قضیه ۳ : هرگاه تابع f بر $[a,b]$ دارای مشتق دوم پیوسته باشد، آن‌گاه:

$$\exists_{\xi} \in [a,b]: E\left(M(h)\right) = \frac{b-a}{24} h^2 f''(\xi)$$

نتیجه: روش نقطه میانی برای توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه یک با صرف‌نظر از خطای f_iها دقیق است.

مثال ۱۱: مقدار I در مثال (۲) را با $h=0.1$ و با روش نقطه میانی برآورد می‌کنیم.

حل: چون $h=0.1$ است پس

$x_0=0$, $x_1=0.1$, $x_2=0.2$, $x_3=0.3$, $x_4=0.4$

لذا نقاط $x_{i-1}+\frac{h}{2}$ و مقادیر تابع در این نقاط به ازای $i=1,2,3,4$ به صورت زیر است.

$x_{i-1}+\frac{h}{2}$	0.05	0.15	0.25	0.35
$f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)$	0.996260	0.967013	0.911918	0.836858

با به کارگیری (۲۵) و با $h=0.1$ تقریب I به صورت زیر است.

$$I \simeq M(0.1) = 0.1\left(f(0.05)+f(0.15)+f(0.25)+f(0.35)\right) = 0.371205$$

که خطای این تقریب حدود 4×10^{-4} می‌باشد.

مثال ۱۲: فرض کنید $I=\int_0^{0.4}\frac{x+1}{\sqrt{x}\left(1+x^4\right)}dx$ با $h=0.1$ و با روش نقطه میانی I را برآورد کنید.

حل: چون $h=0.1$ است، پس داریم:

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}\left(1+x^4\right)}$$

x_{i-1}	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$x_{i-1}+\frac{h}{2}$	0.05	0.15	0.25	0.35	
$f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)$	4.69571	2.96778	2.49027	2.24818	

با به کارگیری فرمول نقطه میانی (۲۵) و با $h=0.1$ داریم:

$$I \simeq M(0.1) = 0.1\left(f(0.05)+f(0.15)+f(0.25)+f(0.35)\right) = 1.2402$$

تقریب I با نرم‌افزار Mathematica به صورت زیر است.

$$I \simeq 1.42885.....$$

مشاهده می‌شود که خطایی حدود 0.2 داریم، که البته با کوچک کردن h می‌توان خطا را کاهش داد.

یادداشت ۵: در مثال (۱۲) تابع زیر علامت انتگرال یعنی $f(x)=\frac{1+x}{\sqrt{x}\left(1+x^4\right)}$ در $x=0$ تعریف نشده است در واقع $\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ می‌باشد.

باید توجه داشت که برآورد I در مثال (۱۲) با روش‌های ذوزنقه‌ای، سیمسون، رامبرگ و نیوتن کاتس بسته امکان‌پذیر نیست، در واقع انتگرال مثال (۱۲) یک انتگرال غیرعادی است که در بین روش‌های ارایه شده فقط با روش نقطه میانی و روش گاوس می‌توان I را برآورد کرد، زیرا در این دو روش به مقدار f در نقطه $x_0=0$ نیازی نیست.

۲.۵ مشتق‌گیری عددی

مشتق‌گیری همانند انتگرال‌گیری کاربردهای فراوانی دارد. وقتی ضابطه تابع مشخص باشد، فرمول‌های مشتق‌گیری حساب دیفرانسیل برای محاسبه مشتق اول یا دوم قابل استفاده است. اما اگر ضابطه تابع پیچیده باشد، یا اطلاع درستی از ضابطه تابع نداشته باشیم و یا تابع فقط در چند نقطه تعریف شده باشد، در این صورت فرمول‌های مشتق‌گیری حساب دیفرانسیل برای برآورد مشتق اول یا دوم تابع در نقطه‌ای غیر از نقاط معلوم کارایی ندارد و باید از روش‌های عددی بهره گرفت. در این بخش روش‌هایی را جهت برآورد مشتق اول و دوم ارایه می‌دهیم. البته باید به این نکته توجه داشت که خطای مشتق‌گیری از درون‌یابی بیش‌تر است.

فرض کنیم تابع f در n+1 نقطه دو به دو متمایز $x_n,\ldots,x_1,x_0$ تعریف شده باشد و $P(x)$ چند جمله‌ای درون‌یاب f مبتنی بر نقاط فوق باشد. اگر f دارای شرایط قضیه (۲) از فصل (۳) باشد، آن‌گاه:

$$f(x)-P(x)=\frac{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi(x)) \qquad (۲۶)$$

که در آن $\xi(x)$ بین x_0 و x_n می‌باشد.

قرار می‌دهیم $S_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$، لذا خواهیم داشت:

$$f'(x)-P'(x)=S'_{n+1}(x).\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}+\frac{S_{n+1}(x)}{(n+1)!}.\frac{d}{dx}\left(f^{(n+1)}(\xi(x))\right) \qquad (۲۷)$$

چون $\xi(x)$ عددی نامعلوم بین x_0 و x_n است، پس در خصوص جمله دوم طرف راست (۲۷)، اظهار نظری نمی‌توان کرد. اما اگر x برابر با یکی از x_iها باشد، جمله دوم طرف راست رابطه (۲۷) صفر می‌گردد و داریم:

$$f'(x_r)-P'(x_r)=S'_{n+1}(x_r)\frac{f^{(n+1)}(\xi(x_r))}{(n+1)!} \quad , \; r=0,1,\ldots,n \qquad (۲۸)$$

حال اگر x_iها را متساوی‌الفاصله به طول گام h در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$S_{n+1}(x)=(x-x_r)\prod_{\substack{i=0\\ i\neq r}}^{n}(x-x_i)$$

$$S'_{n+1}(x)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq r}}^{n}(x-x_i)+(x-x_r)\frac{d}{dx}\left(\prod_{\substack{i=0\\ i\neq r}}^{n}(x-x_i)\right)$$

$$S'_{n+1}(x_r)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq r}}^{n}(x_r-x_i)=(-1)^{n-r}h^n r!(n-r)!$$

بنابراین رابطه (۲۸) به صورت زیر در می‌آید:

$$f'(x_r)-P'(x_r)=\frac{(-1)^{n-r}h^n r!(n-r)!}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_r) \qquad (۲۹)$$

که در آن $\xi_r=\xi(x_r)$ بین x_0 و x_n قرار دارد. بنابراین اگر $f'(x_r)$ را با $P'(x_r)$ تقریب بزنیم، خطای مرتکب شده را، رابطه (۲۹) نشان می‌دهد.

چون x_iها متساوی‌الفاصله به طول گام h فرض شده‌اند، پس با تغییر متغیر $x = x_0 + \theta h$، چند جمله‌ای درون‌یاب به صورت زیر است:

$$P(x) = f_0 + \theta \Delta f_0 + \frac{\theta(\theta-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots + \frac{\theta(\theta-1)\times \dots \times(\theta-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

با توجه به این‌که $\frac{dx}{d\theta} = h$، پس خواهیم داشت:

$$P'(x) = \frac{\frac{dP}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{1}{h}\frac{dP}{d\theta} = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 + \frac{1}{2}(2\theta-1)\Delta^2 f_0 + \dots\right)$$

بنابراین مشتق چند جمله‌ای درون‌یاب در نقطه x_r به صورت زیر است:

$$P'(x_r) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 + \frac{1}{2}(2\theta_r - 1)\Delta^2 f_0 + \dots\right) \qquad (۳۰)$$

که در آن $\theta_r = \frac{x_r - x_0}{h}$ می‌باشد.

برای مقادیر مختلف n و r، چند قاعده مشتق‌گیری حاصل از رابطه (۳۰) با خطای (۲۹) ارایه می‌شود.

الف) برای $n=1$ و $r=0$ داریم:

$$P'(x) = \frac{\Delta f_0}{h} = \frac{f_1 - f_0}{h}$$

$$f'(x_0) - P'(x_0) = -\frac{1}{2}hf''(\xi_0)$$

بنابراین اگر $f'(x)$ به صورت زیر تقریب زده شود، خطای آن $-\frac{1}{2}hf''(\xi_0)$ است که در آن ξ_0 بین x_0 و x_1 می‌باشد.

$$f'(x) \simeq \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad (۳۱)$$

باید توجه داشت که می‌توان در فرمول (۳۱) نقش x_0 را به x_r یا در حالت کلی‌تر به $\tilde{x}$ محول کرد و نوشت:

$$f'(\tilde{x}) \simeq \frac{f(\tilde{x}+h) - f(\tilde{x})}{h}$$

که خطای مرتکب شده $-\frac{1}{2}hf''(\xi)$ بوده و ξ بین $\tilde{x}$ و $\tilde{x}+h$ می‌باشد.

ب) برای $n=2$ و $r=1$ خواهیم داشت:

$$P'(x_1) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 + \frac{1}{2}(2\theta_1 - 1)\Delta^2 f_0\right)$$

چون $\theta_1 = \frac{x_1 - x_0}{n} = 1$، پس $P'(x_1)$ به صورت زیر در می‌آید.

$$P'(x_1) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 + \frac{1}{2}\Delta^2 f_0\right) = \frac{f_2 - f_0}{2h}$$

همچنین با توجه به رابطه (۲۹) داریم:

$$f'(x_1) - P'(x_1) = -\frac{1}{6}h^2 f'''(\xi_1)$$

که در آن ξ_1 بین x_0 و x_2 قرار دارد. پس اگر $f'(x_1)$ را به صورت زیر تقریب بزنیم، خطای مرتکب شده $-\frac{1}{6}h^2 f'''(\xi_1)$ است.

$$f'(x_1)\simeq\frac{f(x_1+h)-f(x_1-h)}{2h} \tag{۳۲}$$

فرمول (۳۲) به **قاعده نقطه میانی** معروف است. در حالت کلی‌تر تقریب (۳۲) به صورت زیر است.

$$f'(\tilde{x})\simeq\frac{f(\tilde{x}+h)-f(\tilde{x}-h)}{2h}$$

و خطای مرتکب شده $-\frac{1}{6}h^2f'''(\xi)$ است، که در آن ξ بین $\tilde{x}-h$ و $\tilde{x}+h$ می‌باشد.

تقریب‌های مشتقات مراتب بالاتر تابع f به وسیله مشتقات مراتب بالاتر چند جمله‌ای درون‌یاب P به دست می‌آیند. اگر از (۲۶)، k بار $(k\geq1)$ مشتق بگیریم، حتی نمی‌توانیم مقدار $f^{(k)}(x)-P^{(k)}(x)$ را در نقاط x_r ها محاسبه کنیم. در انتها روش دیگری برای برآورد خطا ارایه خواهیم داد. برای $k=2$ داریم:

$$P''(x)=\frac{\frac{dP'}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{1}{h}.\frac{dP'}{d\theta}=\frac{1}{h^2}\frac{d^2P}{d\theta^2}=\frac{1}{h^2}(\Delta^2f_0+(\theta-1)\Delta^3f_0+...). \tag{۳۳}$$

که در آن $x=x_0+\theta h$ است. باید توجه داشت $P''(x)$ وقتی غیر صفر است که درجه چند جمله‌ای درون‌یاب حداقل دو باشد، با انتخاب دو به عنوان درجه چند جمله‌ای درون‌یاب خواهیم داشت:

$$P''(x)=\frac{1}{h^2}\Delta^2f_0 \tag{۳۴}$$

که مقدار ثابتی است. این فرمول رابه عنوان تقریبی از $f''(x_1)$ پذیرا می‌شویم، لذا:

$$f''(x_1)\simeq\frac{\Delta^2f_0}{h^2}=\frac{f_2-2f_1+f_0}{h^2} \tag{۳۵}$$

در حالت کلی‌تر داریم (تعمیم ۳۴):

$$f^{(k)}(x)=\frac{\Delta^kf_0}{h^k} \tag{۳۶}$$

معمولاً از (۳۶) برای تقریب $f^{(k)}(x)$ در نقطه مرکز بازه $[x_0,x_k]$ استفاده می‌شود. اگر $k=2m$، آن‌گاه:

$$f^{(2m)}(x_m)\simeq\frac{\Delta^{2m}f_0}{h^{2m}} \tag{۳۷}$$

اگر $k=2m-1$، آن‌گاه مرکز بازه $[x_0,x_{2m-1}]$ در جدول وجود ندارد. در این حالت با استفاده از $P^{(k)}(x)$ با $n=k+1=2m$ می‌توان نشان داد:

$$f^{(2m-1)}(x_m)\simeq\frac{\Delta^{2m-1}f_0+\Delta^{2m-1}f_1}{2h^{2m-1}} \tag{۳۸}$$

که تعمیم فرمول (۳۲) برای f' به ازای $m=1$ می‌باشد. از (۳۷) و (۳۸) تقریب‌های زیر برای مشتقات مرتبه سوم و چهارم به دست می‌آید.

$$f'''(x_2)\simeq\frac{1}{2h^3}(f_4-2f_3+2f_1-f_0) \tag{۳۹}$$

$$f^{(4)}(x_2)\simeq\frac{1}{h^4}(f_4-4f_3+6f_2-4f_1+f_0) \tag{۴۰}$$

با استفاده از سری تیلر می‌توان خطاهای تمامی قواعدی که قبلاً مطرح کردیم به دست آورد. به عنوان نمونه خطای قاعده (۳۲) را به دست می‌آوریم. فرض کنیم $f^{(4)}$ بر $[x_0,x_2]$ پیوسته باشد، با توجه به قضیه تیلر خواهیم داشت:

$$f(x_0)=f(x_1-h)=f(x_1)-hf'(x_1)+\frac{h^2}{2!}f''(x_1)-\frac{h^3}{3!}f'''(x_1)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi_0)$$

$$f(x_2)=f(x_1+h)=f(x_1)+hf'(x_1)+\frac{h^2}{2!}f''(x_1)+\frac{h^3}{3!}f'''(x_1)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi_1)\ ,$$

که در آن ξ_0 بین x_0 و x_1 است و ξ_1 بین x_1 و x_2 می‌باشد.لذا خواهیم داشت:

$$f(x_0)=f_1-hf_1'+\frac{h^2}{2!}f_1''-\frac{h^3}{3!}f_1^{(3)}+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi_0) \tag{۴۱}$$

$$f(x_2)=f_1+hf_1'+\frac{h^2}{2!}f_1''+\frac{h^3}{3!}f_1^{(3)}+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi_1)\ , \tag{۴۲}$$

چون ξ_0 بین x_0 و x_1 و ξ_1 بین x_1 و x_2 می‌باشند و تابع $f^{(4)}$ بر $[x_0,x_2]$ پیوسته است، پس $f^{(4)}$ بر $[x_0,x_2]$ دارای ماکزیمم M و مینیمم m می‌باشد. پس:

$$m\le f^{(4)}(\xi_0)\le M$$
$$m\le f^{(4)}(\xi_1)\le M$$

لذا با جمع دو رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$m\le\frac{1}{2}\left(f^{(4)}(\xi_0)+f^{(4)}(\xi_1)\right)\le M.$$

بنابراین با استفاده از قضیه مقدار میانی عددی چون ξ در بازه (x_0,x_2) وجود دارد، به طوری‌که:

$$\frac{1}{2}\left(f^{(4)}(\xi_0)+f^{(4)}(\xi_1)\right)=f^{(4)}(\xi)$$

با به‌کارگیری رابطه اخیر و از جمع روابط (۴۱) و (۴۲) به دست می‌آوریم:

$$f_0+f_2=2f_1+h^2f_1''+\frac{h^4}{12}f^{(4)}(\xi)$$

لذا خواهیم داشت:

$$f_1''=f''(x_1)=\frac{f_2-2f_1+f_0}{h^2}-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$$

بنابراین خطای فرمول مشتق‌گیری (۳۵) برابر $-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$ می‌باشد، که ξ بین x_0 و x_2 قرار دارد.

یادداشت ۶: فرمول‌های مشتق گیری که برای برآورد مشتق تابع مطرح شد، نسبت به خطاهای ناشی از گرد کردن f_iها حساس می‌باشند. از طرفی مشاهده شد که خطای برشی مشتق گیری عددی متناسب با h^k بود، که k با توجه به فرمول مشتق‌گیری مربوطه مشخص می‌شود. ظاهراً موضوع نشان می‌دهد که اگر h کوچک اختیار شود خطا کاهش می‌یابد، ولی در عمل چنین نمی‌باشد. برای نمونه اولین فرمول مشتق‌گیری (۳۱) را در نظر می‌گیریم، یعنی فرمول:

$$f'(x_0)\simeq\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

که خطای آن $-\frac{1}{2}hf''(\xi_0)$ بود. اگر h کوچک باشد $f(x_0+h)$ و $f(x_0)$ به هم نزدیک هستند، لذا خطای $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ قابل توجهی ایجاد می‌کند، زیرا که $\frac{1}{h}$ مقدار بزرگی است و $f(x_0)$ و $f(x_0+h)$ به هم نزدیک هستند.

مثال ۱۳: تابع جدولی زیر را در نظر می‌گیریم:

x_i	0	0.05	0.10	0.15	0.20

f_i	1	1.0513	1.1052	1.1618	1.2214

الف) $f'(x_i)$ را به ازای $i=0,1,2,3$ و با استفاده از فرمول (۳۱) برآورد کنید.

ب) $f'(x_i)$ را به ازای $i=1,2,3$ با استفاده از فرمول (۳۲) برآورد کنید.

حل: با فرمول (۳۱) داریم:

$$f'(x_i)=\frac{f(x_i+h)-f(x_i)}{h} \quad , h=0.05$$

بنابراین خواهیم داشت:

i	0	1	2	3
x_i	0	0.05	0.10	0.15
$f'(x_i)$	1.0260	1.0780	1.1320	1.1920

حال برآورد $f'(x_i)$ را با فرمول (۳۲) انجام می‌دهیم با این فرمول داریم:

$$f'(x_i)=\frac{f(x_i+h)-f(x_i-h)}{2h} \quad ,i=1,2,3$$

پس از انجام محاسبات لازم نتایج در جدول زیر گرد آمده است:

I	1	2	3
x_i	0.05	0.10	0.15
$f'(x_i)$	1.0520	1.1050	1.1620

یادداشت ۷:مقادیر f در جدول مثال ۱۳ مربوط به تابع $f(x)=e^x$ می‌باشد که می‌دانیم $f'(x)=e^x$ است. لذا باید مقادیر $f'(x_i)$ در قسمت (الف) و (ب) با $f(x_i)$ برابر باشد، که چنین نیست. این موضوع مبین خطای زیاد مشتق‌گیری عددی است. البته باید توجه داشت که مقادیر $f'(x_i)$ در قسمت (ب) بهتر از مقادیر $f'(x_i)$ در قسمت (الف) می‌باشد.

مثال ۱۴: در مثال (۱۳) برآوردی از $f''(0.05)$ با استفاده از فرمول (۳۵) ارایه دهید.

حل: با توجه به فرمول (۳۵) داریم:

$$f''(x_1)\simeq\frac{f_2-2f_1+f_0}{h^2} \quad ,x_1=0.05 \quad ,h=0.05$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$f''(0.05)=f''(x_1)\simeq 1.0400.$$

توجه داریم که:

$$f''(0.05)=e^{0.05}\simeq 1.0513$$

مثال ۱۵: تابع جدولی مثال (۱۳) را در نظر بگیرید، سپس با استفاده از فرمول‌های (۳۹) و (۴۰) برآوردی از $f^{(3)}(0.10)$ و $f^{(4)}(0.10)$ را به دست آورید.

حل: در مثال (۱۳)، $x_2=0.10$ می‌باشد. بنابراین با به کارگیری فرمول‌های (۳۹) و (۴۰) داریم:

$$f^{(3)}(0.10)\simeq 1.6000$$

$$f^{(4)}(0.10)\simeq 32.0000$$

توجه داریم که:

$$f^{(3)}(0.10)=e^{0.10}\simeq 1.1052$$

$$f^{(4)}(0.10)=e^{0.10}\simeq 1.1052$$

بنابراین مشاهده می‌شود که برای $f^{(3)}(0.10)$ و $f^{(4)}(0.10)$ به ترتیب خطایی حدود 0.5 و 30.8948 داریم که دور از انتظار نبود. (به مطالب یادداشت(۶) توجه نمایید.)

مثال‌های متنوع تستی حل شده:

مثال ۱۶: روش ذوزنقه‌ای صرف‌نظر از خطای مقادیر تابع برای چه توابعی دقیق است؟

۱) چند جمله‌ای‌های حداکثر از درجه 2 ۲) چند جمله‌ای‌های درجه 2

۳) چند جمله‌ای‌های حداکثر از درجه یک ۴) چند جمله‌ای‌های درجه یک

حل: با توجه به قضیه خطای روش ذوزنقه‌ای گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مثال ۱۷: جدول مقادیر، تابع f در زیر آمده است.

x_i	0	0.5	1	1.5	2.5	3.5	4.5
f_i	2	1	3	2	3	4	6

برآورد $I=\int_0^{4.5} f(x)dx$ با روش ذوزنقه‌ای کدام است؟

۱) 11 ۲) 12 ۳) 13 ۴) 14

حل: روی فاصله $[0,1.5]$ نقاط با طول گام $h=0.5$ و روی فاصله $[1.5,4.5]$ نقاط با طول گام $h=1$ بیان شده است. لذا داریم:

$$I=\int_0^{1.5} f(x)dx+\int_{1.5}^{4.5} f(x)dx$$

حال با توجه به فرمول (۳) داریم:

$$\int_0^{1.5} f(x)dx\simeq T(0.5)=0.5\left(\frac{2}{2}+1+3+\frac{2}{2}\right)=3$$

$$\int_{1.5}^{4.5} f(x)dx\simeq T(1)=1\left(\frac{2}{2}+3+4+\frac{6}{2}\right)=11$$

بنابراین داریم:

$$I\simeq 3+11=14$$

لذا گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

مثال ۱۸: برای برآورد $I=\int_0^2 \mathrm{Sin}^2 x\,dx$ با روش ذوزنقه‌ای و با خطای حداکثر $\frac{4}{3}\times 10^{-4}$، بازه $[0,2]$ را باید حداقل به چند زیر بازه با طول یکسان تقسیم کرد؟

۱) 99 ۲) 98 ۳) 101 ۴) 100

حل: با توجه به قضیه خطای روش ذوزنقه‌ای داریم:

$$|E(T(h))|=\left|-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi)\right| \quad,\quad 0=a\le\xi\le b=2$$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{2-0}{n}=\frac{2}{n} \quad ,f(x)=\mathrm{Sin}^2 x$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$f'(x) = 2\operatorname{Sin}\operatorname{Cos} x = \operatorname{Sin} 2x \quad , \quad f''(x) = 2\operatorname{Cos} 2x$$

$$|ET(h)| = \left|-\frac{2}{12}\left(\frac{2}{n}\right)^2 .2.\operatorname{Cos}(2\xi)\right| = \frac{4}{3n^2}|\operatorname{Cos}(2\xi)| \le \frac{4}{3n^2} \le \frac{4}{3}(10)^{-4}$$

لذا خواهیم داشت:

$n^2 \ge 10^4$ یا $n \ge 100$

پس $n = 100$. لذا گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

مثال ۱۹: تابع جدولی زیر مفروض است. با روش سیمسون برآورد $I = \int_0^2 f(x)dx$ کدام است؟

x_i	0	0.5	1	1.5	2
f_i	1	2	0	2	3

۱) $\frac{8}{3}$ ۲) $\frac{9}{3}$ ۳) $\frac{10}{3}$ ۴) $\frac{11}{3}$

حل: در این مثال $h = 0.5$ است. با توجه به فرمول (۶) برآورد I به صورت زیر است.

$$I = S(0.5) = \frac{0.5}{3}(1+4(2)+2(0)+4(2)+3) = \frac{10}{3}$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مثال ۲۰: تابع جدول زیر مفروض است، با روش سیمسون برآورد $I = \int_0^5 f(x)dx$ کدام است؟

x_i	0	0.5	1	2	3	4	5
f_i	1	0	1	2	4	0	2

۱) $\frac{19}{3}$ ۲) $\frac{20}{3}$ ۳) $\frac{21}{3}$ ۴) $\frac{22}{3}$

حل: نقاط روی فاصله $[0,1]$ با طول گام $h = 0.5$ و روی فاصله $[1,5]$ با طول گام $h = 1$ مرتب شده‌اند، پس با استفاده از فرمول (۶) خواهیم داشت:

$$I = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^4 f(x)dx = S(0.5) + S(1)$$

$$= \frac{0.5}{3}(1+4(0)+1) + \frac{1}{3}(1+4(2)+2(4)+4(0)+2) = \frac{20}{3}$$

پس گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

مثال ۲۱: برای برآورد $I = \int_0^2 \operatorname{Sin}^2 x dx$ با روش سیمسون و با خطای کمتر از $\frac{4}{3}\times 10^{-4}$ بازه $[0,2]$ را باید حداقل به چند زیر بازه با طول یکسان تقسیم کرد؟

۱) 12 ۲) 13 ۳) 14 ۴) 10

حل: با استفاده از قضیه خطای سیمسون داریم:

$$E(S(h)) = -\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\xi) \quad , \quad 0 = a \le \xi \le b = 2$$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{2-0}{n}=\frac{2}{n} \quad , \quad f^{(4)}(x)=-8\ \mathrm{Cos}(2x)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\left|E(S(h))\right|=\left|-\frac{2}{180}\left(\frac{2}{n}\right)^4(-8)\mathrm{Cos}(2\xi)\right|\le\frac{64}{45n^4}<\frac{4}{3}\times10^{-4}$$

لذا، $n^4>\frac{16}{15}10^4$ پس $n>10.16$. چون در روش سیمسون n زوج است، پس $n=12$. لذا گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مثال ۲۲: روش رامبرگ دو مرحله‌ای با صرف‌نظر از خطای f_iها برای چه توابعی دقیق است؟

۱) چند جمله‌ای‌های حدکثر از درجه پنج　　۲) چند جمله‌ای‌های حداکثر از درجه شش

۳) چند جمله‌ای‌های حداکثر از درجه سه　　۴) چند جمله‌ای‌های حداکثر از درجه چهار

حل: به طور کلی روش رامبرگ p مرحله‌ای برای توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه $2P+1$ دقیق است. لذا گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مثال ۲۳: فرض کنید $I=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$ و $h=0.5$،با استفاده از روش ذوزنقه‌ای مقادیر $T(h)$ و $T\left(\frac{h}{2}\right)$ و $T\left(\frac{h}{4}\right)$ به ترتیب برابر 0.7084، 0.6970 و 0.6941 محاسبه شده است. با استفاده از روش رامبرگ،مقدار $T\left(\frac{h}{2},\frac{h}{4}\right)$ کدام است؟

۱) 0.6934　　۲) 0.6933　　۳) 0.6931　　۴) 0.6929

حل: با توجه به تعریف داریم:

$$T\left(\frac{h}{2},\frac{h}{4}\right)=\frac{4T\left(\frac{h}{4}\right)-T\left(\frac{h}{2}\right)}{4-1}=\frac{4.(0.6941)-0.6970}{3}\simeq0.6931$$

پس گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مثال ۲۴: قاعده $\frac{3}{8}$ با صرف‌نظر از خطای محاسبه برای چه توابعی دقیق است؟

۱) توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه ۳　　۲) توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه ۲

۳) توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه ۴　　۴) هیچ‌کدام.

حل: روش نیوتن کاتس n+1 نقطه ای برای توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه n دقیق است. چون قاعده $\frac{3}{8}$ همان روش نیوتن کاتس چهار نقطه‌ای است، پس گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مثال ۲۵: برآورد $I=\int_0^1(x^3+x^2)$ با قاعده $\frac{3}{8}$ کدام است؟

۱) $\frac{8}{12}$　　۲) $\frac{6}{12}$　　۳) $\frac{7}{12}$　　۴) $\frac{5}{12}$

حل: چون $f(x)=x^3+x^2$ یک چند جمله‌ای درجه 3 می‌باشد پس برآورد I با قاعده $\frac{3}{8}$ همان مقدار واقعی I است. لذا:

$$I=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{7}{12}$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مثال ۲۶: تابع جدولی زیر مفروض است:

x_i	1	2	3	4
f_i	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

برآورد $I=\int_1^4 f(x)dx$ با روش نیوتن کاتس چهار نقطه‌ای کدام است؟

۱) 1.6 ۲) 1.3 ۳) 1.5 ۴) 1.4

حل: با توجه به فرمول (۱۷) و $h=1$ داریم:

$$I\simeq\frac{3}{8}(1)\left(0+3\left(\frac{1}{3}\right)+3\left(\frac{2}{3}\right)+1\right)=1.5$$

پس گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

مثال ۲۷: برآورد $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{Cos}x\,dx$ با روش یک نقطه‌ای گاوس کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$ ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) $\frac{2\pi}{4}$

حل: در این مثال $a=0$ و $b=\frac{\pi}{2}$ است. لذا باتغییر متغیر $x=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}$ یعنی $x=\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{4}$، داریم:

$$dx=\frac{\pi}{4}dt$$

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{\pi}{4}\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{4}\right)dt$$

بنابراین با به کارگیری فرمول (۱۹) داریم:

$$I\simeq 2f(0)=2\left(\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

پس گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مثال ۲۸: برآورد $I=\int_0^{0.5}(x^3+2x-1)dx$ با فرمول دو نقطه‌ای گاوس کدام است؟

۱) $-\frac{17}{64}$ ۲) $-\frac{15}{64}$ ۳) $-\frac{14}{64}$ ۴) $-\frac{13}{64}$

حل: فرمول دو نقطه‌ای گاوس برای توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه ۳ دقیق است. پس:

$$I=\left(\frac{1}{4}x^4+x^2-x\right)\Big|_0^{0.5}=-\frac{15}{64}$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

مثال ۲۹: برآورد $I=\int_{-1}^{1}\mathrm{Cos}\left(\sqrt{3}x\right)dx$ با فرمول دو نقطه‌ای گاوس کدام است؟

۱) 0.5403 ۲) 0.5401 ۳) 0.5406 ۴) 0.5405

حل: با به کارگیری فرمول (۲۱) داریم:

$$I=f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\mathrm{Cos}(-1)+\mathrm{Cos}(1)=2\mathrm{Cos}(1)\simeq 1.0806$$

پس گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مثال ۳۰: برآورد $I=\int_{0}^{1}x^2dx$ با روش نقطه میانی با $h=0.2$ کدام است؟

۱) 0.31 ۲) 0.35 ۳) 0.30 ۴) 0.33

حل: چون $f(x)=x^2$ و $h=0.2$ است، پس نقاط $x_{i-1}+\frac{h}{2}$ و مقادیر آن‌ها به صورت زیر است:

$x_{i-1}+\frac{x}{2}$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$f\left(x_{i-1}+\frac{h}{2}\right)$	0.01	0.09	0.25	0.49	0.81

لذا با استفاده از فرمول (۲۵) داریم:

$$I\simeq M(0.2)=0.2(0.01+0.09+0.25+0.49+0.81)=0.33$$

پس گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

مثال ۳۱: خطای برشی فرمول مشتق‌گیری $f'(x_0)\simeq\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}hf''(\xi)$ ۲) $-\frac{1}{2}hf''(\xi)$ ۳) $-\frac{1}{2}hf'(\xi)$ ۴) $\frac{1}{2}hf'(\xi)$

که در همه آن‌ها ξ بین x_0 و x_0+h است.

حل: با توجه به فرمول (۳۱) گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

مثال ۳۲: تقریب $f'(0.1)$ با استفاده از نقاط جدولی زیر با $h=0.1$ کدام است؟

x_i	0	0.2
f_i	0.4	0.6

۱) 1 ۲) 1.1 ۳) 1.2 ۴) 1.3

حل: با استفاده از فرمول (۳۲) داریم:

$$f'(0.1)\simeq\frac{f(0.1+h)-f(0.1-h)}{2h}=\frac{0.6-0.4}{0.2}=1$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

تمرین‌های تشریحی:

۱ـ با استفاده از روش ذوزنقه‌ای با $h=0.1$ و $h=0.2$ و $h=0.4$، $I=\int_0^{0.4}\frac{x}{\sqrt{x}+\cos x}$ را برآورد کنید. سپس به کمک روش رامبرگ و تقریب‌های به دست آمده، تقریب بهتری برای I ارایه دهید (انجام محاسبات تا شش رقم اعشار).

۲ـ با استفاده از روش ذوزنقه‌ای مقدار $I=\int_0^{0.6}\cos^2 x\,dx$ را با خطای کمتر از 10^{-3} برآورد کنید.

۳ـ با روش سیمسون و با $h=0.1$ مقدار انتگرال تمرین (۱) را برآورد کنید.

۴ـ با استفاده از روش سیمسون مقدار $I=\int_0^{0.6}\cos^2 x\,dx$ را با خطای کمتر از 10^{-4} برآورد کنید.

۵ـ مقدار انتگرال تمرین (۱) را با روش رامبرگ سه نقطه‌ای برآورد کنید (انجام محاسبات تا چهار رقم اعشار).

۶ـ مقدار انتگرال تمرین (۱) را با روش ۵ نقطه‌ای نیوتن کاتس و قاعده $\frac{3}{8}$ برآورد کنید.

۷ـ مقدار انتگرال تمرین (۲) را با قاعده $\frac{3}{8}$ و با خطای کمتر از 10^{-3} برآورد کنید.

۸ـ با روش گاوس یک نقطه‌ای، دونقطه‌ای و سه نقطه‌ای مقدار $I=\int_0^{0.5}\frac{\cos x}{1+\sqrt{x}}dx$ را برآورد کنید. (انجام محاسبات تا شش رقم اعشار)

۹ـ مقدار انتگرال تمرین (۸) را با روش نقطه میانی با $h=0.1$ برآورد کنید.

۱۰ـ مقدار انتگرال تمرین (۲) را با روش نقطه میانی برآورد کنید، به‌طوری‌که خطای مرتکب شده از 10^{-3} کمتر باشد و با تمرین (۲) مقایسه کنید.

۱۱ـ فرض کنید $I=\int_0^{0.5}\frac{(x+1)dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}$، با روش نقطه میانی با $h=0.1$ مقدار I را برآورد کنید. آیا مقدار I با روش ذوزنقه‌ای و سیمسون و رامبرگ قابل برآورد است؟

* ۱۲ـ فرض کنید تابع f در $[a,b]$ دارای مشتق اول پیوسته باشد و

$$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b\ ,\ h=\frac{b-a}{n}\quad ,\quad x_i-x_{i-1}=h\ ,\ i=1,2,\dots,n$$

اگر $\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)dx=hf_{i-1}$، آن را برای $i=1,2,\dots,n$ تقریب بزنید.

الف) فرمول را برای $\int_a^b f(x)dx$ به دست آورید.

ب) خطای روش را محاسبه کرده و با روش ذوزنقه‌ای مقایسه کنید.

* ۱۳ـ نشان دهید که در روش نقطه میانی خاصیت زیر برقرار است.

$$\int_0^h f(x)dx-hf\left(\frac{h}{2}\right)=\int_0^h k(t)f''(t)dt\ ,$$

که در آن:

$$k(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2 & ,0\le t\le\frac{h}{2}\\ \frac{1}{2}(h-t)^2 & ,\frac{h}{2}<t\le h\end{cases}$$

* ۱۴ـ با استفاده از مسأله (۱۳) نشان دهید که در روش نقطه میانی داریم:

$$E(M(h))=\frac{h^3}{24}f''(\xi) \quad 0\le\xi\le h$$

که در آن $M(h)$ تقریب روش نقطه میانی برای $\int_0^h f(x)dx$ می‌باشد.

* ۱۵ـ فرض کنید $T(h)$ و $M(h)$ به ترتیب تقریب‌های ذوزنقه‌ای و نقطه میانی برای $I=\int_a^b f(x)dx$ باشند، نشان دهید:

$$\frac{1}{3}(2M(h)+T(h))=S\left(\frac{h}{2}\right)$$

که در آن $S\left(\frac{h}{2}\right)$ تقریب سیمسون برای I می‌باشد.

* ۱۶ـ نشان دهید:

$$\frac{4T\left(\frac{h}{2}\right)-T(h)}{3}=S\left(\frac{h}{2}\right)$$

* ۱۷ـ فرض کنید:

$$\int_0^h f(\sqrt{x})dx \simeq w_1f(0)+w_2f'(0)+w_3f(h)$$

وزن‌های w_1 و w_2 و w_3 را به‌گونه‌ای تعیین کنید، که فرمول انتگرال‌گیری فوق برای توابع چند جمله‌ای تا درجه ۲ دقیق باشد.

* ۱۸ـ فرض کنید:

$$\int_{-h}^h f(x)dx \simeq h\left[w_1f(-h)+w_2f(0)+w_3f(h)\right]$$

وزن‌های w_0 و w_1 و w_2 را به گونه‌ای تعیین کنید، که فرمول انتگرال‌گیری فوق برای توابع چند جمله‌ای تا درجه دوم دقیق باشد.

با فرمول فوق تقریبی از $\int_{-0.1}^{0.1} e^{-x^2}dx$ را به دست آورید.

* ۱۹ـ قاعده انتگرال‌گیری زیر مفروض است:

$$\int_0^h f(x)dx \simeq \frac{h}{2}\left[f(0)+f(h)\right]+\frac{h^2}{12}(f'(0)-f'(h))$$

الف) نشان دهید که این قاعده برای چند جمله‌ای‌های تا درجه ۳ دقیق است.

ب) فرمول این قاعده را برای $\int_0^{nh} f(x)dx$ به دست آورید.

۲۰ ـ فرض کنید $f(x)=x^3e^{x^2}-\operatorname{Sin}x$، با استفاده از فرمول‌های (۳۱) و (۳۲) و با $h=0.1$ و $h=0.01$، $f'(2.19)$ را تقریب بزنید.

۲۱ ـ فرض کنید داده‌های زیر به طور تجربی جمع‌آوری شده باشند:

x_i	1.00	1.01	1.02
f_i	1.27	1.32	1.38

الف) با استفاده از فرمول (۳۲)، $f'(1.005)$ و $f'(1.015)$ را تقریب بزنید.

ب) با استفاده از فرمول (۳۲) و نتایج (الف)، $f''(1.01)$ را تقریب بزنید.

۲۲ ـ در تمرین (۱۴) با استفاده از فرمول (۳۵) برآوردی از $f''(1.01)$ به دست آورید.

*۲۳ـ نشان دهید که قاعده مشتق‌گیری

$$f'(x)\simeq a_0f(x_0)+a_1f(x_1)+a_2f(x_2)$$

برای هر چند چندجمله‌ای حداکثر از درجه ۲ دقیق است، اگر و تنها اگر برای $f(x)=1,x,x^2$ دقیق باشد. لذا، مقادیر a_0 و a_1 و a_2 را طوری بیابید که این قاعده برای هر چندجمله‌ای حداکثر از درجه دوم دقیق باشد.

***۲۴ـ با مشتق گیری از خط راست کمترین مربعات برای تابع f در نقاط $x_0 \pm 2h$ ، $x_0 \pm h$ و x_0 قاعده مشتق‌گیری زیر را به دست آورید.**

$$f'(x_0)=\frac{1}{10h}\left[2f(x_0+2h)+f(x_0+h)-f(x_0-h)-2f(x_0-2h)\right]$$

***۲۵ـ اگر در مسأله ۲۴ خط راست کمترین مربعات مبتنی بر نقاط x_0 و $x_0 \pm h$ در نظر گرفته شود، برای $f'(x_0)$ چه تقریبی حاصل می‌شود؟**

تمرین‌های چهار گزینه‌ای:

۱ ـ با استفاده از روش ذوزنقه‌ای برآورد $I=\int_0^5 f(x)dx$ کدام است، هرگاه:

x_i	0	1	2	3	4	4.5	5
f_i	2	0	1	2	4	1	4

۱) 8.5 ۲) 8 ۳) 9 ۴) 9.5

۲ ـ با روش سیمسون برآورد I در تمرین ماقبل کدام است؟

۱) 8.5 ۲) 8 ۳) 9 ۴) 9.5

۳ ـ برای برآورد $I=\int_0^{\pi}(x+\operatorname{Cos}x)dx$ با روش ذوزنقه‌ای و با خطای کمتر از $\frac{\pi^3}{12}10^{-4}$ مقدار تابع $f(x)=x+\operatorname{Cos}x$ را حداقل در چند نقطه بایستی حساب کرد؟

۱) 100 ۲) 101 ۳) 102 ۴) 103

۴ ـ در تمرین ما قبل برای برآورد I با روش سیمسون تابع را حداقل در چند نقطه بایستی حساب کرد؟

۱) 11 ۲) 9 ۳) 12 ۴) 13

۵ ـ روش رامبرگ ۹ نقطه‌ای برای چه توابعی جواب دقیق می‌دهد؟

۱) توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه سه
۲) توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه پنج
۳) توابع چند جمله‌ای از درجه هفت
۴) توابع چند جمله‌ای حداقل از درجه دو

۶ ـ فرض کنید $I=\int_0^1 f(x)dx$. مقدار I با روش ذوزنقه‌ای با h=1، h=0.5 و h=0.125 به ترتیب 0.2، 0.25 و 0.255 محاسبه گردیده است . بهترین تقریب I با روش رامبرگ و تقریب‌های موجود کدام است؟

۱) 0.656 ۲) 0.655 ۳) 0.654 ۴) 0.653

۷ ـ در برآورد $I=\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-x^2}}$ از کدام روش نمی‌توان استفاده کرد؟

۱) رامبرگ ۲) نقطه میانی ۳) گاوس دونقطه‌ای ۴) گاوس سه نقطه‌ای

۸ ـ اگر f یک تابع فرد باشد و $\int_{-1}^{1}f(x)dx$ را به وسیله قاعده دونقطه‌ای گاوس تقریب بزنیم، کدام گزینه صحیح می‌باشد؟

۱) خطای تقریب مضربی از $f^{(4)}(\xi)$ است.
۲) خطای تقریب صفر است.
۳) خطای تقریب مضربی از $f^{(5)}(\xi)$ است.
۴) خطای تقریب مضربی از $f^{(6)}(\xi)$ است.

۹ ـ اگر روش گاوس سه‌نقطه‌ای را برای محاسبه $\int_0^1 x^4dx$ به کار ببریم، برآورد انتگرال کدام است؟

۱) 0.20 ۲) 0.21 ۳) 0.22 ۴) 0.23

۱۰ ـ در تمرین ما قبل برآورد I با فرمول دونقطه‌ای گاوس کدام است؟

۱) 0.194 ۲) 0.192 ۳) 0.196 ۴) 0.193

۱۱ ـ تقریب سیمسون برای $I=\int_0^1\sqrt{\operatorname{Sin}x}dx$ با افراز ۵ نقطه‌ای با طول گام یکسان کدام است؟

۱) 0.67 ۲) 0.65 ۳) 0.60 ۴) 0.63

۱۲ ـ برآورد I در تمرین ماقبل با قاعده $\frac{3}{8}$ کدام است؟

۱) 0.60 ۲) 0.66 ۳) 0.62 ۴) 0.64

۱۳ ـ روش نیوتن کاتس ۵نقطه‌ای با صرف‌نظر از خطای محاسباتی برای چه توابعی دقیق است؟

۱) توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه چهار
۲) توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه سه
۳) توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه پنج
۴) توابع چند جمله‌ای حداکثر از درجه شش

۱۴ ـ برآورد $I=\int_0^1 x^4dx$ با روش نیوتن کاتس پنج نقطه‌ای کدام است؟

۱) 0.20 ۲) 0.21 ۳) 0.22 ۴) 0.23

۱۵ ـ تابع جدولی زیر مفروض است:

x_i	0	1	2	3
f_i	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	1

برآورد $I=\int_0^3 f(x)dx$ با قاعده $\frac{3}{8}$ کدام است؟

۱) 3.3 ۲) 3.2 ۳) 3.1 ۴) 3.0

۱۶ ـ برآورد $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos x}dx$ با فرمول یک نقطه‌ای گاوس کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $-\frac{\pi}{4}$

۱۷ ـ برآورد $I=\int_{-1}^{1}\sqrt{\cos\left(\sqrt{3}\pi x\right)}dx$ با فرمول دو نقطه‌ای گاوس کدام است؟

۱) -2.0 ۲) -2.1 ۳) -2.2 ۴) -2.3

۱۸ ـ روش نقطه میانی با صرف‌نظر از خطای محاسباتی، برای چه توابعی دقیق است؟

۱) چند جمله‌ای‌های درجه یک
۲) چند جمله‌ای‌های حداکثر از درجه یک
۳) چند جمله‌ای‌های درجه صفر
۴) هر سه مورد درست است

۱۹ ـ با استفاده از روش نقطه میانی، برآورد $I=\int_0^1\left(x^2+x\right)dx$ با $h=0.2$ کدام است؟

۱) 0.80 ۲) 0.83 ۳) 0.85 ۴) 0.87

۲۰ ـ خطای برشی فرمول مشتق‌گیری $f'(x)\simeq\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{6}h^2f'''(\xi)$ ۲) $-\frac{1}{6}h^2f''(\xi)$ ۳) $\frac{1}{6}h^2f'''(\xi)$ ۴) $-\frac{1}{6}h^2f'''(\xi)$

۲۱ ـ خطای برشی فرمول مشتق‌گیری $f''(x_1)\simeq\frac{f_2-2f_1+f_0}{h^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$ ۲) $\frac{h^2}{12}f'''(\xi)$ ۳) $\frac{-h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$ ۴) $-\frac{h^2}{12}f'''(\xi)$

۲۲ ـ تقریب $f''(0.1)$ با استفاده از نقاط جدولی زیر با $h=0.1$ کدام است؟

x_i	0	0.1	0.2
f_i	0.4	0	0.6

۱) 100 ۲) 100.2 ۳) 100.3 ۴) 100.4

۲۳ ـ تابع جدولی زیر مفروض است، برآورد $f''(1)$ با $h=0.1$ به کمک درون‌یابی کدام است؟

x_i	1.0	1.1	1.2
f_i	7.19	8.46	9.85

۱) 9 ۲) 10 ۳) 11 ۴) 12