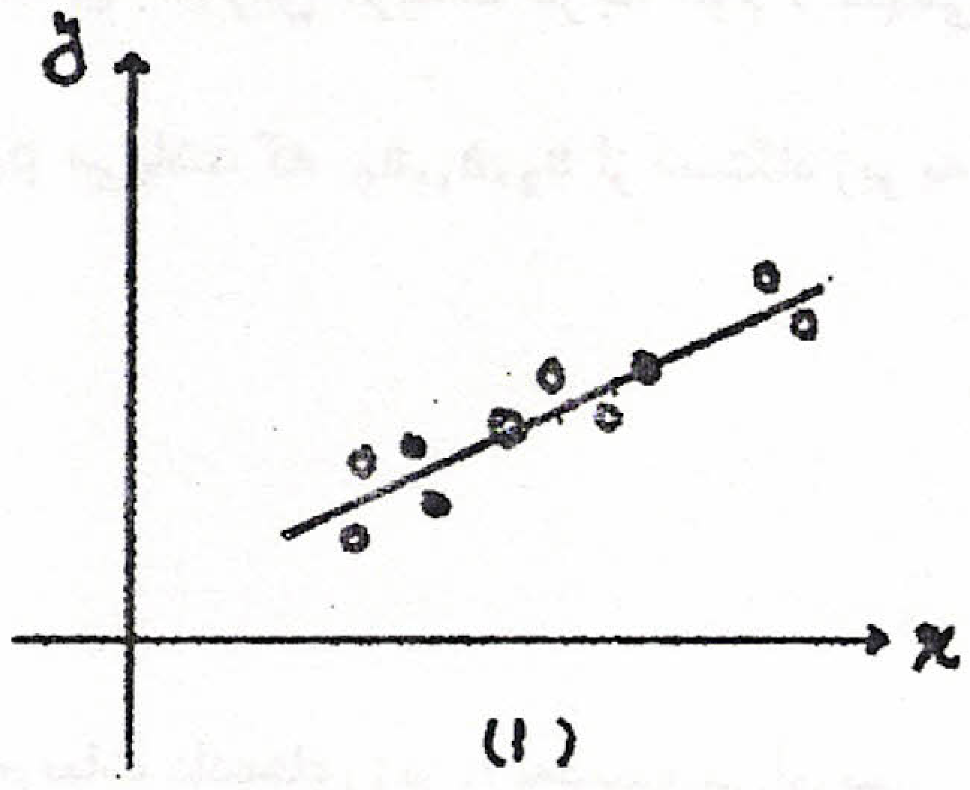
فصل ۴

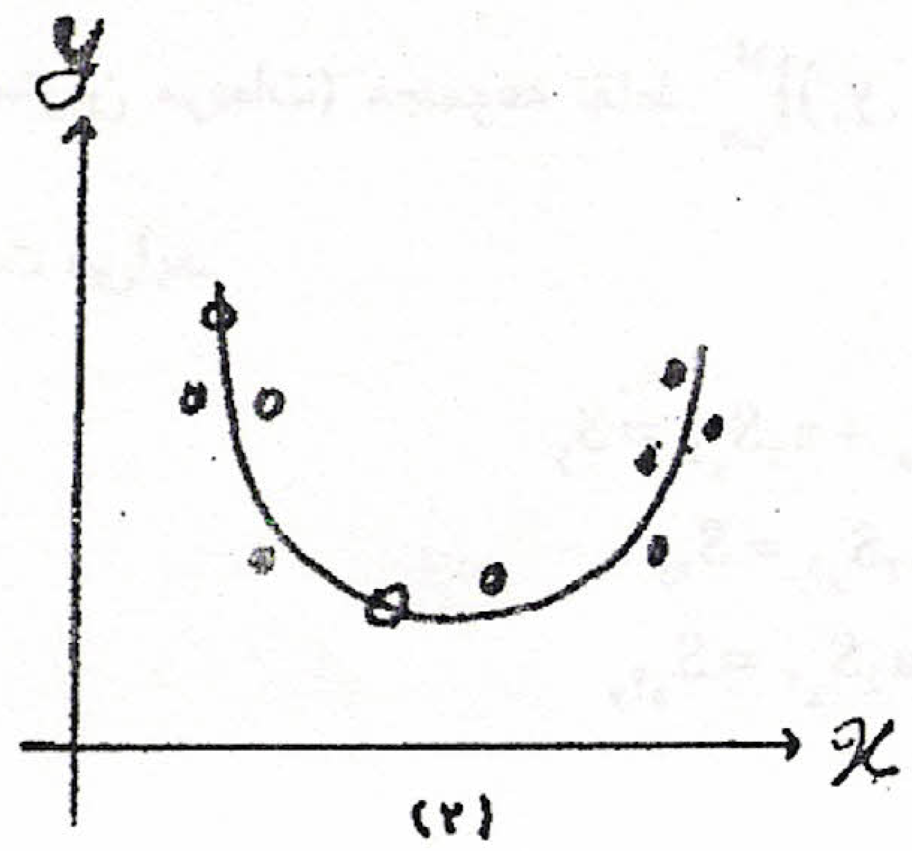
تقریب کمترین مربعات

در این فصل ابتدا بحث تقریب یا برازش کمترین مربعات گسسته را بیان و سپس تقریب کمترین مربعات پیوسته را مطرح خواهیم کرد.

۱.۴ تقریب کمترین مربعات گسسته چند جمله‌ای

دو نمودار 10 نقطه‌ای در زیر رسم شده است:





می‌دانیم چند جمله‌ای تقریب ساز که از این 10 نقطه می‌گذرد، چند جمله‌ای درون‌یاب درجه 9 می‌باشد. لاکن شکل‌های (۱) و(۲) نشان می‌دهند که به ترتیب رابطه بین نقاط خطی (درجه ۱) و سهمی (درجه ۲) می‌باشد. اگر واقعاً چنین باشد، در شکل (۱) به دنبال خط و در شکل (۲) به دنبال سهمی تقریب‌ساز هستیم، که یک ارتباط بین داده‌های گسسته 10 نقطه مذکور برقرار کند، تا بتوانیم برای نقاط دیگر یک حدس تقریبی داشته باشیم. بنابراین ابتدا تعریف تقریب کمترین مربعات را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱: چند جمله‌ای کمترین مربعات درجه n مجموعه داده‌های $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^{M}$ برای $n \le M$، چند جمله‌ای درجه n ، $p_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ می‌باشد، که در آن $a_n,\ldots,a_1,a_0$ به گونه‌ای هستند که خطای کمترین مربعات، یعنی $E=\sum_{i=0}^{M}\left(y_i-p_n(x_i)\right)^2$ حداقل شود.

باید توجه داشت E یک تابع $n+1$ متغیره چند جمله‌ای بر حسب $a_n,...,a_1,a_0$ می‌باشد در واقع E مجموع مربعات خطاهاست. شرط لازم برای به حداقل رسانیدن E به صورت زیر است:

$$\frac{\partial E}{\partial a_j}=0, j=0,1,2,...,n.$$

پس از انجام محاسبات لازم خواهیم داشت:

$$\begin{cases}(M+1)a_0+a_1S_x+a_2S_{x^2}+...+a_nS_{x^n}=S_y\\ a_0S_x+a_1S_{x^2}+...+a_nS_{x^{n+1}}=S_{xy}\\ \vdots\\ a_0S_{x^n}+a_1S_{x^{n+1}}+...+a_nS_{x^{2n}}=S_{x^ny}\end{cases} \qquad (1)$$

دستگاه فوق، یک دستگاه خطی با $(n+1)$ معادله و $(n+1)$ مجهول $a_n,...,a_1,a_0$ می‌باشد، که در آن

$$S_x=\sum_{i=0}^{M}x_i\,,\ S_{x^2}=\sum_{i=0}^{M}x_i^2,...,S_{x^k}=\sum_{i=0}^{M}x_i^k\,,\ S_{x^ky}=\sum_{i=0}^{M}x_i^ky_i$$

این دستگاه به دستگاه معادلات نرمال معروف است و جواب یکتا دارد.

حالت خاص ۱: چند جمله‌ای کمترین مربعات درجه یک (خط تقریب‌ساز کمترین مربعات) مجموعه نقاط $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^{M}$، چند جمله‌ای درجه یک $p_1(x)=a_0+a_1x$ می‌باشد که a_1,a_0 از دستگاه زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases}(M+1)a_0+a_1S_x=S_y\\ a_0S_x+a_1S_{x^2}=S_{xy}\end{cases} \qquad (2)$$

حالت خاص۲: چند جمله‌ای کمترین مربعات درجه دوم (سهمی کمترین مربعات) مجموعه نقاط $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^{M}$، چند جمله‌ای $p_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ می‌باشد که a_2,a_1,a_0 از دستگاه زیر به دست می‌آید.

$$\begin{cases}(M+1)a_0+a_1S_x+a_2S_{x^2}=S_y\\ a_0S_x+a_1S_{x^2}+a_2S_{x^3}=S_{xy}\\ a_0S_{x^2}+a_1S_{x^3}+a_2S_{x^4}=S_{x^2y}\end{cases} \qquad (3)$$

مثال ۱: خط کمترین مربعات داده‌های زیر را به‌دست می‌آوریم.

x_i	-3	-1	0	2
y_i	0	1	2	3

حل: خط کمترین مربعات خط $p_1(x)=a_0+a_1x$ است، که a_1, a_0 از دستگاه معادلات نرمال (۲) به دست می‌آید ابتدا جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
-3	0	9	0
-1	1	1	-1
0	2	0	0
2	3	4	6
$S_x=-2$	$S_y=6$	$S_{x^2}=14$	$S_{xy}=5$

بنابراین دستگاه معادلات نرمال (۲) به صورت زیر است:

$$\begin{cases} 4a_0-2a_1=6 \\ -2a_0+14a_1=5 \end{cases}$$

که با حل این دستگاه $a_1=\frac{8}{13}$, $a_0=\frac{47}{26}$ به‌دست می‌آید. پس خط کمترین مربعات $p_1(x)=\frac{47}{26}+\frac{8}{13}x$ مشخص می‌گردد.

مثال ۲: سهمی کمترین مربعات (چند جمله‌ای کمترین مربعات درجه دوم) داده‌های جدولی زیر را به‌دست می‌آوریم.

x_i	-1	0	1	2
y_i	2	0	0	2

حل: سهمی کمترین مربعات، چند جمله‌ای درجه دوم $p_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ است، که a_2, a_1, a_0 با تشکیل دستگاه معادلات نرمال (۳) به‌دست می‌آید. ابتدا جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	x_iy_i	$x_i^2y_i$
-1	2	1	-1	1	-2	2
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0
2	2	4	8	16	4	8
$S_x=2$	$S_y=4$	$S_{x^2}=6$	$S_{x^3}=8$	$S_{x^4}=18$	$S_{xy}=2$	$S_{x^2y}=10$

بنابراین دستگاه معادلات نرمال (۳) به صورت زیر است.

$$\begin{cases} 4a_0+2a_1+6a_2=4 \\ 2a_0+6a_1+8a_2=2 \\ 6a_0+8a_1+18a_2=10 \end{cases}$$

با حل این دستگاه خواهیم داشت:

$$a_0=0 \ , a_1=-1 \ , a_2=1$$

پس چند جمله‌ای کمترین مربعات درجه ۲ ، چند جمله‌ای $p_2(x)=x^2-x$ می‌باشد.

یادداشت ۱: چند جمله‌ای درون‌یاب مجموعه داده‌های مثال، چند جمله‌ای $x^2 - x$ است. در واقع چند جمله‌ای درون‌یاب حالت خاص چند جمله‌ای کمترین مربعات است. به طور کلی اگر f یک تابع چند جمله‌ای درجه M باشد آن‌گاه چند جمله‌ای درون‌یاب و چند جمله‌ای کمترین مربعات درجه M، حداقل هر $M+1$ نقطه $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^{M}$ خود f است.

یادداشت ۲: چون چند جمله‌ای کمترین مربعات ممکن است نوسانات زیادی داشته باشد، در واقع هرقدر درجه چند جمله‌ای افزایش یابد ممکن است این نوسانات بیش‌تر شود، به‌خاطر همین اصل در عمل کمتر از چند جمله‌ای‌های درجه بالاتر از پنج استفاده می‌شود.

تقریب کمترین مربعات نمایی :

می‌خواهیم یک منحنی نمایی به شکل $y = ae^{bx}$ را برای نقاط $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{M}$ برازش دهیم. این نوع برازش به خصوص در رشد گونه‌های بعضی از جانداران با توجه به فیزیک مسأله ، مفید است. منحنی $y = ae^{bx}$ تقریب کمترین مربعات نمایی مجموعه نقاط یاد شده است، هرگاه خطای کمترین مربعات یعنی

$$E(a,b) = \sum_{i=0}^{M}\left(y_i - ae^{bx_i}\right)^2$$

حداقل شود. شرط لازم برای به حداقل رساندن E آن است که:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial a} = -2\sum_{i=0}^{M} e^{bx_i}\left(y_i - ae^{bx_i}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial E}{\partial b} = -2\sum_{i=0}^{M} ax_i e^{bx_i}\left(y_i - ae^{bx_i}\right) = 0 \end{cases}$$

دستگاه معادلات اخیر یک دستگاه غیرخطی با دو معادله و دو مجهول b,a می‌باشد، که می‌توان آن را با یک روش غیرخطی حل کرد. که از لحاظ محاسباتی وقت‌گیر است و احتیاج به حدس زدن دو مقدار اولیه b,a دارد. (در فصل حل دستگاه‌ها، بحث خواهیم کرد.)

روش دیگر که از فرایند **خطی سازی** استفاده می‌شود، به صورت زیر است:

چون $y = ae^{bx}$، پس برای a>0 داریم:

$$Lny = Ln(a) + bx.$$

حال با تغییر متغیر $X = x$,$Y = Ln\,y$ خواهیم داشت :

$$Y = a_0 + a_1X \qquad ,a_0 = Ln(a)\,,a_1 = b$$

نقاط (x_i, y_i) به ازای $i = 0,1,\dots,M$ در صفحه xy به نقاط (X_i, Y_i) در صفحه XY تبدیل می‌شود. که در آن $X_i = x_i$,$Y_i = Lny_i$. بنابراین برای تعیین a و b کافی است تقریب کمترین مربعات نقاط (X_i, Y_i) برای $i = 0,1,\dots,M$ را به دست آوریم، که در این صورت خواهیم داشت:

$$b = a_1 \quad , \quad a = e^{a_0}$$

مثال ۳: تقریب کمترین مربعات نمایی مجموعه نقاط جدولی زیر را به دست می‌آوریم.

x_i	0	1	2
y_i	1	2	6

حل: برای تعیین تقریب از روند خطی‌سازی استفاده می‌کنیم. دستگاه معادلات نرمال خطی‌سازی مربوطه به صورت زیر است.

$$\begin{cases} 3a_0 + a_1 S_X = S_Y \\ a_0 S_X + a_1 S_{X^2} = S_{XY} \end{cases}$$

ابتدا مشاهده می‌کنیم:

x_i	y_i	X_i	Y_i	X_i^2	$X_i Y_i$
0	1	0	0	0	0
1	2	1	0.69	1	0.69
2	6	2	1.79	4	3.58
		$S_X = 3$	$S_Y = 2.48$	$S_{X^2} = 5$	$S_{XY} = 4.27$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} 3a_0 + 3a_1 = 2.48 \\ 3a_0 + 5a_1 = 4.27 \end{cases}$$

که از حل این دستگاه $a_1 = 0.90$ ، $a_0 = -0.07$ به دست می‌آید و لذا خواهیم داشت:

$$b = a_1 = 0.90 \quad , a = e^{-a_0} = e^{-0.07} = 0.90$$

لذا تقریب کمترین مربعات نمایی نقاط این مثال به صورت $y = 0.90\, e^{0.90x}$ به دست می‌آید.

برازش‌های دیگر: روش خطی‌سازی داده‌ها را می‌توان برای برازش دسته منحنی‌های دیگر، نظیر $y = \alpha a^{\beta x}$ (a پایه معلوم است) ، لگاریتمی $y = a\,\mathrm{Ln}x + b$ ، هذلولی $y = \frac{a}{x} + b$ یا $y = \frac{1}{ax+b}$ و غیره به کار برد. البته بعد از انتخاب دسته منحنی باید بتوان یک تغییر متغیر مناسب برای خطی شدن پیدا کرد.

برای اولی تغییر متغیر $Y = \log_a y$ و $X = x$، برای دومی $X = \mathrm{Ln}\,x$, $Y = y$ ، برای سومی $X = \frac{1}{x}$, $Y = y$ و برای چهارمی $X = x$, $Y = \frac{1}{y}$ ، در نظر گرفته می‌شود.

مثال ۴: تقریب کمترین مربعات به صورت $y = \frac{1}{(a_0 + a_1 x)^3}$ را برای مجموعه نقاط جدولی زیر به دست می‌آوریم.

x_i	0	1	2
y_i	1	0.008	0.027

حل: واضح است که $\frac{1}{\sqrt[3]{y}} = a_0 + a_1 x$، پس قرار می‌دهیم:

$$Y = \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \quad , \quad X = x$$

لذا داریم $Y = a_0 + a_1 X$، پس دستگاه معادلات نرمال این خط تقریب‌ساز کمترین مربعات، به صورت زیر است.

$$\begin{cases} 3a_0 + a_1 S_X = S_Y \\ a_0 S_X + a_1 S_{X^2} = S_{XY} \end{cases}$$

بنابراین ابتدا جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x_i	y_i	X_i	Y_i	X_i^2	$X_i Y_i$
0	1	0	1	0	0
1	0.008	1	5	1	5
2	0.027	2	$\frac{10}{3}$	4	$\frac{20}{3}$
		$S_X = 3$	$S_Y = \frac{28}{3}$	$S_{X^2} = 5$	$S_{XY} = \frac{35}{3}$

و داریم:

$$\begin{cases} 3a_0 + 3a_1 = \frac{28}{3} \\ 3a_0 + 5a_1 = \frac{35}{3} \end{cases}$$

از این دستگاه a_1, a_0 به صورت زیر به دست می‌آید.

$$a_0 = \frac{35}{18} \quad , a_1 = \frac{7}{6}$$

بنابراین تقریب کمترین مربعات مربوطه به صورت زیر است:

$$y = \frac{1}{\left(\frac{35}{18} + \frac{7}{6}x\right)^3}$$

۲.۴ تقریب کمترین مربعات پیوسته چند جمله‌ای

تعریف ۲: فرض کنیم تابع f بر $[a,b]$ پیوسته باشد، چند جمله‌ای تقریب کمترین مربعات درجه n تابع f چند جمله‌ای $p_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ است، که در آن $a_n, \dots, a_1, a_0$ به گونه‌ای هستند که خطای کمترین مربعات، یعنی

$$E = \int_a^b (f(x) - p_n(x))^2 \, dx$$

حداقل شود.

باید توجه داشت که E یک تابع $n+1$ متغیره چند جمله‌ای برحسب $a_n, \dots, a_1, a_0$ می‌باشد. شرط لازم برای به حداقل رسانیدن E آن است که داشته باشیم:

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \quad , j = 0, 1, \dots, n$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = -2 \int_a^b \frac{\partial p_n(x)}{\partial a_j} (f(x) - p_n(x)) \, dx$$

$$=-2\int_a^b x^j\left(f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k x^k\right)dx=0\ ,\ j=0,1,\ldots,n$$

با انجام محاسبات لازم به دست می‌آوریم:

$$\sum_{k=0}^{n}a_k\int_a^b x^{j+k}dx=\int_a^b x^j f(x)\,dx\ ,\ j=0,1,\ldots,n$$

دستگاه معادلات فوق یک دستگاه خطی با $n+1$ معادله و $n+1$ مجهول $a_n,\ldots,a_1,a_0$ است و به دستگاه معادلات نرمال معروف است. باز شده این دستگاه به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{cases} a_0\int_a^b x^0dx+a_1\int_a^b x^1dx+\ldots+a_n\int_a^b x^n dx=\int_a^b f(x)\,dx \\ a_0\int_a^b xdx+a_1\int_a^b x^2dx+\ldots+a_n\int_a^b x^{n+1}dx=\int_a^b xf(x)\,dx \\ \vdots \\ a_0\int_a^b x^n dx+a_1\int_a^b x^{n+1}dx+\ldots+a_n\int_a^b x^{2n}dx=\int_a^b x^n f(x)\,dx \end{cases} \qquad (۴)$$

از این دستگاه a_iها به طور منحصر بفرد تعیین می‌گردند و لذا چند جمله‌ای کمترین مربعات مشخص می‌شود.

حالت خاص ۱: چند جمله‌ای کمترین مربعات درجه یک تابع f روی بازه $[a,b]$ چند جمله‌ای $p_1(x)=a_0+a_1x$ است که a_1,a_0 از دستگاه زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{cases} a_0\int_a^b x^0dx+a_1\int_a^b xdx=\int_a^b f(x)\,dx \\ a_0\int_a^b xdx+a_1\int_a^b x^2dx=\int_a^b xf(x)\,dx \end{cases} \qquad (۵)$$

حالت خاص۲: چند جمله‌ای کمترین مربعات درجه ۲ (سهمی کمترین مربعات) تابع f روی بازه $[a,b]$ چند جمله‌ای $p_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$ است، که a_2,a_1,a_0 از دستگاه زیر تعیین می‌کردند.

$$\begin{cases} a_0\int_a^b x^0dx+a_1\int_a^b xdx+a_2\int_a^b x^2dx=\int_a^b f(x)\,dx \\ a_0\int_a^b xdx+a_1\int_a^b x^2dx+a_2\int_a^b x^3dx=\int_a^b xf(x)\,dx \\ a_0\int_a^b x^2dx+a_1\int_a^b x^3dx+a_2\int_a^b x^4dx=\int_a^b x^2f(x)\,dx \end{cases} \qquad (۶)$$

مثال ۵: خط کمترین مربعات تابع $f(x)=x^2$ را روی بازه $[0,1]$ به دست می‌آوریم.

حل: در مقایسه با حالت کلی $b=1\ ,a=0$ می‌باشد، لذا دستگاه معادلات نرمال (۵) به صورت زیر است.

$$\begin{cases} a_0 \int_0^1 x^0 dx + a_1 \int_0^1 x dx = \int_0^1 x^2 dx \\ a_0 \int_0^1 x dx + a_1 \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 x^3 dx \end{cases}$$

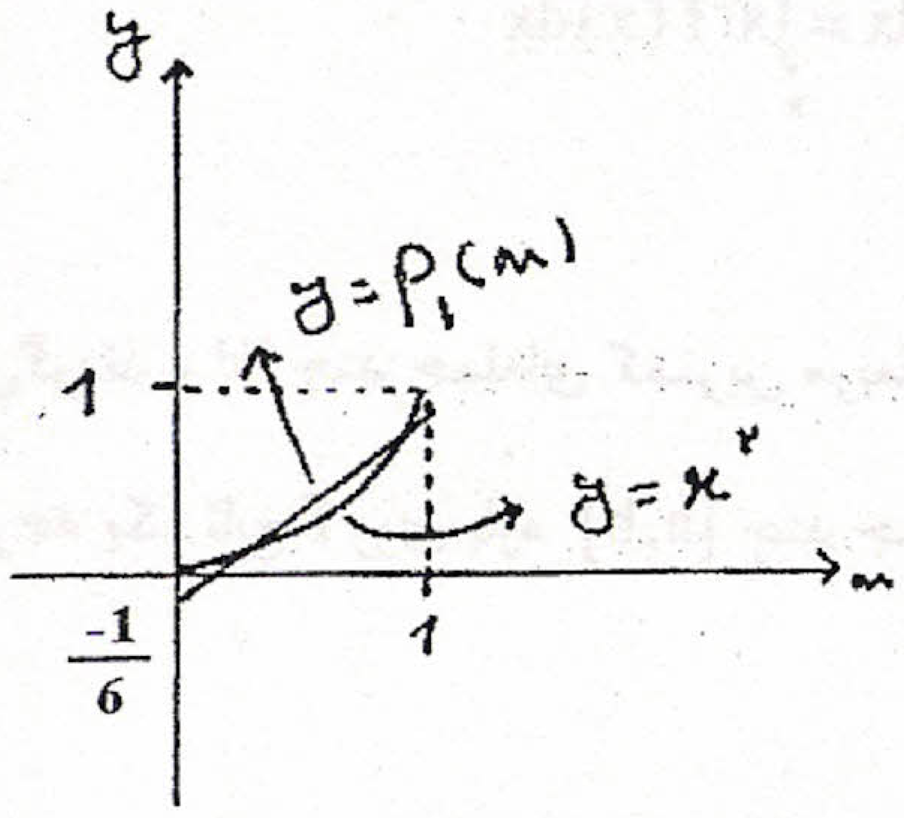
با انتگرال‌گیری داریم :

$$\begin{cases} a_0 + \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{3} a_1 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

پس از حل این دستگاه به دست می‌آوریم :

$$a_0 = -\frac{1}{6}, a_1 = 1$$

لذا خطای کمترین مربعات تابع f به صورت $p_1(x) = -\frac{1}{6} + x$ است، که نمودار $f(x), p_1(x)$ را در زیر مشاهده می‌کنید.



یادداشت ۳: در مثال (۵) اگر تقریب کمترین مربعات درجه دو مورد نظر باشد همان تابع f به‌دست می‌آید، زیرا که در این صورت خطای کمترین مربعات صفر می‌شود. به طور کلی اگر f یک تابع چند جمله‌ای درجه n باشد، آن‌گاه چند جمله‌ای کمترین مربعات با حداقل درجه n، خود f است.

مثال ۶: سهمی کمترین مربعات تابع $f(x) = e^x$ را روی بازه $[-1,1]$ به دست می‌آوریم.

حل: سهمی کمترین مربعات تابع f چند جمله‌ای $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ می‌باشد، که ضرایب آن از دستگاه نرمال (۶) به دست می‌آید. پس از ساده‌سازی و انجام محاسبات لازم و حل دستگاه (۶) به دست می‌آوریم:

$$a_0 = 0.9963 \ , a_1 = 1.1037 \ , a_2 = 0.5368$$

لذا سهمی کمترین مربعات تابع e^x روی بازه $[-1,1]$ به صورت زیر است.

$$p_2(x) = 0.9963 + 1.1037x + 0.5368x^2$$

مثال‌های متنوع تستی حل شده :

مثال ۷: نقاط (x_i, y_i) برای $i = 0,1,2,3$ روی نمودار تابع $f(x) = x^3 + x + 1$ قرار دارد، تقریب کمترین مربعات درجه ۳ این نقاط کدام است؟

۱) $y = x^3 - x + 1$ ۲) $y = x^3 + x + 1$ ۳) $y = x^3 - x - 1$ ۴) $y = x^3 + x - 1$

حل: چون تعداد نقاط چهار می‌باشد و روی چند جمله‌ای درجه سه واقع گردیده است پس تقریب کمترین مربعات درجه۳ این تابع ، خود f است پس گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

مثال ۸: روند به دست آوردن یک مقدار غیر جدولی از یک تابع جدولی چه نام دارد؟

۱) تقریب کمترین مربعات ۲) درون‌یابی ۳) برون‌یابی ۴) هر سه مورد

حل: جواب صحیح گزینه (۴) می‌باشد.

مثال ۹: با استفاده از روش حداقل مجموع مربعات ، خم برازنده به صورت $y = ae^{bx}$ برای تابع جدولی ذیل کدام است؟

x_i	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
y_i	1.5	2.5	3.5	5.0	7.5

۱) $y = -1.578e^{-0.391x}$ ۲) $y = 1.578e^{-0.391x}$ ۳) $y = -1.578e^{0.391x}$ ۴) $y = 1.578e^{0.391x}$

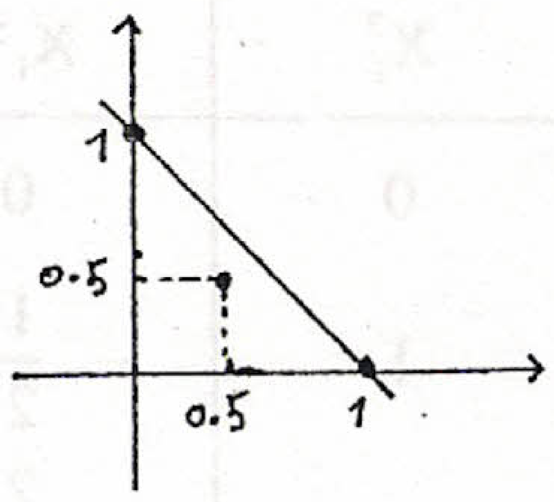
حل: در این مثال نیازی به حل کلاسیک مسأله نیست، با توجه به مفهوم کمترین مربعات می‌توان جواب مسأله را تعیین نمود. چون نقاط صعودی و مقادیر مثبت است، پس گزینه (۱) و (۳) جواب مسأله نمی‌باشد از طرفی چون تابع گزینه (۲) نزولی است $(y' < 0)$ پس گزینه (۲) هم جواب نمی‌باشد، بنابراین گزینه (۴) جواب صحیح می‌باشد.

مثال ۱۰: خط تقریب‌ساز کمترین مربعات نقاط جدولی زیر کدام است؟

x_i	0	0.5	1
y_i	1	0.5	0

۱) $y = 1 - x$ ۲) $y = 1 + x$ ۳) $y = 1 + 2x$ ۴) $y = 1 - 2x$

حل: در این مثال به نمودار نقاط توجه می‌کنیم.



با توجه به نمودار این نقاط گزینه (۲) و (۳) صحیح نیست، زیرا که این گزینه‌ها خط‌های صعودی هستند، در حالی‌که این نقاط نشان‌دهنده یک روند نزولی است. از طرف دیگر اگر به نمودار گزینه (۴) توجه کنیم جواب صحیح نمی‌باشد، پس گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

مثال ۱۱: تقریب کمترین مربعات درجه یک مجموعه نقاط زیر کدام است؟

x_i	0	0.5	1
y_i	0	0.4	1

۱) $y=-0.03+2x$ ۲) $y=-0.03+3x$ ۳) $y=-0.03+x$ ۴) $y=0.03+x$

حل: تقریب کمترین مربعات نقاط مذکور چند جمله‌ای $p_1(x)=a_0+a_1x$ است که a_1,a_0 جواب دستگاه نرمال (۲) می‌باشد. پس:

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
0	0	0	0
0.5	0.4	0.25	0.20
1	1	1	1
$S_x=1.5$	$S_y=1.4$	$S_{x^2}=1.25$	$S_{xy}=1.20$

بنابراین دستگاه (۲) به صورت زیر است

$$\begin{cases}3a_0+1.5a_1=1.4\\1.5a_0+1.25a_1=1.2\end{cases}\Rightarrow a_0=-0.03\ ,\ a_1=1$$

پس گزینه (۳) جواب صحیح می‌باشد.

مثال ۱۲: اگر تقریب کمترین مربعات به فرم $y=\dfrac{1}{(a_0+a_1x)^2}$ برای نقاط زیر مورد نظر باشد، (a_0,a_1) کدام است؟

x_i	0	1	2
y_i	1	4	9

۱) $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{17}{18}\right)$ ۲) $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{-17}{18}\right)$

۳) $\left(\dfrac{-1}{3},\dfrac{-17}{18}\right)$ ۴) $\left(\dfrac{-1}{3},\dfrac{17}{18}\right)$

حل: واضح است که $\dfrac{1}{y}=(a_0+a_1x)^2$ پس $\dfrac{1}{\sqrt{y}}=a_0+a_1x$، لذا قرار می‌دهیم:

$$Y=\frac{1}{\sqrt{y}}\ \text{،}\ X=x$$

پس داریم $Y=a_0+a_1X$، لذا a_0,a_1 را از دستگاه (۲) را به دست می‌آوریم.

x_i	y_i	X_i	Y_i	X_i^2	X_iY_i
0	1	0	1	0	0
1	4	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
2	9	2	$\frac{1}{3}$	4	$\frac{2}{3}$
		$S_X=3$	$S_Y=\frac{11}{6}$	$S_{X^2}=5$	$S_{XY}=\frac{7}{6}$

با جانشانی در دستگاه (۲) داریم:

$$\begin{cases} 3a_0+3a_1=\dfrac{11}{6} \\ 3a_0+5a_1=\dfrac{7}{6} \end{cases} \Rightarrow a_1=\frac{-1}{3}, a_0=\frac{17}{18}$$

پس گزینه (۴) جواب صحیح می‌باشد.

مثال ۱۳: تقریب کمترین مربعات درجه سوم تابع $f(x)=x^3+x+1$ روی بازه $[0,1]$ کدام است؟

۱) $p_3(x)=x^3-x-1$
۲) $p_3(x)=-x^3+x+1$
۳) $p_3(x)=x^3+x-1$
۴) $p_3(x)=x^3+x+1$

حل: چون تابع f چند جمله‌ای درجه سوم است و تقریب کمترین مربعات درجه سوم مورد نظر است پس تقریب کمترین مربعات f، خود f است. پس گزینه(۴) صحیح می‌باشد.

مثال ۱۴: تقریب کمترین مربعات تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ روی بازه $[1,2]$ به فرم $y=\frac{a}{x}+b$ مورد نظر است، (a,b) کدام است؟

۱) $(1,0)$
۲) $(0,1)$
۳) $(2,1)$
۴) $(1,2)$

حل: قرار دهیم $X=\frac{1}{x}$ ، $Y=y$، پس خواهیم داشت:

$$g(X)=f(X)=X \;, Y=aX+b$$

بنابراین تقریب کمترین مربعات درجه یک $g(X)=X$ مورد نظر است که خود $g(X)$ می‌شود، پس $a=1$, $b=0$. بنابراین گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

تمرین‌های تشریحی:

۱ ـ خط کمترین مربعات مجموعه داده‌های زیر را به دست آورید.

x_i	0	1	2	3
y_i	0	1.1	1.9	3

۲ ـ سهمی کمترین مربعات نقاط جدولی زیر را تعیین کنید.

x_i	0	1	2	4
y_i	0	0.1	1.9	12

۳ ـ تقریب کمترین مربعات به فرم $y=ae^{bx}$ را برای نقاط جدولی زیر به دست آورید.

x_i	0	1	2
y_i	1	2.6	3

۴ ـ تقریب کمترین مربعات به فرم $y=\frac{1}{a_0+a_1x}$ را برای نقاط جدولی زیر تعیین کنید.

x_i	0	1	2
y_i	1	0.4	0.3

۵ ـ تقریب کمترین مربعات به فرم $y=\frac{a}{x}+b$ را برای نقاط جدولی زیر به دست آورید.

x_i	1	2	4
y_i	1	1.4	1.3

۶ ـ تقریب کمترین مربعات به فرم $y=(a_0+a_1x)^2$ را برای نقاط جدولی زیر تعیین کنید.

x_i	0	1	2	4
y_i	0	0.9	4.1	15

۷ ـ تقریب کمترین مربعات به فرم $y=a\,\mathrm{Ln}\,x+b$ را برای نقاط جدولی زیر تعیین کنید.

x_i	1	2	3
y_i	0	0.5	0.7

۸ ـ تقریب کمترین مربعات به فرم $y=a\cos x+b$ را برای نقاط جدولی زیر به دست آورید.

x_i	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y_i	1	0.7	0.1

۹ ـ خط کمترین مربعات و سهمی کمترین مربعات تابع $f(x)=x^3$ را روی بازه $[0,1]$ به دست آورید.

۱۰ ـ تقریب کمترین مربعات به فرم $y=a\,\mathrm{Ln}x+b$ را برای تابع $f(x)=x$ روی بازه $[1,2]$ به دست آورید.

تمرین‌های چهار گزینه‌ای:

۱ـ خط کمترین مربعات داده‌های جدولی زیر کدام است؟

x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y_i	0	0.45	0.63	0.77	0.89	1

۱) $y=\frac{6.64}{21}x+\frac{3.6}{7}$ ۲) $y=0.86x+0.1$ ۳) $y=0.92x+0.16$ ۴) $y=\frac{6.64}{7}x+\frac{3.4}{21}$

۲ـ اگر برازش منحنی $y=\frac{1}{(ax+b)^2}$ را برای جدول داده‌های زیر به‌کار بریم در این صورت (a,b) کدام است؟

x_i	0	0.1	0.3
y_i	1	0.16	0.25

۱) $(3.85,1.5)$ ۲) $(3.95,1.5)$ ۳) $(3.85,1.4)$ ۴) $(3.75,1.5)$

۳ـ چند جمله‌ای کمترین مربعات درجه ۳ نقاط $(0,1),(1,2),(2,4),(3,5)$ واقع بر یک چند جمله‌ای درجه سه کدام است؟

۱) یک چند جمله‌ای درجه ۳ است. ۲) همان چند جمله‌ای درجه سوم یاد شده است.

۳) یک چند جمله‌ای درجه ۴ است. ۴) یک چند جمله‌ای درجه دو می‌باشد.

۴ـ سهمی‌کمترین مربعات نقاط $(-1,1),(0,0),(1,1)$ کدام است؟

۱) $y=x^2$ ۲) $y=x^2+1$ ۳) $y=x^2-1$ ۴) $y=x^4$

۵ـ سهمی کمترین مربعات و چند جمله‌ای درون‌یاب سه نقطه دوبه‌دو متمایز:

۱) برهم منطبق هستند. ۲) ممکن است برهم منطبق باشند.

۳) چند جمله‌ای درون‌یاب از درجه دو نیست. ۴) اظهار نظری نمی‌توان کرد.

۶ـ اگر تقریب کمترین مربعات به فرم $y=(ax+b)^2$ برای داده‌های زیر مورد نظر باشد، زوج (a,b) کدام است؟

x_i	0	1	2
y_i	1	1	4

۱) $\left(1,\frac{1}{3}\right)$ ۲) $\left(-1,\frac{1}{3}\right)$ ۳) $\left(2,\frac{1}{3}\right)$ ۴) $\left(3,\frac{1}{3}\right)$

۷ـ تقریب کمترین مربعات تابع $f(x)=\frac{1}{x+1}$ روی بازه $[1,2]$ به فرم $y=\frac{1}{ax+b}$ مورد نظر است، زوج (a,b) کدام است؟

۱) $(1,1)$ ۲) $(1,2)$ ۳) $(2,2)$ ۴) $(1.5,2)$

۸ـ تقریب کمترین مربعات تابع $f(x)=\frac{x^3+1}{x^3}$ روی بازه $[1,2]$ به فرم $y=\frac{a}{x^3}+b$ مورد نظر است. زوج (a,b) کدام است؟

۱) $(1,4)$ ۲) $(1,3)$ ۳) $(1,2)$ ۴) $(1,1)$

۹ـ سهمی کمترین مربعات تابع $f(x)=x^2+1$ روی بازه $[0,1]$ کدام است؟

۱) $y=x^2+x-1$ ۲) $y=x^2-x+1$ ۳) $y=x^2+1$ ۴) $y=x^2-1$

۱۰ـ تقریب کمترین مربعات $f(x)=x$ روی بازه $[1,2]$ به فرم $y=a\,Lnx+b$ کدام است؟

۱) $y=\frac{13e-15}{12}+\frac{3-e}{6}x$
۲) $y=\frac{13e+15}{12}+\frac{3-e}{6}x$
۳) $y=\frac{13e-15}{12}+\frac{3+e}{6}x$
۴) $y=\frac{13e+15}{12}+\frac{3+e}{6}x$

۱۱ـ تقریب کمترین مربعات داده‌های جدولی زیر به فرم $y=\frac{1}{a\cos x+b}$ کدام است؟

x_i	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y_i	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

۱) $y=\frac{-1}{1+2\cos x}$
۲) $y=\frac{1}{-1+2\cos x}$
۳) $y=\frac{1}{1-2\cos x}$
۴) $y=\frac{1}{1+2\cos x}$

۱۲ـ سهمی کمترین مربعات داده‌های جدولی زیر کدام است؟

x_i	0	1	2	4
y_i	1	2	4	13

۱) $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1$
۲) $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1$
۳) $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-1$
۴) $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-1$