مثال: کلیه PI های تابع $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ که به‌وسیله جدول ارزش زیر تعریف شده‌اند را به کمک رویهٔ کویین مک کلاسکی به‌دست آورید:

	x_1	x_2	x_3	x_4	f
m_0	0	0	0	0	1
m_1	0	0	0	1	1
m_2	0	0	1	0	1
m_3	0	0	1	1	0
m_4	0	1	0	0	0
m_5	0	1	0	1	1
m_6	0	1	1	0	0
m_7	0	1	1	1	–
m_8	1	0	0	0	1
m_9	1	0	0	1	0
m_{10}	1	0	1	0	1
m_{11}	1	0	1	1	0
m_{12}	1	1	0	0	0
m_{13}	1	1	0	1	0
m_{14}	1	1	1	0	1
m_{15}	1	1	1	1	1

(1

رده	x_1	x_2	x_3	x_4		
S_0	0	0	0	0	m_0	✓
S_1	0	0	0	1	m_1	✓
	0	0	1	0	m_2	✓
	1	0	0	0	m_8	✓
S_2	0	1	0	1	m_5	✓
	1	0	1	0	m_{10}	✓
S_3	0	1	1	1	m_7	✓
	1	1	1	0	m_{14}	✓
S_4	1	1	1	1	m_{15}	✓

(2

	x_1	x_2	x_3	x_4		
S'_0	0	0	0	–	(m_0, m_1) $\Delta_1 = 1 = (1-0)$	
*	0	0	–	0	(m_0, m_2) $\Delta_1 = 2 = (2-0)$	✓
	–	0	0	0	(m_0, m_8) $\Delta_1 = 8$	✓
S'_1	0	–	0	1	(m_1, m_5) $\Delta_1 = 4$	
*	–	0	1	0	(m_2, m_{10}) $\Delta_1 = 4$	✓
	1	0	–	0	(m_8, m_{10}) $\Delta_1 = 2$	✓
S'_2 *	0	1	–	1	(m_5, m_7) $\Delta_1 = 2$	
*	1	–	1	0	(m_{10}, m_{14}) $\Delta_1 = 4$	
S'_3 *	–	1	1	1	(m_7, m_{15}) $\Delta_1 = 8$	
*	1	1	1	–	(m_{14}, m_{15}) $\Delta_1 = 1$	

(3

	x_1	x_2	x_3	x_4	
S''_0 *	–	0	–	0	m_0, m_2, m_8, m_{10}, $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 8$

مجموعه PI های تابع f: $\{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 , \bar{x}_1\bar{x}_3 x_4 , \bar{x}_1 x_2 x_4 , x_1 x_3 \bar{x}_4 , x_2 x_3 x_4 , x_1 x_2 x_3 , \bar{x}_2\bar{x}_4\}$

توجه نمایید، آن‌هایی که علامت * دارند و حذف نشده‌اند مجموعه کامل از هفت PI را تشکیل می‌دهند.

:Decimal Representation (b)

رویه کویین مک کلاسکی را با استفاده از اندیس دهدهی Minterm ها نیز می‌توان انجام داد. دو مین‌ترم تنها هنگامی قابل ترکیب خواهند بود که تفاوت اندیس آن‌ها توان صحیحی از 2 باشد (مانند 2^k). در جمله حاصل‌ضرب به‌دست آمده از ترکیب کلیه متغیرهای دو مین‌ترم ظاهر می‌شوند، بجز متغیری که ارزش مکانی آن 2^k می‌باشد که باید حذف گردد. (متغیر زاید)

مثال: با فرض $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum(0,1,8,9)$ دو مین‌ترم m_1 , m_9 قابل ترکیب هستند، زیرا: $\Delta = 9-1 = 8 = 2^3$ که در جمله حاصل‌ضرب به‌دست آمده متغیری که وزن آن مساوی 8 می‌باشد زاید است باید حذف گردد.

تذکر: در ترکیب دو جمله حاصل‌ضرب شرط این‌که تفاوت اندیس‌ها توان صحیحی از 2 باشد، لازم هست ولی کافی نیست زیرا دو استثنا وجود دارد:

۱) دو مین‌ترم که تفاوت اندیس آن‌ها توان صحیحی از 2 باشد ولی تعداد یک‌های موجود در اندیس کوچک‌تر بیش از تعداد یک‌های موجود در اندیس بزرگ‌تر باشد قابل ترکیب نخواهند بود. مثلا $m_7(0111), m_9(1001)$ قابل ترکیب نیستند. زیرا هر چند $\Delta_1 = 9-7 = 2^1$ چون در بیش از یک لفظ تفاوت دارند قابل ترکیب نیستند.

۲) دو مین‌ترم که تفاوت اندیس آن‌ها توان صحیح از 2 باشد ولی تعداد یک‌های موجود در دو اندیس با هم برابر باشند، آن‌گاه آن دو مین‌ترم قابل ترکیب نخواهند بود، مانند m_9 , m_5 زیرا هر چند $\Delta_1 = 9-5 = 4 = 2^2$ ولی تعداد یک‌های موجود در دو اندیس با هم برابرند.

ایجاب‌کننده‌هایی را که نمایشگر مجموعه‌های از 2^r نقطه هستند، می‌توان به‌وسیله مجموعه‌های از مین‌ترم‌ها در مبنای 10 نمایش داد. دو ایجاب کننده در صورتی با هم قابل ترکیب خواهند بود، اولاً Δ_1 آن‌ها یکسان، ثانیاً تفاوت اندیس‌های دو مجموعه مقداری ثابت و توان صحیحی از 2 باشد.

در این‌صورت تفاوت اندیس‌های دو مجموعه را با Δ_2 نشان می‌دهند که Δ_2 , Δ_1 نشان‌دهندهٔ مواضع متغیرهای حذف شده خواهد بود.

$$\left.\begin{matrix}(m_0 , m_2) & \Delta_1 = 2 \\ (m_8 , m_{10}) & \Delta_1 = 2\end{matrix}\right\} \Rightarrow (m_0 , m_2 , m_8 , m_{10}) \qquad \Delta_1 = 2 \quad \Delta_2 = 8$$ (تفاوت ثابت بین اندیس‌های دو مجموعه)

$$\left.\begin{matrix} m_8 - m_0 = 8 \\ m_2 - m_{10} = 8 \end{matrix}\right\}$$ تفاوت ثابت بین اندیس‌های دو مجموعه $\leftarrow \Delta_2 = 8$ تفاوت اولیه $\leftarrow \Delta_1 = 2$

مثال: کلیه PIهای تابع $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_1 (0,1,2,5,8,9,10,14,15)+\sum_d (7)$ را با استفاده از نمایش دهدهی برای اندیس مین‌ترم‌ها و با استفاده از روش کویین مک کلاسکی به‌دست آورید:

			x_1	x_2	x_3	x_4
s_0	✓	m_0	0	0	0	0
s_1	✓	m_1	0	0	0	1
	✓	m_2	0	0	1	0
	✓	m_8	1	0	0	0
	✓	m_5	0	1	0	1
s_2	✓	m_6	1	0	0	1
	✓	m_{10}	1	0	1	0
s_3	✓	m_7	0	1	1	1
	✓	m_{13}	1	0	1	1
s_4	✓	m_{15}	1	1	1	1

			x_1	x_2	x_3	x_4
✓	S'_0	$\Delta=1(m_0,m_1)$	0	0	0	–
✓		$\Delta=2(m_0,m_2)$	0	0	–	0
✓		$\Delta=8(m_0,m_8)$	–	0	0	0
✓	S'_1	$\Delta=4(m_1,m_5)$	0	–	0	1
✓		$\Delta=8(m_1,m_9)$	–	0	0	1
✓		$\Delta=8(m_2,m_{10})$	–	0	1	0
✓		$\Delta=2(m_8,m_{10})$	1	0	–	1
✓	S'_2	$\Delta=2(m_7,m_7)$	0	1	–	1
✓		$\Delta=8(m_5,m_{13})$	–	1	0	1
✓		$\Delta=4(m_9,m_{13})$	1	–	0	1
✓	S'_3	$\Delta=8(m_7,m_{15})$	–	1	1	1
✓		$\Delta=2(m_{13},m_{15})$	1	1	–	1

			x_1	x_2	x_3	x_4
S''_0	$\Delta=2$, $\Delta=8$	(0,2,8,10)	-	0	-	0
	$\Delta=8$, $\Delta=1$	(0,1,8,9)	-	0	0	-
S''_1	$\Delta=4$, $\Delta=5$	(1,5,9,13)	-	-	0	1
S''_2	$\Delta=2$, $\Delta=5$	(5,7,13,15)	-	1	-	1

مجموعه PI های تابع $=\left\{\overline{x}_2\overline{x}_4,\overline{x}_2\overline{x}_3,\overline{x}_3\overline{x}_4,x_2x_4\right\}$

تمرین ۱: PI های تابع $f=\sum_{1}(0,1,4,5,6,7,15)+\sum_{d}(8,12)$ را به روش QMC به‌دست آورید.

تمرین ۲: برای توزیع یک لیوان شربت با یخ به قیمت 15 ریال مداری طرح کنید.
(ورودی‌ها 5 و 10 و 20 ریالی).

تولید *PI* های تابع به کمک جدول کارنو: *(Karnough Map)*

از جدول کارنو می‌توان برای ساده کردن توابع بولی استفاده نمود که حداکثر شامل 6 متغیر باشند.

۱ـ جدول کارنو در واقع نمایش دو بعدی از یک فضای n بعدی است که در آن به ازای هر مین‌ترم یک خانه وجود دارد.

۲ـ جدول کارنو برای تابع n متغیری شامل 2^n خانه خواهد بود که در آن خانه‌های مجاور (دو خانه که در یک ضلع مشترکند) فقط در یک لفظ متفاوتند.

۳ـ در جدول کارنو مین‌ترم متناظر با هر خانه را می‌توان با بررسی بر چسب‌های ستون و سطر آن خانه به‌دست آورد.

۴ـ در جدول کارنو دقیقا نصف خانه ها مربوط به $x_i=1$ و نصف دیگر مربوط به $x_i=0$ می‌باشند.

۵ـ در جدول کارنو هر خانه دقیقاً با n خانه دیگر مجاور است.

۶ـ در جدول کارنو سطرهای اول و آخر و ستون‌های چپ و راست با یکدیگر مجاورند.

۷ـ هر تابع بولی را می‌توان با درج نقاط 1 و نامشخص تابع در جدول کارنو نمایش داد (با درک این نکته که مقدار تابع به ازای سایر نقاط صفر می‌باشد).

$x_2 \backslash x_1$	0	1
0	00 m_0 $\bar{x}_1\bar{x}_2$	10 m_1 $x_1\bar{x}_2$
1	01 m_1 $\bar{x}_1 x_2$	11 m_3 $x_1 x_2$

جدول کارنو دومتغیری

$x_3 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
0	m_0	m_2	m_6	m_4
1	m_1	m_3	m_7	m_5

جدول کارنو تابع سه متغیری

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

جدول کارنو تابع چهار متغیری

تمرین: جدول کارنو برای $n = 5$, $n = 6$ را به‌دست آورید. مین‌ترم متناظر با هر خانه را به صورت اندیس‌دهی مشخص نمایید و خانه‌های مجاور با هر خانه را معین نمایید.

مثال: تابع زیر را به وسیله جدول کارنو نمایش دهید:

$$f = \sum_{1}(0,1,6) + \sum_{d}(3)$$

	x_1	x_2	x_3	f
m_0	0	0	0	1
m_1	0	0	1	1
m_2	0	1	0	0
m_3	0	1	1	–
m_4	1	0	0	0
m_5	1	0	1	0
m_6	1	1	0	1
m_7	1	1	1	0

	00	01	11	10
0	0 1	2	6 1	4
1	1 1	3 _	7	5

نکته مهم: چون ایجاب‌کننده‌های یک تابع از ترکیب نقاط 1- و نامشخص تابع به‌وجود می‌آیند که تنها در یک لفظ تفاوت دارند، بنابراین چنین جملاتی در جدول کارنو به صورت گروهی از نقاط 1- و نامشخص مجاور به هم ظاهر می‌شوند، لذا PI های یک تابع را می‌توان با پیدا کردن تمام گروه های 2^k خانه‌ای مجاور که یکی به طور کامل در داخل گروه دیگر نباشند به‌دست آورد.

در واقع برای پیدا کردن Prime Implicatant ها از جدول کارنو باید هر چهار نکته زیر را رعایت نمود:

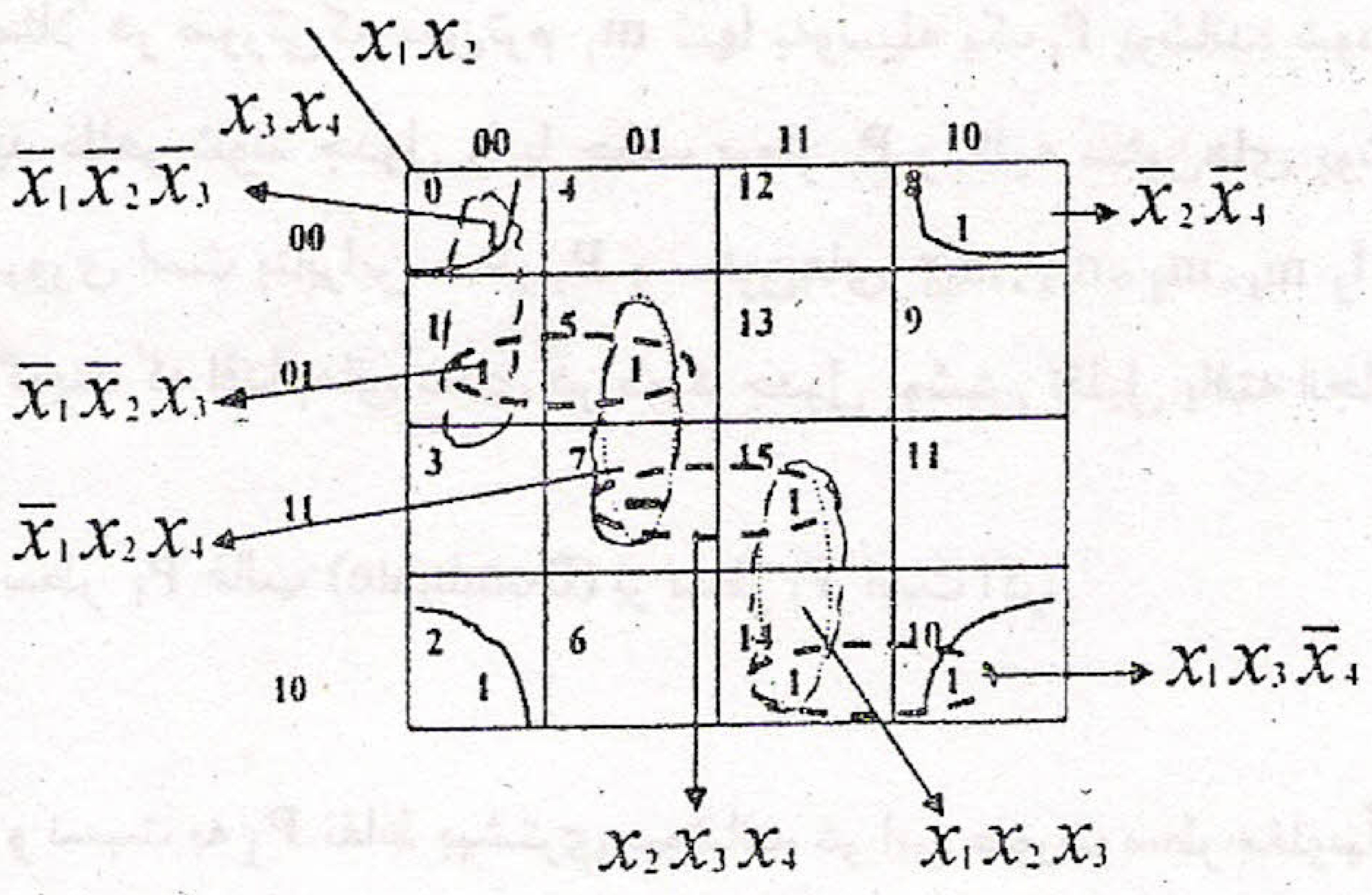
۱) خانه‌های متناظر با نقاط 1- و don't-care مجاور به هم را انتخاب می‌کنیم.

۲) تعداد خانه‌ها باید توان صحیحی از 2 باشد.

۳) تعداد خانه‌های انتخاب شده باید حداکثر تعداد ممکن باشد.

۴) گروهی به‌طور کامل در داخل گروه دیگر نباشد.

مثال: با استفاده از جدول کارنو کلیه PI های تابع $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_1(0,1,2,5,8,9,10,14,15)+\sum_d(7)$ را به‌دست آورید.



انتخاب یک پوشش می‌نیمم از مجموعه PI های تابع:

مساله پوشش عبارت است از انتخاب حداقل تعداد از PIهای تابع با کمترین هزینه به‌طوری‌که هر نقطه 1- تابع حداقل به‌وسیله یکی از PI های تابع پوشانده شود. انتخاب چنین پوششی را می‌توان به کمک جدول پوشش انجام داد. در جدول پوشش به ازا هر PI یک سطر و به ازای هر یک از نقاط 1- تابع یک ستون وجود دارد. دو ستون اضافی c_1 و c_2 نیز در ارتباط با هزینه‌های مربوط به تعداد ورودی‌ها و تعداد gate ها در جدول پوشش ظاهر می‌شوند. در تقاطع سطر iام و ستون jام، یک درج می‌کنیم. اگر ایجاب کننده نخستین p_i مین‌ترم m_j را بپوشاند.

توجه داشته باشیم که نقاط بی‌تفاوت در جدول پوشش درج نمی‌شوند، زیرا نیازی به پوشش آن‌ها نیست.

مثال: جدول پوشش تابع $f=\sum_i(0,1,2,5,8,9,10,14,15)+\sum_d(7)$ را به‌دست آورید.

مجموعه‌های PI های تابع f:

مجموعه PI های تابع $f=\{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3,\bar{x}_1\bar{x}_3x_4,\bar{x}_1x_2x_4,x_1x_3\bar{x}_4,x_1x_2x_3,x_2x_3x_4,\bar{x}_2\bar{x}_4\}$

جدول پوشش تابع f:

		m_0	m_1	m_2	m_5	m_8	m_{10}	m_{14}	m_{15}	c_1	c_2
P_1	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	1	1								
P_2	$\bar{x}_1\bar{x}_3x_4$		1		1						
P_3	$\bar{x}_1x_2x_4$				1						
P_4	$x_1x_3\bar{x}_4$						1	1			
P_5	$x_1x_2x_3$							1	1		
P_6	$x_2x_3x_4$								1		
P_7	$\bar{x}_2\bar{x}_4$	1		1		1	1				

طی قواعد زیر می‌توان جدول پوشش را ساده کرد و در نتیجه مدار مینیممی را تولید نمود:

۱) **حذف PI های ضروری:** جدول پوشش را ستون به ستون بررسی می‌کنیم، در صورتی‌که ستونی فقط یک درآیه یک داشته باشد، PI نظیر آن را PI ضروری گویند. مثلاً در صورتی‌که مین‌ترم m_j تنها به‌وسیله یک P_i پوشانده شود، آن را PI ضروری گویند، به مفهوم این‌که در هر پوشش می‌نیمم باید ظاهر شود. جدول را با حذف سطر P_i و کلیه ستون‌های پوشانده شده به‌وسیله آن ساده می‌کنیم. مثلاً در مورد مثال فوق P_7 ضروری است بنابراین سطر P_7 و ستون‌های m_1, m_2, m_8, m_{10} را از جدول حذف کنیم. آن‌چه که باقی ماند جدول پوشش تقلیل یافته گویند که اقدام‌های بعدی در مورد جدول پوشش تقلیل یافته انجام خواهد گرفت.

۲) **حذف سطرهای مغلوب:** گوییم سطر P_i غالب (Dominate) بر سطر P_j است اگر:

الف: $c_1(p_i) \le c_1(p_j)$

ب: P_i کلیه نقاط متناظر با P_j را بپوشاند و نسبت به P_j نقاط بیشتری بپوشاند، در این صورت سطر مغلوب یعنی p_j را حذف می‌کنیم.

(یعنی در هر موضعی که سطر مغلوب یک داشته باشد، در همان مواضع نیز سطر غالب یک داشته باشد ولی تعداد یک‌های سطر غالب بیشتر از تعداد یک‌های مغلوب می‌باشد).

مثلا در مثال فوق P_2 غالب بر P_1, P_3 و هم‌چنین P_5 غالب بر P_4, P_6 می‌باشد، بنابراین P_1, P_3, P_4, P_6 را از جدول حذف می‌کنیم. بعد از اعمال قاعده 2 می‌توان برای پیدا کردن P_i ضروری دوباره از قاعده 1 استفاده کرد. مثلا در مورد مثال فوق، پس از اعمال مرحله 2، P_5, P_2 نیز PI ضروری و در نتیجه عضوهایی از پوشش می‌نیمم خواهد بود. در صورتی‌که چند سطر یکسان وجود داشته باشد به جز یکی بقیه را از جدول حذف می‌کنیم.

۳) **حذف ستون‌های غالب:** گوییم ستون m_i غالب بر m_j است که هر سطری که m_j یک دارد، m_i را نیز یک داشته باشد و m_i نسبت به m_j نقاط یک بیشتری داشته باشد، در این صورت سطری‌که m_j را می‌پوشاند m_i را نیز خواهد پوشاند و بنابراین ستون غالب یعنی m_i را از جدول حذف می‌کنیم.

مثال فوق در مرحله 2 به نتیجه می‌رسد و نیاز به حذف ستون غالب ندارد و پوشش می‌نیمم (بهینه) عبارت است از $\{P_2, P_5, P_7\}$.

جدول دوره‌ای: *Cycle table*

جدول پوششی را که نتوان با استفاده از قواعد2,1 و 3 ساده نمود، جدول دوره‌ای گویند.

مثلاً این جدول دوره‌ای است:

	m_a	m_b	m_c	m_d	m_e	c
P_1	1	1		1		k
P_2		1	1			k
P_3	1		1			k
P_4				1	1	k
P_5			1		1	k
P_6		1			1	k

دو روش کلی برای به‌دست آوردن پوشش می‌نیمم برای جداول دوره‌ای وجود دارد:

۱. **رویه انشعاب:** ستونی را به دلخواه مانند m_i (معمولاً با تعداد یک‌های کمتر) انتخاب می‌کنیم و مجموعه PI هایی که آن را می‌پوشانند R می‌نامیم. عضوی از مجموعه R را به دلخواه انتخاب می‌کنیم و جدول را با حذف آن سطر و کلیه ستون‌های پوشانده

شده به‌وسیله آن ساده می‌کنیم. اگر جدول از حالت دوره‌ای خارج شود با استفاده از سه قاعده قبل، پوشش بهینه و شامل این عضو را به‌دست می‌آوریم. همین عمل را برای تک تک عضوهای باقی‌مانده از R تکرار می‌کنیم و پوشش‌های به‌دست آمده را از نظر هزینه با هم مقایسه می‌کنیم و آن یکی را که دارای کمترین هزینه باشد به عنوان پوشش بهینه با هزینه می‌نیمم برای جدول دوره‌ای انتخاب می‌کنیم. رویه انشعاب را می‌توان برای هر یک از ستون‌ها اعمال نمود و هم‌چنین از عمل انشعاب در چندین سطح می‌توان استفاده نمود. مثلاً در مورد مثال فوق، ستون m_a را انتخاب می‌کنیم که برای پوشاندن آن انتخاب یکی از دو ایجاب کننده نخستین P_3, P_1 ضروری است. یعنی $R=\{P_1,P_3\}$

الف: P_1 را انتخاب می‌کنیم و پوشش بهینه شامل P_1 را به‌دست می‌آوریم که با حذف سطر P_1 و ستون‌های m_a, m_b, m_d داریم:

	m_c	m_e	c
P_2	1		k
P_3	1		k
P_4		1	k
P_5	1	1	k
P_6		1	k

جدول پوشش تقلیل یافته

در جدول پوشش تقلیل یافته سطر P_5 غالب بر P_2, P_3, P_4, P_6 خواهد بود، در نتیجه مجموعه $\{P_1, P_5\}$ پوشش می‌نیمم با هزینه 2k خواهد بود.

ب. حال P_3 را انتخاب و پوشش بهینه شامل P_3 را به‌دست می‌آوریم:

	m_b	m_d	m_e	c
P_1	1	1		k
P_2	1			k
P_3		1		k
P_4			1	k
P_5			1	k
P_6	1		1	k

جدول پوشش تقلیل یافته

سطرهای P_1 و P_6 غالب بر P_2 است و سطر P_4 غالب بر P_5 پس پوشش بهینه شامل P_3 و دو سطر از مجموعه سطرهای P_1, P_6, P_4 خواهد بود، بنابراین پوشش‌های به‌دست آمده عبارتند از:

$\{P_1, P_5\}$ با هزینه 2K

$\{P_1, P_3, P_4\}$ با هزینه 3K

$\{P_3, P_4, P_6\}$ با هزینه 3K

و در نتیجه پوشش $\{P_1, P_5\}$ که دارای حداقل هزینه می‌باشد به عنوان پوشش بهینه انتخاب می‌شود.

۲. روش پتریک : برای هر P_i متغیر بولی p_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{متغیر بولی } p_i = \begin{cases} 1: \text{اگر } P_i \text{ جزء پوشش می‌نیمم انتخاب شده باشد.} \\ 0: \text{است اگر } P_i \text{ جزء پوشش می‌نیمم انتخاب نشده باشد.} \end{cases}$$

در این صورت ستون m_j به‌وسیله تعدادی P_i پوشیده می‌شود که شرط پوشش برای ستون m_j را با عبارت بولی $\sum_{i\in I} P_i = 1$ و در نتیجه در حالت کلی شرط پوشش برای همه ستون‌های یک جدول دوره‌ای m ستونی به صورت:

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{i\in IJ} P_I\right)=1$$

که اگر آن را به فرم معادل مجموع حاصل‌ضرب‌ها تبدیل کنیم، هر جمله حاصل‌ضرب به‌دست آمده نشان دهنده یک پوشش برای جدول خواهد بود که هر کدام از آن‌ها تمام نقاط یک تابع را خواهند پوشاند. در نتیجه جمله حاصل‌ضربی را که شامل تعداد کمتر از متغیر بولی باشد به عنوان پوشش بهینه انتخاب می‌کنیم. در مورد مثال فوق داریم:

$$(p_1\overset{m_a}{+}p_3)(p_1\overset{m_b}{+}p_2+p_6).(p_1\overset{m_d}{+}p_4)(p_4+\overset{m_e}{p_5}+p_6).(p_2+\overset{m_c}{p_3}+p_5)=1$$

و با استفاده از توزیع‌پذیری داریم:

$$p_1p_5+p_1p_2p_4+p_1p_2p_4+p_1p_2p_0+p_2p_3p_4+p_3p_4p_6+p_1p_3p_4+p_1p_3p_6=1$$

در نتیجه جواب همان پوشش $\{P_1, P_5\}$ خواهد بود که با استفاده از رویه انشعاب نیز قبلاً به‌دست آوریم.

تمرین: برای تابع $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_i(0,3,4,6,9,13,15)+\sum_i(1,5,11,12,14)$

۱) با استفاده از رویه QMC مجموعه PI ها و پوشش با هزینه می‌نیمم را به‌دست آورید.

۲) با استفاده از جدول کارنو PI ها و پوشش با هزینه می‌نیمم را به‌دست آورید.

نکته مهم: با استفاده از جدول کارنو می‌توان دو مرحله تولید و انتخاب حداقل تعداد از PI ها را در هم ادغام نمود و بدون استفاده از جدول پوشش، طی یک مرحله پوشش بهینه برای تابع به‌دست آورد. برای این منظور ابتدا به سراغ خانه‌ای می‌رویم که برای پوشاندن آن فقط یک PI وجود دارد و این عمل را تا جایی ادامه می‌دهیم که PI ضروری وجود نداشته باشد. سپس به ترتیب قواعد سطر غالب و مغلوب را اعمال می‌کنیم.

مثال: برای تابع زیر، عبارت مجموع حاصل‌ضرب‌ها با هزینه می‌نیمم را به کمک جدول کارنو به‌دست آورید.

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_i(4,5,7,12)+\sum_d(8,10,15,14)$$

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0	4 1	12 1	8 –
01	1	5 1	13	9
11	3	7 1	15 –	11
10	2	6	14 –	10 –

$$f=\bar{x}_2x_3\bar{x}_4+\bar{x}_1x_2x_4+x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \rightarrow \begin{cases}\text{3 and}\\ \text{1 or}\\ \text{12 input}\end{cases}$$

برای توابع کاملاً مشخص شده این حدس وجود دارد که مجموع حاصل‌ضرب‌ها با تعداد ورودی می‌نیمم از نظر تعداد gate ها نیز می‌نیمم باشد و بالعکس. ولی این مطلب برای توابعی که کاملاً مشخص نشده‌اند صادق نیست.

مثال: تابع $f(x_1, x_2, \ldots, x_{10})$ را در نظر بگیرید که به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(0000000000) = f(1100000000) = 1$$

$$f(1000000000) = f(0100000000) = \text{don't care}$$

$f(1,0,x_3,x_4,\ldots,x_{10}) = 0$ اگر $(x_3 + x_4 + x_5 + \ldots + x_{10}) = 1$

$f(0,1,x_3,x_4,\ldots,x_{10}) = 0$ اگر $(x_3 + x_4 + x_5 + \ldots + x_{10}) = 1$

و به ازا بقیه نقاط مقدار تابع نامشخص می‌باشد. یعنی:

$$\left.\begin{aligned} f(00,x_3,\ldots,x_{10}) &= - \text{ if } x_3 + x_4 + \ldots + x_{10} = 1 \\ f(11,x_3,\ldots,x_{10}) &= - \text{ if } x_3 + x_4 + \ldots + x_{10} = 1 \end{aligned}\right\}$$

مثلاً از ترکیب چهار نقطه اول یعنی دو نقطه ‎-1 و دو نقطه d.c. دو متغیر x_2, x_1 حذف و هشت متغیر ظاهر می‌شود. یعنی ایجاب‌کننده نخستین $P_3 = \overline{x}_3\,\overline{x}_4 \ldots \overline{x}_{10}$ به‌دست می‌آید.

هم‌چنین از ترکیب نقطه ‎-1 یعنی $f(0000\ldots0) = 1$ و 255 نقطه d.c. تابع یعنی $f(00, x_3, \ldots, x_{10}) = -$ که در مجموع 256 نقطه است، می‌توان PI ای را به‌دست آورد که فاقد 8 متغیر و شامل 2 متغیر $x_2 \cdot x_1$ یعنی $\overline{x}_1.\overline{x}_2$ باشد. به همین ترتیب می‌توان x_1x_2 را نیز از ترکیب نقطه ‎-1 تابع یعنی $f(11,00\ldots0) = 1$ و 255 نقطه d.c. تابع یعنی $f(11, x_3, \ldots, x_{10}) = -$ به‌دست آورد.

$$P_3 = \overline{x}_3\overline{x}_4\overline{x}_5,\ldots,\overline{x}_{10}\ ,\ P_2 = x_1x_2\ ,\ P_1 = \overline{x}_1\overline{x}_2$$

	m_0	m_2	c_1	c_2
P_1	1			
P_2		1		
P_3	1	1		

اگر مدار با حداقل تعداد ورودی‌ها را در نظر می‌گیریم:

$$f = \overline{x}_1\overline{x}_2 + x_1x_2 \left\{\begin{aligned} &2-\text{AND} \\ &1-\text{OR} \\ &6-\text{input} \end{aligned}\right.$$

و اگر هدف مدار با حداقل تعداد gate ها باشد:

$$f = \overline{x}_3\overline{x}_4\ldots\overline{x}_{10} \left\{\begin{aligned} &1-\text{AND} \\ &8-\text{input} \end{aligned}\right.$$

بنابراین برای تابع بولی که به‌طور کامل مشخص نشده‌اند ممکن است مداری طرح کنیم که در نظر تعداد Gateها بهینه باشد ولی از نظر تعداد inputها بهینه نباشد و بالعکس.

طراحی مدار بهینه با استفاده از حاصل‌ضرب مجموع‌ها: *Product Of Sums*

مدار دو سطحی بهینه متناظر با حاصل‌ضرب مجموع‌های یک تابع را می‌توان با استفاده از مجموع حاصل‌ضرب‌های تابع $\overline{f}$ و اعمال قوانین دمورگان به صورت زیر به‌دست آورد:

اگر

$$\overline{f} = \sum_{i \in I} P_i$$

باشد آن‌گاه:

$$f = \overline{\overline{f}} = \overline{\sum_{i \in I} P_i}$$

که در آن P_i یک تابع PI برای تابع $\overline{f}$ می‌باشد.

رویه:

۱. تابع بولی $\overline{f}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

برای نقطه m_i اگر $f(m_i)=1$ آن‌گاه $\overline{f}(m_i)=0$

همچنین اگر $f(m_i)=0$ آن‌گاه $\overline{f}(m_i)=1$

و اگر $f(m_i)=-$ آن‌گاه $\overline{f}(m_i)=-$

۲. برای تابع $\overline{f}$ مجموع حاصل‌ضرب‌ها یا $\overline{f}=\sum_{i\in I}P_I$ با هزینه می‌نیمم را به‌دست می‌آوریم.

۳. با اعمال قانون دمورگان به عبارت بولی $\overline{f}$ به فرم می‌نیمم مجموع حاصل‌ضرب‌ها، می‌توان عبارت بولی را به فرم می‌نیمم حاصل‌ضرب مجموع‌ها به‌دست آورد.

تذکر: به عوض رویه فوق، برای به‌دست آوردن فرم می‌نیمم حاصل‌ضرب مجموع‌ها برای تابع f، می‌توان نقاط ‎-0‎ و don't –care تابع f را با هم ترکیب نمود.

تذکر: در حالت کلی برای تابع f فرم حاصل‌ضرب مجموع‌ها و مجموع حاصل‌ضرب‌ها دارای هزینه یکسان نمی‌باشند. بنابراین باید هر دو فرم را برای تابع f به‌دست آورد. آن‌گاه فرمی با کمترین هزینه را به منظور پیاده‌سازی مدار انتخاب شود.

مثال: با استفاده از جدول کارنو فرم می‌نیمم حاصل‌ضرب مجموع‌ها و مجموع حاصل‌ضرب‌ها را برای تابع زیر به‌دست آورید.

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\sum_1(3,4,6,9,11,12,13)+\sum_d(7)$$

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0	4 1	12 1	8
01	1	5	13 1	9 1
11	3 1	7 –	15	11 1
10	2	6 1	14	10

$\Rightarrow$

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0 1	4	12	8 1
01	1 1	5 1	13	6
11	3	7 –	15 1	10
10	2 1	6	14 1	11 1

$$\left.\begin{matrix}4-\text{AND}\\1-\text{OR}\\16-\text{input}\end{matrix}\right\}\ f=\overline{x}_1x_3x_4+\overline{x}_1x_2\overline{x}_4+\overline{x}_1x_2\overline{x}_3+x_1\overline{x}_2x_3$$

$$\overline{f}=\overline{x}_2\overline{x}_4+\overline{x}_1\overline{x}_3x_4+x_1x_2x_3$$

$$\left.\begin{matrix}3\ \ \text{OR}\\1\ \ \text{AND}\\11\ \ \text{input}\end{matrix}\right\}\ f=\overline{\overline{f}}=(x_2+x_4)(x_1+x_3-\overline{x}_4)(\overline{x}_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3)$$

البته می‌توان با ترکیب نقاط ‎-0‎ و d.c تابع طی یک مرحله فرم می‌نیمم حاصل‌ضرب مجموع‌ها را به‌دست آورد.

$x_3x_4 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
00	0: 0	4	12	8: 0
01	1: 0	5: 0	13	9
11	3	7: –	15: 0	11
10	2: 0	6	14: 0	10: 0

$$f=(x_2+x_4).(x_1+x_3+\overline{x}_4).(\overline{x}_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3)$$

مثال: برای تابع f که در جدول کارنو تعریف شده است، مدار دو سطحی می‌نیمم به فرم حاصل‌ضرب مجموع‌ها به‌دست آورید:

x3x4 \ x1x2	00	01	11	10
00	0: 1	4: 1	12: 1	8: 0
01	1: 0	5: 1	13: 0	9: 0
11	3: 0	7: 0	15: 1	11: 0
10	2: 0	6: 0	14: 0	10: 0

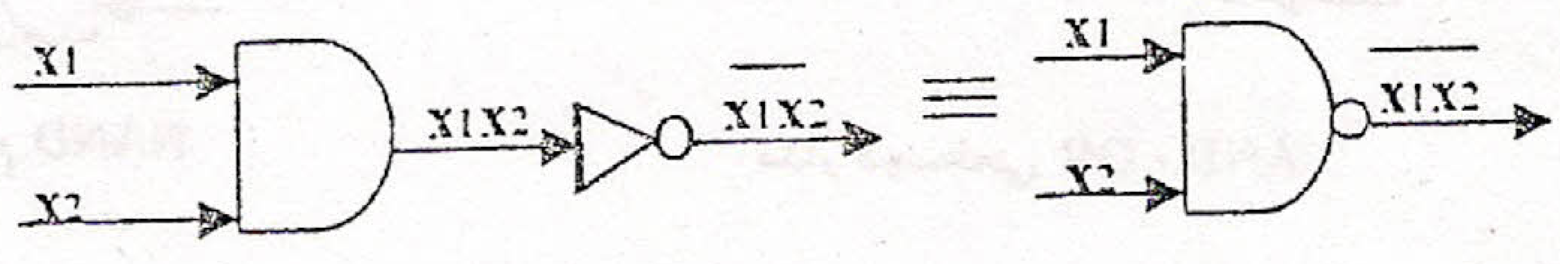
$$f=(\overline{x}_3+x_4)(\overline{x}_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+\overline{x}_4)(\overline{x}_1+x_3+\overline{x}_4)$$

چند *Gate* دیگر:

۱. NAND – Gate:

ترکیبی است از NOT و AND

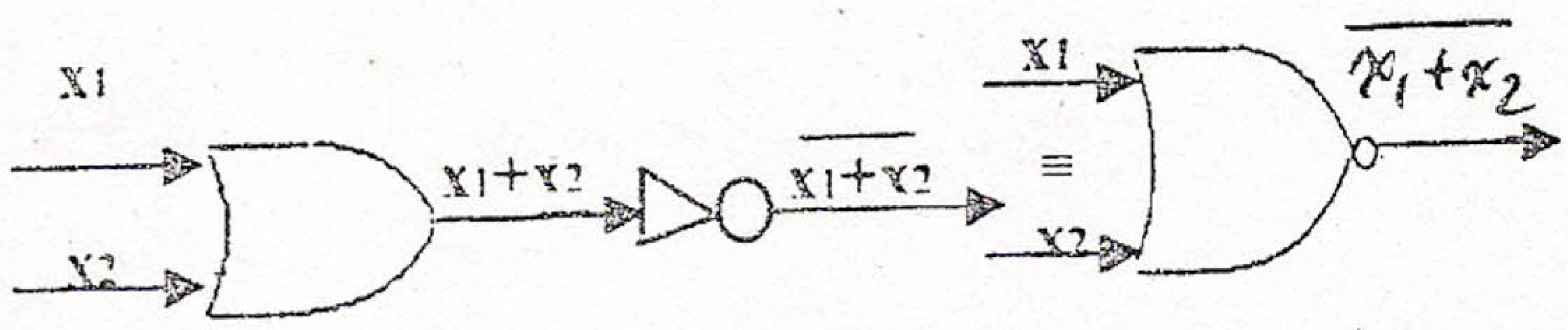
x_1	x_2	$\overline{x_1x_2}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



۲. NOR – Gate:

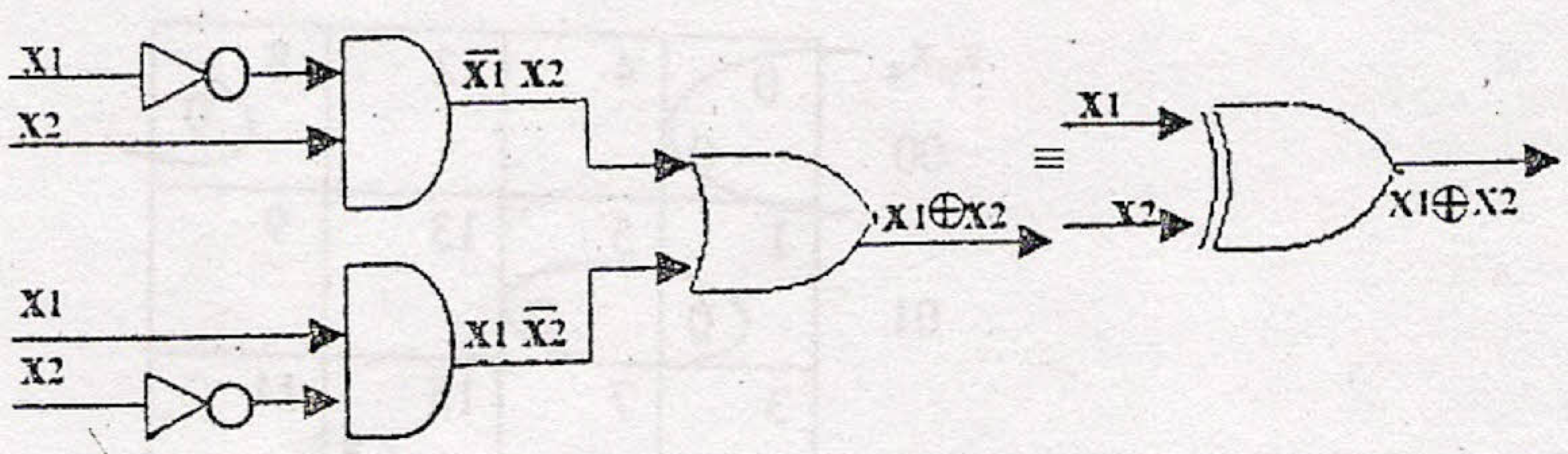
ترکیبی است از NOT و OR:

x_1	x_2	$\overline{x_1x_2}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



(X-OR) Gate .۳:

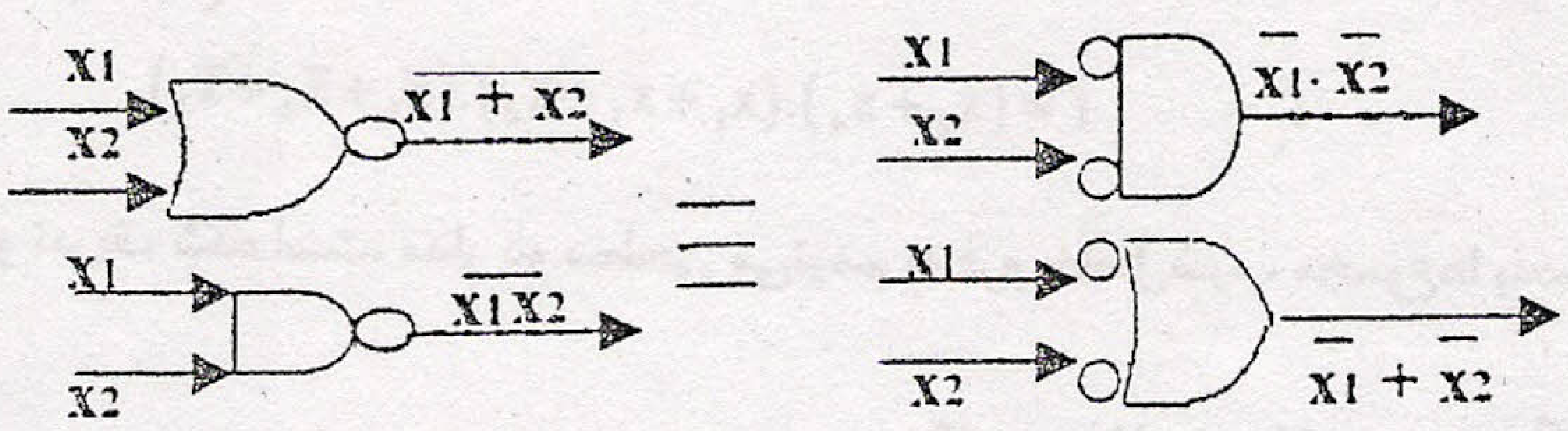
x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



با استفاده از قوانین دمورگان داریم:

$\overline{x_1 + x_2} = \overline{x}_1 . \overline{x}_2$

$\overline{x_1 . x_2} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2$

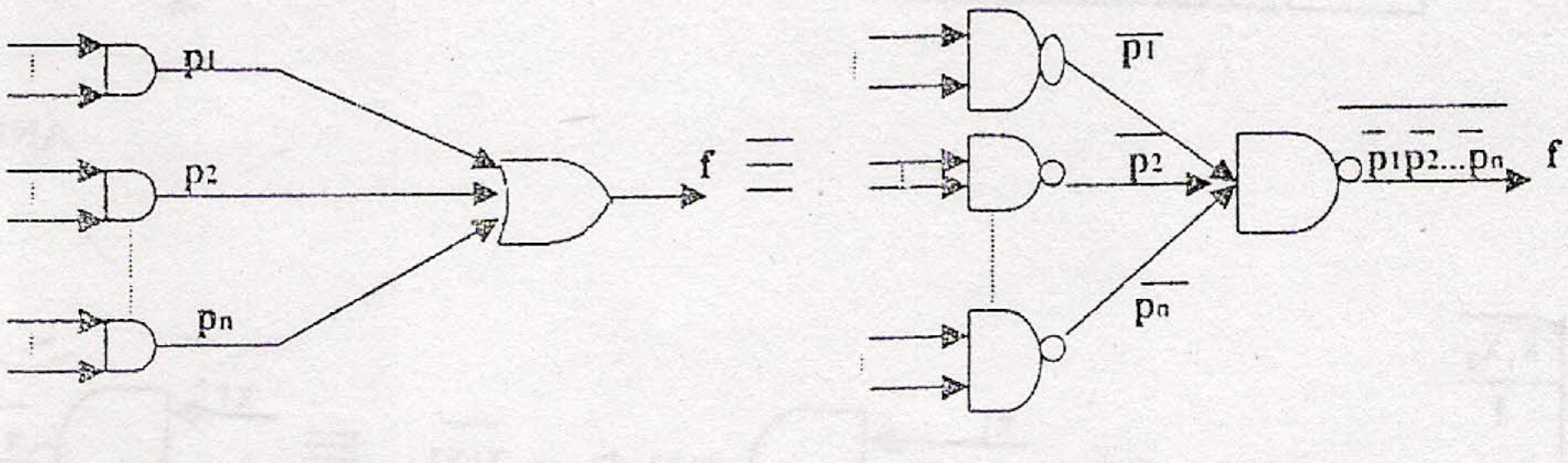


مدارهای دو سطحی تمام *NAND*

هر تابع بولی را می‌توان فقط با استفاده از NAND – Gate به صورت دو سطحی طرح نمود. زیرا هر تابع بولی را می‌توان با استفاده از نقاط 1- و d.c تابع به فرم می‌نیمم مجموع حاصل‌ضرب‌ها تبدیل و مدار آن را به صورت دو سطحی AND – OR طرح نمود.

$f = P_1 + P_3 + ... + P_n = \overline{\overline{P}_1 . \overline{P}_2 .... \overline{P}_n}$

فرم می‌نیمم مجموع حاصل‌ضرب‌ها که در آن هر P_i یک PI می‌باشد.



مدار دوسطحی AND - OR　　　　مدار دو سطحی تمام NAND

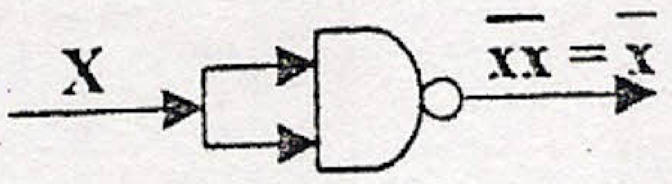
بنابراین مدار تمام NAND معادل مدار دو سطحی AND – OR می‌باشد.

یعنی برای طراحی مدار تمام NAND همان روش طراحی مدار دو سطحی AND – OR را در نظر می‌گیریم و فقط ورودی‌هایی که از تعداد فردی از سطوح Gateها عبور می‌کند، در مدار تمام NAND به مکمل آن تبدیل می‌کنیم.

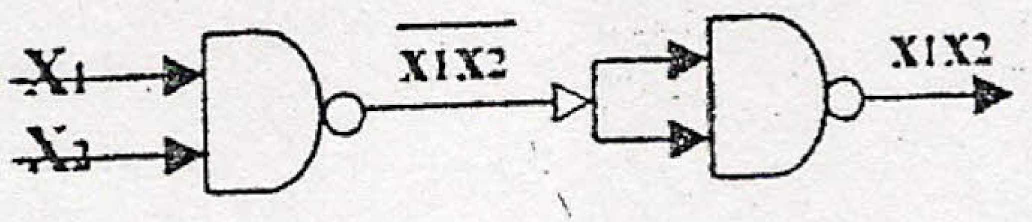
NAND – Gate به تنهایی از نظر عملیاتی کامل است یعنی تمام مدارهای ترکیبی را می‌توان فقط با استفاده از NAND پیاده‌سازی کرد.

۱) NAND معادل NOT –Gate:

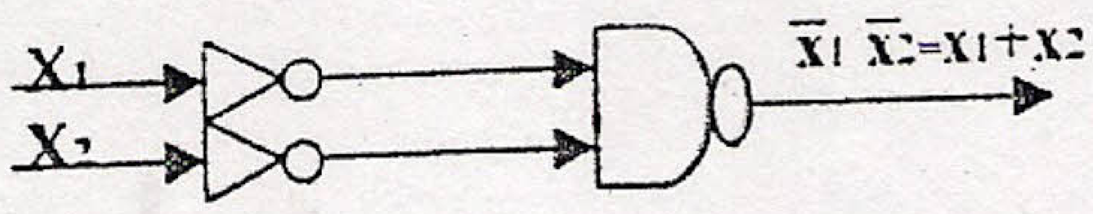
$$\overline{xx} = \overline{x} + \overline{x} = \overline{x}$$



۲) NAND معادل AND – gate:



۳) NAND معادل OR – gate:



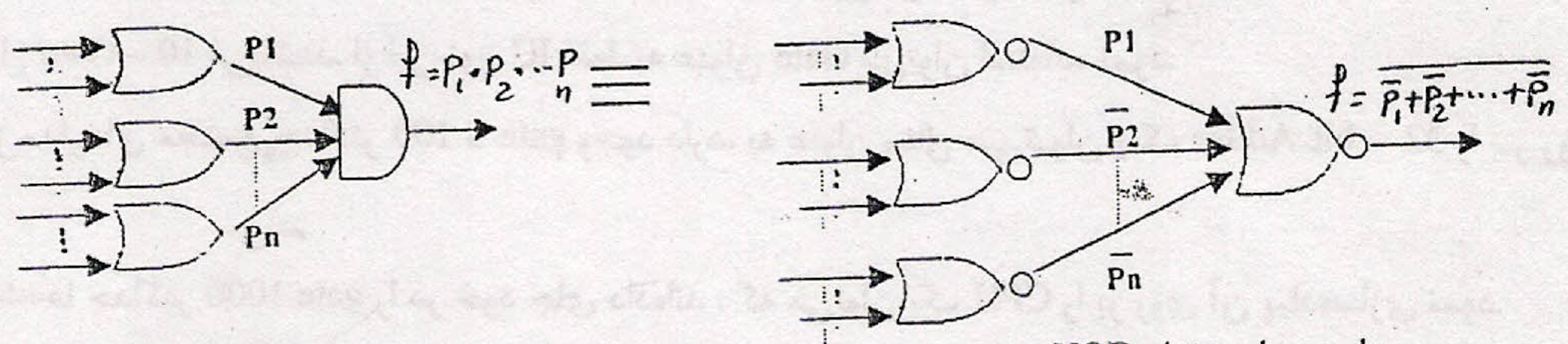
تمرین:

نشان دهید NOR - Gate به تنهایی از نظر عملیاتی کامل است.

مدارهای دو سطحی می‌نیمم با استفاده از *NOR*:

تابع بولی f را می‌توان فقط با استفاده NOR به صورت دو سطحی زیر طرح نمود، زیرا:

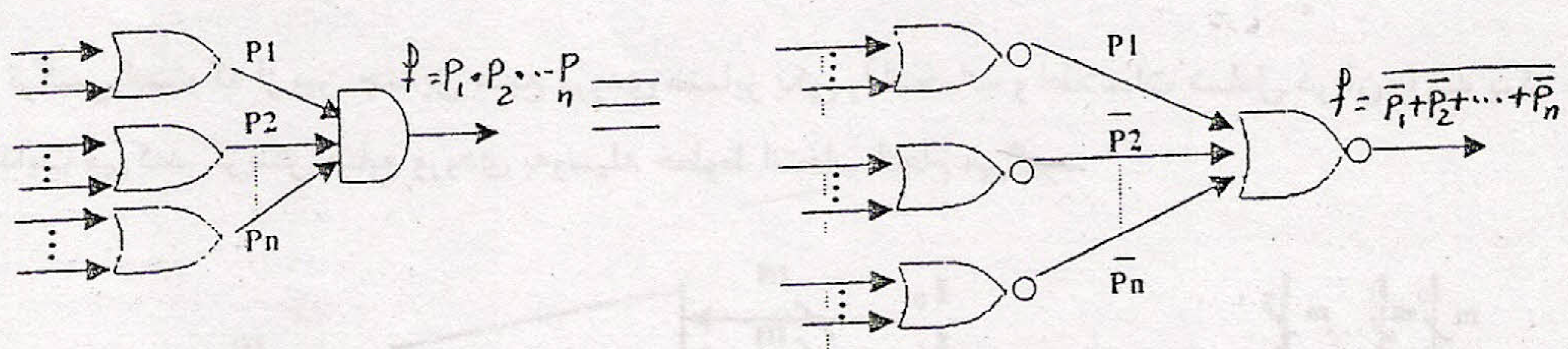
$$f = P_1 + P_2 + \ldots P_n \equiv \overline{\overline{P}_1 \overline{P}_2 \ldots \overline{P}_n}$$



مدار دوسطحی OR - AND　　　　مدار دوسطحی تمام NOR

مدار تمام NOR و دو سطحی تابع f را مستقیماً می‌توان از فرم می‌نیمم حاصل‌ضرب مجموع‌های تابع f به‌دست آورد، زیرا:

$$f = P_1 \cdot P_2 \ldots P_n = \overline{\overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \ldots + \overline{P}_n}$$



مدار دو سطحی OR – AND

$$f = P_1 . P_2 \ldots\ldots p_n$$

مدار تمام NOR

$$f = \overline{\overline{P}_1 + \overline{P}_2 + \ldots + \overline{P}_n}$$

بنابراین مدار تمام NOR معادل مدار دو سطحی OR – AND می‌باشد. طراحی مدار تمام NAND و تمام NOR، باعث پیدایش IC ها شده است.