فصل ۶

حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی

امروزه کار برد معادلات دیفرانسیل معمولی بر کسی پوشیده نیست و نقش مهمی را درعمل ایفا می‌کند. همه دانشجویان با حرکت پاندول ساده آشنایی دارند و می‌دانند که تحت شرایطی برای به دست آوردن دوره تناوب پاندول باید معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{\ell}\sin\theta=0$ همراه با شرایط اولیه $\theta(t_0)=\theta_0$ ، $\theta'(t_0)=v_0$ را که د آن ℓ طول نخ پاندول می‌باشد را حل کرد. اما چون معادله غیرخطی است، با تقریب $\sin\theta$ با θ (برای θ کوچک) معادله، به معادله غیرخطی $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{\ell}\theta=0$ تبدیل می‌گردد، که حل آن با یک روش متعارف دردرس معادلات دیفرانسیل معمولی امکان‌پذیر است، اما برای θ بزرگ باید جواب مسأله را تقریب زد. مثال فوق نشان می‌دهد که روش‌های ارایه شده در درس معادلات دیفرانسیل معمولی توانایی حل اکثر مسایل را ندارند، بنابراین ضرورت به کارگیری روش‌های عددی کاملاً ملموس است. ابتدا بحث را با معادله دیفرانسیل مرتبه اول $y'=f(x,y)$ همراه با شرط اولیه $y(x_0)=y_0$ شروع می‌کنیم و فرض برآن است که مسأله مقدار اولیه:

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases} \tag{1}$$

دارای جواب یکتا می‌باشد. هدف در این بخش آن است که جواب مسأله مقدار اولیه (۱) را در نقاط x_1 و x_2 و ...... و x_n برآورد کنیم که $x_0<x_1<....<x_n$ و x_i ها متساوی‌الفاصله به طول گام h می‌باشند.

۱.۶ روش‌های عددی جهت برآورد جواب مسأله مقدار اولیه (۱)

۱.۱.۶ روش تیلر مرتبه P

یکی از روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل استفاده از بسط تیلر تابع می‌باشد. برای برآورد جواب مسأله (۱) در نقطه x_{k+1} یعنی $y(x_{k+1})$، ابتدا بسط تیلر تابع y را حول نقطه x_k می‌نویسیم، که به صورت زیر است:

$$y(x_{k+1})=y(x_k+h)=y(x_k)+hy'(x_k)+\frac{h^2}{2!}y''(x_k)+\ldots+\frac{h^P}{P!}y^{(P)}(x_k)+\frac{h^{P+1}}{(P+1)!}y^{(P+1)}(x_k)+\ldots$$

حال اگر $y(x_{k+1})$ را با $P+1$ جمله اول سمت راست تساوی فوق تقریب بزنیم، خواهیم داشت:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hy'(x_k) + \ldots + \frac{h^P}{P!} y^{(P)}(x_k) \quad , \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

برای سهولت از نماد متعارف $y^{(k)}_{(x_i)} = y_i^{(k)}$ استفاده می‌کنیم، لذا داریم:

$$y_{k+1} = y_k + hy'_k + \frac{h^2}{2!} y''_k + \ldots + \frac{h^P}{P!} y_k^{(P)} \qquad (۲)$$

خطای تقریب (۲) متناسب با h^{P+1} می‌باشد، واضح است که هر چه P بزرگ‌تر و h کوچک‌تر باشد، تقریب بهتر است، تا آن‌جایی‌که خطای انباشتگی جمع مزاحمتی ایجاد ننماید.

مثال ۱: مسأله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} y' = e^x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

با $h = 0.1$ و با روش تیلر مرتبه چهار، تقریبی از $y(0.1)$ و $y(0.2)$ ارایه دهید.

حل: در مقایسه با روش ارایه شده، داریم:

$$x_0 = 0 \quad , \quad y_0 = 1 \quad , \quad h = 0.1$$

$$x_1 = 0.1 \; , \; x_2 = 0.2 \; , \; y(0.1) = y(x_1) = y_1 = ? \qquad , y(0.2) = y(x_2) = y_2 = ?$$

$$y'' = e^x + y' = e^x + e^x + y \quad , \quad y'' = 2e^x + y$$

$$y''' = 2e^x + y' = 3e^x + y \quad , \quad y^{(4)} = 4e^x + y$$

$$y_{k+1} = y_k + hy'_k + \frac{h^2}{2!} y''_k + \frac{h^3}{3!} y'''_k + \frac{h^4}{4!} y_k^{(4)}$$

$$= y_k + h\left(e^{x_k} + y_k\right) + \frac{h^2}{2!}\left(2e^{x_k} + y_k\right) + \frac{h^3}{3!}\left(3e^{x_k} + y_k\right) + \frac{h^4}{4!}\left(4e^{x_k} + y_k\right)$$

چون $h = 0.1$ است، پس از انجام محاسبات لازم داریم:

$$y_{k+1} = 1.105171\, y_k + 0.110517\, e^{x_k} \quad , k = 0,1,2,\ldots.$$

$$y(0.1) = y_1 = 1.105171\, y_0 + 0.110517\, e^{x_0} = 1.215688$$

$$y(0.2) = y_2 = 1.105171\, y_1 + 0.110517\, e^{x_1} = 1.465683$$

مقدار واقعی با روش تحلیلی به صورت زیر است:

$y(0.1) = 1.2156880\ldots.$

$y(0.2) = 1.4656833\ldots.$

بنابراین خطای مرتکب شده برای دومی حدود 3×10^{-7} می‌باشد.

یادداشت ۱: محاسبه مشتقات متوالی y از اشکالات روش تیلر مرتبه P می‌باشد. اگر $f(x,y)$ کمی پیچیده باشد، محاسبه مشتقات y به راحتی امکان‌پذیر نمی‌باشد. برای پرهیز از مشتقات متوالی، P را یک می‌گیریم که به آن روش **اویلر** گوییم. بنابراین روش اویلرهمان روش تیلر مرتبه یک است. در این حالت خطای قابل توجهی داریم، برای این‌که خطا را کم کنیم باید h را کوچک گرفت.

۶ . ۲ . ۱ روش اویلر (Euler)

در روش تیلر به ازای $P=1$ روش اویلر ایجاد می‌شود، بنابراین:

$$y_{k+1}=y_k+hy'_k=y_k+hf(x_k,y_k)$$

لذا فرمول اویلر در حل مسأله مقدار اولیه (۱) به صورت زیر است.

$$y_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k)\ ,\ k=0,1,\ldots \qquad (۳)$$

قضیه ۱: اگر $y(x)$ بر $[x_0,x_1]$ دارای مشتق دوم پیوسته باشد، آن‌گاه خطای روش اویلر متناسب با h است.

مثال ۲: در مثال (۱) برآوردی از $y(0.1)$ و $y(0.2)$ را با روش اویلر و $h=0.1$ ارایه دهید.

حل: چون $f(x,y)=e^x+y$، پس داریم:

$$y_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k)=y_k+0.1\left(e^{x_k}+y_k\right)=1.1y_k+0.1e^{x_k}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$y(0.1)=y_1=1.1y_0+0.1e^{x_0}=1.1(1)+0.1e^0=1.20$$

$$y(0.2)=y_2=1.1y_1+0.1e^{x_1}=1.1(1.2)+0.1e^{0.1}=1.43$$

در مقایسه با مقدار واقعی مشاهده می‌شود که برای $y(0.1)$ خطای حدود 0.01 و برای $y(0.2)$ خطایی حدود 0.03 مرتکب شده‌ایم.

۶ . ۱ . ۳ روش پیراسته اویلر

این روش ایده جدیدی برای حل مسأله مقدار اولیه (۱) ارایه می‌دهد، که به صورت زیر است:

اگر از (۱) روی فاصله $[x_0,x_1]$ انتگرال بگیریم، خواهیم داشت:

$$\int_{x_0}^{x_1}y'(x)dx=\int_{x_0}^{x_1}f(x,y(x))dx\,.$$

با به کارگیری قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم:

$$y(x_1)-y(x_0)=\int_{x_0}^{x_1}f(x,y(x))dx \qquad (۴)$$

اکنون اگر از یک روش انتگرال‌گیری عددی همچون روش ذوزنقه‌ای با طول گام $h=x_1-x_0$، برای تقریب انتگرال موجود در رابطه (۴) استفاده کنیم، داریم:

$$y(x_1)\approx y(x_0)+\frac{h}{2}\left[f\left(x_0,y(x_0)\right)+f\left(x_1,y(x_1)\right)\right] \qquad (۵)$$

طرف راست رابطه (۵) حاوی $y(x_1)$ است، که باید محاسبه شود. بنابراین به برآورد $y(x_1)$ در طرف راست نیاز داریم. برای این منظور از تقریب اویلر استفاده می‌کنیم، پس:

$$y_1^{(0)}=y(x_1)\simeq y_0+hf(x_0,y_0)$$

که با جانشانی در رابطه (۵) به دست می‌آوریم:

$$y_1=y(x_1)\approx y(x_0)+\frac{h}{2}\left[f(x_0,y_0)+f\left(x_1,y_1^{(0)}\right)\right]$$

بنابراین فرمول پیراسته اویلر برای تقریب $y(x_1)$ به صورت زیر است:

$$\begin{cases} y_1^{(0)} = y_0 + hf(x_0, y_0) \\ y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f\left(x_1, y_1^{(0)}\right)\right] \end{cases} \tag{۶}$$

با ادامه فرایند یک دنباله از نقاط که تقریبی برای منحنی جواب $y = y(x)$ است، تولید می‌شود. بدین شیوه که در هر گام، ابتدا از روش اویلر به عنوان یک تقریب اولیه استفاده می‌شود و سپس قاعده ذوزنقه‌ای برای تصحیح آن و به دست آوردن مقدار نهایی مورد استفاده قرار می‌گیرد. گام کلی برای روش پیراسته اویلر را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{cases} y_{k+1}^{(0)} = y_k + hf(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{(0)}\right)\right] \end{cases} \tag{۷}$$

مثال ۳: با $h = 0.1$ و با روش پیراسته اویلر تقریبی از جواب مثال (۱) را در نقطه 0.1 و 0.2 به دست آورید.

حل: چون $h = 0.1$ و $f(x, y) = e^x + y$، با جانشانی در فرمول (۷) داریم:

$$\begin{cases} y_{k+1}^{(0)} = y_k + 0.1\left(e^{x_k} + y_k\right) \\ y_{k+1} = y_k + \frac{0.1}{2}\left[e^{x_k} + y_k + e^{x_{k+1}} + y_{k+1}^{(0)}\right] \end{cases}$$

با ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y_{k+1}^{(0)} = 0.1e^{x_k} + 1.1y_k \\ y_{k+1} = 0.05\left(e^{x_k} + e^{x_{k+1}}\right) + 1.05y_k + 0.05y_{k+1}^{(0)} \end{cases}$$

چون $y(0.1) = y_1$، پس برای $k = 0$ داریم:

$$y_1^{(0)} = 0.1e^{x_0} + 1.1y_0 = 0.1e^0 + 1.1(1) = 1.2$$

$$y_1 = 0.05\left(e^{x_0} + e^{x_1}\right) + 1.05y_0 + 0.05y_1^{(0)} = 1.2152$$

بنابراین، $y(0.1) \simeq 1.2152$، که خطای مرتکب شده حدود 0.0004 است. مجدداً به ازای $k=1$ داریم:

$$y_2^{(0)} = 0.1e^{x_1} + 1.1y_1 = 1.4472$$

$$y_2 = 0.05\left(e^{x_1} + e^{x_2}\right) + 1.05y_1 + 0.05y_2^{(0)} = 1.4646$$

بنابراین $y(0.2) \simeq 1.4646$، که خطای مرتکب شده حدود 0.0010 است.

قضیه ۲: اگر $y(x)$ بر $[x_0, x_n]$ دارای مشتق سوم پیوسته باشد، آن‌گاه خطای روش پیراسته اویلر متناسب با h^2 است.

۶ . ۱ . ۴ روش‌های رانگ – کوتا (Range , kutta)

روش تیلر ارایه شده دارای دقت مطلوب می‌باشد، لاکن محاسبه و ارزیابی مشتق‌های متوالی y مشکل کار است. بنابراین روش تیلر به ندرت مورد استفاده قرار می‌گیرد.

برای به دست آوردن جواب‌های دقیق‌تر مسأله مقدار اولیه (۱) از یک دسته فرمول که توسط ریاضیدانان آلمانی به نام‌های **رانگ و کوتا** ارایه گردیده است می‌توان استفاده کرد، که از دقت مطلوبی برخوردار بوده و نیازی به محاسبه مشتقات متوالی y نمی‌باشد.

فرمول‌های رانگ – کوتا دارای مراتب متفاوتی می‌باشند به خصوص فرمول رانگ – کوتا مرتبه چهار به طور وسیعی کاربرد دارد. مراحل به دست آوردن این فرمول‌ها نسبتاً پیچیده است و از بیان آن‌ها خودداری نموده و صرفاً به نوشتن فرمول‌ها اکتفا می‌کنیم.

فرمول رانگ – کوتا مرتبه ۲:

در روابط زیر a، b، α و β به گونه‌ای تعیین می‌شوند که خطای y_k متناسب با h^2 باشد.

$$y_{k+1} = y_k + ak_1 + bk_2 \quad , \quad k = 0,1,\dots,n-1$$

$$k_1 = hf(x_k, y_k)$$

$$k_2 = hf(x_k + \alpha h \ , \ y_k + \beta k_1)$$

این امر باعث می‌شود که دستگاه سه معادله و چهار مجهولی زیر را داشته باشیم:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ b\alpha = \dfrac{1}{2} \\ b\beta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

که بی‌نهایت جواب دارد و به حالت‌هایی خاص اکتفا می‌کنیم.

الف) اگر $\alpha=\beta=1$ و $a=b=\frac{1}{2}$، آن‌گاه:

$$k_1 = hf(x_k, y_k) \quad , \quad k_2 = hf(x_k + h \quad , \quad y_k + k_1)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + k_1)\right) \qquad ,k = 0,1,\dots,n-1$$

که همان فرمول روش پیراسته اویلر است.

ب) اگر $a=0$ و $b=1$ و $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$، به فرمول **نقطه میانی** زیر می‌رسیم:

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_1 = hf(x_k, y_k)$$

ج) اگر $\alpha=\beta=\frac{2}{3}$، $b=\frac{3}{4}$ و $a=\frac{1}{4}$، آن‌گاه:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{4}(k_1 + 3k_2) \tag{۸}$$

$$k_1 = hf(x_k, y_k)$$

$$k_2 = hf\left(x_k + \frac{2}{3}h, y_k + \frac{2}{3}k_1\right)$$

که به **روش هیون** معروف است.

با صرف‌نظر از بیان تحلیل روش، **فرمول رانگ کوتا- مرتبه چهار** به صورت زیر است:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{۹}$$

که در آن:

$$k_1 = hf\left(x_k, y_k\right)$$
$$k_2 = hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{1}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_2}{2}\right)$$
$$k_4 = hf\left(x_k + h, y_k + k_3\right)$$

خطای فرمول رانگ – کوتا مرتبه چهارم متناسب با h^4 می‌باشد.

مثال ۴: با روش رانگ – کوتا مرتبه چهار و با $h = 0.1$ برآوردی از $y(0.1)$ را برای مسأله مقدار اولیه مثال (۱) به دست آورید.

حل: در مثال (۱) داریم:

$$f(x,y) = e^x + y \ ,\ x_0 = 0 \ ,\ y_0 = 1 \ ,\ h = 0.1 \ ,\ x_1 = 0.1$$

لذا با به کارگیری فرمول (۹) داریم:

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$
$$k_1 = 0.1\left(e^{x_0} + y_0\right) = 0.1\left(e^0 + 1\right) = 0.2$$
$$k_2 = 0.1f\left(x_0 + 0.05, y_0 + \frac{0.2}{2}\right) = 0.1f(0.05, 1.1)$$
$$= 0.1\left(e^{0.05} + 1.1\right)$$
$$= 0.21513$$

$$k_3 = 0.1f\left(x_0 + 0.05, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 0.1f(0.05, 1.10756)$$
$$= 0.1\left(e^{0.05} + 1.10756\right) = 0.21588$$
$$k_4 = 0.1f\left(x_0 + 0.1, y_0 + k_3\right) = 0.1f(0.1, 1.21588) = 0.1\left(e^{0.1} + 1.21588\right)$$
$$= 0.23211$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$y(0.1) = y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) = 1.21569$$

که خطای مرتکب شده حدود 10^{-5} می‌باشد.

یادداشت ۲ : مسأله مقدار اولیه مثال (۱) با روش‌های تیلر مرتبه۴، اویلر، پیراسته اویلر، و رانگ-کوتا مرتبه چهار حل گردید. نتایج به همراه جواب دقیق در جدول زیر گرد آمده است.

$y(x_i)$	تیلر مرتبه ۴	اویلر	پیراسته اویلر	رانگ- کوتا مرتبه ۴	جواب دقیق
$y(0.1)$	1.215688	1.20	1.2152	1.21569	1.215688
$y(0.2)$	1.465683	1.43	1.4646	-	1.465683

۲.۶ معادلات مراتب بالاتر و دستگاه‌ها

یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با شرایط اولیه را می‌توان به عنوان یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول در نظر گرفت و می‌توان به آسانی روش‌های حل عددی بخش (۱.۶) را برای حل دستگاه معادلات مرتبه اول حاصل به کاربرد. برای راحتی حل عددی دستگاه، معادلات دیفرانسیل مرتبه اول زیر را بیان و عیناً برای دستگاه‌های با ابعاد بالاتر بسط می‌دهیم.

$$x'(t)=f(t,x,y) \quad , \quad x(t_0)=x_0 \qquad (۱۰)$$
$$y'(t)=g(t,x,y) \quad , \quad y(t_0)=y_0$$

فرض کنیم $X(t)=\left[x(t),y(t)\right]^T$، بنابراین $X'(t)=\left[x'(t),y'(t)\right]^T$ لذا دستگاه (۱۰) به فرم برداری زیر نوشته می‌شود:

$$X'(t)=F\left(t\,,X^T\right) \;,\quad X_0=\left[x_0,y_0\right]^T \qquad (۱۱)$$

که در آن $F\left(t\,,X^T\right)=\left[f\left(t\,,X^T\right),g\left(t\,,X^T\right)\right]^T$ می‌باشد. با به‌کارگیری روش اویلر برای مسأله مقدار اولیه برداری (۱۱) داریم:

$$X_{k+1}=X_k+hF\left(t_k,X_k^T\right) \quad , \qquad (۱۲)$$

$$X_0=\left[x_0,y_0\right]^T$$

که در آن $X_k=\left[x_k,y_k\right]^T$ می‌باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}+h\begin{bmatrix} f\left(t_k,x_k,y_k\right) \\ g\left(t_k,x_k,y_k\right) \end{bmatrix}$$

لذا داریم:

$$\begin{cases} x_{k+1}=x_k+hf\left(t_k,x_k,y_k\right), \\ y_{k+1}=y_k+hg\left(t_k,x_k,y_k\right), \end{cases} \quad k=0,1,\dots,n-1 \qquad (۱۳)$$

مثال ۵: جواب دستگاه مقدار اولیه زیر را در نقطه $t=0.1$ و $t=0.2$ با روش اویلر با $h=0.1$ برآورد کنید.

$$\begin{cases} x'=e^x-y+1 \\ y'=e^x+y-e^t \end{cases} , \quad \begin{matrix} x(0)=0 \\ y(0)=1 \end{matrix}$$

حل: واضح است که $t_0=0$ و $x_0=0$ و $y_0=1$، $f(t,x,y)=e^x-y+1$ و $g(t,x,y)=e^x+y-e^t$ می‌باشد. چون $h=0.1$، پس:

$$t_1=0.1 \quad , \quad t_2=0.2$$

بنابراین $X(0.1)$ و $X(0.2)$ را بایستی برآورد کنیم. با به کارگیری رابطه (۱۳) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_{k+1}=x_k+h\left(e^{x_k}-y_k+1\right) \\ y_{k+1}=y_k+h\left(e^{x_k}+y_k-e^{t_k}\right) \end{cases}$$

به ازای $k=0$ داریم:

$$\begin{cases} x_1=x_0+0.1\left(e^{x_0}-y_0+1\right)=0.1 \\ y_1=y_0+0.1\left(e^{x_0}+y_0-e^{t_0}\right)=1.1 \end{cases}$$

برای $k=1$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + 0.1\left(e^{x_1} - y_1 + 1\right) = 0.2005 \\ y_2 = y_1 + 0.1\left(e^{x_1} + y_1 - e^{t_1}\right) = 1.21 \end{cases}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x(0.1) \simeq 0.1 \\ y(0.1) \simeq 1.1 \end{cases} , \quad \begin{cases} x(0.2) \simeq 0.2005 \\ y(0.2) \simeq 1.21 \end{cases}$$

توجه کنید جواب واقعی دستگاه به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x(0.1) = 0.1 \\ y(0.1) = 1.1051... \end{cases} , \quad \begin{cases} x(0.2) = 0.2 \\ y(0.2) = 1.221.... \end{cases}$$

روش پیراسته اویلر یا در حالت کلی‌تر روش‌های رانگ-کوتا مشابه روش اویلر که برای دستگاه (۱۰) به کار گرفته شد، قابل بیان است. برای نمونه روش رانگ – کوتا مرتبه دوم (پیراسته اویلر) به صورت برداری زیر است:

$$\begin{cases} X_{k+1}^{(0)} = X_k + hF\left(t_k , X_k^T\right) \\ X_{k+1} = X_k + \frac{h}{2}\left[F\left(t_k , X_k^T\right) + F\left(t_{k+1}, X_{k+1}^{(0)^T}\right)\right] \end{cases} \tag{۱۴}$$

و به‌طور مشابه روش رانگ – کوتا مرتبه چهار، به صورت برداری در زیر آمده است.

$$\begin{cases} X_{k+1} = X_k + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \\ k_1 = hF\left(t_k, X_k^T\right) \\ k_2 = hF\left(t_k + \frac{h}{2}, X_k^T + \frac{1}{2}k_1^T\right) \\ k_3 = hF\left(t_k + \frac{h}{2}, X_k^T + \frac{1}{2}k_2^T\right) \\ k_4 = hF\left(t_k + h, X_k^T + k_3^T\right) \end{cases} \tag{۱۵}$$

مثال ۶: جواب دستگاه مقدار اولیه مثال (۵) را در نقطه 0.1 با $h=0.1$ با روش رانگ – کوتا مرتبه دوم (پیراسته اویلر) به دست می‌آوریم.

حل: با به کارگیری رابطه (۱۴) داریم:

$$X_1^{(0)} = X_0 + 0.1F\left(t_0, X_0^T\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.1\begin{bmatrix} e^{x_0} - y_0 + 1 \\ e^{x_0} + y_0 - e^{t_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1.1 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = X_0 + \frac{0.1}{2}\left[F\left(t_0 , X_0\right) + F\left(t_1, X_1^{(0)}\right)\right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.05\left(\begin{bmatrix} e^{x_0} - y_0 + 1 \\ e^{x_0} + y_0 - e^{t_0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{x_1^{(0)}} - y_1^{(0)} + 1 \\ e^{x_1^{(0)}} + y_1^{(0)} - e^{t_1} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.05\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.00517 \\ 1.1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.10026 \\ 0.105 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.10026 \\ 1.105 \end{bmatrix}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$x(0.1) \simeq 0.10026$$

$$y(0.1) \simeq 1.105$$

توجه داشته باشید مقدار واقعی $x(0.1)$ و $y(0.1)$ به صورت زیر است.

$$x(0.1)=0.1 \quad , \quad y(0.1)=1.10517....$$

مثال ۷: با روش اویلر و با $h=0.1$ برآوردی از جواب مسأله مقدار اولیه زیر را در نقطه 0.1 و 0.2 به دست آورید.

$$(1-x)y''+xy'-y=0 \ , \ y(0)=1 \ , \ y'(0)=0$$

حل: ابتدا مسأله را به یک دستگاه معادله مرتبه اول تبدیل می‌کنیم. با جانشانی $u=y'$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y'=u & , \quad y(0)=1 \\ u'=\dfrac{y-xu}{1-x} & , \quad u(0)=0 \end{cases} \qquad (۱۶)$$

لذا با به کارگیری رابطه (۱۳) داریم:

$$\begin{cases} y_{k+1}=y_k+hu_k \, , & y_0=1 \\ u_{k+1}=u_k+h\left(\dfrac{y_k-x_ku_k}{1-x_k}\right), & u_0=0 \end{cases}$$

به ازای $k=0$ داریم:

$$\begin{cases} y_1=y_0+0.1u_0 = 1+0.1(0)=1 \\ u_1=u_0+0.1\left(\dfrac{y_0-x_0u_0}{1-x_0}\right)=0+0.1\left(\dfrac{1-0(0)}{1-0}\right)=0.1 \end{cases}$$

هم‌چنین برای $k=1$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y_2=y_1+0.1u_1=1+0.1(0.1)=1.01 \\ u_2=u_1+0.1\left(\dfrac{y_1-x_1u_1}{1-x_1}\right)=0.1+0.1\left(\dfrac{1-0.1(0.1)}{1-0.1}\right)=0.21 \end{cases}$$

بنابراین برآورد جواب مسأله مقدار اولیه به صورت زیر است:

$$y(0.1)\simeq 1$$
$$y(0.2)=1.01$$

توجه کنید که جواب واقعی مسأله مقدار اولیه $y=e^x-x$ می‌باشد، لذا:

$$y(0.1)=1.0051709 \ ..... \ , \quad y(0.2)=1.0214027.....$$

لذا برای $y(0.1)$ و $y(0.2)$ به ترتیب خطایی حدود 0.005 و 0.01 مرتکب شده‌ایم.

مثال ۸: برآوردی از جواب مسأله مقدار اولیه مثال (۷) را با $h=0.1$ با روش رانگ – کوتا مرتبه چهار در نقطه 0.1 به دست آورید.

حل: با به کارگیری مسأله مقدار اولیه (۱۶) و روابط (۱۵) خواهیم داشت:

$$k_1=0.1F\left(x_0,Y_0^T\right) \ , \quad Y_0=\begin{bmatrix} y_0 \\ u_0 \end{bmatrix}$$

$$k_1=0.1\begin{bmatrix} u_0 \\ \dfrac{y_0-x_0u_0}{1-x_0} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$k_2=0.1F\left(x_0+0.05\ ,\ Y_0+\frac{1}{2}k_1\right)=0.1F\left(0.05\ ,y_0,u_0+0.05\right)$$

$$=0.1F(0.05,1,0.05)\ ,$$

$$k_2=0.1\begin{bmatrix}0.05\\ \dfrac{1-0.05(0.05)}{1-0.05}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.005\\0.105\end{bmatrix},$$

$$k_3=0.1F\left(x_0+0.05\ ,Y_0+\frac{1}{2}k_2\right)=0.1F\left(0.05\ ,\ \ y_0+0.0025\ \ ,\ \ u_0+0.0525\right)$$

$$=0.1\ F(0.05\ ,\ 1.0025\ ,\ 0.0525)=0.1\begin{bmatrix}0.0525\\ \dfrac{1.0025-0.05(0.0525)}{1-0.05}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.00525\\0.10525\end{bmatrix},$$

$$k_4=0.1F\left(x_0+0.1\ ,\ Y_0+k_3\right)=0.1F\left(0.1\ ,\ \ y_0+0.00525\ \ ,\ \ u_0+0.10525\right)$$

$$=0.1F(0.1\ ,\ 1.00525\ ,\ 0.10525)=0.1\begin{bmatrix}0.10525\\ \dfrac{1.00521-0.1(0.10525)}{1-0.1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.01053\\0.11052\end{bmatrix},$$

$$Y_1=Y_0+\frac{1}{6}\left(k_1+2k_2+2k_3+k_4\right)=\begin{bmatrix}y_0\\u_0\end{bmatrix}+\frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix}0\\0.1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0.005\\0.105\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0.00525\\0.10525\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.01053\\0.11052\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1.00517\\0.10517\end{bmatrix}$$

بنابراین داریم:

$$y(0.1)\simeq 1.00517\quad ,\quad y'(0.1)\simeq 0.10517$$

که خطای برآورد $y(0.1)$ و $y'(0.1)$ حدود 10^{-6} می‌باشد.

یادداشت ۳ : یک دستگاه معادله دیفرانسیل مرتبه بالاتر از یک را می‌توان به یک دستگاه معادله دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل نمود.

برای نمونه دستگاه:

$$\begin{cases}x''-x'+5x+2y''=e^t\\ -2x+y''+2y=3t^2\end{cases}$$

با انتخاب $x'=u$ و $y'=v$ به دستگاه معادله مرتبه اول زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{cases}x'=u\\ y'=v\\ u'=-9x+4y+u+e^t-6t^2\\ v'=3t^2+2x-2y\end{cases}$$

۳.۶ روش‌های چند گامی

روش‌هایی که در بخش ۱.۶ ارایه شد به روش‌های تک گامی موسومند. زیرا تنها اطلاعات مربوط به آخرین گام حساب شده را به کار می‌برند، به همین دلیل این روش‌ها برای آن دسته از مسایلی که با شرایط اولیه مطرح می‌شوند ایده‌آل است. این روش‌ها قادرند در گام بعدی از طول کافی متفاوت با طول گام قبلی استفاده کنند. پس از سپری شدن گام اول، دوم و ... اطلاعات بیش‌تری از تابع و مشتق آن در دسترس قرار می‌گیرد اگر با کمی دوراندیشی آن‌ها را ذخیره کنیم، یک **روش چندگامی** روشی است که از این اطلاعات استفاده می‌نماید.

۶ . ۳ . ۱ روش آدامز (Adams)

این روش چندگامی مبتنی بر قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و چند جمله‌ای درون‌یاب می‌باشد، که به صورت زیر است:
با انتگرال‌گیری از مسأله مقدار اولیه (۱) نسبت به x روی بازه $\left[x_k, x_{k+1}\right]$ داریم:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x)\,dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f\left(x, y(x)\right)dx$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f\left(x, y(x)\right)dx \qquad (۱۷)$$

حال تابع $f(x,y)$ را نسبت به x با نقاط x_k و x_{k-1} و x_{k-2} و ... یعنی نقاط قبل از x_{k+1} درون‌یابی می‌کنیم. در واقع از برون‌یابی استفاده می‌کنیم. (خطای برون‌یابی از درون‌یابی بیش‌تر است) اگر از سه نقطه یا چهار نقطه قبلی استفاده شود، به ترتیب روش آدامز مرتبه سوم و چهارم نامیده می‌شود. با استفاده از دستور تفاضل پسرو نیوتن برای سه نقطه قبلی داریم:

$$f(x,y) = f_k + \theta\nabla f_k + \frac{\theta(\theta+1)}{2!}\nabla^2 f_k$$

$$x = x_k + \theta h$$

بنابراین با به‌کارگیری رابطه (۱۷) خواهیم داشت:

$$y_{k+1} \simeq y_k + \int_0^1 \left(f_k + \theta\nabla f_k + \frac{\theta(\theta+1)}{2!}\nabla^2 f(x)\right) h\,d\theta = y_k + h\left[f_k + \frac{1}{2}\nabla f_k + \frac{5}{12}\nabla^2 f_k\right]$$

$$= y_k + \frac{h}{12}\left(5f_{k-2} - 16f_{k-1} + 23f_k\right)$$

لذا **فرمول مرتبه سوم آدامز** به صورت زیر است که خطای آن متناسب با h^4 می‌باشد.

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{12}\left(23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2}\right), \qquad k = 2, 3, \ldots, n-1 \qquad (۱۸)$$

به شیوه قبل اگر f را نسبت به x در چهار نقطه x_k، x_{k-1}، x_{k-2} و x_{k-3} درون‌یابی کنیم، فرمول **آدامز مرتبه چهار** به صورت زیر به دست می‌آید که خطای آن متناسب با h^5 می‌باشد.

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}\left(55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}\right) \quad , \quad k = 3, 4, 5, \ldots, n-1 \qquad (۱۹)$$

مثال ۹: جواب مسأله مقدار اولیه مثال (۱) را در نقطه 0.3 با روش آدامز مرتبه سوم با $h = 0.1$ برآورد می‌کنیم و از اطلاعات ذخیره شده در مثال (۱) بهره می‌گیریم.

حل: در مثال (۱) داریم:

k	x_k	y_k	$f_k = e^{x_k} + y_k$
0	0	1	2
1	0.1	1.215688	2.320859
2	0.2	1.465683	2.687086

با به‌کارگیری فرمول (۱۸) به ازای $k = 2$ داریم:

$$y(0.3) \simeq y_3 = y_2 + \frac{0.1}{12}\left(23f_2 - 16f_1 + 5f_0\right) = 1.754593$$

که خطای مرتکب شده حدود 10^{-4} می‌باشد.

مثال ۱۰: با بهره‌گیری از مثال‌های (۱) و (۹) تقریبی از $y(0.4)$ را با $h=0.1$ و روش آدامز مرتبه چهارم به دست آورید.

حل: از مثال‌های (۱) و (۹) داریم:

k	x_k	y_k	f_k
0	0	1	2
1	0.1	1.215688	2.320859
2	0.2	1.465683	2.687085
3	0.3	1.754593	3.104459

با به‌کارگیری فرمول (۹) و به ازای $k=3$ خواهیم داشت:

$$y(0.4) \simeq y_4 = y_3 + \frac{0.1}{24}\left(55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0\right) = 2.088256$$

که جواب واقعی $y(0.4) = 2.08855...$ می‌باشد، بنابراین خطای مرتکب شده 0.0003 می‌باشد.

مثال‌های متنوع تستی حل شده:

مثال ۱۱: جواب مسأله مقدار اولیه زیر با $h=0.1$ و با روش تیلر مرتبه دوم در نقطه 0.1 کدام است؟

$$y' = \mathrm{Sin}(xy) \quad , y(0) = 0$$

۱) 1.005 ۲) 1.004 ۳) 1.003 ۴) 1.006

حل: چون $x_0 = 0$ و $y_0 = 1$، $f(x,y) = \mathrm{Sin}(xy)$ و $h=0.1$ می‌باشد، پس $x_1 = 0.1$ بنابراین y_1 جواب مسأله است. با به‌کارگیری فرمول (۲) و $P=2$ داریم:

$$y_1 = y_0 + 0.1y'_0 + \frac{0.01}{2!}y''_0 = 1 + 0.1\,\mathrm{Sin}\left(x_0y_0\right) + \frac{0.01}{2!}\left(y_0 + x_0y'_0\right)\mathrm{Cos}\left(x_0y_0\right) = 1.005$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

مثال ۱۲: جواب مسأله مقدار اولیه مثال (۱۱) با روش اویلر کدام است؟

۱) 0.9 ۲) 1 ۳) 1.1 ۴) 1.11

حل: با به‌کارگیری فرمول (۳) به ازای $k=0$ داریم:

$$y_1 = y_0 + 0.1f\left(x_0, y_0\right) = 1 + 0.1\mathrm{Sin}\left(x_0y_0\right) = 1$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

مثال ۱۳: جواب مسأله مقدار اولیه مثال (۱۱) در نقطه $x=0.1$ با روش اویلر و $h=0.05$ کدام است؟

۱) 1.00377 ۲) 1.00388 ۳) 1.00399 ۴) 1.00499

حل: چون $h=0.05$ است پس $x_1 = 0.05$ و $x_2 = 0.1$ می‌باشد لذا با استفاده از فرمول (۳) داریم:

$$y(0.05) \simeq y_1 = y_0 + 0.05f\left(x_0, y_0\right) = 1 + 0.05\mathrm{Sin}\left(x_0y_0\right) = 1$$

$$y(0.1) \simeq y_2 = y_1 + 0.05f\left(x_1, y_1\right) = 1 + 0.05\mathrm{Sin}\left(x_1y_1\right) = 1.00499$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح می‌باشد.

مثال ۱۴: جواب مسأله مقدار اولیه مثال (۱۱) در صورتی‌که $h=0.1$ با روش رانگ- کوتا مرتبه دوم (پیراسته اویلر) کدام است؟

۱) 1.00399 ۲) 1.00599 ۳) 1.00499 ۴) 1.00299

حل: با به‌کارگیری فرمول (۷) به ازای $k=0$ داریم:

$$y_1^{(0)}=y_0+0.1f\left(x_0,y_0\right)=1$$

$$y_1=y_0+\frac{0.1}{2}\left[f\left(x_0,y_0\right)+f\left(x_1,y_1^{(0)}\right)\right]=1+0.05\left(\mathrm{Sin}\left(x_0y_0\right)+\mathrm{Sin}\left(x_1y_1^{(0)}\right)\right)$$

$$=1+0.05\left(0+\mathrm{Sin}\left(0.1\right)\right)=1.00499$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

مثال ۱۵: جواب دستگاه مقدار اولیه زیر را در نقطه 0.1 با روش اویلر کدام است؟

$$\begin{cases}x'=x-y+1 & , \quad x(0)=0\\ y'=x^2-y^2+1 & , \quad y(0)=0\end{cases}$$

۱) $x(0.1)=y(0.1)=0.12$ ۲) $x(0.1)=y(0.1)=0.10$

۳) $x(0.1)=y(0.1)=0.11$ ۴) $x(0.1)=y(0.1)=0.13$

حل: چون $t_0=0$ و $x_0=0$، $y_0=0$ و $h=0.1$ است، پس $t_1=0.1$ می‌باشد. بنابراین $x(0.1)$ و $y(0.1)$ مورد نظر است یعنی، x_1 و y_1. لذا با به‌کارگیری فرمول (۱۳) به ازاء $k=0$ داریم:

$$x_1=x_0+0.1\left(x_0-y_0+1\right)=0.1$$

$$y_1=y_0+0.1\left(x_0^2-y_0^2+1\right)=0.1$$

لذا گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

مثال ۱۶: با روش اویلر و $h=0.1$، جواب مسأله مقدار اولیه زیر کدام است؟

$$y''+y=0 \quad , \quad y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=1$$

۱) 0.1 ۲) 0.09 ۳) 0.08 ۴) 0.11

حل: چون $x_0=0$ و $h=0.1$، پس $y(0.1)$ مورد نظر است. قرار می‌دهیم $y'=u$، بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}y'=u & y(0)=0\\ u'=-y & u(0)=1\end{cases}$$

با به‌کارگیری فرمول (۱۳) به ازای $k=0$ داریم:

$$y(0.1)=y_1=y_0+0.1f\left(x_0,y_0,u_0\right)=0+0.1u_0=0.1$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

تمرین‌های تشریحی:

۱ ـ جواب مسأله مقدار اولیه زیر را در نقطه $x=0.1$ و $x=0.2$ با طول گام $h=0.1$ و با روش تیلر مرتبه 2 و 4 به دست آورید.

$$y'=x+y\ ,\ y(0)=1$$

۲ ـ جواب مسأله مقدار اولیه زیر را در نقطه $x=0.1$ و $x=0.2$ با طول گام 0.05 به دست آورید.

$$y'=e^{xy}+y\ \ ,\ \ y(0)=1$$

۳ ـ جواب مسأله مقدار اولیه مسأله (۲) را با طول گام 0.05 در نقطه $x=0.1$ با روش‌های نقطه میانی، پیراسته اویلر (رانگ – کوتا مرتبه دوم)، هیون و رانگ-کوتا مرتبه چهار به دست آورید و جواب‌های به دست آمده را با هم مقایسه کنید.

۴ ـ نشان دهید که مقدار $I=\int_a^b f(x)dx$ با حل مسأله مقدار اولیه

$$\begin{cases} y'=f(x) & ,\ a\le x\le b \\ y(a)=0 \end{cases}$$

در نقطه b یکسان است. هم‌چنین نشان دهید که با استفاده از روش اویلر با طول گام h نتیجه زیر حاصل می‌شود که همان مجموع ریمان I می‌باشد.

$$y(b)\simeq\sum_{k=0}^{n-1}hf(x_k)$$

۵ ـ نشان دهید که اگر از روش پیراسته اویلر برای حل تمرین (۴) استفاده نماییم، داریم:

$$y(b)\simeq\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(x_k)+f(x_{k-1})\right)$$

که تقریب ذوزنقه‌ای مرکب برای I با طول گام $h=\frac{b-a}{n}$ می‌باشد.

۶ ـ نشان دهید که اگر در تمرین (۴) از روش رانگ – کوتا مرتبه چهارم استفاده نماییم، داریم:

$$y(b)\simeq\frac{h}{6}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(x_k)+4f\left(x_k+\frac{h}{2}\right)+f(x_{k+1})\right)$$

که یک تقریب سیمسون برای I با طول گام $h=\frac{b-a}{n}$ می‌باشد.

۷ ـ با روش اویلر و رانگ- کوتا مرتبه دوم جواب دستگاه مقدار اولیه زیر را در نقطه $x=0.1$ با طول گام $h=0.1$ برآورد کنید.

$$\begin{cases} x'=x^2-y^2+e^t & x(0)=1 \\ y'=x+y-e^t & y(0)=1 \end{cases}$$

۸ ـ با روش اویلر و رانگ – کوتا مرتبه دوم جواب مسأله مقدار اولیه زیر را در نقطه $x=0.1$ با طول گام $h=0.1$ به دست آورید.

a) $x^2y''+xy'+y=0\ \ ,\ \ y(1)=0\ \ ,y'(1)=1$

b) $y'''+xy=0\ \ ,y(0)=0\ \ ,\ y'(0)=0\ \ ,\ y''(0)=0$

۹ ـ با اطلاعات به دست آمده در تمرین (۲)، جواب را در نقطه $x=0.1$ با طول گام $h=0.05$ با روش آدامز مرتبه سوم به دست آورید.

۱۰ ـ جواب مسأله مقدار اولیه تمرین (۲) را در نقطه $x=0.1$ با طول گام $h=0.05$ و اطلاعات به دست آمده در تمرین (۲) و (۱۰) با روش آدامز مرتبه چهارم به دست آورید.

تمرین‌های چهار گزینه‌ای:

۱ـ اگر از روش اویلر درحل مسأله مقدار اولیه زیر استفاده نماییم، $y(1)$ با $h=0.5$ کدام است؟

$$y'=\frac{y}{x+y}\quad,\quad y(0)=1$$

۱) 1.125 ۲) 1.5 ۳) 2 ۴) 1.875

۲ـ اگر روش تیلر مرتبه دوم را برای حل معادله دیفرانسیل زیر با $h=0.5$ به کار بریم، فرمول مربوط کدام است؟

$$y'=1+x-y\quad,\quad y(0)=1$$

۱) $\begin{cases} y_{n+1}=\frac{3}{2}y_n+\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2} \\ y_0=1 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} y_{n+1}=\frac{1}{2}y_n+\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2} \\ y_0=1 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} y_{n+1}=\frac{3}{8}y_n+\frac{5}{8}x_n+\frac{1}{2} \\ y_0=1 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} y_{n+1}=\frac{5}{8}y_n+\frac{3}{8}x_n+\frac{1}{2} \\ y_0=1 \end{cases}$

۳ـ خطای روش اویلر در حل مسأله مقدار اولیه (۱) با طول گام h متناسب با چیست؟

۱) h ۲) h^2 ۳) h^3 ۴) هیچکدام

۴ـ خطای روش پیراسته اویلر درحل مسأله مقدار اولیه (۱) با طول گام h متناسب با چیست ؟

۱) h ۲) h^2 ۳) h^3 ۴) هیچکدام

۵ـ خطای روش رانگ ـ کوتا مرتبه چهارم در حل مسأله مقدار اولیه زیر با طول گام h متناسب با چیست؟

$$y'=f(x,y)\quad,\quad y(x_0)=y_0$$

۱) h ۲) h^2 ۳) h^3 ۴) h^4

۶ـ جواب مسأله مقدار اولیه تمرین (۱) در نقطه $x=0.5$ با طول گام $h=0.5$ با روش پیراسته اویلر کدام است؟

۱) 1.4375 ۲) 1.4275 ۳) 1.4175 ۴) 1.4475

۷ـ جواب مسأله مقدار اولیه تمرین (۱) را با روش تیلر مرتبه دوم در نقطه $x=0.5$ با طول گام $h=0.5$ کدام است؟

۱) 1.175 ۲) 1.275 ۳) 1.375 ۴) 1.475

۸ـ جواب دستگاه مقدار اولیه زیر در نقطه $t_1=0.1$ با طول گام $h=0.1$ با روش اویلر کدام است؟

$$\begin{cases} x'=x+y+1-2t \\ y'=e^{x^2}-e^{y^2}+1 \end{cases}\quad x(0)=y(0)=0$$

۱) $x(0.1)=y(0.1)=0.10$ ۲) $x(0.1)=y(0.1)=0.11$

۳) $x(0.1)=y(0.1)=0.12$ ۴) $x(0.1)=y(0.1)=0.13$

۹ـ جواب و شیب جواب مسأله مقدار اولیه زیر د رنقطه $x_1=0.1$ با طول گام $h=0.1$ با روش اویلر کدام است؟

$$y''-xy=0\quad ,y(0)=1\quad ,y'(0)=1$$

۱) 0.1 و 1 ۲) 1 و 0.1 ۳) 1 و 1 ۴) 0.1 و 0.1

۱۰ـ خطای روش آدامز مرتبه سوم مسأله مقدار اولیه (۱) وقتی که طول گام h باشد متناسب با چیست؟

۱) h ۲) h^2 ۳) h^3 ۴) h^4