فصل ششم

چند تابع ترکیبی

چند تابع ترکیبی:

فرض کنیم تابع $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ یک تابع بولی باشد.

۱) همزاد تابع f را با f_d نشان می‌دهند و برای به‌دست آوردن عبارت بولی آن می‌توان OR , AND و صفر و یک را در عبارت بولی f با هم تعویض نمود.

یا در مکمل تابع به جای هر متغیر x_i مکمل آن یعنی $\overline{x}_i$ را قرار دهیم.

$$f_{dual} = f_d = \overline{f(\overline{x}_1.\overline{x}, ..., \overline{x}_n)}$$

اگر $f = f_d$ باشد، آن‌گاه تابع را خود همزاد (Salf Dual) گویند.

تمرین: آیا تابع زیر خود همزاد است؟

۲) تابع قرینه: (Symmetric Function) اگر با تعویض x_i به x_j و x_j به x_i عبارت بولی تابع تغییر نکند، گوییم تابع نسبت به دو متغیر x_i و x_j قرینه است.

$$f(x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n) = f(x_1, x_2, x_3, ...x_j, ..., x_i, ..., x_n)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1, x_2) = x_1x_2 \\ x_1 \to x_2, x_2 \to x_1 \end{array}\right\} \to f(x_1, x_2) = x_1x_2 = x_1x_2 = f(x_2, x_1)$$

اگر تابعی نسبت به هر دو متغیر دلخواه قرینه باشد، آن‌گاه تابع را « قرینه کلی» گویند.

تمرین: آیا تابع زیر قرینه کلی است؟

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1\overline{x}_2x_3 + \overline{x}_1x_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3$$

۳) تابع UNATE (تابع بر حسب متغیر همگن) :

تابعی را نسبت به متغیر x مثبت گویند، هر گاه در فرم مینیمم آن $\overline{x}$ ظاهر نشود.

اگر تابع نسبت به همه متغیرهایش مثبت باشد، آن‌گاه تابع را مثبت گویند.

تابعی را نسبت به متغیر x منفی گویند، هرگاه در فرم مینیمم آن x ظاهر نشود.

اگر تابعی نسبت به همه متغیرهایش منفی باشد، آن‌گاه تابع را منفی گویند.

تابع f را unate گویند هرگاه نسبت به هر یک از متغیرهایش یا فقط مثبت و یا فقط منفی باشد.

مثال: تابع زیر یک تابع Unate است:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \overline{x}_2 + x_1 x_3$$

f نسبت به x_1 مثبت است.

f نسبت به x_2 منفی است.

f نسبت به x_3 مثبت است.

تمرین: آیا تابع زیر، Unate است؟

$$f = x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3 \overline{x}_1$$

تمرین عمومی: برای تابع زیر:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_1 (2,9,11,12,14) + \sum_d (3,7,8,5)$$

(۱) کلیه PI ها را به دست آورید.

(۲) کدامیک از PI ها ضروری است؟

(۳) فرم مینیمم دو سطحی OR-AND تابع را به‌دست آورید.

(۴) فرم مینیمم دو سطحی AND-OR تابع را به‌دست آورید.

(۵) فرم تمام NOR تابع را به دست آورید.

(۶) فرم تمام NAND تابع را به دست آورید.

(۷) آیا تابع f، خود همزاد است؟

(۸) آیا تابع f، Unate است؟

(۹) آیا تابع f، قرینه کلی است؟

توابع حدی یا آستانه‌ای: *Threshold*

تابع f را حدی گویند اگر:

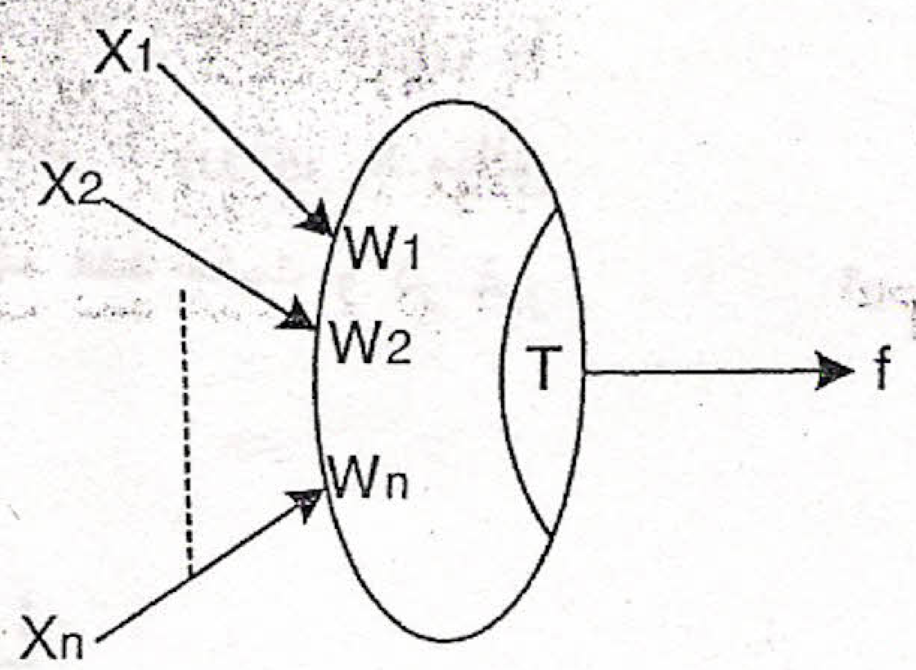
اولا: UNATE باشد.

ثانیا: وزن‌های w_i و حد T وجود داشته باشد، به طوری که:

$$f = 1 \quad \text{if} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \geq T$$

$$f = 0 \quad \text{if} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i x_i < T$$

نمایش توابع آستانه‌ای:

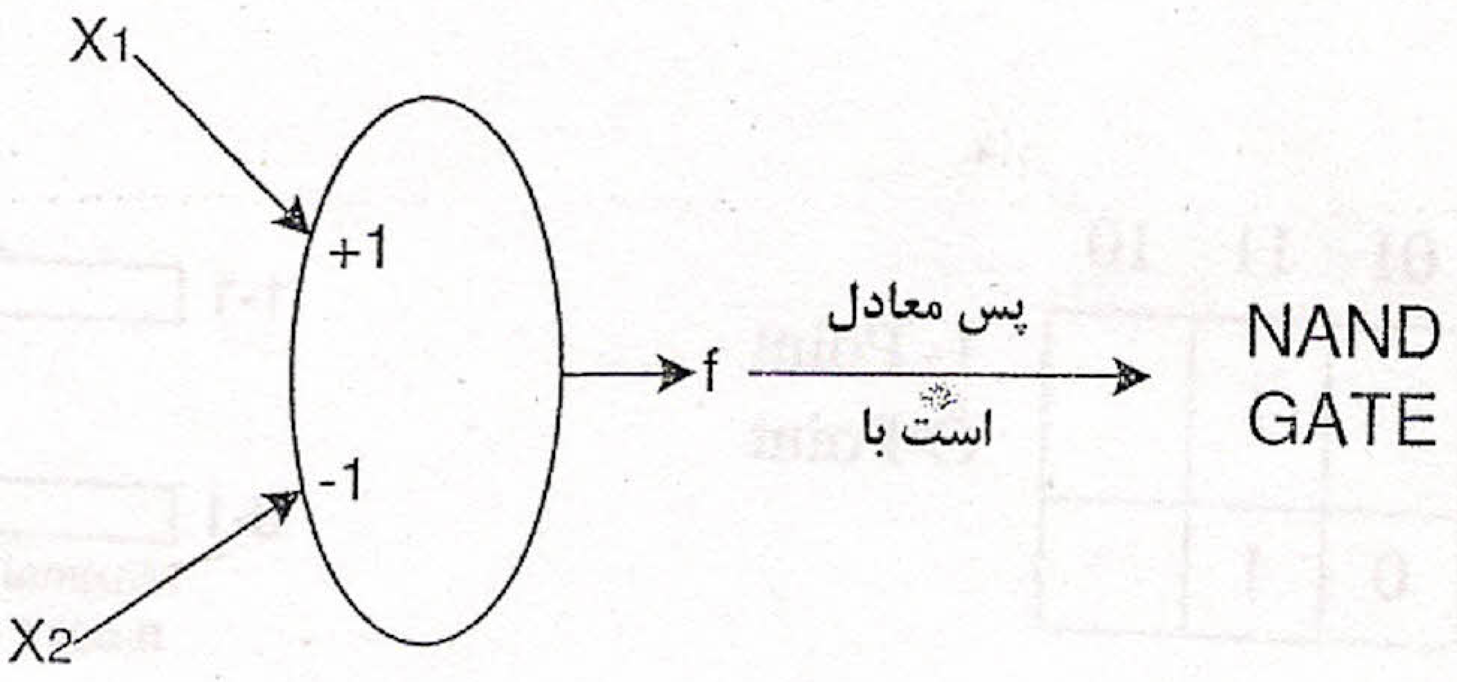


تا به حال در طراحی مدار از gate های الکترونیکی استفاده کردیم ولی عناصر دیگری به نام Threshold وجود دارد که هر چند به اندازه gate های الکترونیکی سریع نیستند، ولی استفاده از آنها باعث کاهش سخت افزار مدار و سادگی اتصال عناصر به یکدیگر می‌گردد. به طوری که اغلب توابع را می‌توان تنها به وسیله یک عنصر آستانه‌ای طرح نمود. Threshold دارای متغیر ورودی $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ و یک خروجی f دو مقداری می‌باشد. پارامترهای ورودی آن شامل حد T و w_iها اعداد حقیقی متناهی می‌باشد.

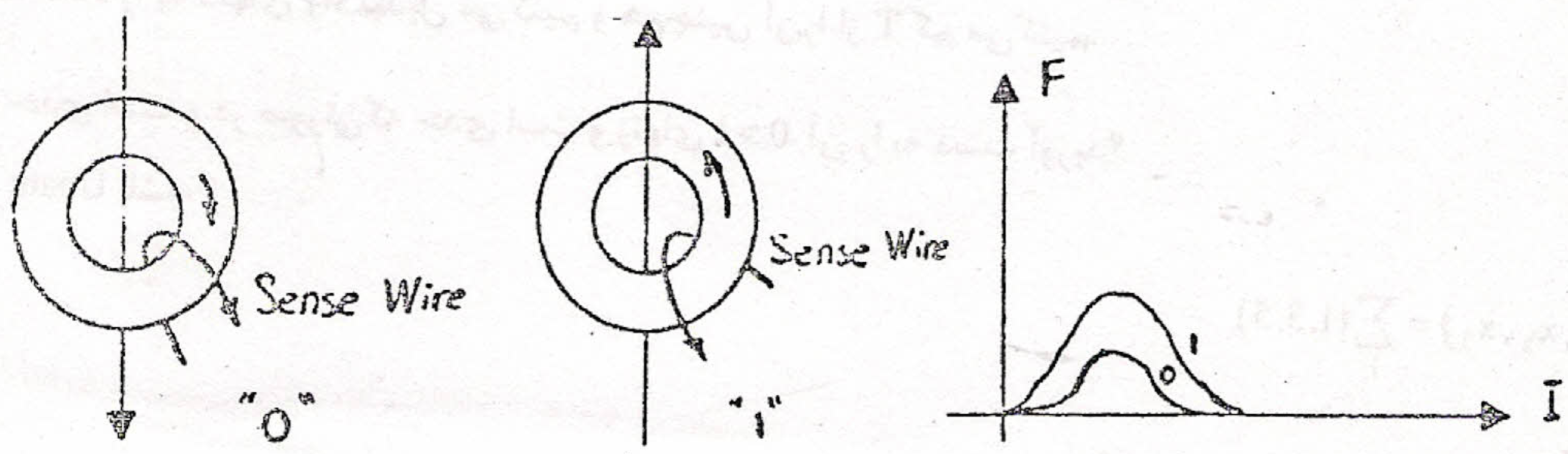
مثال: با فرض $w_2=-1, w_1=1$ و $T=-1$ و دو متغیر ورودی x_1 و x_2 مطلوب است محاسبه:

$\Sigma x_i w_i$

x_1	x_2	$\Sigma w_i x_i = w_1 x_1 + w_2 x_2$	f
0	0	$0+0=0>=-1$	1
0	1	$0+-1=-1>=-1$	1
1	0	$-1+0=-1>=-1$	1
1	1	$-1-1=-2<=-1$	0

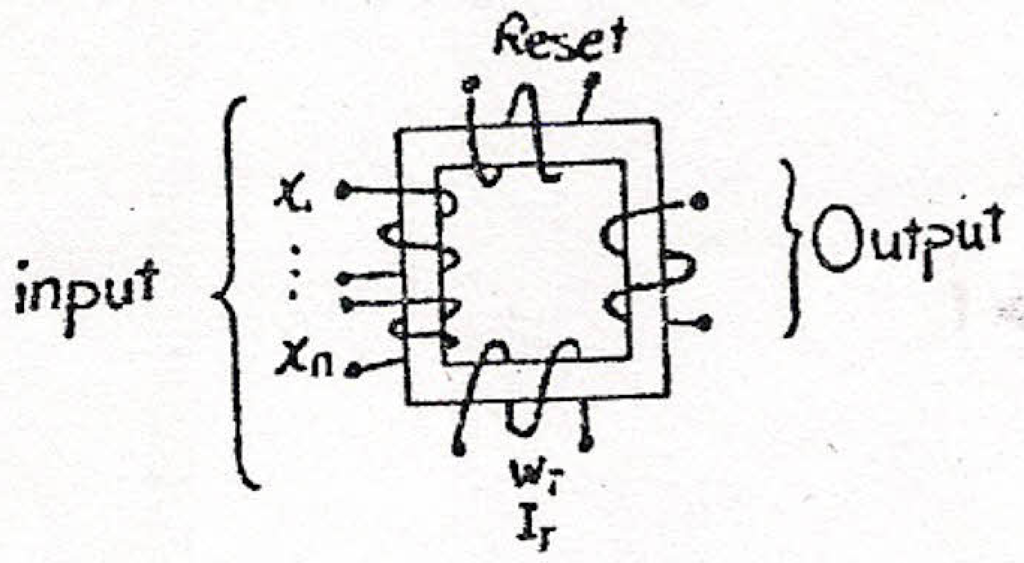


برای پیاده سازی عناصر آستانه‌ای از حلقه‌های مغناطیسی "Magnctic Core" استفاده می‌شود.



که شامل n+3 سیم پیچ می‌باشد. مقدار هر x_i با وجود یا عدم وجود جریان در سیم پیچ مشخص می‌شود، وزن هر ورودی متناظر با تعداد دورهای سیم پیچ می‌باشد.

حد T شامل سیم پیچ با تعداد دورهای ثابت w_T و شدت جریان I_T می‌باشد، در صورتی‌که جهت سیم پیچ متناظر با ورودی x_1 موافق جهت سیم پیچ حد T باشد، آن‌گاه w_1 یک عدد مثبت و در غیر این‌صورت عدد منفی خواهد بود.



روش به‌دست آوردن w_iها و حد T:

۱) تابع باید Unate باشد (هر متغیر یا فقط مثبت یا فقط منفی باشد).

۲) تابع را مثبت می‌کنیم.

$f = x_1 + x_2 x_3$

$q = x_1 + x_2 x_3$

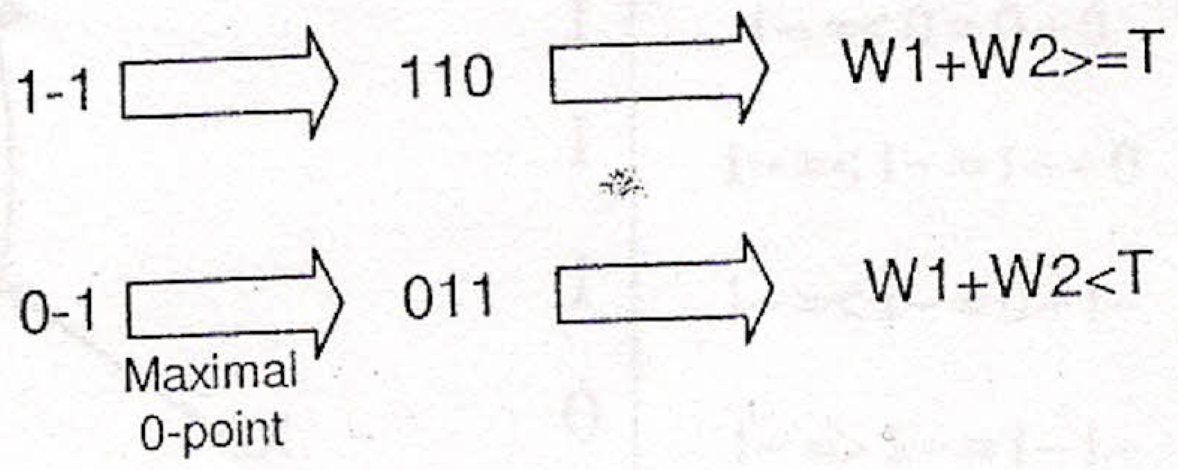
۳) "Minimal 1-Point" , "Maximal O-Point" را به‌دست می‌آوریم.

منظور از Minimal 1-Point، به دست آوردن PI های متناظر با نقاط یک تابع است که در آن به جای Don't Care صفر قرار می‌دهیم.

منظور از Maximal O-Point، به دست آوردن PIهای متناظر با نقاط صفر تابع است، که در آن به جای Don't Care یک قرار می‌دهیم.

	00	01	11	10
0			1	
1	0	0	1	

1- Point
O-Point



۴) با معادله‌های $\Sigma x_1 w_1 \geq T$ و $\Sigma x_1 w_1 < T$ را که برای "Minimal 1-Point" و "Maximal O-Point" به دست آورده‌ایم، حل می‌کنیم.

۵) وزن متغیرهای مثبت شده را به منهای w_1 تبدیل می‌کنیم و هم‌چنین آن‌را از T کم می‌کنیم.

مثال: آیا تابع زیر یک حدی است و در صورتی‌که حدی است و زنهای $i > 0$ آن را به دست آورید؟

۱ـ باید مینیمم تابع f، Unate باشد.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_1 (1,3,5)$$

x_3 \ $x_1 x_2$	00	01	11	10
0				
1	1	1		1

$f = \overline{x}_1 x_3 + \overline{x}_2 x_3$

بنابراین تابع f، Unate است، چون تابع f نسبت به x_1 و x_2 منفی و نسبت به x_3 مثبت است.

۲ـ تابع را مثبت می‌کنیم.

$$f = x_1 x_3 + x_2 x_3$$

۳ـ

$x_3 \backslash x_1x_2$	00	01	11	10
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1

$$1-\text{Point}\begin{cases}-11\\1-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}011\\101\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}w_2+w_3\geq T & (1)\\ w_1+w_3\geq T & (2)\end{cases}$$

$$0-\text{Point}\begin{cases}--0\\00-\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}110\\001\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}w_1+w_2< T & (3)\\ w_3> T & (4)\end{cases}$$

$$(1),(3)\Rightarrow w_2+w_3>w_1+w_2$$

$$(2),(3)\Rightarrow w_1+w_3>w_1+w_2\Rightarrow\begin{cases}w_3>w_1\\w_3>w_2\\w_2>0\end{cases}$$

$$(1),(4)\Rightarrow w_2+w_3>w_3$$

با فرض $w_3=3$، $w_2=2$ و $w_1=1$ داریم:

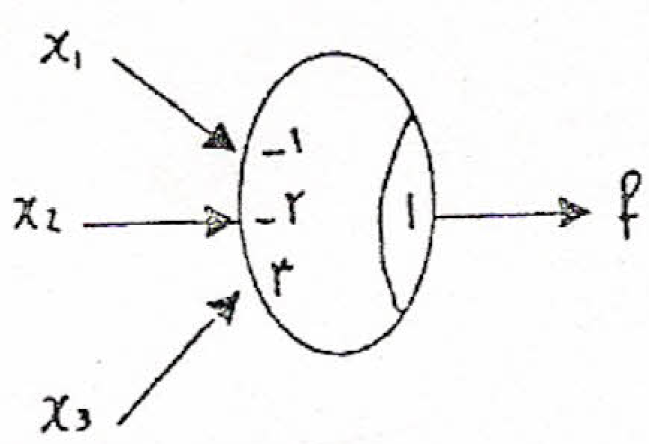
$$\left.\begin{matrix}2+3=5\geq T\\1+3=4\geq T\\1+2=3<T\end{matrix}\right\}\Rightarrow T=4$$

$$f=\bar{x}_1x_3+\bar{x}_2x_3$$

۶ـ تبدیل ضرایب به نامعادله اصلی:

$$f\Rightarrow\begin{cases}w_1=1\\w_2=2w_3=3\\T=4\end{cases}\qquad f\Rightarrow\begin{cases}w_1=-1\\w_2=-2\\w_3=2\\T=4-1-2=1\end{cases}$$

۷ـ نتیجه کلی:



۷- بررسی صورت مثال:

x_1	x_2	x_3	-1 -2 3	f
0	0	0	$0+0+0=0<1$	0
0	0	1	$0+0+3=3>1$	$1\rightarrow m_1$
0	1	0	$0-2+0=-2<1$	0
0	1	1	$0-2+3=1>1$	$1\rightarrow m_3$
1	0	0	$-1+0+0=-1>1$	0
1	0	1	$-1+0+3=2>1$	$1\rightarrow m_5$
1	1	0	$-1-2+0=-3<1$	0
1	1	1	$-1-2+3=0<1$	0

$\longrightarrow \Sigma(1,3,5)$

دلیل کم کردن w_1، متغیرهای مثبت شده از حد T.

فرض کنیم متغیری که در تابع f مثبت شده است، فقط x_1 باشد، پس داریم:

$$w_1x_1+.....w_1x_1+.....+w_nx_n\ge T$$
$$w_1x_1+....+(1-\overline{x}_1)w_1+....+w_nx_n\ge T$$
$$w_1x_1+....+(-w_1)\overline{x}_1+....+w_nx_n\ge T-w_1$$

قضیه: اگر تابع f با وزن‌های $w_1,w_2,.....,w_n$ و حدT یک تابع حدی باشد، آن‌گاه f نیز با وزنهای $-w_1,-w_2,.....,-w_n$ و حد $-T$ یک تابع حدی خواهد بود.

اثبات: اگر تابع f حدی باشد، داریم:

$$\begin{cases}\Sigma w_1x_1>T \text{ iff } f=1\\ \Sigma w_1x_1<T\text{iff } f=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\Sigma(-w_1)x_1<-T \text{ iff } \overline{f}=0\\ \Sigma(-w_1)x_1>-T \text{ iff } \overline{f}=1\end{cases}$$

با ضرب طرفین وزن‌های یک خواهیم داشت.