فصل ۵

انتگرال گیری و مشتق گیری عددی

۵ . ۱ انتگرال گیری عددی

دانشجویان این درس می‌دانند که اگر تابع f بر $[a,b]$ پیوسته (تکه‌ای پیوسته) باشد آن‌گاه با استفاده از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال خواهیم داشت:

$$I(f)=\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

که در آن $F(x)$ یک پادمشتق (انتگرال‌گیری نامعین) تابع f می‌باشد. بنابراین محاسبه مقدار I(f) منوط به محاسبه یک پادمشتق f است. اما می‌دانیم برای اکثر توابع نظیر $Sin(x^2)$، $Cos(x^2)$ ، $\frac{Sin(x)}{x}$ و ..... نمی‌توان پادمشتق آن‌ها را به صورت یک تابع مقدماتی بیان کرد و یا محاسبه پادمشتق آن‌ها مقرون به صرفه نمی‌باشد. بنابراین ضرورت دارد با روش‌های عددی جهت برآورد $I(f)$ آشنا شویم. بحث را با ساده‌ترین روش یعنی روش ذوزنقه (Trapeziod) آغاز می‌کنیم.

۵ . ۱ . ۱ روش ذوزنقه‌ای مرکب

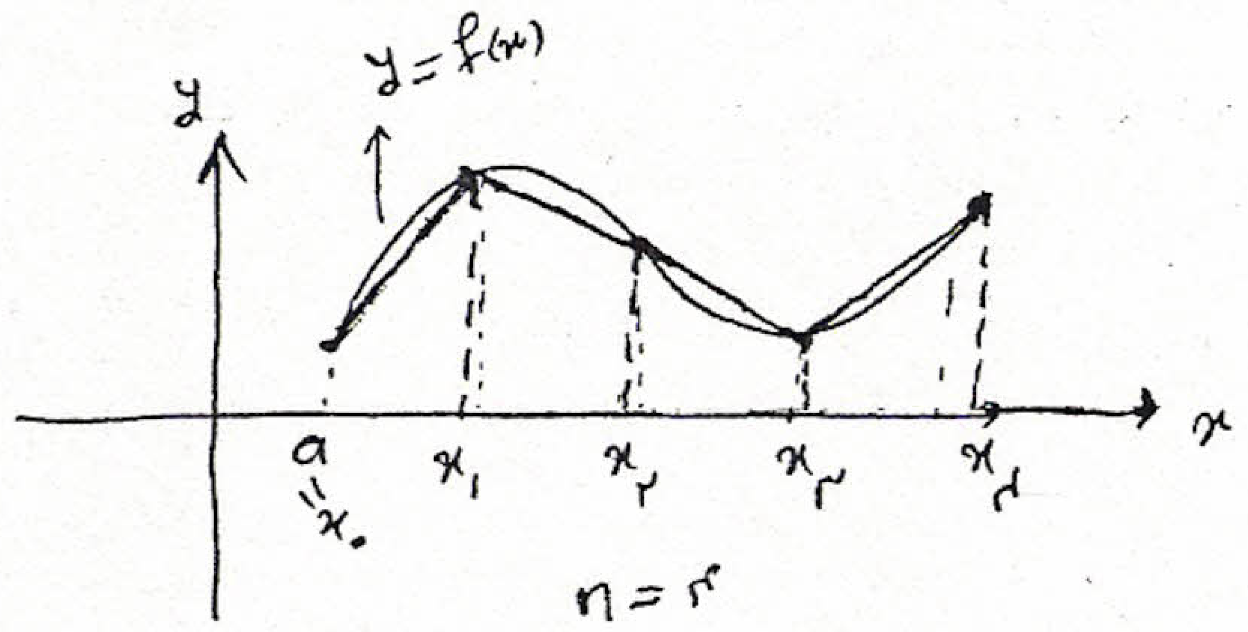
فرض کنیم تابع f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و

$$a=x_0<x_1<x_2<\dots\dots<x_n=b \qquad , \qquad x_i-x_{i-1}=h \qquad , \qquad i=1,2,\dots,n$$

در واقع $h=\frac{b-a}{n}$ می‌باشد، یعنی بازه $[a,b]$ به n زیر بازه با طول یکسان تقسیم شده است و تعداد گره‌های (یا نقاط) x_iها، n+1 می‌باشد. واضح است که

$$I(f)=\int_a^b f(x)dx=\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx+\dots+\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \qquad (۱)$$

حال $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$ را برای $i=1,2,\dots,n$ تقریب می‌زنیم. برای این منظور تابع f را روی بازه $[x_{i-1},x_i]$ با یک خط تقریب می‌زنیم که این خط از نقاط (x_{i-1},f_{i-1}) و (x_i,f_i) بگذرد، یعنی چند جمله‌ای درون‌یاب حداکثر از درجه یک تابع f، مبتنی بر x_{i-1} و x_i را به دست می‌آوریم.



شکل ۱

بنابراین خواهیم داشت:

$$f(x) \simeq f_{i-1} + (x - x_{i-1})f[x_{i-1}, x_i] \qquad , \qquad x_{i-1} \le x \le x_i$$

$$I_i(f) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \simeq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f_{i-1} + (x - x_{i-1})f[x_{i-1}, x_i]\right)dx = \frac{h}{2}(f_{i-1} + f_i) \quad , \ i = 1,2,\dots,n$$

لذا فرمول **ذوزنقه‌ای ساده** به صورت زیر است:

$$I_i(f) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \simeq \frac{h}{2}(f_{i-1} + f_i) \quad , \quad i = 1,2,\dots,n \tag{2}$$

باید توجه داشت که اگر f تابع نامنفی باشد طرف دوم رابطه (۲) همان مساحت ذوزنقه به ارتفاع h و قاعده‌های f_{i-1} و f_i می‌باشد.

با به کارگیری رابطه (۱) داریم:

$$\begin{aligned} I(f) &= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}(f_{i-1} + f_i) \\ &= \frac{h}{2}\left[(f_0 + f_1) + (f_1 + f_2) + \dots + (f_{n-1} + f_n)\right] \\ &= h\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}\right) = T(h) \end{aligned}$$

بنابراین **فرمول ذوزنقه‌ای مرکب** به صورت زیر است:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq T(h) \tag{3}$$

اگر قرار دهیم

$$E(T(h)) = \int_a^b f(x)dx - T(h)$$

در این صورت خطای روش ذوزنقه‌ای مرکب $|E(T(h))|$ است، که قضیه زیر وضعیت خطای روش را بیان می‌کند.

قضیه ۱ : اگر تابع f بر $[a,b]$ دارای مشتق دوم پیوسته باشد، آن‌گاه:

$$\exists_\xi \in [a,b] : E(T(h)) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$$

نتیجه ۱: روش ذوزنقه‌ای با صرف‌نظر از خطای f_iها برای توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه یک دقیق است.

نتیجه ۲: هرچه h کوچک‌تر شود، $E(T(h))$ و لذا خطای روش کاهش می‌یابد (البته تا آن‌جایی‌که خطای انباشتگی مزاحمت ایجاد ننماید.)

نتیجه ۳: $E\left(T\left(\frac{h}{2}\right)\right)=\frac{1}{4}E(T(h))$

مثال ۱: با $h=0.5$ و $h=0.25$ و $h=0.125$، مقدار $I=\int_0^{0.5}e^x dx$ را با روش ذوزنقه‌ای برآورد کنید. (انجام محاسبات را تا چهار اعشار با روش گرد کردن انجام دهید)

حل: ابتدا I را با $h=0.5$ برآورد می‌کنیم، چون $f(x)=e^x$ پس $f_i=e^{x_i}$، لذا داریم:

x_i	0	0.5
f_i	1.0000	1.6487

بنابراین با توجه به فرمول (۳) داریم:

$$I\simeq T(0.5)=0.5\left(\frac{1.0000}{2}+\frac{1.6487}{2}\right)=0.6622$$

جدول مقادیر برای $h=0.25$ به صورت زیر است:

x_i	0	0.25	0.5
f_i	1.0000	1.2840	1.6487

پس با به‌کارگیری فرمول (۳) خواهیم داشت:

$$I\simeq T(0.25)=0.25\left(\frac{1.0000}{2}+1.2840+\frac{1.6487}{2}\right)=0.6521$$

هم‌چنین؛ برای $h=0.125$ داریم:

x_i	0	0.125	0.25	0.375	0.5
f_i	1.0000	1.1331	1.2840	1.4550	1.6487

$$I\simeq T(0.125)=0.6496$$

با توجه به این‌که مقدار واقعی I به صورت زیر است:

$$I=e^x\big|_0^{0.5}=e^{0.5}-1=0.64872127.....$$

مشاهده می‌شود که خطای $T(0.5)$، $T(0.25)$ و $T(0.125)$ به ترتیب در حدود 0.0135، 0.0034 و 0.0009 می‌باشد که خطای $T(0.25)$ حدود $\frac{1}{4}$ خطای $T(0.5)$ و خطای $T(0.125)$ حدود $\frac{1}{4}$ خطای $T(0.25)$ می‌باشد، البته این موضوع با توجه به نتیجه (۳) جای تعجب ندارد.

یادداشت ۱: در مثال (۱) مشاهده نمودیم که برای تنظیم جدول به ازای $h=0.25$ کاملاً از مقادیر تابع به ازای $h=0.5$ استفاده نمودیم و فقط مقدار تابع f را در 0.25 برآورد کردیم. یعنی مقدار تابع f را فقط در وسط زیر بازه قدیم مورد توجه قرار دادیم. همین موضوع وقتی که بخواهیم جدول مقادیر تابع را به ازای $h=0.125$ تشکیل دهیم صادق است.

این ویژگی یکی از محاسن روش ذوزنقه‌ای است. چون روش ذوزنقه‌ای کند است از این حسن استفاده خواهیم کرد و روش جدیدی به نام **روش رامبرگ** را خواهیم ساخت.

مثال ۲: مقدار $I=\int_0^{0.4}\frac{\cos x}{1+x^2}dx$ را با روش ذوزنقه‌ای با h=0.4، h=0.2، h=0.1 و h=0.05 برآورد می‌کنیم. (انجام محاسبات تا چهار رقم اعشار)

حل: برای h= 0.4 با توجه به این‌که $f(x)=\frac{\cos x}{1+x^2}$ می‌باشد، داریم:

x_i	0	0.4
f_i	1.0000	0.7940

بنابراین خواهیم داشت:

$$I\simeq T(0.4)=0.3588$$

جدول مقادیر تابع به‌ازای h= 0.2 به صورت زیر است.

x_i	0	0.2	0.4
f_i	1.0000	0.9423	0.7940

و لذا داریم:

$$I\simeq T(0.2)=0.3648$$

هم‌چنین برآورد I به‌ازای h= 0.1 و h=0.05 به صورت زیر است.

$$I\simeq T(0.1)=0.3701$$

$$I\simeq T(0.05)=0.3707$$

توجه کنید مقدار تقریبی I با استفاده از نرم‌افزار Mathematica به صورت زیر است.

$$I\simeq 0.3708359.....$$

مثال ۳: برای برآورد $I=\int_0^{\pi}\sin x\,dx$ با روش ذوزنقه‌ای و با خطای حداکثر $\frac{\pi^3}{12}\times10^{-4}$، تابع $\sin x$ را حداقل در چند نقطه باید حساب کرد؟

حل:

$$a=0\,,b=\pi\,,f(x)=\sin\ x\,,h=\frac{b-a}{n}\,,\ E(T(h))=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\xi)$$

که در آن $a\le\xi\le b$ می‌باشد. با جانشانی داریم:

$$|E(T(h))|=\left|-\frac{\pi}{12}\left(\frac{\pi}{n}\right)^2(-\sin\xi)\right|=\frac{\pi^3}{12n^2}|\sin\xi|\le\frac{\pi^3}{12n^2}\le\frac{\pi^3}{12}\times10^{-4}$$

و لذا خواهیم داشت $\frac{1}{n^2}\le10^{-4}$، پس $n^2\ge10^4$ بنابراین $n\ge100$. با حداقل n یعنی n=100 تعداد زیر بازه‌ها 100 می‌باشد، لذا تابع Sin x را حداقل باید در 101 نقطه حساب کرد.

۲ . ۱ . ۵ روش سیمسون (Simpson) مرکب

فرض کنیم تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته و

$$a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\ ,\ h=\frac{b-a}{n}\ ,\ x_i-x_{i-1}=h\ ,\ i=1,2,\dots,n$$

و n یعنی تعداد زیر بازه‌های بازه $[a,b]$ **زوج** است. واضح است که

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx+\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx+\dots+\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx \qquad (۴)$$

حال $\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx$ را برای $i=1,3,5,7,\dots,n-1$ تقریب می‌زنیم. برای این منظور تابع f را روی بازه $[x_{i-1},x_{i+1}]$ با یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه 2 تقریب می‌زنیم که از نقاط (x_{i-1},f_{i-1}) ، (x_i,f_i) ، (x_{i+1},f_{i+1}) بگذرد (درون‌یابی درجه ۲).

$$f(x)\simeq P_{2i}(x)=f_{i-1}+(x-x_{i-1})f[x_{i-1},x_i]+(x-x_{i-1})(x-x_i)f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx\simeq\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} P_{2i}(x)dx=\frac{h}{3}(f_{i-1}+4f_i+f_{i+1})$$

بنابراین فرمول انتگرال‌گیری **سیمسون ساده** به صورت زیر است:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx\simeq\frac{h}{3}(f_{i-1}+4f_i+f_{i+1}) \qquad (۵)$$

با به‌کارگیری رابطه (۴) و با استفاده از (۵) خواهیم داشت:

$$\int_a^b f(x)dx\simeq\frac{h}{3}(f_0+4f_1+f_2)+\frac{h}{3}(f_2+4f_3+f_4)+\dots+\frac{h}{3}(f_{n-2}+4f_{n-1}+f_n)$$

$$=\frac{h}{3}(f_0+4f_1+2f_2+\dots+2f_{n-2}+4f_{n-1}+f_n)=S(h)$$

پس فرمول انتگرال‌گیری سیمسون مرکب به صورت زیر است:

$$\int_a^b f(x)dx\simeq S(h) \qquad (۶)$$

قرار می‌دهیم:

$$E(S(h))=\int_a^b f(x)dx-S(h)$$

پس خطای روش سیمسون مرکب $|E(S(h))|$ است، که قضیه زیر را در این خصوص خواهیم داشت.

قضیه ۲ : فرض کنیم تابع f بر $[a,b]$ دارای مشتق چهارم پیوسته باشد، آن‌گاه:

$$\exists\xi\in[a,b]:E(S(h))=-\frac{b-a}{180}h^4f^{(4)}(\xi)$$

نتیجه ۴: روش سیمسون با صرف‌نظر از خطای f_iها برای توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه سه دقیق است.

نتیجه ۵: روش سیمسون از روش ذوزنقه‌ای سریع‌تر است، زیرا که خطای روش سیمسون متناسب با h^4، درحالی‌که خطای روش ذوزنقه‌ای متناسب با h^2 می‌باشد.

نتیجه ۶: هرچه h کوچک‌تر شود، خطای روش سیمسون کوچک‌تر می‌شود.

مثال ۴: مقدار I در مثال (۱) را با $h=0.125$ و با روش سیمسون برآورد می‌کنیم و محاسبات را تا شش رقم اعشار انجام می‌دهیم.

حل: با $h=0.125$ خواهیم داشت:

x_i	0	0.125	0.25	0.375	0.5
f_i	1.000000	1.133148	1.284025	1.454991	1.648721

بنابراین با به‌کارگیری فرمول (۶) با $n=4$ خواهیم داشت:

$$I=S(0.125)=\frac{h}{3}\left(f_0+4f_1+2f_2+4f_3+f_4\right)=0.648722$$

با توجه به این‌که مقدار واقعی $I=0.6487212...$ می‌باشد خطای این برآورد حدود 10^{-6} است، در حالی‌که با روش ذوزنقه‌ای و با $h=0.125$ خطایی حدود 0.0009 داشتیم.

مثال ۵: مقدار I در مثال (۲) را با $h=0.1$ و با روش سیمسون برآورد می‌کنیم و محاسبات را تا شش رقم اعشار انجام می‌دهیم.

حل: با $h=0.1$ مقادیر تابع به صورت زیر است:

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4
f_i	1.000000	0.985153	0.942372	0.876455	0.794018

با استفاده از فرمول (۶) با $n=4$ خواهیم داشت:

$$I=S(0.1)=0.370840$$

توجه داریم که مقدار I با استفاده از نرم‌افزار Mathematica به صورت زیر است:

$$I=0.3708359....$$

بنابراین خطایی حدود 4×10^{-6} خواهیم داشت. (با روش ذوزنقه‌ای مقایسه کنید)

مثال ۶: برای برآورد $I=\int_0^{\pi}\operatorname{Sin}x\,dx$ با روش سیمسون و با خطای حداکثر $\frac{\pi^3}{12}\times10^{-4}$، تابع Sin x را حداقل در چند نقطه باید حساب کرد؟

حل: با استفاده از قضیه ۲ داریم:

$$a=0\ ,\ b=\pi\ ,\ f(x)=\operatorname{Sin}x\ ,\ h=\frac{b-a}{n}\ ,\ E(S(h))=-\frac{b-a}{180}h^4f^{(4)}(\xi)$$

که در آن $a\le\xi\le b$ می‌باشد. با جانشانی داریم:

$$|E(S(h))|=\left|-\frac{\pi}{180}\left(\frac{\pi}{n}\right)^4(\operatorname{Sin}\xi)\right|=\frac{\pi^5}{180n^4}|\operatorname{Sin}\xi|\le\frac{\pi^5}{180n^4}\le\frac{\pi^3}{12}\times10^{-4}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$n\ge\sqrt[4]{\frac{\pi^2}{15}}\times10\simeq9.0064$$

پس حداقل n به صورت زیر است:

$$n=10$$

در حالی‌که با همین دقت و با روش ذوزنقه‌ای $n=100$ بود. پس با این روش بایستی مقدار تابع Sin x را حداقل در یازده نقطه حساب کرد.

۳.۱.۵ روش رامبرگ (Ramberg)

فرض کنیم $T(h)$ تقریب ذوزنقه‌ای $I=\int_a^b f(x)\,dx$ باشد. اگر f به اندازه کافی مشتق‌پذیر باشد، می‌توان نشان داد که:

$$I=T(h)+a_2h^2+a_4h^4+a_6h^6+\ldots \tag{۷}$$

که در آن a_iها به h وابسته نیستند، بلکه مضربی از $f^{(i)}$ هستند، پس اگر در رابطه (۷) به‌جای h، $\frac{h}{2}$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$I=T\left(\frac{h}{2}\right)+a_2\left(\frac{h}{2}\right)^2+a_4\left(\frac{h}{2}\right)^4+a_6\left(\frac{h}{2}\right)^6+\ldots \tag{۸}$$

حال اگر رابطه (۸) را در 4 و رابطه (۷) را در 1- ضرب کرده و با هم جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$I=\frac{4T\left(\frac{h}{2}\right)-T(h)}{4-1}+\left(-\frac{3}{4}a_4\right)h^4+\ldots \tag{۹}$$

قرار می‌دهیم

$$T\left(h,\frac{h}{2}\right)=\frac{4T\left(\frac{h}{2}\right)-T(h)}{4-1} \tag{۱۰}$$

اگر در (۹)، I را با $T\left(h,\frac{h}{2}\right)$ تقریب بزنیم، خطای مرتکب شده متناسب با h^4 است. در حالی‌که خطای تقریب‌های $T(h)$ و $T\left(\frac{h}{2}\right)$ متناسب با h^2 بود. پس در این مرحله (مرحله اول رامبرگ) تقریب $T\left(h,\frac{h}{2}\right)$ از تقریب‌های $T(h)$ و $T\left(\frac{h}{2}\right)$ بهتر است. حال اگر در رابطه (۹) به‌جای h، $\frac{h}{2}$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} I=T\left(h,\frac{h}{2}\right)+\left(-\frac{3}{4}a_4\right)h^4+\ldots\ldots \\ I=T\left(\frac{h}{2},\frac{h}{4}\right)+\left(-\frac{3}{4}a_4\right)\left(\frac{h}{2}\right)^4+\ldots \end{cases} \tag{۱۱}$$

اگر رابطه دوم (۱۱) را در 4^2 و رابطه اول آن را در 1- ضرب کرده و با هم جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$I=\frac{4^2T\left(\frac{h}{2},\frac{h}{4}\right)-T\left(h,\frac{h}{2}\right)}{4^2-1}+A_6h^6+A_8h^8+\ldots\ldots \tag{۱۲}$$

که در (۱۲)، A_i برای $i\geq 6$ مضربی از a_i می‌باشد. حال اگر در این مرحله (مرحله دوم رامبرگ) I را با کسر طرف دوم رابطه (۱۲) تقریب بزنیم، تقریب بهتری از قبل به دست آورده ایم، زیرا که خطای این تقریب متناسب با h^6 می‌باشد. ضمناً کسر طرف دوم رابطه (۱۲) را با نماد $T\left(h,\frac{h}{2},\frac{h}{4}\right)$ نشان می‌دهیم، پس:

$$T\left(h,\frac{h}{2},\frac{h}{4}\right)=\frac{4^2T\left(\frac{h}{2},\frac{h}{4}\right)-T\left(h,\frac{h}{2}\right)}{4^2-1} \tag{۱۳}$$

با ادامه روند در مرحله pام رامبرگ تقریب I با $T\left(h,\frac{h}{2},\frac{h}{2^2},\ldots,\frac{h}{2^p}\right)$ می‌باشد، که به صورت زیر است:

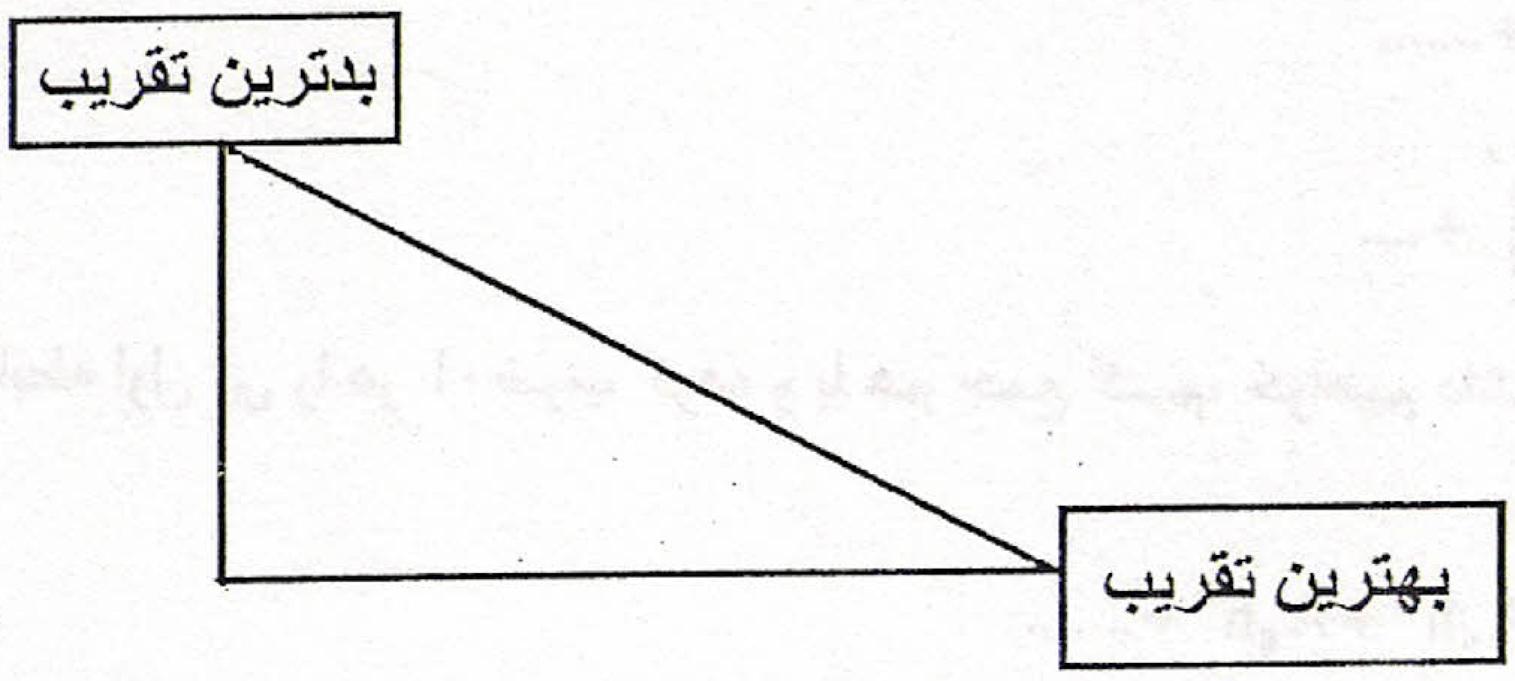
$$T\left(h,\frac{h}{2},\frac{h}{2^2},\ldots,\frac{h}{2^{p-1}},\frac{h}{2^p}\right)=\frac{4^pT\left(\frac{h}{2},\frac{h}{4},\ldots,\frac{h}{2^p}\right)-T\left(h,\frac{h}{2},\ldots,\frac{h}{2^{p-1}}\right)}{4^p-1} \tag{۱۴}$$

خطای این تقریب متناسب با h^{2P+2} می‌باشد. در عمل $h = h_0 = b - a$ در نظر گرفته می‌شود. در این صورت تعداد نقاط به کار رفته تا مرحله Pام $2^P + 1$ می‌باشد. باید توجه داشت که روش رامبرگ P مرحله‌ای برای توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه $2P+1$ با صرف‌نظر از خطای محاسباتی دقیق است.

نمایش جدولی رامبرگ سه مرحله‌ای:

تقریب‌های ذوزنقه‌ای	م 1	م 2	م 3
$T(h)$			
$T\left(\frac{h}{2}\right)$	$T\left(h,\frac{h}{2}\right)$		
$T\left(\frac{h}{4}\right)$	$T\left(\frac{h}{2},\frac{h}{4}\right)$	$T\left(h,\frac{h}{2},\frac{h}{4}\right)$	
$T\left(\frac{h}{8}\right)$	$T\left(\frac{h}{4},\frac{h}{8}\right)$	$T\left(\frac{h}{2},\frac{h}{4},\frac{h}{8}\right)$	$T\left(h,\frac{h}{2},\frac{h}{4},\frac{h}{8}\right)$

که در آن نماد $\overset{\text{م}}{k}$ بیانگر مرحله kام رامبرگ می‌باشد $(k = 1,2,3)$. باید توجه داشت که در هر ستون بهترین تقریب در انتهای ستون می‌باشد و هر چه به پایین حرکت می‌کنیم تقریب‌ها بهتر می‌شود و در هر مثلث قایم‌الزاویه بهترین تقریب در رأس سمت راست قرار دارد. (شکل زیر)



مثال ۷: فرض کنید $I = \int_0^1 x^4 dx$، با $h = 1$ و $h = 0.5$ و $h = 0.25$ و با روش ذوزنقه‌ای، I را برآورد کنید و سپس با روش رامبرگ و تقریب‌های به دست آمده بهترین تقریب I را به دست آورید.

حل: در این مثال $a = 0$ و $b = 1$ و $f(x) = x^4$ می‌باشد، با استفاده از فرمول (۳)، $T(1)$ و $T(0.5)$ و $T(0.25)$ به صورت زیر است.

$$T(1) = 1\left(\frac{f_0}{2} + \frac{f_1}{2}\right) = \frac{0}{2} + \frac{1}{2} = 0.5$$

$$T(0.5) = 0.5\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \frac{f_2}{2}\right) = 0.5\left(\frac{0}{2} + (0.5)^4 + \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{32}$$

$$T(0.25) = 0.25\left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + f_3 + \frac{f_4}{2}\right) = \frac{113}{512}$$

تقریب‌های ذوزنقه‌ای	م 1	م 2
0.5		
$\frac{9}{32}$	$\frac{4\left(\frac{9}{32}\right)-0.5}{4-1}=\frac{5}{24}$	
$\frac{113}{512}$	$\frac{4\times\left(\frac{113}{512}\right)-\frac{9}{32}}{4-1}=\frac{77}{384}$	$\frac{4^2\times\frac{77}{384}-\frac{5}{24}}{4^2-1}=\frac{1}{5}$

در این مثال مشاهده کردید که همه محاسبات به طور واقعی صورت گرفته است و بهترین تقریب $\frac{1}{5}$ است. چون $f(x)=x^4$ یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه پنج می‌باشد، پس روش رامبرگ دو مرحله‌ای برای برآورد این انتگرال باید منجر به جواب واقعی شود که چنین است (مقدار واقعی $I=\frac{1}{5}$ می‌باشد).

مثال ۸: مقدار I در مثال (۲) را با روش ذوزنقه‌ای با $h=0.4$، $h=0.2$، $h=0.1$ و $h=0.05$ برآورد کرده‌ایم، به کمک تقریب‌های به دست آمده و روش رامبرگ سه مرحله‌ای (رامبرگ 9 نقطه‌ای) I را برآورد کنید.

حل: در مثال (۲) داریم:

$T(0.4)=0.358803619$

$T(0.2)=0.367876151$

$T(0.1)=0.370098889$

$T(0.05)=0.370651850$

بنابراین خواهیم داشت:

تقریب‌های ذوزنقه‌ای	م 1	م 2	م 3
$T(0.4)$			
$T(0.2)$	0.370900329		
$T(0.1)$	0.370839801	0.370835766	
$T(0.05)$	0.370836170	0.370835928	0.370835931

مقدار تقریبی I با استفاده از نرم‌افزار Mathematica به صورت زیر است.

$I \simeq 0.370835931617....$

ما در مرحله سوم رامبرگ به دست آورده‌ایم:

$I=0.370835931$

که خطایی حدود 6×10^{-10} مرتکب شده‌ایم.

۵ . ۱ . ۴ روش نیوتن کاتس بسته (Newton – Cotes)

در این روش $I=\int_a^b f(x)dx$ را با $\sum_{i=0}^{n} w_i f_i$ تقریب می‌زنیم که در آن نقاط یا گره‌های x_i برای $i=0,1,\dots,n$ متساوی الفاصله به طول گام h می‌باشند $\left(h=\frac{b-a}{n}\right)$ و w_i ها (وزن‌ها) به گونه‌ای هستند که خطا برای توابع

$$f(x)=x^k \quad , \quad k=0,1,2,\dots,n$$

صفر شود. بنابراین فرمولی که به این شیوه به دست می‌آید برای **توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه n** با صرف‌نظر از خطای f_iها دقیق است. لذا در این روش (نیوتن کاتس $n+1$ نقطه‌ای) I با $\sum_{i=0}^{n} w_i f_i$ تقریب زده می‌شود، که

$$\sum_{i=0}^{n} w_i x_i^k=\int_a^b x^k dx \quad , \quad k=0,1,2,\dots,n$$

بنابراین دستگاه خطی n+1 معادله با n+1 مجهول $w_0, w_1, \dots, w_n$ زیر ایجاد می‌شود.

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^k w_i=\frac{1}{k+1}\left(b^{k+1}-a^{k+1}\right), \qquad k=0,1,2,\dots,n \qquad (۱۵)$$

که از دستگاه خطی فوق w_i ها به دست می‌آید.

باید توجه داشت که دستگاه خطی یاد شده جواب یکتا دارد، زیرا که دترمینان ضرایب آن دترمینان **واندرموند** است و مقدار آن مخالف صفر است. چون در این روش از n+1 نقطه (گره) $x_0, x_1, \dots, x_n$ استفاده شده است، به همین دلیل، روش را روش $n+1$ نقطه‌ای **نیوتن کاتس** گویند، که در واقع روش $n+1$ نقطه‌ای **نیوتن کاتس بسته** می‌باشد، زیرا که گره‌های انتگرال‌گیری شامل ابتدا و انتهای بازه انتگرال‌گیری می‌باشد. اگر گره‌ها شامل ابتدا و انتهای بازه نباشند روش را روش **نیوتن کاتس باز** گویند.

اگر n=1 باشد، نیوتن کاتس دو نقطه‌ای خواهیم داشت که همان روش ذوزنقه‌ای ساده می‌باشد. اما برای n=2 نیوتن کاتس سه نقطه‌ای ایجاد می‌شود که همان روش سیمسون ساده می‌باشد. حال ما به تفصیل روش را برای n=3، یعنی روش نیوتن کاتس چهار نقطه‌ای یا **قاعده** $\frac{3}{8}$ بیان می‌کنیم.

روش نیوتن کاتس چهار نقطه‌ای یا قاعده $\frac{3}{8}$:

برای n=3 داریم:

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{3} w_i f(x_i)$$

که با توجه به رابطه (۱۵) w_i ها جواب دستگاه خطی زیر است:

$$\sum_{i=0}^{3} x_i^k w_i=\frac{1}{k+1}\left(b^{k+1}-a^{k+1}\right) \qquad , \qquad k=0,1,2,3$$

به ازای $k=0,1,2,3$ داریم:

$$
\begin{cases}
w_0+w_1+w_2+w_3=b-a\\
x_0w_0+x_1w_1+x_2w_2+x_3w_3=\frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)\\
x_0^2w_0+x_1^2w_1+x_2^2w_2+x_3^2w_3=\frac{1}{3}\left(b^3-a^3\right)\\
x_0^3w_0+x_1^3w_1+x_2^3w_2+x_3^3w_3=\frac{1}{4}\left(b^4-a^4\right)
\end{cases} \qquad (۱۶)
$$

$$x_0=a\quad,\quad x_1=x_0+h\quad ,x_2=x_0+2h\quad ,x_3=x_0+3h\quad,\quad h=\frac{b-a}{3}$$

دترمینان ضرایب دستگاه (۱۶) دترمینان واندرموند زیر است:

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & 1\\
x_0 & x_1 & x_2 & x_3\\
x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2\\
x_0^3 & x_1^3 & x_2^3 & x_3^3
\end{vmatrix}
=\prod_{0\le j<i\le 3}\left(x_i-x_j\right)\neq 0
$$

پس دستگاه (۱۶) جواب یکتا دارد و به صورت زیر است.

$$w_0=\frac{3}{8}h\quad,\quad w_1=\frac{9}{8}h\quad,\quad w_2=\frac{9}{8}h\quad,\quad w_3=\frac{3}{8}h$$

بنابراین تقریب I با قاعده $\frac{3}{8}$ یا نیوتن کاتس چهار نقطه‌ای به صورت زیر است.

$$I=\int_a^b f(x)\,dx=\frac{3}{8}h\left(f_0+3f_1+3f_2+f_3\right) \qquad (۱۷)$$

خطای روش نیوتن کاتس چهار نقطه‌ای در حدود خطای سیمسون (ساده) است،ولی چون روش سیمسون از مقادیر تابع در سه نقطه استفاده می‌کند بر این روش مزیت دارد.

به طور کلی می‌توان نشان داد که برای روش نیوتن کاتس $n+1$ نقطه‌ای داریم:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx=A_0h\sum_{i=0}^{n}w_if_i+A_1h^{k+1}f^{(k)}(\eta)$$

که η در بازه $\left[x_0,x_n\right]$ قرار دارد و

$$k=\begin{cases}n+1 & ,\quad \text{برای } n \text{ فرد}\\ n+2 & ,\quad \text{برای } n \text{ زوج}\end{cases}$$

اثبات این موضوع را می‌توان در کتاب آنالیز عددی تألیف A.Ralston و P.Rabinowitz مشاهده نمود.

در جدول زیر ضرایب A_0 و A_1 و وزن‌های W_i را برای $n=1,2,3,4$ مشاهده می‌کنیم.

جدول ۱

n	A_0	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	A_1
1	$\frac{1}{2}$	1	1				$-\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{3}$	1	4	1			$-\frac{1}{90}$
3	$\frac{3}{8}$	1	3	3	1		$-\frac{3}{80}$
4	$\frac{2}{45}$	7	32	12	32	7	$-\frac{8}{945}$

مثال ۹: مقدار I را در مثال (۲) با قاعده $\frac{3}{8}$ برآورد کنید.

حل: با توجه به مثال (۲) داریم:

$$a=0\ ,\ b=0.4\ ,\ h=\frac{0.4}{3}\ ,\ x_0=0\ ,\ x_1=h\ ,\ x_2=2h\ ,x_3=3h$$

پس مقادیر $f(x)=\frac{\text{Cos}\,x}{1+x^2}$ درنقاط x_i به صورت زیر است:

x_i	0	$\frac{4}{30}$	$\frac{8}{30}$	0.4
f_i	1.000000	0.973812	0.900611	0.794018

با به‌کارگیری فرمول (۱۷) برآورد I با قاعده $\frac{3}{8}$ به صورت زیر است:

$$I\simeq 0.370864$$

که خطایی حدود 2.9×10^{-5} داریم.

یادداشت ۲: با در نظر گرفتن جدول (۱) خطای قاعده $\frac{3}{8}$ به صورت زیر است:

$$E(N(h))=\frac{-3}{80}h^5f^{(4)}(\eta)\qquad ,\quad h=\frac{b-a}{3}\ ,\ a\le\eta\le b$$

۵ . ۱ . ۵ روش گاوس (Gauss)

در روش‌هایی که قبلاً مورد بحث قرار گرفت نقاط متساوی‌الفاصله بود. اما اگر نقاط را متساوی‌الفاصله انتخاب نکنیم دقت را می‌توان به تعداد ثابتی از نقاط افزایش داد. این مطلب زیر بنای یک فرآیند دیگر از انتگرال‌گیری منتسب به گاوس است. برای سهولت می‌توان فاصله انتگرال‌گیری را بازه $[-1,1]$ در نظر گرفت، زیرا اگر فاصله انتگرال‌گیری بازه $[a,b]$ باشد، با تغییر متغیر $x=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}$ می‌توان فاصله $[a,b]$ را به فاصله $[-1,1]$ تبدیل نمود. لذا روش گاوس را بر $I=\int_{-1}^{1}f(x)dx$ بیان می‌کنیم.

روش n+1 نقطه‌ای گاوس:

در این روش I را با $\sum_{i=0}^{n}w_if_i$ تقریب می‌زنیم، که در آن نقاط یعنی x_iها و وزن‌ها یعنی w_iها به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که خطا برای توابع زیر صفر باشد.

$$f(x)=x^k\quad ,\quad k=0,1,2,....,2n+1$$

بنابراین اگر $I=\sum_{i=0}^{n}w_if_i$ آن‌گاه x_iها و w_iها برای $i=0,1,...,n$ جواب دستگاه زیر است.

$$\sum_{i=0}^{n}w_ix_i^k=\int_{-1}^{1}x^kdx=\frac{1}{k+1}\left(1-(-1)^{k+1}\right)\quad ,\quad k=0,1,2,...,2n+1 \tag{۱۸}$$

فرمولی که به این شیوه به دست می‌آید، برای توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه $2n+1$ با صرف‌نظر از خطای f_iها دقیق است.

روش یک نقطه‌ای گاوس (n=0):

دراین حالت نقطه x_0 و w_0 در $\sum_{i=0}^{0} w_i f_i$ به گونه‌ای انتخاب می‌شود، که جواب دستگاه (۱۸) برای $n=0$ باشد. یعنی جواب دستگاه زیر:

$$\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_0 f_0 = 0 \end{cases}$$

پس $x_0 = 0$ ، $w_0 = 2$. لذا فرمول یک نقطه‌ای گاوس به صورت زیر است،که برای توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه یک دقیق است.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq 2f(0) \tag{۱۹}$$

روش دونقطه‌ای گاوس (n=1):

در این حالت دو گره x_0 و x_1 و دو وزن w_0 و w_1 در $\sum_{i=0}^{1} w_i f_i$ به گونه‌ای انتخاب می‌شود که جواب دستگاه (۱۸) برای $n=1$ باشد، یعنی جواب دستگاه زیر:

$$\begin{cases} w_0 + w_1 = 2 \\ w_0 x_0 + w_1 x_1 = 0 \\ w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 = \dfrac{2}{3} \\ w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 = 0 \end{cases} \tag{۲۰}$$

با حل این دستگاه به دست می‌آوریم.

$$x_1 = -x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad w_0 = w_1 = 1.$$

لذا فرمول دو نقطه‌ای گاوس به صورت زیر است، که برای توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه ۳ با صرف‌نظر از خطای f_iها دقیق است:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \tag{۲۱}$$

گره‌ها و ضرایب فرمول سه نقطه‌ای گاوس با $n=2$ از دستگاه (۱۸) به دست می‌آید و به صورت زیر است:

$$x_2 = -x_0 = \sqrt{\frac{3}{5}} \quad , x_1 = 0$$

$$w_2 = w_0 = \frac{5}{9} \quad , \quad w_1 = \frac{8}{9}$$

بنابراین فرمول سه نقطه‌ای گاوس به صورت زیر است، که برای توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه ۵ دقیق است (با صرف‌نظر از خطای f_iها).

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \tag{۲۲}$$

یادداشت ۳: دستگاه (۱۸) (حالت خاص دستگاه (۲۰)) نسبت به x_iها غیرخطی و نسبت به w_iها خطی است، که در حالت کلی، به شیوه ارایه شده، حل آن مشکل است. در یک درس پیشرفته‌تر می‌توان نشان داد که در روش $n+1$ نقطه‌ای گاوس، x_iها ریشه‌های چند جمله‌ای لژاندر درجه $n+1$ می‌باشد. به همین دلیل روش گاوس ارایه شده به **روش گاوس لژاندر** معروف است. اگر n زوج باشد، یکی از x_iها صفر و بقیه دو به دو قرینه هم‌اند و وزن‌های متساوی‌الفاصله از مبدأ یکسان می‌باشند. همچنین اگر n فرد باشد، x_iها دو به دو قرینه هم هستند و وزن‌های متساوی‌الفاصله از مبدأ یکسان می‌باشند. برای یادآوری چند جمله‌ای‌های لژاندر روی بازه $[-1,1]$ به صورت زیر معرفی می‌شود.

$$\begin{cases} P_0(x)=1 \\ P_1(x)=x \\ P_{n+1}(x)=\dfrac{2n+1}{n+1}xP_n(x)-\dfrac{n}{n+1}P_{n-1}(x) \quad ,n\ge 1 \end{cases} \tag{۲۳}$$

با توجه به رابطه (۲۳) و $n=1$ و $n=2$ داریم:

$$P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

مشاهده می‌شود که x_0 و x_1 در دستگاه (۲۰) ریشه‌های $P_2(x)$ و گره‌های روش سه نقطه‌ای گاوس ریشه‌های $P_3(x)$ می‌باشند.

مثال ۱۰: مقدار I در مثال (۲) را با روش‌های یک نقطه‌ای، دو نقطه‌ای و سه نقطه‌ای گاوس برآورد کنید.

حل: در مثال (۲) داریم:

$$a=0 \ ,b=0.4 \ , \ f(x)=\frac{\cos x}{1+x^2}$$

با تغییر متغیر $x=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}$ یعنی $x=0.2(t+1)$، داریم:

$$I=\frac{1}{5}\int_{-1}^{1}\frac{\cos(0.2(t+1))}{1+0.04(t+1)^2}dt$$

با انتخاب $F(t)=\frac{1}{5}.\frac{\cos(0.2(t+1))}{1+0.04(t+1)^2}$، خواهیم داشت:

(یک نقطه‌ای گاوس)

$$I\simeq 2F(0)=0.376948$$

(دو نقطه‌ای گاوس)

$$I\simeq F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0.370793$$

(سه نقطه‌ای گاوس)

$$I\simeq \frac{5}{9}F\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{8}{9}F(0)+\frac{5}{9}F\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=0.370836$$

توجه داریم که مقدار I با استفاده از نرم‌افزار Mathematica به صورت زیر است:

$$I \simeq 0.370835931....$$

بنابراین خطای فرمول یک نقطه‌ای، دونقطه‌ای و سه نقطه‌ای گاوس برای این مثال به ترتیب حدود 6×10^{-3}، 10^{-4} و 10^{-6} می‌باشد.

۵ . ۱ . ۶ روش نقطه میانی (Mid-point)

فرض کنیم تابع f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و

$$a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b \quad , x_i - x_{i-1} = h \quad , \quad i = 1,2,...,n$$

واضح است که:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \qquad (۲۴)$$

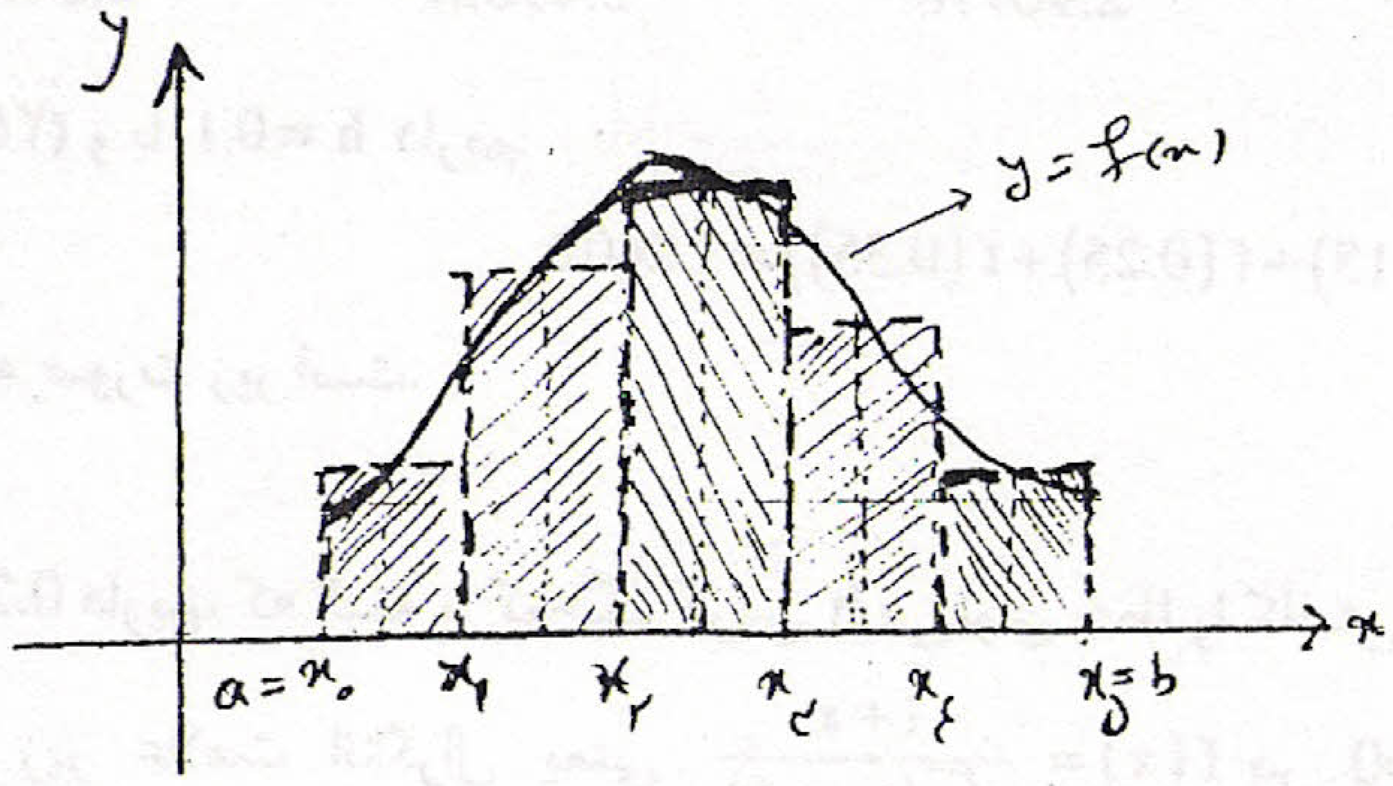
تابع f را روی بازه $[x_{i-1}, x_i]$ برای $i = 1,2,...,n$ با $f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)$ تقریب می‌زنیم توجه داریم نقطه $x_{i-1} + \frac{h}{2}$ دقیقاً وسط بازه $[x_{i-1}, x_i]$ قراردارد، پس:

$$f(x) \simeq f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) \quad , x_{i-1} \le x \le x_i \quad , \; i = 1,2,...,n$$

با به کارگیری (۲۴) خواهیم داشت:

$$I \simeq M(h) \;,\; M(h) = h\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) \qquad (۲۵)$$

قرار می‌دهیم $E(M(h)) = \int_a^b f(x)\,dx - M(h)$، پس خطای روش نقطه میانی $|E(M(h))|$ است. در شکل زیر مشاهده می‌کنیم که $M(h)$ مجموع مساحت مستطیل‌هایی به عرض h و طول $f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)$ می‌باشد.



یادداشت ۴:روش نقطه میانی یکی از حالت‌های روش **نیوتن کاتس باز** است. در این روش مشاهده می‌شود که از مقادیر تابع در گره‌های انتگرال‌گیری استفاده نمی‌شود بلکه از مقادیر تابع در وسط زیر بازه‌ها استفاده می‌شود.