فصل سوم

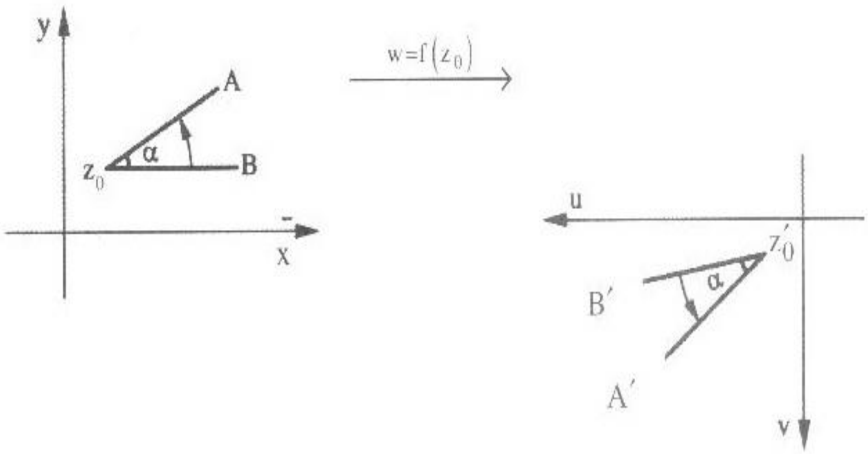
نگاشت‌ها

نگاشت

تابع مختلط $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ را در نظر بگیرید از نقطه نظر هندسی عملکرد این تابع را می‌توان به صورت یک نگاشت از صفحه z (صفحه (x,y)) به صفحه w (صفحه (u,v)) در نظر گرفت، بدین معنا که تحت این تابع مختلط یک نقطه مشخص $P(x_0,y_0)$ از صفحه z به یک نقطه مشخص مانند (u_0,v_0) از صفحه w تبدیل می‌شود.

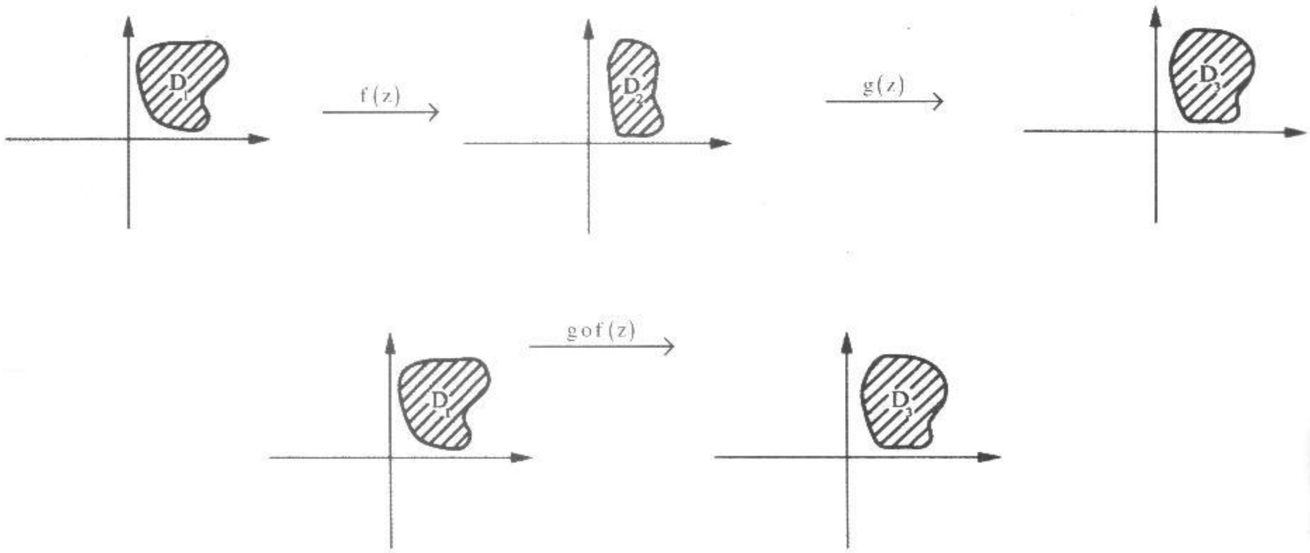
می‌گوییم تابع مختلط مانند $w=f(z)$ دارای نقطهٔ ثابتی مانند z_0 است هرگاه $f(z_0)=z_0$ باشد.

می‌گوییم تابع مختلط $w=f(z)$ در نقطه z_0 همدیس است، هرگاه هر زاویه به راس z_0 در صفحه xy توسط نگاشت مذکور به زاویه‌ای در صفحه uv تبدیل شود که از حیث اندازه و جهت مانند زاویه اول است.



قضیه: هرگاه $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی باشد و $f'(z_0)$ مخالف صفر باشد تابع $w=f(z)$ در نقطه z_0 همدیس است.

اصل ترکیب نگاشت‌ها:



مثال: تابع $f(z)=\frac{z^2-1}{z^2+1}$ مفروض است، این تابع در چه نقاطی از صفحهٔ مختلط همدیس نمی‌باشد؟

حل:

$z^2+1=0 \to z=\pm i$ (جاهایی که تابع تحلیلی نیست)

از طرفی داریم:

$$f'(z)=\frac{2z(z^2+1)-2z(z^2-1)}{(z^2+1)^2}=\frac{4z}{(z^2+1)^2}$$

$$f'(z)=0 \Rightarrow z=0$$

پس تابع در نقاط $z=\pm i, 0$ همدیس نمی‌باشد.

مثال: تابع $f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ در چه نقاطی همدیس نمی‌باشد؟

حل: نقاطی که تابع $f(z)$ در آن‌ها تحلیلی نمی‌باشد به صورت زیر مشخص می‌شوند:

$$\begin{cases} z=0 \\ \sin\frac{1}{z}=0 \Rightarrow \frac{1}{z}=k\pi \Rightarrow z=\frac{1}{k\pi} \end{cases}$$

از طرفی نقاطی که مشتق تابع $f(z)$ در آن‌ها صفر می‌باشد، بدین ترتیب محاسبه می‌شوند:

$$f'(z)=\frac{\frac{1}{z^2}\cos\frac{1}{z}}{\left(\sin\frac{1}{z}\right)^2}=0 \Rightarrow \cos\frac{1}{z}=0 \Rightarrow \frac{1}{z}=k\pi+\frac{\pi}{2} \Rightarrow z=\frac{1}{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)}$$

لذا برای تمام z ها به‌جز $z=\frac{1}{k\pi}$ و $z=0$ و $z=\frac{1}{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)}$ تابع همدیس خواهد بود.

۱) نگاشت خطی $w = az$ ($a \neq 0$ عدد مختلط دلخواه)

طبیعی است نگاشت مذکور همه جا تحلیلی است و از آن‌جا که $w' = a \neq 0$، این نگاشت همه جا همدیس است.

با فرض $w = \rho e^{i\varphi}\ ;\ z = re^{i\theta}\ ; a = r_0 e^{i\theta_0}$ داریم:

$$w = az \Rightarrow \rho e^{i\varphi} = re^{i\theta} \,.\, r_0 e^{i\theta_0} \Rightarrow \rho e^{i\varphi} = r_0 r\, e^{i(\theta_0 + \theta)}$$

پس داریم: $\rho = r_0 r$ و $\varphi = \theta_0 + \theta$

یعنی نگاشت مذکور انبساط یا انقباضی به اندازه $|r_0|$ و دورانی به اندازه θ_0 در جهت مثلثاتی بر روی تابع انجام می‌دهد. (بدیهی است اگر θ_0 منفی باشد جهت دوران خلاف جهت مثلثاتی خواهد بود.)

۲) نگاشت خطی $w = az + b$ ($b, a \neq 0$ دو عدد مختلط دلخواه)

می‌توان گفت که این نگاشت سه عمل زیر را انجام می‌دهد.

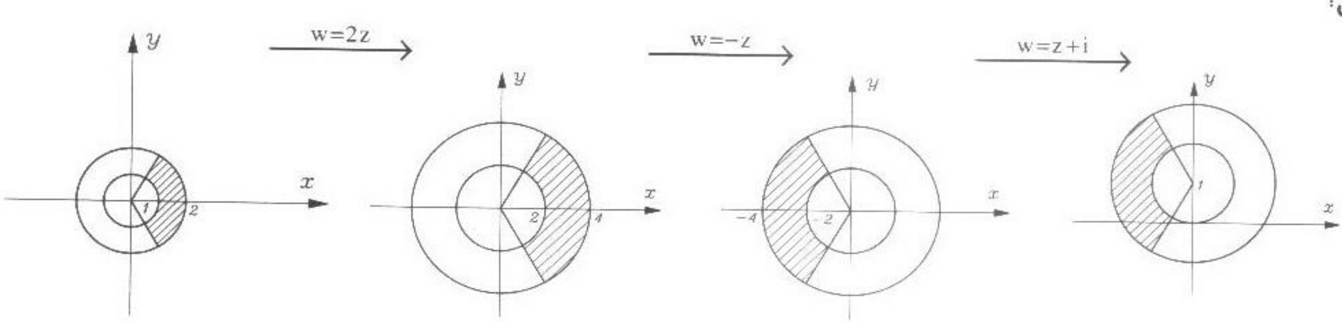
الف) انبساط یا انقباضی به اندازه $|a|$

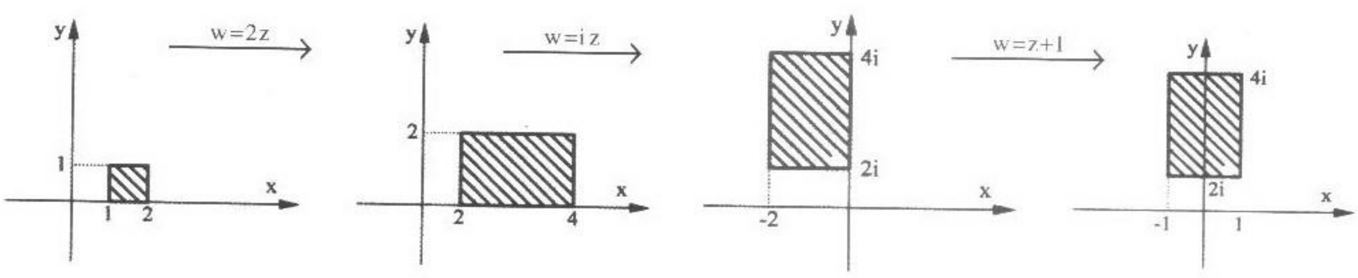
ب) دورانی به اندازه Arga

ج) انتقالی به اندازهٔ b

مثال: تبدیل یافته ناحیه $D_1 = \left\{z \,\middle|\, 1 < |z| < 2 \,,\, -\dfrac{\pi}{3} < \operatorname{Arg} z < \dfrac{\pi}{3}\right\}$ با نگاشت $w = -2z + i$ و تبدیل یافته ناحیه $D_2 = \left\{z \,\middle|\, 1 \le \operatorname{Re} z \le 2 \,,\, 0 \le \operatorname{Im} z \le 1\right\}$ با نگاشت $w = 2iz + 1$ را حساب کنید.

حل:





مثال: معادله منحنی $xy=1$ مفروض است تحت نگاشت $w=(1-i)z+2i$ معادله منحنی حاصله در صفحه $u-v$ چگونه خواهد بود؟

حل:

$$w=(1-i)z+2i \Rightarrow u+iv=(1-i)(x+iy)+2i \Rightarrow u+iv=x+iy-ix+y+2i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=x+y \\ v=y-x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{u+v-2}{2} \\ x=\dfrac{u-v+2}{2} \end{cases}$$

پس تبدیل یافته $xy=1$ با نگاشت مذکور چنین خواهد بود:

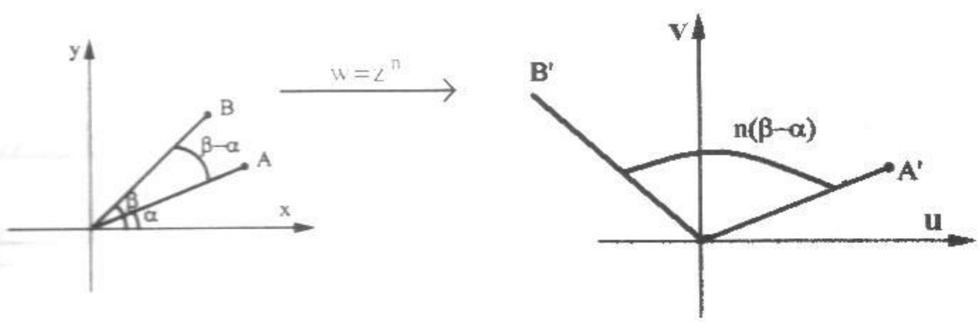
$$\left(\frac{u+v-2}{2}\right)\left(\frac{u-v+2}{2}\right)=1$$

۳) نگاشت توانی $w=z^n$ (n عدد طبیعی مخالف یک)

طبیعی است این نگاشت همه جا تحلیلی است و مشتق آن $w'=nz^{n-1}$ به جز در نقطه $z=0$ همه جا مخالف صفر است. بنابراین نگاشت در همه جا غیر از مبدا مختصات همدیس است.

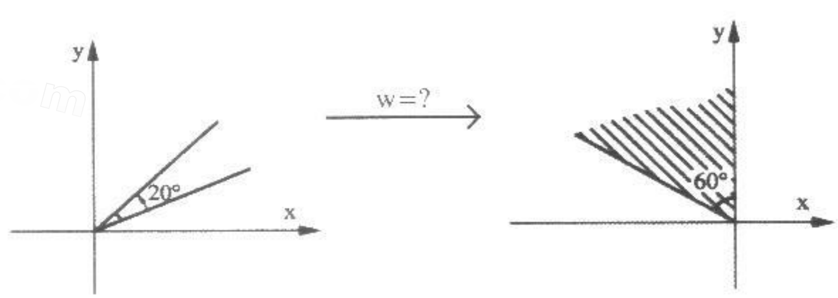
با فرض $w=\rho e^{i\varphi}$ و $z=re^{i\theta}$ داریم:

$$w=z^n \Rightarrow \rho e^{i\varphi}=\left(re^{i\theta}\right)^n \Rightarrow \rho e^{i\varphi}=r^n e^{in\theta} \Rightarrow \begin{cases} \rho=r^n \\ \varphi=n\theta \end{cases}$$

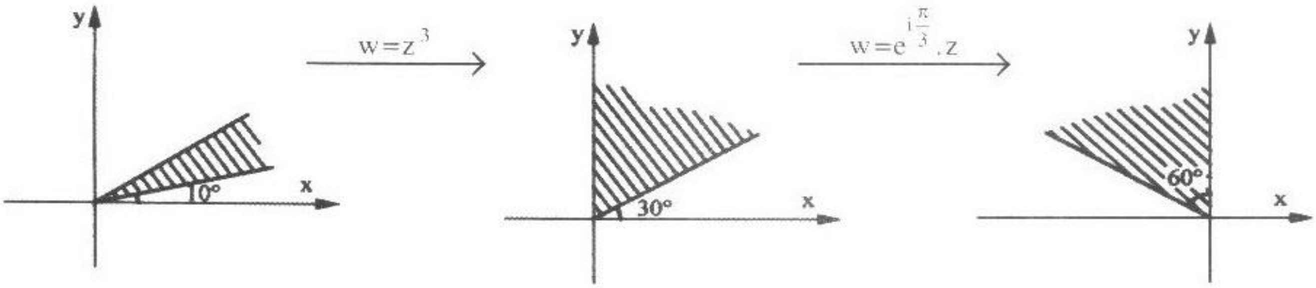


یعنی این نگاشت فاصله هر نقطه تا مبدا را بتوان n رسانده و زاویه شعاع حامل نقطه را n برابر می‌کند.

مثال: نگاشتی پیدا کنید که ناحیه $D:\left\{z \middle| 10 \le Agr(z) \le 30\right\}$ را به ناحیه $D'=\left\{w \middle| 90 \le Arg(w) \le 150\right\}$ بنگارد.

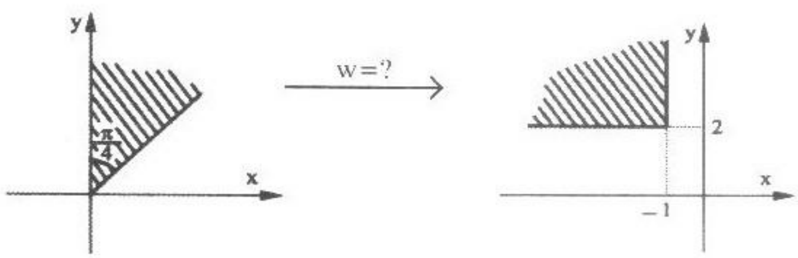


حل: می‌توان گفت:

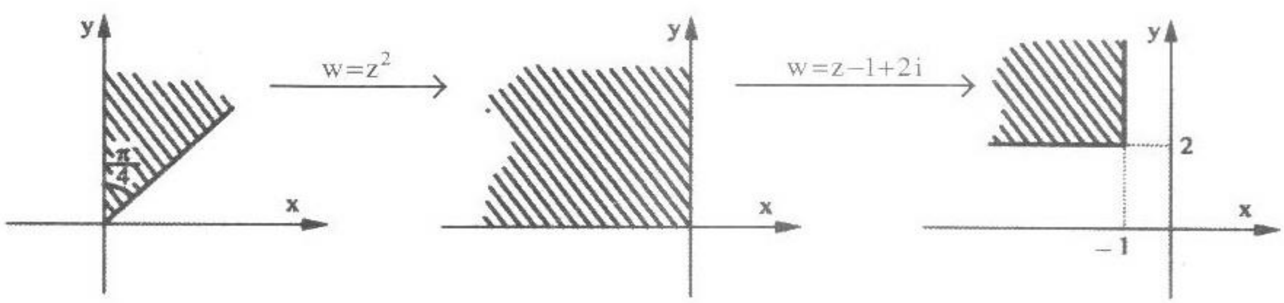


پس نگاشت مورد نظر برابر است با: $w = e^{\frac{i\pi}{3}} z^3$

مثال: نگاشتی را پیدا کنید که ناحیه $D = \left\{ z \middle| \frac{\pi}{4} \le Arg(z) < \frac{\pi}{2} \right\}$ را به ناحیه $D' = \left\{ w \middle| Re(w) \le -1 \,,\, Im(w) \ge 2 \right\}$ تبدیل کند.

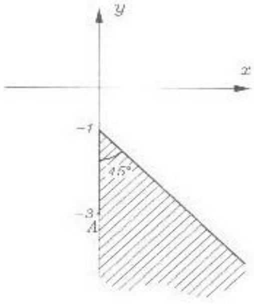


حل:



لذا نگاشت مورد نظر از ترکیب انتهایی دو نگاشت فوق قابل حصول است. $w = z^2 - 1 + 2i$

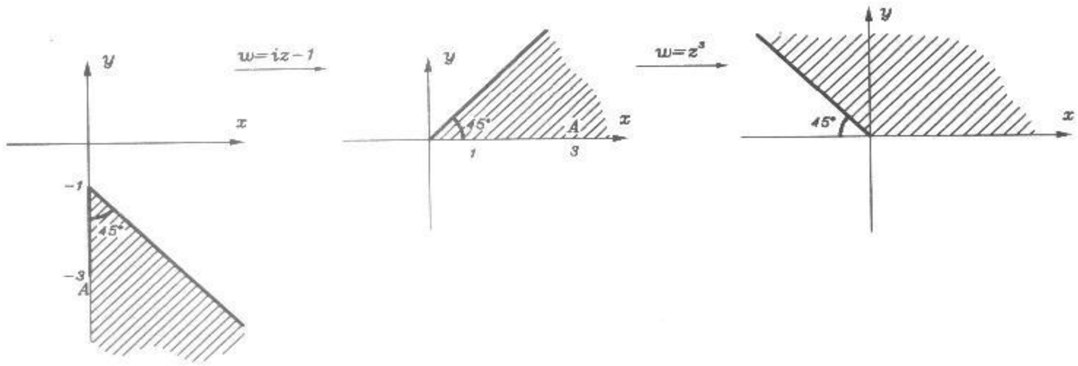
مثال: تبدیل یافته ناحیه نشان داده شده در شکل زیر را تحت نگاشت $w = (iz-1)^3$ بیابید.



حل: w را می‌توان با ترکیب از انتهای نگاشت‌های زیر در نظر گرفت:

$w = (iz-1) \,,\, z^3$

بنابراین با اعمال نگاشت‌های فوق از ابتدا داریم:



مثال: تحت نگاشت $w = z^3 - iz$ خط $x = 2$ به چه معادله‌ای تبدیل می‌شود؟

حل:

$$z^3 = (x+iy)^3 \rightarrow w = (x+iy)^3 - i(x+iy)$$

$$w = x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3 - ix + y$$

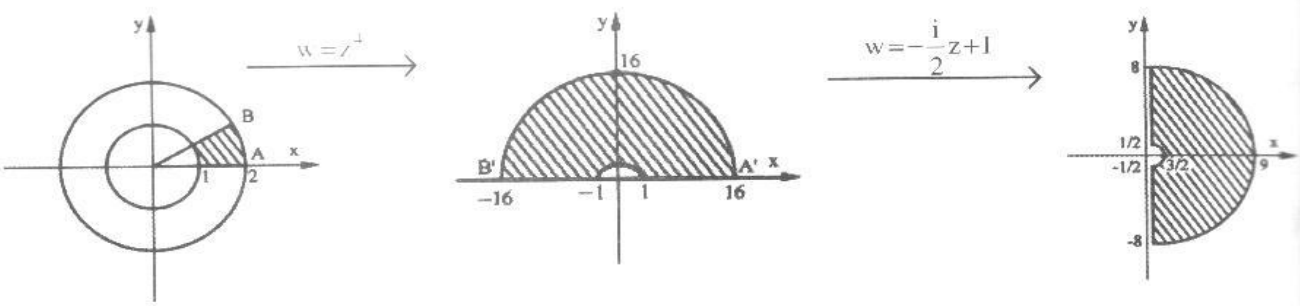
$$w = (x^3 - 3xy^2 + y) + (3x^2y - x - y^3)i \rightarrow \begin{cases} u = x^3 - 3xy^2 + y \\ v = 3x^2y - x - y^3 \end{cases}$$

چون تبدیل یافته $x = 2$ را می‌خواهیم، لذا داریم:

$$\begin{cases} u = 8 - 6y^2 + y \\ v = 12y - y^3 - 2 \end{cases}$$

مثال: تبدیل یافته ناحیه $D = \left\{ z \;\middle|\; 1 \le |z| \le 2 \,,\, 0 \le \operatorname{Arg}(z) \le \frac{\pi}{4} \right\}$ را تحت نگاشت $w = -\frac{i}{2}z^4 + 1$ بیابید؟

حل: نگاشت مذکور را می‌توان با ترکیب از انتهای دو نگاشت زیر به‌دست آورد. $w = z^4 \,,\, \frac{-i}{2}z + 1$



شکل هندسی ناحیه D' به صورت مقابل می‌باشد. $D' = \left\{ w \;\middle|\; 0.5 \le |w-1| \le 8 \,,\, \operatorname{Re}(w) \ge 1 \right\}$

۳) نگاشت ریشهٔ n ام، $w = \sqrt[n]{z}$ (n عدد طبیعی مخالف یک)

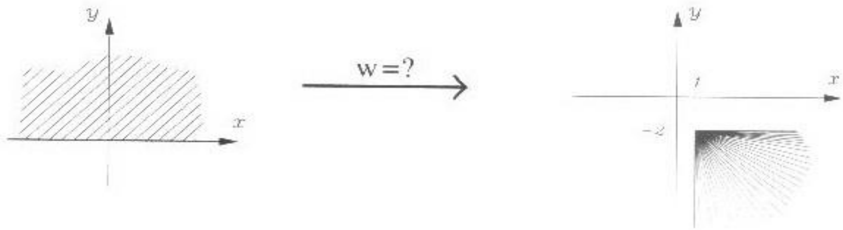
همان‌طور که می‌دانیم چنانچه $z = re^{i\theta}$ باشد در محاسبه ریشه n ام این عدد مختلط به n جواب می‌رسیم که از رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \times e^{i\frac{(\theta+2k\pi)}{n}} = \sqrt[n]{r}\left\{ \cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n} \right\} \qquad (0 \le k < n \;,\; k \in \mathbb{N})$$

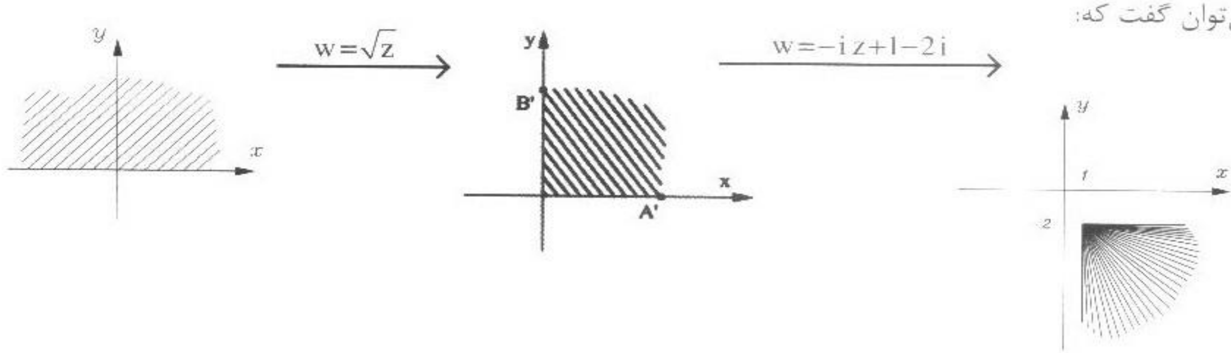
با انتخاب $k=0$ به منظور تک مقداره شدن حاصل $\sqrt[n]{z}$ ، نگاشت $w=\sqrt[n]{z}$ برابر است با:

$$\rho e^{i\varphi}=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta}{n}}\Rightarrow\begin{cases}\rho=\sqrt[n]{r}\\ \varphi=\dfrac{\theta}{n}\end{cases}$$

مثال: نگاشتی پیدا کنید که نیم صفحه فوقانی صفحه z را به ناحیه $D=\left\{w\,\middle|\,\operatorname{Re}(w)\geq 1,\ \operatorname{Im}(w)\leq -2\right\}$ بنگارد.



حل: می‌توان گفت که:



پس نگاشت مورد نظر $w=-i\sqrt{z}+1-2i$ است.

مثال: مطلوب است محاسبه ریشه چهارم عدد $z=1-\sqrt{3}\,i$

حل:

$$z=1-\sqrt{3}\,i\Rightarrow\begin{cases}r=2\\ \theta=-\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$$

$$\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{2k\pi-\frac{\pi}{3}}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi-\frac{\pi}{3}}{4}\right)\right)$$

حال به ازای $k=0,1,2,3$ ، چهار ریشه چهارم z به‌دست می‌آید.

$$k=0\rightarrow z_0=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right)$$

$$k=1\rightarrow z_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

$$k=2\rightarrow z_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$$

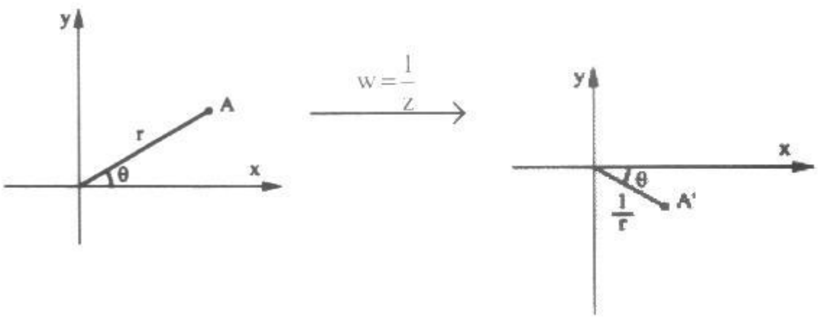
$$k=3\rightarrow z_3=\sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\right)$$

د) نگاشت کسری $w=\frac{1}{z}$

بدیهی است نگاشت مذکور در تمام صفحه مختلط، به جز مبدا مختصات تحلیلی است و مشتق آن یعنی $w'=-\frac{1}{z^2}$، همه جا مخالف صفر است پس این نگاشت در همه جا به جز مبدأ مختصات همدیس است و (می‌توان تصور کرد که تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ نقاط $z_1=0$ و $z_2=\infty$ به ترتیب به نقاط $w_2=0$ و $w_1=\infty$ تبدیل شود).

حال با فرض $w=\rho e^{i\varphi}$ و $z=re^{i\theta}$ می‌توان نوشت:

$$w=\frac{1}{z}\Rightarrow \rho e^{i\varphi}=\frac{1}{re^{i\theta}}\Rightarrow \rho e^{i\varphi}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}\rightarrow\begin{cases}\rho=\frac{1}{r}\\ \varphi=-\theta\end{cases}$$



نکته: معادله $A\left(x^2+y^2\right)+Bx+Cy+D=0$ توصیف کننده یک خط و یا یک دایره در صفحهٔ $x-y$ می‌باشد، اگر بخواهیم تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ تبدیل یافته این شکل را پیدا کنیم می‌نویسیم:

$$w=\frac{1}{z}\rightarrow z=\frac{1}{w}\rightarrow x+iy=\frac{1}{u+iv}.\frac{u-iv}{u-iv}\rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{u}{u^2+v^2}\\ y=\dfrac{-v}{u^2+v^2}\end{cases}$$

بدین ترتیب به‌دست می‌آید:

$$D\left(u^2+v^2\right)+Bu-Cv+A=0$$

که خود یک دایره و یا خط در صفحه $u-v$ می‌باشد.

نکته:

$$A\left(x^2+y^2\right)+Bx+Cy+D=0$$

الف)

$$A=0\,,\,B=0\quad\Rightarrow\quad y=-\frac{D}{C}$$

حال $y=-\frac{D}{C}$ تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ تبدیل می‌شود به:

$$u^2+v^2-\frac{C}{D}v=0\rightarrow u^2+\left(v-\frac{C}{2D}\right)^2=\left(\frac{C}{2D}\right)^2$$

ب)

$$A=0\,,\,C=0\quad\Rightarrow\quad x=-\frac{D}{B}$$

حال $x=-\frac{D}{B}$ تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ تبدیل می‌شود به:

$$u^2+v^2+\frac{B}{D}u=0\rightarrow u^2+\left(v+\frac{B}{2D}\right)^2=\left(\frac{B}{2D}\right)^2$$

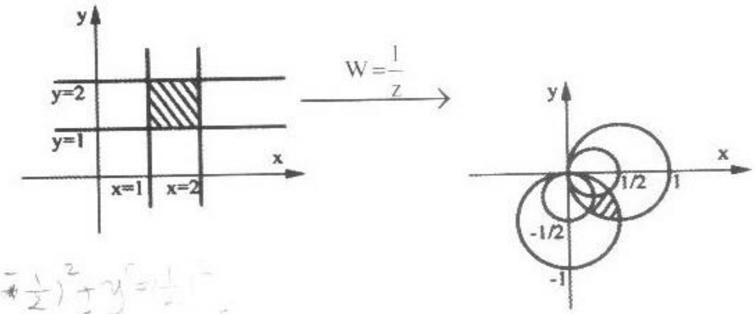
$(u+\frac{B}{2D})^2+v^2=(\frac{B}{2D})^2$

از این دو نکته برای حل بسیاری از مسایل در نگاشت $w=\frac{1}{z}$ می‌توان استفاده کرد.

به عنوان مثال داریم:

$y=1 \to x^2+(y+\frac{1}{2})^2=(\frac{1}{2})^2$

$y=2 \to x^2+(y+\frac{1}{4})^2=(\frac{1}{4})^2$

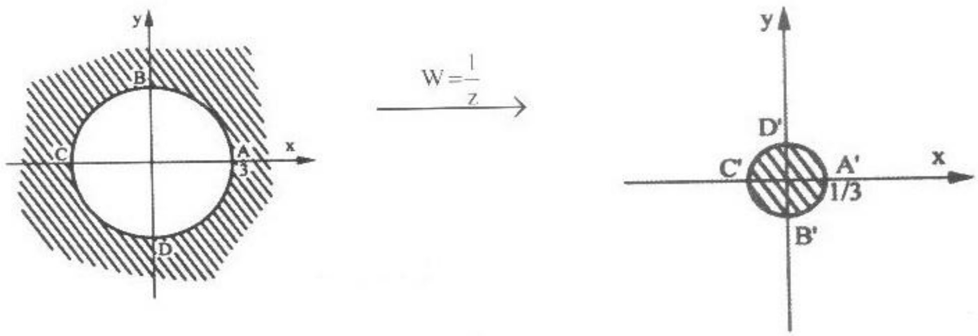


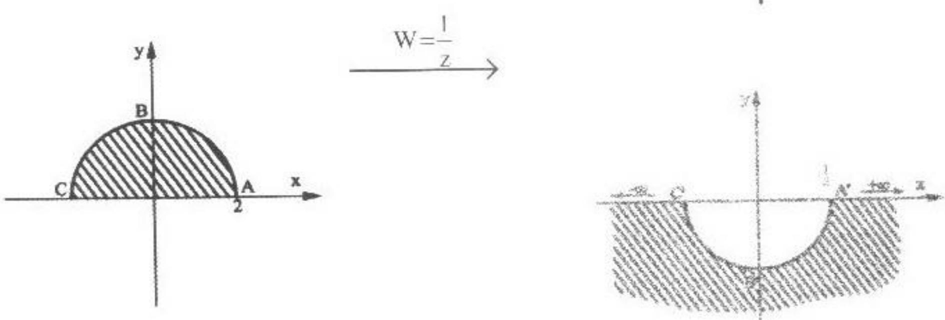
$x=1 \quad (x-\frac{1}{2})^2+y^2=(\frac{1}{2})^2$

$x=2 \quad (x-\frac{1}{4})^2+y^2=(\frac{1}{4})^2$

مثال: تبدیل یافته نواحی نشان داده شده در شکل زیر را تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ مشخص کنید.

حل:





مثال: تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ ، دایره $|z+1-2i|=1$ به یک دایره تبدیل می‌شود، معادله آن دایره و مساحت آن را بیابید.

حل:

$$|z+1-2i|=1 \Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=1$$
$$x^2+y^2+2x-4y+4=0$$

پس تبدیل یافتهٔ این دایره تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ چنین است:

$$4(u^2+v^2)+2u+4v+1=0$$
$$\left(u+\frac{1}{4}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{4}=0 \Rightarrow \left(u+\frac{1}{4}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$$

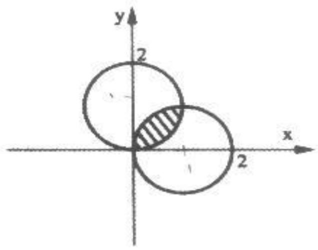
پس شعاع دایره حاصل $R=\frac{1}{4}$ و مساحت آن $s=\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{\pi}{16}$ است.

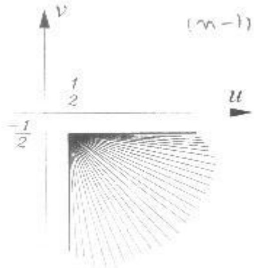
مثال: تبدیل یافته ناحیه محصور بین دو دایره $|z-1|=1$ و $|z-i|=1$ توسط $w=\frac{1}{z}$ را به‌دست آورید.

حل:

$x^2+(y-1)^2=1 \Rightarrow y=-\frac{1}{2x}=-1/2$

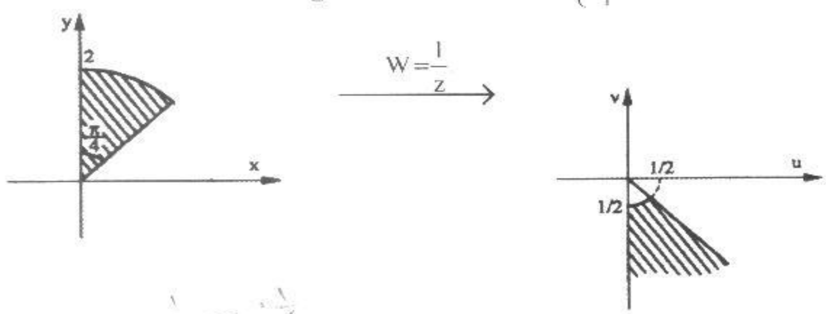
$(x-1)^2+y^2=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}$





مثال: تبدیل یافته $D=\left\{z \middle| |z|<2, \frac{\pi}{4}<\operatorname{Arg}z<\frac{\pi}{2}\right\}$ را تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ به‌دست آورید.

حل:

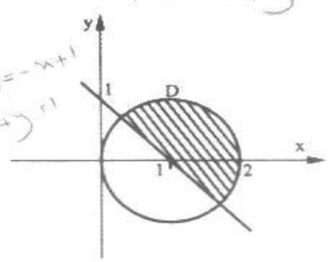


$(x-1)^2+y^2=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}$

مثال: تبدیل یافته ناحیه نشان داده شده را تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ به‌دست آورید.

$y=-x+1$

$x+y=1$



حل: مرزهای ناحیه مورد نظر را مشخص می‌کنیم و سپس با توجه به رابطه بیان شده داریم:

مرز اول : $x+y=1 \Rightarrow x+y-1=0 \xrightarrow{w=\frac{1}{z}} (A=0 \;,\; B=1 \;,\; C=1 \;,\; D=-1)$

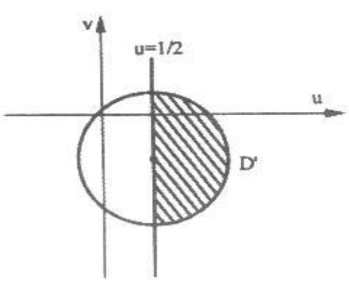
$$-1(u^2+v^2)+1u-1v+0=0 \Rightarrow u^2+v^2-u+v=0 \quad \rightarrow$$

تبدیل یافته خط مورد نظر: $\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

مرز دوم : $(x-1)^2+(y-0)^2=1 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-2x=0 \xrightarrow{w=\frac{1}{z}} (A=1 \;,\; B=-2 \;,\; C=0 \;,\; D=0)$

$0(u^2+v^2)-2u-0v+1=0 \quad \rightarrow \quad u=\frac{1}{2}$ تبدیل یافته دایره موردنظر

در نتیجه تبدیل یافته ناحیه D چنین می‌باشد.



۶) نگاشت خطی کسری (تبدیل موبیوس) ($W=\dfrac{az+b}{cz+d}$ **با شرط** $ad-bc\neq 0$)

بدیهی است نگاشت مذکور در تمام صفحه مختلط به جز $z=-\dfrac{d}{c}$ تحلیلی است و مشتق آن یعنی $w'=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ همه جا مخالف صفر است. بنابراین، این نگاشت، در همه جا، جز $z=-\dfrac{d}{c}$ همدیس است، می‌توان این طور تصور کرد که تحت نگاشت مذکور تابع $z_1=-\dfrac{d}{c}$ و $z_2=\infty$ به ترتیب به نقاط $w_1=\infty$ و $w_2=\dfrac{a}{c}$ تبدیل می‌شود.

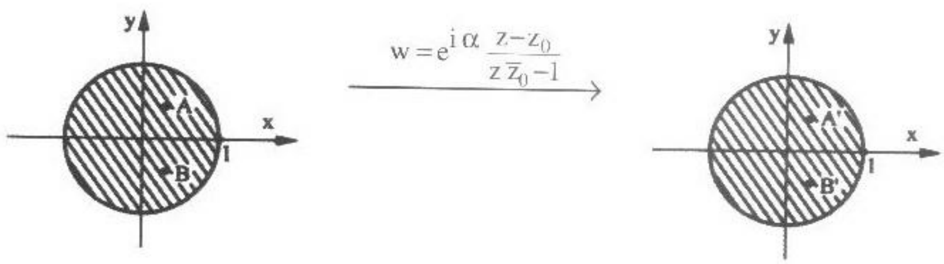
نکته ۱) می‌توان نشان داد اگر از طریق این نگاشت سه نقطهٔ z_1، z_2، z_3 از صفحه z ها را به ترتیب بر سه نقاط w_1، w_2، w_3 از صفحه ωها بنگاریم نگاشت مذکور از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{z-z_1}{z-z_3}\times\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}=\frac{w-w_1}{w-w_3}\times\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}$$

دقت کنید که اگر یکی از مقادیر z_i ها یا w_iها بی‌نهایت بود صورت و مخرج شامل بی‌نهایت را با هم ساده می‌کنیم.

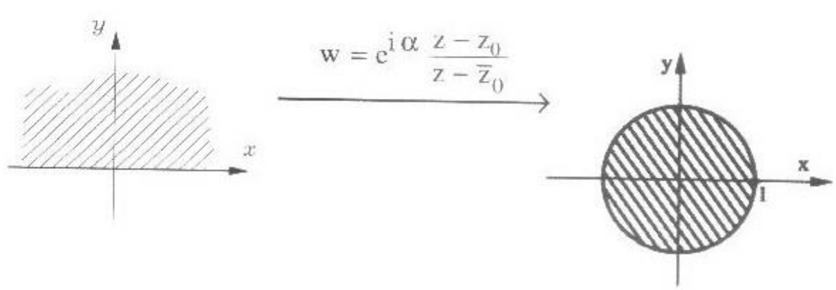
نکته ۲) می‌توان نشان داد کلی‌ترین تبدیل موبیوسی که ناحیه $|z|<1$ را به ناحیه $|w|<1$ تبدیل می‌کند به صورت مقابل است.

که در آن α عدد حقیقی دلخواه و z_0 عدد مختلط با شرط $|z_0|<1$ است.



نکته ۳) می‌توان نشان داد کلی‌ترین تبدیل موبیوسی که ناحیه $\operatorname{Im} z>0$ را به ناحیه $|w|<1$ می‌نگارد به صورت مقابل است.

که در آن α عدد حقیقی و z_0 عدد مختلط دلخواه با شرط $\operatorname{Im} z_0>0$ است.



مثال: با کدام تبدیل می‌توان ربع اول دستگاه مختلط صفحه z را به داخل دایره واحد در صفحه w نگاشت به نحوی که تبدیل یافته نقاط $1+i$ و $i\sqrt{2}$ به ترتیب نقاط 0 و i باشد.

حل: می‌دانیم نگاشت $w_1=z^2$ ربع اول دستگاه مختلط را به نیم صفحه فوقانی تبدیل می‌کند و همچنین نگاشت $w_2=e^{i\alpha}\dfrac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$ نیم صفحه فوقانی را به داخل دایره واحد می‌نگارد. لذا با تبدیل $w=e^{i\alpha}\dfrac{z^2-z_0}{z^2-\bar{z}_0}$ ربع اول صفحه به داخل دایره واحد نگاشته

می‌شود و برای آن که نقاط $1+i$ و $i\sqrt{2}$ به ترتیب بر نقاط 0 و i نگاشته شوند باید داشته باشیم.

$$0 = e^{i\alpha}\frac{(1+i)^2 - z_0}{(1+i)^2 - \overline{z}_0} \qquad i = e^{i\alpha}\frac{\left(i\sqrt{2}\right)^2 - z_0}{\left(i\sqrt{2}\right)^2 - \overline{z}_0}$$

از حل معادله اول نتیجه می‌شود:

$$(1+i)^2 - z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 2i$$

با استفاده از این مقدار در معادله دوم نتیجه می‌دهد:

$$i = e^{i\alpha}\frac{-2-2i}{-2+2i} \to e^{i\alpha}\frac{-2i-2}{-2-2i} = 1 \Rightarrow \alpha = 0$$

بنابراین نگاشت مورد نظر عبارت است از:

$$w = \frac{z^2 - 2i}{z^2 + 2i}$$

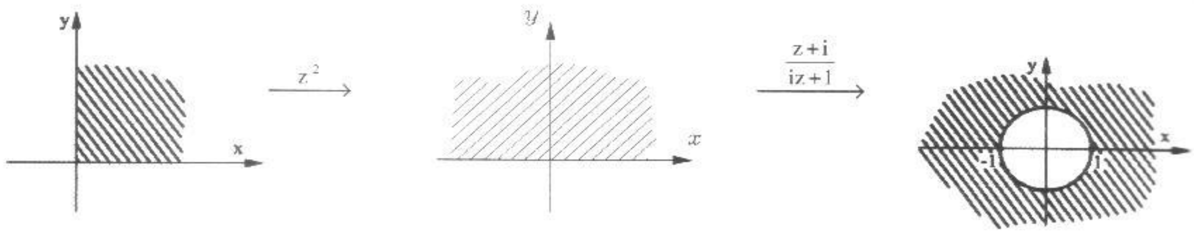
مثال: نگاشت $w = \frac{z^2+i}{iz^2+1}$، ربع اول صفحه zها را به کدام ناحیه از صفحه wها تبدیل می‌کند:

۱) نیم دایره بالایی از دایره یکه
۲) خارج از دایره یکه
۳) بالای محور x و خارج نیم دایره یکه
۴) داخل دایره یکه

حل: بدیهی است w را می‌توان با ترکیب از انتهای نگاشت‌های زیر دید.

$$w: z^2 \;,\; \frac{z+i}{iz+1}$$

بنابراین با دیدن اعمال نگاشت‌های فوق از ابتدا داریم:



تبدیل یافته نقطه $z = i$ با نگاشت موبیوس $\frac{z+i}{iz+1}$ چنین است. $w = \frac{i+i}{i^2+1} = \infty$

لذا قطعاً گزینه‌های ۱ و ۴ غلط است.

تبدیل یافته نقطه $z = 2i$ با نگاشت موبیوس $\frac{z+i}{iz+1}$ چنین است. $w = \frac{2i+i}{i(2i)+1} = -3i$

لذا قطعاً گزینه‌های ۱ و ۳ غلط است.

پس گزینه ب صحیح است.

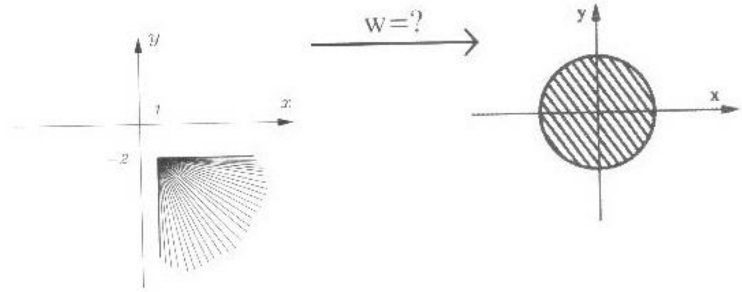
دقت کنید اگر نمی‌خواستیم با روش نقطه یابی مساله فوق را حل کنیم در حقیقت مساله ما این بود که $\operatorname{Im} z > 0$ تحت نگاشت $w = \frac{z+i}{iz+1}$ چیست؟

$$w = \frac{z+i}{iz+1} \Rightarrow wiz + w = z + i \Rightarrow z = \frac{i-w}{wi-1} \Rightarrow z = \frac{-u+i(1-v)}{-v-1+ui}\cdot\frac{(-v-1)-iu}{(-v-1)-iu} \Rightarrow \operatorname{Im} z = \frac{i\left(u^2+v^2-1\right)}{(v+1)^2+u^2}$$

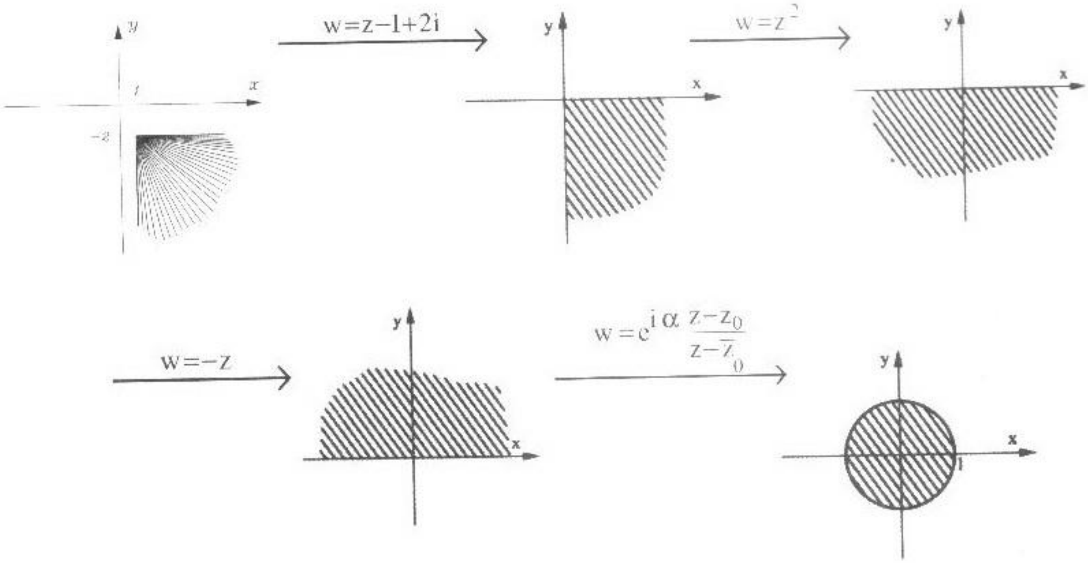
چون ما تبدیل یافته $\operatorname{Im} z > 0$ را می‌خواهیم، لذا داریم:

$$u^2+v^2-1>0 \Rightarrow u^2+v^2>1$$

مثال: نگاشتی پیدا کنید که عمل زیر را انجام دهد هم‌چنین مشخص کنید که اگر منظور یافتن نگاشتی باشدکه علاوه بر تبدیل فوق نقاط $z_1 = 2-3i$ و $z_2 = 3-3i$ را به ترتیب بر نقاط $w_1 = 0$ و $w_2 = \frac{i}{2}$ بنگارد نگاشت ما به چه صورت خواهد بود؟



حل:



لذا نگاشتی که عمل تبدیل هندسه سمت چپ به هندسه سمت راست را انجام می‌دهد با ترکیب از انتهای نگاشت‌های فوق به صورت زیر به‌دست می‌آید:

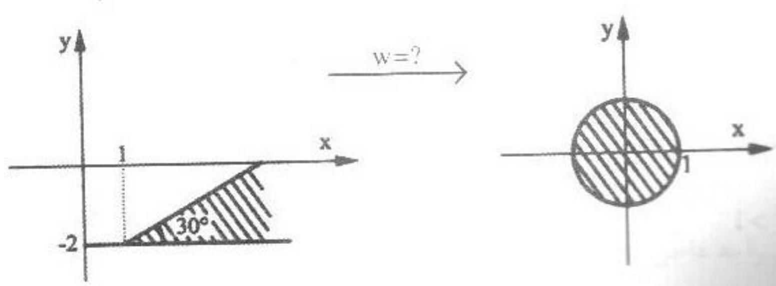
پس نگاشت مورد نظر برا بر است با:

$$w = e^{i\alpha}\frac{-(z-1+2i)^2 - z_0}{-(z-1+2i)^2 - \overline{z}_0}$$

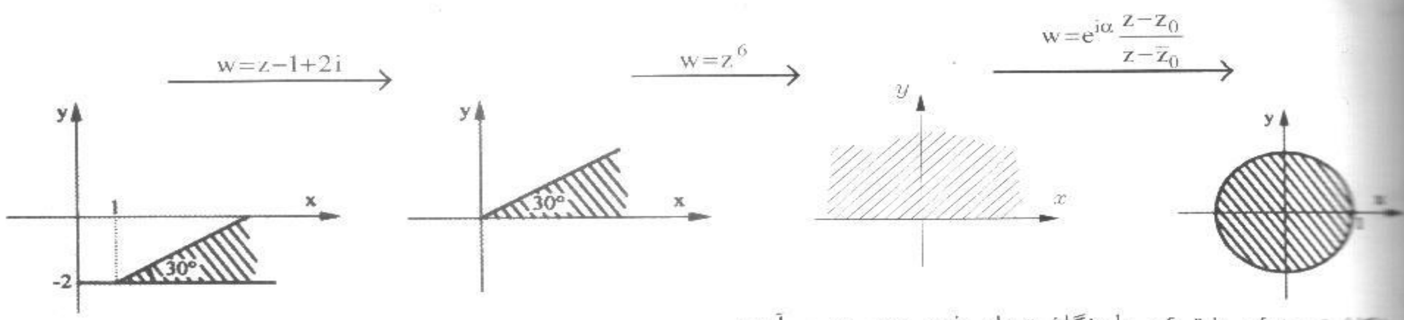
قسمت دوم مسئله:

دقت کنید حال اگر بخواهیم علاوه بر آن که عمل تبدیل نواحی گفته شده صورت می‌گیرد و نقطه z_1 و z_2 مورد نظر به دو نقطه w_1 و w_2 داده شده تبدیل شود کافی است در معادله نگاشت به‌دست آمده یک بار به جای z و w مقادیر z_1 و w_1 و یک بار مقادیر z_2 و w_2 را قرار داده و از حل دو معادله، دو مجهول به‌دست آمده α و z_0 است.

مثال: نگاشتی پیدا کنید که عمل زیر را انجام دهد:



حل:



پس نگاشت مذکور با ترکیب از نگاشت‌های فوق به‌دست می‌آید:

$$w=e^{i\alpha}\frac{(z-1+2i)^6-z_0}{(z-1+2i)^6-\bar{z}_0}$$

۳. نگاشت یاکوفسکی $w=z+\frac{1}{z}$

طبیعی است نگاشت مذکور بر تمام صفحه مختلط، به جز $z=0$ تحلیلی است و مشتق آن یعنی $w'=1-\frac{1}{z^2}$ در همه جا به جز $z=\pm1$، مخالف صفر است. بنابراین نگاشت همه جا به جز $z=0,\pm1$ همدیس است.

می‌توان نشان داد:

$$w=z+\frac{1}{z}\Rightarrow w=re^{i\theta}+\frac{1}{re^{i\theta}}=re^{i\theta}+\frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

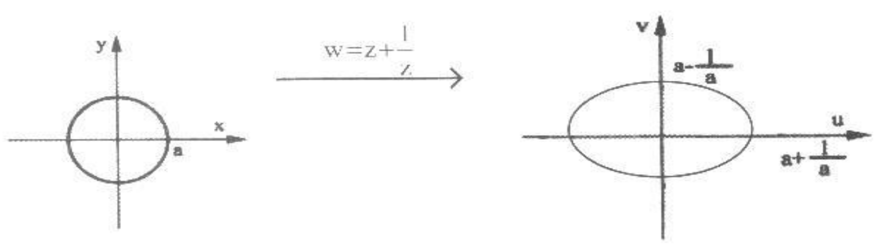
$$u+iv=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$u=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta \qquad v=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

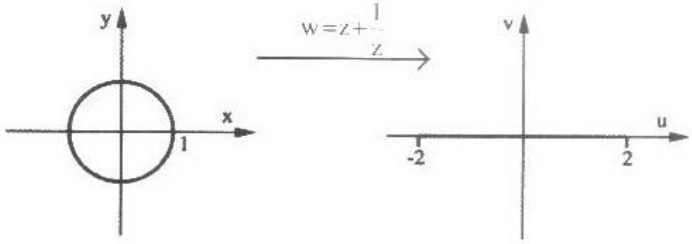
مثال: تبدیل یافته $|z|=a$ را با نگاشت $w=z+\frac{1}{z}$ پیدا کنید و روی حالت خاص $a=1$ بحث کنید.

حل: برای $|z|=a$ داریم:

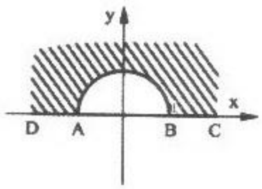
$$\begin{cases}u=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta\\ v=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta\end{cases} \qquad \begin{cases}u=\left(a+\frac{1}{a}\right)\cos\theta\\ v=\left(a-\frac{1}{a}\right)\sin\theta\end{cases}\xrightarrow{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}\frac{u^2}{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=1$$



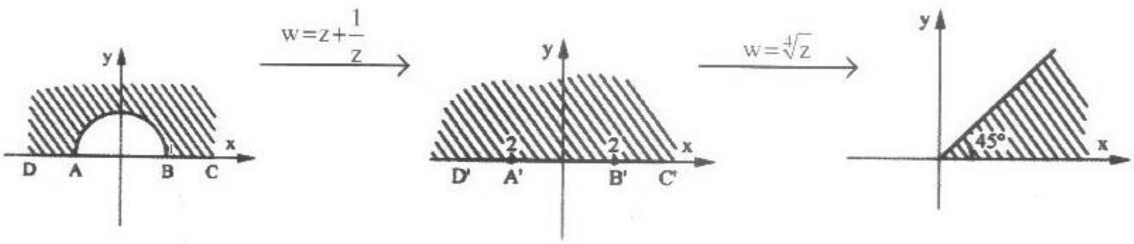
برای $|z|=1$ داریم: (تبدیل یافته دایره $|z|=1$، پاره‌خط $v=0$ و $-2\le u\le 2$ می‌باشد).



مثال: تبدیل یافته ناحیه زیر را تحت نگاشت $w=\sqrt[4]{\left(z+\frac{1}{z}\right)}$ را بیابید.



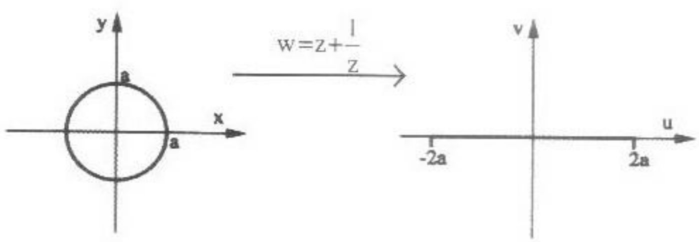
حل:



مثال: دایره $|z|=a$ از صفحه z، تحت نگاشت $w=z+\frac{a^2}{z}$ در صفحه w به چه ناحیه‌ای تبدیل شود.

$$z=re^{i\theta}\ ,\ w=re^{i\theta}+\frac{a^2}{re^{i\theta}}=\begin{cases}u=\cos\theta\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\\ v=\sin\theta\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\end{cases}\qquad \left.\begin{matrix}|z|=a\\ r=a\end{matrix}\right\}\rightarrow\begin{cases}u=\cos\theta\left(a+\frac{a^2}{a}\right)=2a\cos\theta\\ v=\sin\theta\left(a-\frac{a^2}{a}\right)=0\end{cases}$$

بنابراین روی محور حقیقی فاصله بین نقاط $-2a$ تا $+2a$ جواب مطلوب مساله خواهد بود.



۸) نگاشت نمایی $W=e^z$

بدیهی است این نگاشت همه جا تحلیلی می‌باشد و مشتق آن یعنی $w'=e^z$ همه جا مخالف صفر است بنابراین این نگاشت همه جا همدیس است.

داریم:

$$w=e^z=e^{x+iy}=e^x.e^{iy}=u+iv=e^x(\cos y+i\sin y)$$

$$\begin{cases}u=e^x\cos y\\ v=e^x\sin y\end{cases}$$

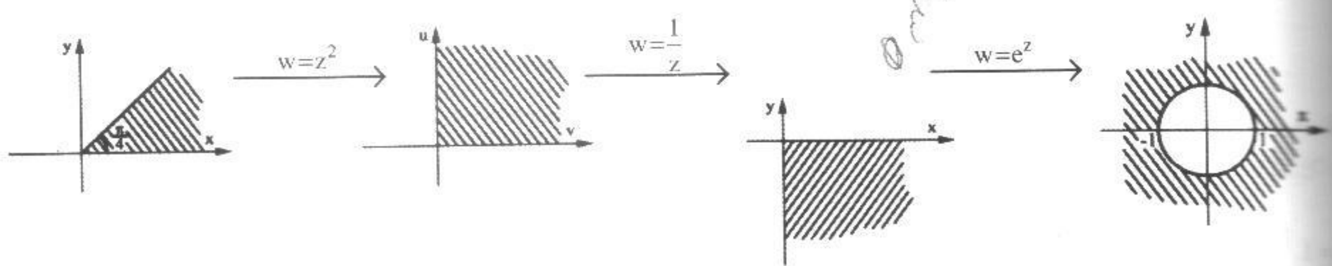
ملاحظه می‌شود با تبدیل y به $y+2\pi$ تغییری در عبارت‌های u و v حاصل نمی‌شود. به تعبیر دیگر نگاشت مورد نظر متناوب با دوره تناوب تا 2π است.

$$w=e^{z}=\rho e^{i\varphi}=e^{x+iy}\Rightarrow \rho e^{i\varphi}=e^{x}.e^{iy}\longrightarrow\begin{cases}\rho=e^{x}\\ \varphi=y\end{cases}$$

مثال: تبدیل یافته ناحیه $D=\left\{z\,\middle|\,0<\mathrm{Arg}(z)<\frac{\pi}{4}\right\}$ تحت نگاشت $e^{\frac{1}{z^2}}$ را به‌دست آورید.

حل:

$$W:z^{2}\ ,\ e^{\frac{1}{z}}:z^{2}\ ,\ \frac{1}{z}\ ,\ e^{z}$$



نگاشت لگاریتمی $W=\mathrm{Ln}z$

فرض کنید $z=re^{i\theta}$ و $(-\pi<\theta\le\pi)$ باشد، می‌توان نشان داد.

$$\ln z=\ln r+i(\theta+2k\pi)\,;\,-\pi<\theta\le\pi$$

که در آن k یک عدد صحیح نسبی است، ملاحظه می‌شود رابطه فوق برای هر عدد مختلط، بی‌نهایت مقدار برای z تولید می‌کند. بنابراین به خودی خود، بیانگر یک تابع نمی‌باشد لذا اگر بخواهیم به معادله $w=\ln z$ به عنوان یک نگاشت نگاه کنیم باید رابطهٔ فوق را به یک k خاص که معمولاً $k=0$ فرض می‌شود مد نظر قرار دهیم بدین ترتیب می‌توان نگاشت لگاریتمی را تعریف کرد. به مقدار به‌دست آمده با فرض زاویه $-\pi<\theta\le\pi$ مقدار اصلی تابع می‌گوییم.

$$w=\ln z=\ln r+i\theta \qquad -\pi<\theta\le\pi$$

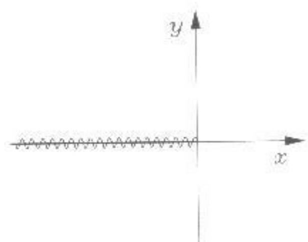
طبیعی است در این شرایط داریم $u=\ln r\ ,\ v=\theta$.

معادلات کوشی به فرم قطبی:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}\\[2mm] \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}=-\dfrac{\partial v}{\partial r}\end{cases}$$

در این مساله همواره برقرارند.

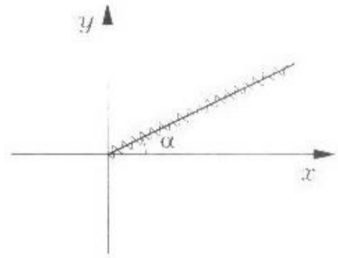
اما مشکلی که وجود دارد این است که تابع مذکور در نقاط واقع بر نیم محور حقیقی منفی اصولاً پیوسته نمی‌باشد.



که به این خط، بریدگی شاخه‌ای تابع ln z گفته می‌شود و چنانچه تابع لگاریتمی به صورت زیر تعریف شود.

$$w=\ln z=\ln r+i\theta\ \ :\ \ \alpha<\theta\le\alpha+2\pi$$

آن‌گاه بریدگی شاخه‌ای برای این تابع مطابق شکل زیر است.



دقت کنید که در تمام وضعیت‌ها بریدگی‌های شاخه‌ای تابع $w = \ln z$

از نقطه $z = 0$ می‌گذرد که اصطلاحاً $z = 0$ را نقطهٔ شاخه‌ای این تابع می‌گویند.

مثال: مطلوب است محاسبهٔ عبارت‌های زیر:

الف) $A = \ln(-1)$

حل:

$$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = +\pi \end{cases} \Rightarrow \ln(-1) = \ln 1 + i(+\pi + 2k\pi) = 0 + i\pi(2k+1)$$

دارای بی‌شمار مقدار می‌باشد.

ب) $B = (1-i)^{2i}$

از دو طرف $\ln$ می‌گیریم.

$$\ln B = \ln(1-i)^{2i} = 2i\ln(1-i)$$

$$(1-i) = \begin{cases} r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \theta = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \ln(1-i) = \ln\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

$$\ln(B) = 2i\left[\ln\sqrt{2} + i\left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right] = 2i\ln\sqrt{2} - 2\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

$$B = \exp\left(-2i\ln\sqrt{2} - 2\left(\frac{-\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)$$

مثال: تابع $\ln\left(e^z + 1\right)$ در چه نقاطی تحلیلی نیست (با فرض آن‌که منظور شاخه اصلی لگاریتم است یعنی $\ln z$ با شرط $-\pi < \theta \le +\pi$ مد نظر قرار گرفته)

۱) $x \ge 0, y = (2k+1)\pi$ ۲) $x \ge 0, y = 2k\pi$ ۳) $x \le 0, y = (2k+1)\pi$ ۴) $x \le 0, y = 2k\pi$

حل: چون بریدگی شاخه‌ای $\ln z$ به‌صورت $\begin{cases} \operatorname{Im} z = 0 \\ \operatorname{Re} z \le 0 \end{cases}$ فرض شده پس نقاطی که تابع $\ln\left(e^z + 1\right)$ در آن‌ها تحلیلی نمی‌باشد به فرم زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} \operatorname{Im}\left(e^z + 1\right) = 0 \\ \operatorname{Re}\left(e^z + 1\right) \le 0 \end{cases}$$

اما داریم:

$$e^z + 1 = e^{x+iy} + 1 = e^x(\cos y + i\sin y) + 1$$

نقاط تکین موردنظر از حل دستگاه زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{cases} e^x \sin y = 0 \\ e^x \cos y + 1 \le 0 \end{cases}$$

معادله اول چون e^x هرگز صفر نمی‌شود، داریم:

$$\sin y = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{اگر } \cos y = +1 \xrightarrow{\text{معادله دوم}} e^x + 1 \le 0 \quad \text{غیر ممکن} \\ \text{اگر } \cos y = -1 \xrightarrow{\text{معادله دوم}} -e^x + 1 \le 0 \rightarrow e^x \ge 1 \rightarrow x \ge 0 \end{cases}$$

نقاط تکین تابع $f(z)$ عبارتند از:

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ \cos y = -1 \Rightarrow y = (2k+1)\pi \end{cases}$$

دقت کنید نقاط شاخه‌ای تابع $\ln\left(e^z + 1\right)$ عبارتند از:

$$e^z + 1 = 0 \Rightarrow e^z = -1 \Rightarrow z = \ln(-1) = \ln|-1| + i\left(\arg(-1) + 2k\pi\right) = i(\pi + 2k\pi) = i\pi(1 + 2k)$$

مشاهده می‌شود بریدگی‌های شاخه‌ای به دست آمده در فوق دقیقاً از این نقاط شاخه‌ای منشعب می‌شوند.

نگاشت سینوس و کسینوس

توابع مثلثاتی به‌صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\begin{cases} \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sinh z = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2} \\ \cosh z = \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2} \end{cases}$$

با توجه به تعاریف، روابط زیر برقرار می‌باشد.

$$\begin{cases} \sin(iz) = i\sinh(z) \\ \cos(iz) = \cosh(z) \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \\ \cos(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \end{cases}$$

مثال: فرض کنید $0 \le \theta < 2\pi$ و $z = re^{i\theta}$ روی درستی هر یک از روابط زیر بحث کنید.

الف) $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$ ب) $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$ ج) $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$

روابط مربوط به گزینه‌های الف) و ب) و ج) اتحادهایی شناخته شده در بحث توابع مختلط هستند، به عنوان مثال:

$$\overline{(e^z)} = \overline{(e^{x+iy})} = \overline{(e^x e^{iy})}$$

از آن‌جا که هرگاه $z = re^{i\theta}$، آن‌گاه $\bar{z} = re^{-i\theta}$ خواهیم داشت:

$$\overline{(e^z)} = e^x . e^{-iy} = e^{x-iy} = e^{\bar{z}}$$

و یا:

$$\overline{\sin z} = \overline{(\sin(x+iy))} = \overline{(\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y)} = \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$$

و از طرفی:

$$\sin \bar{z} = \sin(x - iy) = \sin x \cos(iy) - \cos x \sin iy = \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$$

مثال: تبدیل یافته خطوط $x=c$ و $y=k$ را تحت نگاشت $w=\sin z$ پیدا کنید.

حل:

$$w=\sin z \longrightarrow \begin{cases} u=\sin x.\cosh y \\ v=\cos x.\sinh y \end{cases}$$

$$x=c \rightarrow \begin{cases} u=\sin c.\cosh y \\ v=\cos c\sinh y \end{cases} \xrightarrow{\cosh^2 y-\sinh^2 y=1} \frac{u^2}{\sin^2 c}-\frac{v^2}{\cos^2 c}=1$$

$$y=k \rightarrow \begin{cases} u=\sin x.\cosh k \\ v=\cos x.\sinh k \end{cases} \xrightarrow{\sin^2 x+\cos^2 x=1} \frac{u^2}{\cosh^2 k}+\frac{v^2}{\sinh^2 k}=1$$

توجه: به یاد داشته باشید سینوس و کسینوس با آرگومان‌های مختلط هرگز محدودیت بین (1 -) و 1 را ندارد.

مثال: حاصل $|\sin z|^2$ کدام است؟

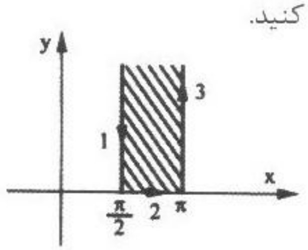
حل: از آن جا که می‌توان نوشت:

$$\sin z=\sin(x+iy)=\sin x\cos iy+\cos x\sin iy=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y$$

در نتیجه:

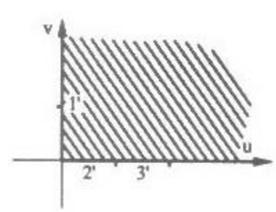
$$|\sin z|^2=\sin^2 x\cosh^2 y+\cos^2 x\sinh^2 y=\sin^2 x(1+\sinh^2 y)+\cos^2 x\sinh^2 y$$
$$=\sin^2 x+\sinh^2 y(\sin^2 x+\cos^2 x)=\sin^2 x+\sinh^2 y$$

مثال: تبدیل یافته ناحیه نشان داده شده در شکل زیر را با نگاشت $w=-\cos z$ پیدا کنید.



حل:

$$w=-\cos z=-\cos(x+iy)\longrightarrow \begin{cases} u=-\cos x.\cosh y \\ v=\sin x.\sinh y \end{cases}$$

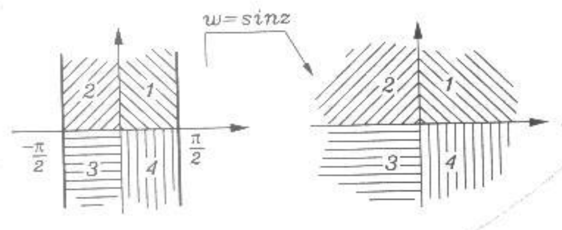


$$1)\ \begin{cases} x=\frac{\pi}{2} \\ y:+\infty\rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=\sinh y \end{cases} \quad 0<v<\infty$$

$$2)\ \begin{cases} y=0 \\ x:\frac{\pi}{2}\rightarrow\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=-\cos x \\ v=0 \end{cases} \quad 0<u<1$$

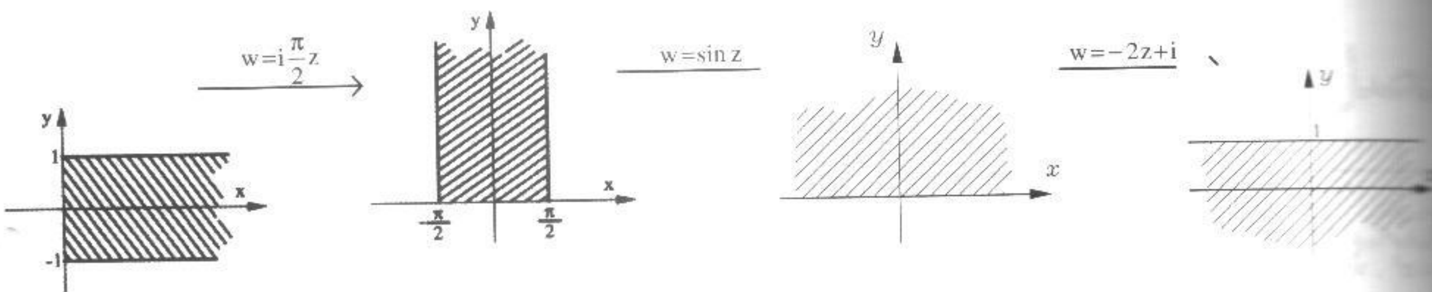
$$3)\ \begin{cases} x=\pi \\ y:0\rightarrow+\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\cosh y \\ v=0 \end{cases} \quad 0<u<\infty$$

برای نگاشت $w=\sin z$ حالت خاص زیر در بسیاری موارد در حل مسأله کمک می‌کند.

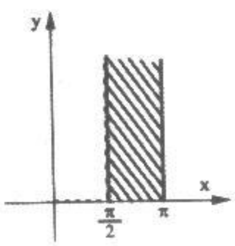


مثال: تبدیل یافته ناحیه $D=\left\{z \,\middle|\, -1\le \mathrm{Im}\,z\le +1 ;\ \mathrm{Re}\,z\ge 0\right\}$ را تحت نگاشت: $w=-2\sin\left(\frac{i\pi}{2}z\right)+i$ بیابید.

نگاشت w را می‌توان با ترکیب‌هایی از انتهای نگاشت‌های زیر به‌دست آورد.

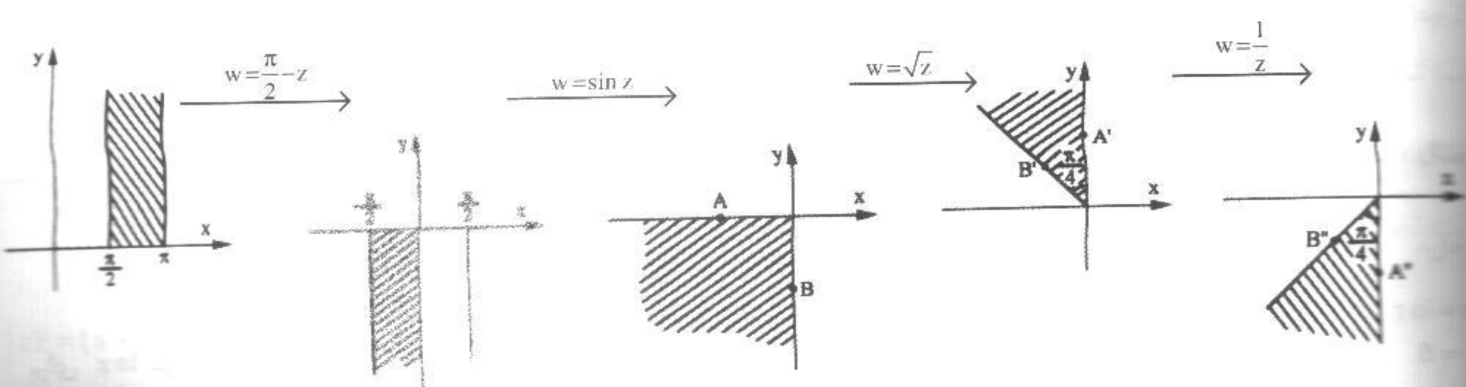


مثال: تبدیل یافته ناحیه نشان داده شده در شکل زیر را با نگاشت $w=\frac{1}{\sqrt{\cos z}}$ پیدا کنید.



حل:

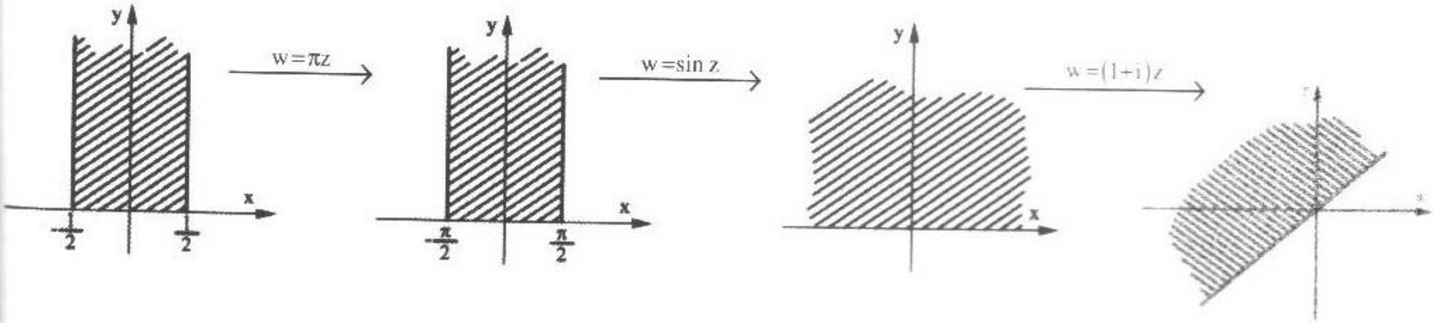
$$W: \frac{\pi}{2}-z,\ \sin z\ ;\ \sqrt{z}\ ;\ \frac{1}{z}$$



مثال: ناحیه نشان داده شده در شکل از صفحه z تحت نگاشت $w=(1+i)\sin \pi z$ به کدام ناحیه از صفحه مختلط w تبدیل می‌شود

حل: با استفاده از ترکیب نگاشت‌ها می‌توان نوشت:

$$w: w_1=\pi z\ ,\ w_2=\sin z\ ,\ w_3=(1+i)z$$

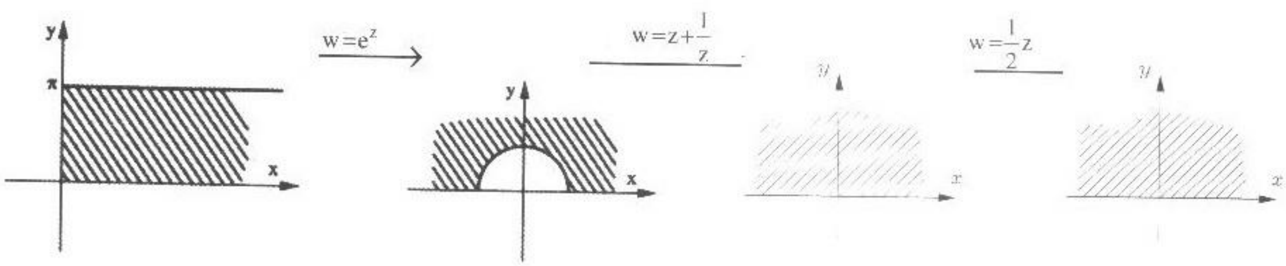


بنابراین تبدیل یافته ناحیه مورد نظر با رابطه $v+u \ge 0$ توصیف می‌شود.

مثال: تبدیل $D=\left\{z \,\middle|\, \operatorname{Re} z>0\,,\,0\le \operatorname{Im} z\le +\pi\right\}$ با نگاشت $w=\cosh z$ را به‌دست آورید.

حل: از آن‌جایی که $\cosh z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}=\dfrac{e^z+\frac{1}{e^z}}{2}$ لذا این نگاشت را می‌توان به صورت ترکیبی از نگاشت‌های زیر نوشت:

$w_1=e^z\,,\;w_2=z+\dfrac{1}{z}\,,\;w_3=\dfrac{1}{2}z$

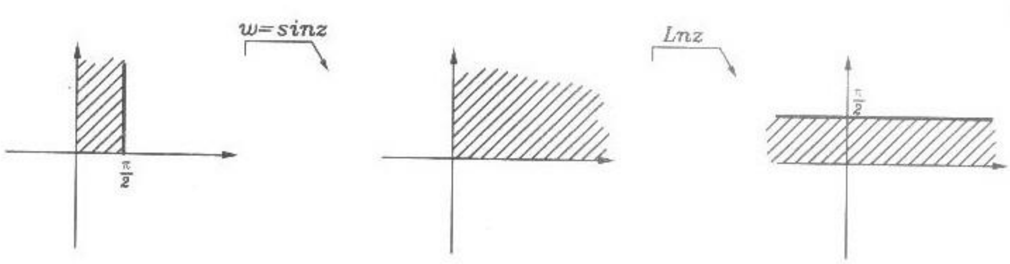


تحت نگاشت $w=\ln(\sin z)$ ناحیه $\left\{0\le \operatorname{Re} z\le \dfrac{\pi}{2}\,,\,\operatorname{Im} z\ge 0\right\}$ به کدام ناحیه تبدیل می‌شود؟

$w=\ln(\sin z): \sin z, \ln z$

حل:

لذا می‌توان گفت:



برای $\ln z$ می‌دانیم:

$$\begin{cases} u=\ln r\\ v=\theta\end{cases}$$

لذا تبدیل یافته ناحیه وسطی را با این نگاشت چنین تعیین کرده‌ایم.

$$0<r<+\infty \rightarrow \ln 0^{+}<u<\ln(+\infty)\rightarrow -\infty<u<+\infty$$

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\rightarrow 0\le v\le\frac{\pi}{2}$$