فصل ۷

حل عددی دستگاه معادلات خطی و غیرخطی

هدف اصلی این فصل حل دستگاه معادلات خطی و غیرخطی می‌باشد که در علوم و مهندسی و اقتصاد نقش مهمی را ایفا می‌کنند. از طرفی اغلب روش‌های عددی منجر به یک دستگاه خطی می‌شوند، بنابراین این فصل از جایگاه ویژه‌ای برخوردار است. در این فصل روش‌های متعارف حل دستگاه‌ها ارایه می‌گردد.

۷ . ۱ مقدمه‌ای بر جبرخطی

یک دستگاه خطی n معادله با n مجهول x_1 و x_2 و ..... x_n دستگاهی است به صورت زیر:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (۱)$$

که در آن a_{ij}ها و b_iها به ترتیب ضرایب و مقادیر معلوم می‌باشند. اگر قرار دهیم:

$$A = (a_{ij})_{n\times n} \quad , \quad X = [x_1, ..., x_n]^T \quad , \quad B = [b_1, b_2, ..., b_n]^T$$

آن‌گاه دستگاه خطی (۱) به فرم ماتریسی $AX = B$ تبدیل می‌گردد که در آن A ماتریس ضرایب، X بردار مجهولات و B بردار طرف دوم نام دارد.

اگر $B = 0$ دستگاه خطی (۱) را یک **دستگاه‌خطی همگن**، در غیر این‌صورت دستگاه (۱) را یک دستگاه **خطی غیرهمگن** گویند.

بدیهی است اگر A ماتریس معکوس‌پذیر باشد، آن‌گاه دستگاه (۱) جواب یکتای $X = A^{-1}B$ را دارا می‌باشد و هم‌چنین دستگاه خطی همگن نظیر (۱) دارای جواب یکتای $X = 0$ می‌باشد. نتیجه بحث را می‌توان در قضیه زیر بیان کرد:

قضیه ۱: اگر A ماتریس ضرایب دستگاه خطی (۱) باشد آن‌گاه گزاره‌های زیر معادلند:

الف) دستگاه غیرهمگن (۱) جواب یکتا دارد.

ب) ماتریس A نامنفرد (معکوس‌پذیر) است.

ج) دستگاه‌خطی همگن نظیر (۱) یعنی $AX=0$، تنها جواب بدیهی $X=0$ دارد.

د) $\det(A)\neq 0$

فرض کنیم $\det A\neq 0$، پس دستگاه‌خطی (۱) جواب منحصر به فرد $X=A^{-1}B$ را دارد. با توجه به این‌که $A^{-1}=\dfrac{\operatorname{adj}(A)}{|A|}$ می‌باشد، خواهیم داشت:

$$x_k=\frac{|A_k|}{|A|}\qquad ,k=1,2,\dots,n$$

که در آن $|A|$ دترمینان ماتریس ضرایب است و A_k به صورت زیر است:

$$A_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k-1} & b_2 & a_{2k+1} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\quad ,k=1,2,\dots,n$$

مشاهده می‌شود که بردار B جانشین ستون kام در ماتریس ضرایب دستگاه (۱) شده است. روش فوق که متکی برمعکوس ماتریس ضرایب می‌باشد به **روش کرامر** معروف است.

مثال ۱: دستگاه خطی زیر را با روش کرامر و معکوس ماتریس ضرایب حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} x_1+x_2=1\\ x_1+2x_2=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

حل: واضح است که A و B به صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\qquad ,\qquad B=\left[1,\frac{3}{2}\right]^T\qquad ,|A|=1\neq 0\ ,$$

چون $|A|\neq 0$ پس طبق قضیه (۱) دستگاه جواب یکتا دارد که با روش کرامر به صورت زیر است:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ \frac{3}{2} & 2\end{vmatrix}}{|A|}=0.5\qquad ,\qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & \frac{3}{2}\end{vmatrix}}{|A|}=0.5$$

و جواب با روش معکوس ضرایب به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5\\ 0.5\end{bmatrix}$$

یادداشت ۱: با در نظر گرفتن مثال بالا ظاهراً مشکلی وجود ندارد، اما روش بالا برای دستگاه‌های با **ابعاد** بزرگ به همین سادگی قابل اجرا نمی‌باشد. چون در ابعاد بزرگ حجم محاسبات چنان افزایش می‌یابد که انجام کار حتی با ماشین‌های پیشرفته امکان پذیر نخواهد بود. برای محاسبه معکوس یک ماتریس $n\times n$، به محاسبه یک دترمینان و برای روش کرامر به $n+1$ دترمینان نیاز است. این در حالی است که برای محاسبه دترمینان یک ماتریس $n\times n$ حدود $n!$ عمل ضرب نیاز می‌باشدو **لذا** برای روش کرامر حدود $(n+1)!$ عمل ضرب نیاز داریم. مشاهده می‌شود که حجم محاسبات برای n بزرگ باعث ایجاد و رشد خطاهای قابل توجه می‌گردد.

۲.۷ نرم‌های برداری و ماتریسی

در حل دستگاه $AX = B$ مشاهده خواهید کرد که جواب دستگاه را با دو دسته روش برآورد می‌کنیم. **روش‌های مستقیم** که با تعداد متناهی عمل و با صرف‌نظر از خطای محاسباتی منجر به جواب دستگاه می‌شود، ولی به دلیل وجود خطای نمایش اعداد منجر به جواب تقریبی $\tilde{X}$ می‌گردد. دسته دوم، **روش‌های تکراری** نام دارد که مرتباً جواب تقریبی به دست می‌دهد که حد جواب‌ها یعنی حد دنباله ساخته شده $X^{(k)}$ جواب دستگاه است، که درعمل با تعداد متناهی تکرار متوقف می‌شویم و جواب دستگاه را تقریب می‌زنیم. بنابراین معیاری برای این تقریب‌ها باید داشته باشیم که خطای مرتکب شده را نمایش دهند. این معیار، نرم $(\|.\|)$ نام دارد که در زیر تعریف می‌شود.

فرض کنیم $X \in \mathbb{R}^n$ و $X = \left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right]^T$، سه نرم برای بردار X تعریف می‌کنیم:

$$\|X\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

$$\|X\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \qquad (۲)$$

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

نرم $\|X\|_2$ به نرم اقلیدسی معروف است، اگر $\tilde{x}$ جواب تقریبی دستگاه (۱) باشد، آن‌گاه $\|X - \tilde{X}\|_2$ را به عنوان میزان خطای $\tilde{X}$ یا اندازه دقت در روش‌های تکراری می‌توان در نظر گرفت. البته هرکدام از دو نرم دیگر می‌تواند به عنوان معیار قرار گیرد.

مثال ۲: اگر $X = \left[1, 2, \sqrt{20}\right]^T$ آن‌گاه نرم بینهایت، نرم دو و نرم یک را به دست می‌آوریم.

حل: با توجه به رابطه (۲) داریم:

$$\|X\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + \left(\sqrt{20}\right)^2} = 5$$

$$\|X\|_1 = |1| + |2| + \left|\sqrt{20}\right| = 3 + 2\sqrt{5}$$

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \le i \le 3} |x_i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

اگر $X \in \mathbb{R}^n$ و A یک ماتریس $n \times n$ باشد، آن‌گاه AX در $\mathbb{R}^n$ قرار دارد. **نرم ماتریس A** به صورت زیر تعریف می‌شود، که یک نرم طبیعی نامیده می‌شود.

$$\|A\| = \max_{\|X\|=1} \|AX\| \qquad (۳)$$

نرم‌های ماتریسی مهم که مورد توجه قرار می‌گیرند، به صورت زیر است:

$$\|A\|_\infty = \max_{\|X\|_\infty = 1} \|AX\|_\infty$$

$$\|A\|_1 = \max_{\|X\|_1 = 1} \|AX\|_1$$

$$\|A\|_2 = \max_{\|X\|_2 = 1} \|AX\|_2$$

نرم‌های $\|.\|_\infty$ و $\|.\|_1$ یک نمایش جالبی نسبت به درایه‌های ماتریس A دارد که به ترتیب به **نرم سطری و نرم ستونی** ماتریس معروف هستند و می‌توان نشان داد که به صورت زیر هستند:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

(۴)

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

در واقع $\|A\|_1$ بزرگ‌ترین مجموع قدرمطلق ستون‌ها و $\|A\|_\infty$ بزرگ‌ترین مجموع قدرمطلق سطرها می‌باشد.

مثال ۳: نرم‌های سطری و ستونی ماتریس زیر را به دست می‌آوریم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0.2 & 0.5 \end{bmatrix}$$

حل: با توجه به (۴) داریم:

$$\|A\|_1 = \max\{|1|+|0.2| \ , \ |-1|+|0.5|\} = 1.5$$

$$\|A\|_\infty = \max\{|1|+|-1| \ , \ |0.2|+|0.5|\} = 2$$

۷ . ۳ روش‌های مستقیم

در بخش قبل مشاهده نمودید که روش‌های کرامر و روش معکوس ضرایب برای حل دستگاه‌خطی (۱) با ابعاد بزرگ کارایی ندارد. در این بخش روش‌هایی را مطرح می‌کنیم که دستگاه (۱) را تبدیل به یک دستگاه با ماتریس ضرایب بالا مثلثی، پایین مثلثی یا قطری می‌نماید که در این صورت حجم محاسبات بسیار کاهش می‌یابد و برای حل دستگاه‌های با ابعاد بزرگ هم مناسب می‌باشد. ابتدا قبل از بیان این روش‌ها **عملیات سطری مقدماتی** را تعریف می‌کنیم، که سه عمل زیر است:

الف) جابه‌جایی دو سطر دلخواه در ماتریس، $(R_i \leftrightarrow R_j)$

ب) ضرب یک سطر در ثابت α، $(\alpha R_i \to R_i)$

ج) مضربی از یک سطر را به سطر دیگر افزودن، $(\alpha R_i + R_j \to R_j)$

قضیه ۲: اعمال سطری مقدماتی، جواب دستگاه‌خطی را تغییر نمی‌دهد. (با صرف‌نظر از خطای محاسباتی)

۷ . ۳ . ۱ روش حذفی گاوس و گاوس جردن

فرض کنیم دستگاه‌خطی (۱) یعنی $AX = B$ دارای جواب یکتا می‌باشد، ماتریس $[A \vdots B]$ را **ماتریس افزوده** دستگاه (۱) گوییم، اگر با انجام اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس افزوده کاری کنیم که به جای ماتریس A یک ماتریس بالا مثلثی (پایین مثلثی یا قطری) با عناصر قطر اصلی غیر صفر (یک) قرار گیرد، یعنی:

$$[A \vdots B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \xrightarrow{\text{اعمال سطری مقدماتی}} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & a'_{23} & \cdots & & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & & a'_{3n} & b'_3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 & a'_{n-1n} & b'_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 & b'_n \end{array}\right]$$

در این صورت دستگاه خطی (۱) به دستگاه خطی زیر تبدیل شده است.

$$\begin{aligned}
x_1+a'_{12}x_2+a'_{13}x_3+\ldots+a'_{1n}x_n&=b'_1\\
x_2+a'_{23}x_3+\ldots+a'_{2n}x_n&=b'_2\\
x_3+\ldots+a'_{3n}x_n&=b'_3\\
&\vdots\\
x_{n-1}+a'_{n-1}x_n&=b'_{n-1}\\
x_n&=b'_n
\end{aligned}$$

بنابراین جواب دستگاه خطی (۱) به صورت زیر است که به این روش، **روش حذفی پسرو گاوس** گوییم.

$$\begin{cases}
x_n=b'_n\\
x_{n-1}=b'_{n-1}-a'_{n-1}b'_n\\
\vdots\\
x_1=b'_1-a'_{1n}x_n-a'_{1n-1}x_{n-1}-\ldots\ldots-a'_{12}x_2
\end{cases}$$

اگر درفرایند ارایه شده با اعمال سطری مقدماتی روی ماتریس افزوده، ماتریس A به یک ماتریس پایین مثلثی یا قطری با عناصر قطر اصلی غیر صفر (یک) تبدیل شود، به ترتیب روش حذفی پیشرو گاوس یا روش گاوس جردن گوییم.

مثال ۴: با روش حذفی پسرو گاوس جواب دستگاه خطی زیر را به دست آورید.

$$\begin{cases}
x_1+2x_2-x_3=2\\
2x_1-x_2-x_3=0\\
x_1+x_2-4x_3=-2
\end{cases}$$

حل: ابتدا ماتریس افزوده دستگاه را تشکیل می‌دهیم:

$$[A\vdots B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&2\\2&-1&-1&0\\1&1&-4&-2\end{array}\right]\xrightarrow[-R_1+R_3\to R_3]{-2R_1+R_2\to R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&2\\0&-5&1&-4\\0&-1&-3&-4\end{array}\right]\xrightarrow[\frac{-1}{5}R_2+R_3\to R_3]{\frac{-1}{5}R_2\to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&2\\0&1&\frac{-1}{5}&\frac{4}{5}\\0&0&\frac{-16}{5}&\frac{-16}{5}\end{array}\right]\xrightarrow{-\frac{5}{16}R_3\to R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&2\\0&1&\frac{-1}{5}&\frac{4}{5}\\0&0&1&1\end{array}\right]$$

بنابراین داریم:

$$x_3=1\ ,\quad x_2=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}x_3=1\ ,\quad x_1=2+x_3-2x_2=1$$

در روند روش حذفی گاوس همان‌طوری‌که مشاهده نمودید، **عناصر کلیدی** a_{ii} نباید صفر باشند. بنابراین اگر یک یا چند عنصر کلیدی صفر باشد با جابه‌جایی سطرهای باقی مانده از این عمل جلوگیری می‌کنیم، که این عمل **محورگیری** نامیده می‌شود.

یادداشت ۲ : در روش حذفی پسرو گاوس و در مرحله بالا مثلثی کردن ماتریس A، تعداد اعمال ضرب و تقسیم $\frac{2n^3+3n^2-5n}{6}$ و تعداد عملیات جمع و تفریق $\frac{n^3-n}{3}$ می‌باشد. و در مرحله جایگزینی پسرو تعداد ضرب و تقسیم $\frac{n^2+n}{2}$ و تعداد جمع و تفریق $\frac{n^2-n}{2}$ می‌باشد. بنابراین اگر دستگاه خطی (۱) یک دستگاه ۱۰ معادله با 10 مجهول باشد، تعداد اعمال حسابی برای یافتن جواب 805 عمل می‌باشد. در حالی‌که با روش کرامر تعداد اعمال !11یعنی 39916800 می‌باشد. مشاهده می‌کنیم که اختلاف فاحشی در تعداد اعمال حسابی وجود دارد.

۲.۳.۷ روش تجزیه Lu

در این روش ماتریس ضرایب دستگاه‌خطی (۱) یعنی ماتریس A را به صورت Lu تجزیه می‌کنیم که در آن L یک ماتریس پایین مثلثی و u یک ماتریس بالا مثلثی است. در این صورت خواهیم داشت:

$$AX = B \Rightarrow LUX = B$$

که با قراردادن $UX = Y$ داریم:

$$LY = B$$

مشاهده می‌شود که ضرایب دستگاه‌خطی $LY = B$ یک ماتریس پایین مثلثی است لذا با روش حذفی پیشرو گاوس Y را به دست می‌آوریم، سپس از $UX = Y$ و با روش حذفی پسرو گاوس X را به دست می‌آوریم.

الف) اگر L یک ماتریس پایین مثلثی با عناصر قطر اصلی یک باشد، روش را **روش دولیتل** گویند.

ب) اگر U یک ماتریس بالا مثلثی با عناصر قطر اصلی یک باشد، روش را **روش کروت** گویند.

ج) اگر $u = L^T$ یعنی $A = LL^T$، در این صورت روش را **روش چولسکی** گویند.

مثال ۵: جواب دستگاه زیر را با روش کروت به دست آورید.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6$$
$$3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4$$

حل: در این روش ماتریس A را به صورت Lu تجزیه می‌کنیم که u بالا مثلثی با عناصر قطر اصلی یک است، پس:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با توجه به ضرب ماتریس خواهیم داشت :

$$\ell_{11} = 1 \quad , \quad \ell_{21} = 4 \quad , \quad \ell_{31} = 3$$
$$u_{12} = 1 \quad , \quad u_{13} = 1 \quad , \quad u_{23} = 5$$
$$\ell_{22} = -1 \quad , \quad \ell_{32} = 2 \quad , \quad \ell_{33} = -10$$

بنابراین داریم:

$$LY = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

با روش حذفی پیشرو گاوس به دست می‌آوریم $y_1 = 1$ و $y_2 = -2$ و $y_3 = \frac{-1}{2}$ حال، دستگاه $UX = Y$ را حل می‌کنیم، لذا:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

پس با روش حذفی پسرو گاوس داریم $x_3 = -\frac{1}{2}$ ، $x_2 = \frac{1}{2}$ و $x_1 = 1$.

اعمال تجزیه چولسکی تحت شرایطی امکان پذیر است. برای بیان شرایط کافی ابتدا تعریف زیر را می‌آوریم:

تعریف ۱: ماتریس $A=(a_{ij})_{n\times n}$ را یک **ماتریس مثبت معین** گویند، هرگاه برای هر $X\neq 0$ داشته باشیم:

$$X^TAX>0$$

مثال ۶: نشان می‌دهیم ماتریس زیر ماتریس مثبت معین است.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 8\end{bmatrix}$$

حل: فرض کنیم $X=[x,y]^T$ و $X\neq 0$، داریم:

$$\begin{aligned}X^TAX&=[x,y]\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=[x,y]\begin{bmatrix}x+2y\\ 3x+8y\end{bmatrix}\\ &=x(x+2y)+y(3x+8y)=x^2+5xy+8y^2\\ &=\left(x+\frac{5}{2}y\right)^2+8y^2-\frac{25}{4}y^2=\left(x+\frac{5}{2}y\right)^2+\frac{7}{4}y^2>0\end{aligned}$$

پس A مثبت معین است.

قضیه ۳: ماتریس $A=(a_{ij})_{n\times n}$ مثبت معین است هرگاه دترمینان زیر ماتریس‌های پیشرو مثبت باشند.

مثال ۷: نشان می‌دهیم ماتریس زیر مثبت معین است.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 20\end{bmatrix}$$

حل: واضح است که $a_{11}=1>0$، $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1>0$ و داریم:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 20\end{vmatrix}=38>0$$

پس A یک ماتریس مثبت معین است.

قضیه ۴: هرگاه ماتریس A یک ماتریس متقارن مثبت معین باشد، آن‌گاه تجزیه چولسکی امکان پذیر است و تعداد تجزیه‌ها 2^n می‌باشد که در n مرتبه ماتریس A است.

مثال ۸: جواب دستگاه زیر را با روش چولسکی به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}x_1+4x_2+5x_3&=10\\ 4x_1+20x_2+32x_3&=56\\ 5x_1+32x_2+64x_3&=101\end{aligned}$$

و دترمینان ماتریس ضرایب را با تجزیه چولسکی تعیین می‌کنیم.

حل: ماتریس ضرایب دستگاه، یک ماتریس متقارن مثبت معین است (چرا؟) پس ماتریس ضرایب یعنی A را می‌توان به فرم $A=LL^T$ تجزیه کرد و داریم:

$$\begin{bmatrix}\ell_{11} & 0 & 0\\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0\\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ell_{11} & \ell_{21} & \ell_{31}\\ 0 & \ell_{22} & \ell_{32}\\ 0 & 0 & \ell_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 20 & 32\\ 5 & 32 & 64\end{bmatrix}$$

با ضرب ماتریس‌ها خواهیم داشت:

$$\ell_{11}^2 = 1 \Rightarrow \ell_{11} = \pm 1$$

ما $\ell_{11} = 1$ می‌گیریم، بنابراین:

$$\ell_{11}\ell_{21} = 4 \Rightarrow \ell_{21} = 4$$

$$\ell_{11}\ell_{31} = 5 \Rightarrow \ell_{31} = 5$$

$$\ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 = 20 \Rightarrow \ell_{22} = \pm 2$$

ما $\ell_{22} = 2$ می‌گیریم، لذا:

$$\ell_{21}\ell_{31} + \ell_{22}\ell_{32} = 32 \Rightarrow \ell_{32} = 6$$

$$\ell_{31}^2 + \ell_{32}^2 + \ell_{33}^2 = 64 \Rightarrow \ell_{33} = \pm\sqrt{3}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

حال مشابه مثال (۵) بقیه مراحل را انجام داده و به دست می‌آوریم:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

چون $A = LL^T$، پس داریم:

$$\det A = \det(L)\det(L^T) = (\det(L))^2 = (1\times 2\times\sqrt{3})^2 = 12$$

یادداشت ۳ : در روش‌های حذفی گاوس، گاوس جردن و تجزیه LU وقتی محاسبات به طور واقعی انجام شود، به جواب واقعی می‌رسیم. اما اگر محاسبات با خطا مواجه باشند، خطای محاسباتی ضرایب باعث می‌گردد که از جواب واقعی دور شویم. این موضوع در مثال مشاهده می‌شود، البته این مشکل را می‌توان با **محورگیری جزیی (یا محورگیری ستونی ماکزیمال)** رفع نمود.

مثال ۹: جواب دستگاه خطی زیر را با روش حذفی پسرو گاوس با یک ماشین حساب چهاررقمی با گرد کردن به دست می‌آوریم که دارای جواب دقیق $x_1 = 10.00$ و $x_2 = 1.000$ می‌باشد.

$$\begin{cases} 0.00300x_1 + 59.14x_2 = 59.17 \\ 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78 \end{cases}$$

حل: ماتریس افزوده دستگاه به صورت زیر است:

$$[A:B] = \left[\begin{array}{cc|c} 0.00300 & 59.14 & 59.17 \\ 5.291 & -6.130 & 46.78 \end{array}\right] \xrightarrow[\alpha = \frac{-5.291}{0.00300}]{\alpha R_1 + R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 0.00300 & 59.14 & 59.17 \\ 0 & -104300 & -104400 \end{array}\right]$$

توجه داشته باشید که $\alpha = -1763.66.. \simeq -1764$ می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت، $x_2 = 1.001$ و $x_1 = -10.00$ که خطای x_1 حدود 20 می‌باشد.

محورگیری: دلیل خطای خاص در مثال (۹) روشن است. زیرا که عنصر محوری a_{11} یعنی 0.003 کوچک است و $|\alpha|$ مقدار بزرگی است برای رفع این مشکل از **محورگیری جزیی** استفاده می‌کنیم، یعنی اگر $|a_{P1}| = \max\limits_{1\le i\le n}|a_{i1}|$، آن‌گاه سطر Pام را با سطر یکم تعویض کرده و سپس به صفر کردن زیر a_{P1} می‌پردازیم. پس از این مرحله اگر $|a_{P2}| = \max\limits_{2\le i\le n}|a_{i2}|$، آن‌گاه سطر Pام را با سطر دوم

تعویض و عناصر زیر a_{P2} را با اعمال سطری مقدماتی صفر می‌کنیم و این مراحل را ادامه می‌دهیم تا A تبدیل به یک ماتریس بالا مثلثی گردد. در مثال (۹) اگر جای سطر اول و دوم را در ماتریس افزوده جابه‌جا کنیم، خواهیم داشت:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5.291 & -6.130 & 46.78 \\ 0.003 & 59.14 & 59.17 \end{array}\right] \xrightarrow[\beta=-0.003/5.291]{\beta R_1+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 5.291 & -6.130 & 46.78 \\ 0 & 59.143 & 59.143 \end{array}\right]$$

و با جایگزینی پسرو داریم $x_2 = 1.000$ و $x_1 = 10.00$.

روش حذفی پسرو گاوس با محورگیری جزیی در بعضی موارد کارساز نیست، برای نمونه ماتریس زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

اگر با محورگیری جزجزیی جلو برویم ماتریس A تبدیل به ماتریس زیر می‌شود.

$$A\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

حال اگر A را یک ماتریس مربعی 300×300 به صورت فوق در نظر بگیریم و روش حذفی گاوس با محورگیری جزجزیی را انجام دهیم اعداد خیلی بزرگ می‌شوند و داریم:

$$a_{300,300} = 2^{229}$$

این اشکال با **محورگیری کلی** قابل رفع است.

محورگیری کلی: هرچند مثال (۹) نقش محورگیری جزیی را در روش حذفی گاوس نشان می‌دهد، اما با توجه به این‌که ضرب اعداد بزرگ باعث افزایش خطا می‌شوند و از طرفی دیگر امکان وجود اعداد بزرگ در ستون‌های دیگر وجود دارد، لذا محورگیری جزیی بدون اثر می‌شود و محورگیری کلی رفع مشکل خواهد کرد. یعنی اگر $|a_{pq}| = \max\limits_{1\le i,j\le n}|a_{i,j}|$ آن‌گاه سطر Pام را با سطر اول و ستون q-ام را با ستون اول جابه‌جا و جای مجهول x_q را با x_1 عوض می‌کنیم، سپس به صفر کردن عناصر زیر a_{11} جدید (عناصر زیر a_{pq}) می‌پردازیم. حال اگر $|a_{rs}| = \max\limits_{2\le i,j\le n}|a_{i,j}|$ آن‌گاه سطر rام را با سطر دوم و ستون sام را با ستون دوم عوض کرده (جای مجهول x_s را با مجهول x_2 عوض می‌کنیم) و سپس به صفر کردن عناصر زیر a_{22} جدید(عناصر زیر a_{rs})می‌پردازیم و به همین شیوه روند را ادامه می‌دهیم، تا ماتریس A به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل گردد.

۷ . ۴ تخمین خطا

یک راه تخمین دقت یک جواب تقریبی دستگاه خطی، تعیین آن است که تقریب به چه نزدیکی در دستگاه صدق می‌کند.

فرض کنید $\tilde{X}$ تقریبی از جواب دستگاه $AX=B$ باشد، **بردار مانده** برای $\tilde{X}$ نسبت به این دستگاه بردار $r=B-A\tilde{X}$ تعریف می‌شود. به طور شهودی انتظار می‌رود که وقتی $\|r\|$ کوچک باشد، $\|X-\tilde{X}\|$ نیز به همین وضع کوچک باشد. اگرچه اغلب چنین است ولی در عمل دستگاه‌هایی وجود دارد که چنین نیستند.

مثال ۱۰: دستگاه خطی زیر را در نظر می‌گیریم که جواب واقعی آن $X=[1,1]^T$ می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1.0001 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 3.0001 \end{bmatrix}$$

تقریب $\tilde{X}=[3,0]^T$ به جواب دستگاه، دارای بردار مانده زیر است:

$$r=b-A\tilde{X}=\begin{bmatrix}3\\3.0001\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&2\\1.0001&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-0.0002\end{bmatrix}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\|r\|_\infty=0.0002$$

اگر چه نرم بردارمانده کوچک است ولی تقریب $\tilde{X}=[3,0]^T$ کاملاً پرت است، زیرا که $\|X-\tilde{X}\|_\infty=2$ می‌باشد.

به دستگاه‌هایی نظیر دستگاه مثال (۱۰) **دستگاه بد وضع** یا **بد حالت** گویند.

اکنون معیاری برای تشخیص بد حالت بودن دستگاه $AX=B$ ارایه می‌دهیم، چون $r=B-A\tilde{X}$، پس داریم:

$$r=b-A\tilde{X}=AX-A\tilde{x}=A\left(X-\tilde{X}\right)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$X-\tilde{X}=A^{-1}r$$

با به‌کارگیری $\|Ax\|\le\|A\|\|X\|$ داریم:

$$\|X-\tilde{X}\|=\|A^{-1}r\|\le\|A^{-1}\|\|r\|$$

چون $B=AX$ پس $\|B\|\le\|A\|\|X\|$، بنابراین:

$$\frac{\|X-\tilde{X}\|}{\|X\|}\le\|A\|\|A^{-1}\|\left(\frac{\|r\|}{\|B\|}\right) \qquad (۵)$$

در رابطه (۵) مشاهده می‌شود که خطای نسبی $\frac{\|X-\tilde{X}\|}{\|X\|}$ علاوه بر اندازه بردار مانده $\|r\|$ به طور مستقیم به عدد $k(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$ که به **عدد حالت** ماتریس A معروف است، وابسته می‌باشد. چون برای هر ماتریس نامنفرد A داریم:

$$1=\|I\|=\|AA^{-1}\|\le\|A\|\|A^{-1}\|=k(A)$$

پس اگر $k(A)$ نزدیک یک باشد، ماتریس A یک ماتریس **خوش حالت** یا **خوش وضع** نامیده شود و وقتی به طور قابل ملاحظه‌ای بزرگ‌تر از یک باشد ماتریس **بد حالت** یا **بد وضع** نامیده می‌شود.

به عبارت دیگر دستگاه بد حالت $AX=B$ متناظر با تغییرات کوچکی در A یا B حساس می‌شود.

در مثال (۱۰) مشاهده می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\1.0001&2\end{bmatrix}\ ,\ A^{-1}=\begin{bmatrix}-10000&10000\\5000.5&-5000\end{bmatrix}$$

چون $\|A\|_\infty=3.0001$ و $\|A^{-1}\|_\infty=20000$، پس:

$$k_\infty(A)=\|A\|_\infty\|A^{-1}\|_\infty=60002$$

بنابراین می‌توان قبل از حل، تشخیص داد که دستگاه مثال (۱۰) بد حالت است.

یادداشت ۴ : اگر f یک تابع پیوسته بر بازه $[0\,,1]$ باشد، ماتریس ضرایب دستگاه معادلات نرمال چند جمله‌ای کمترین مربعات درجه n به صورت زیر است که به ماتریس هیلبرت معروف است.

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های H_n بسیار بد حالت هستند و وقتی $n \to +\infty$ سریعاً $k(H_n) \to +\infty$. مثلاً:

$$k_\infty(H_3) = 748 \qquad , \qquad k_\infty(H_6) = 2.9\times10^6$$

۷ . ۵ روش‌های تکراری برای حل دستگاه‌های خطی

یک روش تکراری برای حل دستگاه خطی $AX = B$، با یک تقریب اولیه $x^{(0)}$ برای جواب X شروع می‌شود و دنباله‌ای از بردارهای $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty}$ تولید می‌گردد، که در صورت همگرایی روش، به X همگراست. شیوه کار بدین صورت است که دستگاه $AX = B$ را به دستگاه هم ارز آن به شکل $X = TX + C$ تبدیل می‌کنیم و با انتخاب بردار اولیه $X^{(0)}$ دنباله بردارهای تقریب جواب به صورت $X^{(k)} = TX^{(k-1)} + C$ به ازای $k = 0,1,2,\ldots$ تولید می‌شود. با کمی تأمل، روش تکرار ساده در فصل دوم تداعی می‌شود.

روش‌های تکراری برای حل دستگاه‌های خطی روش‌های مناسب برای به‌کارگیری در کامپیوتر می‌باشند، به ویژه اگر درایه‌های صفر ماتریس ضرایب دستگاه زیاد باشد. روش‌های تکراری بر روش‌های مستقیم ارجحیت دارند، که معروف‌ترین آن‌ها **روش ژاکوبی** و **گاوس سایدل** می‌باشد، که در زیر مورد بحث قرار می‌گیرد.

۷ . ۵ . ۱ روش ژاکوبی

در این روش ابتدا دستگاه خطی (۱) را به صورت $X = TX + C$ در می‌آوریم برای این منظور معادلات دستگاه (۱) را به گونه‌ای مرتب می‌کنیم که برای $i = 1,2,\ldots,n$ داشته باشیم $a_{ii} \neq 0$.

سپس در معادله iام، x_i را برحسب سایر مجهولات به ازای $i = 1,2,\ldots,n$ به دست می‌آوریم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - 0 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1 - 0 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n\right) \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - a_{n3}x_3 - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1} - 0\right) \end{cases} \qquad (۶)$$

فرض کنیم $X^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)^T$ یک تقریب اولیه از جواب دستگاه (۱) باشد، با جانشانی این تقریب اولیه در سمت راست (۶) خواهیم داشت:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - 0 - a_{12}x_2^{(0)} - \dots - a_{1n}x_n^{(0)}\right)$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - \dots - a_{2n}x_n^{(0)}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(0)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(0)}\right)$$

بنابراین $X^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}\right)^T$ تقریب جواب دستگاه در مرحله اول است. با جانشانی $X^{(1)}$ در طرف راست دستگاه (۶)، $X^{(2)}$ به دست می‌آید. با ادامه روند، دنباله $X^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right)^T$ ایجاد می‌شود که در صورت همگرایی روش، به X همگراست.

تعریف ۲: ماتریس $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ را یک ماتریس غالب قطری اکید گویند، هرگاه:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad , i = 1, 2, \dots, n$$

یعنی قدر مطلق هر درایه روی قطر اصلی از حاصل جمع قدرمطلق سایر درایه‌های همان سطر به طور اکید بیش‌تر باشد.

مثال ۱۱: ماتریس زیر غالب قطری اکید است:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -2 & 3 \\ 2 & 20 & 4 \\ -4 & 5 & -40 \end{bmatrix}$$

زیرا که

$$|a_{11}| = 10 > |-2| + |3|$$

$$|a_{22}| = 20 > |2| + |4|$$

$$|a_{33}| = 40 > |-4| + |5|$$

قضیه ۵: اگر A ماتریس غالب قطری اکید باشد، آن‌گاه:

الف) ماتریس A معکوس‌پذیر است.

ب) روش ژاکوبی برای حل دستگاه خطی $AX = B$ برای هر تقریب اولیه $X^{(0)}$، همگرا به X است.

مثال ۱۲: آیا روش ژاکوبی برای حل دستگاه خطی زیر به ازای تقریب اولیه $X^{(0)} = (0.5, 0.6, 0.7)^T$ همگراست. چرا ؟ در این صورت تقریب جواب دستگاه را در مرحله پنجم، با نقطه شروع فوق بدست آورید.

$$\begin{aligned} 40x_1 - x_2 + x_3 &= 40 \\ x_1 + 80x_2 - 2x_3 &= 79 \\ 2x_1 - 3x_2 + 100x_3 &= 99 \end{aligned} \qquad (۷)$$

حل: ماتریس ضرایب دستگاه یک ماتریس غالب قطری اکید است، پس برای هر تقریب اولیه $x^{(0)}$، روش ژاکوبی همگراست. از دستگاه (۷) داریم:

$$x_1 = \frac{1}{40}(40 + x_2 - x_3)$$
$$x_2 = \frac{1}{80}(79 - x_1 + 2x_3) \qquad (۸)$$
$$x_3 = \frac{1}{100}(99 - 2x_1 + 3x_2)$$

با جانشانی تقریب اولیه $X^{(0)} = (0.5, 0.6, 0.7)^T$ در طرف راست (۸)، داریم:

$$X^{(1)} = (0.9975\ ,\ 0.99875\ ,\ 0.998)^T$$

با ادامه روند، خواهیم داشت:

$$X^{(2)} = (1.00001817\ ,\ 0.99998125\ ,\ 1.0000125)^T$$
$$X^{(3)} = (0.999999218\ ,\ 1.000000078\ ,\ 0.999999062)^T$$
$$X^{(4)} = (1.000000025\ ,\ 0.99999986\ ,\ 1.000000018)^T$$
$$X^{(5)} = (0.999999999\ ,\ 1.000000000\ ,\ 0.999999999)^T$$

تصمیم توقف پس از پنج تکرار بر واقعیت زیر استوار است:

$$\frac{\|X^{(5)} - X^{(4)}\|_\infty}{\|X^{(5)}\|_\infty} = \frac{2.6\times10^{-8}}{1} < 10^{-7}$$

که نشان می‌دهد $X^{(5)}$ احتمالاً به حد کافی دقیق است. چون جواب واقعی این دستگاه $X = (1,1,1)^T$ می‌باشد، پس:

$$\|X^{(5)} - X\|_\infty = 10^{-9}$$

لذا $X^{(5)}$ تقریب خوبی برای جواب دستگاه است.

یادداشت ۵ : ممکن است ماتریس ضرایب دستگاه غالب قطری اکید نباشد. اما با اعمال سطری مقدماتی، می‌توان دستگاه معادلی ساخت که ماتریس ضرایب آن غالب قطری اکید باشد.

۲.۵.۷ روش گاوس سایدل

در این روش همانند روش ژاکوبی دستگاه خطی (۱) را به صورت $X = TX + C$ می‌نویسیم. فرض کنیم دستگاه خطی (۱) به صورت دستگاه (۶) نوشته شده باشد و $X^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)^T$ یک تقریب اولیه از جواب دستگاه (۱) باشد. با جانشانی این تقریب اولیه در اولین معادله دستگاه (۶) به دست می‌آوریم:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - 0 - a_{12}x_2^{(0)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(0)}\right)$$

با جانشانی $\left(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)^T$ در دومین معادله دستگاه (۶) به دست می‌آوریم:

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - 0 - a_{23}x_3^{(0)} - \ldots - a_{2n}x_2^{(0)}\right)$$

با ادامه روند و جانشانی در معادله $(n-1)$ام و nام دستگاه (۶) خواهیم داشت:

$$x_{n-1}^{(1)} = \frac{1}{a_{n-1\,n-1}}\left(b_{n-1} - a_{n-11}x_1^{(1)} - a_{n-12}x_2^{(1)} - \ldots - a_{n-1n-2}x_{n-2}^{(1)} - a_{n-1n}x_n^{(0)}\right)$$
$$x_n^{(1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1^{(1)} - a_{n2}x_2^{(1)} - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(1)}\right)$$

لذا در مرحله اول گاوس سایدل داریم:

$$X^{(1)}=\left(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\dots,x_n^{(1)}\right)^T$$

در واقع در روش گاوس سایدل بلافاصله از بهبود یافته‌ترین تقریب‌ها استفاده می‌کنیم با ادامه روند دنباله $\left\{X^{(k)}\right\}_{k=0}^{+\infty}$ ساخته می‌شود، که، اگر ماتریس A غالب قطری اکید باشد روش برای هر تقریب اولیه $X^{(0)}$، همگرا به X است.

معیار توقف روش‌های تکراری: اگر برای $\varepsilon>0$ مفروض داشته باشیم:

الف) $\left\|X^{(k)}-X^{(k-1)}\right\|<\varepsilon$ ب) $\dfrac{\left\|X^{(k)}-X^{(k-1)}\right\|_\infty}{\left\|X^{(k)}\right\|}<\varepsilon$

آن‌گاه:

$$X\simeq X^{(k)}$$

مثال ۱۳: جواب دستگاه مثال (۱۲) را با تقریب اولیه $X^{(0)}=(0.5\ ,0.6\ ,0.7)$ با روش گاوس ـ سایدل در مرحله چهارم برآورد کنید.

حل: با به کارگیری روش گاوس سایدل و دستگاه (۸) و تقریب اولیه $X^{(0)}$ خواهیم داشت:

$$X^{(1)}=(0.9975\ ,0.99253125\ ,0.999825937)^T$$
$$X^{(2)}=(0.999817632\ ,0.999997928\ ,1.000003585)^T$$
$$X^{(3)}=(0.999999858\ ,1.000000091\ ,1.000000006)^T$$
$$X^{(4)}=(1.000000002\ ,1.000000000\ ,1.000000000)^T$$

چون جواب واقعی دستگاه $X=(1,1,1)^T$ می‌باشد، پس

$$\left\|X-X^{(4)}\right\|_\infty=0.000000002$$

یادداشت ۶ : روش گاوس سایدل درصورت همگرایی از روش ژاکوبی سریع‌تر است و به فضای حافظه کمتری نیاز دارد.

۶.۷ دستگاه‌های معادلات غیرخطی

در این بخش دو روش در حل دستگاه‌های معادلات غیرخطی را مورد بررسی قرار می‌دهیم یکی به نام روش نقطه ثابت (تکرار ساده) و دومی روش نیوتن است، که دقیقا تعمیم روش تکرار ساده و نیوتن فصل دوم برای حل معادلات $f(x)=0$ می‌باشد.

۱.۶.۷ روش تکرار ساده یا نقطه ثابت

دستگاه غیرخطی n معادله با n مجهول $x_1,x_2,\dots,x_n$ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)&=0\\f_2(x_1,x_2,\dots,x_n)&=0\\&\vdots\\f_n(x_1,x_2,\dots,x_n)&=0\end{aligned}\qquad(۹)$$

اگر بتوان از معادله iام ، x_i را برحسب سایر مجهولات برای $i=1,2,...,n$ به دست آورد، داریم:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= g_1(x_2,x_3,...,x_n)\\
x_2 &= g_2(x_1,x_3,...,x_n)\\
&\vdots\\
x_n &= g_n(x_1,x_2,...x_{n-1})
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

اگر $X^{(0)}=\left(x_1^{(0)},...,x_n^{(0)}\right)^T$ یک تقریب اولیه از جواب دستگاه (۹) باشد، در این صورت دنباله تکراری $X^{(k+1)}=g(X^k)$ برای $k=0,1,2,...$ تحت شرایطی از g و $X^{(0)}$ همگرا به جواب دستگاه (۹) می‌باشد، که در آن، $g=[g_1,g_2,...,g_2]^T$ می‌باشد. شرایط همگرایی مشابه شرایط همگرایی برای حالت یک بعدی است، که از بیان آن صرف‌نظر می‌شود.

مثال ۱۴: جواب دستگاه زیر را با روش تکرار ساده با تقریب اولیه $X^{(0)}=(0.1\,,\,0.1\,,-0.1)^T$ به گونه‌ای برآورد کنید، که $\left\|X^{(k)}-X^{(K-1)}\right\|_\infty<10^{-5}$ باشد.

$$
\begin{cases}
3x_1-\operatorname{Cos}(x_2x_3)-\dfrac{1}{2}=0\\
x_1^2-81(x_2+0.1)^2+\operatorname{Sin}(x_3)+1.06=0\\
e^{-x_1x_2}+20x_3+\dfrac{10\pi-3}{3}=0
\end{cases}
\qquad (11)
$$

حل: در دستگاه (۱۱) از معادله iام برای $i=1,2,3$، x_i را برحسب سایر مجهولات به دست می‌آوریم و خواهیم داشت:

$$
\begin{cases}
x_1=\dfrac{1}{3}\operatorname{Cos}(x_2x_3)+\dfrac{1}{6}\\
x_2=\dfrac{1}{9}\sqrt{x_1^2+\operatorname{Sin}(x_3)+1.06}-0.1\\
x_3=\dfrac{-1}{20}\left(e^{-x_1x_2}+\dfrac{10\pi-3}{3}\right)
\end{cases}
$$

بنابراین دنباله $X^{(k+1)}=g\left(X^{(k)}\right)$ به صورت زیر است:

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)}=\dfrac{1}{3}\operatorname{Cos}\left(x_2^{(k)}x_3^{(k)}\right)+\dfrac{1}{6}\\
x_2^{k+1}=\dfrac{1}{9}\sqrt{\left(x_1^{(k)}\right)^2+\operatorname{Sin}\left(x_3^{(k)}\right)+1.06}-0.1\\
x_3^{(k+1)}=\dfrac{-1}{20}e^{-x_2^{(k)}x_3^{(k)}}-\dfrac{10\pi-3}{3}
\end{cases}
$$

نتایج به ازای $k=1,2,...,5$ در جدول زیر درج گردیده است.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\left\|X^{(k)}-X^{(k-1)}\right\|_\infty$
0	0.10000000	0.10000000	-0.1000000	-
1	0.4999833	0.0944115	-0.523110127	0.423
2	0.49999593	0.0002557	- 0.52336331	9.4×10^{-3}
3	0.50000000	0.00001234	-0.52359814	2.3×10^{-4}
4	0.50000000	0.00000003	-0.52359847	1.2×10^{-5}
5	0.50000000	0.00000002	-0.52359877	3.1×10^{-7}

بنابراین تقریب جواب دستگاه به صورت زیر است:

$$X\simeq X^{(5)}$$

چون جواب واقعی دستگاه $X=\left(0.5,0,\frac{-\pi}{6}\right)^T$ است، خطای واقعی زیر را داریم:

$$\left\|X-X^{(5)}\right\|_\infty \leq 2\times10^{-8}$$

مشاهده می‌شود که $X^{(5)}$ تقریب خوبی برای جواب دستگاه است.

یک راه ممکن برای شتاب بخشیدن به همگرایی آن است که آخرین تقریب‌های $x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots,x_{i-1}^{(k)}$ را به جای $x_1^{(k-1)},x_2^{(k-1)},\ldots,x_{i-1}^{(k-1)}$ برای محاسبه $x_i^{(k)}$ همانند روش گاوس ـ سایدل برای دستگاه‌های خطی به کار بریم. نتایج انجام این کار برای مثال (۱۴) با تقریب اولیه $X^{(0)}=(0.1,0.1,-0.1)$، در جدول زیر درج گردیده است.

K	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\left\|X^{(k)}-X^{(k-1)}\right\|_\infty$
0	0.10000000	0.10000000	-0.10000000	_
1	0.49998333	0.2222979	-0.52304613	0.423
2	0.49997747	0.0002815	- 0.52359807	2.2×10^{-2}
3	0.50000000	0.00000007	- 0.52359877	2.8×10^{-5}
4	0.50000000	0.00000000	- 0.52359877	3.8×10^{-8}

تکرار $X^{(4)}$ تا حدود 10^{-7} دقیق است، لذا برای این مسأله با استفاده از روش گاوس ـ سایدل واقعاً به همگرایی سرعت داده شده است. اما باید متذکر شد که وضعیت همیشه این چنین نمی‌باشد.

۲.۶.۷ روش نیوتن

در مثال (۱۴) به آسانی توانستیم دستگاه را به صورت $X=g(X)$ بنویسیم اما وضعیت اغلب چنین نمی‌باشد بنابراین به دنبال روندی هستیم که بتواند برای یک مسأله کلی به کار رود. این روند همان تعمیم روش نیوتن برای حل معادله $f(x)=0$ است. به یاد آورید که دنباله تکراری نیوتن برای $f(x)=0$ دنباله $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$، بود که اگر $f'(\alpha)\neq0$ دنباله دارای مرتبه همگرایی ۲ است. با به کار بردن روشی مشابه در حالت n بعدی، یک ماتریس معکوس‌پذیر از مرتبه $n\times n$ مانند $A(X)$ وارد می‌شود، که در آن $X_{n+1}=X_n-A^{-1}(x_n)F(X_n)$ همگرایی درجه دوم به جواب $F(X)=0$ می‌دهد. البته با این فرض که ماتریس $A(X)$ در نقطه جواب دستگاه $F(X)=0$ نامنفرد باشد. برای راحتی روش را برای دستگاه‌های غیرخطی دو معادله با دو مجهول زیر بیان می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \qquad (۱۲)$$

که در آن f و g توابع معلوم غیرخطی برحسب x و y می‌باشند. فرض کنیم $X_0=(x_0,y_0)$ تقریبی از جواب دستگاه (۱۲) یعنی تقریب (α,β) باشد، پس h_0 و k_0 موجود است، که:

$$\begin{cases} \alpha=x_0+h_0 \\ \beta=y_0+k_0 \end{cases}$$

اگر بتوان h_0 و k_0 را تعیین نمود، به جواب مطلوب می‌رسیم. چون عملاً این کار امکان‌پذیر نیست، لذا سعی می‌کنیم تقریب‌هایی از h_0 و k_0 به دست آوریم. برای این منظور از بسط تیلر توابع دو متغیره استفاده می‌کنیم، پس:

$$f(\alpha,\beta)=f(x_0+h_0\,,\,y_0+k_0)=f(x_0,y_0)+h_0f_x(x_0,y_0)+k_0f_y(x_0,y_0)$$
$$+\frac{1}{2!}\left(h_0^2f_{xx}(x_0y_0)+2h_0k_0f_{xy}(x_0,y_0)+k_0^2f_{yy}(x_0,y_0)\right)+\ldots$$

اگر (x_0, y_0) تقریب مناسبی از (α, β) باشد، آن‌گاه h_0 و k_0 کوچک خواهند بود و می‌توان از جملات توان دوم به بعد، به علت کوچکی صرف‌نظر کرد پس داریم:

$$\begin{cases} h_0 f_x(x_0, y_0) + k_0 f_y(x_0, y_0) = -f(x_0, y_0) \\ h_0 g_x(x_0, y_0) + k_0 g_y(x_0, y_0) = -g(x_0, y_0) \end{cases} \quad (۱۳)$$

فرض کنیم ماتریس $J(X)$ به صورت زیر تعریف شود (ماتریس ژاکوبین):

$$J(X) = \begin{bmatrix} f_x(X), & f_y(X) \\ g_x(X), & g_y(X) \end{bmatrix} \quad (۱۴)$$

بنابراین اگر $|J(X_0)| \neq 0$، دستگاه خطی (۱۳) با مجهول h_0 و k_0 جواب یکتا دارد و از آن h_0 و k_0 به دست می‌آید. پس از تعیین آنها قرار می‌دهیم $\begin{cases} x_1 = x_0 + h_0 \\ y_1 = y_0 + k_0 \end{cases}$، بنابراین h_1 و k_1 موجود هستند، که

$$\begin{cases} \alpha = x_1 + h_1 \\ \beta = y_1 + k_1 \end{cases}$$

با ادامه روند قبل، دستگاه (۱۳)، به دستگاه زیر تبدیل می‌شود که از آن h_1 و k_1 با فرض این‌که $|J(X_1)| \neq 0$ باشد، به دست می‌آیند.

$$\begin{cases} h_1 f_x(x_1, y_1) + k_1 f_y(x_1, y_1) = -f(x_1, y_1) \\ h_1 g_x(x_1, y_1) + k_1 g_y(x_1, y_1) = -g(x_1, y_1) \end{cases} \quad (۱۵)$$

پس ازتعیین h_1 و k_1 از دستگاه خطی (۱۵)، قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + h_1 \\ y_2 = y_1 + k_1 \end{cases}$$

با ادامه روند در مرحله $(n+1)$ ام داریم:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h_n \\ y_{n+1} = y_n + k_n \end{cases} \quad (۱۶)$$

که h_n و k_n جواب دستگاه خطی زیر با فرض $|J(X_n)| \neq 0$ می‌باشد.

$$\begin{cases} h_n f_x(x_n, y_n) + k_n f_y(x_n, y_n) = -f(x_n, y_n) \\ h_n g_x(x_n, y_n) + k_n g_y(x_n, y_n) = -g(x_n, y_n) \end{cases} \quad (۱۷)$$

توجه داشته باشید که اگر (۱۶) و (۱۷) را به فرم ماتریسی زیر در آوریم:

$$X_{n+1} = X_n + H_n$$
$$J(X_n) H_n = -F(X_n)$$

آن‌گاه داریم:

$$X_{n+1} = X_n - J^{-1}(X_n) F(X_n)$$

که تعمیم دنباله نیوتن برای معادله $f(x) = 0$ است.

یادداشت ۷ : اولین ضعف روش آن است که در هر تکرار لازم است بررسی شود که دترمینان $J(X_n)$ مخالف صفر است یا نه. مشکل دیگر و مهمتر همگرایی روش است. برای این‌که روش همگرا باشد، باید تقریب اولیه X_0 به جواب نزدیک باشد.

مثال ۱۵: دستگاه غیرخطی زیر را با روش نیوتن با معیار توقف $\|X_n - X_{n-1}\|_\infty < 10^{-9}$ و با تقریب اولیه $X_0 = (3.5\ ,\ 3.2)^T$ حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \qquad (۱۷)$$

حل: دستگاه (۱۷) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} f(x,y) = x^2 - y^2 - 5 = 0 \\ g(x,y) = x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

واضح است که $f_x = 2x$ و $f_y = -2y$ و $g_x = 2x$ و $g_y = 2y$، بنابراین دستگاه (۱۷) به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} 2x_n h_n - 2y_n k_n = -(x_n^2 - y_n^2 - 5) \\ 2x_n h_n + 2y_n k_n = -(x_n^2 + y_n^2 - 25) \end{cases}$$

لذا خواهیم داشت:

$$h_n = \frac{15 - x_n^2}{2x_n} \quad , \quad k_n = \frac{10 - y_n^2}{2y_n}$$

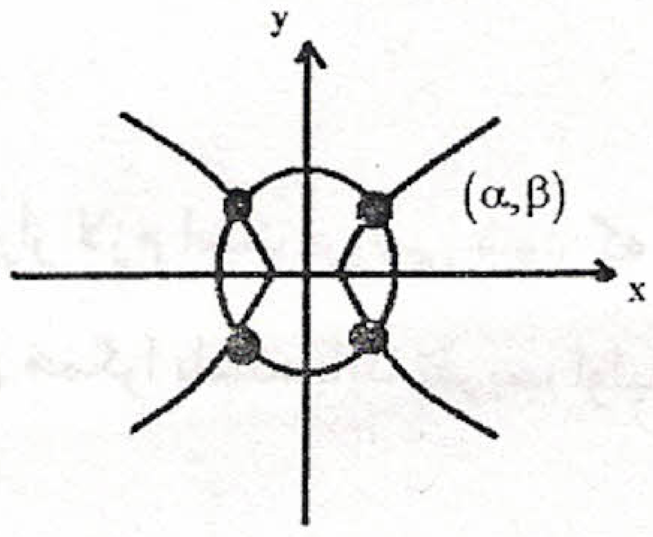
که با به کارگیری (۱۶) داریم:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{15 + x_n^2}{2x_n} \\ y_{n+1} = \dfrac{10 + y_n^2}{2y_n} \end{cases} , \ n = 0,1,2,3,....$$

نتایج روش با تقریب اولیه $X_0 = (x_0, y_0) = (3.5\ ,\ 3.2)$، در جدول زیر درج گردیده است.

n	x_n	y_n	$\|X_n - X_{n-1}\|_\infty$
0	3.5	3.2	-
1	3.892857143	3.1625	0.3375
2	3.873034076	3.162277668	0.0198
3	3.872983347	3.162277660	$10^{-5} \times 5.0729$
4	3.872983346	3.16277660	10^{-9}
5	3.872983346	3.162277660	0

باید توجه داشت که دستگاه (۱۷) چهار ریشه دارد که با تقریب اولیه X_0 جواب واقع در ربع اول را به دست آورده‌ایم (شکل زیر)، که مقدار واقعی آن $\beta = 3.162277660...$ و $\alpha = 3.87298346....$ می‌باشد.



مثال ۱۶: جواب دستگاه مثال (۱۴) را با تقریب اولیه $X^{(0)}=(0.1\,,\,0.1\,,\,-0.1)$ برآورد می‌کنیم که نتایج درجدول زیر درج شده است.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\left\Vert X^{(k)}-X^{(k-1)}\right\Vert_\infty$
0	0.10000000	0.10000000	- 0.10000000	-
1	0.50003702	0.1946686	-0.52152047	0.422
2	0.50004593	0.0158859	- 0.52355711	$10^{-2}\times1.79$
3	0.50000034	0.0001244	- 0.52359845	$10^{-3}\times1.58$
4	0.50000000	0.00000000	-0.52359877	$10^{-5}\times1.24$
5	0.50000000	0.00000000	- 0.52359877	0

جواب واقعی به صورت زیر است:

$$X=\left(0.5\,,\,0\,,\frac{-\pi}{6}\right)^T=(0.5,0,-0.52359877)^T$$

توجه کنید که همگرایی روش نیوتن وقتی یک تکرار نزدیک جواب دستگاه باشد، خیلی سریع می‌شود. این امر همگرایی درجه دوم روش را نزدیک یک جواب، توجیه می‌کند.

مثال‌های متنوع تستی حل شده:

مثال ۱۷: تعداد اعمال ضرب و تقسیم در روش حذفی گاوس پسرو در مرحله بالا مثلثی کردن در حل دستگاه n معادله‌ای با n مجهول ماتریس ضرایب، کدام است؟

۱) $\frac{2n^3+3n^2-5n}{6}$ ۲) $\frac{2n^3-3n^2+5n}{6}$ ۳) $\frac{2n^3-3n^2-5n}{6}$ ۴) $\frac{2n^3+3n^2+5n}{6}$

حل: با توجه به محتوای درس گزینه ۱ صحیح می‌باشد.

مثال ۱۸: تعداد اعمال ضرب و تقسیم در روش حذفی گاوس پسرو در مرحله جایگزینی پسرو در حل دستگاه n معادله‌ای با n مجهول، کدام است؟

۱) $\frac{n^2-n}{2}$ ۲) $\frac{n^2+n}{2}$ ۳) $\frac{n^3-n}{2}$ ۴) $\frac{n^3+n}{2}$

حل: گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

مثال ۱۹: تعداد اعمال حسابی در روش حدفی گاوس در مرحله جایگزینی پسرو در حل یک دستگاه‌خطی، n معادله با n مجهول کدام است؟

۱) n^3 ۲) $\frac{n^3}{2}$ ۳) n^2 ۴) $\frac{n^2}{2}$

حل: گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

مثال ۲۰: تجزیه چولسکی برای ماتریس A قابل اعمال است، اگر:

۱) A متقارن باشد.
۲) A مثبت معین باشد.
۳) A متقارن مثبت معین باشد.
۴) هر سه مورد صحیح می‌باشد.

حل: گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

مثال ۲۱: جواب دستگاه زیر با روش ژاکوبی با تقریب اولیه $X^{(0)}=(0.9,0.9)^T$ در مرحله دوم کدام است؟

$$\begin{cases}4x_1-x_2=3\\x_1+5x_2=6\end{cases}$$

۱) $(1,1)^T$
۲) $(1.005,0.94)^T$
۳) $(0.94,1.005)^T$
۴) $(-0.94,1.005)^T$

حل: از معادله اول و دوم به ترتیب x_1 و x_2 را به دست می‌آوریم:

$$x_1=\frac{1}{4}(3+x_2)$$
$$x_2=\frac{1}{5}(6-x_1)$$

در مرحله اول و دوم ژاکوبی داریم:

$$X^{(1)}=(1.3,1.02)^T$$
$$X^{(2)}=(1.005,0.94)^T$$

پس گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

مثال ۲۲: جواب دستگاه خطی زیر با روش گاوس سایدل با $X^{(0)}=(0.8,0.9,1)^T$ کدام است؟

$$\begin{cases}4x_1-x_2+x_3=3\\x_1+5x_2-x_3=5\\x_1-x_2+10x_3=10\end{cases}$$

۱) $(1.00,1.007,1.005)^T$
۲) $(1.007,1.000,1.005)^T$
۳) $(1.005,1.007,1.00)^T$
۴) $(1.007,1.005,1.000)^T$

حل: از معادله iام به ازای $i=1,2,3$، x_1,x_2,x_3 را به دست می‌آوریم، خواهیم داشت:

$$x_1=\frac{1}{4}(3+x_2-x_3)$$
$$x_2=\frac{1}{5}(5-x_1+x_3)$$
$$x_3=\frac{1}{10}(10-x_1+x_2)$$

با اعمال تقریب اولیه $X^{(0)}$ و جانشانی در طرف راست دستگاه اخیر داریم:

$$X^{(1)}=(0.725,1.055,1.033)^T$$
$$X^{(2)}=(1.007\ ,\ 1.005,1.000)^T$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح می‌باشد.

مثال ۲۳: جواب دستگاه زیر با روش نقطه ثابت با $X^{(0)}=(0.5,0.5)^T$ در مرحله دوم کدام است؟

$$\begin{cases}10x_1-\cos x_2=0\\10x_2-\cos x_1=0\end{cases}$$

۱) $(0.0996,0.0996)^T$ ۲) $(0.0787,0.0878)^T$

۳) $(0.0788\ ,\ 0.0788)^T$ ۴) $(0.0969,0.0969)^T$

حل: از معادله اول و دوم به ترتیب x_1 و x_2 را به دست می‌آوریم، خواهیم داشت:

$$x_1=0.1\cos x_2$$
$$x_2=0.1\cos x_1$$

با اعمال تقریب اولیه $X^{(0)}$ و جانشانی در سمت راست دستگاه اخیر داریم:

$$X^{(1)}=(0.0878,0.0878)^T$$
$$X^{(2)}=(0.0996,0.0996)^T$$

پس گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

مثال ۲۴: با روش نیوتن و تقریب اولیه $X^{(0)}=(0,0)$ جواب دستگاه مثال ۲۳ در مرحله اول کدام است؟

۱) $(0.20\ ,\ 0.20)$ ۲) $(0.10\ ,\ 0.10)$ ۳) $(0.08\ ,\ 0.08)$ ۴) $(0.09\ ,\ 0.09)$

حل: قرار می‌دهیم

$$f(x_1,x_2)=10x_1-\cos x_2$$
$$f(x_1,x_2)=10x_2-\cos x_1$$

برای راحتی فرض می‌کنیم $x_1=x$ و $x_2=y$، پس:

$$f(x,y)=10x-\cos y\ ,\ g(x,y)=10y-x$$
$$f_x=10\ ,\ f_y=\sin y\ ,\ g_x=\sin x\ ,\ g_y=10$$

بنابراین با جانشانی در دستگاه (۱۳) داریم:

$$\begin{cases}10h_0+(\sin y_0)k_0=\cos y_0-10x_0\\(\sin x_0)h_0+10k_0=\cos x_0-10y_0\end{cases}$$

چون $x_0=y_0=0$ بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}10h_0=1\\10k_0=1\end{cases}$$

لذا $h_0=k_0=0.1$، چون $x_1=x_0+h$ و $y_1=y_0+h$ پس $x_1=y_1=0.1$. بنابراین گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

تمرین‌های تشریحی:

۱ـ با روش‌های حذفی پسرو گاوس، پیشرو گاوس و گاوس جردن جواب دستگاه‌های خطی زیر را با محورگیری جزیی به دست آورید.

الف)
$$\begin{cases}10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6\\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25\\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11\\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15\end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases}3x_1 - x_2 + x_3 = 1\\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0\\ 23x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 4\end{cases}$$

۲ـ دستگاه تمرین (۱) قسمت (ب) را با روش کرامر و معکوس ماتریس ضرایب حل کنید.

۳ـ ماتریس هیلبرت زیر را در نظر بگیرید.

$$H_4 = \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7}\end{bmatrix}$$

الف) نرم‌های $\|H_4\|_\infty$ و $\|H_4\|_1$ و $\|H_4\|_2$ را به دست آورید.

ب) عدد حالت ماتریس H_4 را نسبت به سه نرم تعیین کنید.

۴ـ دستگاه‌های تمرین (۱) را با روش دولیتل و کروت حل کنید.

۵ـ در صورتی‌که روش چولسکی برای دستگاه‌های تمرین (۱) قابل اعمال است، جواب آن دستگاه را به دست آورید.

۶ـ دستگاه زیر را در نظر بگیرید که دارای جواب $x_1 = x_2 = 1$ می‌باشد.

$$\begin{bmatrix}1 & 10^4\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10^4\\ 2\end{bmatrix}$$

فرض کنید A ماتریس ضرایب دستگاه باشد.

الف) $\|A\|_\infty$ و $\|A^{-1}\|_\infty$ و سپس عدد حالت A را تعیین کنید.

ب) با روش حذفی با انجام محاسبات تا سه رقم اعشار جواب دستگاه را برآورد کنید (توجه داشته باشید محورگیری جزجزیی تعویض‌هایی را در بر ندارد) و با جواب واقعی مقایسه کنید.

ج) معادله اول را در 10^{-4} ضرب کنید و سپس عدد حالت ماتریس ضرایب دستگاه جدید را نسبت به نرم $\|.\|_\infty$ به دست آورید. سپس با محورگیری جزیی دستگاه جدید را حل کنید.

۷ـ با روش ژاکوبی و گاوس سایدل جواب دستگاه‌های تمرین (۱) با تقریب اولیه $X^{(0)}=0$ به‌گونه‌ای برآورد کنید که $\left\|X^{(k)}-X^{(k-1)}\right\|<10^{-4}$ باشد.

۸ـ جواب دستگاه غیرخطی $\begin{cases} x_1^2+x_2^2-x_1=0 \\ x_1^2-x_2^2-x_2=0 \end{cases}$ را به طور نموداری تقریب بزنید. جواب نموداری را به عنوان تقریب اولیه برای روش نقطه ثابت به کار بگیرید و جواب دستگاه را به گونه‌ای برآورد کنید که $\left\|X^{(k)}-X^{(k-1)}\right\|_\infty<10^{-3}$.

۹ـ دستگاه غیرخطی

$$\begin{cases} x_1^2-10x_1+x_2^2+8=0 \\ x_1x_2^2+x_1-10x_2+8=0 \end{cases}$$

را با روش نقطه ثابت و با تقریب اولیه $X^{(0)}=(1,1)^T$ به گونه‌ای برآورد کنید که $\left\|X^{(k)}-X^{(k-1)}\right\|_\infty<10^{-4}$.

۱۰ـ جواب دستگاه‌های غیرخطی زیر را با روش نیوتن به‌گونه‌ای برآورد کنید که $\left\|X^{(k)}-X^{(k-1)}\right\|_\infty<10^{-7}$.

الف) $\begin{cases} x_1^2+x_2^2-x_1=0 \\ x_1^2-x_2^2-x_2=0 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} 3x_1^2-x_2^2=0 \\ 3x_1x_2^2-x_1^3-1=0 \end{cases}$