فصل ۳

درون‌یابی و تقریب چند جمله‌ای

یکی از مفیدترین و معروف‌ترین رده‌های توابع رده چند جمله‌ای‌های جبری است. یعنی مجموعه توابع به شکل $p_n(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ که در آن n یک عدد صحیح نامنفی است و $a_n,...,a_1,a_0$ ثابت‌های حقیقی می‌باشند. یک دلیل عمده بر اهمیت آن‌ها این است که توابع پیوسته را به طور یکنواخت تقریب می‌زنند، یعنی برای هر تابع پیوسته بر یک بازه بسته چند جمله‌ایی وجود دارد که به هرمیزان بخواهیم می‌توان آن را به تابع نزدیک کرد. این موضوع در قضیه زیر به‌طور دقیق‌تر بحث می‌شود.

قضیه ۱: (قضیه تقریب استون وایر شتراس)

اگر تابع f بر $[a,b]$ پیوسته و ε عدد حقیقی دلخواه مثبت باشد، آن‌گاه چند جمله‌ای مانند p که بر $[a,b]$ تعریف شده است وجود دارد به‌طوری‌که:

$$|f(x)-p(x)|<\varepsilon$$

خاصیت مهم دیگر چند جمله‌ای‌ها در تقریب توابع این ست که مشتق و انتگرال نامعین هر چند جمله‌ای، هر کدام یک چند جمله‌ای است و به آسانی محاسبه می‌شوند. به این دلیل و دلایل بالا رده چند جمله‌ای‌ها اغلب برای تقریب توابع دیگر که پیوسته بوده و یا پیوسته فرض می‌شوند به کار می‌رود.

قضیه تقریب استون وایراشتراس از دیدگاه نظری بسیار مفید است، لیکن نمی‌توان از آن برای مقاصد محاسبه‌ای استفاده کرد. بجای یافتن یک چند جمله‌ای که یک تابع را بر کل یک بازه به طور یکنواخت تقریب کند ، اغلب مفید است چند جمله‌ایی بیابیم که در شرایطی که برای مسأله مورد نظر مفیدند صدق کند و در عین حال به نوعی به آن تابع نزدیک باشد. حال ابتدا چند جمله‌ای‌های درون‌یاب را تعریف و نحوه به‌دست آوردن آن‌ها را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱: اگر $x_0,x_1,..,x_n$, $n+1$ نقطه دو بدو متمایز و f تابعی معلوم در این نقاط باشد، **چند جمله‌ای درون‌یاب** f مبتنی بر نقاط مذکور یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه n (p یا p_n) است که از نقاط یا گره‌های فوق بگذرد.

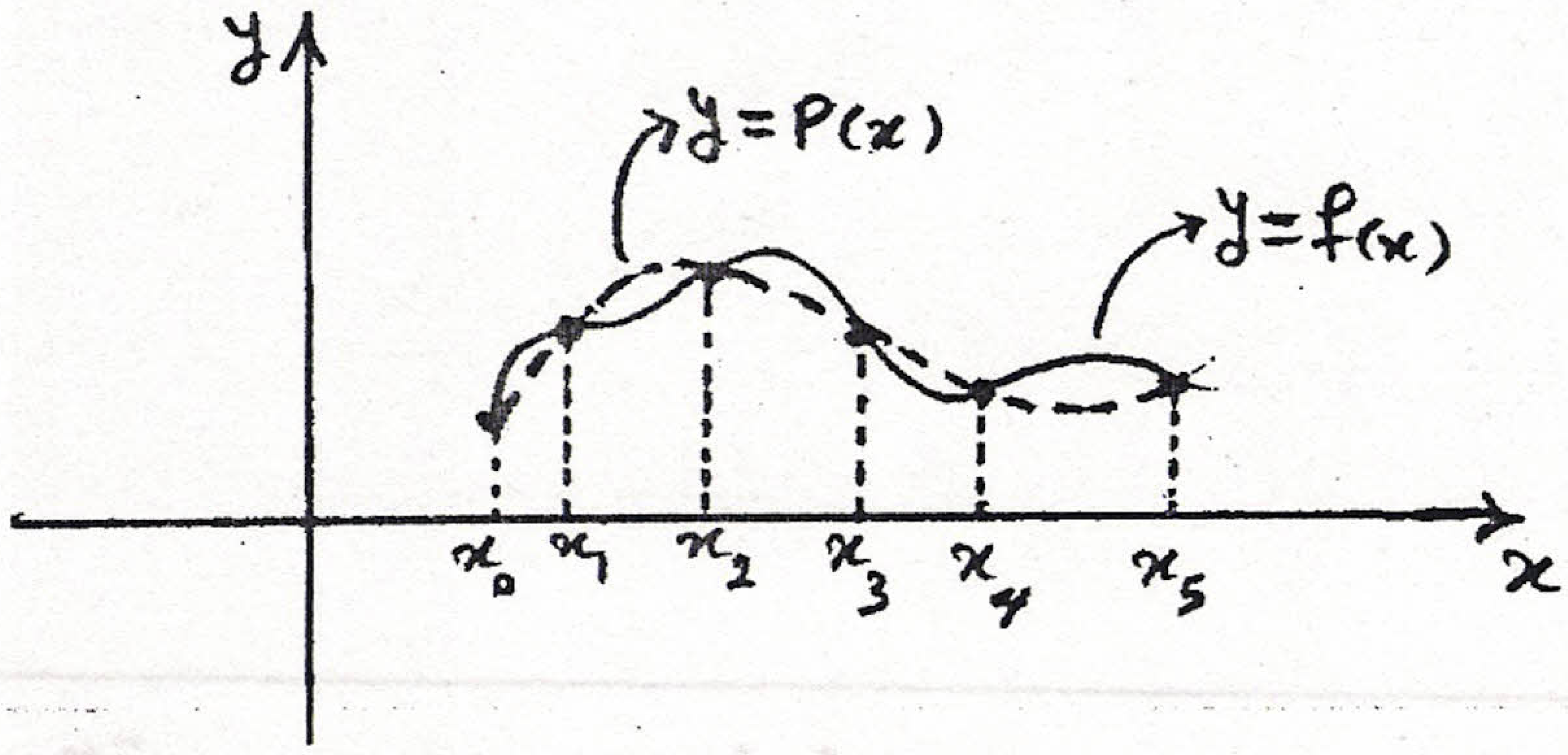
در تعریف، به x_iها نقاط جدولی و به p چند جمله‌ای درون‌یاب یا چند جمله‌ای **هم محل** گویند. بنابراین چند جمله‌ای درون‌یاب f به نام p یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه n است به‌طوری‌که:

$$p(x_k)=f(x_k), \qquad k=0,1,\dots,n$$

خطای تقریب f در نقطه x یعنی خطای p(x) برابر است با $|E(x)|$ که

$$E(x)=f(x)-p(x)$$

در شکل زیر نمودار تابع f و چند جمله‌ای درون‌یاب آن مبتنی بر شش نقطه را مشاهده می‌کنیم.



طبق تعریف بدیهی است که چند جمله‌ای p حداکثر از درجه پنج است.

قضیه زیر در مورد وجود و یکتایی چند جمله‌ای درون‌یاب بحث می‌کند.

قضیه ۲: چند جمله‌ای درون‌یاب وجود دارد و یکتا است.

قضیه ۳: اگر f یک تابع معلوم در $n+1$ نقطه دوبه‌دو متمایز $x_0, x_1, \dots x_n$ باشد و نیز تابع f بر بازه $[x_0,x_n]$ دارای مشتق nام و پیوسته و بر (x_0,x_n) دارای مشتق $(n+1)$ام باشد در این صورت برای هر $x\in[x_0,x_n]$ عدد $\xi(x)$ بین x_0 و x_n وجود دارد به‌طوری‌که:

$$f(x)-p(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\times\dots\times(x-x_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi(x))$$

هرگاه:

$$\forall x\in[x_0,x_n], \qquad \left|f^{(n+1)}(x)\right|\le M$$

آن‌گاه:

$$|E(x)|\le\frac{|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|}{(n+1)!}M$$

در قضیه (۳) نکته مهمی نهفته است که افزایش نقاط درون‌یابی همواره باعث کاهش خطا نمی‌گردد بلکه صفرهای **چند جمله‌ای چبیشف** باعث کاهش خطا می‌شود که از حوصله این درس خارج است.

مثال ۱: اگر تابع f یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه k باشد و $k\le n$ آن‌گاه چند جمله‌ای درون‌یاب f، مبتنی بر هر $n+1$ نقطه، خود f است، زیرا در این صورت برای هر x داریم:

$$f^{(n+1)}(x)=0$$

لذا با به‌کارگیری قضیه (۳) داریم:

$$f(x)-p(x)=0$$

پس $f(x)=p(x)$ یعنی چند جمله‌ای درون‌یاب f خود f است.

۳ . ۱ درون‌یابی و چندجمله‌ای لاگرانژ

ابتدا به معرفی چند جمله‌ای‌های لاگرانژ می‌پردازیم. فرض کنیم $x_0, x_1, ..., x_n$ ، $n+1$ نقطه دوبه‌دو متمایز باشند. چند جمله‌ای‌های زیر که همگی از درجه n و تعداد آن‌ها $n+1$ می‌باشد به چند جمله‌ای‌های لاگرانژ معروفند.

$$\ell_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})...(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)...(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})...(x_j-x_n)}, \qquad j=0,1,...,n$$

برای نمونه اگر $n=3$ باشد یعنی نقاط x_3, x_2, x_1, x_0 را داشته باشیم چند جمله‌ای‌های لاگرانژ این نقاط به صورت زیر است:

$$\ell_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$\ell_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

بدیهی است که:

$$\ell_j(x_k) = \begin{cases} 1 & ,j=k \\ 0 & ,j\neq k \end{cases}, \qquad j,k=0,1,2,...,n$$

قضیه ۴: اگر f یک تابع معلوم در $n+1$ نقطه دوبه‌دو متمایز $x_0, x_1, ..., x_n$ باشد آن‌گاه چند جمله‌ای درون‌یاب f مبتنی بر این $n+1$ نقطه به صورت زیر است:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\ell_j(x)$$

مثال ۲: چند جمله‌ای درون‌یاب مجموعه نقاط جدولی زیر را به‌دست آورید و تقریبی از $f(5.5), f(0.5)$ ارایه دهید.

x_i	0	1	2	3	5
$f(x_i)$	-3	0	5	12	32

حل: ابتدا چند جمله‌ای‌های لاگرانژ مبتنی بر نقاط $0,1,2,3,5$ را به دست می‌آوریم که $\ell_0(x), \ell_2(x)$ به صورت زیر است.

$$\ell_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-1)(0-2)(0-3)(0-5)}$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)(x-5)}{(2-0)(2-1)(2-3)(2-5)}$$

به طور مشابه $\ell_1(x)$ و $\ell_3(x), \ell_4(x)$ را به دست می‌آوریم و خواهیم داشت .

$$p(x) = -3\ell_0(x) + 0\ell_1(x) + 5\ell_2(x) + 12\ell_3(x) + 32\ell_4(x)$$

پس از انجام محاسبات لازم داریم:

$$p(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$f(0.5) \simeq p(0.5) = -1.75$$

$$f(5.5) \simeq p(5.5) = 38.25$$

یادداشت ۱: در این مثال $\ell_j(x)$ها همگی از درجه چهار بودند در حالی‌که چند جمله‌ای درون‌یاب از درجه دو بود.

مثال ۳: نشان دهید که $\sum_{j=0}^{n} \ell_j(x) = 1$.

حل: تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = 1$$

لذا $f(x_j)$ برای $j = 0,1,\dots,n$ برابر یک است. چون f چند جمله‌ای درجه صفر است، پس چند جمله‌ای درون‌یاب آن خود f است. پس:

$$p(x) = f(x) = 1$$

از طرف دیگر چند جمله‌ای درون‌یاب p به صورت زیر است:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\ell_j(x) = \sum_{j=0}^{n} \ell_j(x)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\sum_{j=0}^{n} \ell_j(x) = 1$$

اشکالات روش لاگرانژ

i) محاسبه $\ell_j(x)$ها مشکل است.

ii) از روی درجه $\ell_j(x)$ها نمی‌توان به درجه چند جمله‌ای درون‌یاب پی‌برد در مثال (۱) مشاهده شد که، $\ell_j(x)$ها همگی از درجه چهار بودند، در حالی‌که چند جمله‌ای درون‌یاب از درجه ۲ بود.

iii) اگر یک نقطه به انتهای جدول اضافه کنیم محاسبات قبلی پایدار نیست. و بایستی همه محاسبات را از نو آغاز کرد.

یادداشت ۲: البته این روش بدون حسن هم نیست، از نظر تئوری از اهمیت خوبی برخوردار است . در بعضی مسایل عملی که x_iها ثابت می‌باشند و فقط $f(x_i)$ها تغییر می‌کنند مفید است. در زیر درجه حرارات سه روز هفته در بعضی از ساعات روز مشاهده می‌شود.

t_i	$T_s(t_i)$	$T_M(t_i)$	$T_T(t_i)$
7	10	9.5	9
8	11	10.25	10
9	11.5	11	10.5
10	12	12.5	11.5

که در آن t_iها ساعات روز و $T_T(t_i), T_M(t_i), T_s(t_i)$ درجه حرارت در روزهای یکشنبه ، دوشنبه و سه‌شنبه در زمان t_i می‌باشند. اگر بخواهیم نمودار درجه حرارت را در این سه روز بیابیم، $\ell_j(t)$ها برای هر سه روز ثابت است و فقط مقادیر تغییر می‌کند.

۳ . ۲ روش نیوتن

این روش اشکالات روش لاگرانژ را بر طرف می‌کند. ابتدا تفاضلات تقسیم شده نیوتن را مطرح، سپس روش مذکور که مبتنی بر تفاضلات تقسیم شده نیوتن می‌باشد را بیان می‌کنیم.

تفاضلات تقسیم شده نیوتن:

فرض کنیم f یک تابع معلوم در $n+1$ نقطه دوبه‌دو متمایز $x_n,\dots,x_1,x_0$ باشد، مقدار تابع f در نقطه x_i را با نماد f_i نشان می‌دهیم. تعریف می‌کنیم:

$$f\left[x_j\right]=f(x_j)=f_j$$

$$f\left[x_{j-1},x_j\right]=\frac{f\left[x_{j-1}\right]-f\left[x_j\right]}{x_{j-1}-x_j}=\frac{f_{j-1}-f_j}{x_{j-1}-x_j},\qquad j=1,2,\dots,n$$

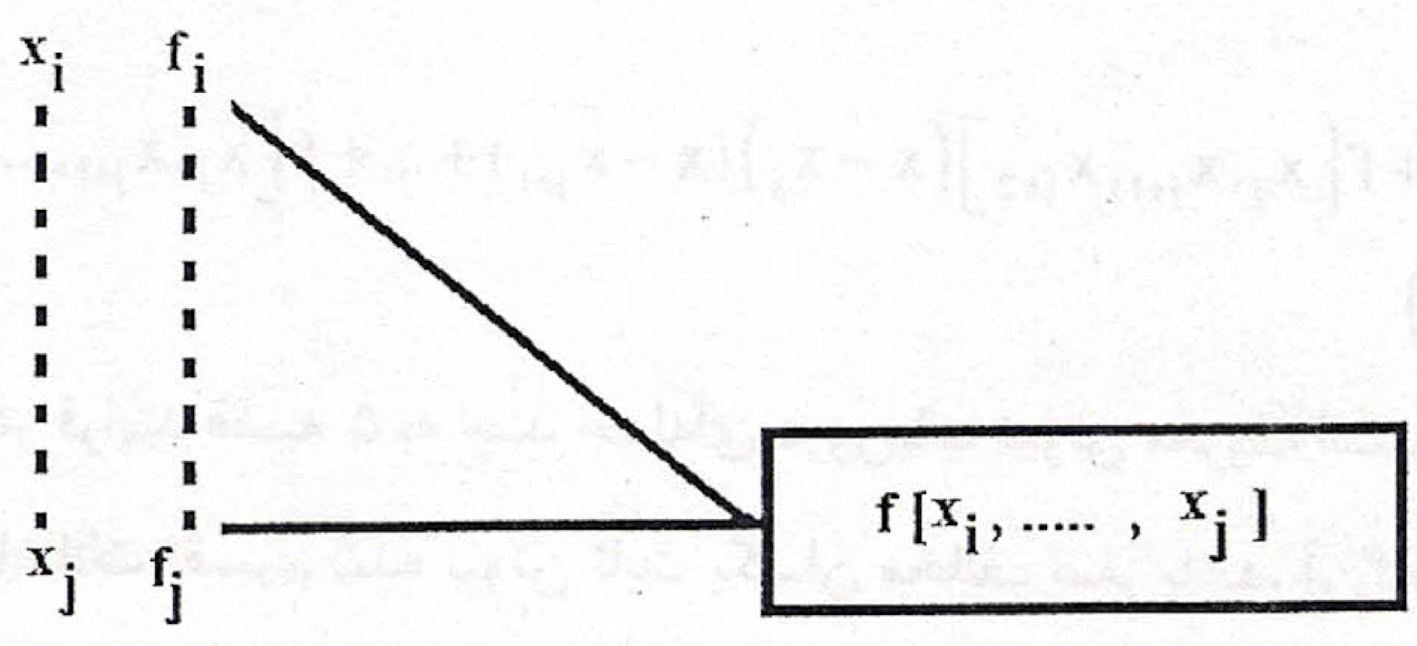
$$f\left[x_{j-1},x_j,x_{j+1},\dots,x_{j+k}\right]=\frac{f\left[x_{j-1},\dots,x_{j+k-1}\right]-f\left[x_j,\dots,x_{j+k}\right]}{x_{j-1}-x_{j+k}},\qquad 1\le j,\qquad 0\le j+k\le n$$

به $f\left[x_j\right]$ عملگر تفاضل تقسیم شده مرتبه صفر، به $f\left[x_{j-1},x_j\right]$ عملگر تفاضل تقسیم شده مرتبه اول و به $f\left[x_{j-1},x_j,\dots,x_{j+k}\right]$ عملگر تفاضل تقسیم شده مرتبه $(k+1)$ام گویند.

نمایش جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتن را برای $n=4$ و نقاط $x_4,\dots,x_1,x_0$ در زیر مشاهده می‌کنیم.

x_i	f_i	م 1	م 2	م 3	م 4
x_0	f_0				
x_1	f_1	$f[x_0,x_1]$			
x_2	f_2	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$		
x_3	f_3	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	
x_4	f_4	$f[x_3,x_4]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	$f[x_0,\dots,x_4]$

در جدول نماد م k برای $k=1,2,3,4$ مبین تفاضل تقسیم شده مرتبه kام می‌باشد. با توجه به تعریف، بدیهی است که اگر در جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتن ستون kام، ثابت یکسان مخالف صفر باشد، آن‌گاه تفاضلات تقسیم شده مراتب بعدی صفر است. در جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتن $f\left[x_i,\dots,x_j\right]$ را در شکل زیر مشاهده می‌کنیم.



یعنی در مثلث مذکور عملگر $f\left[x_i,\ldots,x_j\right]$ در رأس مثلث قرار دارد.

یک نکته مهم در مورد تفاضل تقسیم شده نیوتن آن است که نسبت به جایگشت اندیس‌ها ثابت است، یعنی:

$$f\left[x_0,x_1,\ldots,x_k\right]=f\left[x_{i_0},x_{i_1},\ldots,x_{i_k}\right]$$

که $i_k,\ldots,i_1,i_0$ یک دور اختیاری از اعداد مجموعه $\{0,1,2,\ldots,k\}$ می‌باشند.

مثال ۴: جدول تفاضلات تقسیم شده مجموعه نقاط جدولی زیر را تشکیل می‌دهیم.

x_i	0	1	2	3	5	6
f_i	-1	2	11	32	134	227

و مقادیر $f[0,1,2]$ و $f[1,2,3]$ و $f[1,2,3,5]$ را تعیین می‌کنیم.

حل:

x_i	f_i	م 1	م 2	م 3	م 4	م 5
0	-1					
1	2	$\dfrac{-1-2}{0-1}=3$				
2	11	$\dfrac{2-11}{1-2}=9$	$\dfrac{3-9}{0-2}=3$			
3	32	$\dfrac{11-32}{2-3}=21$	$\dfrac{9-21}{1-3}=6$	$\dfrac{3-6}{0-3}=1$		
5	134	$\dfrac{32-134}{3-5}=51$	$\dfrac{21-51}{2-5}=10$	$\dfrac{6-10}{1-5}=1$	$\dfrac{1-1}{0-5}=0$	
6	227	$\dfrac{134-227}{5-6}=93$	$\dfrac{51-93}{3-6}=14$	$\dfrac{10-14}{2-6}=1$	$\dfrac{1-1}{1-6}=0$	$\dfrac{0-0}{0-6}=0$

خواهیم داشت:

$$f[0,1,2]=3,f[1,2,3]=6,f[1,2,3,5]=1$$

قضیه ۵: هرگاه f یک تابع معلوم در $n+1$ نقطه دوبه‌دو متمایز $x_n,\ldots,x_1,x_0$ باشد، آن‌گاه چند جمله‌ای درون‌یاب f مبتنی بر نقاط $x_n,\ldots,x_1,x_0$ به صورت زیر است:

$$p(x)=f_0+f\left[x_0,x_1\right](x-x_0)+f\left[x_0,x_1,x_2\right](x-x_0)(x-x_1)+\ldots+f\left[x_0,x_1,\ldots,x_n\right](x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

در حالت کلی اگر f یک تابع معلوم در $n+1$ نقطه دوبه‌دو متمایز $x_{j+n},\ldots,x_{j+1},x_j$ باشد، آن‌گاه چند جمله‌ای درون‌یاب f مبتنی بر این نقاط به صورت زیر است:

$$p(x)=f_j+f\left[x_j,x_{j+1}\right](x-x_j)+f\left[x_j,x_{j+1},x_{j+2}\right](x-x_j)(x-x_{j+1})+\ldots+f\left[x_j,x_{j+1},\ldots,x_{j+n}\right]$$
$$(x-x_j)(x-x_{j+1})\ldots(x-x_{j+n-1})$$

چند جمله‌ای درون‌یاب ارایه شده در فرایند قضیه ۵ به چند جمله‌ای درون‌یاب نیوتن معروف است.

نتیجه: هرگاه ستون kاُم جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتن ثابت یکسان مخالف صفر باشد، آن‌گاه چند جمله‌ای درون‌یاب، از درجه k می‌باشد.

مثال ۵: چند جمله‌ای درون‌یاب مجموعه نقاط مثال ۲ را با روش نیوتن به دست آورید.

حل: ابتدا جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتن را تشکیل می‌دهیم.

x_i	f_i	م 1	م 2	م 3	م 4
0	-3				
1	0	3			
2	5	5	1		
3	12	7	1	0	
5	32	10	1	0	0

$$p(x)=f_0+f[0,1](x-0)+f[0,1,2](x-0)(x-1)$$
$$=-3+3x+(x)(x-1)=x^2+2x-3$$

مثال ۶: چند جمله‌ای درون‌یاب نقاط جدولی زیر را به‌دست آورید، سپس نقطه $(5,33)$ را به انتهای جدول اضافه کنید. سپس چند جمله‌ای درون‌یاب نقاط جدولی و نقطه $(5,33)$ را به دست آورید.

x_i	-1	0	1	3
f_i	1	1	3	13

حل: ابتدا جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتن مجموعه نقاط جدولی فوق را تشکیل می‌دهیم و داریم:

x_i	f_i	م 1	م 2	م 3
-1	1			
0	1	0		
1	3	2	1	
3	13	5	1	0

پس چند جمله‌ای درون‌یاب f مبتنی بر نقاط $3,1,0,-1$ به صورت زیر است.

$$P(x)=1+(0)(x+1)+1\times(x+1)(x-0)=x^2+x+1$$

حال نقطه $(5,33)$ را به انتهای جدول اضافه می‌کنیم و جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتن آن‌ها را تشکیل می‌دهیم.

x_i	f_i	م 1	م 2	م 3	م 4
-1	1				
0	1	0			
1	3	2	1		
3	13	5	1	0	

5	33	10	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{120}$

در مقایسه دو جدول اخیر مشاهده می‌شود وقتی که نقطه $(5,33)$ به انتهای جدول اضافه شدکمی محاسبه بیش‌تر انجام شده است.

حال چند جمله‌ای درون‌یاب f مبتنی بر نقاط $5,3,1,0,-1$ به صورت زیر است:

$$f(x)=p(x)+\frac{1}{120}(x+1)(x-0)(x-1)(x-3)$$
$$=x^2+x+1+\frac{1}{120}(x+1)x(x-1)(x-3)$$

۳ . ۳ تفاضلات متناهی

برای پیشگیری از انباشتگی خطای گرد کردن اعداد در محاسبات همیشه سعی می‌کنیم حجم محاسبات را تا جایی که ممکن است کاهش دهیم. برای این منظور اگر نقاط درون‌یاب $x_n,...,x_1,x_0$ متساوی الفاصله با طول گام h درنظر گرفته شوند، یعنی:

$$x_i=x_0+ih\ , \qquad i=0,1,2,...,n$$

آن‌گاه چند جمله‌ای درون‌یاب را می‌توان سریع‌تر و با حجم عملیات کمتر توسط **عملگر تفاضلی** به دست آورد. هم‌چنین با توجه به مکان نقطه‌ای که تقریب تابع f در آن مورد نظر است، با معرفی عملگرهای تفاضلی به صورت پیشرو ، پسرو و مرکزی می‌توان تقریب‌های مناسب‌تری را بر حسب چند جمله‌ای‌های نیوتن به دست آورد، زیرا که نقاط نزدیک تأثیر بیش‌تری در تقریب با درون‌یابی می‌گذارد.

عملگر تفاضلی پیشرو نیوتن: عملگر تفاضلی پیشرو نیوتن مرتبه اول را با نماد Δ نشان می‌دهیم، تعریف می‌شود:

$$\Delta f_i=f_{i+1}-f_i\ , \qquad i=0,1,...,n-1.$$

به راحتی می‌توان نشان دادکه Δ یک عملگر خطی است، یعنی دارای دو خاصیت زیر است:

$$\Delta(\alpha f_i)=\alpha\Delta f_i\ , \qquad \Delta(f_i+g_i)=\Delta f_i+\Delta g_i$$

که در آن α مقدار ثابتی بوده و g همانند f در نقاط $x_n,...,x_1,x_0$ تعریف شده است.

عملگر تفاضلی پیشرو نیوتن مرتبه kام را با نماد Δ^k نشان می‌دهیم و تعریف می‌شود:

$$\Delta^k f_i=\Delta\left(\Delta^{k-1}f_i\right)=\Delta^{k-1}\left(\Delta f_i\right) \qquad ,k\geq 2$$

چون Δ^k برای هر $k\in n$ ، یک عملگر خطی است (ترکیب دو عملگر خطی، یک عملگر خطی است.)واضح است که

$$\Delta^k f_i=\Delta^{k-1}f_{i+1}-\Delta^{k-1}f_i \qquad ,k\geq 2$$

با توجه به تعریف داریم:

$$\Delta^2 f_i=\Delta(\Delta f_i)=\Delta\left(f_{i+1}-f_i\right)=\left(f_{i+2}-f_{i+1}\right)-\left(f_{i+1}-f_i\right)$$

$$=f_{i+2}-2f_{i+1}+f_i$$

به طور مشابه داریم:

$$\Delta^3 f_i = f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta^4 f_i = f_{i+4} - 4f_{i+3} + 6f_{i+2} - 4f_{i+1} + f_i$$

همان‌طوری‌که مشاهده می‌شود ضرایب بسط $\Delta^2 f_i$ همان ضرایب دوجمله‌ای نیوتن $(a-b)^2$ و ضرایب بسط $\Delta^3 f_i, \Delta^4 f_i$ به ترتیب همان ضرایب دوجمله‌ای نیوتن $(a-b)^3$ و $(a-b)^4$ می‌باشد. این موضوع در حالت کلی صادق است، یعنی ضرایب بسط $\Delta^k f_i$ همان ضرایب بسط دوجمله‌ای نیوتن $(a-b)^k$ می‌باشد، که به طور دقیق‌تر می‌توان نوشت:

$$\Delta^k f_i = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r c_k^r f_{i+k-r}$$

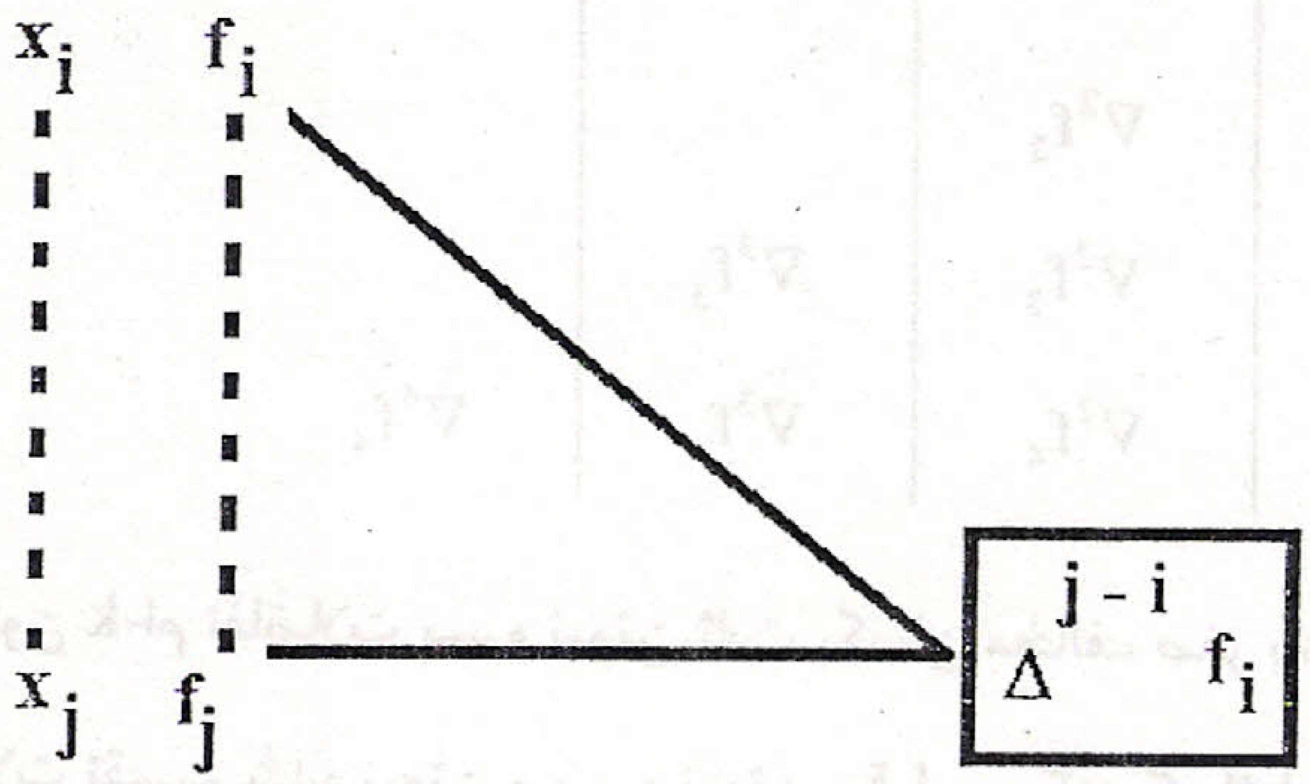
که در آن:

$$C_k^r = \frac{k!}{(k-r)!r!} \qquad , \qquad o \le r \le k$$

نمایش جدولی تفاضلات پیشرو نیوتن را برای $n=4$ و نقاط $x_4, \dots, x_1, x_0$ در زیر مشاهده می‌کنیم.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$
x_0	f_0				
x_1	f_1	Δf_0			
x_2	f_2	Δf_1	$\Delta^2 f_0$		
x_3	f_3	Δf_2	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_0$	
x_4	f_4	Δf_3	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_1$	$\Delta^4 f_0$

با توجه به تعریف، بدیهی است که اگر ستون kام تفاضلات پیشرو ثابت یکسان مخالف صفر باشد آن‌گاه تفاضلات پیشرو مراتب بعدی صفر است و در جدول تفاضلات پیشرو نیوتن مشاهده می‌کنیم که $\Delta^{j-i} f_i$ در رأس مثلث زیر قرار گرفته است.



قضیه زیر را می‌توان به استقرا ثابت کرد که ارتباطی بین تفاضلات تقسیم شده نیوتن و پیشرو نیوتن برقرار می‌کند.

قضیه ۶: هرگاه f یک تابع معلوم در $n+1$ نقطه دوبه‌دو متمایز متساوی‌الفاصله $x_n, \dots, x_1, x_0$ با طول گام h باشد، آن‌گاه:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n} \quad , \qquad n = 1, 2, \dots$$

عملگر تفاضلی پسرو نیوتن: این عملگر را با نماد ∇ نشان می‌دهیم، و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

به ∇ عملگر تفاضلی پسرو نیوتن مرتبه اول گویند. عملگر تفاضلی پسرو نیوتن مرتبه kام را با نماد ∇^k نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\nabla^k f_i = \nabla^{k-1}(\nabla f_i) = \nabla\left(\nabla^{k-1} f_i\right), \qquad k \geq 2, i = 1,\dots,n.$$

به آسانی دیده می‌شود که ∇ یک عملگر خطی است و لذا ∇^k برای هر $k \in N$ یک عملگر خطی است و لذا داریم:

$$\nabla^k f_i = \nabla^{k-1} f_i - \nabla^{k-1} f_{i-1}, \qquad k \geq 2$$

و هم‌چنین خواهیم داشت:

$$\nabla^2 f_i = \nabla(\nabla f_i) = \nabla(f_i - f_{i-1}) = (f_i - f_{i-1}) - (f_{i-1} - f_{i-2}) = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2} = \Delta^2 f_{i-2}$$

به طور مشابه داریم:

$$\nabla^3 f_i = f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3} = \Delta^3 f_{i-3}$$

در حالت کلی به استقرا داریم:

$$\nabla^k f_i = \Delta^k f_{i-k}, \quad k \geq 2, \quad i \geq k$$

$$\nabla^k f_i = \sum_{r=0}^{k} C_k^{\,r} (-1)^r f_{i-r}$$

نمایش جدولی تفاضلات پسرو نیوتن را برای $n = 4$ در زیر مشاهده می‌کنیم:

x_i	f_i	∇f_i	$\nabla^3 f_i$	$\nabla^3 f_i$	$\nabla^4 f_i$
x_0	f_0				
x_1	f_1	∇f_1			
x_2	f_2	∇f_2	$\nabla^2 f_2$		
x_3	f_3	∇f_3	$\nabla^2 f_3$	$\nabla^3 f_3$	
x_4	f_4	∇f_4	$\nabla^2 f_4$	$\nabla^3 f_4$	$\nabla^4 f_4$

باتوجه به تعریف بدیهی است که اگر ستون k-ام تفاضلات پسرو نیوتن ثابت یکسان مخالف صفر باشد، آن‌گاه تفاضلات مراتب بعدی صفر است. قضیه زیر ارتباطی بین تفاضلات تقسیم شده نیوتن و پسرو نیوتن برقرار می‌کند که اثبات آن به استقرا می‌باشد.

قضیه ۷: هرگاه f یک تابع معلوم در $n+1$ نقطه دوبه‌دو متمایز متساوی‌الفاصله $x_n,\dots,x_1,x_0$ با طول گام h باشد، آن‌گاه:

$$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0] = \frac{\nabla^n f_n}{n!h^n}.$$

نتیجه‌ای که از قضیه (۶) و (۷) به دست می‌آید به صورت زیر است:

$$f[x_0,x_1,\dots,x_n]=f[x_n,x_{n-1},\dots,x_0]$$

مثال ۷: جدول تفاضلات پیشرو نیوتن را برای مجموعه نقاط جدولی زیر را تشکیل می‌دهیم.

x_i	-1	0	1	2	3	4
f_i	1	1	1	7	25	61

خواهیم داشت:

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$	$\Delta^5 f_i$
−1	1					
0	1	0				
1	1	0	0			
2	7	6	6	6		
3	25	18	12	6	0	
4	61	36	18	6	0	0

از جدول، مقادیر زیر به دست می‌آید:

$$\Delta^2 f_0=0,\quad \Delta^2 f_3=18$$
$$\nabla^5 f_5=\Delta^5 f_0=0,\quad \nabla^4 f_5=\Delta^4 f_1=0$$

در قضیه زیر نحوه به دست آوردن چند جمله‌ای درون‌یاب با استفاده از تفاضلات پیشرو نیوتن و پسرو نیوتن مشخص می‌شود.

قضیه ۸: فرض کنیم f یک تابع معلوم در $n+1$ نقطه دوبه‌دو متمایز متساوی‌الفاصله $x_n,\dots,x_1,x_0$ به طول گام h باشد، آن‌گاه چند جمله‌ای درون‌یاب f مبتنی بر نقاط فوق به صورت زیر است:

$$\begin{cases} p(x)=f_0+\theta\Delta f_0+\dfrac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 f_0+\dots+\dfrac{\theta(\theta-1)\dots(\theta-n+1)}{n!}\Delta^n f_0 \\ x=x_0+\theta h \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(x)=f_n+\theta\nabla f_n+\dfrac{\theta(\theta+1)}{2!}\nabla^2 f_n+\dots+\dfrac{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)}{n!}\nabla^n f_n \\ x=x_n+\theta h \end{cases}$$

در قضیه ۸، چند جمله‌ای اول به چند جمله‌ای درون‌یاب پیشرو نیوتن و دومی به چند جمله‌ای درون‌یاب پسرو نیوتن معروف است و خطای آن متناسب با h^{n+1} می‌باشد و هم‌چنین واضح است که اگر ستون kام جدول تفاضلات پیشرو نیوتن ثابت یکسان مخالف صفر باشد آن‌گاه چند جمله‌ای درون‌یاب از درجه k می‌باشد. باید توجه داشت که چند جمله‌ای درون‌یاب پیشرو نیوتن را برای نقاط ابتدایی جدول وچندجمله‌ای درون‌یاب پسرو نیوتن را برای نقاط انتهایی جدول به کار می‌بریم.

مثال ۸: چند جمله‌ای درون‌یاب نقاط جدولی زیر را به دست آورید و تقریبی از $f(4.3)$ ارایه دهید.

x_i	4	6	8	10
f_i	1	-2	-3	-6

حل: ابتدا جدول تفاضلات پیشرو نیوتن را تشکیل می‌دهیم.

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
4	1			
6	-2	-3		
8	-3	-1	2	
10	-6	-3	-2	-4

پس داریم:

$$\begin{cases} P(x)=f_0+\theta\Delta f_0+\dfrac{\theta(\theta-1)}{2}\Delta^2 f_0+\dfrac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!}\Delta^3 f_0 \\ x=4+\theta h, \quad h=2 \end{cases}$$

$$p(x)=1-3\theta+\theta(\theta-1)-\frac{4}{6}\theta(\theta-1)(\theta-2)\ ,\ x=4+2\theta$$

$$p(4.3)=?$$

$$x=4.3\Rightarrow 4.3=4+2\theta\Rightarrow\theta=0.15$$

پس داریم:

$$p(4.3)=1-3(0.15)+0.15(0.15-1)-\frac{4}{6}\times(0.15)(0.15-1)(0.15-2)$$

$$p(4.3)\simeq 0.27$$

مثال ۹: در مثال (۸)، $f[4,6,8,10]$ را به دست آورید.

حل: با توجه به قضیه (۶) داریم:

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\frac{\Delta^3 f_0}{3!h^3}$$

در این مثال $x_3=10, x_2=8, x_1=6, x_0=4, h=2$ می‌باشد پس داریم:

$$f[4,6,8,10]=\frac{(-4)}{3!(2)^3}=\frac{-4}{48}$$

عملگر تفاضل مرکزی: نمایش سومی برای عملگرهای تفاضلی به نام عملگر تفاضل مرکزی وجود دارد که آن را با نماد δ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\delta f_i=f_{i+\frac{1}{2}}-f_{i-\frac{1}{2}}$$

به δ عملگر تفاضل مرکزی مرتبه اول گوییم که یک عملگر خطی است. عملگر تفاضل مرکزی مرتبه kام را با نماد δ^k نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\delta^k f_i=\delta^{k-1}(\delta f_i)=\delta(\delta^{k-1}f_i)\ ,\quad k\ge 2$$

چون δ یک عملگر خطی است، پس δ^k برای هر k طبیعی یک عملگر خطی است و داریم:

$$\delta^k f_i=\delta^{k-1}f_{i+\frac{1}{2}}-\delta^{k-1}f_{i-\frac{1}{2}}$$

با استفاده از تعریف مشاهده می‌کنیم که

$$\delta^2 f_i=\delta(\delta f_i)=\delta\left(f_{i+\frac{1}{2}}-f_{i-\frac{1}{2}}\right)=(f_{i+1}-f_i)-(f_i-f_{i-1})$$

$$=f_{i+1}-2f_i+f_{i-1}=\Delta^2 f_i$$

$$\delta^3 f_i=\delta(\delta^2 f_i)=\delta(f_{i+1}-2f_i+f_{i-1})=f_{i+\frac{3}{2}}-2f_{i+\frac{1}{2}}+f_{i-\frac{1}{2}}-\left(f_{i+\frac{1}{2}}-2f_{i-\frac{1}{2}}+f_{i-\frac{3}{2}}\right)=f_{i+\frac{3}{2}}-3f_{i+\frac{1}{2}}+3f_{i-\frac{1}{2}}-f_{i-\frac{3}{2}}$$

در حالت کلی ضرایب بسط $\delta^k f_i$ همان ضرایب بسط دوجمله‌ای نیوتن $(a-b)^k$ است ، به معنی دقیق‌تر داریم:

$$\delta^k f_i=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r C_k{}^r f_{i+\frac{k}{2}-r}$$

نمایش جدولی تفاضلات مرکزی را برای $n=4$ در جدول زیر مشاهده می‌کنیم.

x_i	f_i	$\delta f_{i+\frac{1}{2}}$	$\delta^2 f_{i+1}$	$\delta^3 f_{i+\frac{3}{2}}$	$\delta^4 f_{i+2}$
x_0	f_0				
		$\delta f_{\frac{1}{2}}$			
x_1	f_1				
		$\delta f_{\frac{3}{2}}$			
x_2	f_2		$\delta^2 f_1$		
		$\delta f_{\frac{5}{2}}$		$\delta^3 f_{\frac{3}{2}}$	
x_3	f_3		$\delta^2 f_2$		
		$\delta f_{\frac{7}{2}}$		$\delta^3 f_{\frac{5}{2}}$	
x_4	f_4		$\delta^2 f_3$		$\delta^4 f_2$

۳ . ۴ درون‌یابی معکوس

مسأله یافتن x به ازای یک $f(x)$ مفروض را درون‌یابی معکوس می‌گویند. اگر f مشتق‌پذیر و $f'(x)$ در همسایگی نقطه‌ای که درون‌یابی معکوس اثر می‌کند صفر نباشد ، در این صورت $x=F(y)$ معکوس $y=f(x)$ به طور موضعی در نزدیک مقدار داده شده f وجود دارد و در بعضی مواقع می‌توان F را توسط یک چند جمله‌ای از درجه نسبتاً پائین در آن همسایگی تقریب زد. با این شرایط می‌توانیم درون‌یابی معکوس را به کمک جدول‌بندی F به صورت تابعی از y و با به‌کارگیری روش درون‌یابی مستقیم برای F اجراء نمائیم.

مثال ۱۰: ریشه معادله $f(x)=0$ را به دست آورید هرگاه مجموعه نقاط جدولی زیر مفروض باشد.

x_i	-2	2	3
f_i	-7	9	28

حل: در این مثال به دنبال x هستیم که مقدار f در آن نقطه صفر شود به عبارت دیگر $x=F(0)=f^{-1}(0)$ می‌باشد، چون نقاط $y_i=f_i$ برای $i=0,1,2$ متساوی‌الفاصله نیستند، پس ابتدا جدول تفاضلات تقسیم شده را برای نقاط (y_i,x_i)ها تشکیل می‌دهیم، لذا داریم:

y_i	x_i	م 1	م 2
-7	-2		
9	2	$\frac{1}{4}$	
28	3	$\frac{1}{19}$	$-\frac{3}{532}$

بنابراین چند جمله‌ای درون‌یاب $p(y)$ به صورت زیر است:

$$p(y)=-2+\frac{1}{4}(y+7)-\frac{3}{532}(y+7)(y-9)$$

$$x=f^{-1}(0)=p(0)=-2+\frac{7}{4}+\frac{189}{532}=\frac{56}{532}$$

مثال‌های متنوع تستی حل شده:

مثال ۱۱: اگر $x_0,x_1,\ldots,x_n$ دوبه‌دو متمایز باشند و $\ell_j(x)$ چند جمله‌ای لاگرانژ مبتنی بر نقاط فوق باشد $(j=0,1,\ldots,n)$ آن‌گاه $\ell_j(x_k)$ برای $j\neq k$ کدام است؟

۱) 1　　۲) 0　　۳) 0 یا 1　　۴) هیچکدام

حل: با توجه به تعریف، گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

مثال ۱۲: چند جمله‌ای درون‌یاب یک تابع مبتنی بر $n+1$ نقطه از درجه

۱) n است　　۲) کمتر از n است.　　۳) بیش‌تر از n است.　　۴) حداکثر n است.

حل: با توجه به تعریف، گزینه (۴) صحیح می‌باشد.

مثال ۱۳: چند جمله‌ای درون‌یاب نقاط $(1,1),(0,0),(-1,-1)$ کدام است؟

۱) $y=x^3$　　۲) $y=x$　　۳) $y=x^2$　　۴) هیچکدام

حل: چون تعداد نقاط سه نقطه است پس درجه چند جمله‌ای درون‌یاب حداکثر 2 می‌باشد و این سه نقطه در گزینه (۲) صدق می‌کند پس گزینه (۲) جواب صحیح می‌باشد توجه داشته باشید که سه نقطه در چند جمله‌ای گزینه (۱) هم صدق می‌کند ولی گزینه (۱) از درجه سه می‌باشد.

مثال ۱۴: مقادیر جدول زیر از تابع $f(x)$ استخراج گردیده است:

x_i	0	1	3	5	6
f_i	7	6	28	122	211

تقریب تابع f در نقطه $x=2$ به کمک درون‌یابی برابر است با

۱) 11　　۲) 10　　۳) 12　　۴) 11.5

حل: چون نقاط متساوی‌الفاصله نیست، پس فقط می‌توان جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتن را تشکیل داد، که به صورت زیر است:

x_i	f_i	م 1	م 2	م 3	م 4
0	7				
1	6	-1			
3	28	11	4		
5	122	47	9	1	
6	211	89	14	1	0

بنابراین داریم

$$p(x)=7-1(x-0)+4(x-0)(x-1)+1(x-0)(x-1)(x-3)$$

$$f(2)\simeq p(2)=11$$

پس گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

مثال ۱۵: تابع $\cos x$ را روی بازه $[0,1]$ با کدام طول گام h باید جدول‌بندی کرد تا خطای حاصل از درون‌یابی خطی مبتنی بر دو نقطه متوالی جدول بیش‌تر از 0.2×10^{-3} نشود؟

۱) حداکثر 0.04 ۲) 0.04 ۳) 0.02 ۴) حداکثر 0.02

حل: خطای چند جمله‌ای درون‌یاب برای دو نقطه متمایز متوالی x_{i-1} و x_i در جدول به صورت زیر است:

$$|E(x)|=|f(x)-p(x)|=\left|\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)}{2!}f''(\xi)\right|$$

که در آن ξ بین x_{i-1}, x_i بوده و $f(x)=\cos x$ می‌باشد، پس:

$$|E(x)|=\frac{1}{2}|(x-x_{i-1})(x-x_i)||\cos\xi|$$

$$\le\frac{1}{2}|(x-x_{i-1})(x-x_i)|\le\frac{1}{2}.\frac{h^2}{4}=\frac{h^2}{8}\le0/2\times10^{-3}$$

$$\Rightarrow h^2\le16\times10^{-4}\Rightarrow h\le0.04$$

پس گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

مثال ۱۶: فرض کنید $f(x)=x^4$, $x_0=-2, x_1=-1, x_2=0, x_3=3$. درجه چند جمله‌ای درون‌یاب f در نقاط x_0 تا x_3 کدام است؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) حداکثر ۳

حل: تعداد نقاط چهار می‌باشد، پس درجه چند جمله‌ای درون‌یاب حداکثر سه است، ولی نمی‌توان گزینه (۴) را گزینه صحیح تلقی نمود، لذا جدول تفاضلات تقسیم شده نیوتن را تشکیل می‌دهیم.

x_i	f_i	م 1	م 2	م 3
-2	16			
-1	1	-15		
0	0	-1	7	
3	81	27	7	0

پس درجه چند جمله‌ای درون‌یاب دو است، لذا گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

مثال ۱۷: چند جمله‌ای درون‌یاب مجموعه نقاط جدولی زیر کدام است؟

x_i	-1	0	1	2	3	4
f_i	0	1	0	3	16	45

۱) x^3+x^2-x-1 ۲) x^3-x^2-x+1

۳) x^5-x^3-x+1 ۴) $x^5+x^4-x^3-1$

حل: ابتدا درجه چند جمله‌ای درون‌یاب را تعیین می‌کنیم، برای این منظور جدول تفاضلات پیشرو نیوتن را تشکیل می‌دهیم، پس داریم:

x_i	f_i	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
-1	0			
0	1	1		
1	0	-1	-2	
2	3	3	4	6
3	16	13	10	6
4	45	29	16	6

پس درجه چند جمله‌ای درون‌یاب سه می‌باشد، لذا گزینه‌های (۳) و (۴) جواب صحیح نمی‌باشد و چون چند جمله‌ای گزینه (۱) از نقطه $(0,1)$ نمی‌گذرد، پس گزینه (۲) جواب صحیح می‌باشد.

تمرین‌های تشریحی:

۱ـ چندجمله‌ای درون‌یاب نقاط جدولی زیر را با روش لاگرانژ و نیوتن به دست آورید و تقریبی از $f(0.5)$ ارایه دهید.

x_i	-1	0	1	2	4
f_i	-2	0	0	4	58

۲ـ فرض کنید $x_0, x_1, ..., x_n$ دوبه‌دو متمایز و $\ell_j(x)$ برای $j=0,1,...,n$ چند جمله‌ای لاگرانژ مبتنی بر این نقاط باشد. ثابت کنید:

$$\sum_{j=0}^{n} x_j^2 \ell_j(x) = x^2$$

۳ـ تابع $f(x)=e^x$ را با نقطه شروع $x_0=0$ و طول گام $h=0.1$ با نقطه انتهایی $x_3=0.3$ جدول‌بندی کنید و تقریبی از $e^{0/05}, e^{0/25}$ را به کمک درون‌یابی به‌دست آورید.

۴ـ فرض کنید $x_0 < x_1 < ... < x_n$ و تابع f بر $[x_0, x_n]$ دارای مشتق nام پیوسته بوده و $f^{(n+1)}$ بر (x_0, x_n) موجود باشد، نشان دهید:

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

که در آن ξ بین x_0, x_n است.

۵ـ تابع $f(x)=\cos x$ را با چه اندازه طول گام h باید جدول‌بندی کرد که خطای درون‌یابی خطی (درون‌یابی درجه یک) در هر دو نقطه متوالی جدول حداکثر $\frac{10^{-2}}{8}$ باشد.

۶ـ چند جمله‌ای درون‌یاب و خطای نقاط جدولی زیر را به‌دست آورید.

x_i	0.0	0.6	1.2
f_i	1.0	0.82	0.36

۷ـ فرض کنید $f(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ که در آن $n \in N$ و a_iها ثوابت حقیقی معلوم می‌باشند. نشان دهید که:

$$\Delta^n f_i = n!.a_n.h^n$$

$$\Delta^m f_i = 0, \quad m > n$$

۸ـ اگر f یک تابع چند جمله‌ای درجه n باشد، یعنی

$$f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$$

نشان دهید:

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = a_n$$

۹ـ فرض کنید $x_0, x_1, \ldots, x_n$ دوبه‌دو متمایز و f در این نقاط تعریف شده باشد، نشان دهید که چند جمله‌ای درون‌یاب f یعنی p در معادله زیر صدق می‌کند (شکل دترمینانی چند جمله‌ای درون‌یاب) .

$$\begin{vmatrix} p(x) & 1 & x & x^2 \cdots x^n \\ f_0 & 1 & x_0 & x_0^2 \cdots x_0^n \\ f_1 & 1 & x_1 & x_1^2 \cdots x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \cdots \vdots \\ f_n & 1 & x_n & x_n^2 \cdots x_n^n \end{vmatrix} = 0$$

تمرین‌های چهار گزینه‌ای:

۱ـ اگر $x_0, x_1, \ldots, x_n$ دوبه‌دو متمایز و $\ell_j(x)$ چند جمله‌ای لاگرانژ مبتنی بر این نقاط باشد، آن‌گاه $\sum_{j=0}^{n} \ell_j(x)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) -1 ۴) $(-1)^j$

۲ـ اگر f یک چند جمله‌ای از درجه 8 باشد و $p(x)$ چند جمله‌ای درون‌یاب f مبتنی بر 10 نقطه باشد، آن‌گاه $p(x)$

۱) همان $f(x)$ است. ۲) درجه‌اش از k بیش‌تر است

۳) درجه‌اش k است. ۴) (۱) و (۳) صحیح می‌باشد.

۳ـ چه موقع درون‌یابی خطی مناسب است؟

۱) مقادیر جدولی نزدیک بهم در توابعی که به کندی تغییر می‌کند.

۲) مقادیر جدولی نزدیک بهم در توابعی که به تندی تغییر می‌کند.

۳) همیشه خوب است.

۴) (۱) و (۲) صحیح می‌باشد.

۴ـ اگر $f(x)$ یک تابع چند جمله‌ای، با جمله پیشرو $a_n x^n$ باشد و x_iها متساوی‌الفاصله با طول گام یک باشند آن‌گاه $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ کدام است؟

۱) $\frac{\Delta^n f_0}{n!}$ ۲) $\frac{\Delta^{n-1} f_1}{(n-1)!}$ ۳) $\frac{\Delta^n f_0}{(n+1)!}$ ۴) $\frac{\Delta^n f_0}{(n-1)!}$

۵ـ فرض کنید $f(x) = x^n$، آن‌گاه $f[0,1,2,\ldots,n]$ کدام است؟

۱) یک ۲) n ۳) $n-1$ ۴) $n+1$

۶ـ فرض کنید $f(x) = x^3 - x^2$، آن‌گاه $f[0,2,5]$ کدام است؟

۱) 5 ۲) 7 ۳) 6 ۴) 8

۷ـ فرض کنید $f(x) = x^n$ ، $h = 1$, $x_0 = 0$ باشد، آن‌گاه $\Delta^n f_0$ برابر است با:

۱) $(n-1)!$ ۲) $n!$ ۳) $(n+1)!$ ۴) $(n+2)!$

۸ـ مقادیر جدولی زیر از تابع $f(x)$ استخراج گردیده است.

x_i	0	1	2	4	5
f_i	0	0	4	58	100

تقریبی از $f(0.5)$ به کمک درون‌یابی کدام است؟

۱) 0.375 ۲) 0.376 ۳) -0.375 ۴) -0.376

۹ ـ درجه چند جمله‌ای درون‌یاب نقاط $(-2,19),(-1,3),(0,0),(1,1),(2,15),(3,79)$ کدام است؟

۱) پنج ۲) حداکثر پنج ۳) سه ۴) چهار

۱۰ ـ تابع $\frac{1}{1+x}$ را با چه اندازه طول گام h باید جدول‌بندی کرد، که خطای ناشی از درون‌یابی خطی روی هر دو نقطه متوالی از جدول با $x_0=0$ و نقطه انتهایی یک، کمتر از $\frac{1}{4}\times10^{-2}$ باشد؟

۱) $h=0.09$ ۲) 0.08 ۳) 0.07 ۴) 0.05

۱۱ ـ چند جمله‌ای درون‌یاب نقاط جدولی

x_i	-1	0	1	2
f_i	0	0	0	6

کدام است؟

۱) x^4-x^3 ۲) x^3-x ۳) x^5-x^3 ۴) x^7-x^5

۱۲ ـ جدول مقادیر تابع f در زیر مفروض است.

x_i	-1	0	1	2
f_i	0	0	0	6

در این صورت $\Delta^3 f_0 , \delta^3 f_{\frac{3}{2}}$ کدام است؟

۱) 5 و 6 ۲) 6 و 5 ۳) 5 و 5 ۴) 6 و 6