www.Endbook.net
www.Endbook.net

فصل ۱

خطاها و آنالیز خطاها

در رشته‌های کاربردی، برای تعیین جواب یک مسأله واقعی باید مدل ریاضی آن را بسازیم و سپس جواب مسأله را به دست آوریم، که معمولاً برای اکثر آن‌ها روش‌های تحلیلی وجود ندارد و بایستی جواب مسأله را با روش‌هایی که به روش‌های عددی موسوم هستند برآورد کنیم. در این روند مجبور به پذیرش چشم‌پوشی‌هایی هستیم که انواع متفاوت دارند.

آشنایی با منشأ و پیدایش این خطاها (چشم‌پوشی‌ها)، بروز و کنترل آن‌ها را در این فصل مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم. بنابراین ابتدا به منشأ این خطاها می‌پردازیم.

۱ . ۱ منابع خطا

۱ـ مدل‌سازی

معمولاً ساختن یک مدل ریاضی برای یک مسأله عملی با ساده کردن و چشم‌پوشی‌هایی همراه است که باعث خطا می‌شود.

۲ـ اندازه‌گیری داده‌ها

در اندازه‌گیری ها و برآوردها به کمک وسایل اندازه‌گیری یا انجام آزمایش‌ها، با چشم‌پوشی‌هایی مواجه هستیم که باعث خطا می‌شود.

۳ـ نمایش اعداد

در نمایش اعدادی نظیر $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{7}$ ، $\frac{3}{7}$ ، $\pi=3.141592654...$ ، $e=2.718281828...$ و ... با تعداد متناهی رقم باعث خطا می‌شویم، زیرا که حافظه کامپیوتر محدود و بسط اعشاری این اعداد نامختوم است. لذا این اعداد را با تعداد متناهی رقم در حافظه خود جا می‌دهد.

۴ـ عملیات حسابی

در انجام اعمالی نظیر جمع، تفریق، ضرب و تقسیم خطاهایی وارد می‌شود.

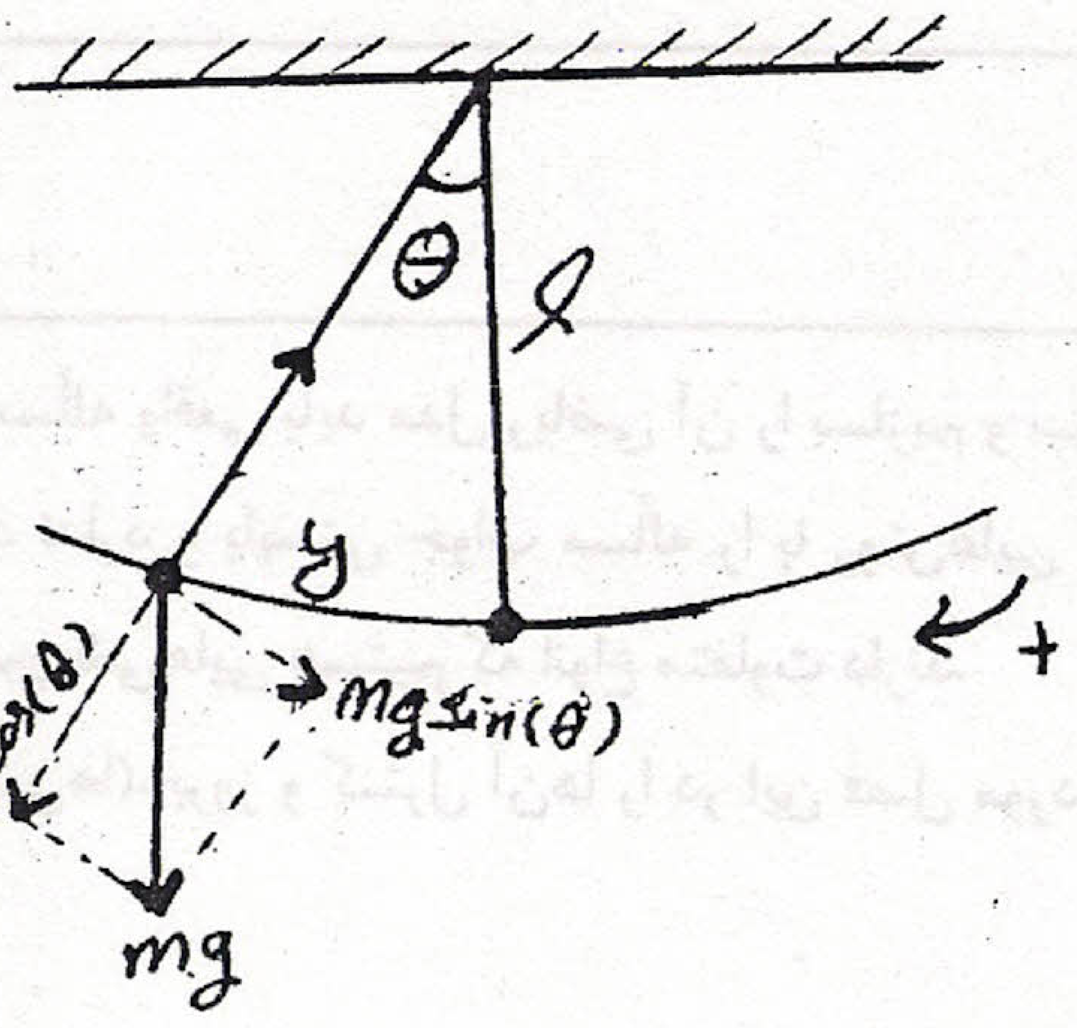
www.Endbook.net
www.Endbook.net

۵ـ روش‌های عددی

روش‌های عددی بر نوعی تقریب استوار هستند. مرسوم است که پس از بیان روش، خطای روش مورد بررسی قرار گیرد.
با دانستن خصوصیات کامپیوتر یا ماشین حساب مورد استفاده، باید بتوانیم اثر خطاهای نوع (۳) و (۴) را روی جواب‌ها بررسی کنیم.
حال با مثالی چگونگی بروز خطاهای بالا را در حل یک مسأله واقعی شرح می‌دهیم.

مثال ۱: حرکت پاندول ساده

برحسب تعریف، آونگ (پاندول) ساده، ذره‌ای مادی است که به کمک نخ غیرقابل کشسان و سبک از نقطه‌ای ثابت آویخته شده است.
اگر آونگ مزبور به یک طرف وضعیت تعادلش کشیده و رها گردد در اثر نیروی ثقل در صفحه‌ای قایم نوسان خواهد کرد.
البته مفروضات زیر بر پاندول اعمال شده است:
نخ غیرقابل کشش و همگن است، از اصطکاک نقطه آویز و جرم نخ و مقاومت هوا و همه نیروها جز نیروی جاذبه صرف‌نظر می‌شود.
شکل زیر پاندولی به درازای طول نخ ℓ و جرم ذره m که با محور قایم، در لحظه t زاویه θ می‌سازد را نشان می‌دهد.



نیروی $mg\cos\theta$ با نیروی در امتداد کشش نخ خنثی می‌شود، نیروی بازگشت‌دهنده همان مؤلفه مماسی است که می‌خواهد آن را به وضعیت تعادل برگرداند، از این رو نیروی بازگشت دهنده نیروی $F=-mg\sin\theta$ می‌باشد. از طرفی $F=ma$ و $y=\ell\theta$، پس:

$$a=\frac{d^2y}{dt^2}=\ell\frac{d^2\theta}{dt^2}\quad,\quad -mg\sin\theta=m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2\sin\theta=0\ ،\ \omega^2=\frac{g}{\ell}$$

معادله دیفرانسیل فوق یک معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه دوم است. چون حل این معادله با روش‌های تحلیلی امکان‌پذیر نیست در مکانیک مقدماتی با کوچک گرفتن θ، $\sin\theta$ را با θ تقریب می‌زنند، پس:

$$\sin\theta=\theta$$

لذا معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم زیر ایجاد می‌گردد:

(۱)
$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\omega^2\theta=0$$

که معادله مفسر نظیر، معادله $\lambda^2+\omega^2=0$ می‌باشد و جواب‌های این معادله جبری به‌صورت $\lambda=\pm i\omega$ به دست می‌آید. لذا جواب‌های عمومی معادله (۱) به صورت زیر است:

(۲)
$$\theta=c_1\cos(\omega t)+c_2\sin(\omega t)$$

چون در لحظه $t=0$، $\theta=0$ است پس با اعمال شرط $\theta(0)=0$ داریم $c_1=0$.

www.Endbook.net
www.Endbook.net

لذا خواهیم داشت:

$$\theta=c_2\sin(\omega t)$$

بنابراین دوره تناوب پاندول ساده $T=\frac{2\pi}{\omega}$ یا $T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ به‌دست می‌آید. پس دوره تناوب پاندول ساده که وابسته به جرم ذره پاندول نمی‌باشد، به صورت زیر است:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad (۳)$$

تا این‌جا خطای نوع یک بررسی شد. خطاهای دیگر به هنگام تعیین مقدار عددی T پیش می‌آیند. مثلاً ℓ و g هر دو شامل خطای اندازه‌گیری هستند و عدد π باید با تعداد متناهی رقم نوشته شود. خطای نوع چهار خطای دو ضرب و یک تقسیم ℓ بر g می‌باشد، که این محاسبات با تعداد متناهی رقم انجام می‌گردد.

خطای نوع (۵) یعنی خطای روش‌های عددی، خطای جذرگیری است، باید توجه داشت که جذرگیری، یک روش عددی است.

۱ . ۲ نمایش اعداد

همان‌طوری که قبلاً مطرح شد چون حافظه کامپیوتر محدود است، اعدادی را که بسط اعشاری نامختوم دارد را با تعداد متناهی رقم در حافظه خود جا می‌دهد، حال باید مشاهده کنیم که این کار چگونه اتفاق می‌افتد.

الف) روش قطع کردن

فرض کنیم بسط اعشاری عدد A به صورت زیر باشد:

$$A=u.a_1a_2\cdots a_na_{n+1}\cdots$$

که در آن u قسمت صحیح عدد A است. اگر قطع شده A تا رقم n ام اعشار مورد نظر باشد، از رقم $(n+1)$ام اعشار به بعد بدون هیچ قید و شرطی صرف‌نظر می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$a=u.a_1a_2\cdots a_n$$

ب) روش گرد کردن

فرض کنیم بسط اعشاری عدد A به صورت زیر باشد:

$$A=u.a_1a_2\cdots a_na_{n+1}\cdots$$

که در آن u قسمت صحیح A است و a_iها ارقام اعشاری می‌باشند. گرد شده A تا رقم n ام اعشار را با نماد a نشان داده و تعریف می‌کنیم:

i) اگر $a_{n+1}\geq 5$، آن‌گاه:

$$A=u.a_1a_2\cdots a_{n-1}a'_n \quad , \quad a'_n=a_n+1$$

ii) اگر $a_{n+1}<5$، آن‌گاه:

$$a=u.a_1a_2\cdots a_n$$

مثال ۲: گرد شده اعداد زیر تا چهار رقم اعشار مورد نظر است، بنابراین:

$$0.00075\simeq 0.0008$$

$$1.346721\cdots\simeq 1.3467$$

www.Endbook.net
www.Endbook.net

$37.30197\cdots \simeq 37.3020$

$3.14159 \simeq 3.1416$

قضیه ۱: اگر a گرد شده A ، تا رقم nام اعشار باشد، آن‌گاه:

$|A-a| \leq 5\times 10^{-(n+1)}$

بنابراین در مثال (۲) که اعداد را تا چهار رقم اعشار گرد کرده‌ایم حداکثر اختلاف آن‌ها طبق قضیه 0.00005 است.

۱ . ۳ انواع خطاها

اگر a تقریبی از A باشد (لزوماً گرد شده نیست) می‌نویسیم $A \simeq a$.

a را تقریب اضافی A گوییم هرگاه $a>A$.

a را تقریب نقصانی A گوییم هرگاه $a<A$.

آن‌چه در عمل حایز اهمیت است اضافی یا نقصانی بودن a نیست، بلکه فاصله a تا A یعنی $|A-a|$ می‌باشد که به آن خطای مطلق a گوییم، پس تعریف زیر را داریم.

تعریف ۱: فرض کنیم $A \simeq a$، خطای مطلق a را با نماد $e(a)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$e(a) = |A-a|.$

با توجه به مطالب یاد شده خواص زیر بدیهی است:

i) $e(a) \geq 0$, $e(a)=0 \Leftrightarrow A=a$

ii) هرچه $e(a)$ به صفر نزدیک‌تر باشد آن‌گاه a به A نزدیک‌تر است و بالعکس.

هرچه $e(a)$ به صفر نزدیک‌تر باشد گوییم تقریب بهتر است.

iii) اگر a گرد شده A تا رقم n ام اعشار باشد با توجه به قضیه (۱) داریم:

$e(a) \leq 5\times 10^{-(n+1)}$

مثال ۳: اگر $A=\frac{1}{3}$ آن‌گاه $a=0.33$ یک تقریب نقصانی A است و داریم:

$e(a)=|A-a|=\frac{1}{300}$

مثال ۴: اگر $A=\sqrt{2}$ آن‌گاه $a=1.4143$ یک تقریب اضافی A است و داریم:

$e(a) \leq 0.00009$

در اکثر مسایل مقدار واقعی A نامشخص است، لذا محاسبه $e(a)$ عموماً امکان‌پذیر نیست، ولی حدود آن را می‌توان تعیین کرد. برای نمونه می‌دانیم $\sqrt{2}=1.4142\cdots$ وداریم: $|\sqrt{2}-1.41|<0.005$, $|\sqrt{2}-1.42|<0.006$

لذا برای تعیین دقت a بجای $e(a)$ از مقدار بزرگ‌تری موسوم به خطای مطلق حدی a استفاده می‌شود.

تعریف ۲: اگر a تقریبی از A باشد به هر عدد مثبت e_a که در نامساوی $e(a) \leq e_a$ صدق کند، خطای مطلق حدی a گوییم.

بدیهی است که هرچه e_a به صفر نزدیک‌تر باشد a به A نزدیک‌تر است.

www.Endbook.net
www.Endbook.net

مثال ۵: فرض کنیم $e_a=0.003$ و $a=1.324$، لذا:

$$e(a)=|A-a|\le 0.003$$

پس خواهیم داشت:

$$-0.003\le A-a\le 0.003 \quad \text{یا} \quad a-0.003\le A\le a+0.003$$

بنابراین به‌دست می‌آوریم: $1.321\le A\le 1.327$

این نامساوی نشان می‌دهد که در بسط اعشاری A حتماً 1.32 موجود است.

خطای نسبی

معمولاً خطای مطلق حدی و حتی خطای مطلق برای نشان دادن دقت یک عدد تقریبی کفایت نمی‌کند، آن‌چه دقت یک تقریب را مشخص می‌کند خطا در واحد آن تقریب است.

تعریف ۳: اگر a تقریبی از A و $A\neq 0$ باشد خطای نسبی a را با نماد $\delta(a)$ نشان می‌دهیم، که به این‌صورت تعریف می‌شود:

$$\delta(a)=\frac{e(a)}{|A|}$$

و هر عدد مثبت δ_a که در نامساوی $\delta(a)\le\delta_a$ صدق کند یک خطای نسبی حدی a نامیده می‌شود.

قضیه ۲: اگر $A\approx a$ و e_a خطای مطلق حدی a و $|a|>e_a$ باشد، آن‌گاه:

$$\delta(a)\le\frac{e(a)}{|a|-e_a}$$

اگر e_a در مقایسه با $|a|$ کوچک باشد، بعضی از مؤلفین از تعریف زیر استفاده می‌کنند:

$$\delta(a)=\frac{e(a)}{|a|}\ , \quad a\neq 0$$

۱ . ۴ انتشار خطا

مسایل ریاضی عموماً شامل یک یا چند عدد ثابت هستند که ممکن است بعضی از آن‌ها جواب تقریبی مسأله دیگری باشند، چون در نمایش این اعداد، خطا موجود است با انجام عملیات حسابی روی آن‌ها خطاهای موجود در آن‌ها انتشار یافته و رشد می‌یابد. در نتیجه روی نتایج حاصله اثر می‌گذارند.

هدف در این قسمت بررسی اثرات این خطاها و اتخاذ تدابیری برای تقلیل یافتن آن می‌باشد.

قضیه ۳: فرض کنیم a و b به ترتیب تقریب‌هایی از A و B باشند. اگر $a\pm b$ را تقریب $A\pm B$ بگیریم، آن‌گاه:

i) $\quad e(a\pm b)\le e(a)+e(b)$

ii) $\quad \delta(a+b)\le \max\{\delta(a),\delta(b)\}\ , \quad A,B>0$

iii) $\quad \delta(a-b)\le\frac{a}{a-b}\delta(a)+\frac{b}{a-b}\delta(b)\ , \quad a>b>0$

در بند (iii) قضیه (۳) مشاهده می‌شود که اگر $a-b$ کوچک باشد، $\delta(a-b)$ ممکن است بسیار بزرگ باشد لذا حتی‌الامکان باید از تفریق اعداد نزدیک به هم خودداری کرد.

در مثال زیر مشاهده می‌کنیم که جمع، خطا را افزایش می‌دهد، اما چندان قابل توجه نیست.

www.Endbook.net

مثال ۶: فرض کنیم $A = 2.3851$ و $B = 4.5750$ ، $B \simeq b = 4.58$ و $A \simeq a = 2.39$

واضح است که:

$e(a) = 0.0049$ ، $e(b) = 0.0050$، $a+b = 6.97$ و $A+B = 6.9601$.

مشاهده می‌شود: $e(a+b) = 0.0099$. بنابراین خطای $a+b$ در مقایسه با خطای a و b بیش‌تر شده است.

مثال ۷: می‌خواهیم تقریبی از $A = \dfrac{1}{0.003146 - 0.003130}$ با انجام عملیات تا ۵ رقم اعشار و با روش گرد کردن به دست آوریم، پس:

$$A \simeq a = \frac{1}{0.00315 - 0.00313} = 5.00 \times 10^4$$

در حالی که جواب دقیق به صورت زیر است:

$$A = 6.25 \times 10^4$$

مشاهده می‌شود خطا در اثر گرد کردن تا پنج رقم اعشار فاحش است.

قضیه ۴: اگر a و b به ترتیب تقریب‌هایی از A و B باشند، آن‌گاه:

i) $\quad e(ab) \le |a| e(b) + |B| e(a)$

ii) $\quad e\left(\dfrac{a}{b}\right) \lesssim \dfrac{b e(a) + a e(b)}{b^2} \quad , \quad A > a \quad , \quad B > b > 0$

iii) $\quad \delta(ab) \le \delta(a) + \delta(b) \quad , \quad a, b > 0$

بند (i) قضیه (۴) نشان می‌دهد که خطای ab می‌تواند خیلی بزرگ باشد، اگر $|a|$ بزرگ باشد آن‌گاه $|a| e(b)$ کوچک نخواهد بود. (به طور مشابه برای $|B| e(a)$) مگر آن‌که $e(b)$ فوق‌العاده کوچک باشد، لذا برای این که خطای ab کوچک باشد لازم است که حتی‌الامکان $e(a)$ و $e(b)$ کوچک باشند.

بنابراین حتی‌الامکان باید از ضرب اعداد بزرگ خودداری کرد، ولی در صورت اجبار باید دقت محاسبه را بالا برد. اکثر کامپیوترها برای عملیات حسابی بخصوص ضرب از دقت مضاعف استفاده می‌کنند که البته به هزینه و زمان بیش‌تری احتیاج است. در روش‌های عددی بهتر آن است که از ضرب اعداد تقریبی بزرگ حتی‌الامکان اجتناب کرد.

مثال‌های متنوع تستی حل شده:

مثال ۸: فرض کنید a , b به ترتیب تقریب‌هایی از اعداد مخالف صفر A و B باشند و $e(a) = e(b)$ و $|A| > |B|$، آن‌گاه دقت اندازه‌گیری A از B:

۱) کمتر است ۲) نا کمتر است ۳) بیش‌تر است ۴) برابر است

حل: واضح است که $\delta(a) = \dfrac{e(a)}{|A|} = \dfrac{e(b)}{|A|}$

چون $|A| > |B|$ پس

$$\delta(a) = \frac{e(b)}{|A|} < \frac{e(b)}{|B|} = \delta(b)$$

چون خطای نسبی a از b کمتر است، پس دقت اندازه‌گیری A از B بیش‌تر است. لذا گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مثال ۹: اگر a گرد شده A تا دو رقم اعشار باشد، آن‌گاه خطای مطلق a به کدام صورت زیر است؟

۱) 0.005 ۲) کمتر از 0.005 ۳) بیش‌تر از 0.005 ۴) حداکثر 0.005

www.Endbook.net

حل: با انتخاب $n=2$ در قضیه (۱) داریم:

$$e(a) \le 5\times10^{-3} = 0.005$$

پس گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

مثال ۱۰:

کره‌ای به شعاع $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ داریم کدام‌یک از عبارات زیر تقریب بهتری برای حجم کره است وقتی که $\sqrt{2}\simeq1.41$ و $\pi\doteq3.14$.

۱) $\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^3$ ۲) $\frac{4\pi}{3\left(\sqrt{2}+1\right)^6}$ ۳) $\frac{4\pi\left(\sqrt{2}-1\right)^6}{3}$ ۴) $\frac{4\pi}{3\left(70\sqrt{2}+99\right)}$

حل: اگر $\sqrt{2}$ و π تقریب زده نشوند هر چهار عبارت حجم واقعی کره است. اما وقتی $\sqrt{2}$ را با 1.41 و π را با 3.14 تقریب می‌زنیم چهار عبارت فوق متفاوتند. اما عبارت چهارم یعنی گزینه ۴ حجم بهتری را برای کره ارایه می‌دهد، زیرا که تعداد اعمال حسابی آن از سه عبارت دیگر کمتر است.

www.Endbook.net

www.Endbook.net

تمرین‌های تشریحی:

۱ـ فرض کنید $A \simeq a$ و $B \simeq b$ و k عدد صحیح مثبت باشد و $B = 10^k A$ و $b = 10^k a$، نشان دهید $\delta(a) = \delta(b)$.

۲ـ اگر $a_1, a_2, \cdots, a_n$ به ترتیب تقریب‌هایی از اعداد مثبت A_1 , A_2 و ... و A_n باشند، نشان دهید:

i) $$e\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} e(a_i)$$

ii) $$\delta\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \le \max\{\delta(a_i) | i = 1, 2, \ldots, n\} \quad , \quad A_i > 0, 1, \ldots, n.$$

۳ـ فرض کنید $I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx$، نشان دهید:

$$I_n = 1 - n I_{n-1} \quad , \quad n \ge 1, \quad (۱)$$

با فرض $I_1 = e^{-1} \simeq 0.367879$، مقدار I_9 را از رابطه (۱) به دست آورید و با توجه به این که I_n برای هر $n \in \mathbb{N}$ مثبت است، آیا تناقضی مشاهده می‌شود؟

رابطه (۱) را به صورت زیر بنویسید.

$$I_{n-1} = \frac{1 - I_n}{n} \quad , (۲)$$

با فرض $I_{16} \simeq 0$ مقدار I_9 را از رابطه (۲) مجدداً برآورد کنید، آیا این مقدار با مقدار واقعی تفاوت زیادی دارد، چرا؟

به فرمول‌های نظیر (۱) فرمول‌های ناپایدار و به فرمول‌های نظیر (۲) فرمول‌های پایدار گویند.

۴ـ فرض کنید a و b تقریب‌هایی از A و B باشند، اگر این اعداد مثبت باشند در چه صورتی خطای مطلق ab به عنوان تقریب AB، حدود خطای مطلق $a + b$ است.