فصل دوم

توابع مختلط

توابع مختلط

یادآوری

در عدد مختلط $z = x + iy$ که در آن $i = \sqrt{-1}$ و $\operatorname{Im}(z) = y$ و $\operatorname{Re}(z) = x$، روابط اولیه زیر برقرار است:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\bar{z}$ مزدوج $= x - iy$

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$$

حال اگر $z = x + iy$ و $z_0 = x_0 + iy_0$ یک عدد مختلط باشد داریم:

$|z - z_0| = R$ یک دایره به شعاع R و به مرکز z_0 می‌باشد.

$|z - z_0| + |z - z_1| = R$ بیانگر یک بیضی با کانون‌های z_0 و z_1 می‌باشد، (با شرط $R > |z_1 - z_0|$)

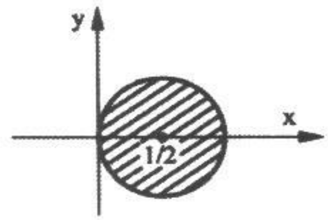
$|z - z_0| - |z - z_1| = R$ بیانگر یک هذلولی با کانون‌های z_0 و z_1 می‌باشد، (با شرط $|z_1 - z_0| > R$)

رابطه $|z - z_0| = |z - z_1|$ بیانگر عمود منصف پاره خطی است که دو سر آن روی z_0 و z_1 است.

ـ فرم قطبی یک عدد مختلط به صورت $z = re^{i\theta}$ است که $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

مثال: مکان هندسی نقاطی از صفحه، که با رابطه $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)>1$ تعریف می‌شود را مشخص کنید.

حل:



$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}\times\frac{x-iy}{x-iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}>1\Rightarrow x^2+y^2-x<0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2<\frac{1}{4}$$

بنابراین مکان هندسی موردنظر داخل دایره‌ای به مرکز $\left(\frac{1}{2},0\right)$ و شعاع $\frac{1}{2}$ است.

مثال: هرگاه $z=x+iy$ باشد، آن‌گاه نامعادله $\frac{|z-3|}{|z+3|}<2$ را ساده کنید.

حل:

$$\frac{|x+iy-3|}{|x+iy+3|}<2 \quad\rightarrow\quad \frac{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}{\sqrt{(x+3)^2+y^2}}<2$$

$$\frac{(x-3)^2+y^2}{(x+3)^2+y^2}<4 \quad\rightarrow\quad 3x^2+30x+27+3y^2>0 \quad\rightarrow\quad x^2+10x+9+y^2>0 \quad\rightarrow\quad (x+5)^2-25+9+y^2>0$$

$$\rightarrow\quad (x+5)^2+y^2>16 \quad\rightarrow\quad |z+5|>4$$

توابع مختلط

حد و پیوستگی در توابع مختلط

تابع مختلط $w=f(z)$ که $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ را در نظر بگیرید، می‌گوییم این تابع مختلط در نقطه z_0 دارای حد است، هرگاه هر دو تابع دو متغیره $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) دارای حد تابع باشند. همچنین می‌گوییم تابع مختلط $w=f(z)$ در نقطه $z_0=x_0+iy_0$ پیوسته است هرگاه هر دو تابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در (x_0,y_0) پیوسته باشد.

به عبارت دیگر:

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \quad\Rightarrow\quad \lim_{z\to z_0} f(z)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)+i\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)$$

تذکر: ملاحظه می‌شود که بحث حد توابع مختلط ارتباط نزدیکی با حد توابع دو متغیر دارد و می‌دانیم حاصل یک حد دو متغیره در صورت وجود، باید منحصر به فرد باشد و لذا اگر دو طریق مختلفی که برای محاسبهٔ یک حد دو متغیره استفاده می‌شود به دو جواب مختلف منجر شود حاصل آن حد دو متغیره موجود نیست.

مثال : مقدار ثابت α را چقدر انتخاب کنیم تا تابع مختلط $f(z)=\begin{cases}\dfrac{z+\operatorname{Im} z}{2\bar{z}+\operatorname{Re} z} & z\neq 0\\ \alpha & z=0\end{cases}$ در $z=0$ پیوسته باشد.

حل :

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z+\operatorname{Im} z}{2\bar{z}+\operatorname{Re} z}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+iy)+y}{2(x-iy)+x}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y(i+1)}{3x-2iy}=\frac{0}{0}$$ مبهم

اگر ترتیب میل کردن متغیر را به صفر در نظر بگیریم:

۱ـ اول فرض می‌کنیم که $x\to 0$ و بعد $y\to 0$ میل می‌کند.

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{(x+iy)+y}{2(x-iy)+x}=\lim_{y\to 0}\frac{y(i+1)}{-2iy}=\frac{i+1}{-2i}$$

۲ـ اول فرض می‌کنیم که $y\to 0$ و بعد $x\to 0$ میل می‌کند.

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{(x+iy)+y}{2(x-iy)+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$$

پس چون دو جواب مختلف به‌دست آوردیم تابع در $z=0$ دارای حد نیست و به ازای هیچ مقدار α در این نقطه پیوسته نمی‌شود.

مثال : تابع مختلط $f(z)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}+i\dfrac{xy}{x^2-y^2}$ را در نظر بگیرید، آیا این تابع در نقطه $z=0$ دارای حد می‌باشد.

حل :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y)=\lim\frac{xy^2}{x^2+y^2}=\xrightarrow{\text{در مختصات قطبی}}\lim_{r\to 0,\forall\theta}\frac{r\cos\theta . r^2\sin^2\theta}{r^2}=\lim_{r\to 0,\forall\theta} r\cos\theta.\sin^2\theta=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y)=\lim\frac{xy}{x^2-y^2}\xrightarrow{\text{در مختصات قطبی}}\lim_{r\to 0,\forall\theta}\frac{r\cos\theta . r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta.\sin\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$$ (وابسته به θ است (حد موجود نیست))

پس در کل حد $f(z)$ در $z=0$ وجود ندارد.

مشتق تابع مختلط

می‌گوییم تابع $f(z)$ در نقطه z_0 مشتق‌پذیر است هرگاه حد زیر موجود باشد.

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

و هم‌چنین $f'(z)$ در صورت وجود از رابطهٔ زیر نیز به‌دست می‌آید:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

مثال : تابع $f(z)=\operatorname{Im}(z)$ مفروض است. این تابع در کجا پیوسته و در کجا مشتق‌پذیر است؟

حل :

$U=0 \quad V=y \quad f(z)=y$

به وضوح دیده می‌شود که توابع U و V همه جا پیوسته هستند، لذا $f(z)$ همه جا پیوسته است.

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\mathrm{Im}(z+\Delta z)-\mathrm{Im}(z)}{\Delta z}=\lim_{(\Delta y,\Delta x)\to(0,0)}\frac{(y+\Delta y)-y}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{(\Delta y,\Delta x)\to(0,0)}\frac{\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\begin{cases}\Delta x\to 0 & , \quad f'(z)=\frac{1}{i}\\ \Delta y\to 0 & , \quad f'(z)=0\end{cases}$$

پس حد مذکور موجود نیست و لذا $f(z)$ هیچ‌جا مشتق ندارد.

تعاریف:

می‌گوییم تابع $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی است هرگاه در این نقطه یک همسایگی به شعاع ε از این نقطه مشتق‌پذیر باشد (بنابراین مشتق‌پذیر بودن یک تابع در یک نقطه شرط لازم و نه کافی برای تحلیلی بودن آن تابع در نقطه مذکور است).

تمام توابع چند جمله‌ای از z مانند $f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}\cdots+a_0$ که در آن n عددطبیعی و $a_n,\dots,a_0$ اعداد مختلط باشند همه‌جا تحلیلی هستند.

تمام توابع گویا مانند $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ که در آن $P(z)$ و $Q(z)$ دو چند جمله‌ای از z می‌باشند در همه جا به جز احتمالاً صفرهای مخرج تحلیلی هستند.

توابع $\sin z$، $\cos z$، e^z همه جا تحلیلی هستند.

ترکیب دو تابع تحلیلی، fog، یک تابع تحلیلی است.

نقطه تکین: *فرض کنید تابع مختلط $f(z)$ در تمام نقاط به جز نقاطی خاص تحلیلی باشد به آن نقاط خاص، نقاط تکینی تابع گفته می‌شود.* بنابراین اگر تابعی هیچ جا تحلیلی نباشد، هیچ نقطهٔ تکینی ندارد.

به طور مثال در تابع $f(z)=e^{\cos z}+z^2$، چون $\cos z$ و e^z و z^2 توابعی تحلیلی هستند پس جمع آن‌ها نیز یک تابع تحلیلی می‌باشد.

چون تابع $f(z)=\mathrm{Im}(z)$ هیچ‌جا مشتق‌پذیر نیست، بنابراین در هیچ‌جا تحلیلی نیست، پس اصلاً نقطهٔ تکینی ندارد.

قضایای کوشی ـ ریمان

الف) قضیه اول کوشی ـ ریمان

هرگاه تابع مختلط $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ در نقطه $z_0=x_0+iy_0$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه: $f'(z_0)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_{(x_0,y_0)}$

و توابع $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) در شرایط زیر که به معادلات کوشی ـ ریمان مشهورند صدق می‌کنند.

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

قضیه دوم کوشی - ریمان

تابع مختلط $w=f(z)=u(x,y)+v(x,y)$ را در نظر بگیرید. چنانچه توابع v و u در نقطه (x_0,y_0) معادلات کوشی - ریمان را ارضا کنند، و توابع v و u و u_x و u_y و v_x و v_y در نقطه (x_0,y_0) و همسایگی آن پیوسته باشند، آن‌گاه تابع مختلط $w=f(z)$ در نقطه $x_0+iy_0=z_0$ مشتق‌پذیر است.

توجه کنید برقراری معادلات کوشی - ریمان در یک نقطه شرط لازم ولی غیرکافی برای مشتق داشتن یک تابع مختلط در آن نقطه است. بنابراین عدم برقراری معادلات کوشی - ریمان در یک نقطه عدم مشتق‌پذیری تابع مختلط مورد نظر در نقطهٔ مذکور را نتیجه می‌دهد.

مثال : تابع مختلط زیر مفروض است این تابع در چه نقاطی مشتق‌پذیر است و مشتق آن در آن نقاط چیست؟

$$f(z)=2\operatorname{Re} z+\bar{z}+z^2$$

حل :

$$f(z)=2x+x-iy+x^2-y^2+2ixy$$

$$\begin{cases} u(x,y)=3x+x^2-y^2 \\ v(x,y)=2xy-y \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3+2x \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=2x-1$$

چون $\frac{\partial v}{\partial y}\neq\frac{\partial u}{\partial x}$ بنابراین تابع $f(z)$ در هیچ کجا مشتق‌پذیر نیست.

مثال : تابع مختلط زیر را در نظر بگیرید در چه نقاطی مشتق‌پذیر می‌باشد؟

$$f(z)=\operatorname{Re} z^2+iz\bar{z}$$

حل :

$$f(z)=(x^2-y^2)+i(x^2+y^2)\rightarrow\begin{cases} u=x^2-y^2 \\ v=x^2+y^2 \end{cases}$$

برقراری معادلات کوشی - ریمان می‌طلبد:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow 2x=2y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-\partial v}{\partial x}=-2y=-2x \end{cases}$$

بنابراین معادلات کوشی - ریمان فقط روی خط $y=x$ برقرار است.

چون توابع u و v و u_x، u_y، v_x و v_y همه جا پیوسته است.

بنابراین تابع در اطراف خط $y=x$ نیز پیوسته است و $f(z)$ در روی خط $y=x$ مشتق‌پذیر است:

$f'(z)=2x+i(2x)$ (روی خط $y=x$)

مثال : اگر $f(z)=-\operatorname{Re}(z^2)+iz\bar{z}$ آنگاه تابع $f(z)$ در کجا مشتق‌پذیر است؟

$f(z)=y^2-x^2+i(y^2+x^2)$ باشد، در این صورت داریم: $v=y^2+x^2$ و $u=y^2-x^2$ لذا برای برقرای معادلات کوشی ریمان باید داشته باشیم:

حل :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow -2x=2y\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow 2y=-2x\end{cases}$$

معادلات مذکور تنها روی خط $y=-x$ برقرارند و با استفاده از قضیه دوم کوشی ریمان می‌توان نشان داد، تنها روی این خط تابع $f(z)$ مشتق‌پذیر است بنابراین تابع در هیچ کجا (حتی روی خط مزبور) تحلیلی نیست.

تابع همساز

تابع حقیقی $h(x,y)$ را تابعی همساز می‌گوییم هرگاه معادله لاپلاس را ارضا کند.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0$$

قضیه: چنانچه تابع مختلط $w=f(x)=u(x,y)+iv(x,y)$ تابعی تام باشد، یعنی همه‌جا تحلیلی باشد، آن‌گاه معادلات کوشی ریمان $\begin{cases}u_x=v_y\\ u_y=-v_x\end{cases}$ همه جا برقرارند و نیز هر دو تابع v و u توابعی همسازند و اصطلاحاً در این شرایط می‌گوییم v مزدوج همساز u می‌باشد.

مثال : می‌دانیم تابع $f(x)=u(y)+iv(x,y)$ تابعی همواره تحلیلی است کلی ترین ضابطه‌ای که $f(z)$ برحسب z را دارد مشخص کنید:

حل :

معادلات C. R باید همواره برقرار باشد.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

از آن‌جا که $u=u(y)$ لذا $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ و از معادله اول داریم:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=0\rightarrow v=v(x)$$

پس از معادله دوم داریم:

$$\underbrace{u'(y)}_{\text{عبارت برحسب } y}=-\underbrace{v'(x)}_{\text{عبارت برحسب } x}=k$$

توجه کنید که رابطه‌ی $u'(y)=-v'(x)$. تنها زمانی برقرار خواهد بود که هر دو تابع، تابع ثابت باشند.

پس $\quad u(y)=ky+A \leftarrow u'(y)=k$

$v(x)=-kx+B \leftarrow v'(x)=-k$

پس داریم:

$$f(z)=(ky+A)+i(-kx+B)=-ik(x+iy)+A+iB$$

$$f(z)=-ikz+c$$

نکته : توجه کنید، وقتی تابع تحلیلی $f(z)$ برحسب (x,y) **پیدا شد، برای نوشتن آن بر حسب** z **کافی است** همه x ها را به z و همه yها را به صفر تبدیل کنیم.

مثال : چنانچه u مزدوج همساز v و v مزدوج همساز u باشد. توابع u و v باید دارای چه شرطی باشند؟

حل :

$$v \text{ مزدوج همساز } u \Rightarrow \underset{\text{تابع تحلیلی}}{v+iu} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases}$$

$$u \text{ مزدوج همساز } v \Rightarrow \underset{\text{تابع تحلیلی}}{u+iv} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

با کمی مقایسه روابط داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0 \rightarrow u = \text{ثابت}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0 \rightarrow v = \text{ثابت}$$

مثال : اگر تابع $f(z)=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)+i\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$ همه جا تحلیلی باشد، معادلات حاکم بر u و v را به‌دست آورید.

حل :

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_x+v_y)=\frac{\partial}{\partial y}(v_x-u_y) \rightarrow u_{xx}+v_{xy}=v_{xy}-u_{yy} \rightarrow u_{xx}+u_{yy}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(u_x+v_y)=-\frac{\partial}{\partial x}(v_x-u_y) \rightarrow u_{xy}+v_{yy}=-v_{xx}+u_{xy} \rightarrow v_{yy}+v_{xx}=0$$

مثال : فرض کنید داشته باشیم $u(x,y)=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$ چنانچه $v(x,y)$ مزدوج همساز این تابع باشد و داشته باشیم $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ مطلوب است محاسبه $f'(i)$.

حل :

$$f'(z)=u_x-iu_y$$

$$u_x=2xe^{x^2-y^2}\cos 2xy-2ye^{x^2-y^2}\sin 2xy$$

$$u_y=-2ye^{x^2-y^2}\cos 2xy-2xe^{x^2-y^2}\sin 2xy$$

$$f'(i)=f'(0,1)=0-i\left(-2e^{0^2-(1)^2}\cos 0\right)=+2ie^{-1}$$

مثال : اولاً مقادیر a ، b و c را طوری پیدا کنید تا تابع $u(x,y)=x^4+ax^2y^2+2x^3+by^4+cxy^2$ تابع همساز باشد. سپس تابع تحلیلی $f(z)=u+iv$ را پیدا کنید.

حل : شرط همساز بودن تابع u ایجاب می‌کند:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \Rightarrow \left(12x^2+2ay^2+12x\right)+\left(2ax^2+12by^2+2cx\right)=0$$

چون روابط فوق می‌خواهد همواره به ازای هر x و y برقرار باشد، پس داریم:

x^2 ضریب: $12+2a=0 \to a=-6$

y^2 ضریب: $2a+12b=0 \to b=1$

x ضریب: $12+2c=0 \to c=-6$

برای به‌دست آوردن $f(z)$ می‌توان از دو روش جلو رفت.

الف) نخست مزدوج همساز u را پیدا می‌کنیم پس داریم:

$$u=x^4-6x^2y^2+2x^3+y^4-6xy^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \to \frac{\partial v}{\partial y}=4x^3-12xy^2+6x^2-6y^2 \to v(x,y)=4x^3y-4xy^3+6x^2y-2y^3+f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \to \frac{\partial v}{\partial x}=-\left(-12x^2y+4y^3-12xy\right) \to v(x,y)=4x^3y-4y^3x+6x^2y+g(y)$$

$$\to v(x,y)=4x^3y-4xy^3+6x^2y-2y^3+c$$

پس داریم:

$$f(z)=\left(x^4-6x^2y^2+2x^3+y^4-6xy^2\right)+i\left(4x^3y-4xy^3+6x^2y-2y^3+c\right)$$

حال با تبدیل $\begin{cases} x \to z \\ y \to 0 \end{cases}$ به‌دست می‌آید: $f(z)=z^4+2z^3+ic$

ب) بدون نیاز به محاسبه v با توجه به قضیه اول کوشی ـ ریمان می‌توان $f'(z)$ را به‌دست آورد.

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{i\partial u}{\partial y}=\left(4x^3-12xy^2+6x^2-6y^2\right)-i\left(-12x^2y+4y^3-12xy\right)$$

حال با تبدیل $\begin{cases} x \to z \\ y \to 0 \end{cases}$ به‌دست می‌آید $f'(z)=4z^3+6z^2$

حال از $f'(z)$ انتگرال می‌گیریم. $\to f(z)=z^4+2z^3+k$

مثال: اگر $u(x,y)=2^x\cos(y\ln 2)$ داده شده باشد، مزدوج همساز u و تابع مختلط تحلیلی $f(z)$ کدام است؟

$$\begin{cases} u_x=2^x\ln 2\cos(y\ln 2)=v_y \\ u_y=-2^x\ln 2\sin(y\ln 2)=-v_x \end{cases} \to v=2^x\sin(y\ln 2)+c$$

$$f(z)=2^x\cos(y\ln 2)+\left(2^x\sin(y\ln 2)+c\right)i$$

حال با تبدیل $\begin{cases} x \to z \\ y \to 0 \end{cases}$ به‌دست می‌آید: $f(z)=2^z+C$