ حرکت می کندو انرژی پتانسیل $U=2x^2+\frac{3}{x}$ است بسامد زاویه ای نوسانات کوچک حول نقطه تعادل پایدار ذره را پیدا کنید؟

$$\frac{dU}{dx}=4x-\frac{3}{x^2}\Longrightarrow x^3=\frac{3}{4}\Rightarrow x=(\frac{3}{4})^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{d^2U}{dx^2}=4+\frac{6}{x^3}\Big|_{X=(\frac{3}{4})^{\frac{1}{3}}}\Rightarrow\frac{d^2U}{dx^2}=12\ \Rightarrow w=\sqrt{\frac{12}{2}}=\sqrt{6}$$

**مکان حدی :**

مکانی است که در آن سرعت صفر است

$$\frac{dx}{dt}=0$$

**سرعت حدی :**

سرعتی است که در آن شتاب نهائی صفر است

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0$$

**زمان ویژه :**

مدت زمانی است که طول می کشد تا جسم به $\frac{1}{e}$سرعت اولیه خود برسد.

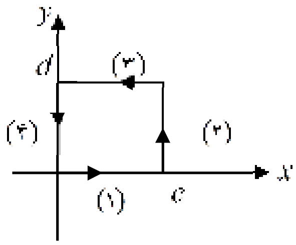
## 6-3قضیه کار – انرژی :

کار : عبارت است از حاصلضرب داخلی نیرو در جابه جائی $\qquad w = Fd\cos a$

دکارتی $w = \int_a^b (F_x d_x + F_y d_y + F_z d_z)$ $\qquad$ قطبی $w = \int_a^b (F_r d_r + rF_q d_q)$

استوانه ای $w = \int_a^b (F_r d_r + r\, F_q d_q + F_z d_z)$ $\qquad$ کروی $w = \int_a^b (F_r d_r + rF_q d_q + r\sin q\, F_f d_f)$

**مثال** : نیروی $F$ به صورت $F^{-1} = y^3 \hat{i} + 3x^2 \hat{j}$ تعریف می شود کار انجام شده توسط این نیرو در مسیر شکل مقابل چقدر است؟




$w = \int (F_x d_x + F_y d_y + F_z d_z)$ $\qquad F_x = y^3$ $\qquad F_y = 3x^2$ $\qquad F_z = 0$

1 مسیر $y = 0 \Rightarrow d_y = 0 \Rightarrow w_1 = \int_o^d y^3 dx = y^3 x\big|_o^d = y^3 d = 0$

2 مسیر $y = d \Rightarrow dx = 0 \Rightarrow w_2 = \int_o^d y^3 dy = 3x^2 y\big|_o^d = 3x^2 d = 3d^3$

3 مسیر $y = d \Rightarrow dy = 0 \Rightarrow w_3 = \int_d^o y^3 dx = y^3 x\big|_d^o = -y^3 d = -d^4$

4 مسیر $x = 0 \Rightarrow dx = 0 \Rightarrow w_4 = \int_d^o 3x^2 dy = 3x^2 y\big|_d^o = 0$

کل $W = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 3d^3 - d^4$

اگر $F$ بر حسب $v$باشد $\Leftarrow$

$$F_{(v)} mv\frac{dv}{dx}$$

اگر $F$ بر حسب $t$باشد $\Leftarrow$

$$F_{(t)} = m\frac{dv}{dt}$$

و اگر $F$ بر حسب $x$ باشد $\Leftarrow$

$$w = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 = \int_{X_o}^{X} F(x)dx$$

**مثال :** ذره ای به جرم $m$ تحت تاثیر نیروی $F = -cx + \frac{k}{x^3}$ که $a$ و $b$ ثابت هستند قرار داردکار انجام شده روی جسم وقتی از مکان $x$ تا $x$ جابه جا شود کدام است؟

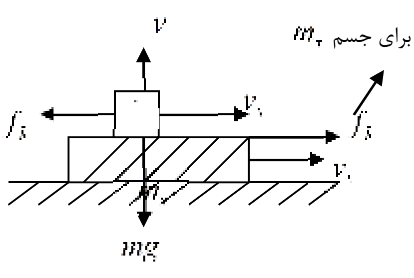
$$w = \int_{X_o}^{X} -cx + \frac{k}{x^3}dx = -\frac{cx^2}{2}\frac{k}{2x^2}\Big|_{X_o}^{X} = \frac{1}{2}\left[c(-x^2 + x_o^2) + k(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x_o^2})\right]$$

**مثال :** مطابق شکل دو جسم با جرم های $m_1$ و $m_2$ با تنه های اولیه $v_1$ و $v_2$ در حال لغزیدن هستند. ضریب اصطکاک جنبشی جسم $m_1$ با جسم $m_2$ ، $m$ و اصطکاک میان جسم $m_2$ با سطح افقی قابل چشم پوشی است. اگر طول $m_2$ به حد کافی بزرگ باشد

پس از چه مدتی تندی هر دو جسم برابر خواهد شد؟ $(v_1 < v_2)$

1) $\frac{m_1(v_2 - v_1)}{mg(m_1 + m_2)}$ 2) $\frac{m_1v_2 - m_2v_1}{mg(m_1 + m_2)}$

3) $\frac{m_2(v_2 - v_1)}{mg(m_1 + m_2)}$ 4) $\frac{m_2v_2 + m_1v_1}{mg(m_1 + m_2)}$




$$\left.\begin{cases} N = m_1 g \\ f_k = mN = m\, m_1 g \end{cases}\right\} \Rightarrow a_1 = mg \Rightarrow v = a_1 t + v_1 = mgt + v_1$$

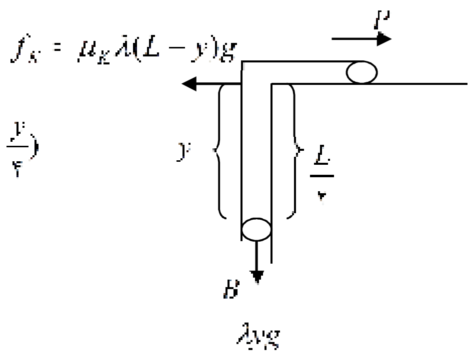
$$f_k = F = ma_1$$

$$2\ \text{جسم} : f_k = m\, m_1 g = -m_2 a_2 \Rightarrow a_2 = -m\frac{m_1}{m_2}g \Rightarrow v' = a_2 t + v_2 = -m\frac{m_1}{m_2}gt + v_2$$

$$v = v' \Rightarrow m\, g\, t + v_1 = -m\frac{m_1}{m_2}gt + v_2 \Rightarrow t = \frac{m_2(v_2 - v_1)}{m\, g(m_1 + m_2)}$$

**مثال :** مطابق شکل ریسمانی همگن به طول $4m$ و جرم $3kg$ بر روی میزی نگه داشته شده بـه طـوری کـه نصـف طـول ریسمان از لبه میز آویزان است ضرایب اصـطکاک ایسـتایی و جنبشـی بـین میـز و ریسـمان برابـر اسـت بـا $m_S=\frac{7}{10}$ و $m_K=\frac{1}{2}$. نیروی $F$ به انتهای $A$ چنان وارد می شود که ریسمان با سرعت ثابت روی میز کشیده شود تا تمامی ریسمان روی میز قرار گیرد و کار نیروی $F$ در این اتفاق چند ژول است؟ $(g=10)$

1) 9     2) 37/5     3) 46/5     4) 84/4




$$\frac{m}{L}=\lambda=\frac{3}{4}$$

$$F=\mu_K\lambda(L-y)g+\lambda yg=\mu_K g\lambda L+(1-\mu_K)\lambda gy=15(1+\frac{y}{4})$$

$$W=\int_0^{\frac{L}{2}}F\,dy=15\int_0^2(1+\frac{y}{4})dy=15(y+\frac{y^2}{8})\Big|_0^2=37/5$$

3-7 نیروی گرانش برابر است با :

$$F=\frac{Gm_1m_2}{r^2} \qquad ! \qquad G=6/672\times10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}$$

جرم زمین

$$g=\frac{GMe}{R_e^2}\Rightarrow\frac{dg}{g}=-2\frac{dr}{r}$$

شعاع زمین

**مثال :** اگر $16km$ از سطح زمین بالا برویم ، شتاب گرانش $g$ از مقدار $9/8\frac{m}{s^2}$ به چه مقداری می رسد؟

$$\frac{dr}{r}=\frac{16}{6416}\approx\frac{1}{400}$$

$$\frac{dg}{g}=-2\frac{dr}{r}=-\frac{1}{200}\Rightarrow dg=-\frac{1}{200}(9/8)\approx-0/05$$

$$9/8-0/05=9/75\frac{m}{s^2}$$

شار میدان گرانش عبوری از هر سطح بسته برابر است با حاصل ضرب جرم موجود در سطح بسته در $4pG$.

$$g(A) = -\int 4pG r dv$$

**مثال :** شدت میدان گرانشی را درون یک پوسته کروی به شعاع درونی $a$ وشعاع بیرونی $b$بدست آورید؟

$$r = \frac{M}{\frac{4}{3}p(b^3 - a^3)} \Rightarrow g(4p\, r^2) = -4pG\int_a^r \frac{M}{\frac{4}{3}p(b^3 - a^3)}(4p\, r^2)dr$$

$$\Rightarrow g = \frac{-MG}{b^3 - a^3}\left(\frac{r^3 - a^3}{r^2}\right) \qquad a < r < b$$

$$g(4p\, r^2) = -4pGM \Rightarrow g = \frac{-MG}{r^2} \qquad , \qquad r > b$$

سرعت فرار از سطح سیاره برابر است با :

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

**مثال :** سرعت فرار از سطح سیاره ای که جرم آن 18 برابر جرم زمین و شعاع آن 2 برابر شعاع زمین است. چند برابر سرعت فرار از سطح زمین است؟

$$\to \frac{v_{2e}}{v_{1e}} = \sqrt{\frac{\frac{18GM_1}{R_2}}{\frac{2GM_1}{R_1}}} = \sqrt{9} = 3$$

$$v_{1e} = \sqrt{\frac{2GM_1}{R_1}}$$

$$v_{2e} = \sqrt{\frac{2GM_2}{R_2}} = \sqrt{\frac{2G|8M|}{2R_1}} = \sqrt{\frac{|8GM|}{R_1}}$$

**مثال :** ماهواره ای به جرم $m$بر روی یک مدار دایره ای به شعاع $g$ از مرکز زمین با سرعت ثابت در حرکت است. انرژی کل این ماهواره بر حسب $f$ اندازه نیروی جاذبه وارد بر ماهواره و شعاع $r$کدام است؟

1) $-Fr$ 2) $-\frac{1}{2}Fr$ 3) $\frac{1}{2}Fr$ 4) $Fr$

انرژی پتانسیل $U=-Fr=-\dfrac{GmM}{r}$

$$F=\frac{GmM}{r^2}=\frac{mV^2}{r}\Rightarrow V=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$E=K+U=\frac{1}{2}mV^2\neq(-\frac{GmM}{r})=-\frac{GmM}{2r}=-\frac{1}{2}Fr$$

**مثال :** ذره ای به جرم $m$ تحت تاثیر یک نیروی مرکزی با پتانسیل $V(r)=kr^3$ حرکت می کند $(k>0)$ بـه ازای چـه مقدار از انرژی مسیر ذره دایره ای به شعاع $a$ حول مبدا حرکت خواهد شد؟

$$f(r)=-\frac{dv}{dr}=-3kr^2 \qquad , \qquad f(r)=\frac{mv^2}{r}$$

$$\frac{mv^2}{r}=-3kr^2\Rightarrow\frac{1}{2}mv^2=-\frac{3}{2}kr^3$$

$$E=\frac{1}{2}mv^2-v(r)=-\frac{3}{2}kr^3-kr^3=-\frac{5}{2}kr^3\Rightarrow E=-\frac{5}{2}ka^3 \qquad r=a$$

حرکت زاویه اجرام برابر است با :

$$L=Mr^2\dot{\theta}$$

**مثال :** فرض کنید اندازه حرکت زاویه ای ماه نسبت به زمین برابر $L$ است. اگر حرکت ماه و زمین را حول مرکز جرمشان، دایره ای در نظر بگیریم و $M_1$ جرم ماه و $M_2$ جرم زمین باشد. اندازه حرکت زاویه ای سیستم ماه و زمـین حـول مرکـز جرمشان کدام است؟

برای درجه دوم

$$L=M_1r^2\dot{\theta}$$

$$L'=m\,r^2\dot{\theta} \qquad ! \qquad m=\frac{M_1M_2}{M_1+M_2}\Rightarrow L'=\frac{M_1M_2}{M_1+M_2}r^2\dot{\theta}$$

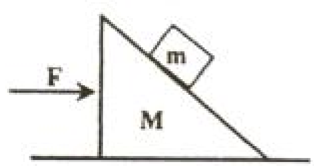
$$\Rightarrow L'=\frac{M_2}{M_1+M_2}L$$

## تست های طبقه بندی شده فصل سوم

**۱- یک دستگاه منزوی از دو ذره با جرم های مساوی تشکیل شده است. اگر این دو ذره در فاصله بســیار دور از یکدیگر باشند، در لحظه ای ذره اول ساکن و ذره دوم با سرعت به ذره اول نزدیک می شود، در این صورت انرژی مکانیکی دستگاه :**

1) ثابت نیست　　2)صفر وثابت است　　3)منفی و ثابت است　　4) مثبت و ثابت است

**۲- در شکل مقابل بیشینه نیروی افقی $F$ طوری به گوه وارد می شود که جسم $m$ روی آن ساکن می ماند. هرگاه ضریب اصطکاک بین $m$ و $M$، $\mu=\frac{1}{5}$ و بین $M$ و سطح افق قابل چشم پوشی است. در آن صورت شتاب $M$ برابر کدام است؟**

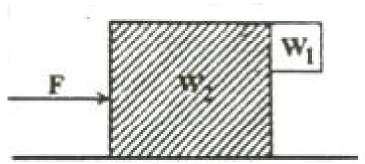



1) $F/M$　　2) $\frac{3}{2}g$　　3) $\frac{3}{4}g$　　4) $F/(M+m)$

**۳- قطعه ای به وزن ده نیوتن بر روی سطح میز قرار دارد، نیروی $F(t)=t$ (نیوتن) به صورت افقی به آن وارد و پس از ۲ ثانیه حذف می شود. اگر ضریب اصطکاک سطح میز $\mu_s=0/1$ باشد، کدام گزینه زمان شروع حرکت قطعه را نشان می دهد؟**

1) یک ثانیه　　2) دو ثانیه　　3) سه ثانیه　　4) چهار ثانیه

**۴- مطابق شکل جسم با وزن $W_2$ بر روی سطح افقی بدون اصطکاکی قرار دارد. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین سطوح $W_1$ و $W_2$، $\mu$ باشد. حداقل نیروی لازم که جسم $W_1$ نسبت به $W_2$ ساکن بماند کدام است؟**




1) $\mu w_1$　　2) $\mu(w_1+w_2)$　　3) $\frac{(w_1+w_2)}{\mu}$　　4) $\frac{w_2}{\mu}$

۵- ذره ای به جرم ۴۰ گرم تحت تاثیر پتانسیل $V(x)=-(1-x^2)e^{-x^2}$ که در آن $x$ بر حسب مترو $V(x)$ بر حسب ژول است، در راستای محور $x$ حرکت می کند، محل تعادل پایدار و زمان تناوب نوسانات کوچک حول این نقطه به ترتیب از راست به چپ بر حسب متر و ثانیه برابر است با:

1) $-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}\pi}{10}$ 2) $\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}\pi}{10}$ 3) $0, \frac{\sqrt{2}\pi}{10}$ 4) $0, 0/2\pi$

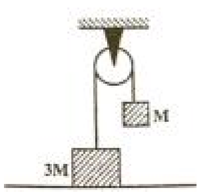
۶- جسمی به جرم $m$ از حال سکون از ارتفاع $h$ رها می شود. اگر نیروی مقاومت هوا به شکل $-bV$ که در آن $V$ تندی جسم و $b$ عدد ثابتی است، باشد. مدت زمانی که طول می کشد تا تندی جسم به نصف تندی حد برسد کدام است؟

1) $\frac{2m}{b}$ 2) $\frac{m}{2b}$ 3) $\frac{bh}{mg}+\frac{m\ln 2}{b}$ 4) $\frac{m\ln 2}{b}$

۷- میله ای افقی صلبی به جرم $m$ را از دو طرف با نیرو های افقی $F_1$ و $F_2$ می کشیم مقدار نیروی کشـــش در وسط میله چقدر است؟

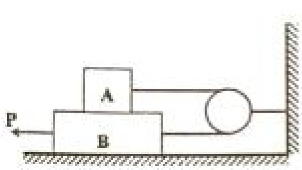
1) $F_1-F_2$ 2) $F_1+F_2$ 3) $\frac{F_1-F_2}{2}$ 4) $\frac{F_1+F_2}{2}$

۸- در شکل مقابل فردی به جرم $M$ حداکثر با چه شتابی از طناب سمت راست می تواند بالا برود به طوری که جسم $A$ به جرم $3M$ روی زمین ساکن باقی بماند. ( نیروهای اتلافی و جرم نخ و قرقره ناچیز است.)



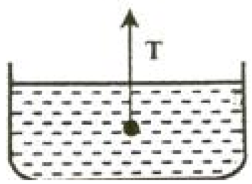

1) $g$ 2) $2g$
3) $3g$ 4) $4g$

۹- در شکل روبرو جرم جسم $A$، $3M$ و جرم جسم $B$، $M$ و ضریب اصطکاک ایستایی و جنشی میان سطح تماس دو جسم $A$ و $B$ و نیز جسم $A$ با سطح میز افقی به ترتیب $\mu_s$ و $\mu_k$ است. جرم نخ و قرقره ناچیز و اصطکاک قرقره با محورش قابل چشم پوشی است.نیروی افقی $P$ چقدر باشد تا جسم $A$ حرکت یکنواخت داشته باشد؟




1) $4\mu_k M_g$ 2) $5\mu_k M_g$
3) $6\mu_k M_g$ 4) $(2\mu_s+4\mu_k)M_g$

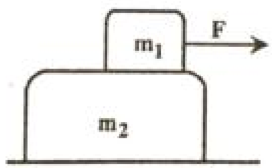
۱۰- در شکل مقابل جسمی به جرم $m$ که به طنابی قائم متصل شده در مایعی غوطه ور است. اگر کشش در طناب $T$ باشد، نیرویی که جسم بر مایع وارد می کند چقدر است؟




1) $T$ 2) $mg$

3) $mg-T$ 4) صفر

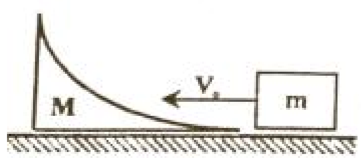
۱۱- در شکل مقابل نیروی $F$ به جسم $m_1$ وارد می شود و مقدار آن به گونه ای است که جسم $m_1$ بر روی جسم $m_2$ نمی لغزد. اصطکاک بین جرم و زمین قابل اغماض است. نیروی اصطکاک وارد بر $m_1$ چگونه است؟




1) از $F$ کوچکتر است. 2) از $F$ بزرگتر است.

3) با $F$ مساوی است. 4) بسته به مقدار $\frac{m_1}{m_2}$ از $F$ کوچکتر یا بزرگتر است.

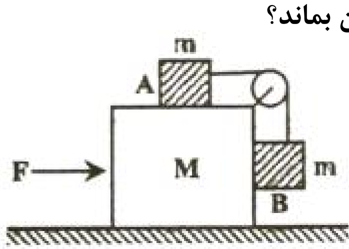
۱۲- جسمی به جرم $m$ مطابق شکل با سرعت $V_0$ به سمت سطح شیبداری به جرم $M$ حرکت می کند و از آن بالا می رود. جرم $m$ حداکثر به چه ارتفاعی دست می یابد. از اصطکاک بین $m$ و $M$ و بین $M$ و سطح زمین صرف نظر شود.




1) $h=\frac{m}{M}\frac{V_0^2}{2g}$ 2) $h=(\frac{m}{m+M})\frac{V_0^2}{2g}$

3) $h=\frac{V_0^2}{2g}$ 4) $h=(\frac{M}{m+M})\frac{V_0^2}{2g}$

۱۳- مطابق شکل زیر جسم $A$ به جرم $m$ ر روی مکعبی به جرم $M$ قرار دارد، و توسط نخی که از روی قرقره بدون تصطکاک گذشته است به جسم $B$ به جرم $m$ متصل است. جسم $B$ با مکعب در تماس است. مکعب بر روی سطح افقی قرار دارد. اگر از جرم نخ و قرقره صرفنظر کنیم و اصطکاک کلیه سطوح تماس ناچیز باشد نیروی افقی اعمال شده $F$ چقدر باشد تا جسم $A$ نسبت به مکعب ساکن بماند؟



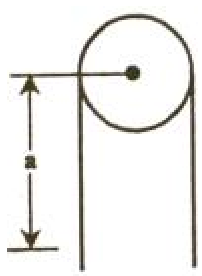

1) $(M+2m)g$ 2) $(M+2m)\frac{g}{2}$

3) $(M+m)g$ 4) $2mg$

**۱۴-کامیونی روی جاده ای مستقیم به طوریکنواخت درحرکت است که راننده ناگهان ترمز می کند، کامیون دارای شتاب $\frac{g}{2}$نسبت به زمین می شود و جعبه ای که درعقب کامیون قرار دارد رو به جلو می لغزد، اگرضریب اصطکاک لغزشی بین جعبه وکف کامیون $\frac{1}{3}$ باشد، اندازه شتاب جعبه نسبت به کامیون چقدر است؟**

1) $\frac{g}{2}$ 2) $\frac{g}{3}$ 3) $\frac{g}{6}$ 4) $\frac{5g}{6}$

**۱۵- طناب یکنواختی به طول $2a$در حال تعادل از یک میخ افقی ثابت آویزان است. ضربه بسیار کوچکی سبب می شود که طناب به آرامی از روی میخ بلغزد. اصطکاک بین طناب و میخ ناچیز است. سرعت طناب، وقتی از میخ جدا می شودکدام است؟**




1) $\sqrt{ag}$ 2) $\sqrt{2ag}$

3) $2\sqrt{ag}$ 4) $\frac{1}{2}\sqrt{ag}$

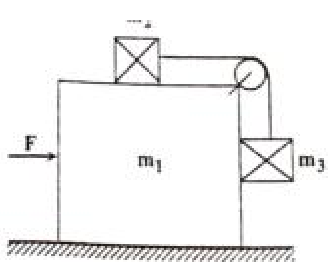
**۱۶- به ازاء چه مقادیری از ثابتهای $a$ و $b$ و $c$ نیروی $F=\hat{i}(ax+2by^2)+\hat{j}cxy$ پایستار است؟**

1) $a=4b$ 2) $a=b=c$ 3) $b=2c$ 4) $c=4b$

**۱۷- معدله حرکت ذره ای به جرم دوکیلو گرم $r=\left(3t+5t^2\right)\hat{i}$ می باشد.کار انجام شده روی ایــن ذره در بــازه زمانی صفر تا۱ ثانیه چند ژول است؟ ( $\vec{r}$ بر حسب متر و ف بر حسب ثانیه است.)**

1) 315 2) 324 3) 48 4) 108

**۱۸- در شکل مقابل کلیه سطوح بدون اصطکاک می باشند. نیروی $F$ چقدر باشد تا جسم $m_2$ ارتفاع خــود را از سطح زمین حفظ کند؟**



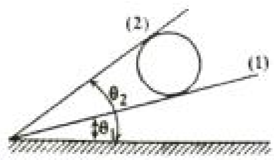

1) $F(m_1+m_2+m_3)\frac{m_3 g}{m_2}$

2) $F(m_1+m_2+m_3)g$

3) $F=m_2 g$

4) $F=\frac{m_3 g}{m_2}$

۱۹- کره یکنواختی به وزن $W$ میان دو سطح شیبدار با زوایای شیب $\theta_1$ و $\theta_2$ به حالت سکون قرار دارد. با فرض اینکه هیچ اصطکاکی وجود ندارد، نیروی عکس العمل سطح (۱) را بدست آورید؟

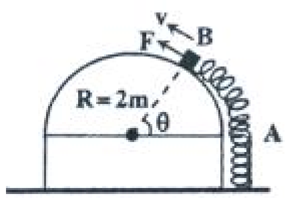



1) $\dfrac{W\sin\theta_1}{\sin(\theta_2-\theta_1)}$ 2) $\dfrac{w\sin\theta_1}{\cos(\theta_2-\theta_1)}$

3) $\dfrac{w\sin\theta_2}{\sin(\theta_2-\theta_1)}$ 4) $\dfrac{w\sin\theta_2}{\cos(\theta_2-\theta_1)}$

۲۰- در نقطه $A$ جسم $M$ به جرم $2kg$ در حال سکون با فنری با ضریب سختی $\frac{18}{\pi^2}\frac{N}{m}$ در حال تعادل بوده است. سپس جسم $M$ را با نیروی متغیر $F$ روی سطح بدون اصطکاک کروی شکل به شعاع ۲متر، به نقطه $B$ بالا می کشیم. اگر در نقطه $B$، $\theta = 30^0$ و $V = 3\frac{m}{s}$ باشد کار انجام شده توسط نیروی $F$ چند ژول است؟

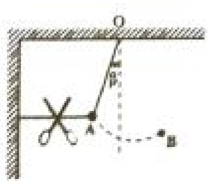
$(g = 10\frac{m}{s^2})$




1) 30 2) 10

3) 29 4) 21

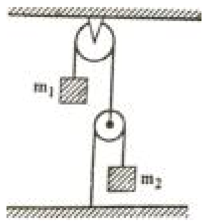
۲۱- توپی به کمک دو نخ در وضع $A$ (شکل زیر) قرار دارد. نخ افقی را قطع می کنیم و توپ نظیر یک آونگ به نوسان در می آید. نقطه $B$ دورترین نقطه سمت راست است که توپ به آن می رسد وسپس به سوی $A$ باز می گردد. نسبت کشش نخ $OA$ در وضعیت $B$ به کشش این نخ در وضعیت $A$ قبل از بریده شدن نخ افقی، کدام است؟




1) 1 2) $\dfrac{1}{\cos\beta}$

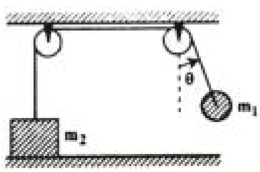
3) $\cos\beta$ 4) $\cos^2\beta$

**۲۲- نخی از یک قرقره بدون جرم و بدون اصطکاک که به سقف متصل است می گذرد. از یک انتهای این نخ جرم $m_1$ آویخته است و از انتهای دیگر قرقره بدون اصطکاک و بدون جرم دیگری آویزان است. از این قرقره هم نخی می گذردو به یک انتهای آن جرم $m_2$ آویخته و انتهای دیگر آن به زمین محکم بسته شده است. شتاب جرم $m_1$ کدام است؟ $(m_1 = 4m_2)$**



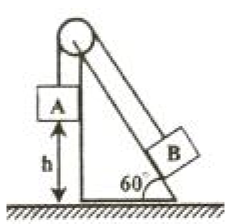

1) $\frac{g}{4}$
2) $\frac{g}{3}$
3) $\frac{2}{3}g$
4) $\frac{3}{8}g$

**۲۳- در شکل زیر جسم $m_1$ از چه زاویه ای (نسبت به خط قائم) باید رها شود، تا جسم $m_2$ درست بلند شدن از زمین را آغاز کند؟ $(m_2 = 2m_1)$**



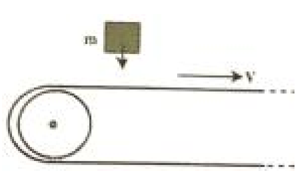

1) صفر درجه
2) $30^\circ$
3) $45^\circ$
4) $60^\circ$

**۲۴- دستگاه شکل زیر را که در آن همه سطوح و قرقره بدون اصطکاک می باشند از حالت سکون رها می کنیم. وقتی جسم A به سطح افق می رسد گوه چه مسافتی را بر حسب h روی سطح افقی طی کرده است؟ (جرم جسم A و B یکسان و جرم گوه دو برابر جرم جسم A است. جسم A همواره به طور قائم و در تماس با گوه است و فاصله اولیه آن تا سطح افقی است.)**




1) $\frac{h}{8}$
2) $\frac{2}{5}h$
3) $\frac{3}{8}h$
4) $\frac{3}{5}h$

**۲۵- بسته ای که در امتداد قائم در حرکت است روی یک تسمه نقاله افقی می افتد. پس از چه مدت زمانی از لحظه تماس، بسته نسبت به تسمه نقاله ساکن می شود؟ جرم بسته m وتندی نقاله همواره ثابت $V_0$ و ضریب اصطکاک جنبشی میان بسته و تسمه $\mu_k$ است.**




1) $\frac{V_0}{g}$
2) $\frac{V_0}{\mu_k g}$
3) $\frac{\mu_k V_0}{g}$
4) $\frac{2V_0}{\mu_k g}$

۲۶- اگر بدانیم نیروی مقاومت هوا در سقوط آزاد جسمی به جرم $m$ از رابطه $f_k=-kv$ به دست می آید، سرعت جسم در هر لحظه بر حسب سرعت حد $(V_T)$ در سقوط آزاد از کدام گزینه به دست می آید؟

1) $V=V_T\times e^{\frac{-kt}{m}}$

2) $V=V_T(1-e^{\frac{-kt}{m}})$

3) $V=V_T(1-e^{\frac{kt}{m}})$

4) $V=V_T(1+e^{\frac{-kt}{m}})$

۲۷- اگر تعداد $N$ واگن هر یک به جرم $m$ در قطاری وجود داشته باشد و قطار با نیروی $F$ کشیده شود، شتاب وارد بر واگن $n$ام چقدر است؟

1) $\frac{F}{nmN}$

2) $\frac{F}{mN}$

3) $\frac{nF}{mN}$

4) $\frac{F}{mN}$

۲۸- طناب یکنواختی به جرم $M$ و به طول $L$ از شاخه درختی آویزان است، کشش در فاصله $X$ از انتهای طناب چقدر است؟

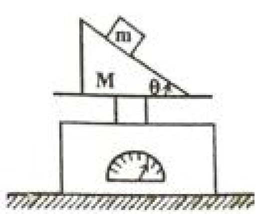
1) $\frac{MX}{gL}$

2) $\frac{Mg}{L}X$

3) $\frac{ML}{g}X$

4) $\frac{M}{LgX}$

۲۹- گوه ای به جرم $M$ روی یک ترازوی فنری قرار دارد و به آن چسبیده است. مطابق شکل جسمی به جـرم $m$ از روی گوه به سمت پایین حرکت می کند. ترازو چه وزنی را نشان می دهد؟ ضریب اصطکاک لغزشی بـین سطح شیبدار و جسم $m$ برابر $\sqrt{3}$ و $\theta=30^\circ$ است.



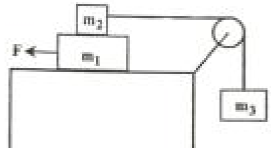

1) $mg$

2) $(m+M)g$

3) $(\frac{\sqrt{3}}{2}m+M)g$

4) $(\frac{3}{2}m+M)g$

۳۰- در شکل مقابل به جرم $m_1$ نیروی ثابت $F$ وارد می شود. $|\vec{a}_1-\vec{a}_2|$ اندازه شتاب جسم $m_1$ نسبت به جرم $m_2$ کدام است؟ اصطکاک بین سطح های در تماس و جرم قرقره و نخ قابل چشم پوشی است و $m_2=m_3$.




1) $\left|\frac{F}{m_1}-\frac{g}{2}\right|$

2) $\left|\frac{F}{m_2}-g\right|$

3) $\left|\frac{F}{m_1}-g\right|$

4) $\frac{F}{m_1}+\frac{g}{2}$

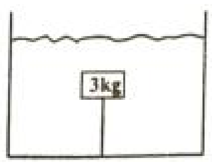
**۳۱- ارتفاع یک تاب نسبت به زمین از ۰/۵ متر تا ۲ متر تغییر می کند. حداکثر سرعت تاب چند $\frac{m}{s}$ است؟**

1) 5/4　　2) 7/7　　3) 29/4　　4) 35/2

**۳۲- جسمی روی یک سطح شیبدار به زاویه شیب $30^0$ به طور یکنواخت لغزیده و پایین می آید، ضریب اصطکاک بین جسم و سطح چقدر است؟**

1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　3) $\sqrt{3}$　　4) 1

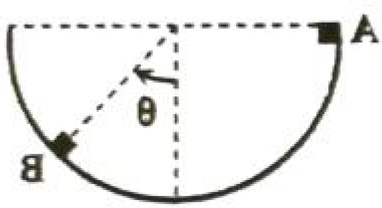
**۳۳- مطابق شکل روبرو، جسمی با حجم $3/5\times10^{-3}$ متر مکعب و جرم ۳ کیلو گرم به وسیله طنابی به ته ظرف پر از آبی بسته شده استو ظرف با شتاب $22\frac{m}{s^2}$ به سمت پایین حرکت می کند با فرض اینکه $d=1000\frac{kg}{m^2}$ چگالی آب و $g=10\frac{m}{s^2}$ باشد، کشش نخ چند نیوتن است؟**




1) 6　　2) 4

3) 24　　4) 5

**۳۴- مکعبی کوچک به جرم m از نقطه A بر روی مسیر نیم دایره ای بدون اصطکاک از حال سکون رها می شود. عکس العمل سطح در نقطه B کدام است؟**




1) $mg\cos\theta$

2) $mg\sin\theta$

3) $2mg\cos\theta$

4) $3mg\cos\theta$

**۳۵- کدام گزینه نادرست است؟**

1) اصطکاک جنبشی و ایستایی هر دو همواره در خلاف جهت سرعت نسبی جسم نسبت به سطح تماس هستند.

2) اصطکاک جنبشی همواره در خلاف جهت سرعت نسبی جسم نسبت به سطح تماس است.

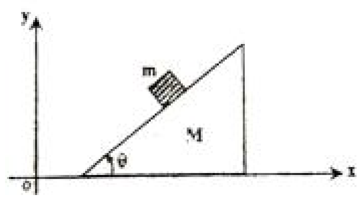
3) کار انجام شده توسط نیروی اصطکاک جنبشی بستگی به انتخاب دستگاه مختصات مرجع دارد.

4) قضیه کار و انرژی فقط در دستگاه مختصات مرجع لخت درست است.

۳۶- دونده ای به سمت جلو می دود توپی به جرم ۱۰۰ گرم را روی پیشانی خود قرار مـی دهـد اگـر ضـریب اصطکاک ایستایی بین توپ و پیشانی دونده ۰/۴ باشد و بخواهیم توپ نیافتد، حداقل شتاب دونده بر حسـب متر بر مجذور ثانیه کدام است؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$

1) 2/5 2) صفر 3) 25 4) 40

۳۷- گوه ای به جرم $M$ روی سطح یک میز افقی ثابت بدون اصطکاک قرار دارد. زاویـه شـیب گـوه $\theta$ اسـت. مکعبی به جرم $m$ روی گوه گذاشته می شود. مکعب روی گوه شروع به لغزش می کند. اگر $a_x$ و $a_y$ شـتاب در راستای $x$ و $y$ مکعب نسبت به میز و $A$ شتاب افقی گوه نسبت به میز باشد، کدام رابطه درست است؟



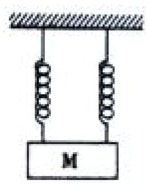

1) $a_y = a_x \operatorname{tg}\theta$

2) $a_y = (a_x - A)\operatorname{tg}\theta$

3) $a_y = (a_x + A)\operatorname{tg}\theta$

4) $A = a_y \cos\theta - a_x \sin\theta$

۳۸- فنری با جرم ناچیز و ثابت $6(\frac{N}{m})$ را نصف کرده و مطابق شکل به جسم $A$ به جرم $m$ متصل می کنیم. اگر این مجموعه با بسامد ۳هرتز نوسان کند، جرم جسم $A$ چند کیلو گرم است؟




1) $\frac{1}{12\pi^2}$ 2) $\frac{1}{6\pi^2}$

3) $\frac{1}{3\pi^2}$ 4) $\frac{2}{3\pi^2}$

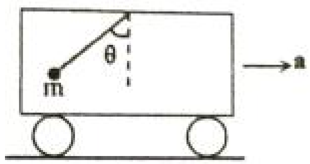
۳۹- مینیمم مقاومت مؤثر هوا روی یک چتر باز و چترش زمانی که چتر کاملا باز می شود، چند نیوتن اسـت؟ (وزن چتر باز و چترش، ۷۵۰ نیوتن است.)

1) 28 2) 375 3) 43 4) 750

**۴۰- فردی از بالای یک تپه یخی به شکل نیمکره شروع به لغزیدن می کند. اگر یخ بدون اصطکاک باشد، ارتفاع نقطه ای که فرد از تپه جدا می شود بر حسب ارتفاع تپه $(R)$ برابر است با:**

1) $\frac{1}{2}R$  2) $\frac{2}{3}R$  3) $\frac{1}{3}R$  4) $\frac{3}{2}R$

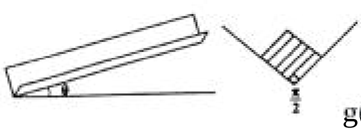
**۴۱- آونگی که از سقف واگن قطاری آویزان است، کار یک شتاب سنج را انجام می دهد. رابطه بین شتاب افقی واگن و زاویه $\theta$ (انحراف آونگ از خط عمودی ) چگونه است؟**



1) $g = a(\tan\theta)^{\frac{1}{2}}$  2) $g = a\tan\theta$

3) $a = g(\tan\theta)^{\frac{1}{2}}$  4) $a = g\tan\theta$

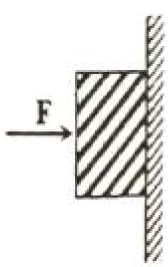
**۴۲- جسمی به جرم $m$ در داخل سطح شیبداری که مانند شکل به صورت ناودان قائم زاویه است به پایین می لغزد. اگر ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم و ماده تشکیل دهنده ناودان $\mu_k$ باشد، شتاب جسم کدام است؟**



1) $\sqrt{2}g\sin\theta$  2) $g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$

3) $g\sin\theta(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\mu_k)$  4) $g(\sin\theta - \sqrt{2}\mu_k\cos\theta)$

**۴۳- نیروی افقی $F$ برابر با $53N$، مکعبی به وزن $22N$ را به دیوار قائمی می فشارد (مطابق شکل) . ضریب اصطکاک ایستایی میان دیوار و مکعب ۰/۶۰ می باشد. فرض کنید که مکعب در ابتدا حر کت نمی کند. آیا مکعب شروع به حرکت می کند؟**



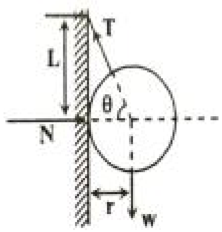
1) خیر

2) بلی

3) داده های مسئله کافی نیست.

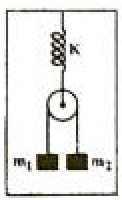
4) ابتدا حرکت می کند و سپس می ایستد.

**۴۴- کره یکنواختی به وزن $w$ و شعاع $r$ به وسیله طنابی مطابق شکل به رادیو بدون اصطکاکی متصل شده است. فاصله نقطه اتصال از مرکز کره $L$ است. کشش طناب کدام است؟**




1) $w\frac{r}{L}$
2) $w\frac{(L^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}{L}$
3) $\frac{wL}{(r^2+L^2)^{\frac{1}{2}}}$
4) $\frac{w}{L(L^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}$

**۴۵- ماشین آتوودی با جرم های $m_1$ و $m_2$ $(m_1>m_2)$، مطابق شکل توسط فنری به سقف یک آسانسور آویزان شده است. وقتی آسانسور با سرعت ثابت حرکت کند، افزایش طول فنر از اندازه طبیعی اش $x$ می باشد. اگر آسانسور با شتاب $a$ حرکت کند، $x$ به $x'$ تغییر می کند. اندازه شتاب آسانسور کدام است؟**

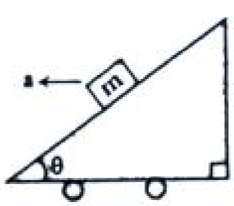



1) $g(\frac{x'}{x}-1)$
2) $2g(\frac{x'}{x}-1)$
3) $2g(\frac{x}{x'}-1)$
4) $g(\frac{x}{x'}-1)$

**۴۶- ذره ای به جرم $m$ در لحظه $t=0$ در حالت سکون در مبدا مختصات قرار دارد. این ذره تحت تاثیر نیروی دافعه $F=kx^{-\frac{1}{2}}$ $(k>0)$ قرار دارد که $x$ فاصله ذره از مبداء مختصات است. زمان رسیدن ذره به نقطه $x=b$ چقدر است؟**

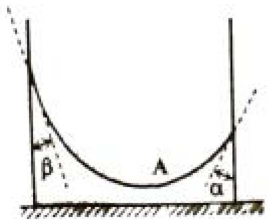
1) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}b^{\frac{3}{4}}$
2) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}b^{\frac{5}{4}}$
3) $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{m}{k}}b^{\frac{5}{4}}$
4) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}b^{\frac{3}{4}}$

**۴۷- جسمی به جرم $m$ بر روی سطح شیبداری به زاویه $\theta$ قرار دارد. سطح شیبدار با شتاب $a$ در حال حرکت است. حداقل ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح شیبدار چقدر باشد تا جسم روی سطح شیبدار به سمت بالا بلغزد؟** $(a \ge g\,tg\,\theta)$




1) $\frac{a\cos\theta+g\sin\theta}{g\cos\theta+a\sin\theta}$
2) $\frac{a\cos\theta-g\sin\theta}{g\cos\theta+a\sin\theta}$
3) $\frac{a\cos\theta+g\sin\theta}{g\cos\theta-a\sin\theta}$
4) $\frac{a\sin\theta-g\cos\theta}{g\sin\theta+a\cos\theta}$

۴۸- ریسمان یکنواختی به جرم $m$ در حال تعادل است و $\frac{2}{3}$ جرم طناب در سمت چپ پایین ترین نقطه طناب (نقطه $A$) قرار دارد. رابطه بین زوایای $\alpha$ و $\beta$ کدام است؟




1) $\sin\alpha = 2\cos\beta$ 2) $\sin\alpha = 2\sin\beta$

3) $tg\alpha = 2tg\beta$ 4) $tg\alpha = \frac{2}{3}tg\beta$

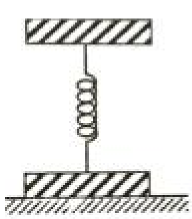
۴۹- به جسمی به جرم ۳ کیلو گرم، نیروی $F$ طوری وارد می شود که موضع جسم بر حسب زمان از رابطه $X = 3t - 4t^2 - t^3$ به دست می آید. ($x$ بر حسب متر و $t$ بر حسب ثانیه است.) آهنگ لحظه ای کاری که این نیرو در لحظه $t = 1sec$ روی جسم انجام می دهد، چقدر است؟

1) 6 2) 12 3) 24 4) 48

۵۰- جسمی به جرم $\frac{1}{3}$ کیلو گرم تحت اثر نیروی $\vec{F} = (x^2 - y)\hat{i} + (y^2 + x)\hat{j}$ از حال سکون روی مسیر $y = x^2 + 1$ و $x = 1$ از نقطه $(0,1)$ تا نقطه $(2,5)$ حرکت می کند. در انتهای مسیر سرعت جسم چه مقدار است؟

1) $\sqrt{12}$ 2) $\sqrt{108}$ 3) $\sqrt{134}$ 4) $\sqrt{268}$

۵۱- مطابق شکل زیر، دو قرص یکنواخت و مشابه به جرم های $m$، به دو انتهای فنری با جرم ناچیز و ثابت نیروی $k$ متصل شده اند. در حالی که دستگاه در یک سطح افقی و در وضعیت تعادل قرار دارد، قرص بالایی را به سمت پایین فشار می دهیم، تا فنر به اندازه $x$ متراکم شود وسپس آن را رها می کنیم. به ازای کدام مقدار $x$، قرص پایینی در آستانه جهش به سمت بالا قرار می گیرد.



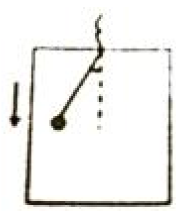
1) $\frac{mg}{2k}$ 2) $\frac{mg}{k}$

3) $\frac{2mg}{k}$ 4) $\frac{3mg}{k}$

**۵۲- گلوله ای با چگالی یکنواخت $\rho$ و جرم $m$ را درون شاره ای با چگالی $\rho'$ رها می کنیم. فرض کنید $\rho' = 2\rho$ باشد. نیروی اصطکاک وارد بر گلوله از طرف شاره به صورت $bv^2$ است، که $v$ سرعت گلوله است و $b$ عددی ثابت. سرعت نهائی گلوله چقدر است؟**

1) $\sqrt{\frac{mg}{b}}$ 2) $\sqrt{\frac{2mg}{b}}$ 3) $\sqrt{\frac{3mg}{b}}$ 4) $\sqrt{\frac{mg}{2b}}$

**۵۳- یک آونگ داخل آسانسوری قرار دارد، مطابق شکل زیر آونگ را از وضعیت تعادل منحـرف مـی کنـیم. همزمان با رها کردن آونگ کابل نگهدارنده آسانسور پاره می شود و مجموعه سقوط آزاد می کند. آونـگ در هنگام سقوط آسانسور:**



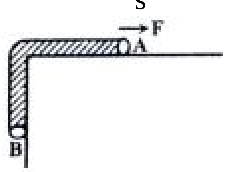
1) به نوسان عادی ادامه می دهد.

2) در همین حال باقی می ماند.

3) به حالت قائم در آمده و به همان حالت باقی می ماند.

4) به سمت سقف آسانسور حرکت می کند.

**۵۴- مطابق شکل ریسمانی همگن به طول $4m$ و جرم $3kg$ بر روی زمین نگه داشته شده، به طوری که نصف طول ریسمان از لبه میز آویزان است. ضرایب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین میز و ریسمان برابر است با $\mu_s = \frac{7}{10}$ و $\mu_k = \frac{1}{2}$ . نیروی $F$ به انتهای $A$ چنان وارد می شودکه ریسمان با سرعت ثابت روی میز کشیده شود تا تمامی ریسمان روی میز قرار گیرد. کار نیروی $F$ در این انتقال چند ژول است؟ $(g = 10\frac{m}{s^2})$**




1) 9 2) 37/5

3) 46/5 4) 84

**۵۵- موشکی از سطح زمین(به جرم $M$ و شعاع $R$)با سرعت اولیه ی $\vec{V}=(v_r,v_\theta)$ (که $v_r=\dot{r}, v_\theta=r\dot{\theta}$) پرتاب می شود. با صرفنظر از مقاومت هوا و دوران زمین، بیشینه ارتفاع از سطح زمین، $H$، $(H \ll R)$ که موشک در مسیرش به آن می رسد تقریبا برابر است با :**

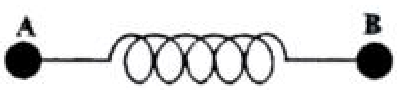
1) $\dfrac{V_r^2 R}{2(\frac{GM}{R}-V_\theta^2)}$  2) $\dfrac{2V_r^2 R}{2(\frac{GM}{R}-V_\theta^2)}$

3) $\dfrac{V_r^2 R}{(\frac{GM}{R}-2V_\theta^2)}$  4) $\dfrac{V_r^2 R}{(\frac{GM}{R}-2V_\theta^2)}$

**۵۶- جسمی با سرعت $V_0$ روی سطح شیبدار بدون اصطکاک به طرف بالا پرتاب مـی شـود. زاویـه سـطح $\theta$ است. این جسم تا چه مسافتی روی سطح بالا می رود؟**

1) $\dfrac{V_0}{g\sin\theta}$  2) $\dfrac{V_0}{2g\sin\theta}$  3) $\dfrac{V_0^2}{2g\sin\theta}$  4) $\dfrac{V_0^2}{g\sin\theta}$

**۵۷- دو گلوله $A$ و $B$ با فنر $K$ مطابق شکل زیر به هم متصل شده اند. با فشردن فنر و آزاد کردن آن شتابی که جسم $A$ پیدا می کند یک سوم شتاب $B$ است. اگر جرم $A$ برابر $2kg$ باشد، جرم $B$ چند کیلو گرم است؟**




1) $\frac{1}{3}$  2) $\frac{2}{3}$

3)  4) به ضریب سختی فنر بستگی دارد.

**۵۸- ذره ای در بالاترین نقطه نیمکره ای به شعاع $R$ قرار دارد. کمترین سرعت افقی که باید به ذره وارد شود تا ذره نیمکره را بدون لغزیدن به طرف پایین ترک کند، چقدر است؟**

1) $V_0 \ge \sqrt{2Rg}$  2) $V_0 \ge \sqrt{Rg}$  3) $V_0 \ge \dfrac{\sqrt{Rg}}{2}$  4) $V_0 \ge 2\sqrt{Rg}$

**۵۹- کتابی بر روی میز واقع است، عکس العمل نیروی وزن کتاب کدام است؟**

1) نیرویی که کتاب به کره زمین به طرف خودش (کتاب) وارد می کند.

2) نیرویی که میز به طور عمودی به طرف بالا به کتاب وارد می کند.

3) نیرویی که به میز از طرف کتاب و به سمت میز وارد می شود.

4) نیرویی که از طرف کره زمین به میز به سمت مرکز زمین وارد می شود.

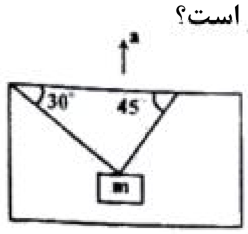
۶۰- ذره ای در میدان پتانسیل $V(x)=xe^{-x}$ حرکت می کند نیرویی که به این ذره وارد می شود برابر است با :

1) $e^{-x}$ 2) $-xe^{-x}$ 3) $e^{-x}(1-x)$ 4) $e^{-x}(x-1)$

۶۱- ذره ای در راستای قائم سقوط می کند. اگر نیروی مقاومت هوا $F=-kv^2\hat{v}$ باشد که در آن $\hat{v}$ بردار یکه در راستای سرعت لحظه ای ذره است. سرعت حدی ذره کدام است؟

1) $(\frac{mg}{k})^{\frac{1}{3}}$ 2) $(\frac{mg}{k})^{3}$ 3) $(\frac{mg}{2k})^{\frac{1}{3}}$ 4) $(\frac{2mg}{k})^{\frac{1}{3}}$

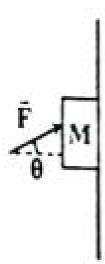
۶۲- مطابق شکل فرض کنید جسمی به جرم $m$ به ریسمان سبکی بسته شده است و درون آسانسوری که با شتاب مثبت $a$ به سمت بالا حرکت می کند قرار دارد. کشش طناب سمت راست چقدر است؟




1) $(\sqrt{3}+1)m(g+a)$ 2) $(\sqrt{3}-1)m(g+a)$

3) $\sqrt{\frac{3}{2}}(\sqrt{3}+1)m(g+a)$ 4) $\sqrt{\frac{3}{2}}(\sqrt{3}-1)m(g+a)$

۶۳- مطابق شکل می خواهیم با وارد کردن نیرویی (مانند $F$)، تحت زاویه ای (مانند $\theta$) مانع از افتادن کتابی به وزن $Mg$ شویم که به دیوار قائمی تکیه دارد. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین کتاب و دیوار $\mu$ باشد، کمینه ی $F$ چقدر خواهد بود؟




1) $\frac{Mg}{1+\mu}$ 2) $\frac{\mu Mg}{1+\mu}$

3) $\frac{Mg}{\sqrt{1+\mu^2}}$ 4) $\frac{\mu Mg}{\sqrt{1+\mu^2}}$

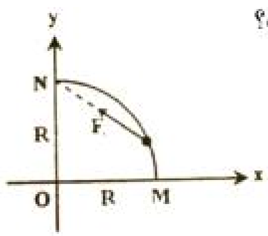
۶۴- در بزرگراهی، شیب عرض پیچ $15^\circ$ و شعاع پیچ $100m$ است. در پیچ، اتومبیل با چه سرعتی بر حسب $\frac{km}{h}$ حرکت کند تا نیروی بین لاستیک ها و جاده عمود باشد؟

1) 16/2 2) 32/4 3) 45/5 4) 58/3

**۶۵- جسمی بر اثر گرانش، سقوط کرده و نیروی گرانش روی جسم کار انجام می دهد. توان ایجاد شده توسط این نیرو ثابت است. جسم از حال سکون می افتد، در این حال توان جه رابطه ای با زمان دارد؟**

1) $P=\frac{1}{2}mgt^2$ 2) $P=\frac{1}{2}mg^2t$ 3) $P=mgt^2$ 4) $P=mg^2t$

**۶۶- گلوله ای به جرم $m$ در یک مسیر دایره ای حرکت می کند. فرض کنید در طول حرکت آن نیرویی به گلوله وارد می شودکه مطابق شکل مقدار آن برابر با مقدار ثابت $F_0$ و جهت آن همواره به سوی نقطه $N$ است. کار انجام شده توسط نیروی $F$ در جابجایی جسم از نقطه $M$ به $N$ چقدر است؟**




1) $\sqrt{2}F_0R$ 2) $\sqrt{3}F_0R$

3) $\frac{3}{\pi}F_0R$ 4) $\frac{\pi}{2}F_0R$

**۶۷- ذره ای به جرم $m$ تحت تاثیر پتانسیل یک بعدی $V(x)=V_0(ax+e^{-bx})$ با ثابت های مثبت $a$ و $b$ قرار دارد (ناحیه $x\geq 0$). کدام گزینه صحیح است؟**

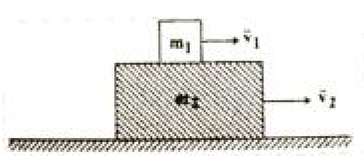
1) ذره در اطراف نقطه $x_0=\frac{\ln(\frac{b}{a})}{b}$ تعادل ناپایدار دارد.

2) ذره در اطراف نقطه $x_0=\frac{\ln(\frac{a}{b})}{b}$ تعادل ناپایدار دارد.

3) ذره در اطراف نقطه $x_0=\frac{\ln(\frac{b}{a})}{b}$ تعادل پایدار دارد و با فرکانس $\omega=\sqrt{ab\frac{V_0}{m}}$ می تواند نوسانات کوچک انجام دهد.

4) ذره در اطراف نقطه $x_0=\frac{\ln(\frac{a}{b})}{b}$ تعادل پایدار داردو با فرکانس $\omega=\sqrt{(\frac{a}{b})\frac{V_0}{m}}$ می تواند نوسانات کوچ انجام دهد.

**۶۸- مطابق شکل دو جسم به جرم های $m_1$ و $m_2$ با تندی های اولیه $v_1$ و $v_2$ در حال لغزیدن هستند. ضریب اصطکاک جنبشی جسم $m_1$ با جسم $m_2$ ، $\mu$ و اصطکاک میان جسم $m_2$ با سطح افقی قابل چشم پوشی است. اگر طول $m_2$ به حد کافی بزرگ باشد، پس از چه مدتی تندی هر دو جسم برابر خواهد شد؟ $(v_1<v_2)$**




1) $\frac{m_1(v_2-v_1)}{\mu g(m_1+m_2)}$ 2) $\frac{m_2(v_2-v_1)}{\mu g(m_1+m_2)}$

3) $\frac{m_1v_2-m_2v_1}{\mu g(m_1+m_2)}$ 4) $\frac{m_2v_2-m_1v_1}{\mu g(m_1+m_2)}$

**۶۹- یک قایق موتوری با سرعت ثابت ۴ متر بر ثانیه در حال حرکت است، اگر مقاومت آب در مقابل حرکت قایق ۴۰۰۰نیوتن باشد قدرت موتور قایق چند $KW$است؟**

1) 4 2) 16 3) 39/2 4) 40

**۷۰- در شکل مقابل سطح افقی بدون اصطکاک بوده ولی بین $m_1$ و $m_2$ ضریب اصطکاک $\mu_s = 0/25$ است. حداقل نیروی $F$ چند نیوتن باشد تا $m_1$ به پایین نلغزد؟**


1) 25 2) 60

3) 50 4) 10

**۷۱- نیروی کشسانی یک فنر در سیستم $SI$ به صورت $F(x) = -3x^2 - 8x^2$ می باشد. اگر در $x = 0$ انرژی پتانسیل کشسانی آن برابر یک ژول باشد. در $x = 1m$ انرژی پتانسیل کشسانی آن چند ژول است؟**

1) 1 2) 2 3) 4 4) 8

**۷۲- کدام عبارت در مورد اصل بر هم نهش نیروها نادرست است؟**

1) یک قانون تجربی طبیعت است که از قوانین نیوتنی حرکت نتیجه نمی شوند.

2) دقیق ترین آزمون تجربی این اصل از مطالعه حرکت سیاره ای به دست می آید.

3) یک رابطه ریاضی است که از قوانین نیوتنی حرکت نتیجه می شود.

4) وقتی چند نیرو بر یک ذره اثر می کند هر نیرو مستقل از حضور یا غیاب نیروهای دیگر شتاب مربوط به خود را ایجاد می کند.

**۷۳- کدام عبارت نادرست است؟**

1) قوانین پایستگی فقط در چارچوب های لخت برقرارند.

2) قانون پایستگی تکانه خطی ناشی از تقارن انتقالی موجود در مساله است.

3) قانون پایستگی انرژی مکانیکی را از قوانین نیوتنی می توان به دست آورد.

4) یک ارتباط ذاتی میان قوانین پایستگی و تقارن وجود دارد.

**۷۴- ذره ای تحت تاثیر نیروی مرکزی بر روی مدار بیضی شکل حرکت می کند. فاصله ذره از مرکز نیرو در حالتی که در اوج حضیض است به ترتیب ۲a و a است. نسبت سرعت های ذره در دو نقطه مزبور برابر است با:**

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3) $\sqrt{2}$ 4) 2

**۷۵- سیاره کروی دواری را در نظر می گیریم. سرعت نقطه ای از استوانه ی آن $V_e$ است. اثر دوران سیاره سبب می شود که شدت میدان ظاهری گرانشی در استوای سیاره $\frac{1}{2}$ شدت میدان گرانشی آن در قطب باشد. سرعت فرار $V_p$ برای یک ذره در قطب سیاره برابر است با:**

1) $\frac{1}{2}V_e$ 2) $\frac{V_e}{3}$ 3) $\frac{3}{2}V_e$ 4) $2V_e$

**۷۶- اگر جرم یک کره $\frac{1}{100}$ جرم زمین و حجم آن $\frac{1}{64}$ حجم کره زمین باشد، شدت جاذبه ثقلی (شتاب گرانشی) در سطح آن چند برابر شدت جاذبه ثقلی در سطح زمین خواهد بو؟**

1) 0/64 2) 0/32 3) 0/16 4) $\frac{1}{6}$

**۷۷- ذره ای به جرم m تحت تاثیر یک نیروی مرکزی با پتانسیل $V(r) = Kr^2$، حرکت می کند (K>۰) به ازای چه مقدار از انرژی، مسیر ذره دایره ای به شعاع a حول مبدأ حرکت خواهد شد؟**

1) $1/5\ Ka^3$ 2) $0/5\ ma^2$ 3) $1/5\frac{Km}{a^2}$ 4) $0/5\ Kma^2$

**۷۸- دو ذره به جرم های m و M که در ابتدا ساکن هستند، به فاصله بی نهایت از هم قرار دارند. سرعت نسبی نزدیک شدن آنها بر اثر جاذبه گرانشی کدام است؟ (d فاصله ذرات در هر لحظه است)**

1) $\left[\frac{G(m+M)}{d}\right]^{\frac{1}{2}}$ 2) $\left[\frac{2G(m+M)}{d}\right]^{\frac{1}{2}}$ 3) $\frac{3G(m+M)}{d}$ 4) $\frac{d}{G(m+M)}$

**۷۹- فرض کنید اندازه حرکت زاویه ای ماه نسبت به زمین برابر L است. اگر حرکت ماه و زمین را حول مرکز جرم شان، دایره ای در نظر بگیریم و M۱ جرم ماه و M۲ جرم زمین باشد؛ اندازه حرکت زاویه ای سیستم ماه و زمین حول مرکز جرم شان کدام است؟**

1) $\frac{M_2L}{M_1+M_2}$ 2) $\frac{M_1L}{M_1+M_2}$ 3) $\frac{M_2L}{M_1}$ 4) $\frac{M_1L}{M_2}$

۸۰- سرعت فرار یک ذره در راستای قائم در فاصله $r\,(r > R_2)$ از مرکز زمین **ve** است و سرعت همان ذره در یک مدار دایره ای پایدار حول زمین با همان شعاع **r** ، **vc** است. اگر مقاومت هوا صرفنظر کنیم رابطه بین **ve** و **vc** کدام است؟

1) $v_e = v_c$ 2) $v_e = \sqrt{2}v_c$ 3) $v_e = \frac{3}{2}v_c$ 4) $v_e = 2v_c$

۸۱- جسمی از روی سطح زمین (به جرم **M** و شعاع **R**) با زاویه °۳۰ نسبت به راستای قائم (بر سطح زمین) و با سرعت اولیه $v_0 = \sqrt{\frac{5GM}{4R}}$ پرتاب می شود. بیشینه فاصله جسم از سطح زمین چقدر خواهد بود؟ (از مقاومت هوا صرفنظر کنید)

1) $R$ 2) $\frac{3}{2}$ 3) $2R$ 4) $\frac{5}{2}R$

۸۲- ماهواره ای به جرم **m** بر روی یک مدار دایره ای به شعاع **r** از مرکز زمین با سرعت ثابت در حرکت است، انرژی کل این ماهواره بر حسب **f** اندازه نیروی جاذبه وارد بر ماهواره و شعاع **r** کدام است؟ (علوم دریایی و اقیانوسی، فیزیک دریا – سراسری ۸۸)

1) $-fr$ 2) $-\frac{1}{2}fr$ 3) $\frac{1}{2}fr$ 4) $fr$

**پاسخنامه تست های طبقه بندی شده فصل سوم**

1-گزینه «4»

انرژی پتانسیل در حالت اول چون ذرات در فاصله دور از هم قرار دارند صفر است و چون انرژی جنبشی یکی از ذرات غیر صفر است و همچنین این مقدار مثبت است پس انرژی مکانیکی که جمع انرژی پتانسیل و جنبشی است مقداری مثبت است و چون هیچ عامل مقاوم یا غیر پایستاری وجود ندارد مقدار انرژی کل ثابت می باشد. (طبق صورت سؤال که گفته منزوی است).

2- گزینه «4»

$$F=(M+m)a$$

$$a=\frac{F}{M+m}$$

جرم $m$ نسبت به $M$ ساکن است می توان گفت حداکثر نیرویی که نیاز داریم تا جسم به پایین نلغزد زمانی است که جرم $m$ در آستانه حرکت رو به بالا قرار گیرد. دیاگرام آزادی جسم به صورت روبرو می باشد و اصطکاک رو به پایین است.

3- گزینه «1»

در زمان شروع اولیه چون شتاب صفر است می توان گفت :

$$F=f_s \qquad f_s=\mu_s N=\mu_s mg$$

$$F=\mu_s mg=(0/1)(10)=1\,N \Rightarrow f(t)=t \Rightarrow t=1\,s$$

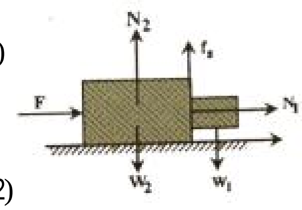
4- گزینه «3»

وقتی $W_1$ نسبت به $W_2$ ساکن باشد یعنی هر دو با یک شتاب حرکت می کنند. نیرو های وارد به هر یک از جسم ها را مشخص می کنیم. در نتیجه می توان نوشت:

$$\begin{cases} N_1 = m_1 a = \left[\dfrac{w_1}{g}\right] a \\ f_s = mN_1 \\ f_s = w_1 \\ N_2 = w_2 \end{cases}$$

$$F = (m_1 + m_2)a = \frac{(w_1 + w_2)a}{g} \qquad (1)$$

$$W_1 = m\left[\frac{w_1}{g}\right]a \Rightarrow \frac{a}{g} = \frac{1}{m} \qquad (2)$$




$$(1) \,/\, (2) \Rightarrow F = \frac{1}{m}(w_1 + w_2)$$

5- گزینه «4»

اگر تابع پتانسیل را دادند و از ما بسامد نوسان یا دوره تناوب را خواستند کافی است مشتق اول پتانسیل را مساوی صفر قرار داده و نقطه تعادل را بیابیم آنگاه به ازای آن نقطه، مشتق دوم پتانسیل که همان K در حرکت نوسانی است را حساب کنیم و می دانیم $\omega$ برابر $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ است.

$V(x) = -(1 - x^2)e^{-x^2}$ نقطه تعادل $\qquad k = \left.\dfrac{d^2V}{dx^2}\right|$

$$\frac{dV}{dx} = 2xe^{-x^2} + 2x(1 - x^2)e^{-x^2} = 2x(2 - x^2)e^{-x^2}$$

نقاط تعادل هستند.

نقطه تعادل پایدار

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow x = 0\,,\; x = \sqrt{2}\;,\; x = -\sqrt{2}$$

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{X=o} > 0 \Rightarrow \qquad x = 0$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = (2(2 - x^2) - 4x^2 - 4x^2(2 - x^2))e^{-x^2}$$

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{X=\pm\sqrt{2}} < 0 \Rightarrow \qquad x = \pm\sqrt{2}$$

نقاط تعادل ناپایدار

$$k = \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{X=0} = 4 \Rightarrow w = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4}{40 \times 10^{-3}}} = 10s^{-1}$$

زمان تناوب $T = \dfrac{2p}{w} = 0/2p$

6- گزینه «4»

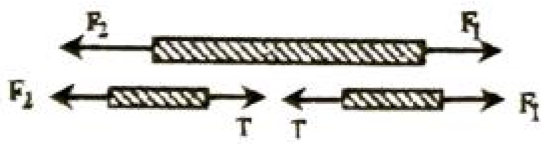
نیروی مقاومت هوا به سمت بالا و نیروی وزن به سمت پایین به جسم افتان وارد می شود.

$$mg - bv = ma = m\frac{dV}{dt} \Rightarrow \int dt = \int_o^{\frac{v_c}{2}} \frac{mdV}{mg - bV}$$


$(V = V_c)$

$$a = 0 \rightarrow mg - bV_c = 0 \rightarrow V_c = \frac{mg}{b} \Rightarrow t = \frac{-m}{b}\ln(mg - bv)\Big|_0^{\frac{V_c}{2}} \Rightarrow t = -\frac{m}{b}\ln(mg - bV)\Big|_0^{\frac{mg}{2b}} = -\frac{m}{b}\ln\frac{1}{2} = \frac{m}{b}\ln 2$$

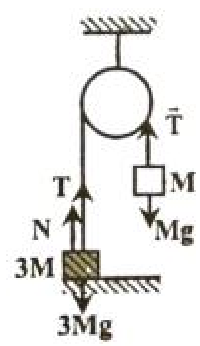
7- گزینه «4»




در دو حالت فوق می توان نوشت :

$$F_1 - T = \left[\frac{m}{2}\right]a \qquad F_1 - F_2 = ma \qquad \frac{F_1 - F_2}{2} = F_1 - T \Rightarrow T = \frac{F_1 + F_2}{2}$$

8- گزینه «2»




$M$ برای جسم : $T - Mg = Ma$

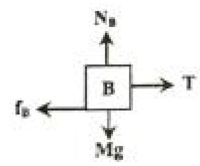
$3M$ برای جسم : $T + N - 3Mg = 0$

حداقل نیرویی که سبب بلند شدن جسم می شود زمانی است که $N = 0$ در نتیجه روابط بالا به معادلات زیر تبدیل مـی شوند :

$$T = -Mg = Ma$$
$$T = 3Mg \qquad \Rightarrow a = 2g$$

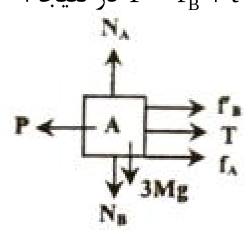
9- گزینه «3

برای جسم $B$ (1) $\sum F=0$ حرکت یکنواخت




$$\left.\begin{array}{l} T = f_B \\ N_B = Mg \end{array}\right\} \Rightarrow T = m_K N_B = m_K Mg$$

**توضیح :** منظور از $f_B$ نیروی اصطکاکی است که به جسم $B$ وارد می شود $N_B$ نیروی عکس العمل سطح وارد به جسم $B$ از طرف سطح تماس با جسم $A$ منظور از $f'_B$ عکس العمل نیروی اصطکاکی است که از طرف جسم $A$ به جسم $B$ وارد می شودو $f'_B = f_B$ همچنین $N_A$ نیروی عکس العمل وارد به جسم $A$ از زمین و $f_A$ نیروی اصطکاک وارد بر جسم از طرف زمین $P = f'_B + t + f_A$ در نتیجه:




$$P = m_K N_B + T + m_K N_A = m_K Mg + T + m_K (Mg + 3Mg)$$

$$P = 5m_K Mg + T \qquad (2)$$

$$(1) \; ! \; (2) \Rightarrow P = 5m_K Mg + m_K Mg = 6m_K Mg$$

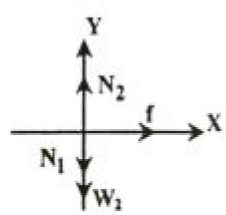
10- گزینه «3»

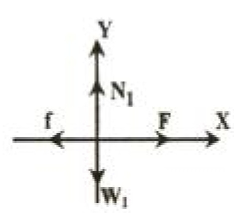
برای حل این سؤال کافی است نیروهای موجود در مسئله را مشخص کنیم. فرض می کنیم $R$ نیرویی باشد که جسم به مایع وارد می کند.

$$\vec{T} + \vec{R} + \vec{W} = 0 \Rightarrow R + T - W = 0 \Rightarrow R = W - T$$

11-گزینه «1»

از روی نمودارهای پایین می توان گفت :



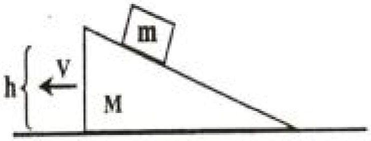




$$\left\{\begin{array}{l} F = (m_1 + m_2)a \\ f = m_2 a \end{array}\right. \Rightarrow f = m_2 \left[\frac{F}{m_1 + m_2}\right]$$

$$f = (\frac{m_2}{m_1 + m_2})F \Rightarrow f < F$$

برای جسم 1 $(m_1)$        برای جسم 2 $(m_2)$

12-گزینه «4»



$$E_i = E_f \qquad P_i = P_f \qquad \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} mV_o^2 = \frac{1}{2}(M+m)V^2 + mgh & (1) \\ mV_o = (M+m)V & (2) \end{cases}$$

i : نقطه شروع حرکت جرم m        f : نقطه ای که تا آن نقطه جرم m بالا می رود.

توضیح اینکه در نوشتن رابطه های بالا توجه به این نکته ضروری است که در لحظه ای که m نسبت به M (سطح شیبدار) ساکن می شود مجموع سطح شیبدار و جرم m هر دو با سرعت V حرکت می کنند.

$$(1) \; ! \; (2) \Rightarrow \frac{1}{2} mV_o^2 = mgh + \left[\frac{m^2 V_o^2}{2(M+m)}\right] \Rightarrow h = \frac{MV_o^2}{2g(M+m)}$$

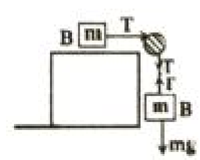
13-گزینه «1»

برای اینکه جسم A نسبت به مکعب ساکن بماند باید کل سیستم با یک شتاب حرکت کند یعنی :

$$F = (m + m + M)a = (2m + M)a$$

از طرفی        T باید با mg برابر باشد (برای جسم B) و $ma = T$ (برای جسم A)

$$\Rightarrow F = (2m+M)\frac{T}{m} = (2m+M)\frac{mg}{m} = (2m+M)g$$



14-گزینه «3»

این سؤال عیناً یکی از تمرینات انتهای فصل کتاب «مکانیک تحلیلی فالز» می باشد.

شتاب کامیون منفی است (به سمت عقب)

$$\begin{cases} f = -m_M N = -m_K mg \\ f = ma \end{cases} \Rightarrow a = -m_K g$$

شتاب کامیون   $A_o = \frac{-g}{2}$ , $a = -m_K g \Rightarrow a = a' + A_o \Rightarrow a' = a - A_o$

شتاب کامیون و
جعبه نسبت به هم

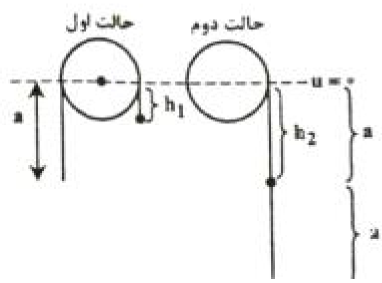
$$a' = -\frac{g}{3} + \frac{g}{2} = \frac{g}{6}$$

15-گزینه «1»

پایستگی انرژی $E_1 = E_2 \rightarrow k_1 + u_1 = k_2 + u_2$

حالت اول     حالت دوم

$$-mgh_1 + 0 = -mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \ , \ h_2 - h_1 = \frac{a}{2}$$




$h_2, h_1$ : ارتفاع مرکز جرم طناب نسبت به خط پتانسیل در دو حالت صفر می باشد. علامت منفی در نوشتن جمله پتانسیل به دلیل آن است که مرجع پتانسیل را بالا انتخاب کردیم : $\Rightarrow V = \sqrt{ga}$

16- گزینه «4»

می دانیم کرل نیروهای پایستار صفر است، چون این نیروها مستقل از مسیرشان هستند پس می توان نوشت :

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ax + 2by^2 & cxy & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow cy - 4by = 0 \Rightarrow c = 4b$$

17- گزینه «1»

قضیه کار – انرژی به ما می گوید کار برآیند نیروهای وارد بر جسم برابر است با اختلاف انرژی جنبشی سیستم :

$$\Delta k = W$$

$$\frac{1}{2}m(V^2 - V_o^2) = W \qquad r(t) = (3t + 5t^3)\hat{i} \xrightarrow{V(t) = \frac{dr(t)}{dt}} V(t) = (3 + 15t^2)\hat{i}$$

$$V(t=0) = V_o = 3 \quad V(t=1) = V = 18 \ , \ m = 2 \Rightarrow W = \frac{1}{2}(2)(18^2 - 3^2) = 315\ J$$

18-گزینه «1»

در مورد جرم $(m_3)$ $\qquad \sum F = 0 \rightarrow T - m_3 g = 0 \rightarrow T = m_3 g$

در مورد جرم $(m_2)$ $\qquad \sum F = m_2 a \rightarrow T = m_2 a \rightarrow m_3 g = m_2 g \rightarrow a = \frac{m_3}{m_2} g$

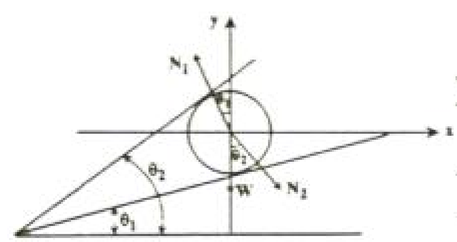
در مورد کل سیستم می توان نوشت :

$$\sum F = (m_1 + m_2 + m_3) a$$

$$F = (m_1 + m_2 + m_3) \times (\frac{m_3}{m_2}) \times g$$

19- گزینه «3»

با توجه به شکل می توان نوشت :




$$\sum F = 0 \begin{cases} N_1 \cos q_1 = N_2 \cos q_2 + W & (1) \\ N_1 \sin q_1 = N_2 \sin q_2 \rightarrow N_2 = N_1 \dfrac{\sin q_1}{\sin q_2} & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} N_1 \cos q_1 \sin q_2 = N_1 \sin q_1 \cos q_2 + W \sin q_2$$

$$N_1 (\cos q_1 \sin q_2 - \sin q_1 \cos q_2) = W \sin q_2 \rightarrow N_1 = \frac{W \sin q_2}{\sin(q_2 - q_1)}$$

20- گزینه «1»

21- گزینه «4»

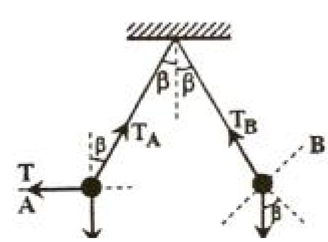
چون در وضعیت A جسم در حال تعادل استاتیکی است لذا :

$$T_a \cos b = mg \qquad (\mathrm{I})$$

همچنین در وضعیت B نیز جسم در حال سکون لحظه ای است و در راستای نخ حرکتی نداردپس:

$$T_B = mg \cos b \qquad (\Pi)$$

$$(\mathrm{I}) , (\Pi) \Rightarrow \frac{T_B}{T_A} = \cos^2 b$$



توجه شود در حل این سؤال از این نکته استفاده شده که با توجه به اصل بقای انرژی، زاویه نخ با خط عمود در وضـعیت B هم برابر $\beta$ می باشد.

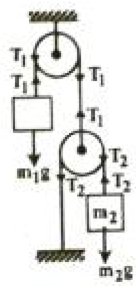
22- گزینه «1»

در مرحله اول می توان فرض کرد که $m_1$ پایین می آید و $m_2$ بالا می رود.

$T_1 - m_1 g = -m_1 a_1$

$T_2 - m_2 g = m_2 a_2$

$2T_2 = T_1 \ , \ m_1 = 4m_2$




به خاطر اینکه در قرقره پایینی یک طرف نخ به زمین وصل است لذا صرف نظر از اینکه مقادیر $m_2$ و $m_1$ چقدر باشند به ازای هر مقدار جابجایی جرم $m_1$، جرم $m_2$ به اندازه دو برابر آن جابجا می شود یعنی : $2a_1 = a_2 \Leftarrow 2x_1 = x$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{g}{4} \Rightarrow \begin{cases} T_1 - m_1 g = -m_1 a_1 \\ \frac{T_1}{2} - \frac{m_1}{4} g = \frac{m_1}{4}(2a_1) \end{cases}$$

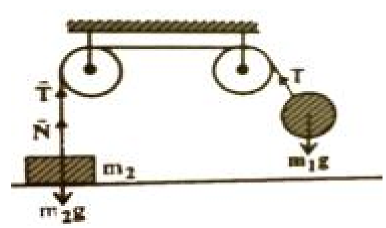
23- گزینه «4»

در ابتدا نیروی دمای وارد به سیستم را مشخص می کنیم. $m_2 = 2m_1$

برای جرم $m_1$ $\quad T = \cos\theta - m_1 g = 0$

برای جرم $m_2$ $\quad T + N - m_2 g = 0$

هنگامی که جسم $m_2$ در لحظه بلند شدن قرار می گیرد $N = 0$

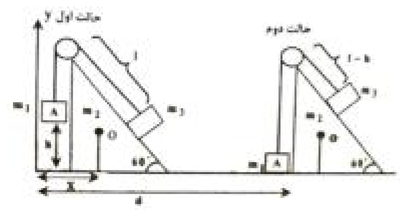



$$\Rightarrow \cos q = \frac{1}{2} \Rightarrow q = 60^\circ \quad \begin{matrix} T\cos q = m_1 g \\ T = 2m_1 g \end{matrix}$$

24- گزینه «1»

فرض می کنیم O مرکز جرم گوه باشد که در حالت اولیه فاصله آن تا محور yها مقدار X است. و در نهایت d+X تا محور yها فاصله دارد.

تکانه خطی ثابت یا همان مرکز جرم سیستم ثابت می ماند



$$\frac{dp}{dt} = F_{ext} = 0 \Rightarrow$$

برای مجموعه در حالت اول $x_{cm} = \dfrac{m_1(0) + m_2(X) + m_3 l\cos 60^\circ}{m_1 + m_2 + m_3}$

برای مجموعه در حالت دوم پس از پایین آوردن $m_1$ $X'_{cm} = \dfrac{m_1(d) + m_2(X+d) + m_3((l-h)\cos 60^\circ + d)}{m_1 + m_2 + m_3}$

$$x_{cm} = x'_{cm} \Rightarrow m_2(X) + m_3 l\cos 60^\circ = m_1(d) + m_2(X+d) + m_3((l-h)\cos 60^\circ + d)$$

$$m_1 d + m_2 d - m_3 h\cos 60^\circ + m_3 d = 0 \xrightarrow[m_2 = 2m_3]{m_1 = m_3} d = \frac{h}{8}$$

25- گزینه «2»

$$f = -m_K N = |-m_K mg| \Rightarrow a = |-m_K g|$$
$$F = f \Rightarrow f = ma$$

فرض می کنیم دقیقا در لحظه برخورد سرعت افقی بسته در مقابل $V_o$ چیز است تنها نیروی موجـود نیـروی اصـطکاک است که سرعت بسته را به $V_o$ می رساند.

$$V_f = at + V_i 0 \Rightarrow V_o = at \quad ; \quad t = \frac{V_o}{m_K g}$$

26- گزینه «2»

سرعت حدی $(V_T)$ زمانی اتفاق می افتد که شتاب جسم برابر صفر شود.

$$\sum F = ma \Rightarrow mg - kv = ma \xrightarrow{a=o} mg = kv_T \Rightarrow v_T = \frac{mg}{k}$$

$$\sum F = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow mg - kv = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_o^t dt = \int_o^v \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v}$$

$$t=-\frac{m}{k}\left[\ln(g-\frac{k}{m}v)\right]_o^v \Rightarrow \ln(g-\frac{k}{m}v)-\ln g=-\frac{kt}{m} \Rightarrow \ln(\frac{g-\frac{k}{m}v}{g})=\frac{-kt}{m} \Rightarrow \ln(1-\frac{k}{mg}v)=\frac{-kt}{m}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{kt}{m}}=1-\frac{k}{mg}v \Rightarrow \frac{k}{mg}v=1-e^{-\frac{kt}{m}} \Rightarrow v=\frac{mg}{k}(1-e^{-\frac{kt}{m}}) \Rightarrow v=v_T(1-e^{-\frac{kt}{m}})$$

27- گزینه «2»

$$\sum F=\sum ma \Rightarrow F=(mN)a \Rightarrow a=\frac{F}{mN}$$

28- گزینه «2»

از آنجایی که در طناب در حال تعادل قرار دارد(حرکت نمی کند)، برایند نیروهای وارد بر آن در هر نقطه از طناب برابر صفر است. در هر نقطه دو نیرو بر طناب وارد می شود:وزن و کشش طناب. بنابراین برای محاسبه کشش در فاصلهاز انتهای طناب،کافی است وزن آن قسمت از طناب را محاسبه کنیم.

$$\sum F=0 \Rightarrow T=mg \qquad (1)$$

چگالی طولی طناب ($\lambda$)از رابطه مقابل به دست می آید:

$$l=\frac{M}{L} \Rightarrow m=lx=\frac{Mx}{L} \qquad (2)$$

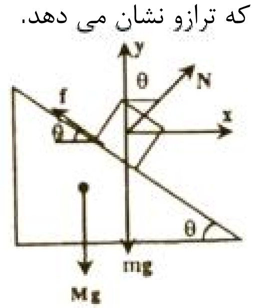
با استفاده از روابط(1) و (2) داریم :

$$\Rightarrow T=\frac{Mgx}{L}$$

29- گزینه «4»

برای حل این سؤال سعی می کنیم کلیه نیروهای وارد بر جرم $m$ را مشخص کنیم. آنگاه بررسی می کنیم که جسم $m$ چه نیروی عمودی ایی (در راستای $y$ موجود در شکل) به گوه وارد می کند؛ مجموع این نیرو(که با $F'$ نشان می دهیم) به همراه نیروی وزن گوه عددی است که ترازو نشان می دهد.

$$mg-F'=ma_y \Rightarrow F'=m(g-a_y)$$



هدف ما در مرحله اول یافتن مقدار F است ولی پیش از آن $a_y$ باید بدست آید.

$$mg - N\cos q - f\sin q = ma_y \qquad , \quad N = mg\cos q \qquad , \quad f = m_K N = m_K mg\cos q$$

$$a_y = g(1-\cos q(\cos q + m_K\sin q)) \qquad , \quad F' = m(g-a_y) \Rightarrow F' = mg\cos q(\cos q + m_K\sin q)$$

(F نیروی وارد بر ترازو)

$$F = F' + Mg = g[M + m\cos q(\cos q + m_K\sin q)] = g\left[M + \frac{\sqrt{3}}{2}m(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\frac{1}{2})\right] = g(M + \frac{3}{2}m)$$

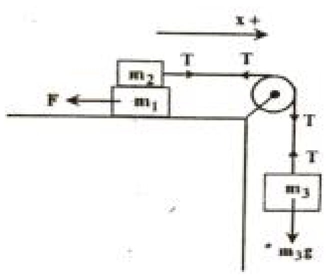
30- گزینه «4»

جهت حرکت جرم $m_1$ و $m_2$ خلاف همدیگر است چون $m_2$ و $m_3$ هر دو به یک نخ وصل هستند لذا شتاب هر دو یکسان است.

برای $m_3$: $m_3\vec{g} - \vec{T} = m_3\vec{a}_3$

برای $m_1$: $m_{12}\vec{a}_1 = F(-\hat{i}) \Rightarrow \vec{a}_1 = \frac{-F}{m_1}\hat{i}$

برای $m_2$: $\vec{T}(\hat{i}) = m_2\vec{a}_2 \Rightarrow \vec{a}_2 = \frac{T}{m_2}\hat{i}$




$$a_2 = a_3 \quad , \quad m_2 = m_3 \qquad A$$

$$T = m_3(g-a_3) = m_2a_2 \xrightarrow{A} m_2(g-a_2) = m_2a_2 \Rightarrow \vec{a}_2 = \frac{g}{2}\hat{i} \qquad ; \qquad |a_1a_2| = \left|-\frac{F}{m_1} - \frac{g}{2}\right| = \frac{F}{m_1} + \frac{g}{2}$$

31- گزینه «1»

حداکثر سرعت تاب به ازای حداقل ارتفاع آن به دست می آید و بر عکس. بنابراین طبق اصل پایستگی انرژی، سرعت در $h_1 = 0/5$ را برابر $V_{max}$ و سرعت در $h_2 = 2m$ را برابر صفر در نظر می گیریم.

$$mgh_1 + \frac{1}{2}mv^2_{max} = mgh_2 \Rightarrow v^2_{max} = 2g(h_2 - h_1)$$

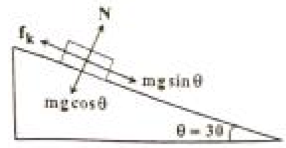
$$\Rightarrow V_{max} = \sqrt{2g(h_2 - h_1)} = \sqrt{2\times 10(2-0/5)} = \sqrt{30} \Rightarrow V_{max} \approx 5/4(\frac{m}{s})$$

32- گزینه «1»

چون جسم به طور یکنواخت حرکت می کند شتاب حرکت آن برابر صفر است. پس طبق قانون دوم نیوتن براینـد نیروهای وارد بر آن نیز صفر خواهد بود. اگر محور x را موازی سطح شیبدار و محور y را عمود بر آن در نظر بگیریم داریم:

$$\sum F_x = ma_x = 0 \Rightarrow mg\sin 30^\circ = f_k = m_k N \quad (1)$$

$$\sum F_y = ma_y = 0 \Rightarrow N = mg\cos 30^\circ \quad (2)$$



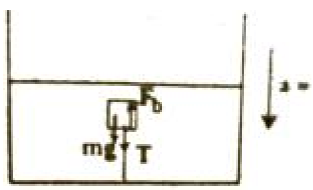

$$\xrightarrow{(1)\ ,\ (2)} mg\sin 30^\circ = m_k mg\cos 30^\circ \Rightarrow m_k = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

33- هیچ یک از گزینه ها صحیح نیست.

قانون دوم نیوتن برای جرم M به صورت زیر است:

$Mg + T - F_b = M_A$ (1) که در آن $F_b$ نیروی ارشمیدسی وارد یر جرم M از سوی آب به سمت بالا می باشد

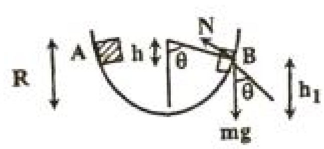
و از لحاظ مقدار برابر است با نیروی وزن آن مقدار از سیال که حجمی برابر با حجم جسم را اشغال می کند:




$$F_b = d \times v \times g = 1000 \times 3/5 \times 10^{-3} \times 10 = 35(N)$$
$$(!) \Rightarrow 3 \times 10 + T - 35 = 3 \times 22 \Rightarrow T = 71(N)$$

34- گزینه «4»

$$E_A = E_B$$
$$E_A = k_A + u_A = 0 + mgR$$
$$E_B = k_B + u_B = \frac{1}{2} mV_B^2 + mgR(1 - \cos q)$$
$$h_1 = R - h_2 = R - R\cos q$$
$$E_A = E_B \Rightarrow V_B^2 = 2gR\cos q$$



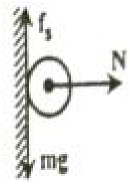

برای نیروی مرکز گرا در حرکت دایره ای در نقطه B می توان نوشت.

$$N - mg\cos q = \frac{mV_B^2}{R} \to N = mg\cos q + \frac{mV_B^2}{R} = mg\cos q + \frac{m}{R}(2gR\cos q) = 3mg\cos q$$

35- گزینه «1»

هنگامی که جسم و سطح تماس نسبت به هم سرعت دارند دیگر اصطکاک ایستایی در راستای حرکت وجود نـدارد بلکـه فقط اصطکاک جنبشی وجود دارد که با حرکت جسم مخالفت می کند.

36- گزینه «3»



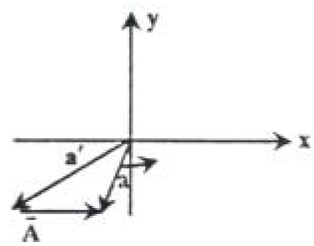

$$\left.\begin{matrix} mg = f_s \\ N = ma \end{matrix}\right\} \leftarrow \text{برای تعادل}$$

$$f_s = m_s N = m_s ma = mg \rightarrow a = \frac{g}{m_s} = \frac{10}{0/4} = 25\frac{m}{s^2}$$

می بینیم که شتاب مستقل از جرم است

37- گزینه «2»

اگر شتاب مکعب نسبت به گوه را با $a'$ و شتاب مکعب نسبت به زمین را با $a$ و شتاب گوه نسبت به زمـین را $\vec{A}$ در نظـر بگیریم طبق چیزی که ناشی از حرکت روی گوه می بینیم می توان درک کـرد: (از مفهـوم حرکـت نسـبی اسـتفاده مـی کنیم)




$$a_x = a_{x'} + A_x = a_{x'} + A$$

$$a_y = a_{y'} + A_y = a_{y'}$$

$$8\tan q = \frac{a_{y'}}{a_{x'}} \Rightarrow a_y = a_{y'} = a_{x'}\tan q \Rightarrow a_y = (a_x - A)\tan q$$

38- گزینه «4»

هر گاه فنری با ثابت k را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت دارای ثابت فنری برابر nK خواهد شد. بنـابراین وقتی فنری با ثابت $6(\frac{N}{m})$ را نصف می کنیم ثابت فنر هر قسمت برابر $12(\frac{N}{m})$ می شود. از طرفی مطـابق شـکل مسـئله اتصال این دو تکه به صورت موازی است و ثابت فنر کل از رابطه مقابل محاسبه می شود :

$$k_{tot} = k_1 + k_2 = 12 + 12 = 24(\frac{N}{m})$$

برای محاسبه جرم از رابطه $\omega = \sqrt{\frac{K_{tot}}{m}}$ استفاده می کنیم.

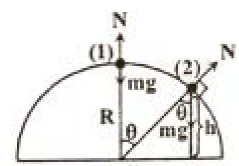
$$w = 2p\,u = 2p \times 3 = 6p\,(\frac{rad}{s})$$

$$6\pi=\sqrt{\frac{24}{m}}\Rightarrow 36\pi^2=\frac{24}{m}\Rightarrow m=\frac{24}{36\pi^2}=\frac{2}{3\pi^2}(kg)$$

39- گزینه «4»

کمترین مقدار مقاومت مؤثر هوا برابر وزن چتر باز و چترش است که باعث می شود برایند نیروهای وارد بر چتر باز برابر صفر شده و چتر باز بدون شتاب به سمت پایین حرکت کند.

40- گزینه «2»




$$E_1=E_2\Rightarrow mgR=\frac{1}{2}mv^2+mgh\Rightarrow\frac{1}{2}mv^2=mg(R-h)$$

$$\Rightarrow v^2=2g(R-h)\xrightarrow{h=R\cos\theta}v^2=2gR(1-\cos\theta)\Rightarrow\frac{v^2}{R}=2g(1-\cos\theta)$$

$$\sum F=ma\Rightarrow N-mg\cos\theta=-m\frac{v^2}{R}\Rightarrow N=mg\cos\theta-m\frac{v^2}{R}=mg\cos\theta-2mg(1-\cos\theta)=mg(\cos\theta-2+2\cos\theta)$$

$$\Rightarrow N=mg(3\cos\theta-2)$$

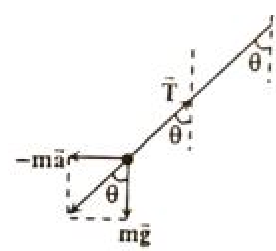
در نقطه جدا شدن فرد از تپه $(N=0)$ داریم :

$$3\cos\theta-2=0\Rightarrow\cos\theta=\frac{3}{2}\xrightarrow{\text{با توجه به شکل مسئله}}\frac{h}{R}=\frac{2}{3}\Rightarrow h=\frac{2}{3}R$$

41- گزینه «4»

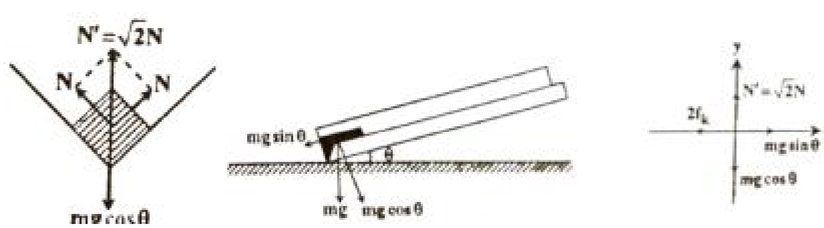
از آنجا که آونگ در حال تعادل قرار دارد، برایند نیروهای خارجی وارد بر آن صفر است.

$$\sum\vec{F}=0\Rightarrow\vec{T}+m\vec{g}+(-m\vec{a})=0\Rightarrow m\vec{g}+(-m\vec{a})=-\vec{T}$$




مطابق هندسه شکل داریم: $\tan\theta=\frac{|-m\vec{a}|}{|m\vec{g}|}=\frac{a}{g}\Rightarrow a=g\tan\theta$

42- گزینه «4»



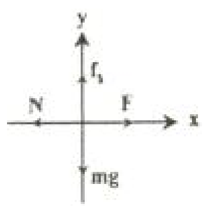
با توجه به نمودار جسم آزاد که در بالا رسم شده است، قانون دوم نیوتن را در دو راستای x و y می نویسیم:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N' - mg\cos q = 0 \Rightarrow \sqrt{2}N = mg\cos q$$

$$\sum \begin{array}{l} F_x = ma \Rightarrow mg\sin q - 2f_k = ma \quad , \quad f_k = m_k N = \dfrac{m_k}{\sqrt{2}} mg\cos q \\ \Rightarrow mg\sin q - \dfrac{2}{\sqrt{2}} m_K mg\cos q = ma \Rightarrow a = g(\sin q - \sqrt{2}m_k \cos q) \end{array}$$

43- گزینه «1»

نمودار جسم آزاد در این مسئله به صورت زیر است:




$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F - N = 0 \Rightarrow F = N = 53\,(N)$$
$$f_{s\max} = m_s N = 0/6 \times 53 = 31/8\,(N)$$

با مقایسه $f_{s\max}$ و $mg = 22(N)$ درمی یابیم که بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی همواره ازوزن جسم بیشتراست.بنابراین

جسم هرگزحرکت نمی کند.

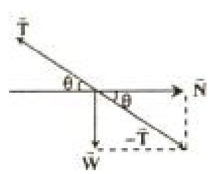
44- گزینه «2»

نمودار جسم آزاد نیروها را در شکل زیر می بینید:

$$a = 0 \Rightarrow \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{W} + \vec{N} + \vec{T} = 0 \Rightarrow \vec{W} + \vec{N} = -\vec{T}$$

اکنون با توجه هندسه شکل داریم :

$$\frac{|\vec{W}|}{|-\vec{T}|} = \sin q \qquad , \qquad \sin q = \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}}$$




$$\Rightarrow T = \frac{W}{\sin q} = \frac{W\sqrt{L^2 + r^2}}{L}$$

45- گزینه «1»

$$\sum f - mA_0 = ma'$$

حالت اول: $(m + m_2)g - kx - 0 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{(m_1 + m_2)g}{x}$ (1)

حالت دوم: $(m_1+m_2)g - kx' + ma = 0 \Rightarrow a = \dfrac{-(m_1+m_2)g + kx'}{(m_1+m_2)}$ (2)

پس از قرار دادن $K$ از رابطه (1) در رابطه (2) داریم :

$$a = g\left(\frac{x'}{x} - 1\right)$$

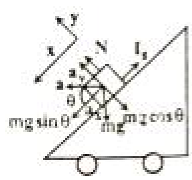
46- گزینه «4»

$$mv\frac{dv}{dx} = F \Rightarrow m\frac{Vdv}{dx} = kx^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{در حالت کلی}} \int_o^v Vdv = \frac{k}{m}\int_o^x x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$V^2 = \frac{4k}{m}x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow V = \left(\frac{4k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}} = 2\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}}$$

$$V = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \int_o^b \frac{dx}{x^{\frac{1}{4}}} = 2\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \int_o^t dt \Rightarrow t = \frac{2}{3}\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{4}}$$

47- گزینه «3»




$a_x = a\cos q$ $\qquad$ $a_y = a\sin q$

شرط سکون (1) $\quad mg\sin q + ma_x = f_s = m_s N$

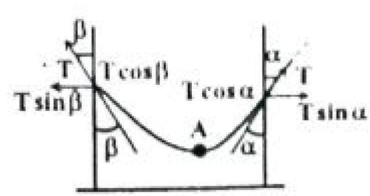
$$N + ma_y = mg\cos q \Rightarrow N = mg\cos q - ma_y = mg\cos q - ma\sin q \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\,,\,(2)} mg\sin q + ma\cos q = m_s(mg\cos q - ma\sin q) \Rightarrow m_s = \frac{g\sin q + a\cos q}{g\cos q - a\sin q}$$

48- گزینه «3»

طبق اطلاعات صورت سؤال نیروهای رو به بالا باید برابر نیروهای رو به پایین باشند و این شرط تعادل است.

$$\begin{cases} \dfrac{mg}{3} = T\cos a \\ \dfrac{2mg}{3} = T\cos b \end{cases}$$




در راستای افقی $T\sin a = T\sin b \Rightarrow 2tg\,b = tg\,a$

در راستای عمود $2\cos a = \cos b$ (طبق روابط فوق)

49- گزینه «2»

آهنگ لحظه ای کار ، همان توان لحظه ای است که از رابطه $P = Fv$ قابل محاسبه است.

$$x = 3t - 4t^2 + t^3 \Rightarrow v = 3 - 8t + 3t^2 \Rightarrow a = -8 + 6t$$
$$F = ma \Rightarrow F = 3(-8 + 6t) = -24 + 18t$$
$$t = 1s \Rightarrow v = 3 - 8 + 3 = -2(\frac{m}{s}) \quad , \quad F = -24 + 18 = -6(N) \Rightarrow P = Fv = (-6)(-2) = 12(W)$$

50- گزینه «4»

بااستفاده از قضیه کار – انرژی جنبشی داریم: $W = k_f - k_i \xrightarrow{k_i = o} W = \frac{1}{2}mv^2$

$$W = \int \vec{F}.d\vec{r} = \int_o^2 F_x dx + \int_1^5 F_y dy \quad , \quad y = x^2 + 1 \Rightarrow dy = 2xdx$$
$$F_x = x^2 - y = x^2 - x^2 - 1 = -1 \quad , \quad F_y = y^2 + x = (x^2 + 1)^2 + x = x^4 + 2x^{20} + x + 1$$
$$\Rightarrow W = \int_o^2 - dx + \int_o^2 2x(x^4 + 2x^2 + x + 1)dx = -\int_o^2 dx + 2\int_o^2 (x^5 + 2x^3 + x^2 + x)dx$$
$$W = -x]_0^2 + \left[2(\frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2})\right]_o^2 = -2 + \frac{64}{3} + 16 + \frac{16}{3} + 4 = \frac{134}{3}(J)$$
$$\frac{134}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times v^2 \Rightarrow v^2 = 268 \Rightarrow v = \sqrt{268}(\frac{m}{s})$$

51- گزینه «3»

وقتی قرص بالایی را به پایین فشار می دهیم و فنر را به اندازه $x$ متراکم مـی کنـیم ، قـرص بـالایی دارای شـتابی برابـر $a = \frac{kx - mg}{m}$ می شود اما جسم پایینی لزوما به حرکت در نخواهد آمد. تا زمانی که جسم پایینی ساکن اسـت براینـد نیروهای وارد بر آن صفر خواهد بود. یعنی:

$$kx + N - 2mg = 0$$

وقتی قرص پایینی در آستانه جهش روبه بالا قرار می گیرد در رابطه فوق مقدار عددی $N$ برابر صفر می شود.پس داریم:

$$kx - 2mg = 0 \Rightarrow kx = 2mg \Rightarrow x = \frac{2mg}{k}$$

52- گزینه «3»

سرعت نهایی گلوله، سرعت حدی است که به ازای $\frac{dv}{dt} = 0$ رخ می دهد. قانون دوم نیوتن را برای گلوله می نویسیم.

$$mg + r'Vg - bv^2 = \frac{mdv}{dt} \Rightarrow rVg + 2rVg - bv^2 = m\frac{dv}{dt} \xrightarrow{\frac{dv}{dt}=0} 3rVg - bv^2 = 0$$

$$\Rightarrow 3rVg = bv^2 \Rightarrow 3mg = bv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3mg}{b}}$$

53- گزینه «2»

به هنگام سقوط داریم : $a = g$ زیرا آسانسور سقوط آزاد می کند.

اما برای آونگ قانون دوم نیوتن به صورت مقابل است :

$$\sum F = ma$$

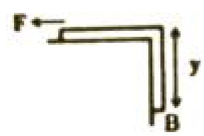
$$mg = ma \Rightarrow a = g$$

شتاب آونگ و آسانسور برابراست. در نتیجه آونگ مثل یک ناظر لخت به همان حال باقی می ماند.

54- گزینه «2»

نیروی $F$ باید جمع دو نیرو باشد تا بتواند طناب را حرکت دهد اولی نیروی وزن قسمت آویزان که برابر است با:

($\lambda = \frac{m'}{y}$ و $m'$ جرم قسمت آویزان)




$$\frac{m'}{y} = l$$

و دیگری نیروی اصطکاکی بین قسمت قرار گرفته روی میز و سطح میز می باشد که عبارت است از $\mu_k m''g$ که $m''$ جرم قسمت قرار گرفته روی میز یعنی $\lambda(L-g)$ می باشد ( $L$ را طول کل ریسمان) پس می توان نوشت :

$$F = m_K\, l\,(L - y)g + l\,yg = m_K\, g\, l\, L + (1 - m_K)\, l\, gy$$

با جایگذاری $\lambda = \frac{3}{4}$ و $g = 10$ و $\mu_K = \frac{1}{2}$ و $L = 4$ می توانیم $F$ را بیابیم.

$$F = 15(1 + \frac{y}{4})$$

چون جرم پیوسته داریم برای محاسبه کار نیاز به انتگرال‌گیری است حدود تغییرات $y$ به اندازه نصف طول طناب یعنی صفر تا $\frac{L}{2}$ است.

$$W = \int_o^{\frac{L}{2}} F dy = 15\int_o^2 (1 + \frac{y}{4})dy = (15)(y + \frac{y^2}{8})\Big|_o^2 = 37/5$$

55- گزینه «1»

$$m(\vec{V}_{1r}+\vec{V}_{1\theta})\times \vec{R}=m(\vec{V}_{2r}+\vec{V}_{2\theta})\times(\vec{R}+\vec{H})\Rightarrow V_{2\theta}=\frac{V_{1\theta}R}{R+H}\qquad(1)$$

می دانیم تنها مؤلفه سرعت پرتابه در نقطه اوج $V_\theta$ است و $V_r$ صفر است همچنین $\vec{V}_r$ و $\vec{R}$ در یک جهتند پس $\vec{V}_r\times\vec{R}=0$.

$$\frac{1}{2}m(\vec{V}_{1r}+\vec{V}_{1\theta})^2-\frac{GmM}{R}=\frac{1}{2}m(\vec{V}_{2\theta})^2-\frac{GmM}{R+H}\Rightarrow\frac{1}{2}\vec{V}_{1r}^2+\frac{1}{2}\vec{V}_{1\theta}^2-\frac{1}{2}\vec{V}_{2\theta}^2=GM(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+H})$$

$$\xrightarrow{(1)}\frac{1}{2}\vec{V}_{1r}^2+\frac{1}{2}V_{1\theta}^2(1-\frac{R^2}{(R+H)^2})=GM(\frac{H}{R(R+H)})$$

$$\vec{V}_{1r}^2+V_{1\theta}^2(\frac{H^2+2RH}{(R+H)^2})=\frac{2GMH}{R(R+H)}\Rightarrow V_{1r}^2=\frac{H}{R+H}\left[\frac{2GM}{R}-\frac{V_{1\theta}^2(H+2R)}{R+H}\right]$$

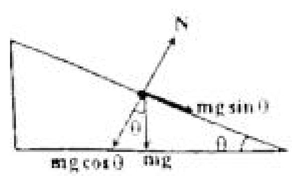
ارتفاعی که موشک یا همان پرتابه بالا می رود در مقابل R شعاع زمین ناچیز است پس $H<<R$ یعنی

$$V_{1r}^2=\frac{H}{R}(\frac{2GM}{R}-2V_{1\theta}^2)\Rightarrow V_{1r}^{20}R=2H(\frac{GM}{R}-V_{1\theta}^2)$$

$$H=\frac{V_{1r}^2R}{2(\frac{GM}{R}-V_{1\theta}^2)}$$

که $V_{1r}$ ، $V_{1\theta}$ همان سرعت اولیه پرتابه $V_r$، $V_\theta$ می باشند.

56- گزینه «3»




$$\sum F_y=0\rightarrow N=mgcos\theta$$

$$\sum F_x=mgsin\theta=ma\rightarrow a=gsin\theta$$

$$v^2-v_0^2=-2ax\rightarrow 0-v_0^2=-2gsin\theta x\rightarrow x=\frac{v_0^2}{2gsin\theta}$$

57- گزینه «2»

$$F_A=F_B\rightarrow m_Aa_A=m_Ba_B$$

$$2\times\frac{1}{3}a_B=m_Ba_B\rightarrow m_B=\frac{2}{3}(kg)$$

58- گزینه «2»

در بالاترین نقطه نیمکره دو نیروی N و mg به جسم وارد می شوند.

$$mg + N = ma = m\frac{v^2}{R} \rightarrow \frac{mv^2}{R} \geq mg \rightarrow v^2 \geq Rg \rightarrow v \geq \sqrt{Rg}$$

علامت مساوی در نامعادله بالا زمانی اتفاق می افتد که $N = 0$ شود و این کمترین مقدار برای سرعت افقی $v$ است.

59- گزینه «1»

با توجه به تعریف نیروهای عمل و عکس العمل در می یابیم که:

1- این دو نیرو با هم مساوی و مختلف الجهت هستند.

2- این دو نیرو به دو جسم مختلف وراد می شوند نه یک جسم.

با توجه به توضیحات بالا معلوم می شود که عکس العمل نیروی وزن کتاب باید به طرف بالا باشد و از آنجا که نیروی وزن را زمین به کتاب وارد می کند، عکس العمل آن را کتاب به زمین سمت بالا وارد خواهد کرد.

60- گزینه «4»

$$F = -\frac{dv}{dx} = -\frac{d(xe^{-x})}{dx} = -(e^{-x} - xe^{-x}) = e^{-x}(x-1)$$

61- گزینه «1»

سرعت حدی ذره هنگامی رخ می دهد که شتاب برابر صفر باشد.

$$\sum F = ma = 0 \rightarrow -kv^3 + mg = 0 \rightarrow mg = kv^3 \rightarrow v = \sqrt[3]{\frac{mg}{k}}$$

62- گزینه «4»

نکته اینکه جرم $m$ به یک گره وصل شده است در گره نیروهای کشش نخ برای دو طرف طناب متصل شده به آن متفاوتند.


$$T_1 sin45 \quad + T_2 sin30 \quad \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}T_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}T_2 \rightarrow T_2\sqrt{\frac{2}{3}}T_1$$

از معادله دوم در معادله اول جایگذاری می نماییم پس:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}T_1 + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}T_1 = m(g+a)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}T_1\left[a+\frac{1}{\sqrt{3}}\right]=m(g+a)\rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}T_1\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right)=m(g+a)\rightarrow T_1$$

$$=2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)m(g+a)\rightarrow T_1=2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)m(g+a)$$

$$=\sqrt{\frac{3}{2}}(\sqrt{3}-1)m(g+a)$$

توضیح:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

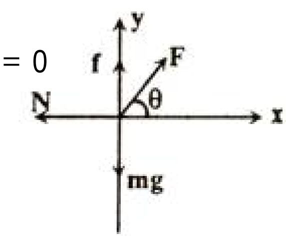
63- گزینه «3»

$$\sum F_x=0\rightarrow N=Fcos\theta,f=\mu N,Fsin\theta+f=mg$$

$$\sum F_y=0\rightarrow Fsin\theta+\mu N=mg\xrightarrow[F_x=Fcos\theta]{}Fsin\theta+\mu Fcos\theta=mg$$

$$F=\frac{mg}{sin\theta+\mu cos\theta}$$

$$\frac{df}{d\theta}=0\rightarrow\frac{dF}{d\theta}=\frac{-mg(cos\theta-\mu sin\theta)}{[sin\theta+\mu cos\theta]^2}=0\rightarrow cos\theta-\mu sin\theta=0$$




$$tg\theta=\frac{1}{\mu}$$

$$\rightarrow 1+tg^2\theta=\frac{1}{cos^2\theta}\rightarrow cos\theta=\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\rightarrow sin\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

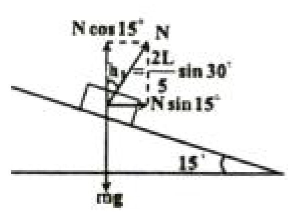
$$N=\frac{F\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\rightarrow\frac{F}{\sqrt{1+\mu^2}}+\frac{\mu^2F}{\sqrt{1+\mu^2}}=mg\rightarrow F=\frac{mg}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

64- گزینه «4: »

$$f_r=\frac{mv^2}{r}$$

$$Nsin15=f_r=\frac{mv^2}{r}\quad(1)$$

$$Ncos15=mg\qquad(2)$$




با تقسیم رابطه (1) بر (2) داریم:

$$\tan 15 = \frac{v^2}{rg} \to v = \sqrt{rg\tan 15} = \sqrt{100 \times 10 \times 0.26} = 16.2(\frac{m}{s})$$

اما چون سرعت را بر حسب $\frac{km}{h}$ خواسته است، عدد به دست آمده را در 3,6 ضرب می کنیم.

$$\frac{16}{2} \times \frac{3}{6} = \frac{58}{32\frac{km}{h}}$$

65- گزینه «2»

تنها نیرویی که در این حالت بر روی جسم کار انجام می دهد، نیروی وزن است. قانون دوم نیوتن را برای این جسم می نویسیم:

$$F = mg, F = ma = m\frac{dv}{dt} \to m\frac{dv}{dt} = mg \to dv = gdt$$

$$\int_0^v dv = \int_0^t gdt \to v = gt \to x = \int_0^t vdt = \int_0^t gtdt = \frac{gt^2}{2}$$

از طرفی توان برابر است با $\frac{\text{کار انجام شده}}{\text{زمان}}$ بنابراین داریم:

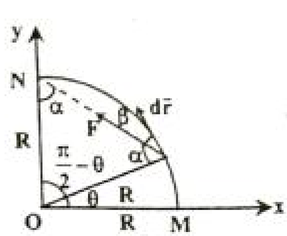
$$p = \frac{Fx\cos 0}{t} = \frac{mg \times \frac{1}{2}gt^2}{t} = \frac{1}{2}mg^2t$$

در رابطه بالا برای به دست آوردن کار، از حاصل ضرب داخلی نیرو در جابه جایی استفاده کردیم و از آنجا که بردار نیرو (وزن) و جابجایی هم جهت هستندزوایه بین آنها برابر صفر است.

66- گزینه «1»

مطابق شکل در هر لحظه $2\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$ می باشد. زوایه $\beta$ میان $\vec{F}$ و $d\vec{r}$، با توجه به عمود بودن $d\vec{r}$ بر شعاعی که به ابتدای آن ختم می شود عبارت است از: $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$. از سوی دیگر $dr = Rd\theta$ می باشد و در نتیجه:

$$dw = \vec{F}.d\vec{r} = F_0(Rd\theta)(\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}F_0R$$



67- گزینه «3»

$$\frac{\partial v}{\partial x}=v_0\left(a-be^{-bx}\right)=0\to a-be^{-bx}=0\to a=be^{-bx}\to e^{-bx}=\frac{a}{b}\to -bx$$
$$=\ln\left(\frac{a}{b}\right)\to bx=\ln\left(\frac{b}{a}\right)\to x=\frac{1}{b}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=v_0b^2e^{-bx}\Big|_{x=\frac{1}{b}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}=v_0b^2e^{-\ln\left(\frac{b}{a}\right)}=v_0b^2e^{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}\to\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=v_0b^2\left(\frac{a}{b}\right)=v_0ab>0$$

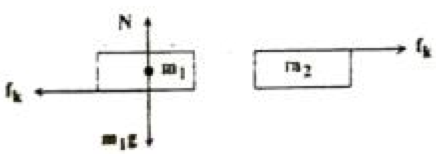
چون مشتق دوم پتانسیل مثبت شد معلوم می شد که $x=\frac{1}{b}\ln(\frac{b}{a})$ نقطه تعادل پایدار است. فرکانس نوسانات نیز از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$w=\sqrt{\frac{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\big|_{x_{\text{تعادل}}}}{m}}=\sqrt{\frac{abv_0}{m}}$$

68- گزینه «2»

شکل مقابل نیروهای وارد بر اجسام $m_1$ و $m_2$ را نشان می دهد. از انجا که اصطکاک بین $m_2$ و سطح افقی صفر است، نیازی به نشان دادن نیروهای عمودی وارد بر $m_2$ نیست.

اکنون قانون دوم رابرای اجسام $m_1$ و $m_2$ می نویسیم:




$$m_1\text{جسم}:\left.\begin{array}{c}N-m_1g=0\to N=m_1g\\ f_k=\mu N=m_1a_1\end{array}\right\}\to a_1=\mu g\to v=a_1t+v_1=\mu gt+v_1(1)$$

$$m_2\text{جسم}:f_k=\mu m_1g=-m_2a_2\to a_2=-\mu\frac{m_1}{m_2}g\to v'=a_2t+v_2=-\mu\frac{m_1}{m_2}gt+v_2\ (2)$$

برای محاسبه زمان کافی است در رابطه های (1) و (2) سرعت های v و $v'$ را برابر قرار دهیم.

$$v=v'\to\mu gt+v_1=-\mu\frac{m_1}{m_2}gt+v_2\to\mu gt\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)=v_2-v_1\to\mu gt\left(\frac{m_1+m_2}{m_2}\right)$$
$$=v_2-v_1\to t=\frac{m_2(v_2-v_1)}{\mu g(m_1+m_2)}$$

69- گزینه «2»

از رابطه $p=F.v$ استفاده می کنیم. داریم:

$$\begin{cases} F = 4000N \\ v = 4\dfrac{m}{s} \end{cases} \rightarrow p = 4000 \times 4 = 16000(w) \rightarrow p = 16(kw)$$

توجه شود از آنجا که قایق با سرعت ثابت حرکت می کند، تنها کافی است که نیروی لازم برای غلبه بر مقاومت آب توسط موتور تامین شود.

70- گزینه «4»

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \rightarrow N = m_1 a \\ \sum F_y = 0 \rightarrow f_s - m_1 g = 0 \end{cases} \rightarrow \mu_s N = m_1 g$$

با حذف $N$ از دو رابطه بالا داریم:

$$\mu_s m_1 a = m_1 g \rightarrow a = \frac{g}{\mu_s}$$

مقدار به دست آمده برای $a$ را در رابطه $F = (m_1 + m_2)a$ جایگذاری می کنیم:

$$F = \frac{(m_1 + m_2)g}{\mu_s} = \frac{(0/5 + 2) \times 10}{0/25} = 100(N)$$

71- گزینه «3»

برای یافتن انرژی پتانسیل کشسانی کافی است از رابطه نیرو بر حسب مکان انتگرال بگیریم.

$$u(x) = -\int F dx \rightarrow u = -\int (-3x^2 - 8x^3)dx = x^3 + 2x^4 + c$$

برای به دست آوردن مقدار ثابت $c$ از شرط اولیه مسئله استفاده می کنیم:

$$u(0) = (0)^3 + 2(0)^4 + c = 1 \rightarrow c = 1$$

$$\rightarrow u(x) = x^3 + 2x^4 + 1 \rightarrow u(1) = (1)^3 + 2(1)^4 + 1 = 4(j)$$

72- گزینه «3»

اصل بر هم نهی، در حقیقت مبنایی تجربی دارد و قوانین نیوتن به نحوی فرمولبندی شده اند که نتایجشان تعارضی با مشاهدات نشات گرفته از این اصل نداشته باشد:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{F_1} = m\vec{a_1}\\ \vec{F_2} = m\vec{a_2}\end{array}\right\} \to \left(\vec{F_1} + \vec{F_2}\right) = M(\vec{a_1} + \vec{a_2})$$

حرکت نهایی جسم، مطابق انتظار، در تطابق با اصل بر هم نهی است که گزینه «4» به نحوی صحیح آن را توصیف می کند. توجه شود که این اصل، یک رابطه صرفاً ریاضی نیست که به طور منطقی از معادلات حرکت به دست می آید. در واقع اگر معادله حرکت ادعا شده (حتی در صورتی که مسیر حرکت ذره نقطه ای را با دقت بالایی توجیه می کرد) تعارضی با این اصل داشت، از عهده پیش بینی مسیر اجرام واقعی بر نمی آمد. با توجه به توضیحات فوق، گزینه (3) نادرست می باشد.

73- گزینه «1»

قوانین پایستگی در همه چارچوب ها برقرار است.

74- گزینه «1»

در حرکت تحت تأثیر نیروی مرکزی می دانیم اندازه حرکت زاویه ای مقداری ثابت است لذا در دو نقطه اوج و حضیض می توانیم بنویسیم:

$L_{\text{اوج}}=L_{\text{حضیض}}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = \vec{r} \times m\vec{V} \xrightarrow{\vec{r}\perp\vec{V}} \vec{L} = m\vec{r}\vec{V}$$

$$L_{\text{اوج}} = L_{\text{حضیض}} \Rightarrow r_0 m V_0 \Rightarrow \frac{V}{V_0} = \frac{r_0}{r} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

75- گزینه «4»

سرعت خطی در استوا $V_e = R\omega$ و $g_e = \frac{1}{2}g_p$. منظور از $V_p$ و $g_p$ سرعت خطی و شتاب جاذبه در قطب می باشد.

در استوا انرژی جنبشی هم دورانی است و هم جمله انتقالی دارد ولی در قطب فقط جمله انتقالی دارد.

ذره در استوا $I = mR^2$

در استوا: $\frac{1}{2}m(V_e^2 + R^2\omega^2) = mg_e = \frac{m}{2}g_p$ (1) در قطب: $\frac{1}{2}mV_p^2 = mg_p$ (2)

*طرفین رابطه (1) و (2) را بر هم تقسیم می کنیم:*

$$\begin{cases}\frac{1}{2}m(2V_e^2) = \frac{1}{2}mg_p\\ \frac{1}{2}mV_p^2 = mg_p\end{cases} \Rightarrow \frac{2V_e^2}{V_p} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_p = 2V_e$$

76- گزینه «3»

می دانیم $g = \frac{GM}{r^2}$ پس:

$$\begin{cases} m = \dfrac{M_e}{100} \\ V = \dfrac{1}{64}V_e \end{cases} \Longrightarrow \frac{g}{g_e} = \frac{\frac{GM}{r^2}}{\frac{GM_e}{r_e^2}} = \frac{Mr_e^2}{M_e r^2} = \frac{\left(\frac{1}{100}M_e\right)r_e^2}{M_e\left(\frac{1}{16}r_e^2\right)} = 0/16$$

توضیح: چون حجم کره مفروض $\frac{1}{64}$ حجم زمین است و آنجایی که حجم کره $\frac{4}{3}\pi r^3$ می باشد در نتیجه:

$$V = \frac{1}{64}V_e \Longrightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{64}\frac{4}{3}\pi r_e^3 \quad r^3 = \left(\frac{r_e}{4}\right)^3 \Rightarrow r = \frac{1}{4}r_e$$

77- هیچ کدام از گزینه ها صحیح نیست.

نیروی مرکزی $f(r)$ از مشتق پتانسیل مرکزی نسبت به $r$ به دست می آید.

$$f(r) = -\frac{dV}{dr} = -3kr^2 \quad (1)$$

$$f(r) = -\frac{mv^2}{r} \qquad (2)$$

از طرفی نیروی مرکزی در حرکت دایره ای یکنواخت برابر است با:

با توجه به روابط (1) و (2) داریم:

$$\frac{mv^2}{r} = 3kr^2 \Longrightarrow mv^2 = 3kr^3 \Longrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kr^3$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(r) = \frac{3}{2}kr^3 + kr^3 = \frac{5}{2}kr^3 \Longrightarrow E|_{r=a} = 2/5\, ka^3$$

78- گزینه «2»

وقتی از سرعت نسبی صحبت می کنیم می توانیم به جای جرم های $m$ و $M$ از جرم کاهش یافته $\mu = \frac{mM}{m+M}$ استفاده کنیم. داریم:

$$\frac{GmM}{d} = \frac{1}{2}\mu V_{rel}^2 \Longrightarrow \frac{GmM}{d} = \frac{1}{2}\left(\frac{mM}{m+M}\right)V_{rel}^2 \Longrightarrow V_{rel}^2 = \frac{2G(m+M)}{d}$$

$$\Longrightarrow V_{rel} = \sqrt{\frac{2G(m+M)}{d}}$$

79- گزینه «1»

$$L = M_1 r^2 \theta \qquad (1)$$

اندازه حرکت زاویه ای سیستم (ماه + زمین) نیز برابر است با:

$$L' = \mu r^2 \theta, \;\; \mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \Longrightarrow L' = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} r^2 \theta \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} L' = \frac{M_2}{M_1 + M_2} L$$

80- گزینه «2»

$$k + u = 0 + 0 \Longrightarrow \frac{1}{2} m V_e^2 + \frac{GmM}{r} = 0 \Rightarrow V_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

از طرفی برای یک ذره که حول زمین می چرخد دو انرژی جنبشی و پتانسیل گرانشی وجود دارد و یا به عبـارتی دو نـوع نیرو به آن وارد می شود یکی نیروی مرکز گرا و دیگری نیروی گرانشی. پس:

$$F_{\text{کل}} = \frac{mV_c^2}{r} - \frac{GmM}{r^2} = 0 \Longrightarrow V_c = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

علت اینکه کل F وارد بر ذره را صفر قرار دادیم این است که فرض می کنیم ذره در آن نقطه در تعادل کامل اسـت. در نتیجه مشاهده می شود که $V_e = \sqrt{2} V_c$ .

81- گزینه «2»

$$E = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{R}$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{5GM}{4R}} = \frac{m}{2}\left(\frac{5GM}{4R}\right) - \frac{GMm}{R} = \frac{-3}{8}\frac{GMm}{R} \qquad ; \quad E < 0 \Longrightarrow$$ مدار سهمی است

برای اینکه بیشترین فاصله را بیابیم از رابطه روبرو استفاده می کنیم. $r_{max} = r_0 \frac{1+e}{1-e}$

قبل از آن خروج از مرکز بیضی را باید بیابیم.

$$e = \sqrt{1 + \frac{2mEh^2}{(GMm)^2}}$$

$$h = \frac{L}{m} = \frac{mV_0 R \cos\varphi}{m} = \frac{\vec{r} \times \vec{p}}{m} = \frac{mV_0 R \cos 60}{m} = \frac{mV_0 R}{2m} = \frac{V_0 R}{2}$$

حداکثر فاصله تا زمین $r_{max} = r_0 \frac{1+e}{1-e} = \frac{5}{2}R \quad ; \quad h = \frac{5}{2}R - R = \frac{3}{2}R$

82- گزینه «2»

$$F = \frac{GmM}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \qquad (1)$$

$m$:جرم ماهواره $\qquad$ $M$: جرم زمین

پس از ساده کردن رابطه (1) سرعت ماهواره در مدار دایره ای به صورت مقابل به دست می آید:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

برای محاسبه انرژی کل از $E = K + u$ استفاده می کنیم که در آن $u = -\frac{GMm}{r}$ است.

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GmM}{r}\right) = \frac{1}{2}m\left(\frac{GM}{r}\right) - \frac{GmM}{r} = -\frac{GmM}{2r} \quad (2)$$

با مقایسه روابط (1) و (2) داریم:

$$E = -\frac{1}{2}Fr$$

# فصل چهارم

## «برخورد و مرکز جرم»

در فصل دینامیک رابطه بین نیروی وارد بر یک جسم و تغییر تکانه آن را به صورت زیر تعریف کردیم:

$$\bar{F} = \frac{\Delta p}{dt}$$ : نیروی متوسط

اگر نیروی خالص $F$ در یک بازه زمانی بسیار کوتاه بر جسم وارد شود کمیت برداری ضربه را می توانیم به صورت روبرو تعریف کنیم:

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

**قضیه ضربه- تکانه:** تغییر تکانه یک ذره طی یک فاصله زمانی با ضربه نیروی خالصی که در این فاصله زمانی به ذره وارد می شود برابر است.

$$\vec{J} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$

**تعریف برخورد:** اگر دو جسم طی زمان کوتاهی به هم نزدیک و سپس از هم دور شوند و در این بر هم کنش متقابل بین آنها انرژی و تکانه مبادله شود می گوییم دو جسم با هم برخورد کرده اند.

اگر نیروهای بین اجسام (نیروهای داخلی) از نیروهای خارجی بسیار بزرگتر باشد (در اکثر برخوردها چنین است) می توانیم از جمع نیروهای خارجی صرف نظر کرده $(\sum F_{ext} = 0)$ و تکانه را طی برخورد پایسته در نظر بگیریم. در این حالت تکانه کل سیستم قبل و بعد از برخورد مقدار یکسانی دارد.

برخورد کشسان: اگر نیروهای داخلی بین اجسام پایستار باشند، انرژی جنبشی سیستم نیز پایسته می ماند. چنین برخوردی را کشسان می نامند.

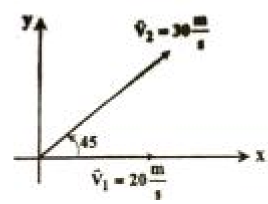
برخورد ناکشسان: در این نوع برخورد انرژی جنبشی سیستم بعد از برخورد با انرژی جنبشی قبل از برخورد برابر نیست، اما اندازه حرکت همچنان پایسته است.

**نکته ۱:** اگر در برخورد ناکشسان انرژی افزایش یابد آن را برخورد ناکشسان انرژی گیر و اگر انرژی جنبشی کاهش یابد باید آن را برخورد ناکشسان انرژی ده می گوییم.

برخورد ناکشسانی که در آن اجسام برخورد کننده به هم می چسبند و با هم حرکت می کنند برخـورد کـاملاً ناکشسـان نامیده می شود.

**مثال ۱:** توپی به جرم $0,5\ \mathrm{kg}$ با سرعت $20\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ به سمت راست می رود که شوت شده و با سرعت $30\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ در جهت بـالای افق به حرکت در می آید. ضربه نیروی خالص و نیروی خالص میانگین را با فرض زمانی برخورد $\Delta t = 0/01\mathrm{s}$ به دست آورید.

**پاسخ:** جهت اولیه و ثانویه حرکت توپ در شکل مقابل نشان داده شده است. لازم است بردار سرعت ثانویـه را در دو راستای x و y تجزیه کنیم.




$$\begin{cases} v_{1x} = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ v_{1y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{2x} = v_2 cos45 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 30 = 15\sqrt{2}(\frac{m}{s}) \\ v_{2y} = v_2 sin45 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 30 = 15\sqrt{2}(\frac{m}{s}) \end{cases}$$

اگر دو جسم به هم نزدیک و سپس از هم دور شوند و در این بر هم کنش متقابل بین آن ها انرژی جا به جا شود و تکانه نیز مبادله شود دو جسم با هم برخورد کرده اند.

دو نوع برخورد داریم:

1- برخورد کشان: در این برخورد نیروهای داخلی پایستار هستند و انرژی نیز پایستار می مانـد و دو جسـم پـس از برخورد از یکدیگر دور می شوند.

2- برخورد ناکشان: در این نوع برخورد انرژی جنبشی قبل و بعد از برخورد با یکدیگر برابر نیستند اما اندازه حرکت هم چنان پایسته است و دو جسم پس از برخورد با یکدیگر حرکت می کنند.

در حل سؤالات برخورد کافی است در دو راستا سرعت را تجزیه کرد و تکاند را در دور است بـه دسـت آورد و سـپس بـا استفاده از قوانین بردارها اندازه ها را محاسبه کرد.

**مثال:** توپی به جرم 0/5kg با سرعت $20\,{}^{m}/_{s}$ به سمت راست می رود که شوت شده و بـا سـرعت $30\,{}^{m}/_{s}$ در جهـت $45^0$ بالای افق به حرکت درمی آید. ضربه نیروی خالص میانگین را با فرض زمان برخورد $Dt60/01s$ به دست آورید؟

$$\begin{cases} v_{1x} = 20\,{}^{m}/_{s} \\ v_{1y} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{2x} = v_2 cos45 = 30\sqrt{\frac{2}{2}} = 15\sqrt{2} \\ v_{2y} = \sqrt{2}\, sin45 = 30\sqrt{\frac{2}{2}} = 15\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Delta p_x = P_{2x} - P_{1x} = \frac{0}{5(15\sqrt{2}-20)} = 0/5$$

$$\Delta P_y = P_{2y} - P_{1y} = \frac{0}{5(15\sqrt{2})} = 10/5$$

$$\Delta P = \sqrt{\Delta P_x^2 + \Delta P_y^2} = \sqrt{110/5}$$

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = 1051/2$$

$$P_x = \frac{\Delta P_x}{\Delta t} = \frac{0/5}{0/01} = 50 \quad P_y = \frac{10/5}{0/01} = 1005$$

$$tan\theta = \frac{P_y}{P_x} = \frac{1050}{50} = 21 \to \theta = 87^0$$

حال با توجه به قانون نیوتن در نیروهای پایستار داریم تکانه قبل از برخورد با تکانه قبل از برخورد برابر است.

$$\begin{cases} m_1v_{1x} + m_2v_{2x} = m_1v'_{1x} + m_2v'_{2x} \\ m_1v_{1y} + m_2v_{2y} = m_1v'_{1y} + m_2v'_{2y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_1v_{1x}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2x}^2 = \frac{1}{2}m_1v'^2_{1x} + \frac{1}{2}m_2v'^2_{2x} \\ \frac{1}{2}m_1v_{1y}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2y}^2 = \frac{1}{2}m_1v'^2_{1y} + \frac{1}{2}m_2v'^2_{2y} \end{cases}$$ برخورد در کشان

در برخورد ناکشان انرژی جنبشی پایستار نیست ⇐ اتلاف انرژی داریم: $\frac{k_2}{k_1} = \frac{m_A}{m_A+m_B}$

**مثال:** گلوله ای به جرم $m$ و سرعت $v$ به آونگ * به جرم $m$ برخورد کرده و در آن فرورفته و ساکن می شود. چنان چـه مجموعه آونگ و گلوله از سطح اولیه به ارتفاع $h$ بالا رود سرعت اولیه گلوله چقدر است؟

$\left(\frac{m}{m+M}\right) gh^{1^3}$ $\quad \frac{m}{m+M}\sqrt{2gh^{1^1}}$

$\left(\frac{m+M}{m}\right)\sqrt{gh^{1^4}}$ $\quad \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh^{1^2}}$

با توجه به پایستگی انرژی مکانیکی داریم:

$$mv_0 + mv_1 = (m+M)v_f$$

$$v_f = \frac{m}{m+M} V \qquad \frac{1}{2}(m+M)V_F^2 = (m+M)gh \to v_F = \sqrt{2gh}$$

$$v = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}$$

ضریب بازگشت: در کشان: $e$=1

$$e = \frac{\left|v_2' - v_1'\right|}{|v_2 - v_1|}$$

در ناکشان: 0<$e$<1

در کاملاً ناکشان: $e$=0

مرکز جرم: مرکز جرم مکان میانگین جرم ذرات است.

$$x_{cm} = \frac{\sum i m_i x_i}{\sum i\, m_i} \qquad z_{cm} = \frac{\sum i m_i y_i}{\sum i m_i}$$

$$y_{cm} = \frac{\sum i m_i y_i}{\sum i m_i} \qquad r_{cm} = \frac{\sum i m_i \vec{r}_i}{\sum i\, m_i}$$

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\sum i m_i \vec{v}_i}{\sum i m_i} \qquad \vec{a}_{cm} = \frac{\sum i m_i \vec{a}_i}{\sum i m_i} \qquad \vec{P}_{cm} = M\vec{V}_{cm}$$

برای پیدا کردن مرکز جرم اجرام پیوسته باید از فرمول رو به رو استفاده کرد:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\int r dm}{\int dm}$$

محیط $dm = hdL$ یک بعدی

مساحت $dm = sdA$ دو بعدی

حجم $sm = pdV$ سه بعدی

**مثال:** مختصات مرکز جرم یک میله با چگالی خطی $h$ را که به صورت ** درآمده است به دست آورید؟

$$\begin{cases} x = r\,cos\theta \\ y = r\,sin\theta \end{cases} \Rightarrow 0 \le \theta \le \pi \quad \begin{cases} dm = 2dL \\ DM = 2rd\theta \end{cases}$$

$$x_{cm} = \frac{\int xdm}{\int dm} = \frac{\int_0^{16} 2r^2 cos\theta d\theta}{\int_0^{16} 2r\, d\theta} = \frac{r^2 sin\theta|_0^{16}}{r\theta|_0^{16}} = 0$$

$$y_{cm} = \frac{\int 2r^2 sin\theta\, d\theta}{\int dm} = \frac{-r^2 cos\theta|_0^{16}}{r\theta|_0^{16}} = \frac{+2r}{\pi}$$

**قضیه پایوس:**

$V = A(2\pi y_{cm}) \rightarrow$ برای اجسام پرتو

$A = S(2\pi y_{cm})$

طول ** برای مساحت جانبی

**مثال:** مطلوب است مکان جرم یک صفحه نیم دایره همگن با ضخامت ناچیز به شعاع $a$:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi a^2}{2}(2\pi y_{cm}) \rightarrow y_{cm} = \frac{4a}{3\pi}$$

**مثال:** قرص دایره ای شکلی به شعاع $a$ در صفحه $xy$ چنان قرار دارد که مرکز آن در مبدأ مختصات است. نیمه بالای محور $x$ قرص دارای چگالی $G$ و نیمه پایین آن دارای چگالی $2G$ مرکز حجم این قرص را بیابید؟

$$M_i = V = 2\pi y_{1cm}A \Longrightarrow \frac{4}{3}\pi a^3 = 2\pi y_{1cm}\frac{\pi a^2}{2} \Rightarrow y_{1cm} = \frac{4a}{3/6}$$

$$M_2 = V = -2\pi y_{2cm}A \Rightarrow y_{2cm} = -\frac{4a}{3\pi}$$

$$My_{cm} = M_1 y_{1cm} + M_2 y_{2cm} \Rightarrow \left(\frac{\pi a^2}{2} \times s + \frac{\pi a^2}{2}\sigma\right) y_{cm}$$

$$= \frac{\pi a^2}{2} \times s\left(\frac{4a}{3/6}\right) - \frac{\pi a^2}{2} \times 2s\left(\frac{4a}{3/6}\right) \Rightarrow y_{cm} = -\frac{4a}{9/6}$$

منفی سازی آن است که مرکز جرم دایره پایینی است.

در حرکت موشک داریم: اگر نیروی خارجی نداشته باشیم:

$$\vec{V}_F = -\vec{V} Ln\frac{M_0}{M_F}$$

سرعت تغییر جرم

در حالتی که فقط نیروی گرانش به آن تأثیر بگذارد:

$$\vec{V}_F = \vec{V} Ln\frac{M_0}{M_F - \vec{g}t_f}$$

**مثال:** یک قطره باران با جرم اولیه $M_0$ از حالت سکون تحت اثر گرانش شروع به سقوط می کند. فرض کنید که جرم این قطره با آهنگی متناسب با حاصل ضرب جرم لحظه ای در سطعت لحظه ای آن در ابر افزایش می یابد اگر $K$ مقدار ناشی است نشان دهید سرعت ذره سرانجام ثابت می شود.

$$\frac{dM}{dt} = KM\vec{V} \qquad \vec{F} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$$

$$M(t)g\Delta t = p(t + \Delta t) - p(t) \Rightarrow M(t)g\Delta t$$

$$= \left(M(t) + \frac{dM}{dt}\Delta t\right) v(t + \Delta t) - M(t)v(t)KM(t)V(t)V(t + \Delta t) + M(t)g\Delta t$$

$$= M(t)(V(t + \Delta t) - V(t))$$

حال اگر $\Delta t \to 0$

$$g - kv^2(t) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow kv_F^2 = g \Rightarrow V_F = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

$$g - kv^2 = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int dt = \int \frac{dv}{g-kv^2(t)} \Rightarrow t = [\frac{1}{\sqrt{gk}} tan^{-1} \frac{v(gk)^{1/2}}{g}]_0^v \Rightarrow$$

$$V = \sqrt{\frac{g}{k}} \tan h(\sqrt{gk}\, t) \Rightarrow V(t) = \sqrt{\frac{g}{k}} \qquad t \to \infty \text{ اگر}$$

**مثال:** زنجیره ای به طول L و جرم M به طور قائم به نحوی نگه داشته شده است که انتهای پایینی آن ها به طوری که در شکل نشان داده شده سطح میز افقی را لمس کند اگر انتهای بالای زنجیر رها شود نیروی وارد بر سطح میز به هنگام سقوط بر حسب طولی از زنجیر که بالای میز در هواست کدام است؟

1) $3WL$ 2) $\frac{W(L-X)}{3}$

3) $3W(L-X)$ 4) $W(L-X)$

$$h = \frac{M}{L}$$

$$P_{ext} = P - h(L-X)g \qquad \frac{dm}{dt} = hv \text{ آهنگ افزایش جرم میز}$$

$$P_{ext} = \frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} = 0 + v(hv)$$

$$F - h(L-X)g = hv^2 \Rightarrow F = h[(L-X)g + v^2]$$

$$F = 3hg(L-X) = 3W(L-X)$$

$$V = \sqrt{2g(L-X)} \qquad hg = w$$

**مثال:** تانکر پر از آبی در جاده مستقیمی در حرکت است. آب از انتهای تانکر موازی راستای جاده با تندی $15\,{}^{m}/_{s}$ نسبت به زمین و آهنگ ثابت $10\,{}^{kg}/_{s}$ خارج می شود. توان نیروی افقی f در لحظه دلخواه t برای تانکر که با سرعت یکنواخت $20\,{}^{m}/_{s}$ در جاده حرکت می کند کدام است؟

1) 12250 وات 2) 3000 وات 3) 1000 وات 4) 7000 وات

$$\vec{F} = m\acute{\vec{v}}.\vec{v}m^0$$

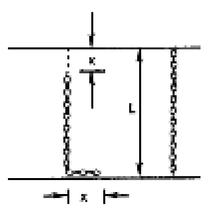
$$\vec{V} = 0 \qquad F = -Vm \qquad \vec{V} = 15\hat{\imath} - 20\hat{\imath} = 5\hat{\imath} \qquad = 5\hat{\imath} \times 10 = 50$$

$$P = FV = 50 \times 20 = 1000 wat\,ts$$

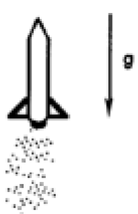
**نمونه سوالات تستی**

**۱- یک زنجیر فلزی به طول L و جرم M از بالای سطحی آویزان شده است بطوری که یک طرف زنجیر با سطح مورد نظر در تماس می‌باشد. سپس زنجیر رها می‌شود تا آزادانه بیافتد، اگر x مسافتی باشد که انتهای زنجیر طی می‌کند، نیروی وارد بر زنجیر در هر لحظه از فرآیند برابر کدام گزینه خواهد بود؟**

1) $N = Mg - Mx''$ 2) $N = 3Mg$ 3) $N = Mg - 2Mx''$ 4) $N = (\frac{3M}{L})gx$



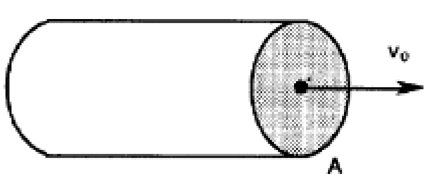

**۲- یک موشک را در میدان جاذبه ثابت g در نظر بگیرید. اگر سرعت اولیه موشک برابر ۰/۴۰ کیلومتر بر ثانیه و زمان سوختن برابر ۱۰۰ ثانیه باشد. سرعت خروجی برابر ۲ کیلومتر بر ثانیه می‌باشد و جرم با فاکتوری از ۳ کاهش می‌یابد در اینصورت سرعت نهایی برابر کدام گزینه خواهد بود؟**




۱) $0/81 km/s$ ۲) $0/98 km/s$

۳) $2/40 km/s$ ۴) $1/62 km/s$

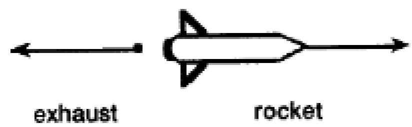
**۳- یک سطل استوانه‌ای با سطح مقطع A و جرم اولیه $m_0$ و سرعت اولیه $v_0$ در فضا حر ... . این سطل اجرام آسمانی به چگالی ρ را جمع کرده و سرعتش کاهش می‌یابد. با استفاده از مکانیک نیوتونی سرعت سطل بر حسب تابعی از زمان برابر کدام گزینه خواهد بود؟**




1) $v = v_0$ 2) $v = v_0 e^{-\rho A v_0 t / m_0}$

3) $v = \frac{v_0}{\sqrt{1 + \frac{2\rho A v_0 t}{m_0}}}$ 4) $v = v_0 e^{-2\rho A v_0 t / m_0}$

۴- حرکت یک موشک در فضای آزاد را در نظر بگیرید. اگر موشک با سرعت اولیه ۰/۵ کیلومتر بر ساعت شروع به حرکت کند و جرم آن با فاکتور ۲ نسبت به گاز خروجی با سرعت ۱ کیلومتر بر ثانیه کاهش یابد، سرعت نهایی این موشک برابر کدام گزینه خواهد بود؟




1) $1/5 km/s$ 2) $0/5 km/s$

3) $1/7 km/s$ 4) $1/2 km/s$

۵- سرعت حرکت یک گلوله توپ به جرم $m=10kg$ چقدر باید باشد تا در برخورد با یک کشتی به جرم $M=100ton$، سرعت کشتی برابر $v_1=0/1 m/s$ شود؟ (فرض کنید برخورد ناکشسان است).

1) $10 m/s$ 2) $100 m/s$ 3) $1 m/s$ 4) $1000 m/s$

۶- جسمی به جرم **m** به طور کشسان با دیواری برخورد می‌کند و جهت سرعت آن با امتداد عمود بر دیوار زاویه $\alpha$ می‌سازد تکانه منتقل شده به دیوار برابر است با:

1) $2mv\cos\alpha$ 2) $mv\cos\alpha$ 3) $mv\sin\alpha$ 4) $mv$

۷- لنجی به طول ۱۲ متر و جرم ۱۸۰ کیلوگرم روی آب آرام دریاچه‌ای آزادانه شناور است. شخصی به جرم ۷۰ کیلوگرم در یک طرف لنج ایستاده و طرف دیگر لنج به اسکله بسته شده است. شخص به طرف اسکله به راه می‌افتد. وقتی به انتهای لنج می‌رسد، فاصله شخص از اسکله برابر کدام گزینه خواهد بود؟

1) 2 متر 2) 8/64 متر 3) 4/86 متر 4) 5/64 متر

۸- جسمی به جرم ۲ کیلوگرم با سرعت $6 m/s$ در جهت مثبت محور **x** ها حرکت می‌کند و به طور کشسان با جرم **M** به صورت روردرو برخورد می‌کند. پس از برخورد، جرم ۲ کیلوگرم ساکن می‌شود و جرم **M** با سرعت $12 m/s$ حرکت می‌کند. جرم **M** و سرعت آن قبل از برخورد کدام است؟

1) $M=\frac{2}{3}kg, v_2=-6 m/s$ 2) $M=2kg, v_2=6 m/s$

3) $M=\frac{2}{3}kg, v_2=6 m/s$ 4) $M=2kg, v_2=-6 m/s$

۹- پرتابه‌ای به جرم ۱۰ کیلوگرم با سرعت اولیه $200m/s$ تحت زاویه ۳۰ درجه نسبت به خط قائم، پرتاب می‌شود. وقتی پرتابه در بالاترین نقطه مسیر است انفجار داخلی آن را دو قسمت می‌کند. پس از انفجار، یک قسمت با جرم $\frac{m}{3}$ پس از ۱۲/۵ ثانیه درست زیر نقطه انفجار به زمین می‌افتد. سرعت جرم‌های $\frac{m}{3}$ و $\frac{2m}{3}$ بلافاصله پس از انفجار چقدر خواهد بود؟

1) $v_1 = 61/2m/s$ و $v_2 = 15/31m/s$

2) $v_1 = 61/2m/s$ و $v_2 = 153/1m/s$

3) $v_1 = -61/2m/s$ و $v_2 = 61/2m/s$

4) $v_1 = -61/2m/s$ و $v_2 = 153/1m/s$

۱۰- پرتابه‌ای به جرم ۱۰ کیلوگرم با سرعت اولیه $200m/s$ تحت زاویه ۳۰ درجه نسبت به خط قائم، پرتاب می‌شود. وقتی پرتابه در بالاترین نقطه مسیر است انفجار داخلی آن را دو قسمت می‌کند. پس از انفجار، یک قسمت با جرم $\frac{m}{3}$ پس از ۱۲/۵ ثانیه درست زیر نقطه انفجار به زمین می‌افتد. فاصله نقطه برخورد جرم $\frac{2m}{3}$ از نقطه شلیک برابر کدام گزینه می‌باشد؟

1) $4418/5m$ 2) $1767/4m$ 3) $3534/8m$ 4) $1000m$

۱۱- توپی به جرم $0/05kg$ سقوط می‌کند و با سرعت $10m/s$ به سطح زمین برخورد می‌کند. توپ پس از $0/01s$ تماس با زمین با سرعت اولیه $7m/s$ در راستای قائم برمی‌گردد. میانگین نیروی وارد بر توپ چقدر خواهد بود؟

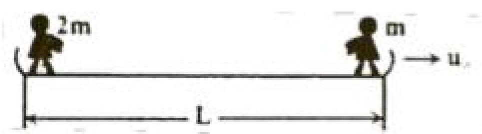
1) $\overline{F} = 85N$ 2) $\overline{F} = 0/85N$ 3) $\overline{F} = -85N$ 4) $\overline{F} = -0/85N$

۱۲- ذره ای به جرم **m**، بار **q** و سرعت اولیه **v** به طور روبرو با ذره ای با همان مشخصات که در حال سکون است برخورد می کند. نزدیکترین فاصله دو ذره از هم چقدر است؟

1) $r = \frac{2q^2}{mv^2}$ 2) $r = \frac{3q^2}{2mv^2}$

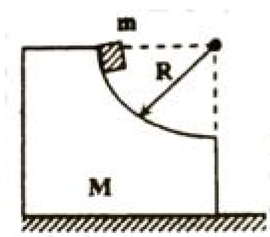
3) $r = \frac{4q^2}{mv^2}$ 4) $r = \frac{8q^2}{mv^2}$

۱۳- دو نفر با جرم m و ۲m مطابق شکل در دو انتهای یک قایق متحرک به طول L و جرم m ایستاده اند. قایق با تندی $u_0$ در آب ساکن در حرکت است. هر دو نفر همزمان تصمیم می گیرند با تندی یکسان $\frac{u_0}{۲}$ نسبت به قایق به وسط قایق بیایند. در هنگام رسیدن آنها به وسط قایق، قایق چه فاصله ای نسبت به آب پیموده است؟ (از اصطکاک آب و قایق صرف نظر می شود)




$\frac{L}{8}$ (1
$\frac{3L}{8}$ (2
$\frac{7L}{8}$ (3
L (4

۱۴- در شکل مقابل کلیه سطوح بدون اصطکاک و سرعت اولیه هر دو جسم m و M صفر می باشد. جسم m هنگامیکه به پائین سطح لغزنده دایره ای شکل می رسد، از کدام رابطه به دست می آید؟ (g شتاب ثقل است)

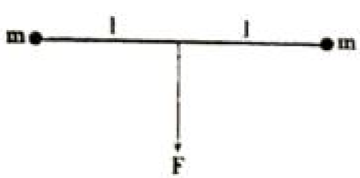



$\sqrt{\frac{m+M}{2MgR}}$ (1
$\sqrt{\frac{MgR}{m+M}}$ (2
$\sqrt{\frac{2MgR}{m+M}}$ (3
$\sqrt{\frac{MgR}{m+M}}$ (4

۱۵- یک شکارچی تفنگش را از روی یک قایق بادی سبک، شلیک می کند. در صورتی که جرم شکارچی و قایق ۷۰ کیلوگرم، جرم گلوله ۳۵ گرم و سرعت متوسط اولیه گلوله ۳۲۰ متر بر ثانیه باشد و لوله تفنگ با افق زاویه ۶۰ درجه بسازد. بعد از شلیک، سرعت قایق چند متر بر ثانیه است؟

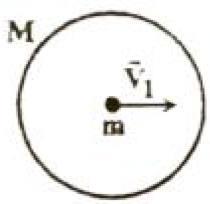
0/06 (1
0/08 (2
1/2 (3
1/6 (4

۱۶- دو جسم به جرم m توسط نخی به طول ۲ I به هم وصل شده اند. مطابق شکل نیروی ثابت F به وسط نخ و عمود بر آن وارد می شود. فرض کنید که دو جسم بعد از برخورد به یکدیگر می چسبند. چه مقدار انرژی جنبشی در این برخورد هدر می رود؟ (از جرم نخ صرف نظر کنید)




$\frac{FI}{2}$ (1
FI (2
3 FI (3
2 FIm (4

۱۷- حلقه ای همگن به جرم M و شعاع R روی یک سطح تخت بدون اصطکاک به طــور افقــی قــرار دارد. از مرکز حلقه گلوله ای به جرم m با تندی $v_1$ به سمت دیواره حلقه پرتاب می شود. فرض کنید گلوله بــه طــور کاملاً کشسان با دیواره حلقه برخورد می کند و در امتداد همان مسیر اولیه بر می گــردد و بــا دیــواره مقابــل حلقه برخورد می کند. فاصله زمانی بین دو برخورد چقدر است؟



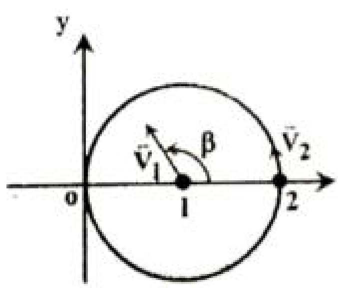

1) $\frac{2R}{v_1}$

2) $\frac{2RM}{(m+M)v_1}$

3) $\frac{2RM}{(2m+M)v_1}$

4) $\frac{2R(M+m)}{(M-m)v_1}$

۱۸- شکل زیر دو گلوله کوچک رت در لحظه t=۰ نشان می دهــد. گلولــه شــماره ۱ بــا ســرعت ثابــت $\vec{v}_1$ در راستایی که با محور x زوایه $\beta = ۲\mathrm{rad}$ می سازد حرکت می کند و گلوله شــماره ۲ در جهــت مثلثــاتی روی محیط دایره می چرخد، به طوری که $|\vec{v}_2| = \alpha t$ و $\alpha = ۴\frac{m}{s^2}$. اگر پس از ۲ ثانیه گلوله ها با هم برخورد کنند، اندازه $\vec{v}_1$ چند متر بر ثانیه است؟



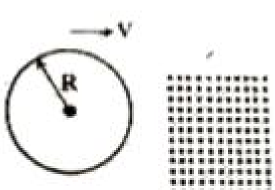

1) 1

2) 2

3) 3

4) 4

۱۹- در یک محیط تعداد n ذره ریز ساکن به جرم m، در واحد حجم، وجود دارد. کره ای به جرم M و شــعاع R را با سرعت V در این محیط به حرکت در می آوریم. برخورد بین این ذرات و کره را الاستیک فرض کنیــد. نیروی اصطکاک وارد بر کره کدام است؟ (فرض کنید ذرات ریز هیچ برهمکنشی با هم ندارند و $m \ll M$).



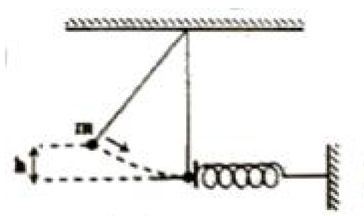

1) $\pi R^2 nmV^2$

2) $2\pi R^2 nmV^2$

3) $\pi R^5 nmV^2$

4) $2\pi R^5 n^2 mV^2$

۲۰- وزنه ای به جرم $m$ مطابق شکل به یک پاندول متصل شده است. اگر پاندول را تا ارتفاع $h$ بالا برده و رها نماییم. با فنری با نیروی خطی $F = -kx - bx^۲$ برخورد می نماید. میزان فشردگی فنـر پـس از برخــورد، برابر است با:



1) $\sqrt{\frac{2mgh}{k}}$

2) $(\sqrt{\frac{4mgh}{b} + \frac{k^2}{b^2}} + \frac{k}{b})^{\frac{1}{2}}$

3) $(\sqrt{\frac{4mgh}{b} + \frac{k^2}{b^2}} - \frac{k}{b})^{\frac{1}{2}}$

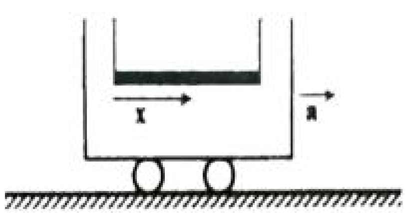
4) $\sqrt{\frac{2mgh}{h}}$

۲۱- موشکی به جرم $M_0$ با بیرون فرستادن جرم با سرعت نسبی ثابت، در فضای آزاد، از حالـت سـکون بـه حرکت در می آید. وقتی اندازه حرکت خطی موشک به بیشینه مقدارش برسد، جرم موشک کدام است؟

1) $\frac{M_0}{\sqrt{e}}$ 2) $\frac{M_0}{\sqrt{2}}$ 3) $\frac{M_0}{2}$ 4) $\frac{M_0}{e}$

۲۲- مطابق شکل میله ای نازک به جرم $\mathbf{M}$ و طول $\mathbf{L}$ از سقف یک واگن آویزان است. چگـالی خطـی توزیـع جرم در طول میله $\lambda(x) = \frac{2M}{L^2}x$ است که x فاصله تا انتهای چپ میله است. اگر واگن با شتاب a بـه سـمت راست حرکت کند نسبت کشش نخ سمت راست چپ چقدر است؟

میله در حالت افقی قرار دارد.



1) $2$

2) $1 + \frac{a}{g}$

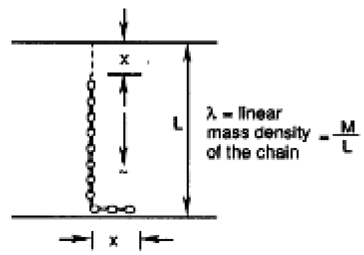
3) $1$

4) $\sqrt{1 + \frac{a^2}{g^2}}$

**پاسخنامه سوالات تستی**

**۱- گزینه ۴ صحیح است زیرا:**

نیروی کل وارد بر زنجیر بوسیله سطح و جاذبه، در هر زمان برابر است با جرم آن در شتاب مرکز جرم آن.




برای یافتن معادله حرکت مرکز جرم، مطابق شکل بالا می‌توانیم بنویسیم ( همه فاصله‌ها نسبت بـه نقطـه آویـزان شـدن سنجیده می‌شوند):

$$x_{xm}=\frac{\sum mx}{\sum m}=\frac{(x\lambda)L+(L-x)\lambda(x+\frac{L-x}{2})}{L\lambda}$$

$$x_{xm}=x+\frac{L^2-x^2}{2L}$$

با مشتق گیری از این رابطه داریم:

$$\Rightarrow x'_{cm}=x'-\frac{xx'}{L}$$

$$\Rightarrow x''_{cm}=x''-\frac{xx''+x'^2}{L}$$

حال با استفاده از قانون دوم نیوتون داریم:

$$Mx''_{cm}=Mg-N=M(x''-\frac{xx''+x'^2}{L})$$

اما از طرفی چون زنجیر آزادانه سقوط می‌کند داریم: $x''=g$ و همچنین برای سرعت داریم: $x'^2=2gx$

بنابراین در نهایت خواهیم داشت:

$$N=\frac{M}{L}(xg+2gx)=\frac{3M}{L}gx$$

**۲- گزینه ۴ صحیح است:**

برای اجسام با جرم متغیر رابطه زیر را داشتیم:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} - \vec{u})\frac{dM}{dt}$$

در مورد این مسئله داریم:

$$-mg = mv' + um'$$

با استفاده از قانون دوم نیوتون و انتگرال گیری از سمت چپ این معادله بر حسب زمان و سمت راست بر حسب جرم خواهیم داشت:

$$-g\int_0^t dt = \int_{v_0}^{v} dv + u\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m}$$

$$v = v_0 - gt + u\ln\frac{m_0}{m}$$

$$\Rightarrow v = 0/4 - 9/8\times10^{-3}(100) + 2\ln\frac{3}{1}$$
$$= 1/62 km/s$$

**۳- گزینه ۳ صحیح است.**

با استفاده از قانون پایستگی تکانه داریم:

$$mv = m_0 v_0$$

سیستم دارای افزایش جرم می‌باشد. این افزایش جرم برابر است با:

$$\frac{dm}{dt} = \rho A v$$

از روابط ریاضی داریم:

$$m\frac{dm}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(m^2)$$

بنابراین داریم:

$$\frac{d}{dt}(m^2) = 2m\frac{dm}{dt} = 2m\rho Av = 2\rho Amv = 2\rho Am_0v_0$$

$$\int_{m_0}^{m} d(m^2) = \int_0^t 2\rho Am_0v_0 dt$$

با انتگرال گیری بدست می‌آوریم:

$$m^2 = m_0^2 + 2\rho Av_0 t$$

$$\rightarrow v = \frac{m_0v_0}{m} = \frac{v_0}{\sqrt{1 + \frac{2\rho Av_0}{\quad}}}$$

**۴- گزینه ۴ صحیح است.**

با استفاده از پایستگی تکانه خطی داریم:

$$mdv = -vdm$$

با انتگرال گیری بدست می‌آوریم:

$$\int_{m_0}^{m} -\frac{dm}{m} = \int_{v_0}^{v} dv$$
$$\rightarrow v = v_0 + v\ln\frac{m_0}{m}$$
$$= 0/5 + 1/0\ln\frac{2}{1}$$
$$= 1/2 km/s$$

**۵- گزینه ۴ صحیح است.**

این برخورد یک برخورد ناکشسان است. از قانون پایستگی تکانه خطی داریم:

$$mv = Mv_1$$

بنابراین با جاگذاری مقادیر مربوط به صورت مسئله داریم:

$$(10)v = (100000)(0/1) \rightarrow v = 1000 m/s$$

**۶- گزینه ۱ صحیح است:**

تکانه منتقل شده از جسم به دیوار برابر است با:

$$\Delta P = P_2 - P_1$$

اگر جهت حرکت جسم به دیوار را جهت مثبت محور x ها در نظر بگیریم، تکانه اولیه جسم برابر است با:

$$P_1 = mv\cos\alpha$$

توجه داریم که مولفه عمودی سرعت، تکانه‌ای به دیوار وارد نمی‌کند. تکانه نهایی جسم پس از برخورد با دیوار برابر است با:

$$P_2 = -mv\cos\alpha$$

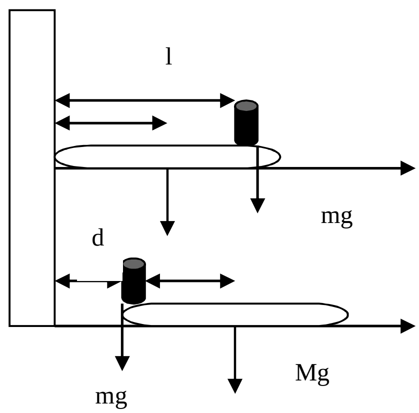
پس تغییر تکانه جسم برابر است با:

$$\Delta P = -2mv\cos\alpha$$

که تکانه منتقل شده به دیوار منفی این مقدار می‌باشد.

**۷- گزینه ۲ صحیح است.**

نیروی اصطکاک شخص با قایق نیروی داخلی محسوب می‌شود و از نیروی اصطکاک بین قایق و آب هم صرفنظر می‌کنیم. برآیند نیروهای خارجی وارد بر مجموعه (شخص و قایق) صفر است. پس اندازه حرکت خطی پایسته است. با توجه به شکل می‌توان گفت:




$$p_i = p_f \Rightarrow \upsilon = p_f \Rightarrow v_{cm} = 0 \Rightarrow x_{cm} = x'_{cm}$$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1x'_1 + m_2x'_2}{m_1 + m_2}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{ml + M\frac{l}{2}}{m + M} = \frac{md + M(d + \frac{l}{2})}{m + M} \Rightarrow ml + M\frac{l}{2} = md + M(d + \frac{l}{2}) \Rightarrow ml = (m + M)d$$

در نهایت داریم:

$$d = \frac{m}{m + M}l \Rightarrow d = \frac{180}{250}(12) = 8/64m$$

**۸- گزینه ۱ صحیح است.**

با توجه به روابط مربوط به برخوردهای کشسان داشتیم:

$$\begin{cases} v_{1f} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1i} + \dfrac{2m}{m_1 + m_2}v_{2i} \\ v_{2f} = \dfrac{2m}{m_1 + m_2}v_{1i} + \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_{2i} \end{cases}$$

بنابراین در این مورد داریم:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{2 - M}{2 + M} \times 6 + \dfrac{2M}{2 + M}v_2 \\ 12 = \dfrac{2(2)}{} \times 6 + \dfrac{M - 2}{2 + M}v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12 - 6M + 2Mv_2 = 0 \\ 12M + Mv_2 - 2v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2 = \dfrac{6M - 12}{2M} \\ 12M - (M - 2)v_2 = 0 \end{cases}$$

با جاگذاری معادله بالا در معادله پایین داریم:

$$12M-(M-2)\frac{6M-12}{2M}=0\Rightarrow M-2=-2M\Rightarrow M=\frac{2}{3}kg$$

و برای بدست آوردن سرعت داریم:

$$v_2=\frac{6M-12}{2M}\Rightarrow v_2=-6m/s$$

9- گزینه 4 صحیح است:

$$m_1=\frac{m}{3}\Rightarrow m_1=\frac{10}{3}$$
$$m_2=\frac{2m}{3}\Rightarrow m_2=\frac{20}{3}$$

در نقطه اوج $v_y=0$ است و در راستای محور x ها حرکت با سرعت ثابت است:

$$v_x=v_0\cos\theta_0=(200)\cos 60=100m/s$$
$$\vec{v}=100\vec{i}$$

نیروی خارجی صفر است. پس اندازه حرکت خطی پایسته است. رابطه پایستگی تکانه برای پیش و پس از انفجار برابر است با:

$$\vec{p}_i=\vec{p}_f\Rightarrow\begin{cases}p_{ix}=p_{fx}\\p_{iy}=p_{fy}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}mv=m_2v_{2x}\\-m_1v_{1y}+m_2v_{2y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1000=\frac{20}{3}v_{2x}\\\frac{10}{3}v_{1y}=\frac{20}{3}v_{2y}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_{2x}=150m/s\\v_{1y}=2v_{2y}\end{cases}$$

H ارتفاع نقطه اوج برابر است با:

$$H=\frac{v_0^2\sin^2\theta_0}{2y}\Rightarrow H=\frac{(200)^2\sin^2 60}{2(9/8)}\Rightarrow H=1530/6m$$

با استفاده از رابطه مکان- زمان می‌توان نوشت:

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0\Rightarrow 0=-\frac{1}{2}(9/8)(12/5)^2+12/5v_{1y}+1530/6\Rightarrow v_{1y}=-61/2m/s$$

بنابراین داریم:

$$v_{2y}=\frac{v_{1y}}{2}\Rightarrow v_{2y}=30/6m/s$$

بنابراین سرعت جرم $\frac{m}{3}$ در هنگام برخورد با زمین برابر است با:

$$v_1 = \sqrt{{v_{1x}}^2 + v_{1y}^2} = -61/2 m/s$$

و سرعت جسم $\frac{2m}{3}$ برابر است با:

$$v_2 = \sqrt{{v_{2x}}^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{(150)^2 + (30/6)^2} \Rightarrow v_2 = 153/1 m/s$$

**۱۰- گزینه ۱ صحیح می‌باشد:**

با فرض انفجار پرتابه، مرکز جرم همواره بر مسیر سهمی شکل پرتابه، حرکت می‌کند. یعنی: $x_{cm} = R$

$R$ برد پرتابه برابر است با:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \Rightarrow R = \frac{(200)^2 \sin 120}{9/8} = 3534/8 m$$

$x_1$ محل سقوط قطعه اول بر ابر است با:

$$x_1 = \frac{R}{2} \Rightarrow x_1 = 1767/4 m$$

$x_2$ محل سقوط قطعه دوم برابر است با:

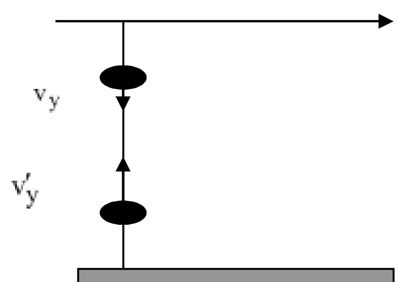
$$x_{cm} = R \Rightarrow \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = R \Rightarrow R = \frac{\frac{10}{3}(\frac{R}{2}) + \frac{20}{3} x_2}{10} \Rightarrow 30R = 5R + 20x_2$$

و در نهایت:

$$x_2 = 1/25R = 4418/5 m$$

**۱۱- گزینه ۳ صحیح است.**

با توجه به شکل:




$$\Delta p_x = 0$$

$$\Delta p_y = m(v'_y - v_y) \Rightarrow \Delta p_y = -0/85 kgm/s$$

$$\Delta p = \sqrt{\Delta p_x^2 + \Delta p_y^2}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$\Delta p = 0/85 kgm/s$

در نهایت داریم:

$$\Delta p = \overline{F}\Delta t \Rightarrow \overline{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow \overline{F} = -85N$$

علامت منفی نشان دهنده جهت است.

12- گزینه «3»

$$\begin{cases} \text{کولنی} \quad \text{نیروی} \quad F_e = \dfrac{kq^2}{r^2} \\ \text{گرانشی} \quad \text{نیروی} \quad F_G = \left|\dfrac{Gm^2}{r^2}\right| \end{cases} \xrightarrow{F_e = F_G} Gm^2 = kq^2 \qquad (1)$$

.

$$E_i = \frac{1}{2}mV^2 \qquad E_f = \frac{kq^2}{r} + \frac{Gm^2}{r} \xrightarrow{(1)} E_f = \frac{2kq^2}{r}$$

$$E_i = E_f \rightarrow \frac{1}{2}mV^2 = \frac{2kq^2}{r} \rightarrow r = \frac{4kq^2}{mV^2}$$

نیروی گرانشی یک نیروی جاذبه و نیروی کولنی برای دو ذره با بار هم نام q یک نیروی دافعه است پس این دو می توانند مختلف الجهت باشند و تعادل برقرار کنند یعنی همدیگر را خنثی کنند اما اگر در صورت سئوال ذکر می شد که دو ذره دارای بار q و q- هستند آنگاه چون نیروی کولنی و گرانشی هر دو جاذبه هستند و در یک جهت، هیچگاه تعادل نداشتیم و این دو نیرو همدیگر را خنثی نمی کردند.

13- گزینه «3».

فرض کنیم سرعت نهایی قایق V (نسبت به زمین) و سرعت دو نفر (نسبت به زمین) یکی $V - \frac{u_0}{2}$ و دیگری $V + \frac{u_0}{2}$ می باشد. این علامت مثبت و منفی به دلیل آن است که در خلاف جهت هم حرکت می کنند و این دو سرعت نسبت به زمین در نظر گرفته شده.

$$P_i = mu_0 + 2mu_0 + mu_0 \qquad P_f = m(V - \frac{u_0}{2}) + 2m(V + \frac{u_0}{2}) + mV$$

برای برآورد زمانی فرقی نمی کند سرعت ها و مکان نسبت به کدام چارچوب اندازه گیری شوند.

$$P_i = P_f \Rightarrow V = \frac{7}{8}u_0$$

$t=\frac{x_0}{V_0}=\frac{(\frac{L}{2})}{(\frac{u_0}{2})}=\frac{L}{u_0}$ زمان حرکت یکی از دو نفر

$t=\frac{x}{V}\Rightarrow x=tV=(\frac{L}{u_0})V=(\frac{7}{8}u_0)(\frac{L}{u_0})=\frac{7}{8}L$ برای قایق

شکل شهودی این مسئله به طرح زیر است:


14- گزینه «3»

$$P_i=P_f\Rightarrow 0=mV+Mv'\Rightarrow v'=-\frac{m}{M}v$$

$$E_i=E_f\Rightarrow mgR=\frac{1}{2}mV^2+\frac{1}{2}Mv'^2$$

البته در این سئوال و گزینه های آن اندکی اشکال وجود دارد و آن این است که تکانه نهایی ($P_f$) را باید به صورت mv+(m+M)v' بنویسیم. چون جسم m بر روی M قرار دارد، همراه آن سمت چپ حرکت می کند و بنابراین سرعت نهایی جرم m برابر v-v' می باشد. اما اگر این نکته را در حل مسئله به کار بریم جوابی که به دست می آید در هیچ گزینه ای نیست و بنابراین منظور طراح سئوال همان گزینه 3 بوده است.

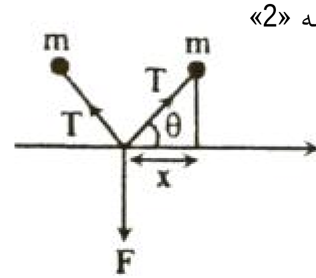
15- گزینه «2»

$$P_{ix}=P_{fx}\Rightarrow 0=mv\cos a-Mv'\Rightarrow v'=\frac{m}{M}v\cos a$$

در این رابطه m , v به ترتیب جرم و سرعت گلوله و M , v' به ترتیب جرم و سرعت سیستم (شکارچی+قایق) هستند.

$$v'=\frac{35\times10^{-3}}{70}\times320\times\cos60^{\circ}=0/08(\frac{m}{s})$$

16- گزینه «2»




$$\begin{matrix}T\cos q=ma\\2T\cos q=F\end{matrix}\Rightarrow a=\frac{F}{2m}\cot q=\frac{F}{2m}\frac{x}{\sqrt{\mathbf{l}^2-x^2}}$$

$$\Delta k=w=\int_0^{\mathbf{l}}madx=\frac{F}{2}\int_0^{\mathbf{l}}\frac{adx}{\sqrt{\mathbf{l}^2-x^2}}=\frac{F}{2}\sqrt{\mathbf{l}^2-x^2}\Big|_0^{\mathbf{l}}=\frac{F\mathbf{l}}{2}$$

چون مقدار x از صفر تا مقدار نهایی خود یعنی $\mathbf{l}$ تغییر می کند از حدود انتگرال را صفر تا $\mathbf{l}$ در نظر می گیریم . برای یک ذره تغییر انرژی جنبشی $\frac{F\mathbf{l}}{2}$ پس برای دو ذره $w_{\text{کل}} = 2(\frac{F\mathbf{l}}{2}) = F\mathbf{l}$

17- گزینه «1»

$$v_{1f} = (\frac{m-M}{m+M})v_{2i} + \frac{2M}{m+M}v_{2i} \xrightarrow[v_{2i}=0]{v_{1i}=v} v_{1f} = \frac{m-M}{m+M}v_1$$

$$v_{2f} = \frac{2m}{m+M}v_{1i} + \frac{m-M}{m+M}v_{2i} \xrightarrow[v_{2i}=0]{v_{1i}=v} v_{2f} = \frac{2m}{m+M}v_1$$

دو جسمی که یکی با سرعت $v_{1f}$ و دیگری $v_{2f}$ حرکت می کند می تواند برخوردی باشد که یک جسم داریم و با سرعت $\vec{v}_{1f} + \vec{v}_{2f}$ حرکت می کند، در نظر گرفته شود و این جسم فاصله 2R را طی می کند لذا:

$$t = \frac{2R}{(\frac{2m}{m+M} - \frac{m-M}{m+M})v_1} = \frac{2R}{v_1}$$

توضیح: برآیند $\vec{v}_{2f} + \vec{v}_{1f}$ به علت مختلف الجهت بودن این دو بردار به صورت می باشد.

18- گزینه «2»

چون گلوله سفید است روی محیط دایره حرکت کند پس برخورد دو گلوله در نقطه‌ای روی محیط دایره صورت میگیرد

از طرفی می دانیم گلوله (1) در مدت 2s مسافت را طی کرده و طبق رابطه سرعت ثابت یعنی $v = \frac{\text{مسافت}}{\text{زمان}}$ آنگاه

$|V_1| = \frac{r_0}{2}$ در اینجا اگر بتوانیم مقدار $r_0$ را بیابیم آنگاه مقدار سرعت $V_1$ که در صورت تست از ما خواسته مشخص می شود.

برای یک کمان دایره ای داریم:

(۱)

$$s = r_0 b \qquad (1)$$

از طرفی برای گلوله (2) داریم:

$$S = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \qquad (2)$$

صفر - سرعت اولیه گلوله (2) صفر است

رابطه های (1) و (2) را مساوی قرار می دهیم در نتیجه:

$$2r_0 = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(4)(2)^2 \Rightarrow r_0 = 4m \Rightarrow v_1 = \frac{4}{2}2m$$

19- گزینه «2»

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m}{m_1 + m_2} v_{2i} \quad ; \quad v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

می توان گفت (البته در اینجا $m_1$=M و $m_2$=m که M>>m یعنی $m_1 >> m_2$ که $v=v_{1t}$

$$v_{2f} = \frac{2M}{M + mv} v \xrightarrow{M>>m} v_{2f} = 2v \Rightarrow \Delta k = \frac{1}{2} m v_{2f}^2 - \frac{1}{2} m v_{2i}^2 \approx 2mv^2$$

اگر فرض کنیم n تعداد ذرات برخورد کننده در واحد سطح مقطع در واحد طول باشد آنگاه:

$$\Delta k = (2mv^2) npR^2 d = f.d \Rightarrow f = 2pR^2 mnv^2$$

توضیح اینکه ما در بالا مقدار $2mv^2$ را برای تغییر انرژی جنبشی یک ذره پیدا کردیم و چون چند ذره داریم می بایست تغییر انرژی جنبشی کل را حساب کنیم. کمیت $npR^2d$ همان تعداد ذرات را مشخص می کند چون n عبارت است از $\frac{\text{تعداد ذرات}}{\text{واحد سطح} \times \text{واحد طول}}$، $pR^2$ هم که واحد سطح دارد و d هم که واحد طول دارد. اینکه واحد سطح و واحد طول هم وارد حل مساله شده است به این دلیل است که هم تغییر مسافت داریم هم اینکه کره ای که در مساله از آن صحبت شده است یک جرم پیوسته است و دارای سطح می باشد.

20- گزینه «3»

اگر پاندول را تا ارتفاع h بالا ببریم انرژی پتانسیل گرانشی mgh در آن ذخیره می شود و در لحظه رسیدن به فنر تمام این انرژی به جنبشی تبدیل می شود (قانون پایستگی انرژی مکانیکی) . در مرحله بعد انرژی جنبشی پاندول به انرژی پتانسیل کشسانی فنر تبدیل می شود و زمانی که فنر بیشترین فشردگی را دارد انرژی جنبشی پاندول برابر صفر می شود. بنابراین لازم است در دو مرحله قانون پایستگی انرژی را به کار ببریم:

$$\begin{array}{l} \text{مرحله 1}: mgh = \frac{1}{2} m v^2 \\ \text{مرحله 2}: \frac{1}{2} m v^2 = u_{\text{کشسانی فنر}} \end{array} \Rightarrow mgh = u_{\text{کشسانی فنر}} \qquad (1)$$

اما فنر مذکور از قانون هوک پیروی نمی کند (چون نیروی بازگشتی آن به صورت F=-kx نیست) بنابراین انرژی پتانسیل کشسانی آن برابر $\frac{1}{2}kx^2$ نیست و باید محاسبه شود. داریم:

$$u_{\text{فنر}} = -\int F dx = -\int (kx + bx^3) dx = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}bx^4 \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}bx^4 = mgh \Rightarrow bx^4 + 2kx^2 - 4mgh = 0$$

برای حل معادله بالا بر حسب x، تغییر متغیر $x^2=Y$ را انجام می دهیم

$$bY^2 + 2kY - 4mgh = 0 \Rightarrow Y = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 + 16nmgh}}{2b}$$

علامت منفی در بالا به این دلیل غیرقالب قبول است که $Y=x^2$ همواره نامنفی است. پس از ساده‌سازی Y به صورت زیر درمی آید:

$$\Rightarrow Y = -\frac{k}{b} + \sqrt{\frac{k^2}{b^2} + \frac{4mgh}{b}} \Rightarrow x = Y^{\frac{1}{2}} = (-\frac{k}{b} + \sqrt{\frac{k^2}{b^2} + \frac{4mgh}{b}})^{\frac{1}{2}}$$

21- گزینه «4»

اگر سرعت گاز خروجی از موشک را با $\vec{u}$ نشان دهیم و سرعت موشک نیز برابر $\vec{v}$ باشد، داریم:

$$F_{ext} = m\frac{dv}{dt} - u\frac{dm}{dt}$$

علامت منفی در بالا به این دلیل ظاهر شد که سرعت گاز خروجی در خلاف جهت حرکت موشک است. از طرفی چون موشک در فضای آزاد حرکت می کند لذا $\sum F_{ext} = 0$ است، بنابراین رابطه فوق به صورت زیر در می آید:

$$m\frac{dv}{dt} = u\frac{dm}{dt} \Rightarrow mdv = udm \Rightarrow \frac{dv}{u} = \frac{dm}{m} \Rightarrow \int_0^v \frac{dv}{u} = \int_{M_0}^{M} \frac{dm}{m} \Rightarrow \frac{v}{u} = \ln\frac{M}{M_0}$$

وقتی در مسئله گفته شده اندازه حرکت موشک بیشینه می شود به این معنی است که مشتق آن نسبت به m (تنها متغیر مسئله) برابر صفر است.

$$P = Mv = Mu\ln\frac{M}{M_0} \Rightarrow \frac{dP}{dM} = 0$$

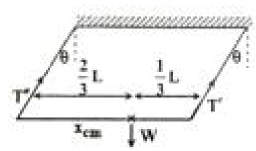
$$\frac{dP}{dM} = u\ln\frac{M}{M_0} + Mu(\frac{1}{M}) \Rightarrow u(\ln\frac{M}{M_0} + 1) = 0 \Rightarrow \ln\frac{M}{M_0} = -1 \Rightarrow \frac{M}{M_0} = e^{-1} \Rightarrow M = \frac{M_0}{e}$$

22- گزینه «1»

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\,l\,dx = \frac{1}{M}\int_0^L \frac{2M}{L^2}x^2 dx = \frac{2}{L^2}\int_0^L \frac{2}{L^2}x^2 dx =$$

مکان مرکز جرم به اندازه $\frac{2}{3}L$ از سمت چپ میله می باشد حرکت واگن به سمت جلو سبب می شود که میله به سمت چپ کشیده شود. $T'',T'$ به ترتیب گشتاورهای پادساعتگرد حول مرکز جرم ایجاد می کنند از طرفی نیروی وزن که به جرم وارد می شود هیچ گونه گشتاوری ایجاد نمی کند. چون میله در تعادل است لذا جمع گشتاورهای ساعتگرد و پادساعتگرد حول مرکز جرم می بایست صفر باشد.

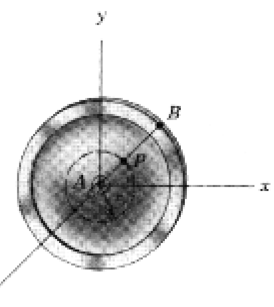
$$T''(\frac{2}{3}L)\sin q - T'(\frac{L}{3})\sin q = 0 \Rightarrow \frac{T''}{T'} = 2$$



# فصل پنجم: حرکت چرخشی

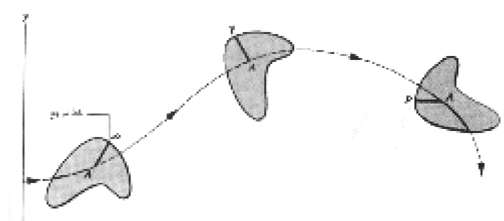
## 5-1- سینماتیک چرخشی:

کلی‌ترین حرکت یک جسم صلب علاوه بر حرکت انتقالی شامل حرکت چرخشی نیز هست. دراین فصل حرکت چرخشی محض حول یک محور ثابت، که در آن هر ذره جسم روی دایره‌ای به مر کز محور دوران حرکت می‌کند را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. جسم صلب در صورتی دارای حرکت چرخشی محض است که هر نقطه‌ای از آن در مسیری دایره‌ای حرکت کند. مرکز این دایره‌ها باید روی خط مستقیم مشترکی باشد که به آن محور چرخش می‌گوییم.

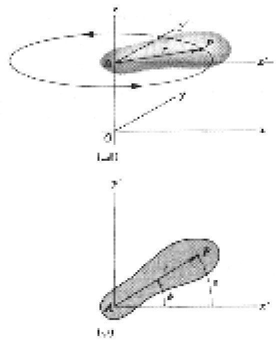


(ب)

حرکت کلی یک جسم صلب، ترکیبی از حرکت‌های انتقالی و چرخشی است. کلی‌ترین حرکت شامل ترکیبی از حرکت انتقالی، حرکت چرخشی دور یک محور و تغییر جهت محور چرخش می‌باشد و در حالت کلی برای توصیف حرکت جسم صلب در فضای سه بعدی به شش مختصه نیاز داریم: سه مختصه برای تعیین مرکزجرم، دو زاویه مانند طول و عرض برای مشخص کردن سمتگیری محور چرخش و یک زاویه برای توصیف چرخش دور آن محور.



### 5-2- متغیرهای چرخشی:



اگر محل و موقعیت هر ذره جسم صلب مانند p نسبت به چارچوب مرجع معلـوم باشـد می توان وضعیت تمامی جسم صلب در حال چرخش را تعیین کرد.

همانطور که شکل نشان مـی‌دهـد، بـا چـرخش جسـم نقطـه p کمـانی بـه طـول s را می‌پیماید

طول کمان و شعاع چرخش زاویه‌ای را معین می‌کند که خط مرجع نامیده می‌شود:

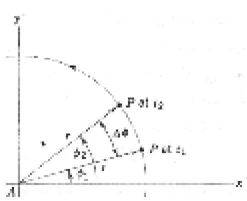
$$\phi = \frac{s}{r}$$

حال فرض می‌کنیم جسم مورد نظر بصورت پادساعتگرد بچرخد در اینصورت جابجایی زاویه‌ای نقطه p برابر با $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ در بازه زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ است. در اینصورت سرعت زاویه‌ای نقطه p برابر است با:

$$\omega_{av} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

موقعیت ذره p در شکل زیر نشان داده شده است:

سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای این ذره، حد این کمیت در هنگامی است که $\Delta t$ به صفر میل می‌کند که بر حسب رادیان بر ثانیه اندازه گیری می شود:



$$\omega = \frac{d\phi}{dt}$$

بـرای جسـم صـلب دارای حرکـت چرخشـی محـض، سـرعت زاویـه‌ای تمـام نقطـه‌هـای جسـم یکسـان اسـت.

اگر سرعت زاویه‌ای نقطه p ثابت نباشد، در نقطه p دارای شتاب زاویه‌ای می‌شود.

اگر $\omega_1$ و $\omega_2$ سرعت‌های زاویه ای در زمان های $t_2$ و $t_1$ باشد:

$$\alpha_{av} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای برابر خواهد بود با:

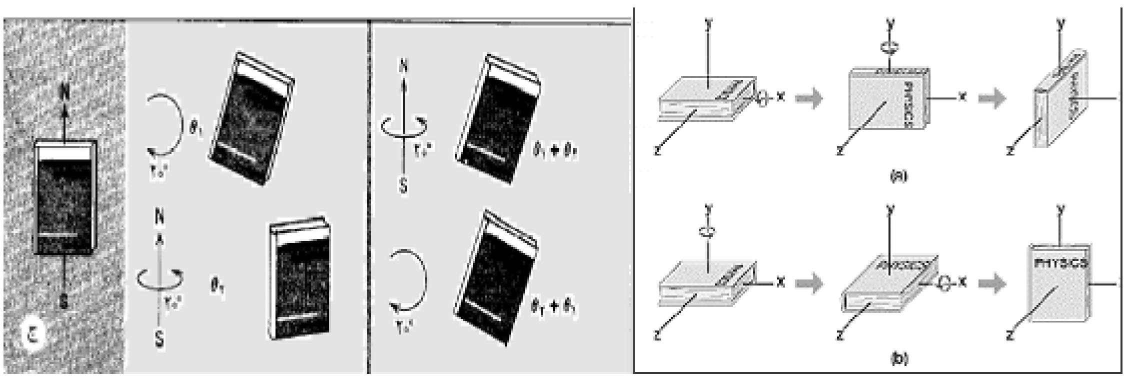
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

واحد شتاب زاویه ای لحظه‌ای و متوسط، رادیان بر مجذور ثانیه است.

### 3-5- کمیتهای چرخشی به صورت کمیتهای برداری:

آیا کمیت‌های چرخشی بردارند؟ جواب این پرسش را فقط می‌توان با تحقیق در اینکه آیا این کمیت‌ها از قوانین جمع برداری پیروی می‌کنند یا نه داد.

با توجه به شکل زیرجابجایی‌های زاویه‌ای بردار نیستند زیرا مانند بردارها از قانون جابجایی جمع برداری تبعیت نمی‌کنند.

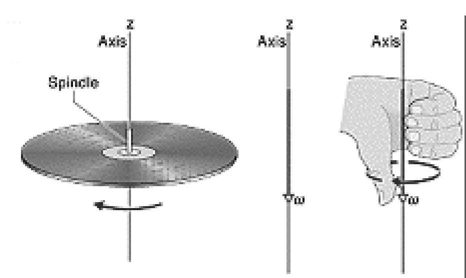



$\theta_1 + \theta_2 \neq \theta_2 + \theta_1$ $\qquad$ $\theta_1 + \theta_2 \neq \theta_2 + \theta_1$

اگر جابجایی‌های زاویه‌ای مانند شکل سمت راست بالا بی‌نهایت کوچک باشند، خاصیت جابجاپذیری در جمع، حاصل می‌شود بنا براین این جابجایی‌های کوچک بردار هستند.

بنابراین کمیت‌هایی که بر حسب جابجایی‌های بی‌نهایت کوچک، مانند سرعت وشتاب زاویه‌ای، تعریف می‌شوند بردار هستند.

**نکته:** جهت بردار سرعت زاویه‌ای عمود بر صفحه چرخش است و با قاعده دست راست تعیین می‌گردد.



## 4-5- چرخش با شتاب زاویه‌ای ثابت:

اگر شتاب زاویه‌ای ثابت باشد معادلات حرکت چرخشی محض با شتاب ثابت بصورت زیر خواهد بود:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\phi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\phi$$

$$\phi = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$$

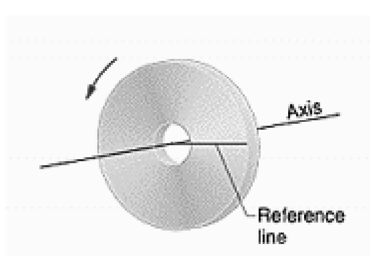
$$\phi = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$$

درجدول زیر معادلات حرکت با شتاب ثابت در حرکت چرخشی و حرکت انتقالی با یکدیگر مقایسه شده است:

جدول ۱. حرکت با شتاب ثابت خطی یا زاویه‌ای.

| شمارهٔ معادله (این فصل) | حرکت دورانی (محور ثابت) | حرکت انتقالی (راستای ثابت) | شماره معادله (فصل ۲) |
|---|---|---|---|
| (۶) | $\omega = \omega_0 + \alpha t$ | $v = v_0 + at$ | (۱۵) |
| (۷) | $\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ | $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ | (۱۹) |
| (۸) | $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\phi - \phi_0)$ | $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ | (۲۰) |
| (۹) | $\phi = \phi_0 + \frac{\omega_0 + \omega}{2}t$ | $x = x_0 + \frac{v_0 + v}{2}t$ | (۲۱) |
| (۱۰) | $\phi = \phi_0 + \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$ | $x = x_0 + vt - \frac{1}{2}at^2$ | (۲۲) |

**مثال ۱:** یک سنگ سمباده شتاب زاویه‌ای ثابت $\alpha$ برابر با $3 rad/s^2$ دارد. در آغاز حرکت، از حالت سکون، خط op در شکل زیر افقی است. مطلوب است الف) جابجایی زاویه‌ای خط op و درنتیجه سنگ سمباده ب) سرعت زاویه‌ای سنگ سمباده پس از 2 ثانیه.



الف) $\alpha$و $t$ معلوم هستند و می‌خواهیم $\theta$ را پیدا کنیم، بنابراین داریم:

$$\theta=\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$$

در لحظه $t=0$ داریم $\omega=\omega_0=0$ و $\alpha=3\mathrm{rad/s^2}$ بنابراین پس از 2 ثانیه خواهیم داشت:

$$\theta=(0)(2)+\frac{1}{2}(3)(2)^2=6\mathrm{rad}=0/96\mathrm{rev}$$

ب) $\alpha$ و $t$ معلوم هستند و می‌خواهیم $\omega$را پیدا کنیم:

$$\omega=\omega_0+\alpha t=0+(3)(2)=6\mathrm{rad/s}$$

## 5-5- رابطه‌های موجود بین متغیرهای خطی و زاویه‌ای:

ذره‌ای را در نقطه $p$ یک جسم صلب در نظر می‌گیریم. این ذره در دایره‌ای به شعاع $r$ از محوری قرار دارد که از $A$ می‌گذرد. این ذره در دایره‌ای به شعاع $r$ حرکت می‌کند. وقتی جسم به اندازه $\phi$ می‌چرخد این نقطه مسافت $s$ را روی کمانی از دایره می‌پیماید، بطوری که:

$$s=\phi r$$

با مشتق‌گیری از دو طرف این رابطه نسبت به زمان و با توجه به اینکه $r$ ثابت است رابطه سرعت خطی و زاویه‌ای به دست می آید:

$$\frac{ds}{dt}=\frac{d\phi}{dt}r\Rightarrow v_T=\omega r$$

این معادله رابطه‌ای بین اندازه‌های سرعت خطی مماسی و سرعت زاویه‌ای است؛ سرعت خطی ذره دارای حرکت دایره‌ای برابر است با حاصلضرب سرعت زاویه‌ای در فاصله $r$ آن ذره از محور چرخش. با مشتق‌گیری از رابطه بالا نسبت به زمان رابطه شتاب خطی و زاویه‌ای به دست می‌آید:

$$\frac{dv_T}{dt}=\frac{d\omega}{dt}r\Rightarrow a_T=\alpha r$$

در نتیجه اندازه مولفه مماسی شتاب خطی ذره دارای حرکت دایره‌ای برابر است با حاصلضرب مقدار شتاب زاویه‌ای در فاصله $r$ آن ذره از محور چرخش.

در فصل‌های پیش داشتیم، مولفه شعاعی یا مرکزگرای شتاب ذره‌ای که در مسیری دایره‌ای حرکت می‌کند برابر است با:

$$a_R = \frac{v_T^2}{r} = \omega^2 r$$

نکته: در یک جسم چرخان، نقطه‌هایی که در فاصله‌های متفاوتی از محور چرخش قرار دارند، جابه‌جایی، سرعت، یا شتاب خطی یکسانی ندارند، ولی تمام نقطه‌های جسم صلبی که دور محور ثابتی می‌چرخد، در هر لحظه دارای جابه‌جایی، سرعت، یا شتاب زاویه‌ای یکسان‌اند.

## 6-5- دینامیک چرخشی

در این بخش علت‌های چرخش، یعنی دینامیک چرخشی را مطالعه می‌کنیم، نخست دینامیک چرخشی یک ذره و سپس سیستم ذرات و در آخر دینامیک چرخشی جسم صلب حول محور چرخش ثابت را بررسی می‌کنیم.

### ۵-۶-۱- گشتاور نیرو:

در حرکت انتقالی، نیرو را به شتاب خطی جسم وابسته می‌کنیم. حال می‌خواهیم ببینیم در حرکت چرخشی چه کمیتی را به شتاب زاویه‌ای وابسته کنیم؟ این کمیت تنها نیرو نیست، زیرا مثلاً نیروی یکسان واقع بر نقاط مختلف یک درب شتاب های زاویه‌ای مختلفی به آن می‌دهد. در دینامیک چرخشی کمیتی که هم‌اندازه نیرو و هم‌جهت و هم‌مکانی که نیرو به آنجا وارد می‌شود را به حساب می‌آورد گشتاور نیرو نامیده می‌شود.

می‌دانیم که شتاب زاویه‌ای یک جسم در پاسخ به گشتاور نیروی معین نه تنها به جرم جسم، بلکه به چگونگی توزیع جرم نسبت به محور چرخش نیز بستگی دارد. کمیت چرخشی که جرم جسم و توزیع آن را نسبت به محور چرخش توصیف می‌کند لختی دورانی نامیده می‌شود. همانطور که جرم را می‌توان یک ویژگی جسم در نظر گرفت که نشانگر مقاومت جسم در برابر شتاب خطی است، لختی دورانی را نیز می‌توان نشانه مقاومت جسم در برابر شتاب زاویه‌ای دانست.

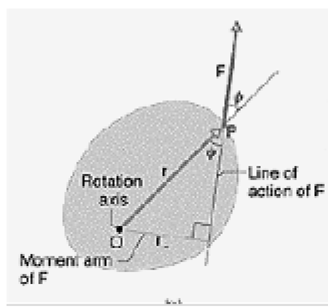
جسم صلبی به شکل دلخواه را که نیروی $F$ در نقطه $p$ بر آن وارد می‌شود را در نظر می‌گیریم. شتاب زاویه‌ای جسم، علاوه بر اندازه مولفه مماسی نیروی $\vec{F}$، به اینکه نیرو در چه فاصله‌ای از محور اثر می‌کند نیز بستگی دارد. بنابراین شتاب زاویه‌ای یک جسم هم به اندازه مولفه مماسی نیرو و هم به فاصله اثر نیرو از محور چرخش بستگی دارد. کمیت چرخشی که شامل هر دو عامل می‌شود گشتاور نیروی $t$نام دارد و اندازه آن بصورت زیر تعریف می‌شود:

$\tau = rF\sin\theta$

که درآن $\theta$ زاویه بین دو بردار $r$ و $F$ است.

رابطه مربوط به گشتاور نیرو را می‌توان بصورت برداری زیر نوشت:

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$




راستای گشتاور، بر صفحه $r$ و $F$ عمود است و جهت آن از قاعده دست راست بدست می‌آید.

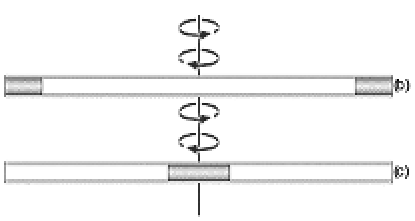
## 7-5- لختی دورانی و قانون دوم نیوتون:

برای جسم متشکل از $N$ ذره که دور یک محور می‌چرخند، مجموع حاصلضربهای جرم ذرات در مجذور فاصله نسبی آن‌ها از محور دوران را لختی دورانی نامند:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_N r_N^2 = \sum m_n r_n^2$$

لختی دورانی دارای بعد $ML^2$ است. لختی دورانی هر جسم به محور دوران و شکل جسم و نحوه توزیع جرم آن بستگی دارد.

در شکل روبرو $\omega$ و $m$ یکسان است ولی $I_c \langle I_b$




رابطه گشتاور نیرو و شتاب زاویه‌ای به صورت زیر است:

$\sum \tau_{ext,z} = I\alpha_z$

این شکل چرخشی قانون دوم نیوتون است. این معادله گشتاور نیروی خارجی خالص دور یک محور ثابت مشخص را به شتاب زاویه‌ای دور آن محور مربوط می‌سازد.

کمیت‌ها و روابط سینماتیک و دینامیک در دو حرکت انتقالی و دورانی محض در جدول زیر آمده و مقایسه شده است:

جدول ۱. مقایسهٔ معادلات دینامیکی در حرکتهای خطی و دورانی.

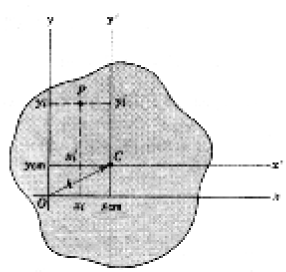
| حرکت خطی | | حرکت دورانی حول محور ثابت | |
|---|---|---|---|
| جابه‌جایی | $x$ | جابه‌جایی زاویه‌ای | $\phi$ |
| سرعت | $v = dx/dt$ | سرعت زاویه‌ای | $\omega = d\phi/dt$ |
| شتاب | $a = dv/dt$ | شتاب زاویه‌ای | $\alpha = d\omega/dt$ |
| جرم (لختی انتقالی) | $M$ | لختی دورانی | $I$ |
| نیرو | $F = Ma$ | گشتاور نیرو | $\tau = I\alpha$ |
| کار | $W = \int F\,dx$ | کار | $W = \int \tau\, d\phi$ |
| انرژی جنبشی | $K = \frac{1}{2}Mv^2$ | انرژی جنبشی | $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ |
| توان | $P = Fv$ | توان | $P = \tau\omega$ |
| تکانهٔ خطی | $p = Mv$ | تکانهٔ زاویه‌ای[1] | $L = I\omega$ |

۱. تکانهٔ زاویه‌ای را در فصل ۱۳ بررسی خواهیم کرد.

### ۵-۷-۱- قضیه محورهای موازی:

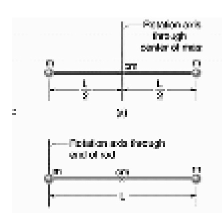
لختی دورانی هر جسم دور هر محور دلخواه برابر است با لختی دورانی آن دور محوری موازی که از مرکز جرم مـی‌گـذرد به اضافه حاصلضرب جرم کل جسم در مربع فاصله بین این دو محور. نمایش ریاضی قضیه محورهای موازی بصورت زیـر است:

$$I = I_{cm} + Mh^2$$



**مثال:** دو جسم با جرم یکسان توسط میله سبکی به طول $L$ (از جرم میله صرف نظر می کنیم ) بـه هـم وصـل اسـت. مطلوب است گشتاور لختی جسم نسبت به محور دورانی که از مرکز جرم و از یک انتهای میله می گذرد.

ابتدا لختی این جسم را نسبت به محوری که از مرکز جرم مـی‌گـذرد، محاسـبه کـرده و درنهایـت بـا اسـتفاده از قضیـه محورهای موازی لختی را نسبت به محوری که از یک انتهای میله می‌گذرد محاسبه می‌کنیم:




$$I_{cm} = \sum m r_i^2 = m(\frac{L}{2})^2 + m(\frac{L}{2})^2 = m\frac{L^2}{2}$$

$$I = I_{cm} + Mh^2 = \frac{1}{2}mL^2 + (2m)(\frac{1}{2}L)^2$$

$$= mL^2$$

### 5-8- لختی دورانی اجسام صلب:

برای جسم متشکل از N ذره که دور یک محور می‌چرخد لختی دورانی برابر بود با:

$$I = \sum m_n r_n^2$$

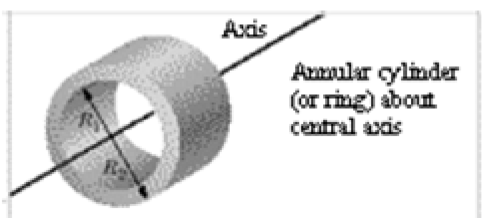
چون جسم صلب دارای توزیع پیوسته جرم است عمل جمع به انتگرال‌گیری تبدیل می‌شود و لختی دورانی برابر خواهد بود با:

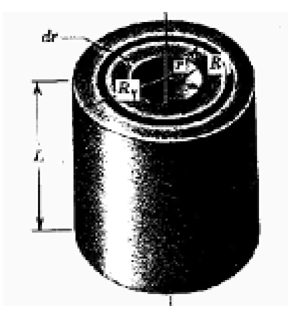
$$I = \int r^2 dm$$

که در آن dm عنصر جرم و r فاصله آن تا محور دوران است و انتگرال‌گیری روی کل حجم جسم صورت می‌گیرد.

**مثال:** به عنوان مثال گشتاور لختی یک حلقه استوانه‌ای شکل به شعاع داخلی $R_1$ و شعاع خارجی $R_2$ را محاسبه می کنیم:

با توجه به شکل زیر داریم:




$$dm = \rho dv$$

که در آن $dv = (2\pi r dr)L$ حجم پوسته استوانه‌ای به جرم dm است. پس:

$$dm = 2\pi L \rho r dr$$

در نتیجه لختی دورانی نسبت به محور استوانه برابر است با:

$$I = \int r^2 dm = 2\pi L \int_{R_1}^{R_2} \rho r^3 dr$$

برای سهولت فرض می‌کنیم که چگالی ثابت است

$$I = 2\pi L\rho\int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = 2\pi L\rho \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} = \rho\pi(R_2^2 - R_1^2)L\frac{R_2^2 + R_1^2}{2}$$

جرم $M$ استوانه لایه‌ای برابر با حاصلضرب چگالی آن در حجمش برابر است با:

$$M = \rho\pi(R_2^2 - R_1^2)L$$

بنابراین:

$$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$$

حالتهای خاص:

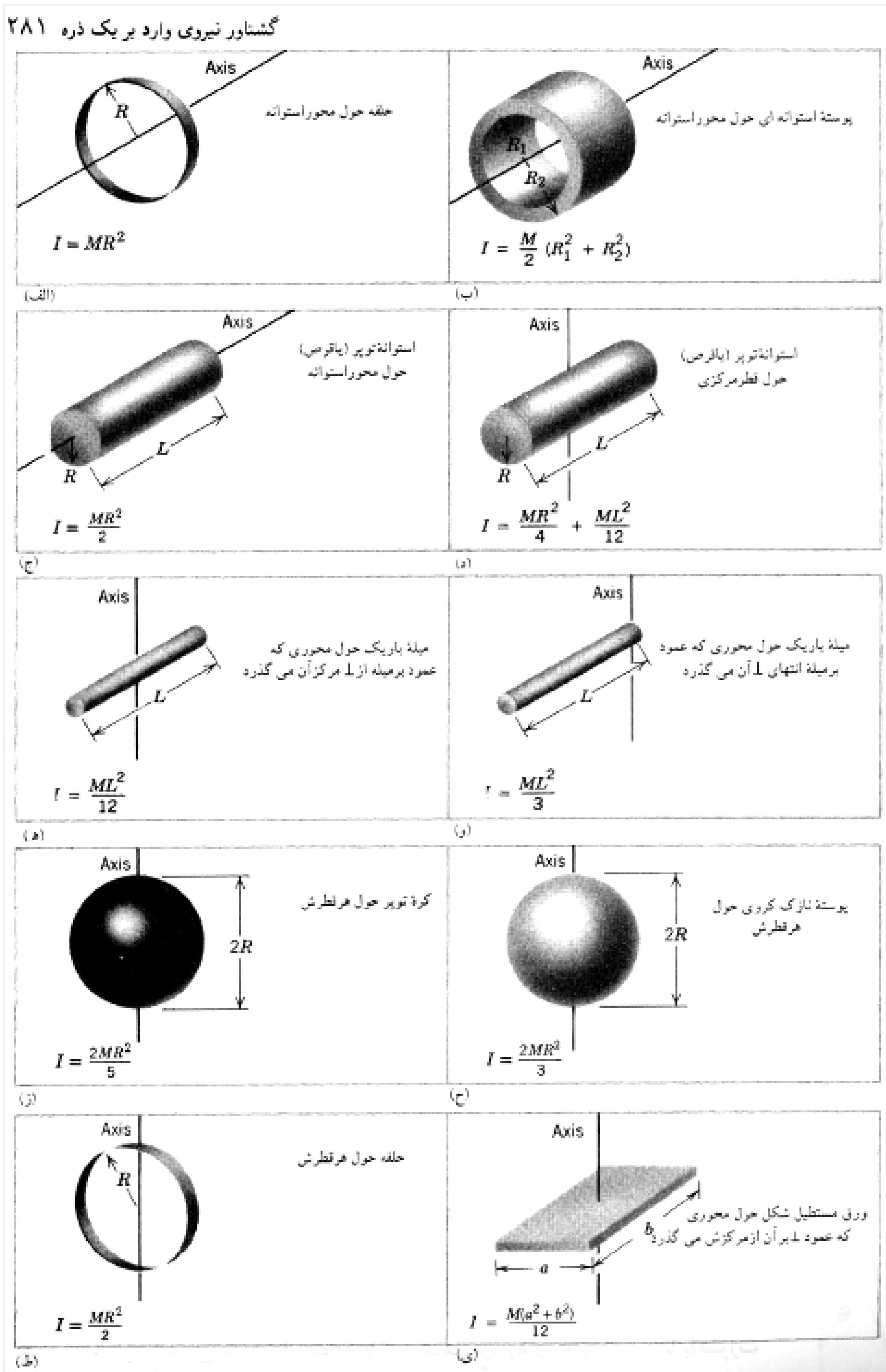
1- اگر شعاع داخلی استوانه صفر باشد یک استوانه توپر خواهیم داشت که لختی دورانی آن برابر است با:

$$I = MR^2$$

۲- اگر $R_1 \approx R_2 \approx R$ باشد حلقه استوانه‌ای داریم که لختی دورانی آن برابر است با:

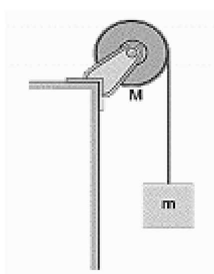
$$I = MR^2$$

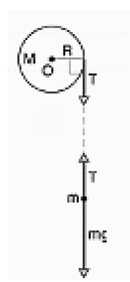
شکل زیر چند جسم متداول را همراه با لختی دورانی آن‌ها نشان می‌دهد که در حل مسائل مفید خواهند بود.



**مثال:** قرص یکنواختی به شعاع $R = 20cm$ و جرم $M = 2/5kg$ روی محوری مطابق شکل توسط ریسمان سبکی به جرم $m = 1/2kg$ وصل است. ریسمان به دور چرخ پیچیده شده است. شتاب زاویه‌ای چرخ و شتاب مماسی نقطه‌ای از کناره آن و کشش طناب را بدست آورید.

نمودار آزاد این مسئله در شکل روبرو کشیده شده است.از روابط مربوط به تعادل نیروها و شکل چرخشی قانون دوم نیوتون یعنی $\sum \tau_{ext,z} = I\alpha_z$ داریم:




$$T - mg = ma$$
$$-TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$
$$T = -\frac{1}{2}Ma$$
$$a = -g\frac{2m}{M+2m} = -(9.8)\frac{(2)(1/2)}{2.5+(2)(1/2)} = -4/8m/s^2$$
$$T = -\frac{1}{2}Ma = -\frac{1}{2}(2/5)(-4/8) = 6N$$
$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{-4/8}{0/20} = -24rad/s^2$$

### ۵-۸-۱-مرکز جرم و گرانیگاه

نقطه اثر برآیند نیروی گرانش معادل را مرکز گرانی می‌نامند. اگر میدان گرانی یکنواخت باشد جسم می‌تواند با یک تک نیروی F=-mg که رو به بالا است و به مرکز جرم وارد می شود، در حال تعادل دینامیکی باشد و در این حالت مرکز جرم همان مرکز گرانی است.

### 5-9- کاربردهای تعادلی قانونهای نیوتون برای چرخش:

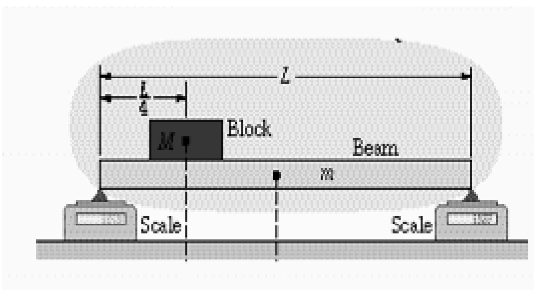
برای اینکه جسمی در حالت تعادل باشد، باید هر دوی نیروی خارجی خالص و گشتاور نیروی خارجی خالص وارد بر آن صفر باشد. در این حالت جسم نه شتاب زاویه‌ای دارد و نه شتاب انتقالی. بنابراین برای تعادل دو شرط وجود دارد:

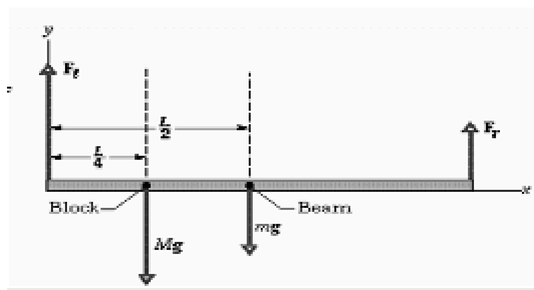
$$\sum \vec{F}_{ext} = 0$$
$$\sum \vec{\tau}_{ext} = 0$$

در این فصل برای سادگی موارد دو بعدی را در نظر می‌گیریم یعنی فرض می‌کنیم که کلیه نیروهای وارد بر جسم در صفحه xy باشد و همچنین گشتاور نیرو فقط دارای مولفه z باشد پس سه رابطه نرده‌ای برای حل مسائل خواهیم داشت:

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$
$$\sum \tau_z = 0$$

مثال1: دو سر یک میله فولادی به جرم $m = 1.8kg$ روی دو ترازو قرار دارد یک وزنـه $M = 2kg$ در فاصلـه $L/4$ روی آن قرار می دهیم ترازوها چه اعدادی را نشان می دهند؟




با توجه به شرایط تعادل که مطرح شد داریم:

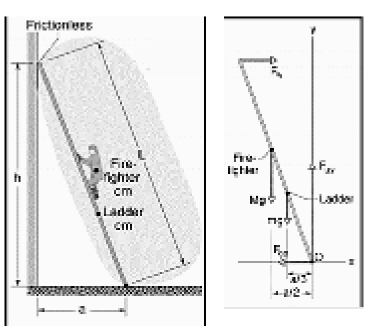
$$\sum F_y = F_t + F_y - Mg - mg = 0$$
$$\sum \tau_z = -(F_t)L + Mg(\frac{3L}{4}) + mg(\frac{L}{2}) + F_y(0) = 0$$
$$F_y = (\frac{g}{4})(2m + M)$$
$$= \frac{1}{4}(9/8)(2 \times 1/8 + 2/7) = 15N$$

$$F_l = (M + m)g - F_r$$
$$= (2/7 + 1/8)(9/8) - 15 = 29N$$

مثال2: نردبانی به طول 12متر و جرم 45 کیلوگرم در نقطه‌ای به ارتفاع 9/3 متر از زمین بر دیوار تکیه دارد. مرکز گرانی نردبان در فاصله یک سوم طول آن ازسطح زمین واقع است. شخصی به جرم 72 کیلوگرم تا وسط نردبـان بـالا مـی رود.

الف) با فرض اینکه دیوار (نه زمین) بدون اصطکاک است نیروهای وارد از زمین و دیوار بر نردبان را تعیین کنید.

با توجه به شرایط تعادل داریم:




$$\sum F_x = F_w - F_{gx} = 0$$
$$\sum F_y = F_{gy} - Mg - mg = 0$$

$$F_{gy} = g(M+m) = (9/8)(72+45) = 1100N$$

$$\sum \tau_z = -(F_W)(h) + Mg(\frac{a}{2}) + mg(\frac{a}{3}) = 0$$

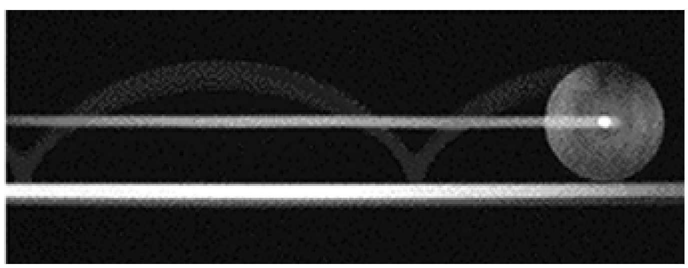
$$F_W = \frac{ga(\frac{M}{2}+\frac{m}{3})}{h} = \frac{(9/8)(7/85)(72/2+45/3)}{9/3}$$

$$= 410N$$

$$F_{gx} = F_W = 410N$$

## 5-10- ترکیب حرکت چرخشی و انتقالی:

به طور کلی، حرکت‌های انتقالی و چرخشی کاملاً مستقل از یکدیگر هستند. بنابراین حرکت یک جسم غلتان را می‌توان به صورت ترکیبی از حرکت انتقالی مرکز جرم و دوران حول مرکز جرم در نظر گرفت.

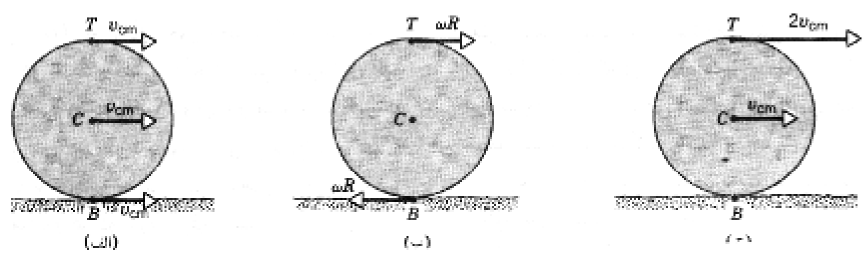


ما بحث مربوط به حرکت ترکیبی را به مواردی محدود می‌کنیم که از دو شرط پیروی کنند:

1) محور چرخش که از مرکز جرم جسم بگذرد (که آن را نقطه مرجع برای محاسبه گشتاور نیرو و تکانه زاویه‌ای در نظر می‌گیریم)

2) جهت این محور در فضا همواره ثابت باشد (یعنی محور در هر زمان موازی محور هر زمان دیگر است).

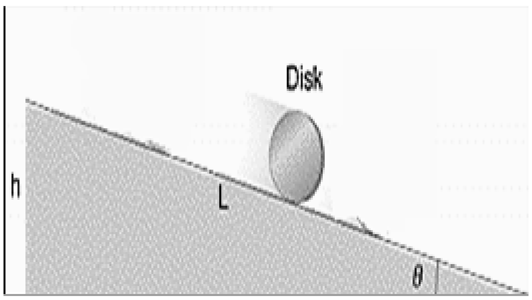
مورد خاصی را که در آن جسم روی سطح چنان می‌غلتد که در نقطه تماس لحظه‌ای هیچ حرکت نسبی بین جسم و سطح وجود ندارد را غلتش بدون لغزش می‌گویند. همانند شکل زیر:

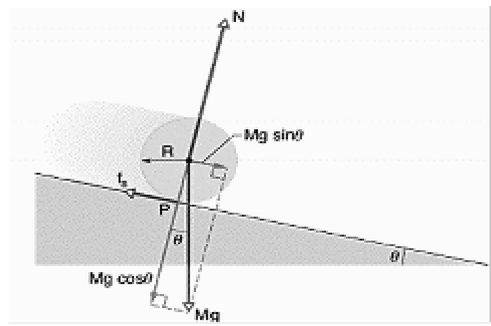



در غلتش بدون لغزش رابطه زیر را بین سرعت مرکز جرم و سرعت زاویه‌ای داریم:

$$v_{cm} = \omega R$$

**مثال:** استوانه توپری به جرم m و شعاع R از یک سطح شیب دار به پایین می‌غلتد، سرعت مرکز جرم را در پایین سطح شیبدار پیدا کنید.




حرکت انتقالی یک جسم با این فرض که تمام نیروهای خارجی به مرکز جرم آن وارد می‌شوند به دست می‌آید. با استفاده از قانون دوم نیوتون داریم:

**برای حرکت عمود بر سطح شیبدار:**

$$N - Mg\cos\theta = 0$$

برای حرکت در امتداد سطح شیبدار:

$$Mg\sin\theta - f = Ma$$

حرکت چرخشی حول مرکز جرم از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\tau = I_{cm}\alpha$$

N و Mg هیچکدام نمی‌توانند موجب حرکت چرخشی جسم حول C شوند، زیرا امتداد آن‌ها از C می‌گذرد و بازوی گشتاور آن‌ها صفر است. بازوی گشتاور نیروی اصطکاک نسبت به C برابر است با R، بنابراین داریم:

$$I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2 \quad \text{و} \quad \alpha = \frac{a}{R}$$

در نتیجه داریم:

$$fR = I_{cm}\alpha$$

$$f = \frac{I_{cm}\alpha}{R} = \frac{Ma}{2}$$

با قرار دادن این مقدار در معادله دوم حرکت انتقالی داریم:

$$a = \frac{2}{3} g \sin\theta$$

مرکز جرم با شتاب خطی ثابت حرکت می‌کند. برای بدست آوردن سرعت مرکز جرم که از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند، از رابطه مقابل استفاده می‌کنیم: $v^2 = 2as$ پس:

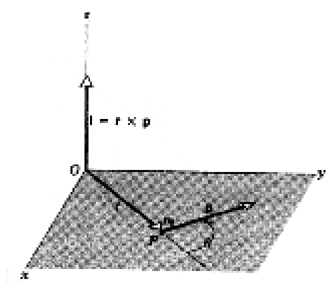
$$v^2 = 2(\frac{2}{3} g \sin\theta)s = \frac{4}{3} g \frac{h}{s} s = \frac{4}{3} gh$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} gh}$$

در حرکت چرخشی، کمیت مشابه تکانه خطی، تکانه زاویه‌ای نامیده می‌شود و بصورت زیر تعریف می‌شود:

اگر تکانه خطی ذره ای به جرم m در موضع r نسبت به یک چارچوب مرجع p باشد تکانه زاویه ای این ذره نسبت به نقطه O به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$



تکانه زاویه‌ای بردار است و بزرگی آن برابر است با:

$$l = rp\sin\theta$$

که θزاویه کوچکتر بین $\vec{r}$ و $\vec{p}$ است.

جهت تکانه زاویه‌ای در راستای عمود بر صفحه p و r است و از قاعده دست راست تعیین می‌گردد.

رابطه مهمی بین گشتاور نیرو و تکانه زاویه‌ای وجود دارد که برابر است با:

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

این رابطه نشان می‌دهد که گشتاور نیروی خالص وارد بر یک ذره برابر است با آهنگ زمانی تغییر تکانه زاویه‌ای ذره.

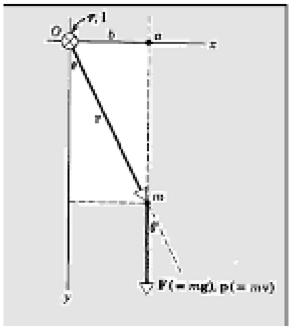
نظیر هر معادله برداری سه بعدی دیگر، این معادله با سه معادله یک بعدی هم ارز است:

$$\sum \tau_x = \frac{dl_x}{dt}$$

$$\sum \tau_y = \frac{dl_y}{dt}$$

$$\sum \tau_x z = \frac{dl_z}{dt}$$

**مثال:** ذره‌ای به جرم m از حالت سکون از نقطه a رها می‌شود و به موازات محور قائم y سقوط مـی‌کنـد. الـف) گشـتاور نیروی وارد بر m را در لحظه t ب) تکانه زاویه‌ای m را در لحظه t نسبت به مبدا o تعیین کنید.



الف) گشتاور نیرو برابر است با:

$$\tau = rF\sin\theta$$

در این مثال داریم:

$$r\sin\theta = b$$
$$F = mg$$

در نتیجه داریم:

$$\tau = mgb = const$$

$\tau$ بر شکل عمود و جهتش به طرف داخل است.

ب) تکانه زاویه‌ای برابر است با:

$$l = rp\sin\theta$$

در این مثال $r\sin\theta = b$ و $p = mv = m(gt)$ بنابراین داریم:

$$l = mgbt$$

عمود بر شکل و جهتش به طرف داخل است. $l$

**دستگاههای ذرات:**

تکانه زاویه‌ای کل یک دستگاه ذرات برابر جمع تکانه زاویه‌ای هر یک از ذرات است:

$$\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \ldots + \vec{l}_N = \sum_{n=1}^{N} \vec{l}_n$$

که از جمع برداری روی همه ذره‌های موجود در دستگاه انجام می‌گیرد.

با گذشت زمان تکانه زاویه‌ای به علت گشتاور نیروهای خارجی وارد بر ذرات دستگاه تغییر می‌کند:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_{n=1}^{N}\frac{d\vec{l}_n}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt}=\sum \vec{\tau}_n$$

یعنی آهنگ تغییر زمانی تکانه زاویه‌ای کل دستگاهی از ذره‌ها برابر است با گشتاور نیروی خالص ناشی از نیروهای وارد بر ذره‌های موجود در دستگاه.

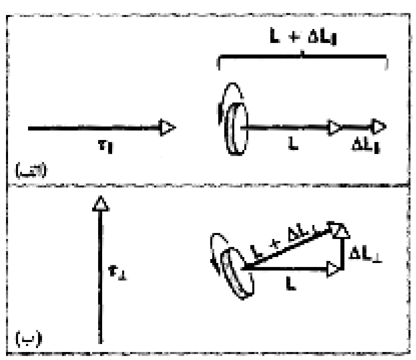
اگر قانون سوم نیوتن کاملاً صادق باشد مجموع گشتاورهای نیروهای داخلی صفر است پس می‌توان نوشت:

$$\sum \vec{\tau}_{ext}=\frac{d\vec{L}}{dt}$$

رابطه فوق در صورتی صادق است که $\tau$ و $L$ نسبت به یک مبداء چارچوب لخت اندازه‌گیری شود. در غیر این صورت صادق نیست. اگر نقطه مرجع، مر کز جرم دستگاه انتخاب شود، حتی اگر مر کز جرم در چارچوب مرجع ثابت نباشد معادله فوق باز هم صادق است.

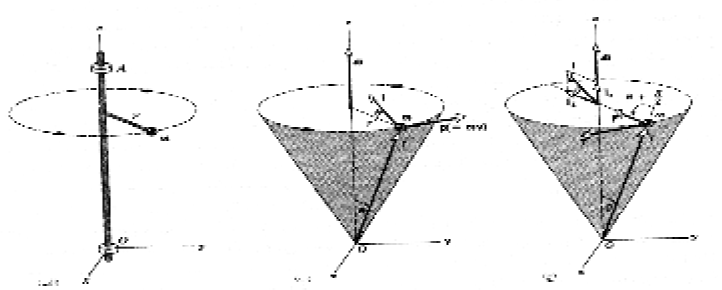
چگونگی تغییر تکانه خطی به وسیله نیرو و تغییر تکانه زاویه‌ای به وسیله گشتاور نیرو شباهت زیادی به هم دارند. همانگونه که در شکل زیر نشان داده شده است، مولفه موازی با $\vec{\tau}$ بردار $\vec{L}$ اندازه تکانه زاویه‌ای را تغییر می‌دهد ولی جهت آن را تغییر نمی‌دهد.

مولفه عمود بر $\vec{L}$ بردار $\vec{\tau}$ سبب افزایش $\vec{L}$ به اندازه $\Delta\vec{L}_\perp$ می‌شود که عمود بر $\vec{L}$ است، این مولفه جهت $\vec{L}$ را تغییر می‌دهد ولی اندازه آن تغییر نمی‌کند. این وضعیت اخیر مسئول حرکت فرفره و ژیروسکوپ است.



**تکانه زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای:**

تک ذره‌ای به جرم $m$ را که مطابق شکل زیر با بازوی صلب بدون جرمی به طول $r'$ به محور صلب بی‌جرمی متصل شده است را درنظر می‌گیریم:



همانگونه که از شکل نیز مشخص است، سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega}$ ذره به طرف بالا و در امتدا محور $z$ است. تکانه زاویه‌ای $\vec{l}$ ذره نسبت به مبدا $o$ چارچوب مرجع از رابطه $\vec{l}=\vec{r}\times\vec{p}$ بدست می‌آید. بردار $\vec{l}$ عمود بر صفحه متشکل از $\vec{r}$ و $\vec{p}$ است، یعنی $\vec{l}$ موازی با $\vec{\omega}$ نیست. $\vec{l}$ یک مولفه برداری $\vec{l}_z$ موازی با $\vec{\omega}$ دارد ولی مولفه برداری دیگری هم دارد $\vec{l}_\perp$ که بر $\vec{\omega}$ عمود است.این حرکت یکی از مواردی است که در مقایسه حرکت خطی و دایره‌ای معتبر نیست: $\vec{p}$ همواره با $v$ موازی است، ولی $\vec{l}$ همیشه موازی با $\vec{\omega}$ نیست. اگر مبدا چارچوب مرجع را در صفحه ذره چرخان انتخاب کنیم، $\vec{l}$ با $\vec{\omega}$ موازی است، در غیر اینصورت این دو بردار باهم موازی نیستند.

رابطه بین $\vec{l}_z$ و $\vec{\omega}$ ذره چرخان برابر است با:

$$l_z = I\omega$$

توجه کنید که در اینجا رابطه برداری $\vec{l}=I\vec{\omega}$ برقرار نیست، زیرا $\vec{l}$ و $\vec{\omega}$ در یک جهت نیستند.

در چه شرایطی بردارهای تکانه زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای در یک جهت قرار می‌گیرند؟ اگر جسم دور محور چرخش متقارن باشد، می‌توان فرض کرد که دستگاه از مجموعه زوج ذراتی تشکیل شده است که برای همه این زوج ذرات $\vec{L}$ و $\vec{\omega}$ موازی هستند. بنابراین برای اجسام صلبی که دارای تقارن محوری هستند این دو بردار موازی خواهند بود و می‌توان رابطه بین آنها را به صورت برداری زیر نوشت:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

**پایستگی تکانه زاویه‌ای:**

هرگاه گشتاور نیروی خارجی خالص وارد بر یک دستگاه صفر باشد بردار تکانه زاویه‌ای کل دستگاه ثابت می‌ماند. این مطلب بیان پایستگی تکانه زاویه‌ای است:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=0\Rightarrow \vec{L}=\text{const}$$
$$\vec{L}_i=\vec{L}_f$$

تکانه زاویه‌ای یک جسم صلب که حول محور ثابت z چرخش می‌کند برابر است با:

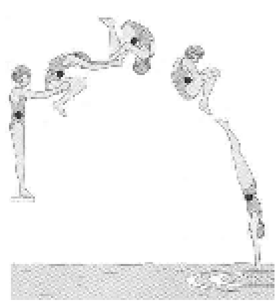
$$L_z=I\omega$$

اگر هیچ گشتاور نیروی خارجی خالصی بر جسم وارد نشود $L_z$ باید ثابت بماند پس اگر $I$ تغییر کند $\omega$ باید طوری تغییر کند که تغییر $I$ جبران شود در این صورت اصل پایستگی تکانه زاویه‌ای بصورت زیر بیان می‌شود:

$$I_i\omega_i=I_f\omega_f$$

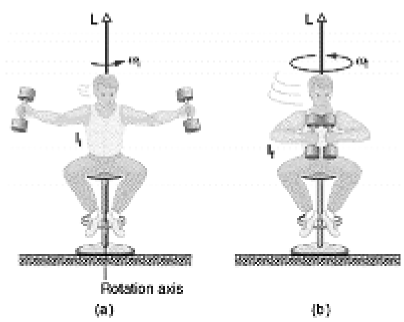
نکته: معادله پایستگی $I\omega$ نه تنها در مورد چرخش حول یک محور ثابت صادق است بلکه در مورد چرخش حول محوری که از مرکز جرم می گذرد و در حال حرکت جهت آن تغییر نمی‌کند نیز صدق می‌کند.

**مثال:** شیرجه‌رو از اصل پایستگی تکانه استفاده می‌کند: شیرجه‌رو وقتی تخته فنری را ترک می‌کند که تخته فنری تکانه زاویه‌ای $\vec{L}$ را بر او وارد می‌آورد. او با شیرجه جمع لختی دورانی خود را کم می‌کند و از آن رو سرعت زاویه‌ای‌اش افزایش می‌یابد که او را قادر می‌سازد یک و نیم دور بیشتر بچرخد.



**مثال:** دانشجویی روی یک صندلی آزادانه حول محور قائمی می‌چرخد، نشسته و در حالی که در هر دستش یک وزنه 3 کیلوگرمی گرفته است، بازوهای خود را افقی و کشیده نگه می‌دارد. مربی صندلی را با سرعت زاویه‌ای 0/5 دور بر ثانیه می‌چرخاند. فرض کنید اصطکاک ناچیز است و هیچ گشتاور نیرویی نسبت به محور قائم تولید نمی‌کند. همچنین فرض کنید لختی دورانی دانشجو هنگامی که دست‌هایش را جمع می‌کند در مقدار $5 kg.m^2$ ثابت می‌ماند و تغییر لختی دورانی ناشی از پایین آوردن وزنه‌هاست. فاصله اولیه وزنه‌ها از محور دوران را 0/8 متر و فاصله نهایی آنها را 0/2 متر در نظر بگیرید. سرعت زاویه‌ای نهایی دانشجو را پیدا کنید.

دو وضعیت در شکل زیر نشان داده شده است:




تکانه زاویه‌ای نهایی= تکانه زاویه‌ای اولیه

$$I_0\omega_0 = I\omega$$

از طرف دیگر:

$$I = I_{STUDENT} + I_B$$

$$I_0 = 5 + 2(3)(0/8)^2 = 8/84 kg.m^2$$
$$I = 5 + 2(3)(0/2)^2 = 5/24 kg.m^2$$
$$\omega_0 = 0/5 rev/s = \pi rad/s$$

بنابراین در نهایت داریم:

$$\omega = \frac{I_0}{I}\omega_0 = \frac{8/84}{5/24}\pi rad/s = 1/6\pi rad/s$$

**فرفره چرخان:**

فرفره یکی از شناخته شده ترین نمونه پدیده‌هایی است که در آن یک گشتاور نیروی جانبی جهت تکانه زاویه‌ای را تغییر می‌دهد ولی اندازه آن را عوض نمی‌کند. به تجربه می‌دانیم که محور این فرفره سریعاً چرخان به آرامی دور محـور قـائمی می‌چرخد. این حرکت که حرکت تقدیمی نامیده می‌شود ناشی از پیکربندی آن است.

برای بدست آوردن سرعت حرکت تقدیمی فرفره داریم: در زمان $dt$ محور فرفره به اندازه $d\phi$ می‌چرخد بنابراین داریم:

$$\omega_p = \frac{Mgr}{L}$$

سرعت حرکت تقدیمی با تکانه زاویه‌ای و در نتیجه سرعت زاویه‌ای حرکت چرخشـی نسـبت عکـس دارد، هرچـه فرفـره تندتر به دور خودش بچرخد، سرعت حرکت تقدیمی آن کندتر است. برعکس وقتی اصطکاک باعث می‌شـود کـه سـرعت حرکت چرخشی کند شود، سرعت حرکت تقدیمی افزایش می‌یابد.

رابطه برداری بین مقادیر $\vec{\omega}_p$، $\vec{L}$ و $\vec{\tau}$ برابر است با:

$$\vec{\tau} = \vec{\omega}_p \times \vec{L}$$

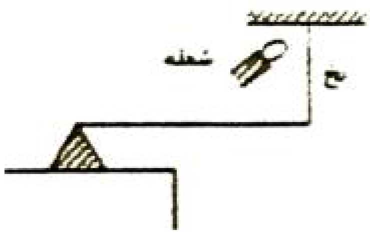
اگر تکانه زاویه‌ای حرکت تقدیمی خیلی کوچک‌تر از تکانه زاویه‌ای حرکت چرخشی فرفره باشد، فقـط انحـراف مختصـری بین جهت محور تقارن و تکانه زاویه‌ای وجود دارد. این انحراف کوچک که باعث نوسان مختصر محـور فرفـره مـی‌شـود را رقص محوری می‌نامند و محور فرفره دور دایره حرکت تقدیمی جلو و عقب می‌رود.

## تست های طبقه بندی شده

۱- اینرسی دورانی یک پوسته همگن به جرم M و شعاع R نسبت به یک قطر آن برابر است با:

1) $\frac{2}{5}MR^2$  2) $\frac{1}{2}MR^2$  3) $\frac{2}{3}MR^2$  4) $MR^2$

۲- میله ای به طول l را از یک انتهایش بطور قائم روی زمین نگه داشته و سپس رها می کنیم. با فرض اینکه انتهایی که روی زمین است، نلغزد شتاب انتهای دیگر میله هنگامی که با امتداد قائم زاویه $60^\circ$ بسازد، برابر کدام است؟




1) $\frac{3\sqrt{7}}{4}g$  2) $\frac{3}{4}g$

3) $\frac{3\sqrt{5}}{4}g$  4) $\frac{3}{2}g$

۳- سر میله ای افقی بر روی یک پایه و سر دیگر آن مطابق شکل به نخی متصل است. نخ را می‌سوزانیم تا میله شروع به حرکت نماید. شتاب سر میله در این لحظه برابر کدام است؟

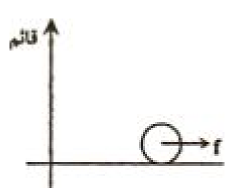
1) g  2) $\frac{2}{3}g$  3) $\frac{1}{4}g$  4) $\frac{3}{2}g$

۴- معادله حرکت پرتابه ای به جرم m چنین است؟ $\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{V}_0 t$ اندازه حرکت زاویه ای آن برابر کدام است؟

1) $\frac{1}{2}mgt^2\vec{V}_0$  2) $\frac{1}{2}m(\vec{V}_0 \times \vec{g})t^2$

3) $\vec{r} \times (m\vec{g}t)$  4) $\frac{3}{2}m(\vec{V}_0 \times \vec{g})t^2$

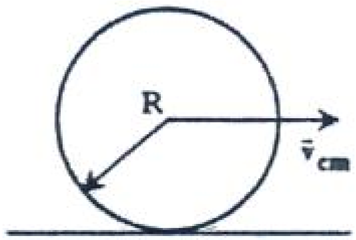
۵- قرص نازکی به جرم M تحت تاثیر نیروی افقی که به مرکز جرم آن وارد می شود دارای حرکت غلتشی بر روی سطح افقی است. این نیرو بر حسب شتاب مرکز جرم آن a برابر کدام است؟




1) Ma  2) $\frac{2}{3}Ma$

3) $\frac{3}{2}Ma$  4) 2Ma

۶ - کره ای بر روی سطح افقی بدون لغزش با سرعت ثابتی می غلتد. نسبت انرژی جنبشی دورانی آن به انرژی جنبشی کل آن برابر کدام است؟

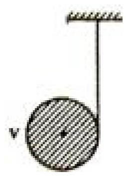



1) $\frac{2}{7}$ 2) $\frac{2}{5}$
3) $\frac{5}{2}$ 4) $\frac{7}{2}$

۷- استوانه توپری به جرم M و شعاع R حرکت غلتشی بدون لغزش انجام می دهد. نسبت انرژی جنبشی دورانی این استوانه به انرژی جنبشی کل، کدام است؟

1) $\frac{2}{5}$ 2) $\frac{1}{4}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) $\frac{1}{2}$

۸- نخ نازک و سبکی چندین دور بر روی گلوله توپری پیچیده شده است. انتهای این نخ به سقف متصل است. چنانچه گلوله تحت نیروی گرانش سقوط کند اندازه شتاب مرکز جرم گلوله کدام است؟

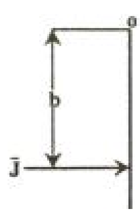



1) $\frac{2}{5}g$ 2) $\frac{1}{2}g$
3) $\frac{5}{7}g$ 4) $\frac{3}{4}g$

۹- میله نازک یکنواختی به طول L و جرم m را از یک سر آن می آویزیم و به نوسان درمی آوریم اگر سرعت زاویه میله حول نقطه آویز هنگام گذشتن از وضع قائم $w$ باشد و از اصطکاک هوا صرفنظر کنیم. مرکز جرم میله چه مقدار از پائین ترین وضعیت خود بالا می رود؟

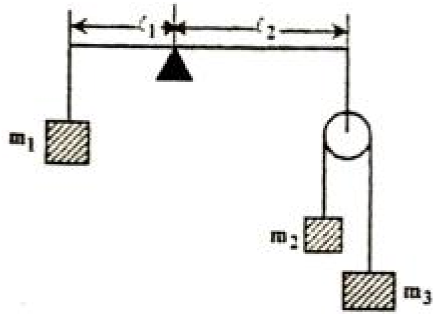
1) $h=\frac{L^2w^2}{6g}$ 2) $h=\frac{2L^2w^2}{3g}$ 3) $h=\frac{7L^2w^2}{24g}$ 4) $h=\frac{L^2w^2}{8g}$

۱۰- میله همگنی به جرم m و طول ۲a از یک انتها از محور افقی بدون اصطکاک O آویزان است. مطابق شکل ضربه افقی $\vec{J}$ در فاصله b از O بر میله وارد می شود سرعت زاویه ای میله درست بعد از اثر ضربه کدام است؟




1) $\frac{3bJ}{4ma^2}$ 2) $\frac{3J}{4ma}$
3) $\frac{3bJ}{ma^2}$ 4) $\frac{3J}{ma^2}$

۱۱- میله بی وزنی بر روی یک لبه تیز قرار دارد. دو تکه نخ به دو انتهای میله آویزان و به انتهای یکی از نخ ها جسم $m_1$ و به انتهای نخ دیگر قرقره ثابتی متصل گردیده است. بر روی قرقره نخی قرار دارد که مطابق شکل دو جسم $m_2$ و $m_3$ به آن آویزان شده است. سیستم حول نقطه O در حال تعادل است. نسبت طول $l_1$ به $l_2$ کدام است؟ (از جرم نخ ها و قرقره صرفنظر شود.)



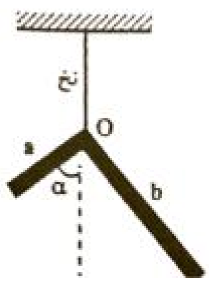

1) $\frac{m_1}{m_2+m_3}$

2) $\frac{m_2+m_3}{m_1}$

3) $\frac{4m_2m_3}{m_1(m_2+m_3)}$

4) $\frac{2m_2m_3}{m_1(m_2+m_3)}$

۱۲- مطابق شکل میله ای باریک و یکنواخت به شکل یک زاویه قائم کج شده است طوری که طول اضلاع آن a , b است. میله از راس O از نخی در حال تعادل آویزان است. زاویه $\alpha$ کدام است؟



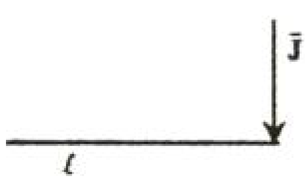

1) $tg^{-1}(\frac{a^2}{b^2})$

2) $tg^{-1}(\frac{b^2}{a^2})$

3) $tg^{-1}(\frac{b}{a})$

4) $tg^{-1}(\frac{a}{b})$

۱۳- یک میله باریک به طول l و جرم m آزادانه بر روی یک سطح افقی بدون اصطکاک به حال سکون قرار دارد. ضربه افقی $\vec{j}$ مطابق شکل، به طور عمودی بر انتهای میله وارد می شود. در لحظه ای که میله یک دور کامل حول مرکز جرمش می چرخد، اندازه جابجایی مرکز جرم کدام است؟




1) $\frac{pl}{6}$

2) $\frac{pl}{3}$

3) $\frac{2pl}{3}$

4) $\frac{4pl}{3}$

**۱۴- استوانه ای با لختی دورانی $I_0$ با سرعت زاویه ای $w_0$ دوران می کند. استوانه دیگری با لختی دورانی $I_1$ که ابتدا دورانی ندارد بر روی استوانه ای می افتد و هر دو به سرعت زاویه ای نهایی $w_f$ می‌رسند مقدار $w_f$ کدام است؟**

1) $\frac{w_0 I_1}{I_0+I_1}$ 2) $\frac{w_0 I_0}{I_1}$ 3) $\frac{w_0 I_0}{I_0+I_1}$ 4) $\frac{w_0 I_1}{I_0}$

**۱۵- کره ای به جرم m و شعاع R روی سطح شیبدار با زاویه شیب $q$ به سمت پایین بدون لغزش می‌غلتد. کار نیروی اصطکاک وقتی جسم اندازه d، سطح شیبدار به سمت پایین حرکت کند، چقدر است؟**

1) صفر 2) $mgm_s d\cos q$ 3) $-mgm_s d\cos q$ 4) $-mgm_k d\cos q$

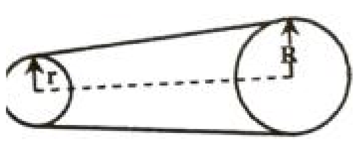
**۱۶- دو چرخ به شعاع های R , r توسط تسمه ای به هم متصل شده اند و سیستم همانند چرخ های یک تراکتور جلو می رود. کدام یک از گزینه ها برای سیستم صحیح می باشد؟**

1) سرعت زاویه ای هر دو چرخ یکی است ولی سرعت های خطی متفاوت دارند.

2) سرعت خطی هر دو چرخ یکی است ولی سرعت های زاویه ای متفاوت دارند.

3) سرعت های خطی و زاویه ای دو چرخ یکسان است.

4) سرعت های خطی و زاویه ای دو چرخ متفاوت است.




**۱۷- اگر یک تیر چوبی را در حالی که یک انتهایش روی زمین قرار دارد، از حالت قائم رها کنیم سرعت انتهای دیگر این تیر هنگام برخورد با زمین متر بر ثانیه است؟ (فرض بر آن است نقطه اتکاء تیر روی زمین، در هنگام تغییر وضعیت نلغزد) $g=9/8\frac{m}{s^2}$**

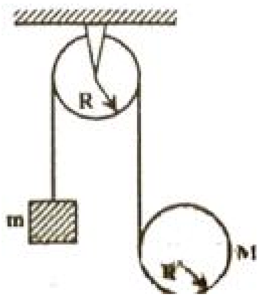
1) 5/4 2) 9/8 3) 2/3 4) 54

**۱۸- دو ذره به جرم های $m_1$ و $m_2$ با سرعت زاویه ای ثابت $w$ با یک حرکت دایره ای یکنواخت حول یکدیگر می چرخند. اگر نیروی جاذبه دو ذره *** شد فاصله آنها از یکدیگر (R) چقدر است؟** ( $g=10\frac{m}{s^2}$ )

1) $\frac{F}{w_1}(m_1+m_2)$ 2) $\frac{F}{w^2}(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2})$

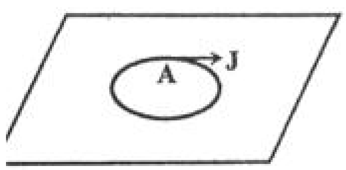
3) $\frac{F}{w^2}(\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2})$ 4) $\frac{F}{w^2}(m_1-m_2)$

۱۹- در شکل زیر جرم قرقره ثابت و نخ قابل چشم پوشی است. M جرم قرص توپر یکنواخت چقدر باشد تا قطعه به جرم m همواره ساکن بماند؟ نخ روی قرقره و قرص سر نمی خورد.



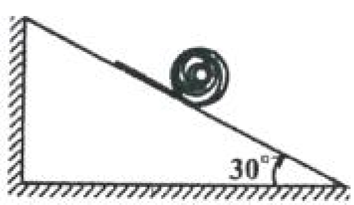

1) m
2) 2m
3) 3m
4) 4m

۲۰- مطابق شکل حلقه ای همگن به جرم m و شعاع a روی سطح یک میز افقی بدون اصطکاک در حال سکون قرار دارد. حلقه در اثر ضربه افقی J به طور مماس بر نقطه A اعمال می شود حرکت می‌کند. انرژی جنبشی حلقه کدام است؟



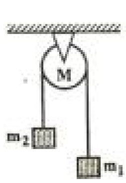

1) $\frac{J^2}{m}$
2) $\frac{J^2}{2m}$
3) $\frac{3J^2}{2m}$
4) $\frac{5J^2}{2ma}$

۲۱- سیم قابل انعطافی به طور ۵ متر را به دور خود پیچیده و به شکل مارپیچ مسطح درمی آوریم و انتهای آزاد آن را مطابق شکل به نقطه ثابت A از سطح شیبدار با زاویه شیب $30^\circ$ متصل می سازیم. این نوار ضمن غلتیدن در سراشیبی باز می شود زمان لازم جهت باز شدن کامل چند ثانیه است؟ ($g=10\frac{m}{s^2}$)




1) $\sqrt{\frac{5}{3}}$
2) 1
3) $\sqrt{3}$
4) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

۲۲- در ماشین آتوود جرم قرقره M=۲kg و جرم وزنه ها $m_1$=۳kg و $m_2$=۱kg می باشد هرگاه دستگاه از حالت سکون رها شود شتاب هر یک از وزنه ها چند متر بر مجذور ثانیه است؟ ($g=10\frac{m}{s^2}$) (قرقره یک استوانه توپر همگن است و اصطکاک در محور قرقره ناچیز است.)

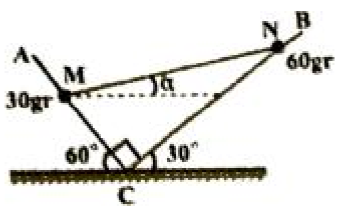



1) 2
2) $\frac{10}{3}$
3) 4
4) 5

۲۳- جسمی به جرم **m** که به انتهای ریسمانی بسته شد است بر روی دایره قائمی به شعاع **R** می چرخد. سرعت جسم در بالاترین نقطع مسیر حداقل چقدر باید باشد تا رسیمان در آن شل نشود؟

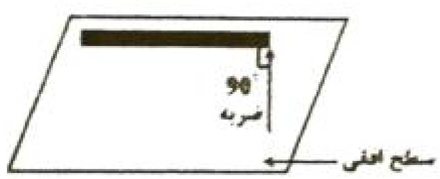
1) $\sqrt{Rg}$ 2) Rg 3) $\frac{g}{R}$ 4) $\frac{R}{g}$

۲۴- در شکل زیر **AC** , **BC** دو سیم نازک عمود بر هم و بدون اصطکاک هستند که در نقطه **C** بر روی زمین به هم لولا شده اند. دو دانه تسبیح به جرم های **۳۰gr** و **۶۰gr** که توسط سیم نازک **MN** به هم متصلند، مطابق شکل روی سیم های **AC** , **BC** می توانند آزادانه حرکت می کنند. اگر مجموعه در حال تعادل باشد، زاویه $\alpha$، زاویه سیم **MN** با افق، کدام است؟ (از جرم سیم ها و اصطکاک در لولا صرفنظر می شود)




1) $30^{\circ}$ 2) $Arctg(\frac{5}{\sqrt{3}})$ 3) $Arctg(\frac{\sqrt{3}}{5})$ 4) $Arctg(\frac{5}{3\sqrt{3}})$

۲۵- میله ای همگن به طول **l** روی سطح یک قطعه یخ به طور افقی قرار دارد و بر یک انتهای آن ضربه‌ای در جهت عمود بر میله وارد می شود. میله حول نقطه ای شروع به چرخش خواهد کرد. فاصله این نقطه تا مرکز میله کدام است؟




1) $\frac{l}{6}$ 2) $\frac{l}{3}$ 3) $\frac{l}{2}$ 4) $\frac{5}{4}l$

۲۶- لختی دورانی یک صفحه مستطیل شکل به اضلاع **a**, **b** نسبت به محوری که در مرکز صفحه بر آن عمود است، چقدر است؟

1) $\frac{M}{12}(a^2-b^2)$ 2) $\frac{M}{3}(a^2+b^2)$ 3) $\frac{M}{2}(a^2-b^2)$ 4) $\frac{M}{12}(a^2+b^2)$

۲۷- لختی دورانی استوانه توپر و همگنی به جرم **M**، شعاع **R** و ارتفاع **R** حول محوری که از مرکز جرم استوانه و عمود بر محور استوانه می گذرد، کدام است؟

1) $\frac{MR^2}{12}$  2) $\frac{MR^2}{4}$  3) $\frac{MR^2}{3}$  4) $\frac{MR^2}{2}$

۲۸- یک میله نازک روی محور **x** بین نقاط و $x_1 = 0$ , $x_2 = L$ قرار گرفته و چگالی خطی آن با رابطه $r = ax^2$ مشخص می گردد. اگر این میله با سرعت زاویه ای $10\frac{rad}{s^2}$ حول محور **y** دوران کند، انرژی جنبشی آن چقدر است؟

1) $25aL^2$  2) $16aL^2$  3) $12aL^2$  4) $10aL^2$

۲۹- حلقه یکنواختی به شعاع **R** و به جرم **M** روی سطح شیب داری از حال سکون به پایین می غلتد. اندازه حرکت زاویه ای این حلقه نسبت به مرکز آن در پایین سطح عبارت است از:

1) $MR\sqrt{gh}$  2) $MR\sqrt{2gh}$

3) $MR\sqrt{\frac{gh}{3}}$  4) $2MR\sqrt{3gh}$

۳۰- میله ای مطابق شکل بر روی دو پایه قرار دارد. در یک لحظه یکی از پایه ها فوراً برداشته می شود و میله شروع به حرکت می کند، عکس العمل پایه دیگر در این لحظه برابر است با:

1) $\frac{mg}{4}$  2) $\sqrt{2}mg$

3) $\frac{3}{2}mg$  4) mg

۳۱- چه نیرویی باید به دسته یک جک پیچی وارد کرد تا بار **G** را که توسط آن بالا برده شده به حال تعادل نگه دارد؟ گام پیچ **h** و طول دسته برابر با **R** است. از اصطکاک صرفنظر شده است.

1) $\frac{3Gh}{2pR}$  2) $\frac{2Gh}{pR}$  3) $\frac{Gh}{pR}$  4) $\frac{Gh}{2pR}$

۳۲- ژیروسکوپی با سرعت زاویه ای $300\frac{rad}{s}$ به طور ساعتگرد (از نمای بالا) حول محور تقارن خود می چرخد. جرم ژیروسکوپ ۴۰۰gr و لختی دورانی آن $4\times10^{-4}Kgm^2$ است. محور ژیروسکوپ با راستای قائم زاویه ثابت $30^0$ می سازد. فاصله مرکز جرم ژیروسکوپ از نقطه اتکا ۳cm است. سرعت زاویه ای حرکت تقدیمی و جهت آن کدام است؟

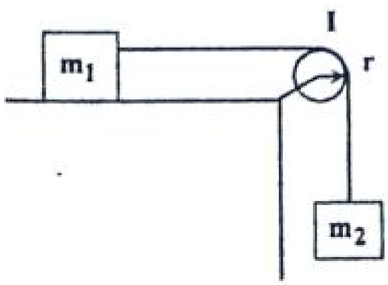
1) $2\frac{rad}{s}$ و پادساعتگرد

2) $1\frac{rad}{s}$ و پادساعتگرد

3) $1\frac{rad}{s}$ و ساعتگرد

4) $2\frac{rad}{s}$ و ساعتگرد

۳۳- دو جسم به جرم های $m_1$ و $m_2$ مطابق شکل توسط ریسمانی به هم متصل شده و ریسمان از روی قرقره قابل چرخشی می گذرد. لختی دورانی قرقره I و شعاع آن r است. از اصطکاک صرفنظر می‌کنیم. شتاب جرم $m_2$ چقدر است؟



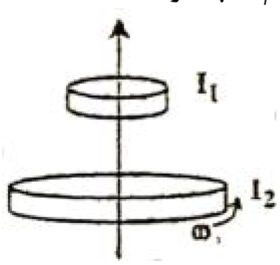

1) $\frac{m_2 g}{(\frac{I}{r^2}+m_1+m_2)}$

2) $\frac{m_2 g}{m_1+m_2}$

3) $\frac{(m_1-m_2)g}{(\frac{I}{r^2}+m_1+m_2)}$

4) $\frac{(m_2-m_1)g}{(m_2+m_1)}$

۳۴ - یک استوانه با اینرسی دورانی $I_0$ و سرعت زاویه ای $w_0$ در حال چرخش است. استوانه دیگری با لختی دورانی $I_1$ که ابتدا ساکن است و با استوانه چرخان هم محور است روی آن سقوط کرده و با هم چرخش می کنند به طوری که هر دو استوانه به سرعت سرعت زاویه ای $w_f$ می‌رسند مقدار $w_f$ چقدر است؟



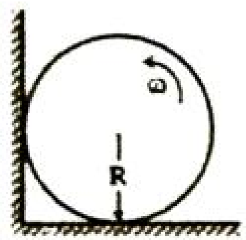

1) $w_0$

2) $\frac{w_0 I_0}{I_0+I_1}$

3) $\frac{w_0 I_0}{I_1}$

4) $\frac{w_0(I_0+I_1)}{I_0}$

۳۵- در شکل روبرو کره توپری به جرم **m** و شعاع **R** را حول قطر افقی اش با سرعت زاویه ای $w_0$ بـه دوران درآورده ایم و سپس آن را در مقابل دیوار و زمین قرار می دهیم. اگر ضـریب اصـطکاک لغزشـی بـین تمـام سطوح تماس $m$ باشد و کره هیچگاه از زمین یا دیوار جدا نشود، اندازه شتاب زاویه ای چقدر اســت؟ لختــی دورانی یک کره ی همگن توپر حول قطرش $\frac{2}{5}mR^2$ است.




1) $\frac{5}{2}(\frac{1+m}{1-m})\frac{g}{R}$

2) $\frac{5}{2}(\frac{1+m}{1+m^2})\frac{mg}{R}$

3) $\frac{5}{2}(\frac{1+m^2}{1-m})\frac{g}{R}$

4) $\frac{5}{2}(\frac{1+m^2}{1+m})\frac{mg}{R}$

۳۶- میله ی همگنی به طول **l** به صورت افقی روی سطح بدون اصطکاک در حال سکون قرار دارد. ضـربه ای به فاصله **d** از مرکز جرم میله به صورت عمود بر میله وارد می کنیم. بعد از این که میلــه دو دور حــول مرکــز جرمش چرخید، مرکز جرم چه مسافتی را روی سطح افقی طی می کند؟ لختی دورانی میله ای همگن به طول **L** و جرم **M** حول محور گذرنده از مرکز جرم میله و عمود بر میله $\frac{1}{12}ML^2$ است.

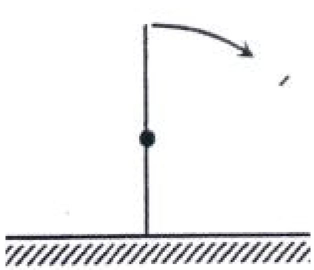

1) $\frac{p}{3}\frac{l^2}{d}$

2) $\frac{p}{6}\frac{l^2}{d}$

3) $2p\frac{l^2}{d}$

4) $4p\frac{l^2}{d}$

۳۷- یک میله نازک یکنواخت به جرم **M** و طول **L** مطابق شکل به صــورت عمــود روی یــک ســطح بــدون اصطکاک لولا شده است. با چه سرعتی به زمین برخورد می کند؟



1) $\sqrt{gL}$

2) $\sqrt{3gL}$

3) $\sqrt{12gL}$

4) $12\sqrt{gL}$

۳۸- یک موتور به توان **۰/۷۵hp** به مدت ۸ثانیه، چرخی را که در آغاز ساکن و دارای گشتاور لختی **۲kg.m²** است می چرخاند. با فرض اینکه هیچ اتلافی وجود نداشته باشد، سرعت زاویه ای چرخ چند $\frac{rad}{s}$ می باشد؟ (**۱hp=۷۴۶w**)

1) 24 2) 49 3) 55 4) 67

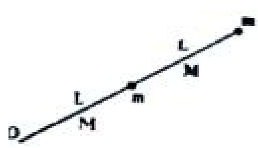
39- جرم حلقه ای به شعاع **۳m** برابر **۱۵۰kg** است. این حلقه روی یک سطح افقی می غلتد. اگر سرعت مرکز جرم $0/15\frac{m}{s}$ آن باشد، چند ژول کار برای متوقف کردن حلقه باید انجام شود؟

1) 3/415 2) 3/125 3) 3/360 4) 3/375

۴۰- دور کره یکنواخت توپری به شعاع **R** و جرم **m** را نخ پیچیده ایم. اگر انتهای نخ را ثابت نگه داریم و کره را رها کنیم تا تحت تاثیر نیروی وزنش سقوط کند، شتاب مرکز کره کدام است؟ (لختی دورانی کره حول قطرش $\frac{2}{5}mR^2$ است)

1) $\frac{2}{7}g$ 2) $\frac{2}{5}g$ 3) $\frac{5}{7}g$ 4) g

۴۱- دو ذره مطابق شکل هر یک به جرم **m** به دو میله یکنواخت هر یک به جرم **M** و طول **L** بسته شده اند و مجموعه با سرعت زاویه ای $w_0$ دوران می کند لختی دورانی دستگاه حول نقطه **O** چقدر است؟



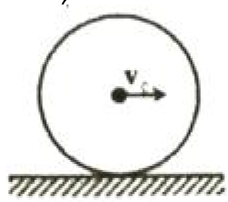

1) $2mL^2+\frac{8}{3}ML^2$ 2) $5mL^2+\frac{3}{2}ML^2$

3) $5mL^2+\frac{8}{3}ML^2$ 4) $5mL^2+4ML^2$

۴۲- یک پنکه سقفی با لختی دورانی **I**، شعاع **R** و سرعت زاویه ای $\omega_0$ آزادانه می گردد. موشی به جرم **m** از بالا بر روی لبه خارجی این پنکه می افتد.سرعت زاویه ای پنکه در حالت $\omega$ می شود. نسبت $\frac{\omega}{\omega_0}$ چقدر است؟

1) 1 2) $\frac{I}{I-mR^2}$ 3) $\frac{I}{I+mR^2}$ 4) $\frac{2I}{I+mR^2}$

۴۳- استوانه ای همگن و توپر به جرم M و شعاع R از حالت سکون با سرعت اولیه انتقالی $V_0$ در یک سطح افقی شروع به حرکت می کند. اگر ضریب اصطکاک لغزشی بین استوانه و سطح $m_k$ باشد، بعد از چه زمانی از شروع حرکت، غلتش بدون لغزش آغاز می شود؟ (لختی دورانی استوانه حول محورش $\frac{1}{2}mR^2$ است).



1) $\frac{V_0}{3m_k g}$   2) $\frac{2V_0}{3m_k g}$

3) $\frac{V_0}{m_k g}$   4) $\frac{2V_0}{7m_k g}$

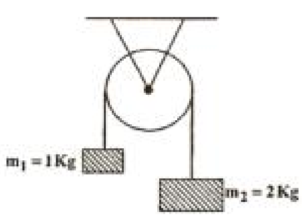
۴۴- نیروی وزن جعبه مکعبی شکل، ۸۹۰ نیوتن است. می خواهیم با وارد کردن یک نیروی افقی به یکی از کناره های بالایی جعبه، آن را بغلتانیم. کمترین نیروی لازم چند نیوتن است؟

1) 890   2) 1780   3) 445   4) 720

۴۵- میله نازکی به طول L و جرم m از یک انتها آزادانه آویخته شده است. میله را به یک طرف کشیده و رها می کنیم تا حول محور افقی نوسان کند. سرعت زاویه ای پایین ترین نقطه میله  است. مرکز جرم نسبت به پایین ترین وضعیت آن تا چه ارتفاعی بالا می رود؟ (از اصطکاک و مقاومت هوا صرف نظر شود)

1) $L\sqrt{\frac{w}{6g}}$   2) $\sqrt{\frac{6g}{Lw}}$   3) $\sqrt{\frac{L^2w^2}{6g}}$   4) $\frac{L^2w^2}{6g}$

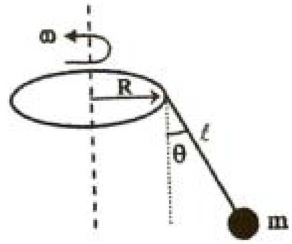
۴۶- در شکل مقابل دستگاه از حال سکون شروع به حرکت کرده و جسم $m_1$ پس از یک ثانیه مسافت ۲/۵m را می پیماید. در این حالت اگر گشتاور ماند قرقره $۲/۵\times۱۰^{-۲}\ kgm^۲$ باشد شعاع قرقره چند سانتی متر است؟ (از جرم نخ و اصطکاک در محور قرقره چشم پوشی شود. $g=10\frac{m}{s^2}$




1) 20   2) 6/6

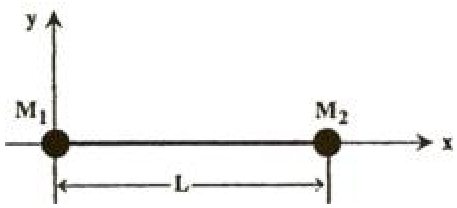
3) 30   4) 15

۴۷- در شکل مقابل حداکثر نیروی کششی که طناب تحمل می کند ۱۴۴N است. بیشینه سرعت زاویه‌ای که دستگاه می تواند با آن بچرخد که طناب پاره نشود چند $\frac{rad}{s}$ است؟ ( $m=1kg$ , $l=3m$ , $R=50cm$ زاویه ی طناب با قائم همواره $q=30^{0}$ است.)




1) 6
2) 6/8
3) 8/4
4) 7/8

۴۸- دو جرم $M_1$ و $M_2$ مطابق شکل به وسیله‌ی میله‌ی بدون جرمی به طول L به یکدیگر متصـل شـده‌انـد. گشتاور ماند دستگاه هنگام چرخش حول مرکز جرم کدام است؟




1) $\frac{(M_1+M_2)^2}{M_1+M_2}L^2$
2) $\frac{M_1M_2L^2}{M_1+M_2}$
3) $\frac{(M_1+M_2)^3}{(M_1+M_2)^2}L^2$
4) $\frac{M_1^2M_2^2L^2}{(M_1+M_2)^3}$

۴۹- یک میله همگن به طول ۳ متر ابتدا به طور عمودی روی کف اتاق ایستاده است. اگر بیفتد، سرعت زاویه ای آن هنگام رسیدن به کف اتاق چند $\frac{rad}{s}$ است؟ (فرض شود آن سر میله که بـا زمـین در تمـاس اسـت و نلغزد و $g=10\frac{m}{s^2}$)

1) $\sqrt{10}$
2) $2\sqrt{5}$
3) $4\sqrt{5}$
4) $2\sqrt{10}$

۵۰- در حرکت چرخشی یک جسم صلب همگن حول یک محور ثابت کدام عبارت نادرست است؟

1) محور دوران اگر بر محور تقارن جسم منطبق باشد بردار تکانه زاویه ای منطبق بر محور دوران است.

2) بردار تکانه زاویه ای همواره موازی محور دوران است.

3) تغییرات زمانی بردار تکانه زاویه ای در امتداد بردار گشتاور برآیند نیروهای خارجی وارد بر جسم است.

4) اندازه مولفه تکانه زاویه ای در امتداد محور دوران با سرعت زاویه ای جسم تناسب خطی دارد.

۵۱- نوسانگر هماهنگ ساده ای با دامنه A و جرم m هنگام عبور از نقطه تعادلش تندی $V_0$ را دارد. دوره تناوب آن کدام است؟

1) $2p\sqrt{\frac{A}{kg}}$ 2) $2p\sqrt{\frac{A}{k}}$ 3) $2p\sqrt{\frac{k}{m}}$ 4) $2p\frac{A}{V_0}$

۵۲- دو نوسانگر با دوره های ۱ و ۰/۲ از مراکز تعادل خود و در یک جهت حرکت نوسانی خود را آغاز می کنند. پس از ۰/۲۵S چند بار این دو نوسانگر همفاز می شوند؟

1) 2 2) 3 3) 4 4) 1

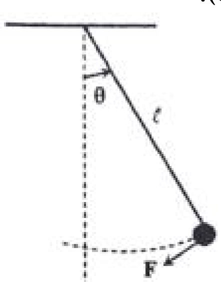
۵۳- یک پیستون در راستای قائم حرکت نوسانی ساده انجام می دهد. جسمی به جرم m روی پیستون قرار دارد. حداقل دوره تناوب چقدر باشد تا جسم از روی پیستون جدا شود؟ (دامنه: A و شتاب جاذبه:g)

1) $\sqrt{\frac{A}{g}}$ 2) $2p\sqrt{\frac{A}{g}}$ 3) $p\sqrt{\frac{A}{g}}$ 4) $2\sqrt{\frac{A}{g}}$

۵۴- دو آونگ با هم شروع به نوسان می کنند. در زمانی که آونگ اول ۱۵ بار نوسان می کند، آونگ دوم ۱۰ نوسان را انجام می دهد. نسبت طول های این دو آونگ را تعیین کنید؟

1) 0/11 2) 0/22 3) 0/32 4) 0/44

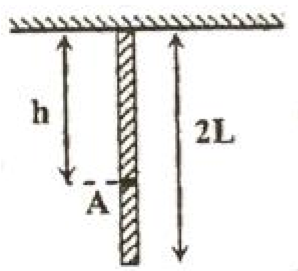
۵۵- بچه ای به جرم m روی تابی که جرم آن ناچیز است و با طنابی به طول l نگه داشته شده نشسته است. فرض کنید ابعاد بچه نسبت به l قابل صرف نظر کردن است. پدرش او را به عقب می کشد تا جایی که طناب با راستای قائم زاویه یک رادیان پیدا می کند. بعد او را با نیروی F=mg در امتداد مماس بر مسیر حرکت هل می دهد تا وقتی که طناب قائم شود. برای چه مدت زمانی پدر تاب را هل داده است؟ (فرض کنید برای زوایای کوچکتر از یک رادیان تقریب $\sin q \approx q$ به قدر کافی برای این مسئله دقیق است).




1) $\frac{p}{3}\sqrt{\frac{l}{g}}$ 2) $\frac{p}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$

3) $\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{l}{g}}$ 4) $\frac{3p}{5}\sqrt{\frac{l}{g}}$

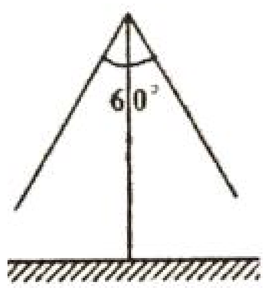
۵۶- یک میله یکنواخت به طول **۲L** به طور قائم از یک انتهایش آویزان شده است. به کدام نقطه در زیر محل آویز (نقطه **A** به ارتفاع **h**) باید ضربه وارد کرد تا بدون وارد شدن نیروی افقی اولیه به نقطه آویز، این میله شروع به حرکت نوسانی کند؟




1) $\frac{3}{4}L$ 2) $\frac{4}{3}L$

3) $\frac{3}{4L}$ 4) $\frac{4}{3L}$

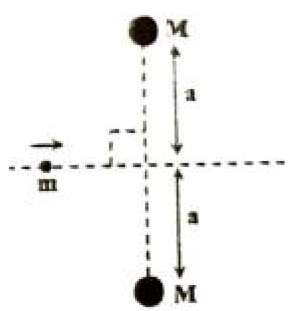
۵۷- دو میله یکسانی هر یک به جرم **m** و طول **L** با زاویه ۶۰ درجه به یکدیگر جوش داده شده اند و مطابق شکل از محل جوش روی رأس یک تیغه قرار گرفته اند. اگر دو میله کمی از حالت تعادل منحرف شده و رها شوند، فرکانس نوسان کدام است؟




1) $\frac{1}{4p}\sqrt{\frac{3\sqrt{3}g}{L}}$ 2) $\frac{1}{4p}\sqrt{\frac{3g}{L}}$

3) $\frac{1}{2p}\sqrt{\frac{3\sqrt{3}g}{L}}$ 4) $\frac{1}{2p}\sqrt{\frac{3g}{L}}$

۵۸- در شکل زیر دو جرم یکسان **M** ساکن هستند. جرم **m** بر روی عمود منصف خط واصل دو جرم **M**، حول نقطه **O**، نوسانات کوچک انجام می دهد. فرکانس این نوسان برابر است با:



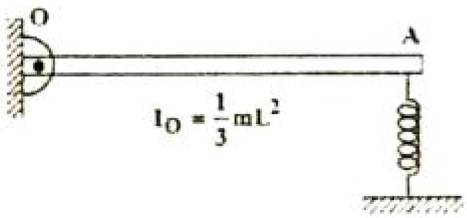

1) $(\frac{2GM}{a^3})^{\frac{1}{2}}$ 2) $(\frac{2Gm}{a^3})^{\frac{1}{2}}$

3) $(\frac{2GMm}{a^2})^{\frac{1}{2}}$ 4) $(\frac{g}{a^3})^{\frac{1}{2}}$

۵۹- آونگی به طول ۲ متر در آسانسوری که با شتاب $2\frac{m}{s^2}$ به طرف بالا حرکت می کند قرار دارد. بسامد این آونگ چند هرتز است؟ ($p = 3/14, g = 9/8\frac{m}{s^2}$)

1) 0/35 2) 0/39 3) 0/31 4) 0/30

۶۰- مطابق شکل میله ی $OA$ به جرم $m$ و طول $L$ از یک طرف در نقطه $O$ لولا شده و از طرف دیگر بــه فنــر قائمی با ثابت $k$ وصل شده است. اگر میله آزادانه حول محور لولا بچرخد، زمان تناوب نوسـانهـای کوچـک میله حول حالت تعادل چقدر است؟ هنگامی که میله افقی است، فنر طول عادی خود را دارد.



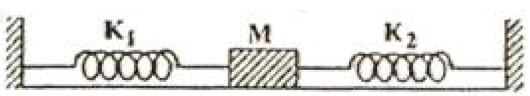

1) $2p\sqrt{\frac{m}{3k}}$

2) $2p\sqrt{\frac{2m}{3k}}$

3) $2p\sqrt{\frac{3m}{2k}}$

4) $2p\sqrt{\frac{3m}{k}}$

۶۱- دو فنر را مطابق شکل به جرم $M$ و به دیواره های ثابت وصل می کنیم. کـدام رابطـه بسـامد نوسـان را نشان می دهد؟



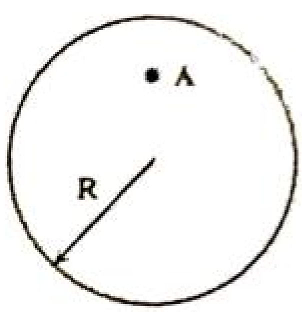

1) $\frac{1}{2p}\sqrt{\frac{k_1+k_2}{(k_1+k_2)M}}$

2) $\frac{1}{2p}\sqrt{\frac{M}{k_1+k_2}}$

3) $\frac{1}{2p}\sqrt{\frac{k_1+k_2}{M}}$

4) $\frac{1}{2p}\sqrt{\frac{(k_1+k_2)M}{k_1+k_2}}$

۶۲- قرص همگن به شعاع $R$ حول محوری عمود بر قرص که از نقطه $A$ می گذرد نوسان می کنـد. فاصـله‌ی محور از مرکز قرص قابل تغییر است. بیشترین مقدار بسامد زاویه ای نوسانات کم دامنه این قرص کدام است؟




1) $(\frac{\sqrt{2}g}{R})^{\frac{1}{2}}$

2) $(\frac{2g}{3R})^{\frac{1}{2}}$

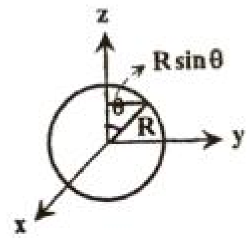
3) $(\frac{2g}{2R})^{\frac{1}{2}}$

4) $(\frac{g}{\sqrt{2}R})^{\frac{1}{2}}$

**پاسخنامه تست های طبقه بندی شده فصل پنجم**

1-گزینه «3»

$I=\int r^2 dm$ :




$$dm = s da = (s)(R^2 \sin q dq dj)$$

$s$: چگالی سطحی

$$I=\int r^2 dm = s\int (R^2 \sin q)^2 (R^2 \sin q dq dj) = sR^4 \int_{q=0}^{p} \int_{j=0}^{2p} \sin^3 q dq dj = (sR^4)(2p)\underbrace{\int_{q=0}^{p} \sin^3 q dq}_{\frac{4}{3}}$$

از طرفی $s$ برابر $\frac{\text{جرم}}{\text{سطح پوسته کروی}}$ می باشد.

$$(s)(R^4)(2p)(\frac{4}{3}) = \frac{M}{4pR^2}(R^4)(2p)(\frac{4}{3}) = \frac{2}{3}MR^2$$

2- گزینه «1»

کل $a=\sqrt{a_t^2+a_r^2}$ , $a_r = Lw^2$

نیاز داریم که زاویه مفروض سرعت زاویه ای نقطه انتهایی میله را داشته باشیم برای اینکـار مـی‌تـوانیم قـانون پایســتگی انرژی را برای نقطه آغازی حرکت و برای نقطه ای که میله زاویه $60^\circ$ با امتداد قائم می سازد، بنویسیم.

$$E_i = E_f \qquad mg\frac{l}{2} = mg\frac{l}{2}\cos 60^\circ + \frac{1}{2}Iw^2$$

انرژی جنبشی فقط دورانی است و گشتاور لختی میله حول یک انتها $\frac{1}{3}ml^2$ می باشد در نتیجه:

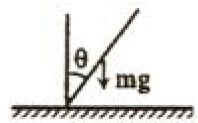
$$mg\frac{l}{2} = mg\frac{l}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2)w^2 \Rightarrow w=\sqrt{\frac{3g}{2l}}$$

پس $a_r = Iw^2 = \frac{3g}{2l}$ برای یافتن $a_t$ می توانیم از مفهوم شتاب زاویه ای کمک بگیریم.

$$\vec{t} = I\vec{a} \quad , \quad \vec{t} = (\vec{r} \times \vec{F}) \quad t = mg\frac{l}{2}\sin(p - \frac{p}{3}) = (mg\frac{l}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2}) \quad , \quad I = \frac{1}{3}ml^2$$

$$(mg\frac{l}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2}) = (\frac{1}{3}ml^2)a \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{g}{l} \xrightarrow{\text{برای نقطه انتهایی میله}} a_t = la = \frac{3\sqrt{3}}{4}g$$

پس شتاب کل به صورت مقابل می شود:




$$a = \sqrt{a_t^2 + a^2} = \sqrt{(\frac{3}{2}g)^2 + (\frac{3\sqrt{3}g}{4})^2} = \frac{3\sqrt{7}}{4}g$$

3- گزینه «4»

نیرویی که سبب می شود میله حرکت کند، نیروی گرانش است که به میله گشتاور وارد می کند و این گشتاور به صورت زیر است:

شتاب خطی $a = al = \frac{3}{2}g$

$t = mg\frac{l}{2}, t = Ia \quad , I = \frac{1}{3}ml^2 \; mg\frac{l}{2} = \frac{ml^2}{3}a \Rightarrow$ شتاب زاویه‌ای $a = \frac{3}{2}\frac{g}{l}$

4- گزینه «2»

می دانیم تعریف اندازه حرکت خطی $\vec{P} = m\vec{V}$ و اندازه حرکت زاویه ای $L = \vec{r} \times \vec{P}$ می باشد پس می توان نوشت:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} = m\vec{r} \times \vec{V} = m\vec{r} \times \vec{r}^{\bullet} \quad , \quad r^{\bullet} = \vec{g}t + \vec{V}_0 \Rightarrow \vec{L} = (m\frac{\vec{g}t^2}{2} + \vec{V}_0) \times (\vec{g}t^2 + \vec{V}_0)$$

$$\vec{L} = (m\frac{1}{2}t^2\vec{g} \times \vec{V}_0 + t^2\vec{V} \times \vec{g}) \xrightarrow{\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}} \Rightarrow \vec{L} = \frac{m}{2}(\vec{V}_0 \times \vec{g})t^2$$

5- گزینه «3»

قانون دوم نیوتن: $F - f = Ma \qquad (1)$

F بر مرکز جرم وارد می شود و گشتاور ایجاد نمی کند تنها نیرویی که گشتاور ایجاد می کند f است.

a: شتاب خطی

$a$: شتاب زاویه ای

گشتاور $\begin{matrix} t = Rf \\ t = I_{cm}a \end{matrix} \xrightarrow{I_{cm} = \frac{MR^2}{2}} Rf = \frac{MR^2}{2}a \Rightarrow f = \frac{MR}{2}a \xrightarrow{Ra = a} f = \frac{Ma}{2} \qquad (2)$

$$(1),(2) \Rightarrow F - \frac{Ma}{2} = Ma \Rightarrow F = \frac{3}{2}Ma$$

6- گزینه «1»

$$T_{rot}=\frac{1}{2}I_{cm}w^2=\frac{1}{2}(\frac{2}{5}MR^2)w^2=\frac{1}{5}MR^2w^2$$

$$T_{tot}=T_{rot}+Ttran=\frac{1}{5}MR^2w^2+mV_{cm}^2\xrightarrow[\text{شرط غلتش}]{V=Rw}T_{tot}=\frac{1}{5}MR^2w^2+\frac{1}{2}MR^2w^2=\frac{7}{10}MR^2w^2$$

$$\Rightarrow\frac{T_{rot}}{T_{tot}}=\frac{\frac{1}{5}MR^2w^2}{\frac{1}{2}MR^2w^2}=\frac{2}{7}$$

7- گزینه «3»

$$T_{rot}=\frac{1}{2}I_{cm}w^2=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)w^2=\frac{1}{4}MR^2w^2 \quad , \quad T_{tran}=\frac{1}{2}mV_{cm}^2$$

$$T_{tot}=T_{tot}+T_{tran}=\frac{1}{2}I_{cm}w^2+\frac{1}{2}mV_{cm}^2=\frac{1}{4}MR^2w^2+\frac{1}{2}MR^2w^2=\frac{3}{4}MR^2w^2$$

$$\Rightarrow\frac{T_{rot}}{T_{tot}}=\frac{\frac{1}{4}MR^2w^2}{\frac{3}{4}MR^2w^2}=\frac{1}{3}$$

8- گزینه «3»:

mg به مرکز جرم وارد می شود و گشتاور ندارد ولی T گشتاور دارد.

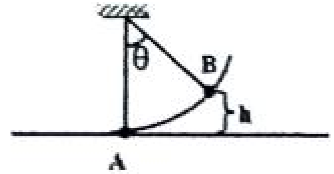
گشتاور $TR=I_{cm}a \qquad I_{cm}=\frac{2}{5}mR^2\Rightarrow TR=\frac{2}{5}mR^2a\xrightarrow[Ra=a_{cm}]{}T=\frac{2}{5}ma_{cm}$

قانون دوم $mg-T=ma_{cm} \qquad mg-\frac{2}{5}ma_{cm}=ma_{cm} \qquad a_{cm}=\frac{5}{7}g$

9- گزینه «1»

به علت عدم وجود نیروهای اتلافی پایستگی انرژی را در نقطه B , A می توان نوشت: (در بیشترین ارتفاع گلوله ساکن می شود)

$$E_A=E_B=\underbrace{\frac{1}{2}mV_{cm}^2+\frac{1}{2}I_{cm}w^2}_{\text{انرژی جنبشی میله در نقطه }A}=mgh$$



$V_{cm} = \frac{l}{2}w^2$

$\frac{1}{2}m(\frac{l^2w^2}{4})(\frac{1}{2})(\frac{1}{12}ml^2)w^2 = mgh \Rightarrow \frac{l^2w^2}{6g} = h$

$\xrightarrow{\overline{OA}=\frac{3}{4}\overline{AC}} (-W)(\frac{3}{4}) + (F_E)(2) = 0$

$F_E = \frac{3}{8}W$

10- گزینه «1»

اگر نقطه O را مبدا در نظر بگیریم پس از برخورد ضربه سیستم تکانه زاویه ای زیر را به دست می آورد:

$L = jb$

میله حول یک انتهایش $I = \frac{m\mathbf{l}}{3} \xrightarrow{\mathbf{l}=2a} I = \frac{4ma^2}{3}$

از طرفی $L = Iw \Rightarrow L = (\frac{4ma^2}{3})w = jb \Rightarrow w = \frac{3\,jb}{4ma^2}$

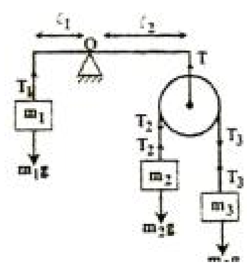
11- گزینه «3»

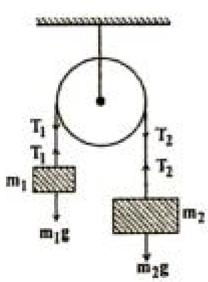
در شرایط تعادل، دو نتیجه داریم یکی $\sum F = 0$ و دیگری $\sum t = 0$

$t_T = t_{T_1}$

$t_T = T\mathbf{l}_2 \quad t_{T_1} = T\mathbf{l}_1 \ , \ T_1 = m_1 g$ به خاطر تعادل

$T_2 = T_3 = T'$




$m_2 > m_1$ برای کل سیستم $m_2g - m_1g = (m_1 + m_2)a_2 \Rightarrow a_2 = (\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1})g$

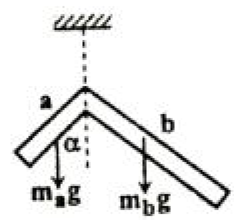
برای جسم$m_2$ $m_2g - T = m_2a_2 = m_2(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1})g \Rightarrow T = 2\frac{m_2m_1}{m_1 + m_2}g$

پس مورد بالا را به مسئله تعمیم می دهیم. بنابراین داریم:

در مثال بالا $T=2T_2=\frac{4m_2m_3}{m_2+m_3}g \Rightarrow T_1\mathbf{l}_1=T\mathbf{l}_2 \Rightarrow m_1g\mathbf{l}_1\frac{4m_2m_3}{m_2+m_3}g\mathbf{l}_2 \Rightarrow \frac{\mathbf{l}_2}{\mathbf{l}_1}=\frac{4m_2m_3}{m_1(m_2+m_3)}$

12- گزینه «2»

اگر فرض کنیم چگالی میله $l$ باشد آنگاه جرم هر قسمت را می توان با $lb, la$ بیان کرد. برای تعادل دورانی سیستم حول O می توان گفت:



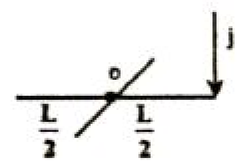

$$\sum t=\mathbf{0}$$

$$(m_ag)(\frac{a}{2}\sin a)=m_bg(\frac{b}{2}\sin(\frac{p}{2}-a)$$

$$\Rightarrow lag=(\frac{a}{2}\sin a)=lbg=(\frac{b}{2}\cos a)\Rightarrow tag=\frac{b^2}{a^2}\Rightarrow a=tg^{-1}(\frac{b^2}{a^2})$$

13- گزینه «2»

پس از برخورد ضربه، مرکز جرم سرعت $\frac{j}{m}$ پیدا می کند.




تغییر تکانه خطی $=\overset{\mathbf{r}}{j}\Rightarrow V_{cm}=\frac{j}{m}$

تغییر تکانه زاویه ای $=\frac{\mathbf{l}}{2}j\Rightarrow I_{cm}\Delta w=\frac{\mathbf{l}}{2}j\Rightarrow \Delta w=\frac{j\frac{\mathbf{l}}{2}}{I_{cm}}=\frac{j\frac{\mathbf{l}}{2}}{\frac{1}{12}m\mathbf{l}^2}=\frac{6j}{m\mathbf{l}}=w-w_0=w$

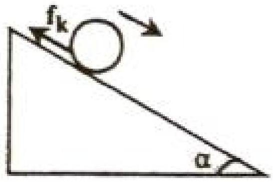
از طرفی در یک دوره کامل می توان نوشت $T=\frac{2p}{w}$ یعنی $T=\frac{2p}{\frac{6j}{m\mathbf{l}}}=\frac{2pm\mathbf{l}}{6j}$ حال ببینیم در این مدت زمان مرکز جرم با سرعت $V_{cm}$ چقدر جابه جایی انتقالی خواهد داشت.

$$Y=V_{cm}T=(\frac{j}{m})(\frac{pm\mathbf{l}}{3j})=\frac{pL\mathbf{l}}{3}$$

14- گزینه «3»

$$L_1=L_2$$

$$I_0w_0=(I_0+I_1)\rightarrow wf=\frac{I_0w_0}{(I_0+I_1)}$$




15- گزینه «1»

$$w_f = \int t dq$$
$$\vec{t} = \vec{r} \times \vec{F} = Rf_k \sin q$$

$dq = 0$ , $q = \frac{p}{2}$ همیشه زاویه بین $R$ , $f_k$ , $\frac{p}{2}$ است و تغییرات ندارد.

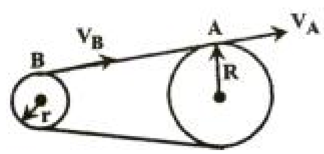
16- گزینه «2»

می دانیم که در دو نقطه A , B در فاصله یکسان نسب به هم قرار دارند از این می توان نتیجه گرفت که سرعت (خطی) تسمه بین نقاط A , B در هر نقطه یکسان است. پس $V_A$ هم باید با $V_B$ مساوی باشد.

$$V_A = V_B$$

از آنجایی که شعاع دو چرخ متفاوت است و $V = rw$ لذا باید گفت که سرعت زاویه ای دو چرخ متفاوت است یعنی :

$$r_B w_B = r_A w_A \Rightarrow r w_A = R w_B \Rightarrow \frac{w_B}{w_A} = \frac{r}{R}$$




17- گزینه «2»

جرم کاهیده دو جسم $m_1$ و $m_2$ از رابطه مقابل به دست می آید:

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

بنابراین برای حرکت دایره ای داریم:

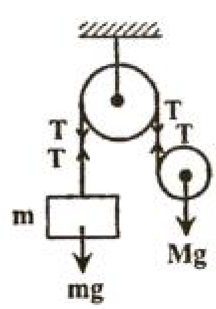
$$F = m\frac{v^2}{R} = m\frac{R^2w^2}{R} = mRw^2 \Rightarrow R = \frac{F}{w^2 m} = \frac{F}{w^2}\left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right) \Rightarrow R = \frac{F}{w^2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

18- گزینه «3»

ابتدا نیروهای وارد به سیستم را مشخص می کنیم.

$T - mg = ma_m = 0$ برای ساکن ماندن جسم سمت چپ

$$\left.\begin{array}{ll} TR = Ia = \frac{1}{2}MR^2 a & \text{برای دوران} \\ Mg - T = Ma_M & \text{برای انتقال} \end{array}\right\} \xrightarrow{Ra = a_M} \left\{\begin{array}{l} mg = \frac{Ma_M}{2} \\ (M-m)g = Ma_M \end{array}\right.$$



دو رابطه بالا را به هم تقسیم می کنیم.

$$\frac{mg}{(M-m)g}=\frac{Ma_M}{2Ma_M}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{m}{M-m}=\frac{1}{2}\Rightarrow M=3m$$

19- گزینه «4»

$$v=\frac{180}{60}=3(Hz)\Rightarrow w=2pv=2\times 3/14\times 3=18/84(\frac{rad}{s})$$

$$R=\frac{0/76}{2}=0/38(m)\Rightarrow v=Rw=0/38\times 18/84\approx 7/16(\frac{m}{s})$$

20- گزینه «1»

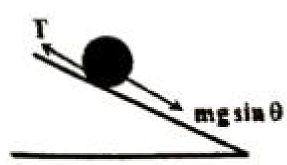
در ضربه خطی $\Delta p=m\Delta V_{cm}=j\Rightarrow V_{cm}=\frac{j}{m}$

در ضربه زاویه ای $j'=aj\Rightarrow w=\frac{j'}{I_{cm}}=\frac{aJ}{I_{cm}}$

$$T_{\text{کل}}=T_{\text{انتقالی}}+T_{\text{دورانی}}=\frac{1}{2}mv_{cm}^2+\frac{1}{2}I_{cm}w^2$$

$$T=\frac{1}{2}m(\frac{j}{m})^2+\frac{1}{2}I_{cm}(\frac{aj}{I_{cm}})^2=\frac{j^2}{2m}+\frac{1}{2}\frac{a^2j^2}{I_{cm}}\xrightarrow{I_{cm}=ma^2}T=\frac{j^2}{2m}+\frac{j^2}{2m}=\frac{j^2}{m}$$

21- گزینه «3»




$$mg\sin q-T=ma$$

$$TR=t=I_{cm}a=I_{cm}\frac{a}{R}\qquad I_{cm}=\frac{1}{2}mR^2$$

$$\Rightarrow TR=(\frac{1}{2}mR^2)(\frac{a}{R})\Rightarrow T=\frac{1}{2}ma$$

$$mg\sin q-\frac{ma}{2}=ma\Rightarrow mg\sin q=\frac{3}{2}ma\Rightarrow a=\frac{2}{3}ma\Rightarrow a=\frac{2}{3}g\sin q$$

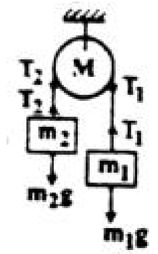
از حالت سکون شروع به حرکت کرده است $l=\frac{1}{2}at^2\qquad t=\sqrt{\frac{2l}{a}}=\sqrt{\frac{2l}{\frac{2}{3}g\sin q}}=\sqrt{\frac{3l}{g\sin q}}$

$$l=5m\qquad \theta=30^\circ\qquad g=10\Rightarrow t=\sqrt{\frac{3\times 5}{10\times\frac{1}{2}}}=\sqrt{3}$$

22- گزینه «3»

برای جسم $m_1$ $\quad m_1g - T = m_1a$

برای جسم $m_2$ $\quad T - m_2g = m_2a$



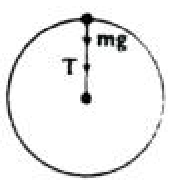

فرض می کنیم شعاع قرقره $R$ است $\quad (T_1 - T_2)R = I_{cm}a = I_{cm}\dfrac{a}{R}$ برای قرقره

برای استوانه حول محور مرکزی $\quad I_{cm} = \dfrac{1}{2}MR^2 \Rightarrow (T_1 - T_2)R = \dfrac{1}{2}MR^2 \times \dfrac{a}{R} \Rightarrow (T_1 - T_2) = \dfrac{1}{2}Ma$

$$m_1g - T_1 + T_2 - m_2g = (m_1 + m_2)a \Rightarrow g(m_1 - m_2) - (T_1 - T_2) = (m_1 + m_2)a$$

$$\Rightarrow g(m_1 - m_2) - \frac{Ma}{2} = (m_1 + m_2)a \xrightarrow[\substack{m_2=1kg \\ M=2kg}]{m_1=3kg} a = 4\frac{m}{a^2}$$

23- گزینه «1»




$$mg + T = m\frac{v^2}{R}$$

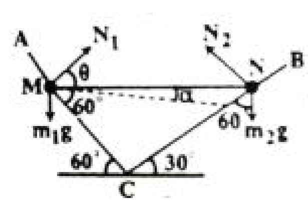
اگر بخواهیم طناب شل نشود باید داشته باشیم: $T \neq 0$

$$T \neq 0 \Rightarrow \frac{mv^2}{R} > mg \Leftarrow v^2 > Rg \Rightarrow v > \sqrt{Rg}$$

بنابراین کمینه سرعت است و در واقع سرعت همواره از این مقدار بیشتر است.

24- گزینه «4»

نقطه C را به عنوان مبدأ در نظر می گیریم. می بایست گشتاور حاصل از وزن دو گلوله حول C برابر باشد.




$$mg\overline{MC}\sin 30^\circ = m_2g\overline{NC}\sin 60^\circ$$

$$30\overline{MC}\left(\frac{1}{2}\right) = 60(\overline{NC})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \frac{\overline{NC}}{\overline{MC}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

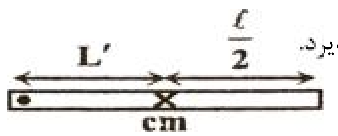
از طرفی در مثلث موجود در شکل به راحتی می توان گفت $tg(60 + a) = \dfrac{\overline{NC}}{\overline{MC}}$ در نتیجه:

$$tg(a + b) = \frac{tga + tgb}{1 - tgatgb} \Rightarrow tg(60 + a) - \frac{\sqrt{3} + tga}{1 - \sqrt{3}tga}$$

$$6 + 2\sqrt{3}tga = 1 - \sqrt{3}tga \Rightarrow tga = \frac{5}{3\sqrt{3}} \Rightarrow a = Arctg\frac{5}{3\sqrt{3}}$$

25- گزینه «1»

برای حل این سئوال کافی است از مفهوم تقارن و رابطه معروف $K_{cm}^2 = LL'$ استفاده کنیم که L فاصله مرکز جرم تا نقطه ضربه و L' فاصله مرکز جرم تا نقطه ای است که دوران حول آن صورت می پذیرد.

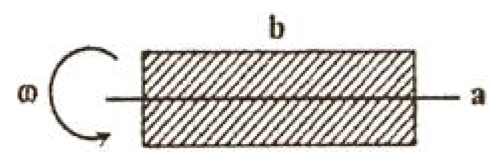


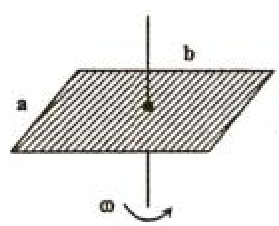

برای یک میله داریم $k_{cm} = \frac{1}{\sqrt{12}}$ در اینجا $L = \frac{\mathbf{l}}{2}$ و ما نیازداریم L' را بیابیم.

$$(\frac{\mathbf{l}}{2})L' = \frac{\mathbf{l}^2}{12} \Rightarrow L' = \frac{\mathbf{l}}{6}$$

26-گزینه «4»

لختی دورانی صفحه مستطیل شکل نسبت به محورهای مشخص شده در شکل مقابل آمده است:




محور گذرنده از مرکز عمود بر ورقه      محور گذرنده از مرکز موازی ضلع b

$$I = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2) \qquad I = \frac{1}{12}ma^2$$

این مقادیر با انتگرال گیری مستقیم $I = \int r^2 dm$ و قرار دادن $dm = s\,ds$ نیز قابل محاسبه هستند.

27- گزینه «3»

می دانیم لختی دورانی استوانه ای به شعاع a و ارتفاع b حول محوری که از مرکز جرم استوانه و عمود بر محور استوانه می گذرد به صورت $I = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2$ می باشد اگر a=h=R باشد.

$$I = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mR^2 = \frac{1}{3}mR^2$$

28- گزینه «4»

انرژی جنبشی این میله ، دورانی است و از رابطه مقابل به دست می آید: $k = \frac{1}{2}Iw^2$ برای محاسبه لختی دورانی میله حول نقطه دوران به طریق زیر عمل می کنیم:

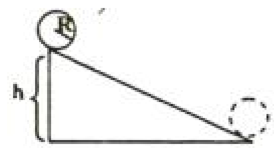
$$I=\int r^2dm \quad , \quad r=\frac{dm}{dx}\Rightarrow dm=r\,dx=ax^2dx$$

$$I=\int_0^{\mathbf{l}} x^2ax^2dx=a\int_0^{\mathbf{l}} x^4dx=a\,\frac{x^5}{5}\Big]_0^{\mathbf{l}}=\frac{a\mathbf{l}^5}{5}\Rightarrow k=\frac{1}{2}(\frac{a\mathbf{l}^5}{5})(10)^2=10a\mathbf{l}^5$$

29- گزینه «1»

اگر از اصطکاک صرف نظر کنیم انرژی مکانیکی در طول این حرکت پایسته می ماند. بنابراین داریم:

$$E_i=E_f\Rightarrow Mgh=\frac{1}{2}Iw^2+\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$$




از طرفی لختی دورانی حلقه نسبت به مرکز جرم آن برابر است با : $MR^2$.

$$\Rightarrow Mgh=\frac{1}{2}MR^2w^2+\frac{1}{2}MR^2w^2\Rightarrow \cancel{M}gh=\cancel{M}R^2w^2\Rightarrow w=\frac{1}{R}\sqrt{gh}$$

در نوشتن رابطه بالا از $v_{cm}=Rw$ استفاده کردیم. اما اندازه حرکت زاویه ای برابر است با $Iw$ . پس داریم:

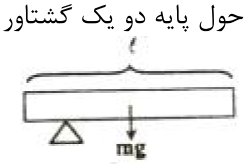
$$L=Iw=MR^2\times(\frac{\sqrt{gh}}{R})=MR\sqrt{gh}$$

30- گزینه «1»

وقتی یکی از پایه ها برداشته می شود، نیروی وزن وارد عمل شده و مرکز جرم میله را به سمت پایین می کشد.

این نیروی وزن حول پایه دو یک گشتاور نیرو ایجاد کده و به میله شتاب زاویه ای $a$ می دهد.

$$t=Ia\Rightarrow mg\times\frac{\mathbf{l}}{2}=\frac{1}{3}m\mathbf{l}^2\times a\Rightarrow a=\frac{3g}{2\mathbf{l}}$$




اکنون می توانیم شتاب خطی میله را محاسبه کنیم.

$$a=ra=\frac{\mathbf{l}}{2}\times\frac{3g}{2\mathbf{l}}=\frac{3}{4}g$$

برای محاسبه نیروی عکس العمل پایه دوم (N) از قانون دوم نیوتن بهره می گیریم:

$$mg-N=ma\Rightarrow N=m(g-a)=m(g-\frac{3}{4}g)\Rightarrow N=\frac{mg}{4}$$

31- گزینه «3»

با توجه به رابطه جک می توان نوشت:

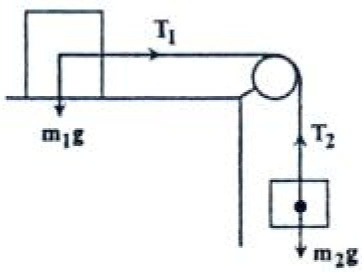
$$\frac{F}{h}=\frac{G}{pR}$$

توجه داشته باشید به ازای هر $p$ دور که دسته بچرخد گام پیچ خواهد بود. $F=\frac{Gh}{pR}$

32- گزینه «3»

33- گزینه «1»

وقتی از لختی دورانی قرقره صحبت می شود به این معنی است که از جرم آن صرف نظر نشده است. اثـر جـرم قرقـره در مسئله به این صورت است که دیگر کشش ریسمان در دو طرف قرقره برابر نخواهد بود. اما شتاب دو جسم همواره یکسان بوده و برابر با شتاب مماسی لبه قرقره.




(1) برای جرم $m_1$: $\sum F_x = T_1 = m_1 a$

(2) برای جرم $m_2$: $\sum F_y = m_2 g - T_2 = m_2 a$

اما برای قرقره داریم: $\sum t = T_2 r + (-T_1 r) = I a$

رابطه بین شتاب زاویه ای $(a)$ و شتاب خطی (a) به صورت $a = ra$ است. پس داریم:

$$(T_2 - T_1) r = I\frac{a}{r} \quad (3)$$

اکنون باید $T_1$ و $T_2$ را از روابط (1) و (2) پیدا کرده و در (3) جایگذاری کنیم:

$$T_1 = m_1 a \qquad , \qquad T_2 = m_2 a(g-a)$$
$$\Rightarrow (3):(m_2 g - m_2 a - m_1 a) r^2 = Ia$$
$$\Rightarrow (m_2 g - (m_1+m_2)a) r^2 = Ia \Rightarrow m_2 g = (\frac{I}{r^2} + m_1 + m_2) a \Rightarrow a = \frac{m_2 g}{(\frac{I}{r^2} + m_1 + m_2)}$$

34- گزینه «2»

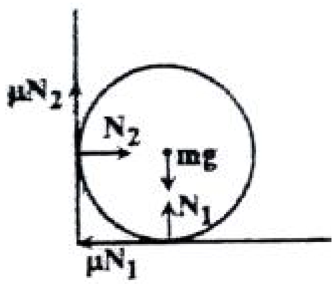
باید از رابطه پایستگی تکانه زاویه ای سیستم قبل و بعد از سقوط استوانه بالایی استفاده کنیم:

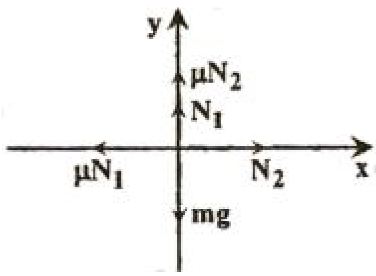
$$L_i = I_0 w_0 = 0 \qquad ; \qquad L_i = L_f \Rightarrow I_0 w_0 = (I_0 + I_1) w_f \Rightarrow w_f \frac{w_0 I_0}{I_0 + I_1}$$
$$L_f = (I_0 + I_1) w_f$$

35- گزینه «2»

نیروهای وارد بر کره به صورت زیر هستند:

برای راحتی کار ، نمودار جسم آزاد را رسم می کنیم.




$$\begin{cases}\sum F_x = 0 \Rightarrow N_2 - mN_1 = 0 \Rightarrow N_2 = mN_1 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow mN_2 + N_1 - mg = 0 \Rightarrow mg = mN_2 + N_1\end{cases} \Rightarrow mg = N_1 + m^2 N_1 \Rightarrow N_1 = \frac{mg}{1+m^2}$$

$$N_2 = mN_1 \Rightarrow N_2 = \frac{mmg}{1+m^2}$$

$$\sum t = Ia \quad , \quad \vec{t} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \begin{cases}\vec{t}_1 = \vec{r} \times mN_1 \\ \vec{t}_2 = \vec{r} \times mN_2\end{cases} \Rightarrow t_1 = R(\frac{mmg}{1+m^2}) \quad , \quad t_2 = R(\frac{m^2 mg}{1+m^2})$$

$$\sum t = t_1 + t_2 = \frac{mgR(1+m)m}{1+m^2} = \frac{2}{5}mR^2 a \Rightarrow a = \frac{5}{2}\frac{(1+m)}{(1+m^2)}\frac{mg}{R}$$

36- گزینه «1»

به راحتی از مفهوم ضربه این تست قابل حل است.

ضربه خطی $j = mV_{cm}, V_{cm} = \frac{j}{m}$

ضربه دورانی $\hat{N} = jd \Rightarrow I\Delta w = jd, I = \frac{1}{12}mL^2 \Rightarrow \Delta w = \frac{jd}{\frac{1}{12}mL^2} = \frac{12jd}{mL^2}$

زمان حرکت مرکز جرم (دوره تناوب) $T \rightarrow T\Delta w = 2p \Rightarrow T = \frac{2p}{\Delta w} = 2p(\frac{mL^2}{12jd}) = \frac{pmL^2}{6jd}$

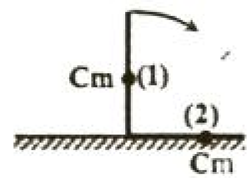
چون در صورت سئوال ذکر شده میله دو دور می چرخد یعنی وقتی دو دوره تناوب از چرخش آن گذشته باشد، پس

$2T \leftarrow T$

$$\Delta x = V_{cm}(2T) = (\frac{2pmL^2}{6jd})(\frac{j}{m}) = \frac{pL^2}{3d}$$

37- گزینه «2»

برای حل این مسئله از پایستگی انرژی مکانیکی استفاده می کنیم. داریم:




$$E_1 = mg\frac{\mathbf{l}}{2} \quad , \quad E_2 = \frac{1}{2}Iw^2 \quad , \quad E_1 = E_2$$

$$\Rightarrow mg\frac{\mathbf{l}}{2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}m\mathbf{l}^2)\frac{v^2}{\mathbf{l}^2} \Rightarrow v = \sqrt{3g\mathbf{l}}$$

38- گزینه «4»

برای حل این سئوال از قضیه کار- انرژی جنبشی در حرکت دورانی استفاده می کنیم.

$$W = k_f - k_i \xrightarrow{k_i = 0} W = \frac{1}{2}Iw^2$$

از طرفی کار برابر است با حاصل ضرب توان در زمان انجام کار، یعنی:

$$W = pt = 0/75 \times 746 \times 8 = 4476(J)$$

با استفاده از روابط بالا داریم:

$$4476 = \frac{1}{2} \times 2 \times w^2 \Rightarrow w = \sqrt{4476} \approx 67(\frac{rad}{s})$$

39- گزینه «4»

این حلقه هم انرژی جنبشی انتقالی دارد و هم انرژی جنبشی دورانی. طبق قضیه کار- انرژی کار که برای متوقف کردن آن لازم است برابر است با مجموع انرژی های جنبشی انتقالی و دورانی حلقه.

$$W = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}Iw^2$$

$$I_{\text{حلقه}} = mR^2 \qquad , \qquad w^2 = \frac{v^2}{R^2}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}mR^2\frac{v_{cm}^2}{R^2} \Rightarrow W = mv_{cm}^2 = 150 \times (0/15)^2 \Rightarrow W = 3/375(J)$$

40- گزینه «3»

$$I_\Delta = \frac{2}{5}mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2$$

$$t = Ia \Rightarrow mgR = \frac{7}{5}mR^2 a \Rightarrow a = \frac{5g}{7R} \Rightarrow a_{cm} = Ra = \frac{5g}{7R} \times R \Rightarrow a_{cm} = \frac{5}{7}g$$

41- گزینه «3»

لختی دورانی برای دو ذره به جرم m (حول نقطه O) به شکل مقابل است:

$$I_1 = mL^2 + m(2L)^2 = 5mL^2$$

$$I_2 = \frac{1}{3} mL^2$$

$$I_{cm} = \frac{1}{12} mL^2 \Rightarrow I_O = I_{cm} + M(\frac{1}{3}L^2) \Rightarrow I_O = \frac{1}{12} mL^2 + \frac{9}{4} mL^2 = \frac{28}{12} mL^2 = \frac{7}{3} mL^2$$

$$I_{\text{کل}} = I_1 + I_2 + I_O = 5mL^2 + \frac{1}{3} mL^2 + \frac{7}{3} mL^2 \Rightarrow I_{\text{کل}} = 5mL^2 + \frac{8}{3} mL^2$$

42- گزینه «3»

برای حل این مسئله از پایستگی تکانه زاویه ای قبل و بعد از سقوط موش استفاده می‌کنیم.

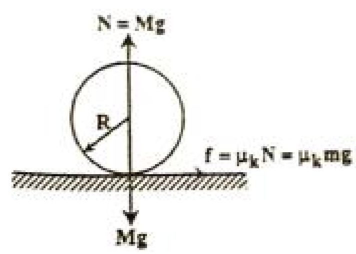
$$L_i = Iw_0 \qquad L_f = (I + mR^2)w \quad ; \quad L_i = L_f \Rightarrow Iw_0 = (I + mR^2)w \Rightarrow \frac{w}{w_0} \frac{I}{I + mR^2}$$

43- گزینه «1»

شکل زیر نمودار نیروهای وارد بر استوانه را نشان می دهد:

$$v_0 = Rw_0 \quad , \quad \vec{f}_k = m\vec{a} \Rightarrow m_k mg = ma \Rightarrow a = m_k g$$

رابطه فوق نشان می دهد که جسم با شتابی برابر a به سمت جلو (در جهت اصطکاک) حرکت انتقالی پیدا می کند.




$$v_{cm} = m_k gt$$

$$t = Ia \Rightarrow f_k.R = \frac{1}{2} mR^2 a \Rightarrow a = \frac{2m_k g}{R}$$

$$w = w_0 - at \Rightarrow w = w_0 - \frac{2m_k g}{R} \Rightarrow Rw = Rw_0 - 2m_k gt$$

این نشان می دهد که اصطکاک در مقابل حرکت غلتش نه تنها مقاومتی ندارد بلکه باعث حرکت می‌شود.

وقتی $v_{cm} = Rw$ شود، لغزش متوقف شده و حرکت غلتشی محض آغاز می شود. در نتیجه با استفاده از روابط بالا داریم:

$$m_k gt = \underbrace{Rw_0}_{v_0} - 2m_k gt \Rightarrow t = \frac{v_0}{3m_k g}$$

44- گزینه «3»

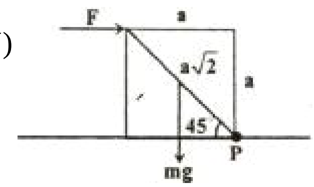
$$m\vec{g} \times \vec{r}_1 = \vec{F} \times \vec{r}_2$$

در رابطه بالا $\vec{r}_2$ , $\vec{r}_1$ به ترتیب فاصله نقطه اثر بردارهای $m\vec{g}$ , $\vec{F}$ از نقطه P هستند داریم:

$$r_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad , \quad r_2 = a\sqrt{2}$$

در نتیجه رابطه بالا به صورت مقابل درمی آید:

$$(mg)(\frac{a\sqrt{2}}{2})\sin 45^{\circ} = (F)(a\sqrt{2})\sin 45^{\circ} \Rightarrow F = \frac{mg}{2} = \frac{890}{2} = 445(N)$$




45- گزینه «4»

برای حل این مسئله از پایستگی انرژی مکانیکی استفاده می کنیم.

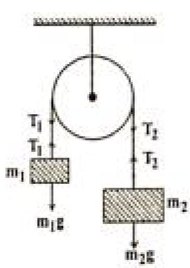
$$\frac{1}{2}Iw^2 = mgh \Rightarrow \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\cancel{m}L^2w^2 = \cancel{m}gh \Rightarrow h = \frac{L^2w^2}{6g}$$

46- گزینه «2»

$$x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 2/5 = \frac{1}{2}a(1)^2 \Rightarrow a = 5(\frac{m}{s^2})$$

از طرفی: $a = Ra$

$$t = Ia$$




$$\sum F_y = m_1a_y \Rightarrow T_1 - m_1g = m_1a \Rightarrow T_1 = m_1(g+a) = 1(10+5) \Rightarrow T_1 = 15(N)$$
$$\sum F_y = m_2a_y \Rightarrow T_1 - m_2g = m_2a \Rightarrow T_2 = m_2(g-a) = 2(10-5) \Rightarrow T_2 = 10(N)$$

$$\Rightarrow t = R(T_1+T_2) = R(10+15) = 25R$$

اکنون با استفاده از رابطه به دست آمده، رابطه $t = Ia$ را بازنویسی می کنیم.

$$25R = I\frac{a}{R}25R^2 = IaR^2 = \frac{2/25\times10^{-2}\times5}{25} = 4/5\times10^{-3}\ R = 0/067m = 6/7cm$$

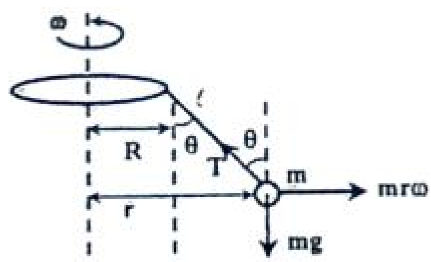
47- گزینه «1»

$$T_{\max}\sin q = mrw_{\max}^2 = m(R+\mathbf{l}\sin q)w_{\max}^2 \Rightarrow w_{\max} = \sqrt{\frac{T_{\max}\sin q}{m(R+\mathbf{l}\sin q)}}$$

طبق صورت سئوال در این حالت $q = 30^0$ است:

$$\Rightarrow w_{\max} = \sqrt{\frac{144\times\frac{1}{2}}{1\times(0/5+1/5)}} = \sqrt{36} = 6\frac{rad}{s}$$

توجه: دقت کنید که به اشتباه از رابطه $T\cos q = mg$ استفاده نکنید، زیرا همان طور که ذکر شد، زاویه $q$ به مقدار $w$ بستگی دارد و در هر لحظه نیروی برآیندی رو به بالا به گلوله وارد می گردد.




48- گزینه «2»

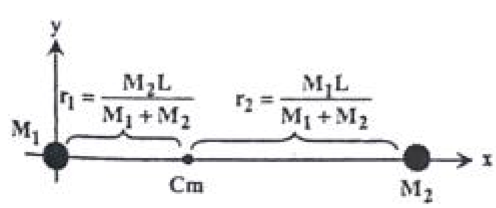
ابتدا باید مکان مرکز جرم دستگاه را پیدا کنیم. چون میله بدون جرم در نظر گرفته شده پس مرکز جرم نیز ندارد. آنچه می ماند مشخص کردن مرکز جرم اجسام $M_1$ و $M_2$ است که به طریق زیر به دست می آید:

$$\begin{cases} x_{M_1} = 0 \\ y_{M_1} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{M_2} = L \\ y_{M_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow y_{cm} = 0 \quad , \qquad x_{cm} = \frac{M_1x_1 + M_2x_2}{M_1+M_2} = \frac{M_2}{M_1+M_2}$$

بنابراین فاصله مرکز جرم از مبدأ مختصات (جسم $M_1$) برابر $\frac{M_2}{M_1+M_2}$ و فاصله آن از جسم $M_2$ برابر $L - \frac{M_2L}{M_1+M_2} = \frac{M_1L}{M_1+M_2}$ است. اکنون گشتاور ماند (ممان اینرسی) دستگاه را حول این نقطه به دست می آوریم:

$$I_{cm} = M_1r_1^2 + M_2r_2^2 = M_1(\frac{M_1L}{M_1+M_2})^2 + M_2(\frac{M_2L}{M_1+M_2})^2 = \frac{M_1M_2^2L^2 + M_1M_1^2L^2}{M_1+M_2}$$

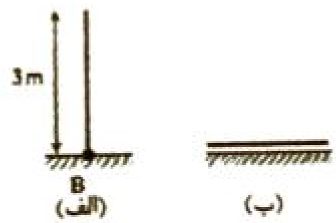
$$= \frac{M_1M_2L^2}{(M_1+M_2)^2} \Rightarrow I_{cm} = \frac{M_1M_2L^2}{M_1+M_2}$$




49- گزینه «1»

$$u = mg\frac{l}{2} \rightarrow \text{(در حالت الف)}$$

هنگام برخورد با زمین می توان نوشت:




$$u = 0 \quad , \quad k = \frac{1}{2} I w^2$$

$$I = \frac{1}{3} m\mathbf{l}^3 \Rightarrow k = \frac{1}{2}(\frac{1}{3} m\mathbf{l}^3) w^2$$

طبق اصل پایستگی انرژی بین دو حالت (الف) و (ب) خواهیم داشت: $u = k$.

$$mg\frac{\mathbf{l}}{2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{3} m\mathbf{l}^3) w^2 \Rightarrow w^2 = \frac{3g}{\mathbf{l}} = \frac{30}{3} = 10 \Rightarrow w = \sqrt{10}(\frac{rad}{s})$$

50- گزینه «2»

اگر جسمی حول محوری دلخواه دوران کند و آن وحور اصلی دوران جسم باشد می‌توان گفت بردار تکانه زاویه ای همواره موازی محور دوران است.

51- گزینه «4»

می دانیم که انرژی مکانیکی نوسانگر در هر لحظه از رابطه $\frac{1}{2}kA^2$ بدست می آید که A دامنه نوسان است و همچنین در نقطه تعادل انرژی پتانسیل صفر است و نوسانگر فقط انرژی جنبشی دارد لذا می توان گفت که مقدار انـرژی نوسـانگر در نقطه تعادلش $\frac{1}{2}mV_0^2$ است. پس:

$$\frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow K = \frac{mV_0^2}{A^2} = T = 2p\sqrt{\frac{m}{(\frac{mV_0^2}{A^2})}} = 2p\frac{A}{V_0}$$

52- گزینه «4»

دو نوسانگر در 0/2 ثانیه یکبار از کنار هم خواهند گذشت. بنابراین کلاً هر دو در 0/25 ثانیه یکبـار از کنـار هـم خواهنـد گذشت.

53- گزینه «2»

$$F = mw^2A \Rightarrow mg = mw^2A \Rightarrow w = \sqrt{\frac{mg}{mA}} = \sqrt{\frac{g}{A}} \Rightarrow T = \frac{2p}{w} = 2p\sqrt{\frac{A}{g}}$$

54- گزینه «4»

$$T=2p\sqrt{\frac{\mathbf{l}}{g}}\Rightarrow\frac{1}{5}=2p\sqrt{\frac{\mathbf{l}_1}{g}}\ ,\ \frac{1}{10}=2p\sqrt{\frac{\mathbf{l}_2}{g}}$$

$$\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{10}}=\frac{2p\sqrt{\frac{\mathbf{l}_1}{g}}}{2p\sqrt{\frac{\mathbf{l}_2}{g}}}\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{\mathbf{l}_1}}{\sqrt{\mathbf{l}_2}}\Rightarrow\frac{\mathbf{l}_1}{\mathbf{l}_2}\frac{4}{9}=0/44$$

55- گزینه «1»

$T=2p\sqrt{\frac{\mathbf{l}}{g}}$ می باشد برای یک چهارم حرکت $t=\frac{p}{2}\sqrt{\frac{\mathbf{l}}{g}}$ خواهد شد انتظار داریم در غیاب نیرو جواب مسئله همین مقدار شود چون نیرو در یک چهارم حرکت وارد شده لذا باید به دنبال گزینه ای بگردیم که عدد آن از $\frac{p}{2}\sqrt{\frac{\mathbf{l}}{g}}$ کوچکتر باشد که تنها گزینه ممکن $\frac{p}{3}\sqrt{\frac{\mathbf{l}}{g}}$ گزینه «1» است.

56- گزینه «2»

نقطه ای که صورت مسئله به دنبال آن است در واقع مرکز نوسان میله است زیرا اگر یک نیروی ضربه ای به مرکز نوسان جسم وارد شود هیچ واکنشی در نقطه آویز به وجود نمی آید. مرکز نوسان نقطه ای است که می توان جرم آونگ فیزیکی را در آن نقطه متمرکز دانست. اما توجه داشته باشید که مرکز نوسان با مرکز جرم فرق نمی کند، زیرا مرکز جرم هر مکان مشخصی دارد اما مرکز نوسان به محل آویختن آونگ (محور نوسان) بستگی دارد. مرکز نوسان یک آونگ از رابطه $L=\frac{I}{md}$ به دست می آید که در آن، L فاصله مرکز نوسان از محل آویز، I لختی دورانی آونگ نسبت به نقطه آویز، m جرم آونگ و d فاصله مرکز جرک از محور نوسان (نقطه آویز) است.

در مورد این مسئله، مطابق شکل روبرو داریم:


$$d=\mathbf{l}\quad,\quad I=\frac{1}{3}m(2\mathbf{l})=\frac{4}{3}m\mathbf{l}^2$$

در نتیجه فاصله مرکز نوسان از محل آویز (L) به طریق زیر به دست می آید:

$$L=\frac{I}{md}=\frac{\frac{4}{3}m\ell^2}{m\ell}=\frac{4}{3}\ell$$

57- گزینه «1»

$$-m\underbrace{\sin(30^\circ+\theta)}_{\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta}\times\frac{\ell}{2}=I\ddot{\theta}\Rightarrow\ddot{\theta}+\frac{mg\ell}{2I}\left(\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)=0$$

در زوایای کوچک می توان از تقریب های $\sin\theta\approx\theta$ , $\cos\theta\approx 1$ استفاده نمود. با استفاده از معادله بالا داریم:

$$\ddot{\theta}+\frac{mg\ell}{2I}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\theta\right)=0$$

جمله $\frac{mg\ell}{4I}$ ثابت است و در فرکانس نوسان تاثیری ندارد. لذا مشابه معادله نوسانگر هارمونیک ساده، فرکانس را به آسانی می توان محاسبه کرد:

$$\omega=\sqrt{\frac{\sqrt{3}mg\ell}{4I}}=\sqrt{\frac{\sqrt{3}mg\ell}{\frac{4}{3}m\ell}}=\sqrt{\frac{3\sqrt{3}g}{4\ell}}$$

فرکانس $\quad \nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{3\sqrt{3}g}{4\ell}}$

58- گزینه «1»

$$\sum F=ma\Rightarrow 2F_1\cos\theta=m\ddot{x}$$

$$2\times\frac{GMm}{(a^2+x^2)}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=m\ddot{x}$$

در نوشتن رابطه بالا از روابط زیر استفاده کردیم:

$$r=(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow F=\frac{GMm}{r^2}=\frac{GMm}{(a^2+x^2)}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

با استفاده از رابطه $2\times\frac{GMm}{(a^2+x^2)}.\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = m\ddot{x}$ داریم:

$$2\frac{GMm}{a^2(1+(\frac{x}{a})^2)}.\frac{x}{a\sqrt{1+(\frac{x}{a})^2}} = \ddot{x} \Rightarrow \frac{2GMm}{a^3(1+(\frac{x}{a})^2)^{\frac{3}{2}}} = \ddot{x}$$

چون نوسانات کم دامنه هستند داریم: $\frac{x}{a} << 1$ در نتیجه:

$$\ddot{x} \approx \frac{2GM}{a^3} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2GM}{a^3}}$$

59- گزینه «3»

بسامد یک آونگ ساده که روی سطح زمین نوسان می کند برابر است با $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}$، که در آن $\ell$ طول آونگ ساده و g شتاب جاذبه در سطح زمین است. اما برای آونگی که در آسانسور نوسان می کند کافی است به جای g قرار دهیم $g \pm a$ که a شتاب آسانسور است. علامت (+) مربوط به زمانی است که آسانسور به طرف پایین حرکت مـی کنـد و علامـت (-) مربوط به حرکت رو به بالای آسانسور است. پس داریم:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g-a}{\ell}} = \frac{1}{2\times 3/14}\sqrt{\frac{9/8-2}{2}} = \frac{1/97}{6/28} = 0/31(Hz)$$

60- گزینه «1»

$$F\ell + mg\frac{\ell}{2} = I\ddot{\theta} \Rightarrow -k\ell^2\theta + mg\frac{\ell}{2} = \frac{1}{3}m\ell^2\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{3k}{m}\theta - \frac{3g}{2\ell} = 0$$

جمله $\frac{3g}{2\ell}$ ثابت است و سهمی در فرکانس نوسان ندارد. مشابه معادله نوسانگر هماهنگ ساده ، می‌توان فرکـانس زاویـه ای را به آسانی محاسبه نمود:

$$\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$$

61- گزینه «2»

$$k_{tot} = k_1 + k_2$$

بسامد نوسان برابر است با:

$$v = \frac{w}{2p}$$

$w$ در رابطه بالا عبارت است از بسامد زاویه ای نوسان که برای نوسانات وزنه و فنر از رابطـه مقابـل محاسـبه مـی شـود:

$$w = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

با توجه به روابط بالا داریم:

$$v = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{k_{tot}}{M}} = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{M}}$$

62- گزینه «4»

شکلی که در مسئله آمده در واقع یک آونگ فیزیکی است. بسامد زاویه ای یک آونگ فیزیکی از رابطه $w = \sqrt{\frac{mg\mathbf{l}}{I}}$ بـه دست می آید که در آن m جرم آونگ فیزیکی، $\mathbf{l}$ فاصله محور از مرکز قرص و I لختی دورانی قـرص نسـبت بـه محـور آویز (نقطه A) است. از آنجایی که در این مسئله $\mathbf{l}$ متغیر است، برای بیشینه شدن بسامد زاویه ای نوسانات کافی اسـت $\frac{dw}{d\mathbf{l}}$ را محاسبه کرده و برابر صفر قرار دهیم. داریم:

$$w = \left(\frac{mg\mathbf{l}}{I}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{mg\mathbf{l}}{\frac{1}{2}mR^2 + m\mathbf{l}^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2g\mathbf{l}}{R^2 + 2\mathbf{l}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1) \quad \Rightarrow \frac{dw}{d\mathbf{l}} = \frac{2g(R^2 + 2\mathbf{l}^2) - 4\mathbf{l}(2g\mathbf{l})}{\sqrt[2]{\frac{2g\mathbf{l}}{R^2 + 2\mathbf{l}^2}}}$$

$$\frac{dw}{d\mathbf{l}} = \mathbf{0} \Rightarrow 2g(R^2 + 2\mathbf{l}^2) - 4\mathbf{l}(2g\mathbf{l}) = \mathbf{0} \Rightarrow 2gR^2 + 4g\mathbf{l}^2 - 8g\mathbf{l}^2 2g(R^2 + 2\mathbf{l}^2)$$

$$\Rightarrow 2gR^2 - 4g\mathbf{l}^2 = \mathbf{0} \Rightarrow 2g(R^2 + 2\mathbf{l}^2) = \mathbf{0} \Rightarrow R^2 = 2\mathbf{l}^2 \Rightarrow \mathbf{l} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

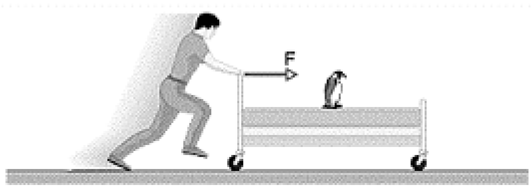
اکنون کافی است مقدار به دست آمده برای $\mathbf{l}$ را در رابطه (1) جایگذاری کنیم تا بسامد زاویه ای بیشینه محاسبه شود.

$$w = \left(\frac{\frac{2gR}{\sqrt{2}}}{R^2 + \frac{2R^2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\frac{2gR}{\sqrt{2}}}{2R^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{g}{\sqrt{2}R}\right)^{\frac{1}{2}}$$

## فصل ششم: **کار و انرژی**

اگر نیروهای وارد بر ذره ثابت باشد، براحتی می‌توان از قانون دوم نیوتن شتاب و با استفاده از معادلات حرکت با شتاب ثابت، مکان و سرعت را به صورت تابعی از زمان بدست آورد.اگر نیروها ی وارد بر ذره ثابت نباشد، شتاب نیز ثابت نیست و فرمول‌های حرکت با شتاب ثابت صادق نیست در این صورت باید از روش‌های انتگرال‌گیری استفاده کنیم. اگر نیروهای وارد بر ذره تابع مکان ذره باشد مانند نیروی گرانش و نیروی فنر از مفاهیم کار و انرژی می‌توان برای پیدا کردن سرعت ذره استفاده کرد.

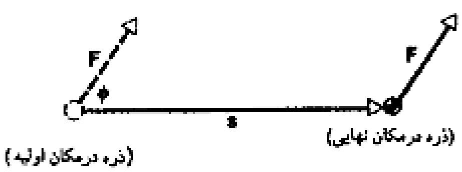
ما کار $W$ نیروی ثابت $\vec{F}$ که جسم را به اندازه $\vec{s}$ در جهت نیرو به حرکت در می‌آورد به صورت حاصلضرب اندازه نیرو و جابجایی تعریف می‌کنیم:




$$W = Fs$$

اگر نیروی ثابت وارد بر ذره در امتداد حرکت نباشد بلکه زاویه $\phi$ با امتداد جابجایی بسازد کار نیروی $\vec{F}$ برابر است با:

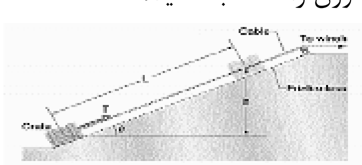
$$W = Fs\cos\phi$$

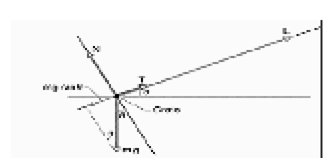



**نکته:** کار کمیتی نرده‌ای است که می‌تواند مثبت، منفی و یا صفر باشد.

**نکته۲:** هنگامی که جسمی را در مقابل سطح زمین بالا می بریم کار مثبت و هنگامی که جسمی را در مقابل سطح زمین پایین می آوریم کار منفی و هنگامی که جسمی را در مقابل سطح در امتداد افق جابجا می‌کنیم کار نیروی عمودی، صفر است.

**مثال:** می‌خواهیم جسمی به جرم 15 کیلوگرم را از سطح شیب دار بدون اصطکاکی به طول d=5/7 متر تا ارتفاع 2/5 متری با نیروی موازی سطح شیب دار با سرعت ثابت بالا ببریم، کار نیروی وزن را محاسبه کنید.



در ابتدا باید مولفه‌ای از نیروی وزن که کار انجام می‌دهد را بدست آوریم، این نیرو، نیروی مولفه موازی بـا سـطح نیـروی وزن می‌باشد:

$$F = mg\sin\theta$$

بنابراین کار این نیرو برابر است با:

$$W = -mg\sin\theta L = -mgh$$
$$\rightarrow W = -(15)(9/8)(2/5) = -368J$$

از آنجایی که کار یک کمیت اسکالر است می‌توان آن را بصورت حاصلضرب نقطه‌ای نیرو در جابجایی نوشت:

$$W = \vec{F}.\vec{s}$$

بنابراین مقدار آن برابر خواهد بود با:

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

**نکته:** به طور کلی مقدار حاصلضرب نقطه‌ای مستقل از انتخاب محورهای مختصات است.

**نکته ۲:** ناظران چارچوب‌های مرجع مختلف همگی یک $\vec{F}$ اما مقادیر جابجایی $\vec{s}$ متفاوت را اندازه می‌گیرنـد. در نتیجـه، مقدار $W$ به چارچوب مرجع لخت ناظر بستگی دارد.

### 7-1- توان:

توان آهنگ زمانی انجام کار است و یک کمیت اسکالر است. اگر کل کار انجام شده را تقسیم بر زمان انجام آن کنیم توان متوسط بدست می‌آید. اگر نیرویی خاص کار $W$ را بر روی یک جسم در زمان $t$ انجام دهد، توان متوسط ناشـی از ایـن نیرو برابر است با:

$$P_{av} = \frac{W}{t}$$

توان در هر لحظه را توان لحظه‌ای می نامند و مقدار آن برابر است با:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

در دستگاه SI (سسیتم بین المللی) واحد توان، وات است که برابر یک ژول بر یک ثانیه است. گاهی از واحد اسـب بخـار استفاده می شود. کار را بر حسب یکاهای توان ضربدر زمان نیز می توان بیان کرد. مثلاً کیلو وات ساعت.

می توان توان لحظه ای را به صورت ضرب نقطه ای زیر نیز نوشت:

$$P = \vec{F}.\vec{v}$$

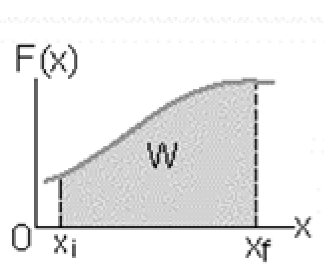
## 7-2- کار نیروی متغیر:

تاکنون فقط کاری را در نظر گرفتیم که نیروی ثابت انجام می‌دهد. اما اندازه بسیاری از نیروها با جابجایی جسم تغییر می‌کند و بنابراین باید چگونگی ارزیابی کار این نیروها را بررسی کنیم.

فرض می‌کنیم که نیرو تابعی از مکان باشد، $F(x)$ ، کار این نیرو روی جسم هنگامی که جسم از نقطه $x_i$ به نقطه $x_f$ جابجا می‌گردد برابر است با:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)dx$$

کار نیرو ی متغیر برابر سطح زیر منحنی $F(x)$ و دو خط $x = x_i$ و $x = x_f$ است



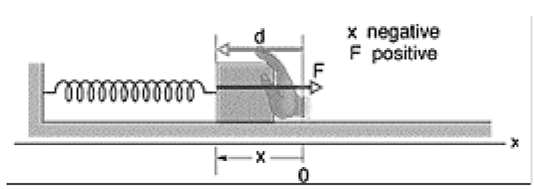

به عنوان مثالی از کار نیروی متغیر، کار نیروی فنر را محاسبه می‌کنیم:

طبق قانون هوک هر گاه انتهای فنری را به اندازه $x$ نسبت به وضعیت تعادلش بکشیم و یا بفشاریم، فنر بر عاملی که باعث تغییر طول آن می‌شود نیرویی متناسب با تغییر طول وارد می‌کند:

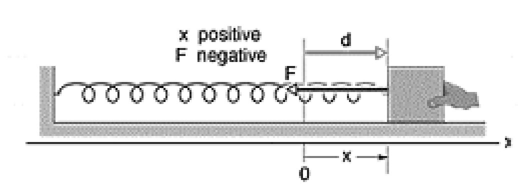
$$F_s = -kx$$

در این رابطه $k$ ضریبی است که ثابت فنر نامیده می‌شود.

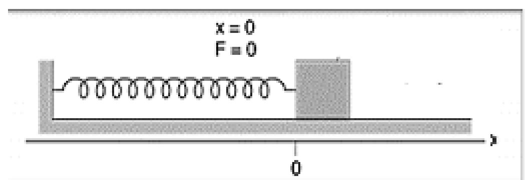
وقتی فنر فشرده می شود $x<0$ و $F$ مثبت است.



وقتی فنر کشیده می شود $x>0$ و $F$ منفی است




وقتی فنر در حالت تعادل است $x=0$ و $F=0$ است




کار نیروی فنر درجابجایی انتهای آزاد آن از نقطه $x_i$ به نقطه $x_f$ برابر است با:

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = -k\int_{x_i}^{x_f} x dx$$
$$= (-\frac{1}{2}k)\left[x^2\right]_{x_i}^{x_f} = (-\frac{1}{2}k)({x_f}^2 - {x_i}^2)$$

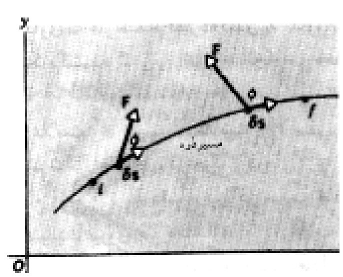
اگر $x_i = 0$ و $x_f = x$ باشد. این کار برابر است با:

$$W_s = -\frac{1}{2}kx^2$$

### 7-3- کار یک نیروی متغیردر مسیر خمیده:

اگر نیرو هم از لحاظ اندازه و هم جهت تغییر کند و اگر جابجایی جسم یک مسیر خمیده باشد در این صورت کار نیرو در جابجایی جسم از نقطه $r_i$ تا نقطه $r_f$ برابر است با:

$$W = \int_i^f (F_x dx + F_y dy)$$



### 7-4- انرژی جنبشی و قضیه کار-انرژی:

انرژی جنبشی یک جسم طبق تعریف برابر است با :

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

انرژی جنبشی همان ابعاد کار را دارد و آن را با همان یکاهای کار اندازه می‌گیریم. انرژی جنبشی مانند کار کمیتی اسکالر است.

**قضیه کار-انرژی:** کار خالصی که نیروهای وارد بر یک جسم انجام می‌دهند با تغییر انرژی جنبشی آن جسم برابر است. بیان ریاضی این قضیه برابر است با:

$$W = \Delta K = K_f - K_i$$

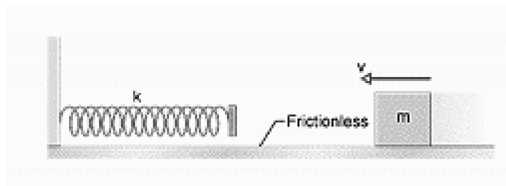
**نکته:** قضیه کار-انرژی، مانند قانون دوم نیوتون که در بدست آوردن آن بکار می‌رود، فقط در مورد ذرات یا اجسامی به کار می‌رود که رفتار ذره‌ای دارند.

**نکته۲:** اگر اندازه سرعت یک جسم ثابت باشد، تغییر انرژی جنبشی وجود ندارد و در نتیجه نیروی برایند کاری انجام نمی‌دهد.

### اثبات کلی قضیه کار-انرژی:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = \int_{x_i}^{x_f} madx$$
$$madx = m\frac{dv}{dt}dx$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v$$
$$madx = m\frac{dv}{dx}vdx = mvdv$$
$$W = \int_{v_i}^{v_f} mvdv = m\int_{v_i}^{v_f} vdv$$
$$= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = K_f - K_i = \Delta K$$

**مثال۱:** جسمی به جرم7/5 کیلوگرم با سرعت ثابت 1/2 متر بر ثانیه روی یک میز افقی بدون اصطکاکی مـی لغـزد. ایـن جسم با متراکم کردن یک فنر به حال سکون در می آید، اگر ثابت نیروی فنر 4 نیوتن بر متر باشد فنر چقدر متراکم می شود؟



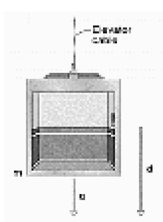

$$W_s = -\frac{1}{2}kd^2$$

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2}mv^2$$

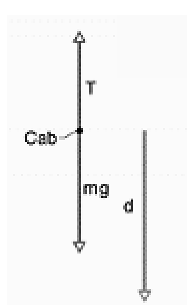
$$d = v\sqrt{\frac{m}{k}} = (1.2)\sqrt{\frac{5.7}{1500}}$$

$$= 7/4\times10^{-2}\,cm = 7/4\,cm$$

**مثال۲:** آسانسوری به جرم 500 کیلوگرم با سرعت 4 متر بر ثانیه به سمت پایین در حرکت است. کابل آسانسور ناگهـان شل می‌شود و آسانسور با شتاب 1/5g به سمت پایین حرکت می‌کند. در طی سقوط آن در فاصـله 12 متـری سـقوط، مطلوب است : الف) کار انجام شده روی آسانسور توسط نیروی وزن ب) کار انجام شده توسط نیروی کابـل ج) کـار کـل انجام شده روی آسانسور د) نشان دهید که کار بر آیند نیروها برابر کار کل انجـام شـده روی آسانسـور اسـت. ه) انـرژی جنبشی و سرعت آسانسور در پایان 12 متر سقوط.



الف)

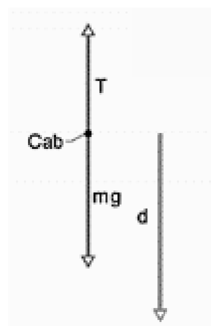



$$W_1 = mgd\cos 0 = (500)(9/8)(12)(1)$$

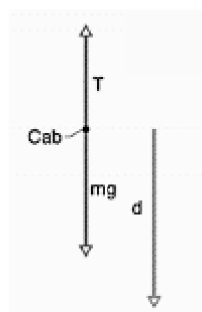
$$= 5.88\times10^4\,J \approx 5/9\times10^4\,J$$

ب)

$$\sum F = T - mg = ma$$
$$T = m(g+a) = m(g - g/5)$$
$$= (500)(\frac{4}{3})(9/8) = 3920N$$
$$W_2 = Td\cos 180 = (3920)(12)(-1)$$
$$= -4/70 \times 10^4 J$$

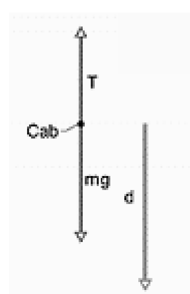



ج)




$$W = W_1 + W_2 = 5/88 \times 10^4 - 4/7 \times 10^4$$
$$= 1/18 \times 10^4 J$$

د)




$$\sum F = ma = (500)(\frac{9/8}{5}) = -980N$$
$$W = (980)(12)\cos 0$$
$$= 1/18 \times 10^4 J$$

ه)

$$K_i = \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}(500)(4)^2 = 4000J$$
$$K_f = K_i + W = 4000 + 1/18 \times 10^4$$
$$= 1/6 \times 10^4 J$$
$$K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$$
$$v_f = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = \sqrt{\frac{(2)(1/58 \times 10^4)}{500}} = 7.9m/s$$

**محدودیت‌های قضیه کار-انرژی:**

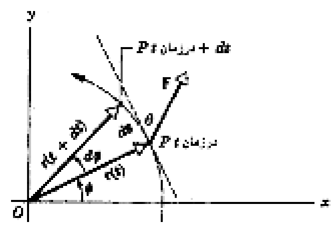
1) در استفاده از قضیه کار-انرژی فقط زمانی می توان اجسام را گسترده در نظر گرفت که انرژی آن‌ها صرفاً از نوع انرژی جنبشی باشد.

2) در حالت کلی درست نیست که قضیه کار-انرژی را برای اجسامی که نیروی اصطکاک به آن‌ها وارد می شود به کار بریم.

### 7-5- کار و انرژی جنبشی در حرکت چرخشی:

تاکنون در این فصل فقط حرکت انتقالی را در نظر گرفتیم. در این بخش بحث خود را به کـار و انـرژی جنبشـی اجسـام چرخان گسترش می‌دهیم.

جسم صلب دلخواهی را در نظر می‌گیریم که نیروی $\vec{F}$ در فاصله $r$ از محور چرخش به آن وارد می‌شود، و جسم به انـدازه $d\theta$ جابجا می‌شود. در اینصورت کار $dW$ این نیرو برابر است با:




$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau_z d\theta$$

که در آن $\tau_z = rF\sin\theta$ مولفه گشتاور نیروی $\vec{F}$ دور محور $z$ است.

اگر با چرخش جسم در زاویه $\theta = \theta_f - \theta_i$ گشتاور نیرو ثابت بماند، کاری که این گشتاور روی جسم انجام می‌دهـد برابـر است با:

$$W = \tau_z \theta$$

توان لحظه‌ای که صرف حرکت چرخشی می‌شود را می‌توان از معادله زیر بدست آورد:

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau_z \omega_z$$

که $\omega_z = \frac{d\theta}{dt}$ سرعت چرخش دور محور $z$ است.

انرژی جنبشی کل جسم صلب دارای حرکت چرخشی محض برابر است با:

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + ...$$
$$= \sum\frac{1}{2}m_iv_i^2 = \sum\frac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2 = \frac{1}{2}(\sum m_ir_i^2)\omega^2$$

پس انرژی جنبشی بر حسب لختی دورانی عبارت است از:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

شکل چرخشی قضیه کار-انرژی درست مانند شکل انتقالی آن برابر است با:

$$W = \Delta K$$

**نکته:** به طور کلی، کار انجام شده روی جسم می‌تواند با هر دو حرکت انتقالی و چرخشی همراه باشد. در این مورد $W$ نشانگر کار کل انجام شده روی جسم، و $\Delta K$ شامل مجموع جمله‌های انتقالی و چرخشی است.

### 7-6- انرژی جنبشی در برخوردها:

در یک برخورد کشسان، انرژی جنبشی کل دو جسم ثابت می‌ماند؛ یعنی، انرژی جنبشی کل پیش از برخورد با انرژی جنبشی کل پس از برخورد برابر است.

$$K_i = K_f$$

در برخورد ناکشسان، کل انرژی جنبشی نهایی از کل انرژی جنبشی اولیه کمتر است. گرچه انرژی جنبشی کل کاهش می‌یابد، اما تکانه خطی کل پایسته می‌ماند.

در یک برخورد انفجاری، کل انرژی جنبشی نهایی از کل انرژی جنبشی اولیه بیشتر است. باز هم، تکانه خطی ثابت می‌ماند، اگرچه انرژی جنبشی افزایش می‌یابد.

**مثال۱- الف)** به چه نسبتی انرژی جنبشی یک فوتون ( به جرم $m_1$) در برخورد کشسان رو دررو با یک هسته اتم ( به جرم $m_2$) که ابتدا ساکن است کاهش می یابد

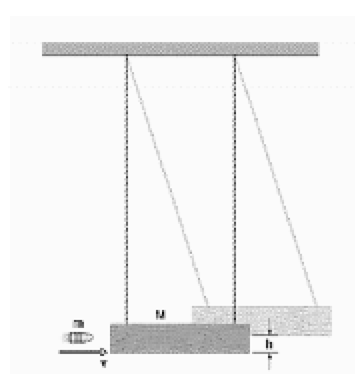
$$K_i = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2$$
$$K_f = \frac{1}{2} m v_{1f}^2$$
$$frac = \frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{v_{1i}^2 - v_{1f}^2}{v_{1i}^2} = 1 - \frac{v_{1f}^2}{v_{1i}^2}$$
$$\frac{v_{1f}}{v_{1i}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$
$$frac = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

ب) کاهش نسبی انرژ ی جنبشی نوترون را هنگامی که به این طریق با هسته سرب ، هسته کربن و هسته ئیدروژن برخورد می کند پیدا کنید.

$$frac = \frac{(4)(2/6)}{(1+2/6)^2} = 0/019 = 19\%$$
$$frac = \frac{(4)(12)}{(1+12)^2} = 0/28 = 28\%$$
$$frac = \frac{(4)(1)}{(1+1)^2} = 1 = 100\%$$

**۷-۶-۱- آونگ بالستیک**:

گلوله ای به جرم $m$ به قطعه چوب بزرگی مطابق شکل برخورد کاملاً الاستیک می کند و در آن فرو می رود و مجموعه به اندازه $h$ بالا می رود سرعت گلوله را بدست آورید

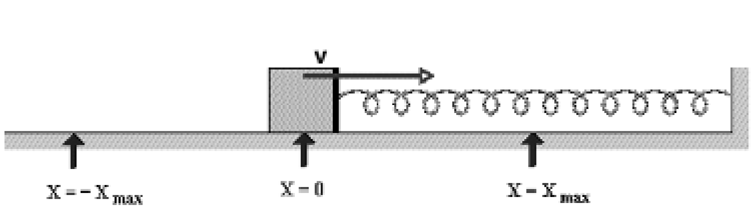


$$mv = (M+m)V$$
$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 = (M+m)gh$$
$$v = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gh}$$

7-7- **انرژی پتانسیل**:

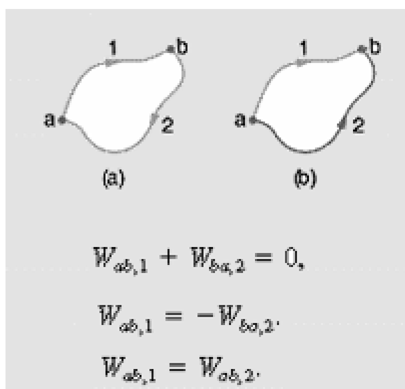
انرژی پتانسیل فقط برای گروه خاصی از نیروها تعریف می‌شود که نیروهای پایستار نامیده می‌شوند. یک نیرو هنگامی پایستار است که کار انجام شده توسط آن روی یک ذره در یک مسیر بسته صفر باشد. در غیر این صورت نیرو نا پایستار است.

مثلا نیروی فنر  پایستار است. چون مطابق شکل با فرض نبود اصطکاک جسم هنگام بر گشت به نقطه شروع، همان سرعت اولیه را دارد.

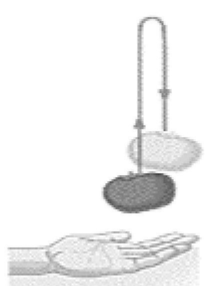



در این شکل، بر طبق قضیه کار– انرژی، کار برآیند نیرو ها صفر است چون تغییر انرژی جنبشی ذره صفر است، پس نیروی فنر پایستار است.

طریقه دیگر بیان نیروی پایستار: کار نیروی پایستار به مسیر طی شده بستگی ندارد. اگر نیروی وارد بر ذره پایستار باشد کار آن در دو مسیر شکل زیر یکسان است.




یکی دیگر از نیروهای پایستار نیروی گرانشی است. چون مطابق شکل با فرض نبود اصطکاک، جسم هنگام بر گشت به نقطه شروع همان سرعت اولیه  را دارد.



انرژی پتانسیل یک دستگاه معرف شکلی از انرژی ذخیره شده است که می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد و به انرژی جنبشی تبدیل شود. انرژی پتانسیل $U$ انرژی وابسته به پیکربندی دستگاه است. منظور از پیکربندی، چگونگی قرار گرفتن بخش‌های دستگاه یا ترتیب آن‌ها نسبت به یکدیگر است. وقتی نیرویی پایستار در یک دستگاه کار انجام می‌دهد، پیکربندی بخش‌های مختلف آن تغییر می‌کند، و در نتیجه انرژی پتانسیل ان از مقدار اولیه $U_i$ به مقدار نهایی $U_f$ تغییر می‌کند. تغییر انرژی پتانسیل مربوط به تک نیرو را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Delta U = U_f - U_i = -W$$

چون کار انجام شده توسط یک نیروی پایستار فقط به نقاط ابتدایی و انتهایی حرکت بستگی دارد، کار این چنین نیرویی فقط به موضع ذره بستگی دارد پس:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx$$

**بر طبق قضیه کار –انرژی:**

$$W = \Delta K = -\Delta U$$
$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^{x} F(x)dx$$

رابطه بین یک نیروی پایستار و انرژی پتانسیل منتسب به آن برابر است با:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

یعنی، انرژی پتانسیل تابعی از مکان است که منفی مشتق آن نیرو را می‌دهد.

محاسبه انرژی پتانسیل برای دو نمونه از نیروهای پایستار، یعنی نیروی گرانش و نیروی کشش فنر:

**الف ) انرژی پتانسیل گرانشی:**

$$\Delta U = -\int_{y_f}^{y_i} (-mg)dy = mg\int_{y_i}^{y_f} dy = mg[y]_{y_i}^{y_f}$$
$$\Delta U = mg(y_f - y_i) = mg\Delta y$$
$$U - U_i = mg(y - y_i)$$
$$U = mgy$$

ب ) انرژی پتانسیل کشسانی:

$$\Delta U=-\int_{x_i}^{x_f}(-kx)dx=k\int_{x_i}^{x_f}x\,dx=\frac{1}{2}\left[x^2\right]_{x_i}^{x_f}$$

$$\Delta U=-\frac{1}{2}kx_f{}^2-\frac{1}{2}kx_i{}^2$$

$$U-0=\frac{1}{2}kx^2-0$$

$$U=\frac{1}{2}kx^2$$

### 7-8- پایستگی انرژی مکانیکی:

اگر در طول حرکت جسم فقط نیروی پایستار بر جسم وارد گردد، مجموع انـرژی پتانسـیل و جنبشـی در حـین حرکـت ثابت است که آن را انرژی مکانیکی می نامند.

تغییر کل انرژی جنبشی همه ذره‌هایی که دستگاه را تشکیل می‌دهند از لحاظ اندازه برابر، و دارای علامت مخالف تغییر کل انرژی پتانسیل دستگاه است، یا:

$$\Delta K=-\Delta U$$

این رابطه را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\Delta U+\Delta K=0$$

یعنی هر تغییری در انرژی جنبشی کل دستگاه باید با تغییری برابر و با علامت مخالف در انرژی پتانسیل متوازن شود، به طوری که مجموع این تغییرات صفر شود.

یعنی، وقتی فقط نیروهای پایستار اثر می‌کنند، تغییر کمیت $K+U$ صفر است. این کمیت را انرژی مکانیکی کل دستگاه درنظر می‌گیریم:

$$E=K+U$$

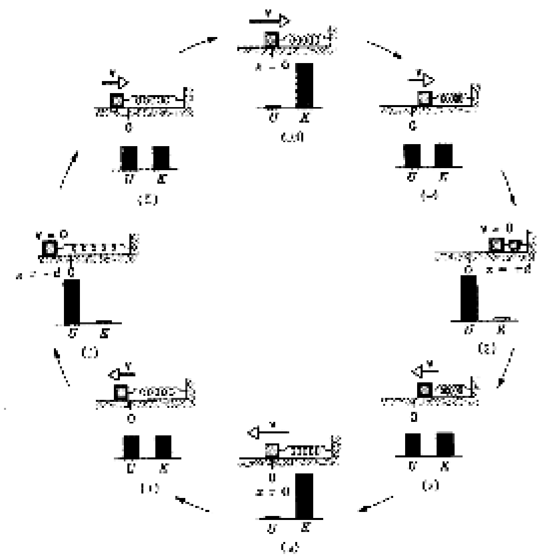
اگر تغییر در هر کمیت صفر باشد، آن کمیت باید ثابت بماند، بنابراین داریم:

$$E_i=E_f$$
$$\rightarrow K_i+U_i=K_f+U_f$$

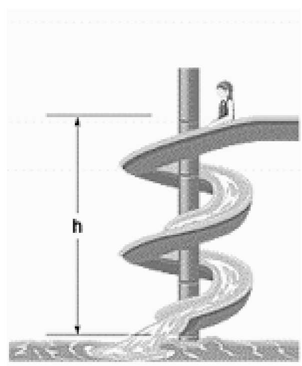
یعنی مقدار اولیه انرژی مکانیکی کل با مقدار نهایی آن برابر است. رابطه بالا گزاره ریاضی قانون پایستگی انرژی مکانیکی است:

در یک دستگاه منزوی که در آن فقط نیروهای پایستار اثر می‌کنند، انرژی مکانیکی کل ثابت می‌ماند.

مثالی از پایستگی انرژی مکانیکی کل را در شکل زیر مشاهده می‌کنید.

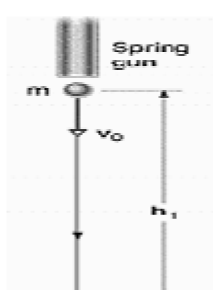


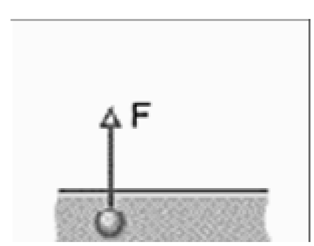
**مثال۱:** بچه‌ای مطابق شکل از ارتفاع 5/8 متری به پایین می‌لغزد. با فرض اینکه اصطکاک وجود ندارد، سرعت در انتهای مسیر چقدر است؟




$$K_b + U_b = K_t + U_t$$
$$\frac{1}{2}mv_b^2 + mgy_b = \frac{1}{2}mv_t^2 + mgy_t$$
$$v_b^2 = v_t^2 + 2g(y_t - y_b)$$
$$v_b = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9/8)(8/5)}$$
$$= 13m/s$$

**مثال۲:** گلوله ای به جرم 5/2 کیلوگرم مطابق شکل از توپی در ارتفاع 18 متری با سرعت اولیه 14 متر برثانیه شلیک می‌شود و به اندازه 21 سانتیمتر در شن فرو می‌رود. با صرف نظر کردن از نیروی مقاومت هوا کار نیروی مقاومت شن و اندازه نیروی مقاومت متوسط وارد بر جسم از طرف شن را تعیین کنید.



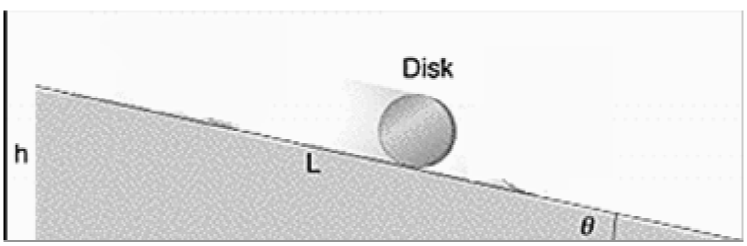
$$\Delta E=(0-\frac{1}{2}mv_0^2)-mg(h_1+h_2)$$
$$\Delta E=12(5/2\times10^{-3})(14)-(5/2\times10^{-3})(9/8)(18+0/21)$$
$$=-1/437J$$
$$-Fh_2=\Delta E$$
$$F=\frac{\Delta E}{-h_2}=\frac{-1/437}{-0/21}=6/8N$$

### 7-9- پایستگی انرژی در حرکت چرخشی:

قانون پایستگی جداگانه‌ای برای حرکت چرخشی وجود ندارد؛ بلکه انرژی‌های جنبشی می‌توانند حاوی هر دو جمله چرخشی و انتقالی باشد. بنابراین برای انرژی جنبشی در این حالت داریم:

$$K=\frac{1}{2}Mv_{cm}^2+\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

**مثال**: استوانه تو پری به جرم $m$ وشعاع $R$ از یک سطح شیب دار به پایین می غلتد سرعت مرکز جرم را در پایین سطح شیبدار پیدا کنید.




برای حل این مسئله می‌توان از اصل پایستگی انرژی استفاده کرد

$$Mgh=\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2+\frac{1}{2}Mv^2$$

که در آن $v$ سرعت خطی مرکز جرم و $w$سرعت زاویه‌ای حول مرکز جرم در پایین سطح شیبدار است.

$$I_{cm}=\frac{1}{2}MR^2 \text{ و } \omega=\frac{v}{R}$$

$$Mgh = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)(\frac{v}{R})^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = (\frac{1}{4}+\frac{1}{2})Mv^2$$
$$v^2 = \frac{4}{3}gh \Rightarrow v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

### 7-10- دستگاههای پایستار یک بعدی: حل کامل:

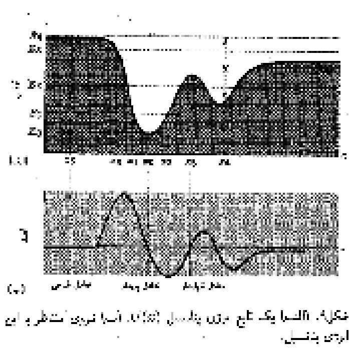
دستگاهی یک بعدی را با نیرویی در نظر می‌گیریم که فقط تابع مکان باشد. بـه ایـن نیـرو تـابع انـرژی پتانسـیل $U(x)$ وابسته است، که آن هم به مختصات بستگی دارد. در اینصورت داریم:

$$E = K + U$$
$$U(x) + \frac{1}{2}m{v_x}^2 = E$$

و از حل آن برای $v_x$ بدست می‌آوریم:

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$$

اگر $U(x)$ را برحسب $x$ رسم کنیم ، توصیف کیفی خوبی از حرکت می‌توان بدست آورد.



### ۷-۱۰-۱- جواب عمومی برای $x(t)$:

اگر بتوانیم $x(t)$ را بدست آوریم، همه چیز درباره رفتار بعدی ذره را می‌دانیم. اگر ابتدا شتاب را پیدا کنیم، می‌توانیم این تابع را با استفاده از قانون‌های نیوتون بدست آوریم. با استفاده از رابطه زیر داریم:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}$$
$$\rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}}$$

فرض می‌کنیم ذره در ابتدا در $t=0$ در $x=x_0$ قرار دارد، و در زمان $t$ به مکان نهایی $x$ می‌رسد، بنابراین با انتگرال‌گیری از طرف چپ رابطه بالا داریم:

$$t=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\left[\frac{2}{m}(E-U(x)\right]}}$$

به عنوان مثالی از این روش این معادله را برای ذره‌ای حل می‌کنیم که نیروی فنر بر آن وارد می‌شود که برای آن $U(x)=\frac{1}{2}kx$، در اینصورت داریم:

$$t=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[\frac{1}{2}kx_0^2-\frac{1}{2}kx^2\right]}}$$
$$=\pm\sqrt{\frac{m}{k}}\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{x_0^2-x^2}}$$

حاصل این انتگرال برابر است با:

$$t=\pm\sqrt{\frac{m}{k}}\left[-\cos^{-1}\left(\frac{x}{x_0}\right)\right]$$

با کمی دست‌کاری می‌توان این عبارت را برای $x$ حل کرد و به دست آورد:

$$x=x_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

بنابراین، حرکت یک بعدی ذره‌ای که نیروی فنر بر آن وارد می‌شود یک نوسان سینوسی است.

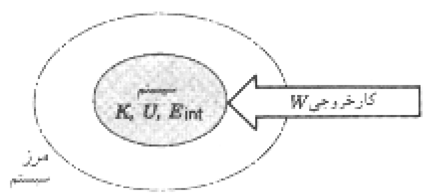
### 7-11- پایستگی انرژی در حالت کلی:

تاکنون پایستگی انرژی را در دستگاه‌هایی بررسی کردیم که هیچ کار خارجی روی دستگاه انجام نمی‌گرفت و فقط نیروهای پایستار بین اجزای آن اعمال می‌شد. در این جا دستگاه‌هایی از ذرات را بررسی می‌کنیم که برای آن‌ها با انجام کار خارجی بر روی دستگاه می‌توان انرژی را تغییر داد. می‌دانیم که در یک دستگاه منزوی، انرژی مکانیکی کل ثابت می‌ماند. در این بخش می‌خواهیم این رهیافت را به راههای مختلف بسط دهیم. دستگاه‌هایی را در نظر می‌گیریم که در

آنها: 1) نیروهای خارجی بتوانند انرژی مکانیکی کل را تغییر دهند؛ 2) انرژی را بتوان به‌صورت داخلی در حرکت‌ها و برهمکنش‌های بین اتم‌ها و مولکول‌های تشکیل‌دهنده دستگاه ذخیره کرد؛ 3) نیروهای ناپایستار، به‌ویژه نیروهای اصطکاک، بتوانند وارد شوند؛ 4) انرژی را بتوان با انتقال گرما تغییر داد. در هر مورد مفهوم انرژی و قانون پایستگی انرژی را می‌توان بسط داد تا شامل این اثرها شود.

**۷-۱۱-۱-کار نیروهای خارجی بر روی دستگاه**

دستگاه شکل زیر را در نظر می‌گیریم که کار خارجی $W$ بر روی آن انجام می‌شود. می‌توان تصور کرد که کار خارجی وسیله لازم برای تبادل انرژی بین دستگاه و محیط را فراهم می‌آورد. انجام کار خارجی مثبت روی دستگاه انرژی را وارد دستگاه می‌کند، در نتیجه انرژی کل آن افزایش می‌یابد؛ از طرف دیگر، انجام کار خارجی منفی محیط روی دستگاه، انرژی را از دستگاه خارج می‌کند و در نتیجه انرژی کل آن کم می‌شود.




قانون پایستگی انرژی در این حالت برابر است با:

$$\Delta K + \Delta U = W_{ext}$$

که در این رابطه $W_{ext}$ کار خارجی انجام شده بر روی دستگاه است.

**۷-۱۱-۲- انرژی داخلی در دستگاه ذرات:**

دستگاهی را در نظر می‌گیریم که دارای ساختار داخلی است، در این دستگاه، اتفاقاتی رخ می‌دهد که برای یک ذره، که طبق تعریف نمی‌تواند ساختار داخلی داشته باشد، امکان وقوع آن وجود ندارد. می‌توانیم مفهوم انرژی را با این مفهوم گسترش دهیم که دستگاه از تعداد زیادی ذره تشکیل شده است که می‌توانند انرژی را بصورت انرژی داخلی، $E_{int}$ در خود ذخیره کنند. در اینصورت معادله پایستگی انرژی بصورت زیر خواهد بود:

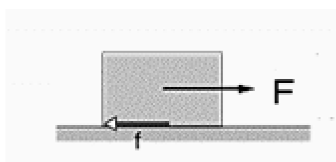
$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = W_{ext}$$

اغلب انرژی داخلی را بصورت مجموع انرژی جنبشی مربوط به حرکت‌های کاتوره‌ای اتم‌ها یا مولکول‌ها و انرژی پتانسیل مربوط به نیروهای بین اتم‌ها و مولکول‌ها در نظر می‌گیریم.

نکته: انرژی می‌تواند در داخل دستگاه از یک شکل به شکل دیگر تبدیل شود. در یک دستگاه منزوی انرژی کل ثابت می‌ماند؛ انرژی کل یک دستگاه را می‌توان با انتقال انرژی به صورت کار خارجی تغییر داد.

**۷-۱۱-۳- کار اصطکاک:**

از آنجا که اصطکاک نیرویی ناپایستار است، بدست آوردن کار حاصل از آن جالب خواهد بود. ممکن است تصور کنیم که کار حاصل از نیروی اصطکاک بر ابر است با: $|W_f| = fs$ اما واقعیت این است که کار نیروی اصطکاک کمتر از این مقدار می‌باشد. برای بدست آوردن آن مثال زیر را در نظر می‌گیریم که قطعه توسط نیروی کشش $\vec{T}$ با سرعت ثابت کشیده می‌شود:




دستگاه را فقط متشکل از قطعه در نظر می‌گیریم، چون قطعه با سرعت ثابت حرکت می‌کند پس: $\Delta K = 0$ هیچ انرژی پتانسیلی در داخل دستگاه وجود ندارد، و نیروی خارجی وارد بر قطعه ناشی از دو نیرو است: نیروی کشش کار مثبت $W_T$ و نیروی اصطکاک کار منفی $W_f$ را انجام می‌دهد. در این مورد معادله پایستگی برابر است با:

$$\Delta E_{int} = W_T + W_f$$

فرض می‌کنیم جابجایی قطعه s باشد. پس $W_T = Ts$ ، با جاگذاری این عبارت در معادله بالا برای کار اصطکاک داریم:

$$W_f = -Ts + \Delta E_{int}$$

بنابراین همانطور که از معادله مشخص است:

$$|W_f| < fs$$

**نکته:** اگر در طی حرکت ذره از a تا b نیروی ناپاستار، مثلاً نیروی اصطکاک ( $f_k$) نیز بر ذره وارد گردد در این صورت از فرمول زیر برای حل مسئله استفاده می کنیم:

$$E_b - E_a = W_{fk}$$

**۷-۱۱-۴- انرژی مرکز جرم:**

در فصل‌های پیش آموختیم که چگونه دستگاه پیچیده متشکل از ذرات بسیار را تحلیل کنیم. با استفاده از معادله $\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}$ نیروی خارجی خالص وارد بر دستگاه به حرکت مرکز جرم آن مرتبط می‌شود. فرض می‌کنیم مرکز جرم به اندازه $dx_{cm}$ جابجا شود. اگر دو طرف رابطه را در این کمیت ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$F_{ext}dx_{cm} = Ma_{cm}dx_{cm} = M\frac{dv_{cm}}{dt}v_{cm}dt$$
$$\to F_{ext}dx_{cm} = Mv_{cm}dv_{cm}$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه داریم:

در نهایت داریم:

$$\int_{x_i}^{x_f} F_{ext}dx_{cm} = \frac{1}{2}Mv^2_{cm,f} - \frac{1}{2}Mv^2_{cm,i}$$

$$F_{ext}s_{cm} = \Delta K_{cm}$$

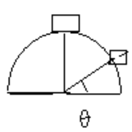
که این معادله معادله انرژی مرکز جرم می‌باشد که به آن (COM) گفته می‌شود. لازم به توجه است که در این رابطه عبارت سمت چپ برابر کار نمی‌باشد زیرا $s_{cm}$ جابجایی نقطه اثر نیرو نیست.

همچنین معادله پایستگی انرژی، یعنی رابطه زیر معروف به رابطه (COE) می‌باشد:

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = W_{ext}$$

**مثال: ذره کوچک مکعبی شکل به جرم m روی بالاترین نقطه نیمکره ساکنی به شعاع R قرار دارد، ذره تحت نیروی بسیار کوچکی (قابل صرفنظر کردن) شروع به لغزیدن بر سطح کره می‌کند. ارتفاعی (نسبت به پایین نیمکره) که در آن جسم از نیمکره جدا می‌شود چقدر است اگر کار نیروی اصطکاک از شروع حرکت تا لحظه جدا شدن $W_f$ باشد.**

1) $\frac{2}{3}R + \frac{|W_f|}{mg}$  2) $\frac{2}{3}R - \frac{|W_f|}{mg}$  3) $\frac{2}{3}(R - \frac{|W_f|}{mg})$  4) $\frac{2}{3}(R + \frac{|W_f|}{mg})$



**گزینه ۳ صحیح می‌باشد**

با توجه به شکل و تعادل نیروهای وارد بر جسم، با استفاده از قانون پایستگی انرژی در حضور یک نیروی ناپایستار یعنی نیروی اصطکاک داریم:

$$E_b - E_a = W_{fk}$$

انرژی مکانیکی را برای نقطه شروع حرکت و نقطه‌ای که مکعب سطح کره را ترک می‌کند می‌نویسیم:

$$mgR - mgh - \frac{1}{2}mv^2 = W_{fk}$$

از طرفی برای حرکت دایره‌ای داریم:

$$F_r = \frac{mv^2}{R} = mg\sin\theta$$

اما با استفاده از شکل داریم:

$$\sin\theta = \frac{h}{R}$$

بنابراین در نهایت برای سرعت داریم:

$$\frac{mv^2}{R} = mg\sin\theta = mg\frac{h}{R} \to v^2 = gh$$

با جاگذاری این مقدار در رابطه بالا داریم:

$$mgR - mgh - \frac{1}{2}mgh = W_{fk}$$

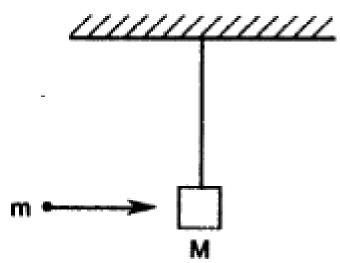
$$mgR - \frac{3}{2}mgh = W_{fk}$$

$$\to h = \frac{2}{3}(R - \frac{|W_{fk}|}{mg})$$

**نمونه سوالات تستی**

**۱- گلوله‌ای به جرم ۱۰ گرم به سمت آونگ بالستیکی به جرم ۲ کیلوگرم شلیک می‌شود، پس از برخورد گلوله در داخل جسم باقی می‌ماند و سیستم تا ارتفاع بیشینه ۲۰ سانتیمتر بالا می‌آید. سرعت اولیه گلوله برابر کدام گزینه خواهد بود؟**

1) 28/.m/s 2) 398m/s 3) 30/98m/s 4) 719m/s

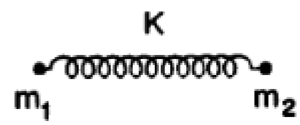



**۲- هنگامی که یک جرم ۴ کیلوگرمی بصورت عمودی از یک فنر سبک که از قانون هوک پیروی می‌کند آویزان می‌شود، فنر به اندازه ۲ سانتیمتر کشیده می‌شود، یک عامل خارجی چقدر باید کار انجام دهد تا فنر را به اندازه ۴ سانتیمتر از وضعیت تعادلش جابجا کند؟**

1) 1/57 ژول 2) 0/39 ژول 3) 0/2 ژول 4) 3/14 ژول

**۳- دو جسم با جرم‌های $m_1 = m_2 = m$ بوسیله فنری با ثابت $k$ به هم وصل شده‌اند، اگر در حالت تعادل فاصله بین آن‌ها برابر $l_0$ باشد و فنر بر روی سطح افقی بـدون اصـطکاکی در حالـت واهلیـده باشـد، در اینصـورت فرکانس زاویه‌ای $\omega_0$ برابر است با؟**

1) $\sqrt{\frac{k}{m}}$ 2) $2\sqrt{\frac{k}{m}}$ 3) $\sqrt{\frac{2k}{m}}$ 4) $\sqrt{\frac{3k}{m}}$

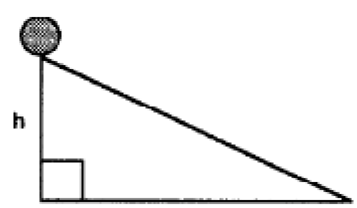



**۴- انرژی کل یک ذره را $E$ در نظر می‌گیریم، انرژی جنبشی آن $T$ و انرژی پتانسیل آن برابر $U$ می‌باشد. اگـر نیرویی که بر این ذره وارد می‌شود پایستار باشد، دیفرانسیل زمانی کل این انرژی برابر کدام گزینه خواهد بود؟**

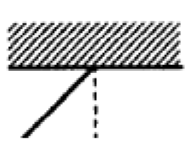
1) $\frac{\partial T}{\partial t}$ 2) $F.v$ 3) $\nabla U$ 4) $\frac{\partial U}{\partial t}$


**۵- یک استوانه دایره‌ای با شعاع $r$ از بالای سطح شیبداری به ارتفاع $h$ به پایین می‌غلتد، نسبت سرعت ایـن استوانه در این مسیر به سرعت جسمی ذره‌ای در همین مسیر برابر کدام گزینه می‌باشد؟**

1) 1 2) $\sqrt{2}$ 3) $\sqrt{3}$ 4) $\sqrt{\frac{2}{3}}$




**۶- آونگی ساده با جرم $m$ تا ارتفاع $h$ بالا می‌آید و سپس رها می‌شود. پس از برخورد با یـک فنـر بـا قـانون نیروی غیر خطی: $F = -kx - bx^3$، میزان فشردگی فنر یعنی $x$ برابر کدام گزینه می‌باشد؟**



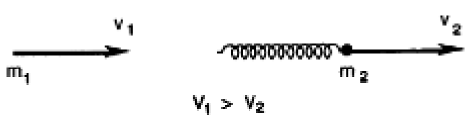
1) $x=\sqrt{\dfrac{2mgh}{k}}$

2) $x=\left[\sqrt{\dfrac{4mgh}{b}+\dfrac{k^2}{b^2}}-\dfrac{k}{b}\right]^{1/2}$

3) $x=\left(\dfrac{4mgh}{b}\right)^{1/4}$

4) $x=\left[\sqrt{\dfrac{4mgh}{b}+\dfrac{k^2}{b^2}}+\dfrac{k}{b}\right]^{1/2}$

**۷- دو جسم به جرمهای $m_1$ و $m_2$ را همانند شکل زیر در نظر بگیرید که بر روی سطح بدون اصطکاکی حرکت می‌کنند. فاصله x فشردگی بیشینه فنر برابر کدام گزینه می‌باشد؟**




1) $\sqrt{\dfrac{m_1}{k}}v_1$

2) $\sqrt{\dfrac{m_2}{k}}v_2$

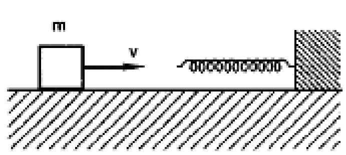
3) $\sqrt{\dfrac{m_1+m_2}{k}}(v_1-v_2)$

4) $\sqrt{\dfrac{m_1m_2}{(m_1+m_2)k}}(v_1-v_2)$

**۸- جسمی به جرم $m=2kg$ را که دارای بردار مکان $r=(3t+5t^3)x$ می‌باشد را تصور کنید. کار انجام شده بر روی این جسم در فاصله زمانی صفر تا ۱ ثانیه برابر کدام گزینه می‌باشد؟**

1) 78 ژول
2) 157 ژول
3) 235 ژول
4) 315 ژول

**۹- مکعبی به جرم m که با سرعت v حرکت می‌کند با فنری با نیروی بازگرداننده $F=-k_1x-k_2x^2$ بر روی سطح بدون اصطکاکی برخورد می‌کند. بیشترین فشردگی فنر برابر کدام گزینه می‌باشد؟**




1) $\dfrac{k_1}{k_2}\left(\sqrt{1+\dfrac{mv^2k_2}{k_1^2}}-1\right)$

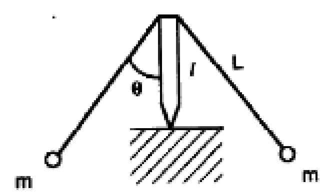
2) $\sqrt{\dfrac{k_1}{k_2}}\left(\sqrt{1+\dfrac{mv^2k_2}{k_1^2}}-1\right)^{\frac{1}{2}}$

3) $\dfrac{k_1}{k_2}\left(\sqrt{1+\dfrac{2mv^2k_2}{k_1^2}}-1\right)$

$\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\left(\sqrt{1+\frac{2mv^2k_2}{k_1^2}}-1\right)^{\frac{1}{2}}$ (4

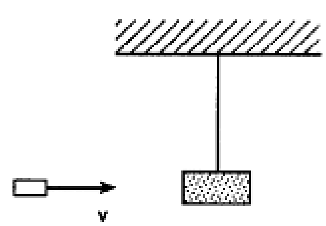
**۱۰- شکل ساده شده یک اسباب بازی بصورت زیر می‌باشد، اگر جرم هر کدام از گلوله‌هـا m و طـول بـازوی آنها برابر L و طول بازوی تکیه‌گاه برابر l باشد، شرط تعادل این دستگاه برابر کدام گزینه خواهد بود؟**

1) $L\cos\theta > l$     2) $\theta < 45^{\circ}$     3) $L\cos\theta > l$     4) $\theta < 30^{\circ}$



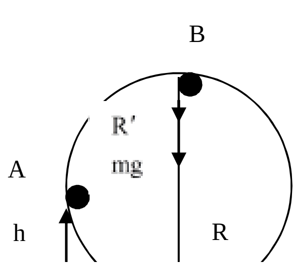

**۱۱- آونگ بالستیک شکل زیر رت در نظر بگیرید که در آن گلوله به جرم ۵ گرم به آونگ برخورد کـرده و در جسم متصل به آونگ به جرم ۱۰۰۰ گرم فرو می‌رود، سرعت اولیه گلوله برابر ۲۰۰۰۰ سانتیمتر بر ثانیه می‌باشد، ارتفاعی که آونگ بالستیک بالا می‌رود برابر کدام گزینه می‌باشد؟**

1) 5/05 سانتیمتر     2) 10/1 سانتیمتر     3) 15/15 سانتیمتر     4) 20/2 سانتیمتر



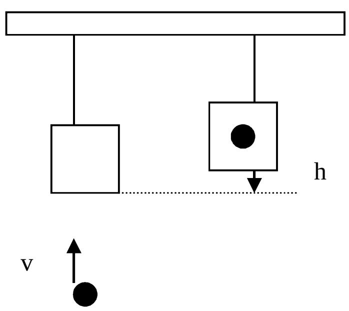

**۱۲- در شکل مقابل مهره‌ای به چگالی یکنواخت می‌غلتد. قطر حلقه ۵۰ سانتیمتر است. حلقه از حال سـکون شروع به حرکت می‌کند و بدون لغزش می‌غلتد. مهره از چه ارتفاعی رها شود تا هیچ وقت از مسیر جدا نشود؟**

1) 0/675 متر     2) 0/765 متر     3) 0/5 متر     4) 0/234 متر



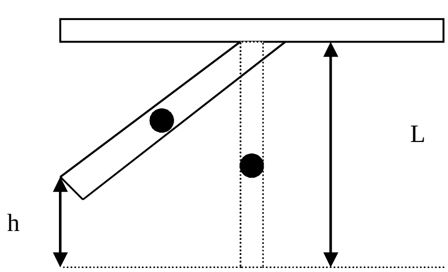
۱۳- گلوله‌ای به جرم ۳۴ گرم به طرف بالا شلیک می‌شود و به داخل قطعه چوبی به جرم ۱/۲۵ کیلوگرم می‌رود. چوب ۶ متر بالا می‌رود. سرعت گلوله هنگاه برخورد با چوب برابر کدام گزینه می‌باشد؟

1) $49/5m/s$  2) $409/5m/s$  3) $59/5m/s$  4) $509/5m/s$




۱۴- در شکل زیر یک سر میله را به طرفی می‌کشیم تا میله با امتداد قائم زاویه ۶۰ درجه بسازد. آن را از حال سکون رها می‌کنیم. اگر طول میله ۱/۲ متر باشد. سرعت زاویه‌ای در پایین‌ترین نقطه مسیر چقدر خواهد بود؟

1) $3/5rad/s$  2) $1/5rad/s$  3) $3rad/s$  4) $4/5rad/s$

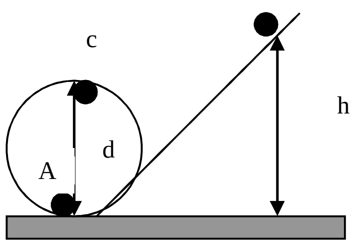



۱۵- در شکل زیر جرم **m** در مسیر بدون اصطکاکی سر می‌خورد. اگر جسم از حال سکون در ارتفاع **h** رها می‌شود. حداکثر مقدار **d** چقدر باشد تا جرم **m** همواره در تماس با مسیر باشد؟

1) $h=\frac{d}{2}$  2) $h=\frac{2d}{3}$  3) $h=d$  4) $h=2d$

۱۶- در شکل زیر $m=0/2kg$، $h=1m$ و $d=0/3m$ است. نیروی وارد بر جسم در نقطه **A** برابر کـدام گزینـه می‌باشد؟

1) $28/1N$ 2) $22/3N$ 3) $16/3N$ 4) $4/43N$



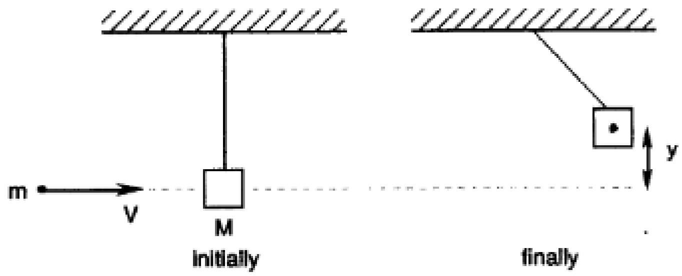

۱۷- ترمز اتومبیلی کار نمی‌کند و با اتومبیل ساکن دیگری برخورد مـی‌کنـد. جـرم اتوموبیـل متحـرک ۹۰۰ کیلوگرم و جرم اتومبیل ساکن ۱۲۰۰ کیلوگرم است. راننده اتومبیل متحرک ادعا می‌کند که پـیش از تصـادف کمتر از $12km/h$ سرعت داشته است. پلیسی که این برخورد را کاملا ناکشسـان بررسـی مـی‌کنـد از علائـم باقیمانده روی سطح خیابان متوجه می‌شود دو اتومبیل پس از برخورد ۰/۸ متـر حرکـت کـرده‌انـد. ضـریب اصطکاک جنبشی بین لاستیک و آسفالت خیابان ۰/۵۸ است. سرعت اتومبیل متحرک قبل از برخورد چقـدر بوده است؟

1) $12km/h$ 2) $25/3km/h$ 3) $30/3km/h$ 4) $15km/h$

## پاسخنامه سوالات تستی

1- گزینه 2 صحیح است.

اگر $v'$ سرعت سیستم مرکب از گلوله و آونگ، درست پس از برخورد باشد، بنابراین با استفاده از قانون پایستگی تکانه خطی داریم:




$$mv = (m+M)v'$$

از پایستگی انرژی داریم:

$$\frac{1}{2}(m+M)V'^2 = (M+m)gy$$

مقداری انرژی در حین برخورد تلف شده و به گرما تبدیل شده است.

$$v = \frac{m+M}{m}v' = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gy}$$

$$\frac{2/010}{0/010}\sqrt{2(9/8)(0/20)} = 398\,m/s$$

2- گزینه 1 صحیح است.

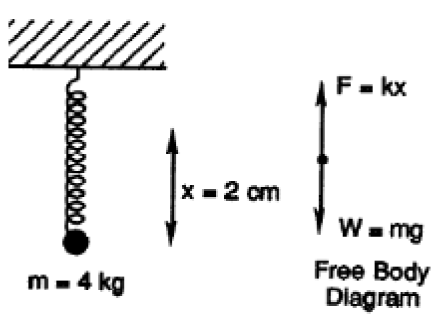
کار انجام شده بوسیله عامل خارجی برابر است با:

$$W = \int_0^x F.dx$$

$$= \int_0^x kxdx$$

$$W = \frac{1}{2}kx^2\Big|_0^{x_0}$$

$$W = \frac{1}{2}kx^2$$



در نمودار جسم آزاد برای جسم آویخته شده، نیروی جاذبه رو به پایین با نیروی روبه بالای کشش فنر در تعادل است،

بنابراین:

$$F = mg = kx$$
$$k = \frac{mg}{x} = \frac{4(9/8)}{0/02} = 1960\ N/m$$

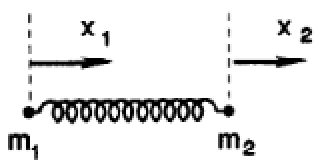
بنابراین در نهایت داریم:

$$W = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(1960)(0/4)^2 = 1/57J$$

3- گزینه 3 صحیح می‌باشد.

بطور کلی با توجه به شکل داریم:

$$m_1x_1'' = -kx$$
$$m_2x_2'' = -kx$$




که در آن داریم:

$$x = x_1 - x_2$$

بنابراین داریم:

$$m(x_1'' - x_2'') = -2kx$$

از آنجایی که داریم:

$x_1'' - x_2'' = x''$ و $m_1 = m_2 = m$

$$mx'' + 2kx = 0$$
$$\rightarrow x'' + \frac{2k}{m} = 0$$

بنابراین:

$$\omega_0^2 = \frac{2k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

4- گزینه 4 صحیح است.

انرژی مکانیکی کل برابر است با:

$$E = T + U$$

دیفرانسیل‌گیری از این رابطه نتیجه می‌دهد:

$$\frac{dE}{dt}=\frac{dT}{dt}+\frac{dU}{dt}$$
$$=F.v+\frac{\partial U}{\partial t}+\sum_j \frac{\partial U}{\partial x_i}x_i'$$
$$=F.v+\frac{\partial U}{\partial t}+\nabla U.v$$

از آنجایی که داریم: $F=-\nabla U$ بنابراین در نهایت داریم:

$$\frac{dE}{dt}=\frac{\partial U}{\partial t}$$

5- گزینه 4 صحیح می‌باشد.

لختی دورانی استوانه برابر است با:

$$I=\int r^2 dm=\frac{1}{2}mr^2$$

با استفاده از پایستگی انرژی داریم:

$$mgh=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$
$$v=r\omega$$
$$\to mgh=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{4}mr^2\frac{v^2}{r^2}$$
$$mgh=\frac{3}{4}mv^2$$
$$\to v_R=2\sqrt{\frac{gh}{3}}$$

اما برای حرکت انتقالی معمولی داریم: $v_T=\sqrt{2gh}$

بنابراین در نهایت داریم:

$$\frac{v_R}{v_T}=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

6- گزینه 2 صحیح است.

با استفاده از قانون پایستگی انرژی داریم:

$$mgh=\frac{1}{2}mv^2$$
$$\to v=\sqrt{2gh}$$

این مقدار برابر سرعت آونگ ساده درست قبل از برخورد با فنر است.

نیروی پایستار برابر بود با: $F=-kx-bx^3$ بنابراین:

$$U=-\int Fdx=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{4}bx^4$$

دوباره با استفاده از قانون پایستگی انرژی داریم:

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{4}bx^4$$
$$mgh=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{4}bx^4$$

$$(x^2+\frac{k}{b})^2=\frac{4mgh}{b}+\frac{k^2}{b^2}$$
$$\rightarrow x=x=\left[\sqrt{\frac{4mgh}{b}+\frac{k^2}{b^2}}-\frac{k}{b}\right]^{1/2}$$

7- گزینه 4 صحیح می‌باشد.

در این مسئله از هر دو قانون پایستگی انرژی و پایستگی تکانه خطی استفاده می‌کنیم:

با استفاده از پایستگی انرژی داریم:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2+\frac{1}{2}kx^2$$

با استفاده از پایستگی تکانه داریم:

$$m_1v_1+m_2v_2=(m_1+m_2)v$$
$$\rightarrow v=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$$

با جاگذاری این رابطه در رابطه بالا داریم:

$$m_1v_1^2+m_2v_2^2=(m_1+m_2)(\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2})^2+kx^2$$
$$kx^2=\frac{(m_1v_1^2+m_2v_2^2)(m_1+m_2)-m_1v_1^2-m_2v_2^2-2m_1m_2v_1v_2}{m_1+m_2}$$
$$kx^2=\frac{m_1m_2(v_1-v_2)^2}{m_1+m_2}$$

بنابراین در نهایت داریم:

$$x = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)k}}(v_1 - v_2)$$

8- گزینه 4 صحیح می‌باشد.

بردار مکان داده شده برابر است با:

$$r = (3t+5t^3)x \xrightarrow{or} x = 3t+5t^3$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 3+15t^2$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 30t$$

$$\to F = ma = 60t$$

توان این جسم برابر است با:

$$P = F.v = 180t + 900t^3$$

$$\to W = \int_0^1 Pdt = \int_0^1 (180t+900t^3)dt$$

$$= 90t^2 + 225t^4 \Big|_0^1 = 315J$$

9- گزینه 4 صحیح می‌باشد.

نیروی فنر داده شده غیر خطی اما پایستار می‌باشد: $F = -k_1 x - k_2 x^2$

با استفاده از قضیه کار-انرژی داریم:

$$W = \Delta K$$

$$W = -\int F dx = \frac{1}{2}k_1 x^2 + \frac{1}{4}k_2 x^4 = \frac{1}{2}mv^2$$

با کمی عملیات ریاضی داریم:

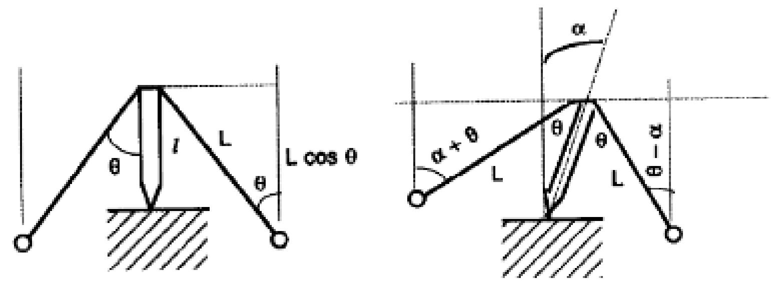
$$x^4 + 2\frac{k_1}{k_2}x^2 = \frac{2m}{k_2}v^2$$

$$(x^2 + \frac{k_1}{k_2})^2 = \frac{2m}{k_2}v^2 + (\frac{k_1}{k_2})^2$$

$$x^2 = -\frac{k_1}{k_2} + \sqrt{\frac{2m}{k_2}v^2 + \frac{k_1^2}{k_2}}$$

$$\to x = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}(\sqrt{1+\frac{2mv^2 k_2}{k_1^2}} - 1)^{\frac{1}{2}}$$

10- گزینه 1 صحیح می‌باشد.




آنچنان که در شکل نشان داده شده است، سیستم را از حالت تعادل خارج می‌کنیم در این حالت داریم:

$$U = mg(l\cos\theta - L\cos(\alpha+\theta)) + mg(l\cos\alpha - L\cos(\theta-\alpha))$$
$$U = 2mg(l - L\cos\theta)\cos\alpha$$

در نقطه تعادل باید داشته باشیم:

$$\frac{dU}{d\alpha} = -2mg(l - L\cos\theta)\sin\alpha = 0$$

همچنان که انتظار داریم برای داشتن تعادل باید $\alpha = 0$ باشد.

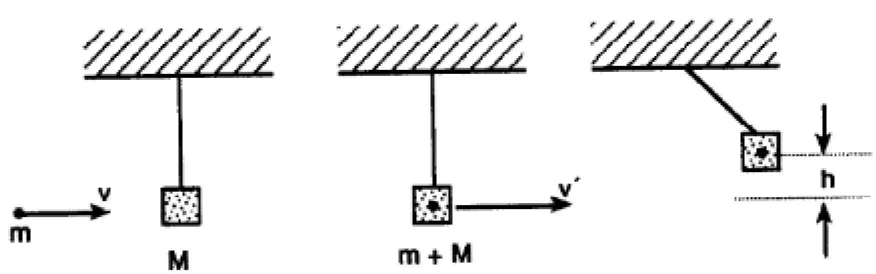
$$\frac{d^2U}{d^2\alpha} = -2mg(l - L\cos\theta)\cos\alpha > 0$$

به این منظور باید داشته باشیم:

$$L\cos\theta > l$$

11- گزینه 1 صحیح است.

در نظر گرفتن شکل‌های زیر در حل مسئله مفید خواهد بود.




از پایستگی انرژی داریم:

$$\frac{1}{2}(m+M)v'^2=(m+M)gh$$
$$\rightarrow v'=\sqrt{2gh}$$

از پایستگی تکانه خطی داریم:

$$mv=(m+M)v'$$
$$\rightarrow v=\frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}$$

بنابراین در نهایت برای ارتفاع $h$ داریم:

$$h=\frac{(\frac{m}{m+M}v)^2}{2g}=\frac{\left[\frac{5}{1005}20000\right]^2}{2(980)}=5.05cm/s$$

12- گزینه 1 صحیح است:

$$R=\frac{d}{2}=0/25m$$

برای آنکه مهره همواره هیچ وقت از مسیر جدا نشود باید تا نقطه $B$ بالا برود و در آنجا $R'=0$ است.

در راستای محور $y$ ها: با استفاده از قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

$$F_y=ma_y\Rightarrow R'+mg=m\frac{v^2}{R}\Rightarrow mg=m\frac{v^2}{R}\Rightarrow v^2=Rg$$

با استفاده از قانون بقای انرژی مکانیکی می‌توان نوشت:

$$E_A=E_B\Rightarrow mgh=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2+mg(2R)$$

$$\Rightarrow mgh=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}mr^2\omega^2+2mgR=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{5}mv^2+2mgR$$

با جاگذاری مقدار سرعت بدست آمده از بخش اول در این رابطه داریم:

$$\Rightarrow mgh=\frac{7}{10}mgR+2mgR\Rightarrow h=\frac{7}{10}R+2R$$

$$\Rightarrow h=\frac{27}{10}R=0/675m$$

13- گزینه 2 صحیح است.

با توجه به رابطه سرعت گلوله در آونگ بالستیک می‌توان نوشت:

$$v=\frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}$$

$$\Rightarrow v=\frac{(0/034+1/25)}{0/034}\sqrt{2(9/8)(6)}=409/5m/s$$

14- گزینه 1 صحیح است.

با توجه به شکل سوال برای مرکز جرم میله می‌توان نوشت:

$$h=L-(\frac{L}{2}\cos 60)=L-\frac{L}{4}=0/9m$$

با توجه به قانون بقای انرژی مکانیکی داریم:

$$E=E_0\Rightarrow mgh=\frac{1}{2}I_0\omega^2+mg\frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow mgh=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}mL^2)\omega^2+mg\frac{L}{2}$$

بنابراین در نهایت داریم:

$$\omega^2=\frac{6g(h-\frac{L}{2})}{L^2}=12/25\Rightarrow\omega=3/5rad/s$$

15- گزینه 3 صحیح می‌باشد:

برای اینکه جسم همواره روی مسیر حرکت کند و در تماس با حلقه باشد، جرم باید تا نقطه c اوج بگیرد و سرعت آن در نقطه c صفر شود:

از قانون بقای انرژی داریم:

$$K_i+U_i=K_f+U_f$$

$$\Rightarrow mgh=mgd\Rightarrow h=d$$

16- گزینه 1 صحیح است:

با استفاده از قانون بقای انرژی مکانیکی داریم:

$$K_i+U_i=K_f+U_f$$

$$\Rightarrow mgh=\frac{1}{2}mv_A^2\Rightarrow v_A=\sqrt{2gh}\Rightarrow v_A=4/43m/s$$

نیروهای وارد بر جسم در این نقطه با استفاده از قانون دوم نیوتون برابر است با:

$$F_A - mg = \frac{mv_A^2}{R} \Rightarrow F_A = mg + \frac{mv_A^2}{R}$$

در نتیجه با جاگذاری مقادیر عددی داریم:

$$F_A = 28/1N$$

17- گزینه 2 صحیح است:

نیروی خارجی برابر صفر است پس اندازه حرکت خطی پایسته است. با توجه به شکل می‌توان نوشت:

$$p_i = p_f \Rightarrow m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v'$$

$$\to 900v_1 = (900+1200)v' \Rightarrow v_1 = 2/33v'$$

پس از برخورد، کار نیروی اصطکاک با استفاده از قضیه کار-انرژی برابر است با:

$$\Delta E = W_f \Rightarrow E_f - E_i = W_f \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v'^2 = -\mu_k (m_1 + m_2)gx$$

$$\Rightarrow -1050v'^2 = -9549/1 \Rightarrow v' = 3/02m/s$$

از طرفی داشتیم:

$$v_1 = 2/33v' \Rightarrow v_1 = 7/03m/s = 25/3km/h$$

**منابع**

فیزیک هالیدی جلد اول

فیزیک فردریک بیوکی