فصل ۲

حل عددی معادلات غیرخطی

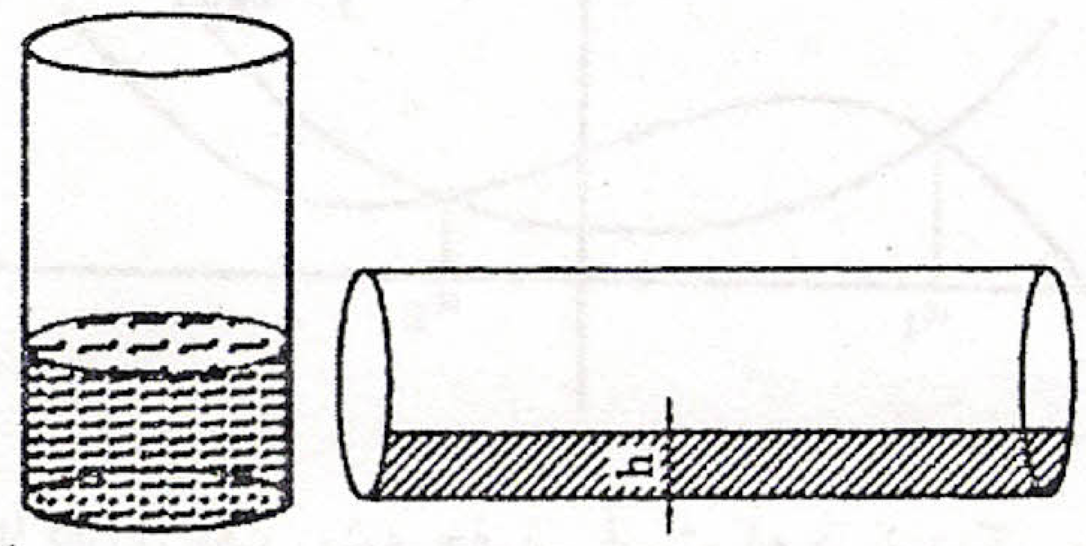
معمولاً اولین معادله غیرخطی که در درس جبر به آن برخورد می‌کنیم، معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ است، که کلیه دانشجویان برای محاسبه ریشه‌های آن از فرمول آشنای زیر استفاده می‌کنند:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ ,\quad b^2-4ac\geq 0\ .$$

فرمول ریشه‌های یک معادله درجه سوم کلی، تا حدی پیچیده‌تر است و نیز تشریح فرمول ریشه‌های یک معادله درجه چهارم کلی، معمولاً چند صفحه را اشغال می‌کند. هم‌چنین قضیه‌ای بیان می‌کند که هیچ فرمولی برای چند جمله‌ای‌های کلی، از درجه بالاتر از چهار وجود ندارد و ما را از کوشش بیش‌تر باز می‌دارد. از این رو ترجیح می‌دهیم به جز در حالات ویژه (مثلاً وقتی تجزیه ساده است) در عمل برای حل معادلات چند جمله‌ای از درجه بالاتر از دو، از یک روش عددی استفاده کنیم.

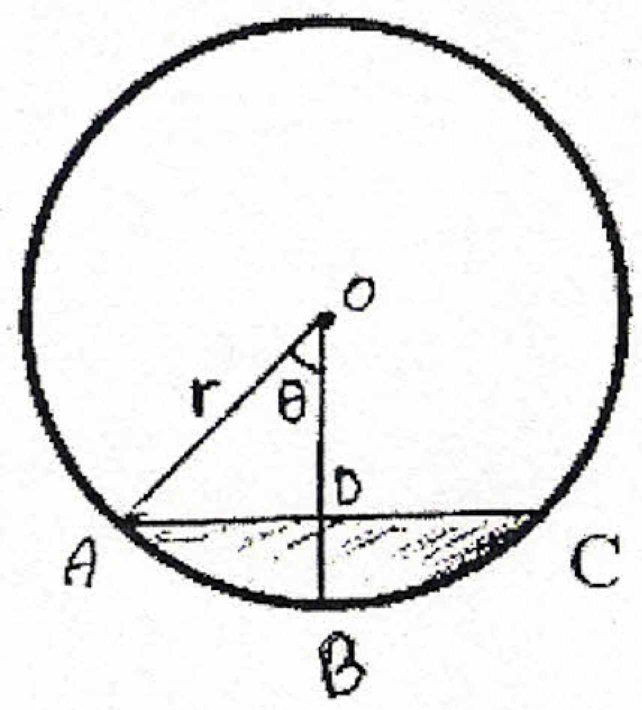
دسته دیگری از معادلات غیرخطی متشکل از معادلاتی است که توابع متعالی نظیر e^x و $\log x$ و $\cos x$ و ... را شامل می‌شود. جواب‌های تحلیلی چنین معادلاتی نادر هستند. بنابراین معمولاً مجبور می‌شویم باز هم از روش‌های عددی استفاده کنیم. در زیر مثالی می‌آوریم که چگونه یک معادله متعالی ظاهر می‌شود.

مثال ۱: فرض کنیم یک مخزن استوانه‌ای به شعاع r که $\frac{1}{4}$ آن پر از مایع می‌باشد طوری قرار گرفته است که محورش افقی است، می‌خواهیم ارتفاع مایع در این مخزن را به دست آوریم.



حل: یک سطح مقطع از شکل (۲) در نظر می‌گیریم به طوری که صفحه بر محور افقی عمود باشد، در این صورت ارتفاع h طول DB در شکل (۲) می‌باشد.

واضح است که:



$$S_{ABC}=\frac{1}{4}S \quad , \quad S=\pi r^2$$

$$\text{OAB مساحت قطاع}=\frac{1}{2}r^2\theta$$

$$S_{OAD}=\frac{1}{2}(r\sin\theta).(r\cos\theta)=\frac{1}{2}r^2\sin\theta\cos\theta$$

پس داریم:

$$\frac{1}{4}\pi r^2=2S_{ABD}=2\left[\frac{1}{2}r^2\theta-\frac{1}{2}r^2\sin\theta\cos\theta\right]$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$2\theta-\sin 2\theta=\frac{\pi}{2}$$

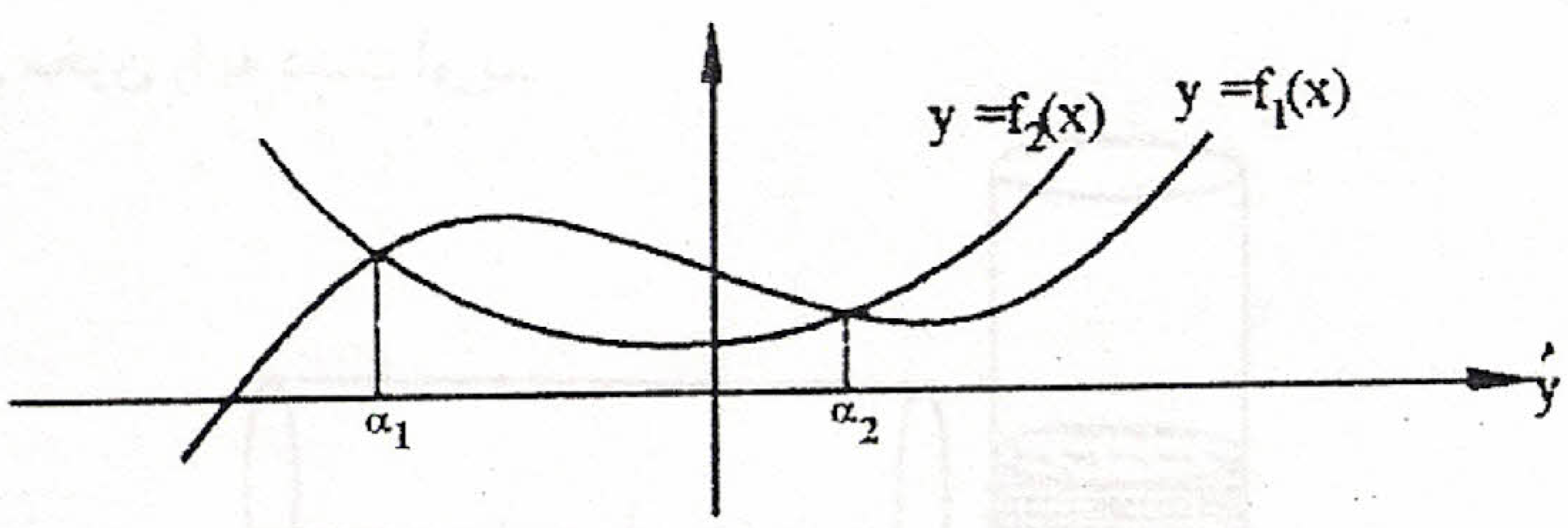
پس از حل معادله اخیر، θ و سپس $h=r-r\sin\theta$ به دست می‌آید.

۲ . ۱ تعیین محل ریشه‌های معادله $f(x)=0$

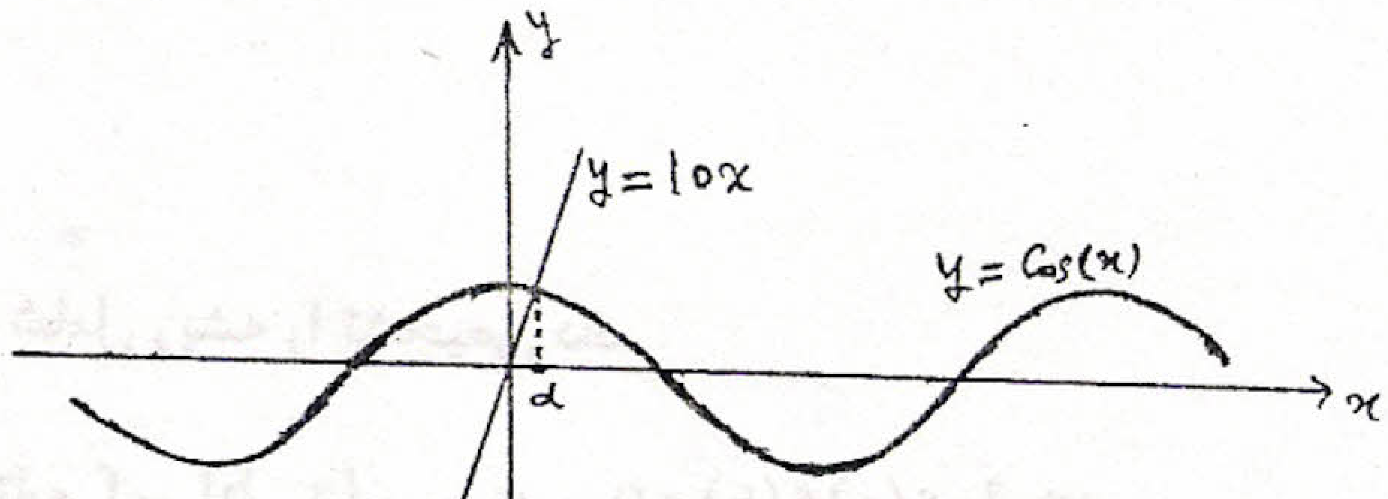
قبل از اعمال روش‌های عددی باید در مورد تعداد، نوع و محل تقریبی ریشه‌های معادله $f(x)=0$ بحث کنیم، ابتدا چند طریق متداول برای تعداد و محل تقریبی ریشه‌های حقیقی بیان می‌کنیم.

آ) رسم نمودار

واضح است طول تلاقی نمودار $y=f(x)$ با محور xها ریشه معادله $f(x)=0$ است. اگر ریشه خاصی مورد نظر باشد می‌توان قسمتی از منحنی را در همسایگی آن ریشه رسم نمود. در حالت کلی رسم نمودار $y=f(x)$ ممکن است به راحتی امکان‌پذیر نباشد، اگر بتوان نوشت $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$، در این صورت طول تلاقی نمودارهای $y=f_1(x)$ و $y=f_2(x)$ ریشه $f(x)=0$ است. (در شکل زیر α_1 و α_2 ریشه‌های معادله $f(x)=0$ است.)

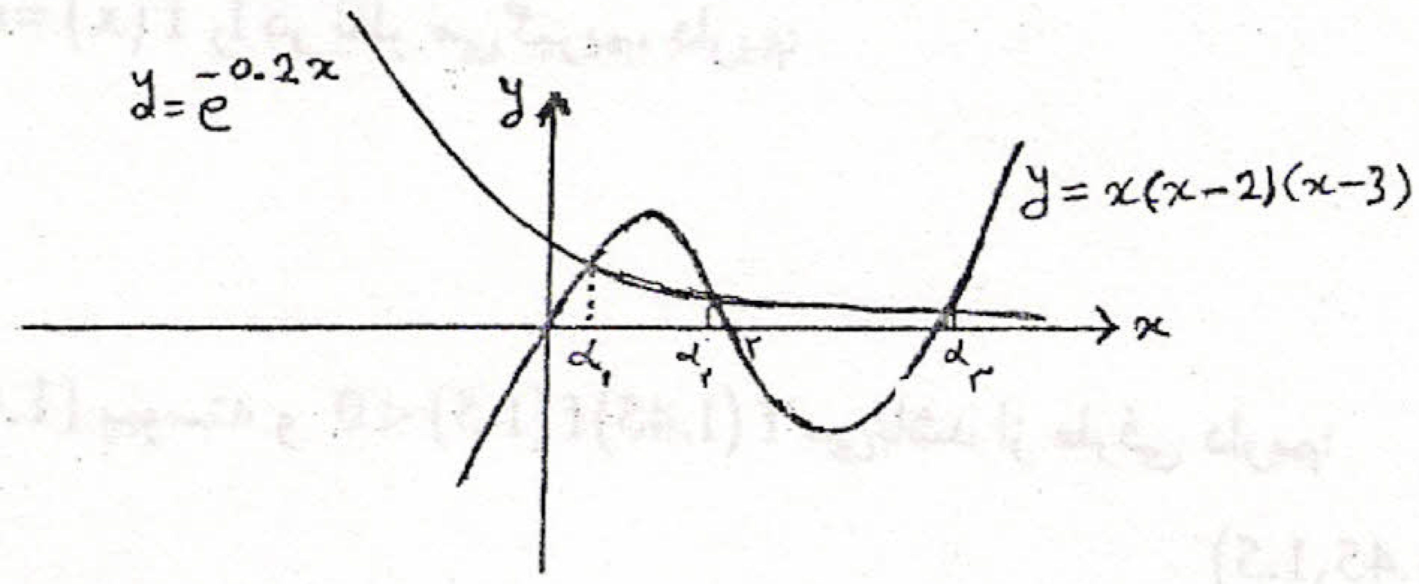


مثال ۲: معادله $f(x)=10x-\cos x=0$ تنها دارای یک ریشه حقیقی است که در نزدیکی صفر قرار دارد، زیرا نمودارهای $y=10x$ و $y=\cos x$ هم‌دیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند (شکل زیر).



مثال ۳: معادله $e^{-0.2x}-x(x-2)(x-3)=0$ دارای چند ریشه حقیقی است؟

حل: نمودارهای $y=e^{-0.2x}$ و $y=x(x-2)(x-3)$ را رسم می‌کنیم.



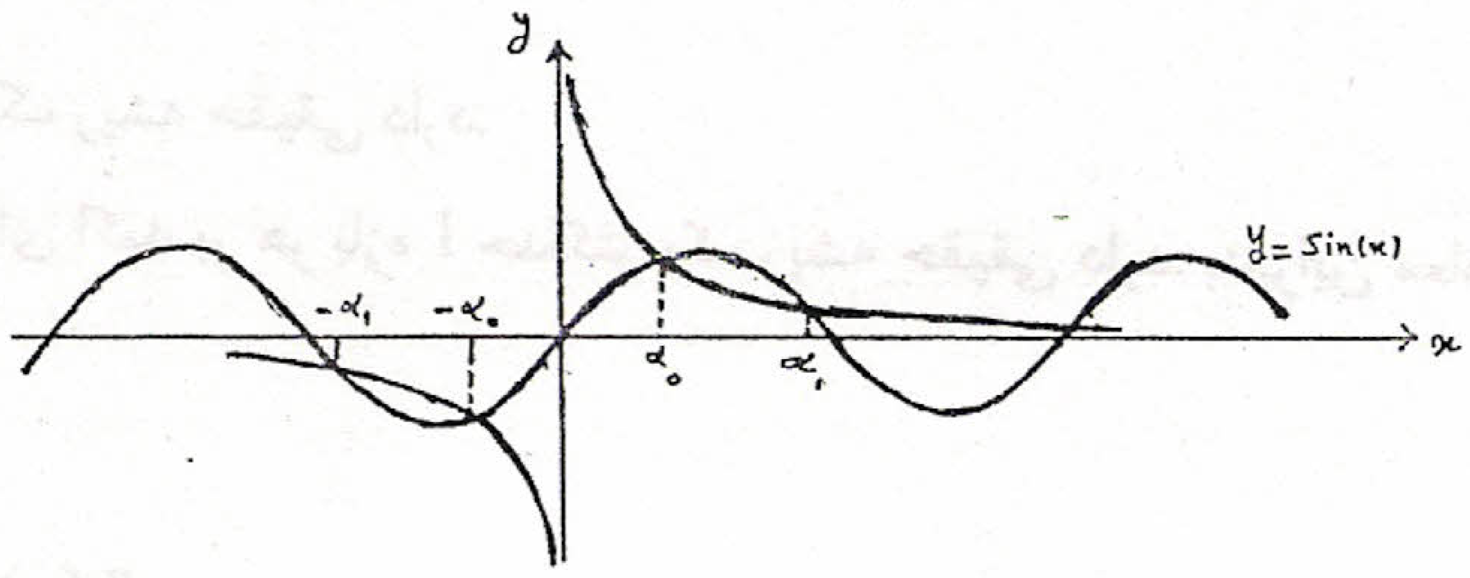
پس معادله دارای سه ریشه حقیقی مثبت است که α_2 در مجاورت 2 و α_3 در مجاورت 3 بوده و α_1 مثبت و از یک کم‌تر است.

مثال ۴: معادله $x\sin x-1=0$ دارای چند ریشه حقیقی می‌باشد؟

حل: رسم نمودار $y=x\sin x-1$ به راحتی امکان‌پذیر نیست، اما معادله فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت، زیرا که $x\neq 0$ می‌باشد.

$$\sin x-\frac{1}{x}=0.$$

حال نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ و $y=\sin x$ را می‌توان در یک دستگاه مختصات به صورت زیر رسم کرد.



بنابراین معادله دارای بی‌نهایت ریشه حقیقی مثبت و منفی می‌باشد که ریشه‌ها دو به دو قرینه هم هستند (چرا؟) غیر از α_0 و $-\alpha_0$ بقیه ریشه‌ها در مجاورت مضارب π قرار دارند، یعنی:

$$\alpha_k=k\pi \quad , \quad k\neq 0 \quad , \quad k\in\mathbb{Z}.$$

ب) جدول‌بندی مقادیر f

با استفاده از قضیه زیر می‌توان بازه شامل ریشه را تشخیص داد.

قضیه ۱: (قضیه بولتزانو): هرگاه تابع f بر $[a\ ,b]$ پیوسته و $f(a)f(b)<0$، آن‌گاه:

$$\exists\alpha\in(a,b)\quad:\quad f(\alpha)=0$$

به عبارت دیگر معادله $f(x)=0$ حداقل یک ریشه بین a و b دارد.

بعلاوه اگر f بر $[a\ ,b]$ یکنوای اکید باشد، آن‌گاه α منحصر به فرد است.

مثال ۵: معادله $f(x)=\sin x-x+0.5=0$ را در نظر می‌گیریم، داریم:

x	1.45	1.5
f(x)	0.0427	−0.0025

حل: واضح است که f بر $[1.45\ ,1.5]$ پیوسته و $f(1.45)f(1.5)<0$ می‌باشد از طرفی داریم:

$$f'(x)=\cos x-1<0\quad,\quad\forall x\in(1.45,1.5)$$

پس f بر بازه $(1.45\ ,1.5)$ یکنوای اکید است (نزولی اکید)، لذا معادله فوق بر بازه مذکور تنها یک ریشه حقیقی دارد.

مثال ۶: معادله $10xe^{x}-1=0$ دارای چند ریشه حقیقی است؟

حل: چون $e^{x}\neq 0$، پس با تقسیم طرفین معادله بر e^{x} داریم:

$$f(x)=10x-e^{-x}=0$$

تابع f بر بازه $[0,0.1]$ پیوسته و $f(0)=-1$ و $f(0.1)=1-e^{-0.1}>0$ می‌باشد، پس معادله فوق بر بازه $(0,0.1)$ حداقل یک ریشه دارد، اما داریم:

$$f'(x)=10+e^{-x}>0\quad,\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

پس معادله بر بازه $(0,0.1)$ تنها یک ریشه حقیقی دارد.

یادداشت ۱: هر تابع پیوسته یکنوای اکید بر هر بازه I حداکثر یک ریشه حقیقی دارد. بنابراین معادله مثال (۶) بر $\mathbb{R}$ تنها یک ریشه حقیقی دارد.

نوع ریشه‌های معادله $f(x)=0$:

تعریف ۱: α را ریشه معادله $f(x)=0$ از مرتبه تکرار m گوییم هرگاه g (x) موجود باشد، به طوری که:

$$f(x)=(x-\alpha)^{m}g(x)\quad,\quad g(\alpha)\neq 0$$

اگر $m=1$ باشد، α را ریشه ساده و اگر $m=2$، α را ریشه مضاعف معادله گویند.

مثال ۷: معادله $f(x)=(x-1)(x-3)^{2}(x-4)^{3}(x^{2}+1)=0$ را در نظر می‌گیریم. $x=1$ ریشه ساده، $x=3$ ریشه مضاعف، $x=4$ ریشه معادله از مرتبه تکرار ۳، $x=\pm i$ دو ریشه مختلط مزدوج و ساده معادله می‌باشد.

قضیه زیر در تشخیص نوع ریشه معادله مفید واقع می‌شود.

قضیه ۲: هرگاه α ریشه $f(x)=0$ باشد و f در نقطه α، m بار مشتق‌پذیر و داشته باشیم:

$$f'(\alpha)=f''(\alpha)=\cdots=f^{(m-1)}(\alpha)=0\ ,\ f^{(m)}(\alpha)\neq 0$$

آن‌گاه α ریشه معادله $f(x)=0$ از مرتبه تکرار m است.

معادله $f(x)=x-\sin x=0$ را در نظر می‌گیریم، واضح است که $\alpha=0$ ریشه معادله مذکور است و داریم:

$$f'(x)=1-\cos x\quad ,\quad f'(0)=0$$

$$f''(x)=\sin x\quad ,\quad f''(0)=0$$

$$f'''(x)=\cos x\quad ,\quad f'''(0)\neq 0$$

پس $\alpha=0$ ریشه معادله از مرتبه تکرار ۳ است.

۲ . ۲ روش‌های عددی جهت تعیین ریشه‌های حقیقی $f(x)=0$

ابتدا ساده‌ترین روش را بیان می‌کنیم.

۲ . ۲ . ۱ روش تنصیف یا دوبخشی (Bisection Method)

در این روش فرض می‌کنیم معادله $f(x)=0$ بر بازه (a,b) دارای ریشه یکتا بوده و f بر $[a,b]$ پیوسته و $f(a)f(b)<0$ می‌باشد.

ابتدا قرار می‌دهیم $c_1=\frac{a+b}{2}$ و $f(c_1)$ را محاسبه می‌کنیم سپس یکی از حالات زیر رخ می‌دهد:

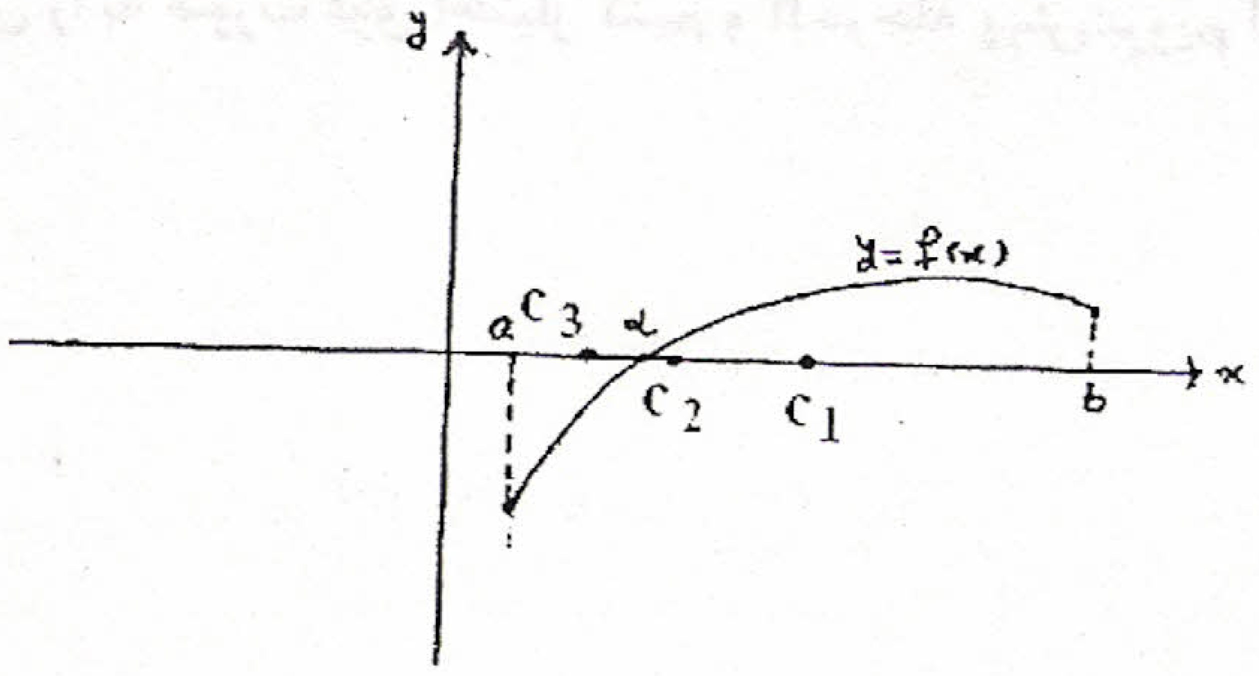
آ) $f(a)f(c_1)<0$، (در این حالت ریشه بین a و c_1 قرار داد.) $\Leftarrow$ قرار می‌دهیم $b=c_1$.

ب) $f(a)f(c_1)>0$، (در این حالت ریشه بین c_1 و b می‌باشد.) $\Leftarrow$ قرار می‌دهیم $a=c_1$

ج) $f(a)f(c_1)=0$.

در حالت (ج) روند خاتمه یافته است، یعنی c_1 ریشه $f(x)=0$ است. در بقیه حالات روند تکرار می‌گردد.

نمایش هندسی روش:



دراین روش دنباله‌ای چون c_n ساخته می‌شود (دنباله دو بخشی)، به طوری که:

اگر $\lim_{n\to+\infty} c_n=\alpha \Rightarrow$ همگرا دنباله واگرا

تعریف ۲: یک روش عددی را همگرا گوییم هرگاه دنباله ساخته شده در روش، همگرا به ریشه معادله باشد، در غیر این صورت روش را واگرا گوییم.

قضیه ۳: روش دو بخشی یک روش همگرا است و در مرحله nام روش داریم:

$$|c_n-\alpha|<\frac{b-a}{2^n}$$

بنابر قضیه (۳) اگر α را با c_n تقریب بزنیم، آن‌گاه خطای این تقریب از $\frac{b-a}{2^n}$ کم‌تر خواهد بود.

معیارهای توقف:

i) تعداد مراحل روش از قبل تعیین شده باشد.

ii) برای $\varepsilon>0$ مفروض، $|c_n-c_{n-1}|<\varepsilon$ آن‌گاه

$$\alpha\simeq c_n$$

iii) برای $\varepsilon>0$ مفروض، $|f(c_n)|<\varepsilon$ آن‌گاه

$$\alpha\simeq c_n$$

iv) گاهی اوقات از عبارت $\left|\frac{c_n-c_{n-1}}{c_{n-1}}\right|<\varepsilon$ استفاده می‌شود (α خیلی بزرگ یا خیلی کوچک باشد) در این صورت خطای نسبی مهم است نه خطای مطلق.

v) برای $\varepsilon>0$ مفروض خطای تقریب از ε کم‌تر باشد، یعنی $|\alpha-c_n|<\varepsilon$.

یادداشت ۲: در بند (v) چون α نامشخص است، پس مقایسه‌ای صورت نمی‌گیرد. اما می‌دانیم در مرحله n ام روش $|\alpha-c_n|<\frac{b-a}{2^n}$، لذا اگر n را به‌گونه‌ای به دست آوریم که $\frac{b-a}{2^n}\le\varepsilon$، آن‌گاه $|\alpha-c_n|<\varepsilon$. پس:

$$2^n\ge\frac{b-a}{\varepsilon}\ \Rightarrow\ n\ge\log_2\frac{b-a}{\varepsilon}\ \Rightarrow\ n=\left[\log_2\frac{b-a}{\varepsilon}\right]+1$$

بنابراین اگر n یعنی تعداد مراحل روش را به صورت فوق اختیار کنیم و n مرحله پیش برویم آن‌گاه خطای c_n از ε کم‌تر است.

خصوصیات روش دو بخشی:

i) روش از نظر اجرا ساده است.

ii) روش همیشه همگرا است. روش تنها زمانی واگرا است که خطای محاسبه $f(x)$ در یک نقطه میانی شامل ریشه باعث شود که مقدار مثبت کوچکی به‌جای مقدار واقعی آن که کوچک و منفی است به دست آید و بالعکس. لذا بازه‌ای که از این به بعد انتخاب می‌شود بازه شامل ریشه نیست. البته این عیب را می‌توان تا حدودی با کار کردن در دقت مضاعف برطرف نمود.

iii) روش نسبتاً کند است، بعد از n مرحله طول بازه شامل ریشه از $\frac{b-a}{2^n}$ کم‌تر است.

iv) روش، ریشه با مرتبه تکرار زوج را برآورد نمی‌کند. (چرا؟)

مثال ۸: جذر عدد 2 را با روش دو بخشی با خطای کم‌تر از 10^{-2} برآورد کنید.

حل: فرض کنیم $x=\sqrt{2}$ باشد، پس $x^2-2=0$. لذا جذر 2 ریشه مثبت معادله $f(x)=x^2-2=0$ است و داریم:

$f(1.4)<0 \quad , \quad f(1.5)>0$

پس جذر 2 در بازه $(1.4\ ,\ 1.5)$ قرار دارد، لذا:

$a=1.4 \quad , \quad b=1.5$

$|\alpha-c_n|<\frac{b-a}{2^n}=\frac{0.1}{2^n}\leq\varepsilon=10^{-2}\Rightarrow 2^n\geq 10\Rightarrow n=4$

پس اگر c_4 را به دست آوریم خطای آن از 10^{-2} کم‌تر خواهد بود، برای تعیین آن ابتدا جدول زیر را تشکیل می‌دهیم و محاسبات را تا سه رقم اعشار انجام می‌دهیم:

n	a	b	c_n	$f(c_n)$
1	1.4	1.5	1.45	+
2	1.4	1.45	1.425	+
3	1.4	1.425	1.413	−
4	1.413	1.425	1.419	

بنابراین $\alpha\simeq c_4=1.419$.

مثال ۹: ریشه معادله $3xe^x-1=0$ را طوری به دست آورید که $|c_n-c_{n-1}|<10^{-3}$.

حل: چون $3xe^x-1=0$ و $e^x\neq 0$ پس داریم:

با تقسیم دوطرف معادله بر e^x به‌دست می‌آید: $f(x)=3x-e^{-x}=0$

$f(0.25)=-0.0288 \quad , \quad f(0.27)=0.0466$

$f'(x)=3+e^{-x}>0$

پس معادله فوق روی بازه $(0.25\ ,\ 0.27)$ تنها یک ریشه حقیقی دارد (معادله روی $\mathbb{R}$ تنها یک ریشه دارد).

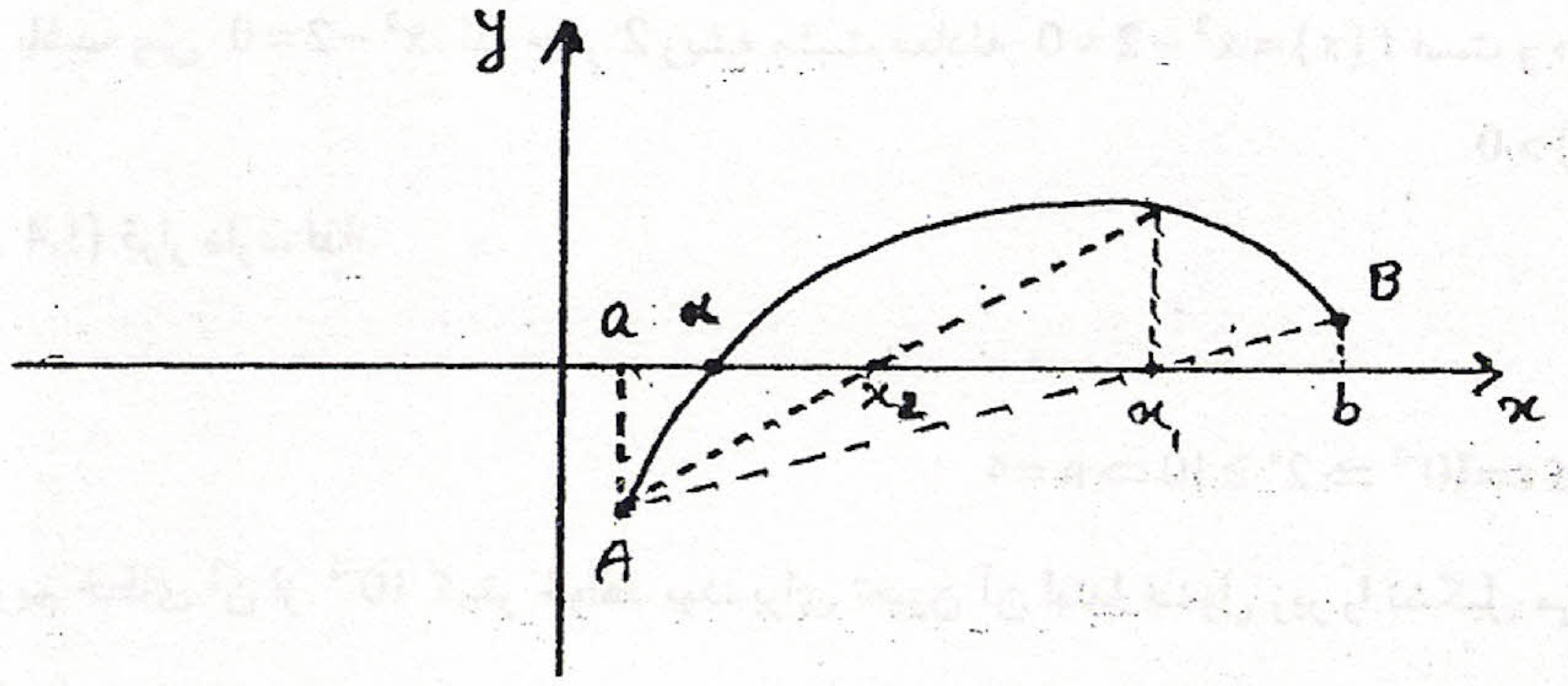
حال جدول مربوطه را تشکیل و محاسبات را تا چهار رقم اعشار انجام می‌دهیم.

n	a	b	c_n	$f(c_n)$
1	0.25	0.27	0.26	0.0089
2	0.25	0.26	0.255	−0.0099
3	0.255	0.26	0.2575	−0.0005
4	0.2575	0.26	0.2588	0.0044
5	0.2575	0.2588	0.2582	0.0022

$|c_5 - c_4| = 0.0006 < 10^{-3} \Rightarrow \alpha \simeq c_5 = 0.25820$

۲.۲.۲ روش نابه‌جایی (False Position)

در این روش فرض می‌کنیم معادله $f(x)=0$ در بازه (a,b) ریشه یکتا دارد و $f(a)f(b)<0$ و f روی $[a,b]$ پیوسته است.



واضح است که $A(a,f(a))$ و $B(b,f(b))$ می‌باشد. خطی که نقاط A و B را به‌هم وصل می‌کند (در حالت کلی منحنی $y=f(x)$، خط نیست) در نظر می‌گیریم و سپس آن را با محور x ها قطع می‌دهیم. پس:

$$AB : \frac{y-f(b)}{x-b} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

$f(x_1)$ را محاسبه می‌کنیم، یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد:

i) $f(a)f(x_1)<0$

ii) $f(a)f(x_1)>0$

iii) $f(a)f(x_1)=0$

در حالت (iii) روند خاتمه یافته است یعنی x_1 ریشه است. در بقیه حالات روند تکرار می‌شود.

با ادامه روند فرض کنیم x_n اختیار شده است و $\alpha \in (x_{n-1}, x_n)$، در این صورت معادله خطی که نقاط به طول x_{n-1} و x_n را به هم وصل می‌کند به صورت زیر است:

$$\frac{y-f(x_n)}{x-x_n} = \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

با تلاقی این خط با محور x ها به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x=x_{n+1} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow x_{n+1}=\frac{x_{n-1}f(x_n)-x_n f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})} \quad , \quad n=2,3,\dots$$

این دنباله به دنباله نابه‌جایی معروف است.

خصوصیات روش نابه‌جایی:

i) این روش مانند روش دو بخشی همگرایی تقریباً تضمین شده دارد و عموماً از روش دو بخشی سریع‌تر است. اما اگر تمام یا اکثر x_iها در یک طرف ریشه باشند همگرایی احتمالاً کند است.

ii) عملیات روش از روش دو بخشی بیش‌تر است و کران بالایی برای $|x_n-\alpha|$ نمی‌توان تعیین کرد.

iii) این روش مانند روش دو بخشی، ریشه با مرتبه تکرار زوج را برآورد نمی‌کند.

معیار توقف

۱) $|x_n-x_{n-1}|<\varepsilon$ ، ۲) $|f(x_n)<\varepsilon|$ ، ۳) $n=n_1$ (تعداد مراحل مشخص)

مثال ۱۰: ریشه معادله $3xe^x-1=0$ را با روش نابه‌جایی طوری برآورد کنید که $|x_n-x_{n-1}|<10^{-3}$.

حل: در مثال (۱۰) مشاهده شد که:

$$\alpha\in(0.25,0.27) \quad ; \quad a=0.25 \quad , \quad b=0.27$$

$$f(0.25)=-0.0288 \quad , \quad f(0.27)=0.0466$$

پس داریم:

$$x_1=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}=0.2577$$

$$f(x_1)=0.0003$$

چون $f(a)f(x_1)<0$ پس $\alpha\in(a,x_1)$ می‌باشد، لذا:

$$x_2=\frac{af(x_1)-x_1f(a)}{f(x_1)-f(a)}=0.2576$$

$$f(x_2)=-0.0001$$

پس $\alpha\in(x_2,x_1)$ و داریم:

$$x_3=\frac{x_2f(x_1)-x_1f(x_2)}{f(x_1)-f(x_2)}=0.2576$$

$$|x_3-x_2|=0.0000<10^{-4}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\alpha\simeq x_3=0.2576$$

یادداشت ۳: مثال (۱۰) و (۹) را مقایسه کنید، مشاهده می‌شود که در مثال (۱۰) با تعداد مراحل کم‌تر به دقت بیش‌تری دست یافته‌ایم.

۲.۲.۳ روش تکرار ساده یا نقطه ثابت (Simple Iteration Method)

در این روش معادله $f(x)=0$ را به صورت $x=g(x)$ می‌نویسیم به طوری که α ریشه هر دو معادله باشد (الزاماً دو معادله هم‌ارز نیستند).

فرض کنیم x_0 یک تقریب اولیه از α باشد (این تقریب اولیه را خود اختیار می‌کنیم، خوب است، x_1 از روش نابه‌جایی اختیار شود). قرار می‌دهیم:

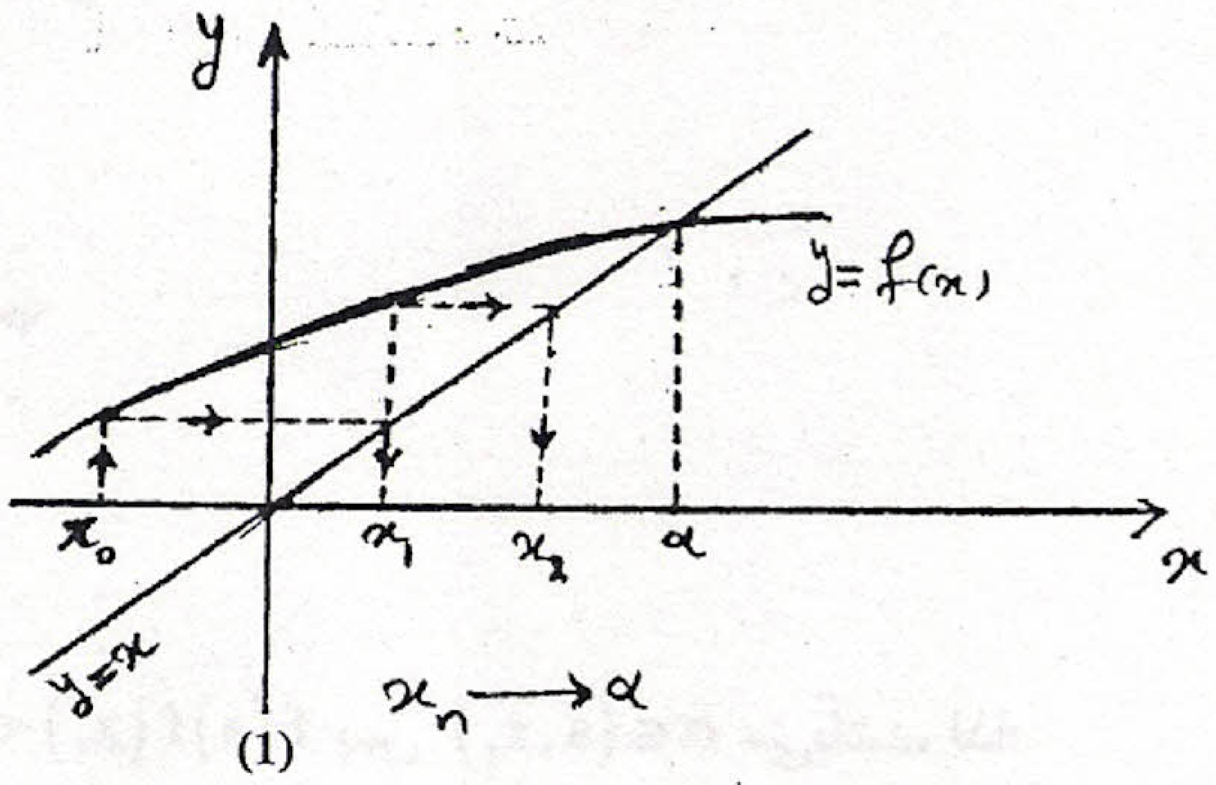
$$x_1=g(x_0)$$
$$x_2=g(x_1)$$
$$\vdots$$
$$x_{n+1}=g(x_n)\quad,\quad n=0,1,2,3,\ldots$$

پس در این روش با انتخاب یک g و x_0 دنباله تکرار ساده $x_{n+1}=g(x_n)$ را تشکیل می‌دهیم.

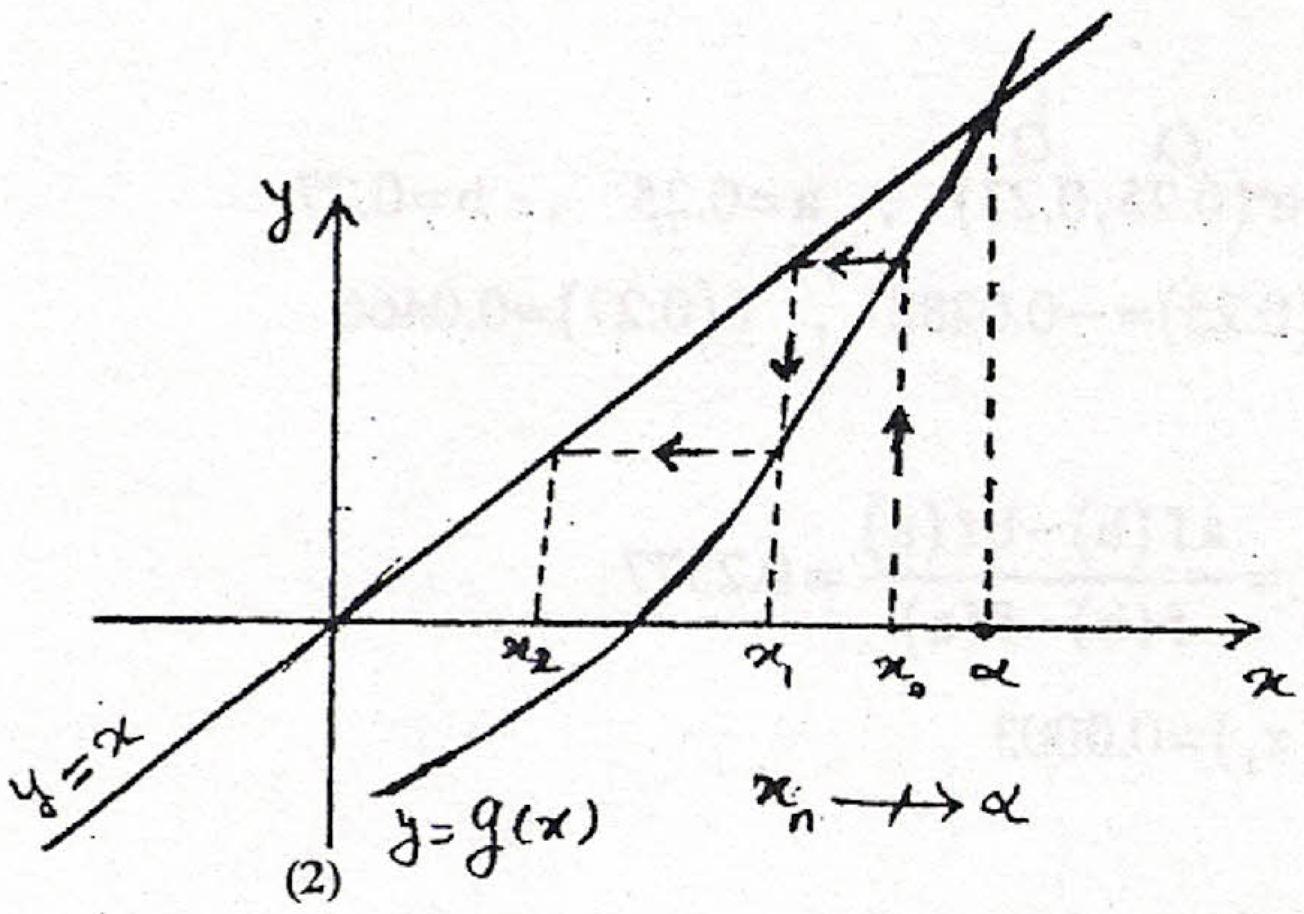
سؤال: آیا دنباله اخیر برای هر انتخاب g و x_0 همگرا به α است به عبارت دیگر آیا روش تکرار ساده برای هر g و x_0 همگراست؟

پاسخ در حالت کلی منفی است، مشاهده خواهید کرد که همگرایی روش به انتخاب g و x_0 بستگی دارد.

نمایش هندسی روش تکرار ساده: شکل‌های زیر را در نظر می‌گیریم:



(1)



(2)

در شکل (۱) مشاهده می‌شود با وجود این که x_0 تقریب مناسبی از α نمی‌باشد ولی دنباله x_n، به سرعت به α همگراست، اما در شکل (۲) با تقریب اولیه مناسب x_0؛ دنباله تکرار ساده واگراست.

بنابراین همان‌طوری که مشاهده می‌شود (از نظر هندسی) روش تکرار ساده تحت شرایطی همگراست. این شرایط را قضیه زیر بیان می‌کند.

قضیه ۴: هرگاه α ریشه یکتای معادله $f(x)=0$ در بازه $(a\,,\,b)$ باشد و $\alpha=g(\alpha)$ و g بر $[a,b]$ مشتق‌پذیر و داشته باشیم:

$$\forall x\in[a,b]\quad,\quad |g'(x)|\le L<1\quad,\quad a\le g(x)\le b$$

در این صورت روش تکرار ساده برای هر $x_0\in[a,b]$ همگراست و هر چه L کوچک‌تر باشد روش سریع‌تر است.

تحت شرایط قضیه فوق، ثابت کنید:

$$|x_n-\alpha|\le L^n\max\{x_0-a\,,\,b-x_0\}\quad,\quad n\ge 1$$

$$|x_n-\alpha|<\frac{L^n}{1-L}|x_0-x_1|\quad,\quad n\ge 1$$

$$|x_n-\alpha|<\frac{L}{1-L}|x_n-x_{n-1}| \quad , \quad n\geq 1$$

نامساوی دوم بیان می‌کند که اگر L به یک نزدیک باشد $(0<L<1)$ روش می‌تواند کند شود.

معیار توقف

i) تعداد مراحل روش از قبل تعیین شده باشد $(n=n_1)$

ii) برای $\varepsilon>0$ مفروض، $|x_n-x_{n-1}|<\varepsilon$ یا $|f(x_n)|<\varepsilon$ یا $\left|\frac{x_n-x_{n-1}}{x_{n-1}}\right|<\varepsilon$ آن‌گاه:

$$\alpha=x_n$$

یادداشت ۴: شرایط قضیه (۴) برای همگرایی، یک شرط کافی است نه لازم.

مثال نقض: واضح است که $\alpha=\frac{1}{2}$ ریشه معادله $f(x)=2x^2-x=0$ می‌باشد و داریم:

$$x=2x^2=g(x)$$

$$x_0=\frac{1}{2} \quad , \quad x_{n+1}=g(x_n)=2x_n^2$$

لذا با $x_0=\frac{1}{2}$ خواهیم داشت:

$$x_1=\frac{1}{2}, x_2=\frac{1}{2}, \dots, x_n=\frac{1}{2}$$

پس $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\frac{1}{2}$، اما شرط $|g'(x)|<1$ در همسایگی $\frac{1}{2}$ برقرار نیست.

مثال ۱۱: ریشه معادله $3xe^x-1=0$ را با استفاده از روش تکرار ساده طوری برآورد کنید که $|x_n-x_{n-1}|<10^{-4}$.

حل: در مثال (۱۰) و (۹) مشاهده شد که معادله مذکور تنها یک ریشه دارد که در بازه $(0.25\ ,\ 0.27)$ می‌باشد. داریم:

$$x=\frac{1}{3}e^{-x}=g(x) \quad , \quad g'(x)=-\frac{1}{3}e^{-x}<0 \quad , \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$$|g'(x)|=\frac{1}{3}e^{-x}\leq\frac{1}{3}e^{-0.25}<0.27<1$$

چون $g'(x)<0$ پس g نزولی است، لذا:

$$0.25<g(0.27)\leq g(x)\leq g(0.25)<0.27$$

پس $0.25\leq g(x)\leq 0.27$ و لذا شرایط قضیه (۴) مهیاست و داریم:

$$x_{n+1}=g(x_n)=\frac{1}{3}e^{-x_n}$$

فرض کنیم $x_0=0.26$، با این انتخاب داریم:

$$x_1=0.25700$$
$$x_2=0.25779$$
$$x_3=0.25759$$
$$x_4=0.25764$$

مشاهده می‌شود که $|x_4-x_3|<10^{-4}$ پس،

$$\alpha=x_4=0.25764$$

مرتبه همگرایی یک روش:

تعریف ۳: فرض کنیم x_n دنباله ساخته شده در یک روش عددی باشد که همگرا به α ریشه معادله $f(x)=0$ می‌باشد، گوییم مرتبه همگرایی روش، عدد مثبت p است (یا مرتبه همگرایی دنباله x_n عدد p است.) هرگاه:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}-\alpha}{|x_n-\alpha|^p}=c\neq 0}$$

از تعریف فوق مشاهده می‌گردد هرچه مرتبه همگرایی روش بالاتر باشد، روش سریع‌تر است.

قضیه ۵: فرض کنیم α ریشه یکتای معادله $f(x)=0$ در بازه (a,b) باشد و $\alpha=g(\alpha)$ و g' در همسایگی α موجود و پیوسته و $g'(a)\neq 0$، در این صورت و در صورت همگرایی روش تکرار ساده، روش از مرتبه همگرایی یک برخوردار است.

یادداشت ۵: هرگاه $g'(\alpha)=g''(\alpha)=\cdots=g^{(m-1)}(\alpha)=0$ و $g^{(m)}(\alpha)\neq 0$ آن‌گاه مرتبه همگرایی روش m است. پس می‌توان گفت که مرتبه همگرایی روش تکرار ساده حداقل یک است.

۲ . ۲ . ۴ روش نیوتن ـ رفسون (Newton – Raphson Method)

فرض کنید α ریشه یکتای معادله $f(x)=0$ در بازه $(a\,,\,b)$ بوده و x_0 یک تقریب اولیه از α باشد و $\alpha-x_0=h$، پس با استفاده از قضیه تیلر داریم:

$$0=f(\alpha)=f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2!}f''(\xi)$$

که در آن ξ بین x_0+h و x_0 قرار دارد. وقتی h کوچک باشد از جمله سوم تساوی اخیر به علت کوچکی صرف‌نظر می‌کنیم و داریم:

$$0=f(x_0)+hf'(x_0)\Rightarrow h\simeq-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

لذا خواهیم داشت:

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

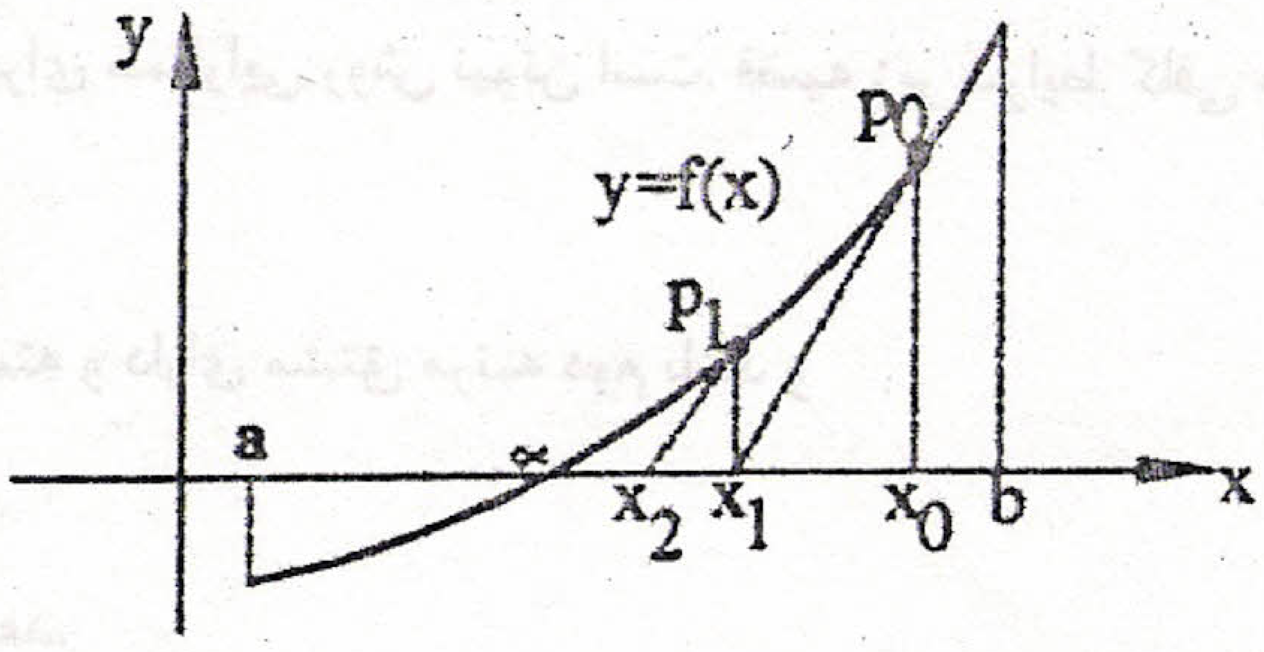
با ادامه روند یاد شده دنباله نیوتن به صوت زیر به دست می‌آید:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\quad,\quad n=0,1,2,\ldots$$

البته با این فرض که $f'(x)$ در همسایگی α مخالف صفر باشد.

تعبیر هندسی روش نیوتن:

در شکل زیر خط مماس در نقطه P_0 محور xها را در نقطه‌ای به طول x_1 و خط مماس در نقطه P_1 محور xها را در نقطه‌ای به طول x_2 قطع کرده است.



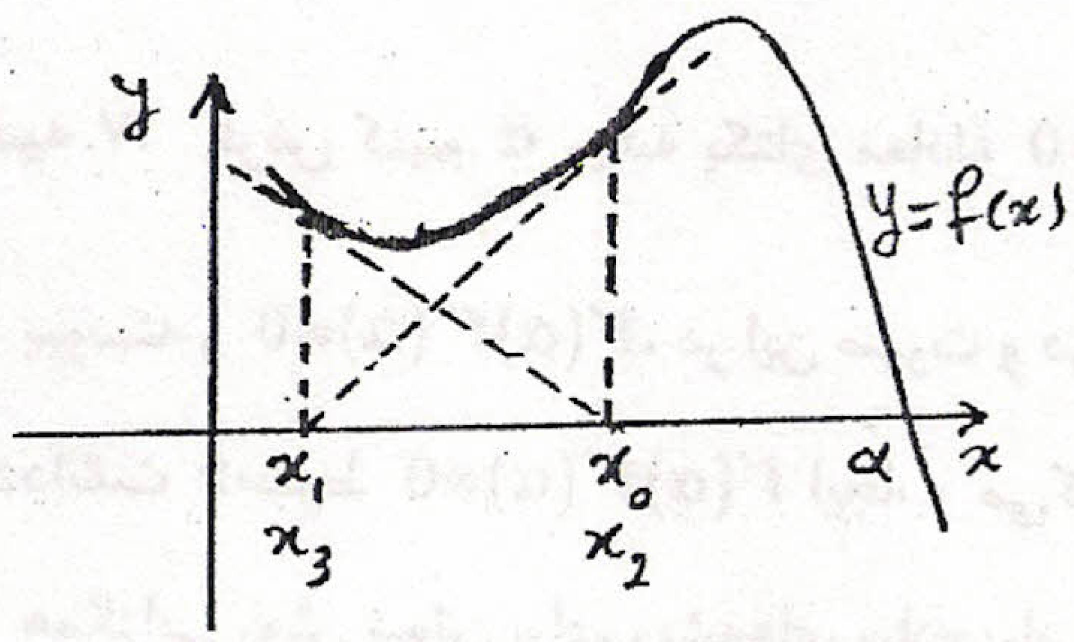
معادله خط مماس در نقطه p_0 به صورت زیر است:

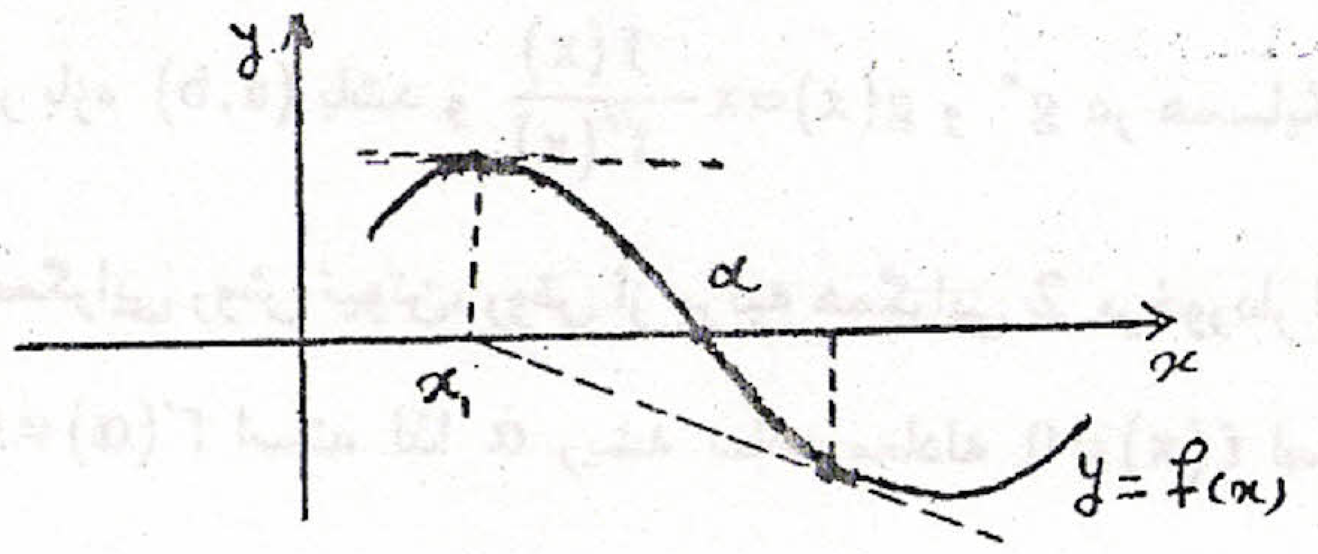
$$y-f(x)=f'(x_0)(x-x_0)$$

از تلاقی این خط با محور x ها داریم:

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

بنابراین می‌توان نام این روش را روش مماس هم نامید. شکل فوق نشان می‌دهد که روش نیوتن همگراست اما شکل‌های زیر نشان می‌دهد که روش واگرا است.





شرط کافی برای همگرایی:

اگر $f'(x)$ در همسایگی از α مخالف صفر باشد، آن‌گاه:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

پس اگر در روش تکرار ساده $g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ بگیریم، آن‌گاه دنباله تکرار ساده به صورت زیر است که همان دنباله نیوتن است، پس روش نیوتن حالت خاص روش تکرار ساده است.

$$x_{n+1}=g(x_n)=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

می‌دانیم یک شرط کافی برای همگرایی تکرار ساده آن است که $\boxed{|g'(x)|<1}$. چون $g'(x)$ به صورت زیر است:

$$g'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

پس اعمال شرط فوق نتیجه می‌دهد که:

$$\boxed{|f(x)f''(x)|<(f'(x))^2}$$

بنابراین نامساوی اخیر یک شرط کافی برای همگرایی روش نیوتن است. قضیه زیر شرایط کافی دیگری برای همگرایی روش نیوتن ارایه می‌دهد.

قضیه ۶: هرگاه تابع f بر $[a,b]$ پیوسته و دارای مشتق مرتبه دوم باشد و

i) $f(a)f(b)<0$.

ii) f'' بر $[a,b]$ تغییر علامت ندهد.

iii) مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقاط به طول a و b محور x ها را در داخل بازه $[a,b]$ قطع کند.

در این صورت معادله $f(x)=0$ دارای ریشه یکتایی مانند α در (a,b) است و برای هر $x_0 \in [a,b]$ روش نیوتن به α همگرا می‌باشد.

باید توجه داشت که شرط (i) تضمین یک ریشه می‌کند و شرط (ii) نشان می‌دهد تابع محدب یا مقعر است، در نتیجه معادله $f(x)=0$ یک ریشه در (a,b) خواهد داشت.

شرط (ii) و (iii) اطمینان می‌دهد که اگر $x_n \in [a,b]$، آن‌گاه نقطه تکراری بعدی یعنی x_{n+1}، در بازه $[a,b]$ قرار دارد.

قضیه زیر نشان می‌دهد که مرتبه همگرایی روش دو می‌باشد.:

قضیه ۷: فرض کنیم α ریشه یکتای معادله $f(x)=0$ در بازه (a,b) باشد و $g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$ و g'' در همسایگی α موجود و پیوسته و $f'(\alpha)f''(\alpha)\neq 0$، در این صورت و در صورت همگرایی روش نیوتن، روش از مرتبه همگرایی 2 برخوردار است.

یادداشت ۶: شرط $f'(\alpha)f''(\alpha)\neq 0$ ایجاب می‌کند که $f'(\alpha)\neq 0$ است، لذا α ریشه ساده معادله $f(x)=0$ است. پس مرتبه همگرایی روش نیوتن برای ریشه‌های ساده برابر 2 است.

اگر α ریشه تکراری معادله و از مرتبه تکرار m باشد $(m>1)$، می‌توان نشان داد که مرتبه همگرایی دنباله نیوتن $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ برابر یک است. خوشبختانه می‌توان دنباله‌ای با مرتبه همگرایی 2 ایجاد کرد. چون α ریشه تکراری معادله از مرتبه‌ی تکرار m است، پس:

$$f(x)=(x-\alpha)^m g(x) \quad , \quad g(\alpha)\neq 0$$

واضح است که α ریشه ساده معادله $h(x)=\sqrt[m]{f(x)}=0$ است.

پس مرتبه همگرایی دنباله نیوتن $x_{n+1}=x_n-\frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$ برابر 2 می‌باشد، با ساده‌سازی و انجام عملیات مناسب دنباله اخیر به صورت زیر درمی‌آید:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{mf(x_n)}{f'(x_n)}.$$

بنابراین اگر α ریشه تکراری و از مرتبه تکرار m باشد، دنباله $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ دارای مرتبه همگرایی یک، ولی دنباله $x_{n+1}=x_n-\dfrac{mf(x_n)}{f'(x_n)}$ دارای مرتبه همگرایی 2 می‌باشد.

یادداشت ۷: چون مرتبه همگرایی روش نیوتن برای ریشه‌های ساده برابر 2 می‌باشد تحت شرایطی می‌توان نشان داد که هرگاه x_n دارای k رقم اعشاری درست باشد آن‌گاه x_{n+1} حداقل $2k$ رقم اعشاری درست دارد یعنی هر بار از مرحله‌ای به مرحله بعد تعداد ارقام اعشاری تقریباً دو برابر می‌شود. بنابراین مشاهده می‌شودکه روش نیوتن روش بسیار سریعی می‌باشد، به همین دلیل اکثر ماشین حساب‌ها و نرم‌افزارهای مهیا جهت برآورد ریشه یک معادله از روش نیوتن استفاده می‌کنند.

مثال ۱۲: ریشه معادله $3xe^x-1=0$ را به گونه‌ای برآورد کنید که $|x_n-x_{n-1}|<10^{-16}$.

حل: در مثال‌های (۹) و (۱۰) و (۱۱) مشاهده شد که تنها ریشه معادله در بازه $(0.25\,,\,0.27)$ قرار دارد. پس:

$$3xe^x-1=0\Rightarrow f(x)=3x-e^{-x}=0$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\quad,\quad f'(x)=3+e^{-x}\Rightarrow x_{n+1}=x_n-\frac{3x_n-e^{-x_n}}{3+e^{-x_n}}\Rightarrow x_{n+1}=\frac{1+x_n}{1+3e^{x_n}}$$

با اختیار کردن $x_0=0.25$ خواهیم داشت:

$$x_1=0.\underline{2576}2167278053644$$

$$x_2=0.\underline{25762765304}607360$$

$$x_3=\underline{0.2576276530497366}7$$

$$x_4=0.25762765304973670\,a_{18}\cdots a_{30}$$

$$x_5=0.2576276530497370\,a_{18}\cdots a_{60}$$

مشاهده می‌شود که $|x_4-x_3|<10^{-16}$، پس $\alpha\simeq x_4$. در واقع x_4 تقریبی از ریشه معادله با حدود 30 رقم اعشاری درست می‌باشد.

ریشه k ام عدد حقیقی a به کمک روش نیوتن:

فرض کنیم a و k به گونه‌ای هستند که $\sqrt[k]{a}$ تعریف شده است و $x=\sqrt[k]{a}$ پس $\sqrt[k]{a}$ یک ریشه معادله زیر است.

$$f(x)=x^k-a=0 \quad , \quad k\in N \quad , \quad k>1 \; .$$

چون $f'(x)=kx^{k-1}$ پس دنبال نیوتن به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{x_n^k-a}{kx_n^{k-1}}=x_n-\frac{x_n}{k}+\frac{a}{kx_n^{k-1}}$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=\frac{1}{k}\left[(k-1)x_n+\frac{a}{x_n^{k-1}}\right].$$

بنابراین دنباله زیر با انتخاب x_0 مناسب همگرا به $\sqrt[k]{a}$ است:

$$x_{n+1}=\frac{1}{k}\left[(k-1)x_n+\frac{a}{x_n^{k-1}}\right].$$

در حالت خاص برای $k=2$ دنباله زیر همگرا به جذر a می‌باشد:

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right).$$

مثال ۱۳: جذر 2 را با 7 رقم اعشاری درست برآورد کنید.

تا زمانی که هر دو 7 رقم در x_n و x_{n+1} یکسان شود

حل: جذر2 از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)$$

با انتخاب تقریب اولیه $x_0=1.4$ داریم:

$x_1=1.4142857$

$x_2=1.4142136$

$x_3=1.4142136 \quad , \quad |x_3-x_2|=0.0000000.$

بنابراین جذر 2 به صورت زیر برآورد می‌شود:

$$\sqrt{2}\simeq x_2=1.4142136.$$

مثال ۱۴: ریشه پنجم عدد 20 را با 16 رقم اعشاری درست برآورد کنید.

حل: چون $a=20$ و $k=5$ پس دنباله نیوتن برای $\sqrt[5]{20}$ به صورت زیر است:

$$x_{n+1}=\frac{1}{5}\left(4x_n+\frac{20}{x_n^4}\right)$$

با انتخاب تقریب اولیه $x_0=1.8$ داریم:

$x_1=1.8210394756896815$

$x_2=1.8205644510439427$

$x_3=1.820564203026148$

$x_4=1.8205642030260802$

$x_5=1.8205642030260802.$

پس داریم:

$$\sqrt[5]{20} \simeq x_4 = 1.8205642030260802$$

۵.۲.۲ روش وتری یا خط قاطع (secant Method)

روش نیوتن با وجود همگرایی سریع دارای نقایصی می‌باشد، از جمله :

در هر مرحله باید مقدار f' را در نقطه‌ای که قبلاً حساب شده است تعیین کرد. گاهی اوقات محاسبه $f'(x_n)$ و تعیین مقدار آن در نقاطی از حوزه تعریفش مشکل است و یا حتی $f'(x)$ موجود نیست، روش وتری برای پرهیز از این مشکلات است، که آن را به صورت زیر می‌توان بیان کرد:

فرض کنیم x_0 و x_1 دو تقریب اولیه از ریشه α از معادله $f(x)=0$ باشد و $p_0 p_1$ خطی است که نقطه‌ای به طول x_0 را به نقطه‌ای به طول x_1 واقع بر نمودار f وصل می‌کند، پس معادله $p_0 p_1$ به صورت زیر است:

$$p_0 p_1 : \frac{y-f(x)}{x-x_1} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

از تلاقی این خط با محور x ها خواهیم داشت:

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)}$$

حال فرض کنیم $p_2 \left| \begin{matrix} x_2 \\ f(x_2) \end{matrix} \right.$، از تلاقی خط $p_1 p_2$ با محور x ها به دست می‌آوریم:

$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}$$

با ادامه روند دنباله وتری به صورت زیر به دست می‌آید که در صورت همگرایی از مرتبه همگرایی $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ برخوردار است.

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

چون $2 > \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ ، پس در صورت همگرایی، روش وتری از روش نیوتن کندتر و از روش تکرار ساده سریع‌تر است.

مثال‌های متنوع تستی حل شده:

مثال ۱۵: در روش دو بخشی بعد از n مرحله، خطا کم‌تر است از:

۱) $\frac{b-a}{2^n}$ ۲) $\frac{b-a}{2^{n-1}}$ ۳) $\frac{b-a}{2^{n+1}}$ ۴) هیچکدام

حل: در روش دو بخشی در مرحله nام داریم:

$$|x_n-\alpha|<\frac{b-a}{2^n}$$

پس گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مثال ۱۶: فرض کنید معادله $f(x)=0$ در بازه $[0,1]$ دارای ریشه یکتایی چون α می‌باشد و $f(0)f(1)<0$ و f بر $[0,1]$ پیوسته است. پس از چند تکرار از روش دو بخشی مطمئن هستیم که خطای برآورد ریشه از 10^{-4} کم‌تر است؟

۱) 12 تکرار ۲) 13 تکرار

۳) 11 تکرار ۴) 14 تکرار

حل: چون در مرحله nام روش دو بخشی داریم:

$$|c_n-\alpha|<\frac{b-a}{2^n}$$

از طرفی $a=0$ و $b=1$، پس خواهیم داشت:

$$\frac{b-a}{2^n}=\frac{1}{2^n}\le 10^{-4}\Rightarrow 2^n\ge 10000\Rightarrow n\ge 14$$

پس $n=14$ ، لذا گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

مثال ۱۷: مرتبه همگرایی روش تکرار ساده کدام است؟

۱) 1 ۲) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ۴) 2

حل: گزینه ۱ صحیح می‌باشد. (در حالت کلی مرتبه همگرایی حداقل یک است)

مثال ۱۸: کدام‌یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

۱) روش وتری از روش دو بخشی تندتر است.

۲) روش وتری از روش دوبخشی کندتر است.

۳) روش نیوتن از روش دو بخشی و روش نابه‌جایی و روش وتری سریع‌تر است.

۴) ۱ و ۳ صحیح می‌باشد.

حل: گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

مثال ۱۹: معادله $x^5+2x+k=0$ که در آن k ثابت مخالف صفر است. دارای چند ریشه حقیقی است؟

۱) دقیقاً یک ریشه حقیقی
۲) حداقل یک ریشه حقیقی
۳) ریشه حقیقی ندارد
۴) دو ریشه حقیقی یا بیش‌تر دارد

حل: فرض کنیم $f(x)=x^5+2x+k$ چون f یک تابع چندجمله‌ای از درجه فرد می‌باشد، پس معادله حداقل یک ریشه حقیقی دارد و از طرف دیگر داریم:

$$f'(x)=5x^4+2>0$$

پس f یک تابع صعودی اکید است لذا حداکثر یک ریشه حقیقی دارد، پس معادله دقیقاً یک ریشه حقیقی دارد. در نتیجه گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مثال ۲۰: دنباله تکراری $x_{n+1}=\frac{1}{10}\cos x_n$ مفروض است، کدام‌یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

۱) برای هر تقریب اولیه x_0 واگراست.
۲) برای هر تقریب اولیه x_0 همگراست.
۳) تحت شرایطی همگراست.
۴) تحت شرایطی از x_0 واگراست.

حل: چون $x_{n+1}=\frac{1}{10}\cos x_n$، پس اگر قرار دهیم $g(x_n)=\frac{1}{10}\cos x_0$، آن‌گاه دنباله $x_{n+1}=g(x_n)$ ایجاد می‌شود و داریم:

$$g(x)=\frac{1}{10}\cos x$$

$$|g'(x)|=\left|\frac{-1}{10}\sin x\right|=0.1|\sin x|\le 0.1<1$$

پس x_0 هرچه باشد دنباله همگراست، لذا گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

مثال ۲۱: برای یافتن ریشه سوم عدد a با روش نیوتن کدام‌یک از دنباله‌های زیر مناسب است؟

۱) $x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n-\frac{a}{x_n^3}\right)$
۲) $x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{a}{x_n^3}\right)$
۳) $x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{a}{x_n^2}\right)$
۴) $x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n-\frac{a}{x_n^2}\right)$

حل: گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مثال ۲۲: اگر روش نیوتن را برای محاسبه ریشه سوم عدد 9 به‌کار ببریم، در این صورت اگر تقریب اولیه $x_0=2$ فرض شود و دقت برابر 10^{-4} باشد، حداکثر بعد از چند مرحله به جواب خواهیم رسید؟

۱) 3
۲) 5
۳) 7
۴) 2

حل: در این مثال $a=9$ و $k=3$ می‌باشد، پس:

$$x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{9}{x_n^2}\right)$$

$$x_0=2 \Rightarrow x_1=2.0833 \quad , \quad |x_1-x_0|=0.8333 \not< 10^{-4}$$

$$x_2=2.08009 \quad , \quad |x_2-x_1|=0.00324 \not< 10^{-4}$$

$$x_3 = 2.08008 \quad , \quad |x_3 - x_2| = 0.00001 < 10^{-4}$$

پس $n = 3$، لذا گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مثال ۲۳: اگر α ریشه معادله $f(x) = 0$ با مرتبه تکرار m باشد $(m > 1)$ کدام‌یک از دنباله‌های زیر از مرتبه همگرایی دو برخوردار است؟

۱) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ۲) $x_{n+1} = x_n + \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ۳) $x_{n+1} = x_n + \dfrac{mf(x_n)}{f'(x_n)}$ ۴) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{mf(x_n)}{f'(x_n)}$

حل: گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

مثال ۲۴: شرط همگرایی فرمول تکرار ساده برای $x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$ کدام است؟ $(a > 0)$

۱) $\dfrac{1}{2a} < x < \dfrac{3}{2a}$ ۲) $a < x < \dfrac{3}{2a}$ ۳) $\dfrac{1}{a} < x < \dfrac{3}{a}$ ۴) $a < x < \dfrac{3}{a}$

حل: شرط کافی برای همگرایی روش تکرار ساده آن است که $|g'(x)| < 1$ باشد. در این مثال $g(x_n) = x_n(2 - ax_n)$، پس $g(x) = x(2 - ax)$ لذا خواهیم داشت،

$$|g'(x)| = |2 - 2ax| < 1 \Rightarrow -1 < 2 - 2ax < 1 \Rightarrow -3 < -2ax < -1 \Rightarrow \frac{1}{2a} < x < \frac{3}{2a}$$

پس گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تمرین‌های تشریحی:

تعداد و محل تقریبی ریشه‌های معادلات زیر را تعیین کنید.

۱ـ $4xe^{x}-1=0$ ۲ـ $x+\cos x=0$

۳ـ $x-\tan x=0$ ۴ـ $x^{2}\cos x-1=0$

۵ـ $e^{x}-3x^{2}=0$ ۶ـ $x\sin^{2}x-1=0$

۷ـ $e^{-x^{2}}-Ln(x)=0$ ۸ـ $x+1+\sin x=0$

۹ـ $10\cos x-x=0$ ۱۰ـ $x\cos x-1=0$

تقریبی از جواب مثبت معادلات زیر را با روش دو بخشی و دقت خواسته شده به دست آورید.

۱۱ـ $|c_n-c_{n-1}|<10^{-3}$, $10x-\cos x=0$

۱۲ـ $|c_n-\alpha|<10^{-3}$, $x+\tan x=0$ کوچک‌ترین ریشه مثبت

۱۳ـ $|c_n-c_{n-1}|<10^{-3}$, $x-0.2\sin x-0.5=0$

۱۴ـ $\tan x-e^{x}=0$ کوچک‌ترین ریشه مثبت با معیار توقف $|c_n-c_{n-1}|<10^{-3}$

۱۵ـ $|c_n-c_{n-1}|<10^{-3}$, $e^{-x^{2}}-Ln\ x=0$

۱۶ـ تمرین‌های ۱ و ۳ و ۴ و ۵ را با روش نابه‌جایی حل کنید.

۱۷ـ ریشه معادلات زیر را با روش تکرار ساده برآورد کنید.

i) $10x-\cos x=0$, $|x_n-x_{n-1}|<10^{-5}$

ii) $20xe^{x}-3=0$, $|x_n-x_{n-1}|<10^{-7}$

iii) $5x+\sin x-1=0$, $|x_n-x_{n-1}|<10^{-5}$

۱۸ـ ریشه معادلات زیر را با روش نیوتن ـ رفسون و روش وتری با معیار خواسته شده برآورد کنید.

i) $x-e^{-2x}=0$, $|x_n-x_{n-1}|<10^{-9}$

ii) $4xe^{x}-1=0$, $|x_n-x_{n-1}|<10^{-9}$

iii) $e^{-x^{2}}-\cos x=0$, $|x_n-x_{n-1}|<10^{-7}$ (کوچک‌ترین ریشه مثبت)

iv) $e^{x}-3x^{2}=0$, $|x_n-x_{n-1}|<10^{-5}$

۱۹ـ با روش نیوتن ـ رفسون برآوردی از $\sqrt[3]{3}$ ، $\sqrt[4]{4}$ ، $\sqrt[5]{5}$ و $\sqrt[5]{8}$ را با ۸ رقم اعشاری درست به دست آورید.

۲۰ـ تقریبی از ریشه معادله $f(x)=1+x^{2}-\cos^{2}x=0$ را با روش نیوتن با $x_0=0.5$ به گونه‌ای برآورد کنید که $|x_n-x_{n-1}|<10^{-7}$.

تمرین‌های چهار گزینه‌ای:

۱ ـ معادله $e^{-x^2}-\frac{1}{2}\cos hx=0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۱) یکی ۲) دوتا ۳) سه‌تا ۴) ریشه حقیقی ندارد

۲ ـ معادله $x\cos x-1=0$ چند ریشه حقیقی مثبت دارد؟

۱) بی‌نهایت ۲) دوتا ۳) سه‌تا ۴) هیچ‌کدام

۳ ـ معادله $xe^{-x^2}-1=0$ روی بازه $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ دارای

۱) یک ریشه است. ۲) بیش از یک ریشه است. ۳) ریشه نیست. ۴) دو ریشه است.

۴ ـ مرتبه همگرایی روش نابه‌جایی و وتری تقریباً کدام است؟

۱) 1 ۲) دو ۳) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ۴) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

۵ ـ فرض کنید تابع $g:[a,b]\to[a,b]$ پیوسته و مشتق‌پذیر باشد و α ریشه معادله $f(x)=0$ در بازه (a,b) باشد و $\alpha=g(\alpha)$، تحت چه شرایطی روش تکرار ساده همگراست؟

۱) $|g'(x)|<1 \quad , \quad x_0\in[a,b]$ ۲) $|g'(x)|\leq1 \quad , \quad x_0\in[a,b]$

۳) $|g'(x)|>1 \quad , \quad x_0\in[a,b]$ ۴) $|g'(x)|\geq1 \quad , \quad x_0\in[a,b]$

۶ ـ کدام‌یک از دنباله‌های زیر همگرا به $\sqrt{2}$ است؟

۱) $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n-\frac{2}{x_n}\right)$ ۲) $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)$

۳) $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{2x_n}\right)$ ۴) $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n-\frac{1}{2x_n}\right)$

۷ ـ معادله $2^x=x^2$ دارای چند ریشه حقیقی است؟

۱) دوتا ۲) یکی ۳) سه‌تا ۴) بیش از سه‌تا

۸ ـ اگر روش نیوتن را برای محاسبه ریشه پنجم عدد 20 به‌کار ببریم و نقطه شروع $x_0=2$ باشد، بعد از چند مرحله به جواب 1.820 می‌رسیم؟

۱) 5 ۲) 4 ۳) 3 ۴) 2

۹ ـ فرمول $x_{n+1}=x_n(2-ax_n)$ تقریبی از معکوس عدد $a\neq0$ را با روش نیوتن محاسبه می‌کند اگر $e_n=x_n-\frac{1}{a}$، کدام گزینه درست است؟

۱) $e_{n+1}\simeq a^2e_n$ ۲) $e_{n+1}\simeq ae_n^2$ ۳) $e_{n+1}\simeq ae_n$ ۴) $e_{n+1}\simeq\frac{1}{a}e_n^2$

۱۰ ـ عدد $\alpha=\frac{1}{2}$ یک ریشه معادله $4x^3+8x^2-11x+3=0$ است، اگر دنباله حاصل از روش تکراری نیوتن برای تعیین این ریشه همگرا باشد، مرتبه همگرایی آن کدام است؟

۱) یکی ۲) دو ۳) سه ۴) حداقل دو