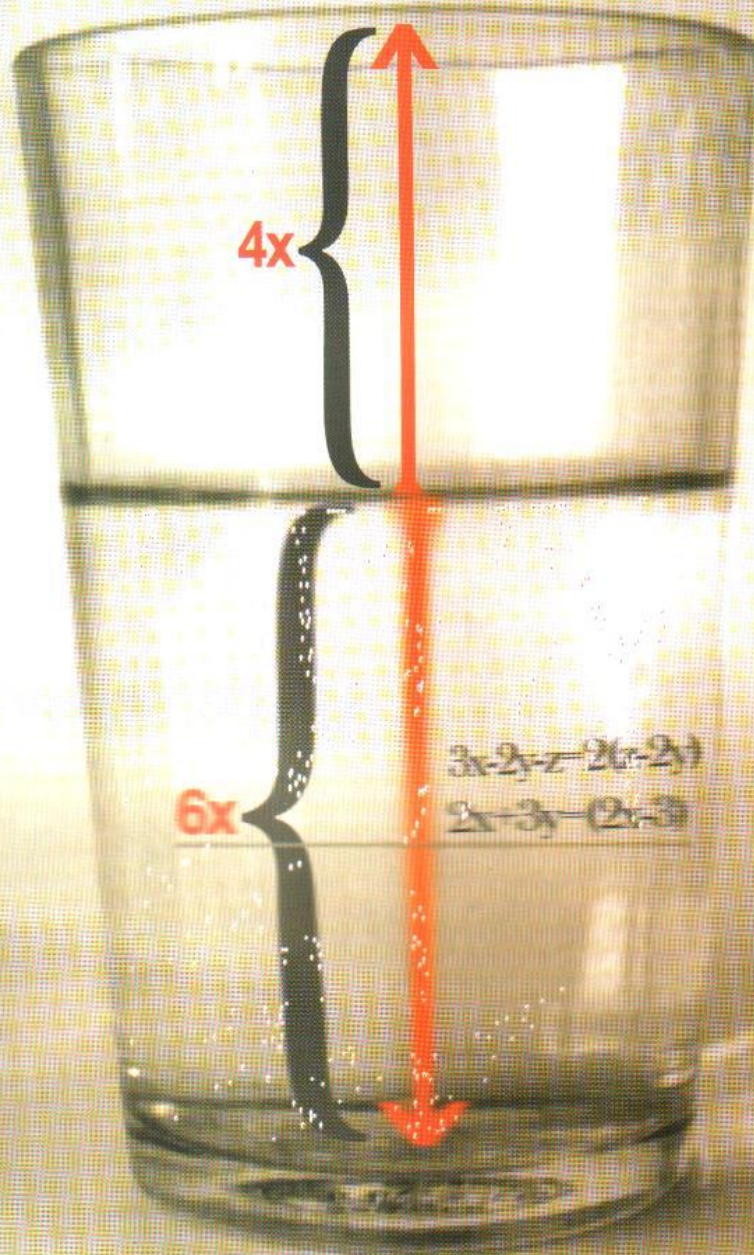


# ریاضیات مهندسی

تالیف: دکتر محمد صادق معتقدی



## مقدمه

جزوه حاضر با تکیه بر:

۱- مفاهیم اولیه و خلاصه درس

۲- تشریح مسایل

به منظور آماده‌سازی برای آزمون‌های ورودی کارشناسی ارشد تهیه و تنظیم شده است. علاقه‌مندان برای حل تست‌های بیشتر می‌توانند به کتب ریاضی عمومی ۱ و ۲، معادلات دیفرانسیل و ریاضی مهندسی تالیف محمدصادق معتقدی که توسط مؤسسه آموزش عالی پارسه به چاپ رسیده مراجعه نمایند.

دکتر محمدرضا معتقدی

بهار ۸۶

251 لیست سوالات

### فصل اول آنالیز فوریه

- ۱) سری فوریه ..... ۱
- ۱- سری فوریه ..... ۱
- ۲- قضیه دیریکله و بحث هم‌گرایی سری‌های فوریه ..... ۴
- ۳- سری فوریه سینوسی و کسینوسی ..... ۵
- ۴- مشتق و انتگرال‌گیری از سری‌های فوریه ..... ۶
- ۵- تساوی پارسوال در سری‌های فوریه ..... ۸
- ۲) انتگرال‌های فوریه ..... ۹
- ۱- انتگرال‌های فوریه ..... ۹
- ۲- قضیه دیریکله و بحث هم‌گرایی انتگرال‌های فوریه ..... ۹
- ۳) تبدیلات فوریه ..... ۱۳
- ۱- تبدیلات فوریه ..... ۱۳
- ۲- تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی ..... ۱۳

### فصل دوم توابع مختلط

- ۱) یادآوری ..... ۱۶
- ۲) توابع مختلط ..... ۱۷
- ۱- حد و پیوستگی در توابع مختلط ..... ۱۷
- ۲- مشتق تابع مختلط ..... ۱۸
- ۳) قضایای کوشی ریمان ..... ۱۹
- ۱- قضیه اول کوشی ریمان ..... ۱۹
- ۲- قضیه دوم کوشی ریمان ..... ۲۰
- ۳- تابع همساز ..... ۲۱

### فصل سوم نگاشت‌ها

- ۲۶ ..... (۱) نگاشت خطی ( $w = az$ )
- ۲۶ ..... (۲) نگاشت خطی ( $w = az + b$ )
- ۲۷ ..... (۳) نگاشت توانی ( $w = z^n$ )
- ۲۹ ..... (۴) نگاشت ریشه  $n$  ام ( $w = \sqrt[n]{z}$ )
- ۳۱ ..... (۵) نگاشت کسری ( $w = \frac{1}{z}$ )
- ۳۴ ..... (۶) نگاشت خطی کسری (تبدیل مویوس) ( $w = \frac{az+b}{cz+d}$ )
- ۳۷ ..... (۷) نگاشت یا کوفسکی ( $w = z + \frac{1}{z}$ )
- ۳۸ ..... (۸) نگاشت نمایی ( $w = e^z$ )
- ۳۹ ..... (۹) نگاشت لگاریتمی  $w = \text{Ln}z$
- ۴۱ ..... (۱۰) نگاشت سینوس و کسینوس

### فصل چهارم انتگرال گیری از توابع مختلط

- ۴۷ ..... (۱) تعاریف
- ۴۷ ..... (۲) قضیه انتگرال کوشی - گورسا
- ۴۹ ..... (۳) سری‌های مختلط
- ۵۰ ..... ۱- ناحیه هم‌گرایی یک سری مختلط
- ۵۲ ..... ۲- بسط تیلور یک تابع مختلط
- ۵۳ ..... ۳- انواع نقاط تکین تابع مختلط
- ۵۴ ..... ۴- بسط لوران
- ۵۶ ..... ۵- چند روش برای پیدا کردن مانده یک تابع در نقاط تکین از نوع قطب
- ۵۸ ..... ۶- انتگرال گیری به روش مانده‌ها
- ۶۵ ..... ۷- محاسبه برخی انتگرال‌های حقیقی با استفاده از انتگرال‌های مختلط
- ۶۹ ..... ۸- نوشتن بسط لوران معتبر در نواحی مختلف

### فصل پنجم معادلات با مشتقات جزئی

- ۷۲ ..... (۱) تعاریف اولیه
- ۷۴ ..... (۲) معادلات با مشتقات جزئی مرتبه اول شبه خطی
- ۷۵ ..... (۳) دسته‌بندی انواع معادلات با مشتقات جزئی مرتبه دوم شبه خطی و رسیدن به فرم استاندارد
- ۷۷ ..... (۴) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی با ضرایب ثابت از نوع همگن
- ۷۷ ..... (۵) معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی مرتبه دوم خطی با ضرایب ثابت
- ۷۸ ..... (۶) حل معادلات مشتقات جزئی با استفاده از تبدیل لاپلاس
- ۸۰ ..... (۷) روش جداسازی متغیرها مساله
- ۸۴ ..... (۸) همگن کردن یک مسئله غیرهمگن
- ۸۵ ..... (۹) حل معادله لاپلاس در دو هندسه خاص با شرایط مرزی خاص
- ۸۶ ..... (۱۰) حل دالامبر معادله موج

# فصل اول

## آنالیز فوریه

### سری فوریه

فرض کنید  $f(x)$  تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب  $p = 2L$  باشد که در فاصله تناوب خود پیوسته و تکه‌تکه هموار باشد. آن‌گاه می‌توان تابع مذکور را به صورت مجموعی از جملات سینوسی و کسینوسی با آرگومان‌های مختلف که به سری فوریه تابع موسوم است به فرم زیر نوشت:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

که در آن ضرایب سری فوریه به فرم زیر حاصل می‌شود.

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

**نکته:** برخی مواقع یک تابع به خودی خود متناوب نمی‌باشد و در فاصله‌ای روی آن بحث می‌شود که تابع مذکور در فاصله داده شده مد نظر قرار گرفته و در خارج آن فاصله به صورت متناوب گسترش یافته است که برای آن تابع متناوب سری فوریه می‌نویسیم

**نکته:** اگر تابع  $f(x)$  تابعی زوج باشد، (نمودار آن نسبت به محور  $y$  ها متقارن باشد):

$$\boxed{b_n = 0} \quad , \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx$$

و اگر تابع  $f(x)$  تابعی فرد باشد، (نمودار آن نسبت به مرکز مختصات متقارن باشد):

$$\boxed{a_n = 0} \quad , \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

مثال: برای تابع  $f(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 0 \\ x & 0 < x < 1 \end{cases}$ ، ثابت سری فوریه را محاسبه کنید؟

حل:

$L=1 \rightarrow L=1$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx \rightarrow a_0 = \frac{1}{1} \left\{ \int_{-1}^0 1 dx + \int_0^1 x dx \right\} = x \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{3}{4}$$

مثال: تابع  $f(x) = x$ ،  $0 \leq x \leq 2\pi$  مفروض است، ضرایب جملات کسینوسی در بسط سری فوریه این تابع را بیابید.

حل:

$L=2\pi \rightarrow L=2\pi$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L x \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx dx$$

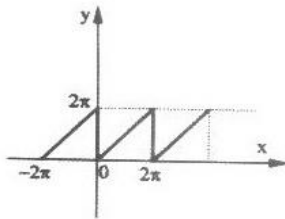
$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{x}{n} \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx \right\} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right\} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-L}^L x \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{x^2}{2} \right\} \Big|_0^{2\pi} = 2\pi \Rightarrow \frac{a_0}{2} = \pi$$

مشتق	انتگرال
x	cos nx
1	$\frac{1}{n} \sin nx$
0	$-\frac{1}{n^2} \cos nx$

دقت کنید  $\frac{a_0}{2}$ ، همان مقدار متوسط تابع در فاصله تناوب آن می باشد که می توان به صورت زیر محاسبه کرد.

مقدار متوسط =  $\frac{\text{سطح زیر نمودار تابع در فاصله تناوب}}{\text{طول فاصله تناوب}}$



$$\frac{a_0}{2} = \frac{2\pi \cdot 2\pi}{2\pi} = \pi$$

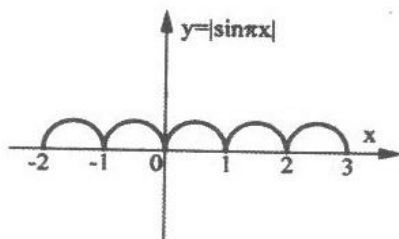
مثال: سری فوریه تابع  $f(x) = 4 \sin x \cos^2 x$  کدامست؟

حل:

$$f(x) = 4 \sin x \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right) = 2 \sin x + 2 \sin x \cos 2x = 2 \sin x + \sin(x + 2x) + \sin(x - 2x)$$

$$= 2 \sin x + \sin 3x - \sin x = \sin x + \sin 3x$$

مثال: تابع  $f(x) = |\sin \pi x|$  مفروض است، دوره تناوب و ضرایب  $a_n$  را به دست آورید.



مطابق نمودار

حل =  $f(x)$  متناوب است با دوره تناوب  $P=1$ ،  $L=\frac{1}{2}$  و از آن جا که  $f(x)$  زوج است  $b_n=0$  پس:

$$a_n = \frac{2}{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \sin \pi x \cdot \cos \frac{n\pi}{2} x \cdot dx = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \sin \pi x \cdot \cos 2n\pi x \cdot dx = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \{ \sin(1+2n)\pi x + \sin(1-2n)\pi x \} dx$$

$$= 2 \left\{ \frac{-\cos(1+2n)\pi x}{(1+2n)\pi} + \frac{-\cos(1-2n)\pi x}{(1-2n)\pi} \right\} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = 2 \left\{ 0 + \frac{1}{(1+2n)\pi} + 0 + \frac{1}{(1-2n)\pi} \right\} = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1-2n+1+2n}{1-4n^2} \right\} = \frac{4}{\pi(1-4n^2)}$$

مثال: بسط فوریه تابع دلتای دیراک در فاصله  $-\pi < x < \pi$  را به دست آورید.

حل = با توجه به خاصیت تابع دلتای دیراک داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

لذا در بسط فوریه این تابع داریم:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \delta(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \cos 0 = \frac{1}{\pi}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \delta(x) dx = \frac{1}{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \delta(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \sin(0) = 0$$

لذا:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \cos nx = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx \right)$$

نکته: همان طوری که دیدیم سری فوریه یک تابع، نوشتن تابع به صورت مجموع جملات سینوسی، کسینوسی است و ثابت می شود ضرایب سری فوریه که با توجه به روابط گفته شده، به دست می آیند، چنانچه مورد استفاده قرار گیرند، بهترین تقریب برای توصیف یک تابع از نظر حداقل مربعات می باشد.

مثال: تابع  $f(x)$  به صورت زیر مفروض است.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

چنانچه بخواهیم تابع مذکور در فاصله داده شده به صورت تابعی به فرم  $a + b \cos x + c \sin x$  تقریب بزنیم  $a, b, c$  چقدر باشند که بهترین تقریب زده شود.

حل:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 0 \cdot dx + \int_0^{\pi} x dx \right\} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 0 \cdot \cos x dx + \int_0^{\pi} x \cos x dx \right\} = \frac{1}{\pi} \left\{ x \sin x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_0^{\pi} \right\} = -\frac{2}{\pi}$$

مشتق	انتگرال
x	cos x
1	sin x
0	-cos x

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 0 \sin x \, dx + \int_0^{\pi} x \sin x \, dx \right\} = \frac{1}{\pi} \left[ -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \sin x \Big|_0^{\pi} \right] = 1$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \cos x + \sin x$$

مشتق	انتگرال
x	sin x
1	-cos x
0	-sin x

## قضیه دیریکله و بحث هم‌گرایی سری‌های فوریه

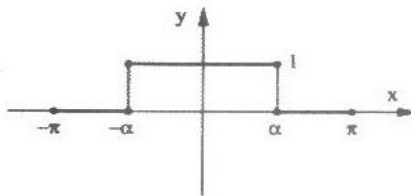
می‌توان نشان داد:

الف) اگر  $f(x)$  در  $x_0$  پیوسته باشد، آن‌گاه:  $f(x_0)$  برابر مقدار سری فوریه تابع به ازای  $x = x_0$  است.

ب) اگر  $f(x)$  در  $x_0$  گسسته باشد، آن‌گاه:  $\frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$  برابر مقدار سری فوریه تابع به ازای  $x = x_0$  است.

به عبارت ساده‌تر: سری فوریه در نقاط پیوستگی به  $f(x)$  و در نقاط ناپیوستگی به  $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$  هم‌گرا است.

**مثال:** با توجه به سری فوریه تابع ترسیم شده در شکل زیر حاصل سری عددی  $I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}$  را به دست آورید.



حل:

$$b_n = 0 \Rightarrow \text{تابع زوج} \quad 2L = 2\pi \rightarrow L = \pi$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} 1 \, dx = \frac{2\alpha}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} \cos nx \, dx = \frac{2}{n\pi} \sin nx \Big|_0^{\alpha} = \frac{2}{n\pi} \sin n\alpha$$

$$\text{سری فوریه: } \frac{\alpha}{\pi} + \sum \frac{2}{n\pi} \sin n\alpha \cos nx$$

در  $x = 0$  که پیوستگی تابع است طبق قضیه دیریکله داریم:

$$f(0) = \frac{\alpha}{\pi} + \sum \frac{2 \sin n\alpha}{n\pi} \cos 0$$

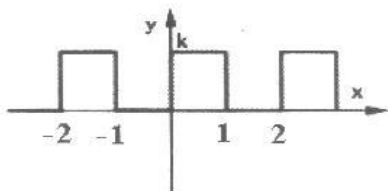
داریم  $f(0) = 1$ ، در نتیجه:

$$1 - \frac{\alpha}{\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}$$

$$1 = \left(1 - \frac{\alpha}{\pi}\right) \cdot \frac{\pi}{2}$$



مثال: از بسط فوریه تابع زیر مقدار  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$  برابر است با:



$$2L = 2 \rightarrow L = 1$$

حل: تابع ترسیم شده، توسیع متناوب تابع  $f(x) = \begin{cases} k & 0 < x < 1 \\ 0 & -1 < x < 0 \end{cases}$  می باشد.

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_{-1}^{+1} f(x) dx = \frac{1}{1} \int_0^1 k dx = k$$

$$a_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^{+1} f(x) \cos \frac{n\pi}{1} x dx = \frac{1}{1} \int_0^1 k \cos \frac{n\pi}{1} x dx = \frac{k}{1} \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{1} x \Big|_0^1 = 0$$

$$b_n = \frac{1}{1} \int_{-1}^{+1} f(x) \sin \frac{n\pi}{1} x dx = \frac{1}{1} \int_0^1 k \sin \frac{n\pi}{1} x dx = \frac{-k}{1} \frac{1}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{1} x \Big|_0^1 = \frac{-k}{n\pi} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ \frac{2k}{n\pi} & \text{فرد } n \end{cases}$$

لذا سری فوریه تابع مورد نظر، به صورت زیر نوشته می شود:

$$f(x) = \frac{k}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2k}{(2n+1)\pi} \sin \frac{(2n+1)\pi}{1} x$$

در  $x = \frac{1}{2}$ ، تابع پیوسته بوده و طبق قضیه دیریکله داریم:

$$k = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{k}{2} = \frac{2k}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (-1)^n = \frac{\pi}{4}$$

مثال: تابع  $f(x) = e^{-x}$  و  $0 < x < 2$  مفروض است در سری فوریه این تابع مقدار  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  چقدر است؟  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$

$$\text{حل: سری فوریه} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x) \Rightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_0^2 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^2 = -(e^{-2} - 1) = 1 - e^{-2}$$

در  $x = 0$  که تابع گسسته می شود، طبق دیریکله داریم:

$$\frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{e^{-2} + e^0}{2} = \frac{1 - e^{-2}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = e^{-2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1 + e^{-2}}{2} - \frac{1 - e^{-2}}{2} = e^{-2}$$

## سری فوریه سینوسی و کسینوسی

فرض کنید تابع  $f(x)$  در  $(0, L)$  تعریف شده باشد، اگر این تابع را در فاصله  $(-L, 0)$  به طور زوج گسترش داده و برای تابع حاصله سری فوریه بنویسیم، به این سری فوریه، سری فوریه کسینوسی گفته می شود. البته بدیهی است که در چنین وضعیتی  $b_n = 0$  است.

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$$

همچنین اگر این تابع را در فاصله  $(-L, 0)$  به طور فرد گسترش داده و برای تابع حاصله سری فوریه بنویسیم، به این سری فوریه، سری فوریه سینوسی گفته می‌شود. البته بدیهی است ضرایب  $a_n$  و  $a_0$  مساوی با صفر است.

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

بسیار وقت نورمون سانس و ... یاد می‌کرد.

**مثال :** تابع  $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 < x < 2 \end{cases}$  مفروض است، مطلوب است سری فوریه سینوسی تابع مورد نظر:

**حل :** گسترش به صورت فرد  $a_n = a_0 = 0$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^2 f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx = \frac{2}{2} \left[ \int_0^1 1 \sin \frac{n\pi}{2} x dx + \int_1^2 \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi}{2} x dx \right] = \frac{-2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} x \Big|_1^2$$

$$= \frac{-2}{n\pi} \left( \cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right) - \frac{1}{n\pi} \left( \cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2} \right)$$

**مثال :** تابع  $f(x)$  در فاصله  $(0, L)$  تعریف شده است اگر بخواهیم برای این تابع سری فوریه سینوسی بنویسیم  $b_n = \frac{1}{n^3}$  و اگر بخواهیم سری فوریه کسینوسی بنویسیم  $a_n = \frac{1}{n + \pi}$ ، کدام نوع سری فوریه برای توصیف این تابع مناسب‌تر است.

**نکته :** بدیهی است که سری فوریه‌ای مناسب‌تر است که با تعداد جملات کمتری به رفتار تابع واقعی نزدیک‌تر شود و البته این موضوع زمانی رخ می‌دهد که ضرایب سری فوریه با افزایش  $n$  سریع‌تر کوچک شده و به صفر میل کند البته در این مساله سری فوریه سینوسی مناسب خواهد بود.

## مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از سری فوریه

فرض کنید تابع  $f(x)$  که در فاصله  $(-L, L)$  تعریف شده باشد دارای سری فوریه به فرم زیر باشد.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

می‌توان نشان داد:

الف) چنانچه  $f(L) = f(-L)$  باشد می‌توان از رابطه فوق مشتق‌گیری کرده و سری فوریه  $f'(x)$  را در  $(-L, L)$  را به صورت زیر مشخص کرد.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} \left\{ -a_n \sin \frac{n\pi}{L} x + b_n \cos \frac{n\pi}{L} x \right\}$$

ب) می‌توان از رابطه  $f(x)$  انتگرال‌گیری کرد و سری فوریه را برای  $\int f(x) dx$  در فاصله  $[-L, L]$  به دست آورد.

$$\int f(x) dx = \frac{a_0}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi} \left( a_n \sin \frac{n\pi}{L} x - b_n \cos \frac{n\pi}{L} x \right) + K$$

دقت کنید: عبارت نوشته شده در سمت راست تساوی فوق توصیف سری فوریه  $\int f(x) \cdot dx$  نخواهد بود (به خاطر وجود ترم  $\frac{a_0}{2}x$ )

اما به هر حال از رابطه فوق می توان سری فوریه تابع  $\int f(x) dx - \frac{a_0}{2}x$  را در فاصله  $[-L, L]$  به سادگی بیان کرد ولی باید مقدار ثابت  $K$  را مشخص کنیم.

**مثال:** اگر بسط فوریه تابع متناوب  $f(x) = |x|$  در فاصله  $(-\pi, \pi)$  به صورت زیر باشد.

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right), \quad (-\pi < x < +\pi)$$

حاصل سری  $I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$  را به دست آورید.

**حل:**

$$f(x) = \begin{cases} -x & -\pi \leq x \leq 0 \\ x & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad \text{و داریم} \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

حال با انتگرال از  $f(x)$  و سری فوریه آن نتیجه می شود:

$$\int f(x) dx = \frac{\pi}{2}x - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3} + K$$

$$\int f(x) \cdot dx = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} & -\pi < x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 < x < \pi \end{cases}$$

با نگاه کردن به رابطه فوق در  $x=0$  نتیجه می شود:

$$0 = 0 - \frac{4}{\pi} \sum \frac{\sin(0)}{(2n+1)^3} + K \rightarrow K = 0$$

و حال چنانچه در  $x = \frac{\pi}{2}$  که برای تابع فوق نقطه پیوستگی است از قضیه دیریکله استفاده کنیم، به دست می آید:

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{(2n+1)^3} \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{8}\right) \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^3}{32}$$

**مثال:** تابع  $f(x) = x^2$ ,  $(-\pi < x < \pi)$  دارای سری فوریه به فرم زیر می باشد،

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad (-\pi < x < \pi)$$

آن گاه سری فوریه تابع  $x^3 - \pi^2 x$  را در فاصله مزبور بیابید؟

**حل:** اگر از فرض مساله انتگرال گیری کنیم به دست می آید:

$$\frac{x^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cdot \frac{1}{n} \sin nx + k$$

اگر در  $x=0$  به رابطه فوق نگاه کنیم، مقدار  $K=0$  خواهد شد، لذا داریم:

$$(x^3 - \pi^2 x) = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^3} \sin nx$$

**مثال:** سری فوریه تابع  $f(x) = \frac{x}{2}$  در فاصله  $-\pi \leq x \leq \pi$  به صورت زیر است.

$$f(x) = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots$$

سری فوریه تابع  $g(x) = x^2$  در فاصله  $-\pi \leq x \leq \pi$  کدام است؟

**حل:** با انتگرال گیری از  $f(x)$  داریم:

$$\frac{1}{4}x^2 = -\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{9}\cos 3x + \dots + k \Rightarrow x^2 = 4\left(-\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{9}\cos 3x + \dots\right) + c$$

برای محاسبه  $c$ ، ضریب  $a_n$  مربوط به سری فوریه تابع  $g(x) = x^2$  را در فاصله  $-\pi \leq x \leq \pi$  به دست می آوریم:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{3}\pi^3 = \frac{2}{3}\pi^2 \Rightarrow c = \frac{a_0}{2} = \frac{\pi^2}{3}$$

**تساوی پارسوال در سری های فوریه**

اگر  $f(x)$  تابعی متناوب باشد که در فاصله تناوب  $(-L, L)$  تعریف شده است. داریم:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

**مثال:** هرگاه سری فوریه تابع  $f(x) = x^2$  و  $-\pi \leq x \leq \pi$  به صورت  $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$  باشد، حاصل  $I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$  کدام

است.

**حل:**

$$\text{سمت چپ تساوی پارسوال} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} x^4 dx = \frac{1}{\pi} \frac{1}{5}x^5 \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{5\pi} \pi^5$$

$$\text{سمت راست تساوی پارسوال} = \frac{\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{16}{n^4} + 0\right)$$

بنابراین طبق تساوی پارسوال خواهیم داشت:

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + 16I \Rightarrow I = \frac{\pi^4}{90}$$

**مثال:** اگر بسط سری فوریه کسینوسی  $0 \leq x \leq \pi$  و  $f(x) = \sin x$  به صورت زیر باشد،

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos n\pi}{n^2 - 1}\right) \cos nx$$

آن گاه مقدار سری  $\frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \dots$  برابر است با:

**حل:** در این مثال داریم:

$$L = \pi \quad \frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi} \quad b_n = 0$$

$$a_n = \frac{-2}{\pi} \frac{1 + \cos n\pi}{n^2 - 1} = \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ -\frac{2}{\pi} \frac{2}{n^2 - 1} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

لذا طبق تساوی پارسوال می توان نوشت:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 x dx = \frac{\left(\frac{4}{\pi}\right)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2} \left(\frac{1}{(2k)^2 - 1}\right)^2 \Rightarrow \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2 (2k+1)^2}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2 (2k+1)^2} \Rightarrow \frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{16} \left(1 - \frac{8}{\pi^2}\right) = \frac{\pi^2 - 8}{16}$$

## انتگرال فوریه

اگر تابع  $f(x)$  در فاصله  $(-\infty, +\infty)$  مطلقاً انتگرال پذیر باشد یعنی  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$  هم گرا باشد این امکان وجود دارد که تابع مذکور را در بیان انتگرالی که اصطلاحاً انتگرال فوریه تابع نامیده می شود به فرم زیر بنویسیم.

$$f(x) = \int_0^{\infty} (A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x) d\omega$$

که در آن ضرایب انتگرال فوریه به صورت زیر به دست می آید.

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \cos \omega x \cdot dx$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \sin \omega x \cdot dx$$

توجه کنید اگر  $f(x)$  تابعی زوج باشد  $B(\omega) = 0$  و اگر فرد باشد  $A(\omega) = 0$  است.

## قضیه دیریکله و بحث هم گرایی انتگرال های فوریه

الف) اگر  $f(x)$  در نقطه  $x_0$  پیوسته باشد آن گاه مقدار انتگرال فوریه تابع در نقطه  $x_0$  برابر  $f(x_0)$  است.

ب) اگر  $f(x)$  در نقطه  $x_0$  گسسته باشد آن گاه مقدار انتگرال فوریه تابع در نقطه  $x_0$  برابر  $\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$  است.

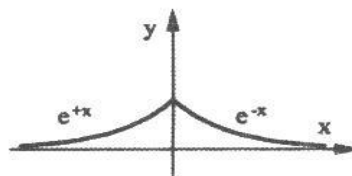
(از این موضوع دریافتن مقدار هم گرایی برخی انتگرال های ناسره استفاده می کنیم).

مثال : کدامیک از توابع زیر دارای انتگرال فوریه می باشد.

حل :

$$f(x) = e^{-|x|} \rightarrow f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ e^{+x} & x < 0 \end{cases}$$

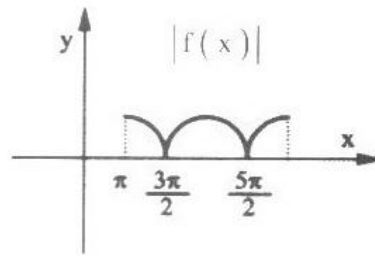
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \xrightarrow{\text{زوج بودن تابع}} 2 \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -2e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 2$$



پس تابع دارای انتگرال فوریه می باشد.

$$2) f(x) = \begin{cases} 0 & x < \pi \\ \cos x & x > \pi \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\cos x| dx = \int_{\pi}^{\infty} |\cos x| dx = \infty \text{ نامحدود}$$



پس  $g(x)$  انتگرال فوریه ندارد.

**مثال:** تابع  $f(x) = f(-x) = e^{-2x}; x > 0$  مفروض است با استفاده از انتگرال فوریه این تابع حاصل انتگرال زیر را به دست آورید.

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{4+x^2} dx$$

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-2x} \cos \omega x dx \text{ و } B(\omega) = 0$$

**حل:** با توجه به زوج بودن تابع داریم:

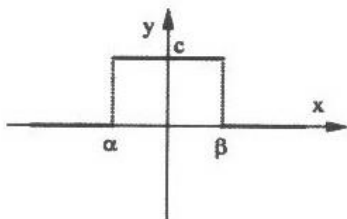
$$F(s) = L\{f(x)\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \Rightarrow A(\omega) = \frac{2}{\pi} L[\cos \omega x] \Big|_{s=2} = \frac{2}{\pi} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \Big|_{s=2} = \frac{4}{\pi(4 + \omega^2)}$$

پس انتگرال فوریه تابع چنین است.  $f(x) = \int_0^{\infty} \frac{4}{\pi(4 + \omega^2)} \cos \omega x d\omega$

در  $x = 2$  که نقطه پیوستگی تابع  $f(x)$  می باشد، طبق قضیه دیریکله داریم:

$$f(2) = \int_0^{\infty} \frac{4 \cos 2\omega}{\pi(4 + \omega^2)} d\omega = e^{-4} \longrightarrow \int_0^{\infty} \frac{\cos 2\omega}{4 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi e^{-4}}{4}$$

**مثال:** در صورتی که  $f(x) = \begin{cases} 0 & x < \alpha \\ c & \alpha < x < \beta \\ 0 & x > \beta \end{cases}$  و مقادیر  $\alpha < 0$  و  $\beta > 0$  و  $c$  اعداد ثابتی باشند و علاوه بر این



$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda \text{ آن گاه، مقادیر } \alpha, \beta, c \text{ را بیابید؟}$$

**حل:** با توجه به شکل تابع و با توجه به فرم انتگرالی بیان شده برای تابع  $f(x)$  (که فرم انتگرال فوریه کسینوسی می باشد)، نتیجه می گیریم که تابع  $f(x)$  باید زوج باشد و لذا لازم است که داشته باشیم:  $\alpha = -\beta$ .

حال انتگرال فوریه تابع  $f(x)$  را با این شرط می نویسیم:

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega x d\omega, A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x dx$$

$$\Rightarrow A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\beta} c \cos \omega x dx = \frac{2}{\pi} c \frac{1}{\omega} \sin \omega x \Big|_0^{\beta} = \frac{2c}{\pi \omega} \sin \omega \beta$$

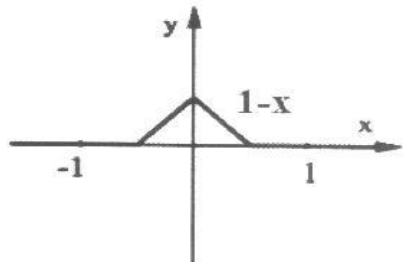
بنابراین خواهیم داشت:

$$\Rightarrow f(x) = \int_0^{\infty} \frac{2c}{\pi \omega} \sin \omega \beta \cos \omega x d\omega$$

لذا با مقایسه این رابطه و فرم انتگرالی داده شده در فرض مساله، به دست می آید:

$$\beta = 1, \quad \frac{2c}{\pi\omega} = \frac{1}{\omega} \Rightarrow c = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = -1$$

**مثال:** در معادله انتگرالی زیر  $\int_0^{\infty} f(\omega) \cos \omega x \, d\omega = \begin{cases} 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$  تابع  $f(\omega)$  برابر است با:



**حل:** از فرض مساله مشخص می شود تابع  $h(x) = \begin{cases} 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$  به صورت زوج

توسیع داده شده و سپس انتگرال فوریه آن نوشته شده است.

لذا با انجام این کار خواهیم داشت:

$$h(x) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega x \, d\omega$$

که در آن:

$$f(\omega) = A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} h(x) \cos \omega x \, dx$$

با محاسبه  $A(\omega)$  خواهیم داشت:

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1-x) \cos \omega x \, dx = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{(1-x)}{\omega} \sin \omega x - \frac{1}{\omega^2} \cos \omega x \right\} \Big|_0^1$$

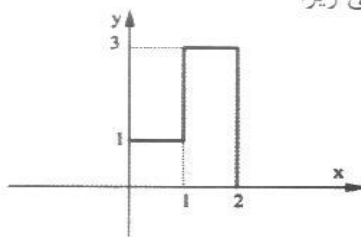
$$= \frac{2}{\pi} \left( -\frac{1}{\omega^2} \cos \omega + \frac{1}{\omega^2} \right) = \frac{2}{\pi \omega^2} (1 - \cos \omega)$$

$$\Rightarrow f(\omega) = \frac{2}{\pi \omega^2} (1 - \cos \omega)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cos \omega x \, d\omega + B(\omega) \sin \omega x \, d\omega$$

مشتق	انتگرال
$1-x$	$\cos \omega x$
$-1$	$\frac{1}{\omega} \sin \omega x$
$0$	$-\frac{1}{\omega^2} \cos \omega x$

**مثال:** مطلوب است محاسبه  $P(\omega)$  از معادله انتگرالی زیر:



$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 3 & 1 < x < 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin \omega x \, dx$$

**حل:** قاعدتاً بیان انتگرالی سمت چپ باید انتگرال فوریه تابع سمت راست باشد، منتها تابع سمت راست فقط برای  $x$ های مثبت تعریف شده، مضافاً بیان انتگرالی نوشته شده فقط دارای  $\cos \omega x$  می باشد، بنابراین می توان این طور پنداشت تابع سمت چپ برای  $x$ های منفی به صورت زوج گسترش پیدا کرده و بعد انتگرال فوریه آن نوشته شده، پس باید:

$$P(\omega) = A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x \, dx = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^1 (1) \cos \omega x \, dx + \int_1^2 3 \cos \omega x \, dx + \int_2^{\infty} 0 \cos \omega x \, dx \right\}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\sin \omega x}{\omega} \Big|_0^1 + \frac{3 \sin \omega x}{\omega} \Big|_1^2 \right\} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{3 \sin(2\omega) - 2 \sin(\omega)}{\omega}$$

**مثال:** فرض کنید داشته باشیم  $f(x) = \int_0^{\infty} P(\omega) \sin \omega x \cdot d\omega$  ,  $x f(x) = \int_0^{\infty} q(\omega) \cos \omega x \cdot d\omega$  , آن گاه رابطه بین  $\frac{dP(\omega)}{d\omega}$  و  $q(\omega)$  را بیابید.

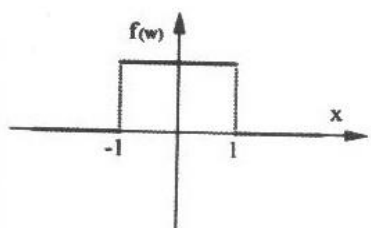
$$P(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cdot \sin \omega x \cdot dx \quad q(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} x \cdot f(x) \cdot \cos \omega x \cdot dx$$

**حل:** بدیهی است که:

بنابراین ملاحظه می شود:

$$\frac{dP(\omega)}{d\omega} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \omega} (f(x) \cdot \sin \omega x) \cdot dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cdot x \cdot \cos \omega x \cdot dx = q(\omega) \longrightarrow \frac{dP(\omega)}{d\omega} = q(\omega)$$

**مثال:** با فرض آن که  $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$  باشد. آن گاه انتگرال های زیر را به دست آورید؟



$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x^5}{x} \cdot dx$$

$$J = \int_0^{\infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot dx$$

**حل:** در  $x=0$  که نقطه پیوستگی تابع است طبق قضیه دیریکله داریم:

$$f(0) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{\sin \omega}{\omega} \cos \omega(0) \cdot d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot d\omega = \frac{\pi}{2}$$

**حل (الف):**

$$\begin{cases} \omega = x^5 \Rightarrow d\omega = 5x^4 \cdot dx \\ \omega = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \omega = \infty \Rightarrow x = \infty \end{cases}$$

با تغییر متغیر  $\omega = x^5$  خواهیم داشت:

پس به دست می آید:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot d\omega = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\text{بازنویسی درحسب } x} \int_0^{\infty} \frac{\sin x^5}{x^5} \cdot 5x^4 \cdot dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x^5}{x} \cdot dx = \frac{\pi}{10}$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x^5}{x} \cdot dx = \frac{\pi}{10}$$

**حل (ب):** با اعمال روش جزء به جزء داریم:

$$J = \int_0^{\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^2} \cdot dx \Rightarrow J = -\frac{1}{x} \sin^2 x \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{x} \cdot dx$$

$$= 0 + \int_0^{\infty} \frac{\sin 2x}{x} \cdot dx \xrightarrow{2x = \omega \Rightarrow dx = \frac{d\omega}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{d\omega}{2}$$

$x=0 \Rightarrow \omega=0$   
 $x=\infty \Rightarrow \omega=\infty$

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot \frac{d\omega}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} \cdot d\omega = \frac{\pi}{2}$$

مشتق	انتگرال
$\sin^2 x$	$\frac{1}{x^2}$
$\sin 2x$	$-\frac{1}{x}$



**مثال :** با استفاده از انتگرال فوریه سینوسی، برای تابع  $f(x) = e^{-x}$  که در آن  $x \geq 0$  می‌باشد، مقدار انتگرال زیر کدام است؟

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{1+x^2} dx, m > 0$$

حل :

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x} \sin \omega x dx = \frac{2}{\pi} L(\sin \omega x) \Big|_{s=-1} = \frac{2}{\pi} \frac{\omega}{1+\omega^2}$$

لذا با تبدیل  $x \rightarrow m$  و  $\omega \rightarrow$  نتیجه می‌شود.

$$e^{-m} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{1+x^2} dx \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}$$

دقت کنید در حقیقت یکی از انتگرال‌های لاپلاس را در این مساله به دست آورده‌ایم.

## تبدیل فوریه

تبدیل فوریه تابع  $f(x)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(f(x)) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx$$

و تبدیل فوریه معکوس  $F(\omega)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F^{-1}(F(\omega)) = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i\omega x} \cdot F(\omega) d\omega$$

## تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی:

$$F_c(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos \omega x dx = \tilde{f}_c(\omega)$$

$$F_c^{-1}(\tilde{f}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{f}_c(\omega) \cos \omega x \cdot d\omega = f(x)$$

به همین ترتیب تبدیلات سینوسی فوریه و معکوس آن به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$F_s(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cdot \sin \omega x \cdot dx = \tilde{f}_s(\omega)$$

$$F_s^{-1}(\tilde{f}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{f}_s(\omega) \cdot \sin \omega x \cdot d\omega = f(x)$$

## چند قضیه:

**قضیه (۱)** هرگاه  $F\{f(x)\} = F(\omega)$  باشد خواهیم داشت:

$$F\{f^{(n)}(x)\} = (i\omega)^n F(\omega)$$

**قضیه (۲)** به سادگی می‌توان نشان داد:

$$F(e^{-a|x|}) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

**قضیه (۳)** (تقارن):

$$F(F(x)) = 2\pi f(-\omega)$$

و نیز می توان نشان داد:

$$F\left(\frac{1}{x^2 + a^2}\right) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|}$$

$$\text{مثال : تبدیل فوریه } f(x) = \begin{cases} 1 & -2 < x < 2 \\ 0 & \text{بقیه جاها} \end{cases} \text{ را بیابید.}$$

حل :

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx = \int_{-2}^{+2} e^{-i\omega x} (1) dx = \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega x} \Big|_{-2}^{+2} = -\frac{1}{i\omega} \{e^{-2i\omega} - e^{2i\omega}\} \\ &= \frac{1}{-i\omega} \{(\cos 2\omega - i \sin 2\omega) - (\cos 2\omega + i \sin 2\omega)\} = \frac{-1}{i\omega} (-2i \sin 2\omega) = \frac{2}{\omega} \sin 2\omega \end{aligned}$$

$$\text{مثال : معادله دیفرانسیل } y'' + 4y = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-2x} & x > 0 \end{cases} \text{ را در نظر بگیرید، چنانچه تبدیل فوریه } y(x) \text{ را } Y(\omega) \text{ بنامیم،}$$

به دست آورید؟

حل : از دو طرف معادله تبدیل فوریه می گیریم.

$$\begin{aligned} (i\omega)^2 Y(\omega) + 4Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} f(x) dx \Rightarrow (-\omega^2 + 4)Y(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-i\omega x} \cdot e^{-2x} dx \Rightarrow (4 - \omega^2)Y(\omega) = \frac{1}{s+2} \Big|_{s=i\omega} \\ \Rightarrow Y(\omega) &= \frac{1}{(i\omega+2)(4-\omega^2)} \end{aligned}$$

مثال : تبدیل فوریه سینوسی معکوس  $e^{-3\omega}$  را بیابید.

حل :

$$f(x) = F_s^{-1}(e^{-3\omega}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-3\omega} \sin \omega x d\omega = \sqrt{\frac{2}{\pi}} L\{\sin \omega x\} \Big|_{s=3} \Rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{x}{s^2 + x^2} \Big|_{s=3} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{x}{9 + x^2}$$

مثال : تبدیل فوریه کسینوسی تابع  $f(x) = x e^{-x}$  را بیابید.

حل :

$$F_c(f(x)) = \tilde{f}_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cdot \cos \omega x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-x} \cos \omega x dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} L\{x \cos x\} \Big|_{s=1}$$

$$L\{\cos \omega x\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \Rightarrow L\{x \cos \omega x\} = -\left(\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right)' = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

$$\Rightarrow F_c(f(x)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2} \right\} \Big|_{s=1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \omega^2}{(1 + \omega^2)^2}$$

نکته: چند انتگرال مهم:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{k^2 + \omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2k} e^{-kx} \quad (k > 0, x > 0)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\omega \sin(\omega x)}{k^2 + \omega^2} d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^{-kx} & (k > 0, x > 0) \\ -\frac{\pi}{2} e^{-kx} & (k < 0, x > 0) \end{cases}$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cos(ax) dx = \begin{cases} 1 - a & 0 \leq a \leq 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

حفظ کردن این انتگرال‌ها در حل مسایل بسیار موثر خواهد بود.