فصل چهارم

انتگرال‌گیری از توابع مختلط

انتگرال گیری از توابع مختلط

در محاسبه انتگرال مختلط $I=\int_c f(z)dz$ که در آن C یک منحنی تعریف شده در صفحه (x , y) می‌باشد، قاعده کلی آن است که با توجه به ارتباطی که بین متغیرها در روی منحنی C وجود دارد تمام متغیرها در $f(z)$ و dz را برحسب یک متغیر بازنویسی کنیم، سپس با توجه به حدود تغییرات آن متغیر و منحنی C مساله را به یک انتگرال برحسب یک متغیر تبدیل کنیم.

توجه: یک روش بسیار مناسب برای محاسبهٔ انتگرال‌های مختلط استفاده از روش مانده‌ها می‌باشد، ولی انتگرال‌گیری به روش مانده‌ها تنها زمانی قابل قبول خواهد بود که دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) تابع زیر علامت انتگرال، تابعی باشد که در تمام صفحه مختلط به جز نقاطی خاص (نقاط تکین) تحلیلی باشد بنابراین وجود ترم‌هایی نظیر Rez ، Imz ، $|z|$، $\bar{z}$ و ... در تابع تحت انتگرال‌گیری استفاده از روش مانده‌ها را تعطیل می‌کند.

ب) انتگرال‌گیری روی منحنی C ای صورت گرفته باشد که منحنی C بسته باشد.

مثال : مطلوب است محاسبه انتگرال مختلط $I=\int_c z.\bar{z}dz$ که در آن c پاره خطی است که نقطه $-1+i$ را به نقطه $2i$ وصل می‌کند.

حل: بدیهی است معادله منحنی c به صورت $y=x+2$ می‌باشد و داریم: $dy=dx$

$$\begin{cases} z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2 \\ dz=d(x+iy)=dx+idy \end{cases}$$

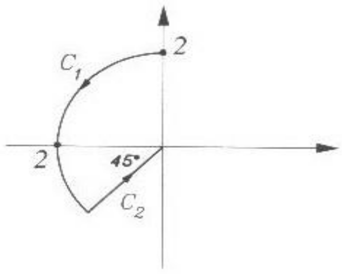
اما روی منحنی c می‌توان گفت:

$$\begin{cases} z\bar{z}=x^2+(x+2)^2 \\ dz=dx+idx \end{cases}$$

$$I=\int_{x=-1}^{0}\left(x^2+(x+2)^2\right)(dx+idx)=\int_{-1}^{0}(2x^2+4x+4)(1+i)dx=(1+i)\left\{\frac{2}{3}x^3+2x^2+4x\right\}\Big|_{-1}^{0}=\left(+\frac{8}{3}\right)(1+i)$$

مثال: حاصل انتگرال مختلط $I = \int \overline{z}.dz$ که در آن C مطابق شکل زیر می‌باشد را محاسبه کنید؟

حل:



$$z = re^{i\theta} \ ; \ \overline{z} = re^{-i\theta}$$

$$I = \int_{C_1} + \int_{C_2} = \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(2e^{-i\theta}\right) d\left(2e^{i\theta}\right) + \int_{r=2}^{0} re^{\frac{-i5\pi}{4}} d\left(re^{\frac{+i5\pi}{4}}\right)$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{4}} 2\cancel{e^{-i\theta}}.2i\cancel{e^{i\theta}}.d\theta + \int_{2}^{0} r\cancel{e^{\frac{-i5\pi}{4}}}.\cancel{e^{\frac{+i5\pi}{4}}}dr$$

$$= 4i\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}r^2\Big|_2^0 = 3\pi i - 2$$

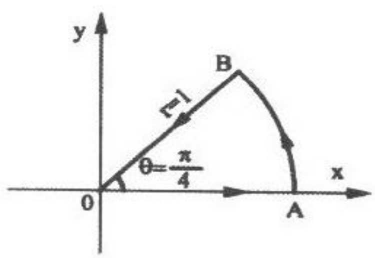
مثال: حاصل انتگرال $I = \oint \left(\frac{z}{\overline{z}} + \frac{|z|}{z}\right) dz$ روی دایرهٔ یکه در خلاف جهت عقربه‌های ساعت برابر است با:

حل: چون روی دایره واحد هستیم:

$$|z| = 1 \Rightarrow r = 1 \Rightarrow z = e^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} \overline{z} = e^{-i\theta} \\ dz = ie^{i\theta}d\theta \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} + \frac{1}{e^{i\theta}}\right) ie^{i\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} i\left(e^{3i\theta} + 1\right)d\theta$$

$$= i\left(\frac{1}{3i}e^{3i\theta} + \theta\right)\Bigg|_0^{2\pi} = i\left(\frac{1}{3i}e^{6\pi i} + 2\pi - \frac{1}{3i}e^0 - 0\right) = 2\pi i$$

مثال: حاصل انتگرال $\oint \overline{z}dz$ روی مسیر OABO نشان داده شده در شکل، برابر است با:



حل: به‌خاطر داشته باشید که با توجه به آن که تابع $\overline{z}$ تحلیلی نمی‌باشد، لذا استفاده از قضیه مانده‌ها در این مسأله بی‌معنی است و باید انتگرال منحنی‌الخط را به‌دست آوریم.

داریم $\overline{z} = x - iy , z = x + iy$ و روی مسیر OA داریم $y = 0$ لذا:

$$z = x , \overline{z} = x , dz = dx \Rightarrow \int_{OA} \overline{z}dz = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

از طرفی داریم $z = re^{i\theta}$ ، $\overline{z} = re^{-i\theta}$ و روی مسیر AB داریم $r = 1$ لذا:

$$z = e^{i\theta} , \overline{z} = e^{-i\theta} , dz = ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow \int_{AB} \overline{z}dz = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}} e^{-i\theta}ie^{i\theta}d\theta = \frac{i\pi}{4}$$

و روی مسیر BO داریم $\theta = \frac{\pi}{4}$ لذا:

$$z = re^{\frac{i\pi}{4}}, \overline{z} = re^{-\frac{i\pi}{4}}, dz = e^{\frac{i\pi}{4}}dr \Rightarrow \int_{BO} \overline{z}dz = \int_{r=1}^{0} re^{-\frac{i\pi}{4}}e^{+\frac{i\pi}{4}}dr = \frac{1}{2}r^2\Big|_{r=1}^{0} = -\frac{1}{2}$$

بنابراین به‌دست می‌آید:

$$\oint_c \overline{z}dz = \frac{1}{2} + \frac{i\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{i\pi}{4}$$

مثال: حاصل انتگرال مختلط $\int_{|z-2|=2} \mathrm{Re}\left(\frac{\bar{z}}{z}\right) dz$ را به‌دست آورید؟

حل: با استفاده از مختصات قطبی داریم:

$$\frac{\bar{z}}{z}=\frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}}=e^{-2i\theta}=\cos 2\theta - i\sin 2\theta$$

از طرفی معادله دایره $|z-2|=2$ را می‌توان به فرم زیر در مختصات قطبی بیان نمود.

$$(x-2)^2+y^2=4 \Rightarrow x^2+y^2-4x=0 \Rightarrow r^2-4r\cos\theta=0 \Rightarrow r=4\cos\theta \qquad \frac{-\pi}{2}\le\theta\le+\frac{\pi}{2}$$

بنابراین روی دایره مزبور خواهیم داشت:

$$dz=d\left(re^{i\theta}\right)=d\left[4\cos\theta\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)\right]$$

$$d\left[4\cos^2\theta+2i\sin 2\theta\right]=\left(-8\cos\theta\sin\theta+4i\cos 2\theta\right)d\theta=\left(-4\sin 2\theta+4i\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$\int_{|z-2|=2}\mathrm{Re}\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)dz=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta\left(-4\sin 2\theta+4i\cos 2\theta\right)\,d\theta$$

با کمی عملیات جبری به‌دست می‌آوریم:

$$I=2\pi i$$

تعاریف

یک ناحیه را در صفحه z کران دار می‌گوییم هرگاه مرزهای آن به بی‌نهایت نرفته باشد.

یک ناحیه در صفحه y و x را همبند می‌گوییم هرگاه هر دو نقطه در ناحیه مذکور را بتوان بایک پاره خط شکسته به هم متصل کرد بدون آن که لازم باشد از داخل آن ناحیه خارج شویم.

یک ناحیه همبند را زمانی همبند ساده می‌گوییم که هر منحنی بسته داخل ناحیه D با منقبض کردن در آن داخل ناحیه باقی بماند.

همبند مرکب (غیر ساده)   همبند ساده   غیر همبند

قضیه انتگرال کوشی ـ گورسا:

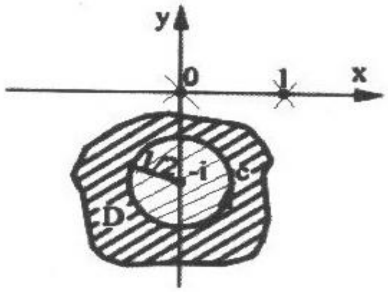
اگر تابع $f(z)$ در تمام ناحیه همبند ساده و کران‌دار D تحلیلی باشد آن گاه به ازای هر منحنی بسته دلخواه واقع در ناحیه D انتگرال $I=\int_c f(z)dz$ مساوی صفر است. از قضیه مذکور به سادگی می‌توان نتیجه گرفت چنانچه تابع $f(z)$ در کل ناحیه کران‌دار و همبند ساده D تحلیلی باشد، حاصل انتگرال $\int f(z)dz$ در روی هر منحنی دلخواه غیر بسته که از نقاط تکین $f(z)$ نمی‌گذرد و در آن ناحیه واقع است و نقطهٔ z_1 را به نقطهٔ z_2 وصل می‌کند، مستقل از مسیر می‌باشد و حاصل آن برابر است با $I=F(z_2)-F(z_1)$ که در آن $F'(z)=f(z)$ می‌باشد.

مثال : حاصل انتگرال مختلط $I=\int_c e^{-2z}dz$ که در آن c پاره خط واصل بین نقطه $1-i\pi$ و نقطه $2+3i\pi$ می‌باشد کدام است؟

حل: چون تابع e^{-2z} همه جا تحلیلی است لذا طبق نتیجه قضیه انتگرال کوشی گورسا داریم:

$$I=\frac{-1}{2}e^{-2z}\Big|_{z=1-i\pi}^{2+3i\pi}=\frac{-1}{2}\left(e^{-2(2+3i\pi)}-e^{-2(1-i\pi)}\right)=\frac{-1}{2}\left(e^{-4}e^{-6i\pi}-e^{-2}e^{2i\pi}\right)=\frac{-1}{2}\left(e^{-4}-e^{-2}\right)=\frac{1}{2}e^{-2}\left(1-e^{-2}\right)$$

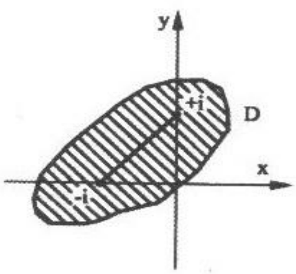
مثال : حاصل انتگرال مختلط $I=\int_c\left(\cos z+\frac{1}{z^3-z^2}\right)dz$ که در آن $c:|z+i|=\frac{1}{2}$ می‌باشد را به دست آورید:



حل: مشخص است تابع $f(z)=\cos z+\frac{1}{z^3-z^2}$ در تمام صفحهٔ مختلط به جز $z=1$ ، $z=0$ تحلیلی می‌باشد حال با توجه به شکل زیر ملاحظه می‌شود که تابع $f(z)$ در تمام نقاط ناحیه کران‌دار و هم‌بند سادهٔ D، تحلیلی می‌باشد. طبق قضیه انتگرال کوشی ـ گورسا حاصل انتگرال صفر است.

مثال : مطلوب است محاسبه $I=\int_c ze^{z^2}dz$ که در آن c منحنی دلخواهی است که نقطه $z=i$ را به نقاط $z=-1$ وصل کرده است.

حل: بدیهی است تابع زیر علامت انتگرال در تمام ناحیه کران‌دار و هم‌بند ساده D تحلیلی است بنابراین طبق نتیجه قضیه کوشی گورسا می‌توان گفت:

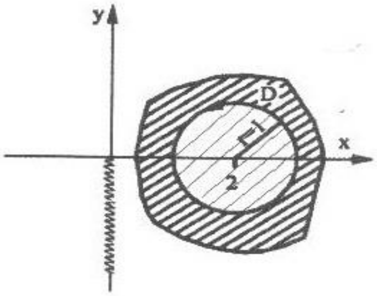


$$I=\int_c ze^{z^2}dz$$

$$I=\frac{1}{2}e^{z^2}\Big|_i^{-1}=\frac{1}{2}\left\{e^{(-1)^2}-e^{(i)^2}\right\}=\frac{1}{2}\left\{e^1-e^{-1}\right\}=\sinh 1$$

مثال : مطلوب است محاسبهٔ $\int_c \frac{\ln z}{z+1}dz$ که در آن $-\frac{\pi}{2}\le\theta<\frac{3\pi}{2}$ و $\ln z=\ln r+i\theta$ و $c:|z-2|=1$ می‌باشد.

حل: تابع $f(z)=\frac{\ln z}{z+1}$ در تمام صفحه مختلط به جز $z=-1$ و نقاط بریدگی شاخه‌ای تابع $\ln z$ تعریف شده تحلیلی است، که این نقاط تکین نقاط $f(z)$ در شکل زیر نمایش داده شده است.



ملاحظه می‌شود تابع $f(z)$ در کل ناحیه کران‌دار و هم‌بند ساده D که به‌طور دلخواه ترسیم شده تحلیلی است بنابراین طبق قضیه حاصل انتگرال صفر است.

astonish : متحیر

سری‌های مختلط

ناحیه همگرایی یک سری مختلط

برای یافتن ناحیه همگرایی یک سری مختلط $\sum_{n=0}^{\infty} a(n,z)$ کافی است شرط همگرایی این سری را بررسی کنیم که برای بررسی دو روش وجود دارد.

الف) شرط همگرایی مطابق روش دالامبر

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a(n+1,z)}{a(n,z)}\right|<1$$

ب) شرط همگرایی مطابق روش کوشی

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a(n,z)|}<1$$

شعاع همگرایی (R) از رابطه‌ی $\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a(n+1,z)}{a(n,z)}\right|$ یا $\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a(n,z)|}$ به‌دست می‌آید.

توجه کنید اگر ناحیه همگرایی، یک دایره باشد، شعاع دایره را شعاع همگرایی می‌نامیم و می‌توان ثابت کرد سری حاصل از مشتق یک سری توانی و نیز سری حاصل از انتگرال‌گیری یک سری توانی دارای شعاع همگرایی برابر با شعاع همگرایی سری اصلی خواهد بود.

نکته به خاطر داشته باشید:

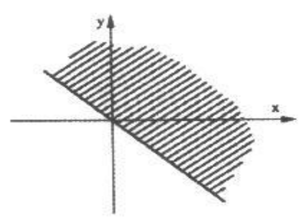
$$I=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{a}{n+b}\right)^{cn+d}=1^{\infty}\Rightarrow I=e^{ac}$$

$I=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{an^k+bn^{k-1}+\cdots}=\infty^0$ مبهم: پس از رفع ابهام $I=1$

$$I=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!}=\frac{n}{e}$$

مثال: ناحیه همگرایی و شعاع همگرایی سری‌های زیر را بیابید.

۱) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{z+1}\right)^n$



$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{z-i}{z+1}\right)^n\right|}<1\Rightarrow\left|\frac{z-i}{z+1}\right|<1\Rightarrow|z-i|<|z+1|$$

شعاع همگرایی نداریم چون شعاع همگرایی مخصوص دایره است.

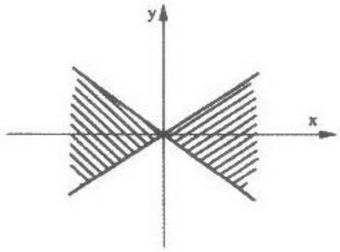
۲) $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nz^2}$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|e^{-nz^2}\right|}<1\Rightarrow\left|e^{-z^2}\right|<1$ ناحیه همگرایی

$$\Rightarrow\left|e^{-(x+iy)^2}\right|<1\Rightarrow\left|e^{-x^2+y^2-2ixy}\right|<1\Rightarrow\left|e^{y^2-x^2}\right|\underbrace{\cancel{\left|e^{-2ixy}\right|}}_{1}<1$$

توجه: اگر θ حقیقی باشد داریم: $\left|e^{i\theta}\right|=1$ و $e^{\theta}>0$ لذا شرط همگرایی چنین می‌شود:

$$e^{y^2-x^2}<e^0 \Rightarrow y^2-x^2<0 \Rightarrow y^2<x^2 \Rightarrow |y|<|x|$$ ناحیه همگرایی



شعاع همگرایی نداریم.

مثال : فرض همگرایی سری مختلط $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^3}(z-i)^n$ کدام است؟

حل: برای همگرایی سری مزبور کافی است داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^3}(z-i)^{n+1}}{\frac{3^n}{n^3}(z-i)^n}\right|<1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^3\frac{3^{n+1}}{3^n}|z-i|<1 \Rightarrow 3|z-i|<1 \Rightarrow |z-i|<\frac{1}{3}$$

مثال : ناحیه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{z-1}\right)^n$ در صفحه مختلط کدام است؟

حل: شرط همگرایی طبق آزمون کوشی نتیجه می‌دهد:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{z}{z-1}\right|^n}<1 \Rightarrow \left|\frac{z}{z-1}\right|<1 \Rightarrow \left|\frac{x+iy}{(x-1)+iy}\right|<1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}<1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}<\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2<x^2-2x+1+y^2 \Rightarrow 1-2x>0 \Rightarrow x<\frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{Re} z<\frac{1}{2}$$

بسط تیلور یک تابع مختلط:

هرگاه تابع $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی باشد می‌توان این تابع را بر حسب توان‌های صحیح نامنفی از عبارت $(z-z_0)$ که به بسط تیلور تابع موسوم است به فرم زیر بسط داد.

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

که در آن $a_n=\frac{f^n(z)}{n!}$

توجه: بسط تیلور حول نقطه $z=0$ را بسط مکلورن تابع می‌گویند. حال به بسط مکلورن توابع زیر توجه کنید:

$$\forall z\begin{cases} e^z = 1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\cdots+\dfrac{z^n}{n!}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!} \\ \sin z = z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}+\cdots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n-1}}{(2n+1)!} \\ \cos z = 1-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}+\cdots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \\ \sinh z = z+\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}+\cdots=\sum\dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cosh z = 1+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^4}{4!}+\cdots=\sum\dfrac{z^{2n}}{(2n)!} \end{cases}$$

$$\text{شرط اعتبار } |z|<1 \quad \begin{cases} \dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\cdots+z^n=\displaystyle\sum_{n=0} z^n \\ \dfrac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots+(-1)^n z^n=\displaystyle\sum_{n=0}(-1)^n z^n \end{cases}$$

توجه کنید: با توجه به بسط‌های فوق این امکان وجود دارد که بسط بسیاری از توابع دیگر را بدون آنکه لازم باشد ضرایب بسط را به طریقه سنتی پیدا کنیم، به سادگی مشخص کنیم به خصوص می‌توان از بسط‌های فوق جمله به جمله مشتق‌گیری و یا جمله به جمله انتگرال‌گیری کرد و بسط توابع دیگری را به‌دست آوریم.

مثال: تابع $f(z)=(z^3+2z-1)e^{-z}$ مفروض است. ضریب z^4 در بسط مکلورن این تابع را بیابید.

حل:

$$f(z)=(z^3+2z-1)\left\{1+(-z)+\frac{(-z)^2}{2!}+\frac{(-z)^3}{3!}+\frac{(-z)^4}{4!}+\cdots\right\}$$

$$z^4 \text{ ضریب } = (-1)+\frac{(-1)^3}{3!}\times 2+(-1)\frac{(-1)^4}{4!}=-1-\frac{1}{3}-\frac{1}{24}$$

$$z^4 \text{ ضریب } =-\frac{33}{24}$$

مثال: با فرض آن که $f(z)=\dfrac{\cos z}{(1-z)^2}$ باشد ضریب جمله z^4 در بسط مکلورن این تابع بیابید.

$$\text{می‌دانیم: } \frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+\cdots \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{(1-z)^2}=1+2z+3z^2+4z^3+5z^4+\cdots$$

حال می‌توان نوشت:

$$f(z)=\frac{\cos z}{(1-z)^2}=\frac{1}{(1-z)^2}\cos z=(1+2z+3z^2+4z^3+5z^4+\cdots)\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}\pm\cdots\right)$$

حال ملاحظه می‌شود:

$$z^4 \text{ ضریب } =\frac{1}{4!}-\frac{3}{2!}+5=\frac{1}{24}-\frac{3}{2}+5=\frac{85}{24}$$

مثال : در بسط مکلورن تابع $f(z)=\mathrm{Ln}(1-z).\sin z$، ضریب z^3 کدام است؟

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+z^4+\cdots\xrightarrow{\text{انتگرال}}-\mathrm{Ln}(1-z)=z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots$$

حال می‌توان نوشت:

$$f(z)=\mathrm{Ln}(1-z).\sin z=-\left(z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots\right)\left(z-\frac{z^3}{3!}+\cdots\right)$$

لذا می‌توان دید: z^3 ضریب $:=-\frac{1}{2}$

انواع نقاط تکین تابع مختلط:

همان‌طور که می‌دانیم اگر تابع $f(z)$ در تمام صفحه مختلط به جز نقاطی خاص تحلیلی باشد به آن نقاط خاص، نقاط تکین تابع گفته می‌شود که این نقاط تکین را می‌توان به دو دسته تکین‌های تنها و تکین‌های غیرتنها دسته‌بندی کرد.

بنابراین، اگر $f(z)$ در z_0 تحلیلی نباشد اما در هر نقطه از همسایگی آن تحلیلی باشد، آنگاه z_0 را نقطه‌ی تکین تابع گویند.

برخی مواقع وقتی نقاط تکین یک تابع را مشخص می‌کنیم ملاحظه می‌کنیم که تابع دارای بی‌شمار نقطهٔ تکین است که همگی در حال نزدیک شدن یا انباشته شدن روی یکی از نقاط تکین می‌باشد که اصطلاحاً آن نقطهٔ تکین را، تکین انباشته گویند.

مثال : برای توابع زیر نقاط تکین و نوع آن‌ها را از حیث تنها و یا غیرتنها بودن مشخص کنید.

حل:

۱) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4}$

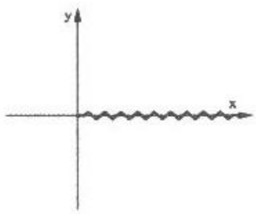
نقاط تکین عبارتند از: $z^2+4=0\Rightarrow z=\pm 2i$ (از نوع تنها)

۲) $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^{10}}$

نقاط تکین عبارتند از: $(z-1)^{10}=0 \quad\Rightarrow\quad z=1$ (از نوع تنها)

۳) $f(z)=\ln z \quad , \quad 0\le\theta<2\pi$

تابع $\ln z$ تعریف شده در تمام صفحه مختلط به جز بریدگی شاخه‌ای آن تحلیلی است و این نقاط بریدگی شاخه‌ای که در شکل زیر نشان داده شده‌اند، تکین‌های غیرتنهای این تابع می‌باشند.



۴) $f(z)=\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$

نقاط تکین عبارتند از:

$$\begin{cases} z=0 \\ \sin\frac{1}{z}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{z}=k\pi\Rightarrow z=\frac{1}{k\pi} \quad\Rightarrow\quad z=\pm\frac{1}{\pi},\pm\frac{1}{2\pi},\pm\frac{1}{3\pi},\pm\frac{1}{4\pi}+\cdots\end{cases}$$

که تمام نقاط تکین از نوع تنها می‌باشند، ولی $z=0$ تکین از نوع غیرتنها (انباشته) است.

انواع نقاط تکین

نقاط تکین تنها خود به دو دستهٔ تکین‌های از نوع قطب و تکین اساسی تقسیم‌بندی می‌شوند.

تعریف (قطب و تکین اساسی):

اگر z_0 یک تکین تنها برای تابع $f(z)$ باشد وبتوان mای پیدا کرد که حاصل حد $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ موجود و مخالف صفر باشد آنگاه z_0 قطب مرتبهٔ m ام تابع $f(z)$ است و در غیر این صورت z_0 را تکین اساسی تابع $f(z)$ می‌گوییم.

مثال: تابع $f(z)=\dfrac{1-e^{z^3}}{z^7}$ مفروض است، نقطه تکین این تابع و نوع آن را مشخص کنید.

حل: کاندیدای نقطه تکین $z=0$ است. (به خاطر صفر شدن مخرج)

$$\lim_{z\to 0} z^7 . \frac{1-e^{z^3}}{z^7}=0$$

پس $z=0$ قطب مرتبه هفتم نمی‌باشد.

$$\lim_{z\to 0} z^5 \frac{1-e^{z^3}}{z^7}=\lim_{z\to 0}\frac{1-e^{z^3}}{z^2}=\frac{0}{0}\overset{H}{\Rightarrow}\lim_{z\to 0}\frac{-3z^2e^{z^3}}{2z}=\lim_{z\to 0}-\frac{3}{2}ze^{z^3}=0$$

$$\lim_{z\to 0} z^4 \frac{1-e^{z^3}}{z^7}=\lim_{z\to 0}\frac{1-e^{z^3}}{z^3}=\frac{0}{0}\overset{H}{\Rightarrow}\lim_{z\to 0}\frac{-3z^2e^{z^3}}{3z^2}=-1\neq 0$$

پس $z=0$ قطب مرتبه ۴ است.

مثال: تابع $f(z)=\dfrac{\sin\left(\frac{1}{z-1}\right).\sin^4(z+1)}{(z^2-1)^3 . z^7}$ برای این تابع نوع نقاط $z=0$ و $z=\pm 1$ را تعیین کنید.

حل:

$\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$، $z=1$ تکین اساسی است.

$\sin^4(z+1)$، $z=-1$ صفر مرتبه چهارم است.

$(z^2-1)^3$، $z=\pm 1$ هر کدام صفر مرتبه سوم‌اند.

z^7، $z=0$ صفر مرتبه هفتم است.

پس برای کل تابع $f(z)$ داریم:

$z=0$ یک قطب مرتبه هفتم است.

$z=-1$ یک صفر مرتبه اول است.

$z=1$ یک تکین اساسی است.

مثال: تابع $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}} . Lnz . \sin(z-2)}{(z^2-4)}$ مفروض است، با فرض $-\pi\leq\theta<\pi$ و $Lnz=Lnr+i\theta$ مشخص کنید نقاط $z=0$ و $z=2$ برای این تابع چگونه نقاطی هستند؟

حل: تابع Lnz تعریف شده در تمام صفحه مختلط به جز بریدگی شاخه‌ای تابع تحلیلی است. (که این بریدگی شاخه‌ای با توجه به تعریف $-\pi\leq\theta<\pi$ روی نیم محور حقیقی منفی واقع است).

برای $e^{\frac{1}{z}}$، $z=0$ تکین اساسی است، برای $\sin(z-2)$، $z=2$ صفر مرتبه اول است و برای (z^2-4)، $z=\pm 2$ هر کدام صفر مرتبه اولند.

جمع‌بندی: برای تابع $f(z)$ ، $z=2$ یک قطب مرتبه صفرم تابع است (تکین برداشتنی تابع است) ($z=2$ نقطه تکین تابع به حساب نمی‌آید).

$z=-2$ تکین غیرتنها است. $z=0$ تکین غیرتنها است. (هر دو روی بریدگی شاخه‌ای تابع $\ln z$ قرار گرفته‌اند).

مثال : قطب‌های تابع $f(z)=\dfrac{z}{\sinh z\cosh z}$ عبارتند از:

حل:

$$\sinh z\cosh z=0\Rightarrow\frac{1}{2}\sinh 2z=0\Rightarrow\frac{1}{2}\frac{1}{i}\sin(2iz)=0$$

$$\Rightarrow\sin 2iz=0\Rightarrow 2iz=n\pi\Rightarrow z=\frac{n}{2i}\pi\qquad n=0,\pm1,\dots$$

توجه کنید که به ازای $n=0$ ، یعنی $z=0$، مخرج $f(z)$ صفر می‌شود، و صورت کسر نیز در این نقطه صفر می‌شود، و چون:

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sinh z\cosh z}=1$$

بنابراین $z=0$ یک نقطه تکین برداشتنی بوده و به تعبیری تابع در این نقطه تحلیلی است و $z=0$ قطب به حساب نمی‌آید. و قطب‌های تابع به ازای مقادیر $n=1,2,\dots$ ایجاد می‌شود. (که همگی قطب مرتبه اول خواهند بود).

مثال : نقاط تکین تابع $f(z)=\dfrac{e^{\sin z}+3}{(e^z+i)(z^2+1)}$ عبارتند از:

حل: می‌دانیم توابع $\sin z$ و e^z همواره تحلیلی می‌باشند، لذا ترکیب آن‌ها یعنی $e^{\sin z}$ همواره تحلیلی می‌باشند، و از آن‌جا که z^2+1 نیز همواره تحلیلی است پس تابع مورد نظر به ازای موارد زیر غیرتحلیلی خواهد بود.

$$e^z+i=0\Rightarrow e^z=-i\Rightarrow z=\ln(-i)=\ln(1)+i\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)\Rightarrow z=i\left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi$$

$$z^2+1=0\Rightarrow z^2=-1\Rightarrow z=\pm i$$

پس نقاط تکین عبارتند از:

$$z=\pm i\quad,\quad z=i\left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi$$

بسط لوران

اگر تابع $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی باشد حول این نقطه دارای بسط تیلور است اما اگر در این نقطه تحلیلی نباشد در اطراف آن نقطه بسط تیلور نخواهد داشت.

اما چنانچه z_0 یک نقطهٔ تکین از نوع تنها برای تابع $f(z)$ باشد، می‌توان تابع را حول این نقطه به بسطی که اصطلاحاً بسط لوران تابع می‌باشد نوشت. ویژگی اساسی این بسط آن است که برخلاف بسط تیلور توان‌های صحیح منفی عبارت $(z-z_0)$ نیز در آن وجود دارد و دارای ویژگی زیر می‌باشد:

بالاترین توان منفی عبارت $(z-z_0)$ را، مرتبه قطب برای نقطه تکین z_0 در نظر می‌گیریم و اگر بالاترین توان منفی موجود نباشد به معنای آن است که z_0 یک تکین اساسی تابع بوده است.

ضریب جمله $\frac{1}{z-z_0}$ در بسط لوران مذکور را C_{-1} یا $\operatorname{Res} f(z)\big|_{z_0}$ و به تعبیری مانده تابع در نقطه z_0 می‌گوییم.

مثال: بسط توابع زیر را حول نقطه $z=0$ نوشته و نتایج حاصله را بیان کنید.

1) $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$

$$f(z)=z^3\left\{1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2 2!}+\frac{1}{z^3 3!}+\frac{1}{z^4 4!}+\frac{1}{z^5 5!}+\cdots\right\}=z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!z}+\cdots$$

به واسطه وجود توان‌های منفی بسط مذکور از نوع لوران است و این به ما می‌گوید $z=0$ نقطه تکین است و چون بالاترین توان منفی دیده نمی‌شود پس $z=0$ تکین اساسی است.

2) $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}$

روش اول:

$$f(z)=\frac{1-\left\{1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^6}{6!}+\cdots\right\}}{z^2}=\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}+\cdots$$

در بسط مذکور توان‌های منفی عبارت z موجود نمی‌باشد. پس بسط مذکور از نوع تیلور می‌باشد، یعنی تابع در $z=0$ تحلیلی می‌باشد ($z=0$ نقطه تکین نیست.)

روش دوم:

$z=0$ صفر مرتبه دوم مخرج است.

$$\left.\begin{array}{ll} (1-\cos z)\big|_{z=0}=0 & \text{صورت کسر} \\ \sin z\big|_{z=0}=0 & \text{مشتق اول صورت کسر} \\ \cos z\big|_{z=0}=1 & \text{مشتق دوم صورت کسر} \end{array}\right\}$$

پس $z=0$ صفر مرتبه دوم صورت کسر است

در کل داریم: $z=0$ قطب مرتبه صفر یا یک تکین برداشتی برای تابع $f(z)$ می‌باشد.

3) $f(z)=z^3\cos\frac{1}{z}$

$$f(z)=z^3\left\{1-\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^4}{4!}-\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^6}{6!}\right\}=z^3-\frac{z}{2!}+\frac{1}{4!z}-\frac{1}{6!z^3}+\cdots$$

به واسطه وجود توان‌های منفی بسط فوق، از نوع لوران می‌باشد و چون بالاترین توان منفی در این بسط قابل رؤیت نیست. لذا $z=0$ یک تکین اساسی تابع $f(z)$ بوده و بنابراین داریم:

$$\operatorname{Res} f(z)\big|_{z=0}=\frac{1}{4!}$$

مثال : مانده تابع $f(z)=(z-1)^5\cos\left(\frac{1}{z-1}\right)$ در $z=1$ کدام است؟

حل: $z=1$ تکین اساسی تابع است و داریم:

$$f(z)=(z-1)^5\cos\frac{1}{z-1}=(z-1)^5\left\{1-\frac{1}{(z-1)^2\,2!}+\frac{1}{(z-1)^4\,4!}-\frac{1}{(z-1)^6\,6!}+-\cdots\right\}$$

بنابراین ضریب جمله $\frac{1}{z-1}$ (یعنی مانده تابع در نقطه $z=1$) عبارت است از:

$$\operatorname{Res}f(z)\big|_{z=1}=\frac{-1}{6!}$$

مثال : ماندهٔ تابع $f(z)=(z-3)\sin\frac{1}{z+2}$ در نقطه تکین $z=-2$ برابر است با:

حل: توجه داریم که $z=-2$ نقطه تکین اساسی تابع $f(z)$ است، برای محاسبه مانده در $z=-2$ باید سری توانی حول نقطه $z=-2$ را بنویسیم، لذا:

$$f(z)=(z+2-5)\sin\frac{1}{z+2}=(z+2-5)\left[\frac{1}{z+2}-\frac{1}{(z+2)^3\,3!}+\frac{1}{(z+2)^5\,5!}-+\cdots\right]=-\cdots+\frac{1}{z+2}(-5)+\cdots$$

لذا مانده $f(z)$ در $z=-2$، ضریب جمله $\frac{1}{z+2}$ یعنی -5 است.

چند روش برای پیدا کردن ماندهٔ یک تابع در نقاط تکین از نوع قطب

اگرچه یک راه حل همیشگی برای پیدا کردن مانده با استفاده از بسط لوران تابع می‌باشد که در بسط لوران ما تابع را حول نقطه z_0 می‌نویسیم و ضریب جمله $\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ مانده تابع در آن نقطه می‌باشد. اما چنانچه z_0 یک تکین از نوع قطب باشد مانده را می‌توان با روش‌های زیر پیدا کرد.

الف اگر z_0 یک قطب مرتبه اول تابع $f(z)$ باشد داریم:

$$\operatorname{Res}f(z)\big|_{z_0}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0).f(z)$$

ب) تابع $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ را در نظر بگیرید چنانچه z_0 یک قطب مرتبه اول این تابع باشد و $P(z_0)\neq 0$ داریم:

$$\operatorname{Res}f(z)\big|_{z_0}=\frac{P(z)}{Q'(z)}\bigg|_{z_0}=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

ج) چنانچه z_0 یک قطب مرتبه mام تابع $f(z)$ باشد داریم:

$$\operatorname{Res}f(z)\big|_{z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left\{(z-z_0)^m f(z)\right\}$$

مثال : مانده تابع $f(z)=\frac{2z+3}{(z-1)(z^2+4)}$ را در نقطه تکین $z=2i$ پیدا کنید.

حل: بدیهی است $2i$ قطب مرتبه اول تابع است و البته از هر دو مورد الف و ب می‌توان استفاده کرد.

الف) $\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=2i}=\lim_{z\to 2i}(z-2i)\dfrac{(2z+3)}{(z-1)(z-2i)(z+2i)}=\lim_{z\to 2i}\dfrac{2z+3}{(z-1)(z+2i)}=\dfrac{4i+3}{(2i-1)(4i)}$

ب) $\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=2i}=\dfrac{2z+3}{(1)(z^2+4)+2z(z-1)}\Big|_{z=2i}=\dfrac{4i+3}{(2i-1)(4i)}$

مثال - مانده تابع $f(z)=\dfrac{\sin 3z}{(2z+1)^4}$ را در نقطه تکین $z=-\dfrac{1}{2}$ پیدا کنید.

حل - در $z=-\dfrac{1}{2}$ چون صورت صفر نمی‌شود قطب مرتبه ۴ است و طبق قاعده (ج) داریم:

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3!}\frac{d^3}{dz^3}\left\{\left(z+\frac{1}{2}\right)^4\frac{\sin 3z}{(2z+1)^4}\right\}\Bigg|_{z=-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3!}\frac{1}{2^4}\frac{d^3}{dz^3}\{\sin 3z\}\Big|_{z=-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^4}(-1)(3)^3\cos 3z\Big|_{z=-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{-3^3}{3!2^4}\cos\left(-\frac{3}{2}\right)$$

مثال - مانده تابع $f(z)=\dfrac{\cos z}{z(e^z-1)}$ را در نقطه تکین $z=2\pi i$ به‌دست آورید.

حل - توجه کنید که $e^{2\pi i}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ لذا $z=2\pi i$ در حقیقت یک نقطه تکین تابع می‌باشد. از آن‌جا که مشتق مخرج در $z=2\pi i$ مخالف صفر است:

مشتق مخرج $= ze^z+e^z-1\Big|_{z=2\pi i}=2\pi i\neq 0$

در $z=2\pi i$ صفر صورت نیز نمی‌باشد، در نتیجه $z=2\pi i$ یک قطب مرتبه اول برای تابع است و داریم:

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=2\pi i}=\frac{\cos z}{(ze^z-z)'}\Big|_{z=2\pi i}=\frac{\cos 2\pi i}{2\pi i}=-\frac{\cosh 2\pi}{2\pi}i$$

مثال - مانده تابع $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$ در نقطه $z=0$ کدام است؟

حل - $z=0$ یک تکین اساسی می‌باشد، لذا باید بسط لوران تابع را حول نقطه $z=0$ نوشت و سپس مانده را در نقطه مزبور به‌دست آورد.

$$f(z)=\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}=\frac{1}{1-z}.e^{\frac{1}{z}}=\left(1+z+z^2+z^3+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2 2!}+\frac{1}{z^3 3!}+\cdots\right)$$

ملاحظه می‌شود ضریب جمله $\dfrac{1}{z}$ عبارت است از:

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=0}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

داریم:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\Rightarrow e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=0}=e-1$$

مثال : فرض کنید داشته باشیم $f(z)=\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z^2+1}$ مجموع مانده‌های این تابع را در نقاط تکین $z=\pm i$ محاسبه کنید:

حل: بدیهی است که $z=\pm i$ هر دو قطب‌های مرتبه اول تابع هستند، پس داریم:

$$\underset{z\to i}{\operatorname{Res}} f(z)=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{\sin\frac{1}{z}}{(z-i)(z+i)}=\frac{\sin\frac{1}{i}}{2i}=\frac{-i\sin(-i)}{2}=-\frac{\sinh 1}{2}$$

$$\underset{z\to(-i)}{\operatorname{Res}} f(z)=\lim_{z\to(-i)}(z+i)\frac{\sin\frac{1}{z}}{(z-i)(z+i)}=\frac{\sin\left(-\frac{1}{i}\right)}{(-2i)}=\frac{+i\sin i}{2}=-\frac{\sinh 1}{2}$$

پس:

$$\operatorname{Res} f(z)=-\frac{\sinh 1}{2}-\frac{\sinh 1}{2}=-\sinh 1$$

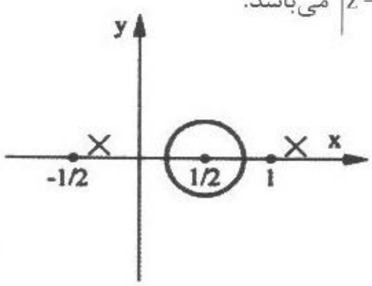
انتگرال‌گیری به روش مانده‌ها

فرض کنید C یک منحنی بسته در جهت مثلثاتی باشد برای محاسبه $\int_c f(z)\,dz$، با این فرض که $f(z)$ در تمام صفحه مختلط به جزء نقاطی خاص تحلیلی است به صورت زیر عمل می‌کنیم. نخست تمام نقاط تکین تابع $f(z)$ را یافته و مانده تابع را در آن نقاط تکین که داخل ناحیه محدود به مرز C می‌باشند محاسبه می‌کنیم.

(توجه کنید نقاط تکین تابع $f(z)$ حق واقع شدن بر روی مرز انتگرال‌گیری را ندارند)

حال می‌توان ادعا کرد با جمع مانده‌های محاسبه شده و ضرب آن در $2\pi i$ حاصل انتگرال مورد نظر محاسبه می‌شود.

مثال : مطلوب است محاسبه انتگرال مختلط $I=\int_c \dfrac{e^z dz}{(z-1)^2(2z+1)}$ که در آن c دایره $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{3}$ می‌باشد.



حل:

نقاط تکین عبارتند از:

قطب مرتبه دوم: $z=1$

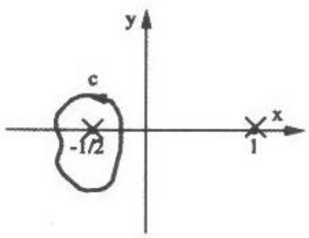
قطب ساده: $z=-\frac{1}{2}$

خارج مرز: $\left|1-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$

خارج مرز: $\left|-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right|=1>\frac{1}{3}$

پس چون هر دو نقطه تکین خارج مرز انتگرال‌گیری است، لذا: $I=0$

ب) همان مساله قبل را وقتی C مرز نشان داده شده در شکل زیر می‌باشد را محاسبه کنید.



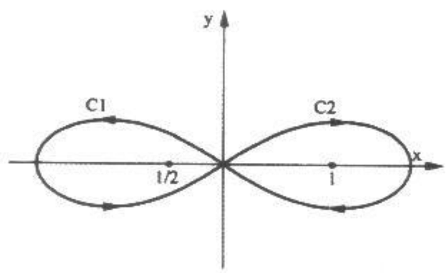
در این حالت تنها نقطه تکین داخل مرز C نقطه $z=-\frac{1}{2}$ است و داریم:

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=\left(-\frac{1}{2}\right)} = \lim_{z\to\left(-\frac{1}{2}\right)} \left(z+\frac{1}{2}\right)\frac{e^z}{(z-1)^2(2z+1)} = \lim_{z\to\left(-\frac{1}{2}\right)} \frac{e^z}{2(z-1)^2} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2\left(\frac{9}{4}\right)} \Rightarrow I = 2\pi i\frac{\left(2e^{-\frac{1}{2}}\right)}{9}$$

ج) همان مثال قبل را وقتی C مرز نشان داده شده در شکل زیر باشد را حل کنید.

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=1} = \frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left\{(z-1)^2\frac{e^z}{(z-1)^2(2z+1)}\right\}\Bigg|_{z=1}$$

$$= \frac{d}{dz}\left\{\frac{e^z}{(2z+1)}\right\}\Bigg|_{z=1} = \frac{e^z(2z+1)-2e^z}{(2z+1)^2} = \frac{e}{9}$$

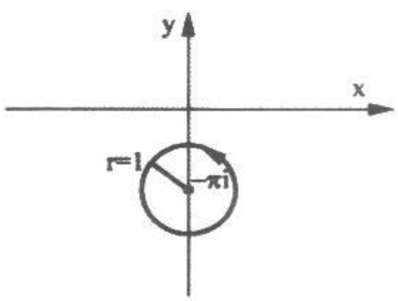


پس داریم:

$$I = \int_{c_1} + \int_{c_2} = 2\pi i\left(\frac{2e^{-\frac{1}{2}}}{9} - \frac{e}{9}\right)$$

(چون برای منحنی C_2 در خلاف جهت مثلثاتی حرکت کردیم باید در $(-2\pi i)$ ضرب شود).

مثال : مطلوب است محاسبه $I = \int_c \frac{z^2}{\sinh z}dz$ که در آن c دایره، $|z+\pi i| = 1$ که یک بار در جهت مثلثاتی طی شده است.



حل: کاندیدای نقاط تکین عبارتند از:

$$\sinh z = 0 \ \Rightarrow\ \frac{1}{i}\sin iz = 0 \ \Rightarrow\ \sin iz = 0$$

$$\Rightarrow\ iz = k\pi \ \Rightarrow\ z = \frac{k\pi}{i} = -ik\pi \ \Rightarrow\ z = 0\,,\pm i\pi\,;\pm 2i\pi$$

نکته : $\boxed{\sin iA = i\sinh A}$ $\boxed{\cos iA = \cosh A}$

$z=0$ در این مساله صفر مرتبه اول تابع $f(z)$ است چون دو صفر در صورت و یک صفر در مخرج است.

دقت داریم تمام نقاط به‌دست آمده قطب‌های مرتبه اولند به جز $z=0$ که اساساً نقطه تکین تابع نمی‌باشند و البته نقطه $z=-\pi i$ داخل مرز c است داریم:

$$\operatorname{Res}\Big|_{z=-\pi i} = \frac{z^2}{\cosh z}\Big|_{z=-\pi i} = \frac{-\pi^2}{\cosh(-\pi i)}$$

$$I = 2\pi i\left(\frac{-\pi^2}{\cosh(-\pi i)}\right) = \frac{-2\pi^3 i}{\cos(i(-\pi i))} = \frac{-2\pi^3 i}{\cos\pi} = 2\pi^3 i$$

مثال : فرض کنید داشته باشیم $\int_c \frac{z+3}{z^2\left(z^2-1\right)}dz$ چنانچه حاصل این انتگرال بر روی دایره c که $c:|z|=3$ تعریف شده برابر با m باشد، حاصل انتگرال مذکور بر روی دایره $c':|z-1|=\frac{3}{2}$ کدام است:

حل:

قطب مرتبه دوم: $z=0$

قطب‌های ساده: $z=\pm1$

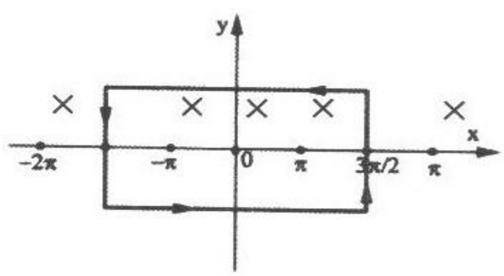
و با توجه به این که هر سه نقطه تکین مذکور در داخل دایرهٔ c واقع می‌باشد بنابراین، چنانچه که دقت کنیم با توجه به مرز c' فقط نقاط $z=0$ و $z=1$ داخل مرز می‌باشند، لذا:

$$m=2\pi i\left\{\operatorname{Res}\Big|_{z=0}+\operatorname{Res}\Big|_{z=1}+\operatorname{Res}\Big|_{z=-1}\right\}\qquad I=m-2\pi i\left\{\operatorname{Res}\Big|_{z=-1}\right\}$$

$$\operatorname{Res}\Big|_{z=-1}=\lim_{z\to-1}(z+1)\frac{(z+3)}{z^2\left(z^2-1\right)}\Big|_{z=-1}=-1$$

$$I=\int_{c'}\frac{z+3}{z^2\left(z^2-1\right)}=m+2\pi i$$

مثال : مطلوب است محاسبه انتگرال $I=\int_c\frac{\cot gz}{z^3}dz$ که در آن c مرز نشان داده شده درشکل زیر است:



حل: برای تابع $f(z)=\frac{\cos z}{z^3.\sin z}$ نقاط تکین عبارت است از:

$$\sin z=0\Rightarrow z=0,\pm\pi\ ,\ \pm2\pi,...$$

$z=0$ یک قطب مرتبهٔ چهارم و $z=\pm\pi$ قطب مرتبه اول واقع در ناحیه مورد نظر می‌باشد.

$$\operatorname{Res}f(z)\Big|_{z=\pi}=\frac{\cos z}{3z^2\sin z+z^3\cos z}\Big|_{z=\pi}=\frac{1}{\pi^3}$$

$$\operatorname{Res}f(z)\Big|_{z=-\pi}=\frac{\cos z}{3z^2\sin z+z^3\cos z}\Big|_{z=-\pi}=-\frac{1}{\pi^3}$$

از آن‌جایی که تابع $f(z)$ تابعی زوج می‌باشد، لذا در بسط این تابع حول نقطه $z=0$ فقط توان‌های زوج z ظاهر می‌شود لذا در بسط مذکور اساساً جمله $\frac{1}{z}$ تولید نمی‌شود و بنابراین $\operatorname{Res}f(z)$ در صفر برابر صفر می‌باشد.

پس حاصل انتگرال مورد نظر برابر است با:

$$I=2\pi i\left\{\frac{1}{\pi^3}+\frac{-1}{\pi^3}+0\right\}=0$$

مثال : مطلوب است محاسبه $I=\int_{|z|=6}\left(z^3-2z+\frac{1}{z}\right)e^{\frac{1}{z}}$

حل: بدیهی است تنها نقطه تکین تابع $z=0$ است که از نوع اساسی می‌باشد و البته داخل مرز انتگرال‌گیری واقع است برای یافتن مانده، بسط لوران را حول $z=0$ می‌نویسیم:

$$f(z)=\left(z^3-2z+\frac{1}{z}\right)\left\{1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2 2!}+\frac{1}{z^3 3!}+\frac{1}{z^4 4!}+\cdots\right\}$$

$$\frac{1}{z}\ \text{ضریب}=\operatorname{Res}f(z)\Big|_{z=0}=\frac{1}{4!}-2\left(\frac{1}{2!}\right)+1=\frac{1}{24}$$

پس: $I=2\pi i\left(\frac{1}{24}\right)$

مثال : مطلوب است محاسبه $I=\int_{|z|=1}\sinh\left(\frac{1}{z}\right)\cos\left(\frac{2}{z}\right)dz$

حل: بدیهی است $z=0$ تکین اساسی است.

$$f(z)=\sinh\left(\frac{1}{z}\right).\cos\left(\frac{2}{z}\right)=\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3 3!}+\frac{1}{z^5 5!}+\cdots\right)\left(1-\frac{\left(\frac{2}{z}\right)^2}{2!}+\cdots\right)=\ldots$$

$$\frac{1}{z}\ \text{ضریب}=1\Rightarrow I=2\pi i(1)=2\pi i$$

مثال : مطلوب است محاسبه $I=\int_{|z-1|=1}(2z^2+z-6)\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)dz$

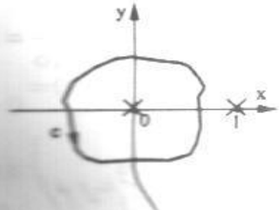
حل: تنها نقطه تکین $z=1$ است که از نوع اساسی است و داخل مرز انتگرال‌گیری واقع است. با نوشتن بسط لوران تابع حول نقطه $z=1$ داریم:

$$f(z)=(2z^2+z-6)\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

$$\left\{2(z-1)^2+5(z-1)-3\right\}\left\{\frac{1}{z-1}-\frac{1}{(z-1)^3 3!}+\frac{1}{(z-1)^5 5!}+\cdots\right\}$$

$$\frac{1}{z-1}\ \text{پس ضریب}:\operatorname{Res}f(z)\Big|_{z=1}=\frac{-2}{3!}+(-3)\Rightarrow I=2\pi i\left(-\frac{2}{3!}-3\right)=-\frac{20\pi}{3}i$$

مثال : مطلوب است محاسبهٔ $I=\int_c\frac{\cos\frac{1}{z}}{1-z}dz$ که در آن c مرز زیر است.



حل: نقاط تکین تابع عبارت است از:

$z=0$ تکین اساسی

$z=1$ قطب ساده

و از آن‌جایی که فقط $z=0$ داخل مرز c واقع است باید بسط لوران تابع را حول $z=0$ بنویسیم:

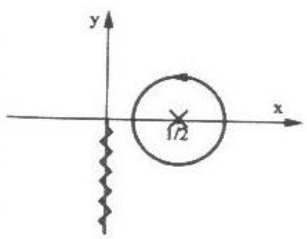
$$f(z)=\frac{1}{1-z}\cos\frac{1}{z}=\{1+z+z^2+z^3+\cdots\}\left\{1-\frac{1}{z^2 2!}+\frac{1}{z^4 4!}-\frac{1}{z^6 6!}+\cdots\right\}$$

$$\frac{1}{z}\ \text{ضریب}=-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\cdots=\cos 1-1\Rightarrow I=2\pi i(\cos 1-1)$$

مثال : مطلوب است محاسبه انتگرال $I=\oint_c \frac{\ln z}{(2z-1)^2}dz$ که $c:\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{3}$

(فرض شده: $-\frac{\pi}{2}\le\theta<\frac{3\pi}{2}$ ، $\ln z=\ln r+i\theta$)

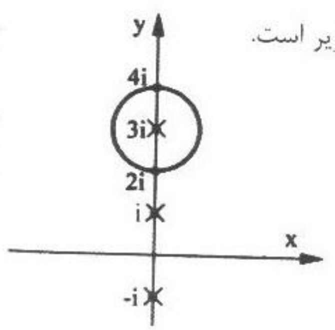
حل: برای تابع $f(z)=\frac{\ln z}{(2z-1)^2}$ ، نقاط تکین تابع با توجه به وضعیت تعریف $\ln z$ در شکل زیر نمایش داده شده است.



$z=\frac{1}{2}$ قطب مرتبه دوم تابع است، بنابراین داریم:

$$\mathrm{Res}\,f(z)\bigg|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left\{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2.\frac{\ln z}{(2z-1)^2}\right\}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\frac{d}{dz}(\ln z)=\frac{1}{4}\frac{1}{z}\bigg|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{2}{4}\Rightarrow I=2\pi i\left(\frac{2}{4}\right)$$

مثال : مطلوب است محاسبه $I=\oint_c\frac{\ln(z^2+1)dz}{(z-3i)^2}$ که در آن c مطابق مرز نشان داده شده در شکل زیر است.



حل:

در این مساله نقاط شاخه‌ای تابع $\ln(z^2+1)$ یعنی نقاطی که بریدگی شاخه‌ای از آن‌ها منشعب می‌شوند عبارتند از:

$$z^2+1=0\quad;\quad z=\pm i$$

که البته هر دو خارج دایره c قرار دارند بنابراین می‌توان بریدگی شاخه‌ای به طور دلخواه از این دو نقطه منشعب کرد، که تماماً خارج دایره c قرار گیرند و لذا تنها نقطه تکین تابع زیر علامت انتگرال $z=3i$ است که قطب مرتبه دوم بوده و داخل دایره c واقع است.

$$\mathrm{Res}\bigg|_{z=3i}=\frac{d}{dz}\left\{(z-3i)^2\frac{\ln(z^2+1)}{(z-3i)^2}\right\}=\frac{2z}{z^2+1}\bigg|_{z=3i}=\frac{6i}{-9+1}=-\frac{6}{8}i\quad;\quad I=2\pi i\left(-\frac{6}{8}i\right)=\frac{3}{2}\pi$$

مثال : اگر c بیضی $\frac{(x-4)^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ باشد که در جهت مثلثاتی پیموده شده و $f(w)=\oint_c\frac{z^2-z+1}{z(z-w)}dw$ آن گاه مقدار $f'(2)$ برابر است با:

حل: نقاط تکین تابع $g(z)=\frac{z^2-z+1}{z(z-w)}$، نقاط $z=0\ ,\ z=w$ هستند که هر دو قطب مرتبه اول به حساب می‌آیند.

بدیهی است که نقطه $z=0$ خارج بیضی داده شده واقع است.

$$\frac{(0-4)^2}{9}+\frac{(0)^2}{16}>1$$

اگر $z=w$ داخل بیضی مزبور باشد، داریم:

$$\operatorname{Res} g(z)\big|_{z=w}=\lim_{z\to w}\frac{z^2-z+1}{z(z-w)}(z-w)=\frac{w^2-w+1}{w}\Rightarrow f(w)=2\pi i\frac{w^2-w+1}{w}$$

$$f'(w)=2\pi i\frac{(2w-1)w-\left(w^2-w+1\right)}{w^2}=2\pi i\frac{w^2-1}{w^2}$$

چون $w=2$ داخل بیضی c واقع است:

$$f'(2)=2\pi i\frac{2^2-1}{2^2}=\frac{3\pi i}{2}$$

مثال : انتگرال $\int_c \sin\left(\frac{z}{z-1}\right)dz$ وقتی مسیر c تصویر خط $\operatorname{Re} w=1$ تحت نگاشت $z=e^w$ می‌باشد، کدام است؟

حل: نخست تصویر خط $\operatorname{Re} w=1$ را تحت نگاشت $z=e^w$ به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases}z=e^{u+iv}\\ u=1\end{cases}\Rightarrow\quad z=e^{1+iv}\quad\Rightarrow\quad |z|=\left|e^{1+iv}\right|=|e|\left|e^{iv}\right|=e$$

لذا مسیر c دایره به مرکز مبدأ و شعاع e در صفحه z خواهد بود.

نقطه تکین تابع $f(z)=\sin\left(\frac{z}{z-1}\right)$، $z=1$ می‌باشد که در داخل مسیر بسته c واقع است و از آن‌جا که $z=1$ تکین اساسی تابع مزبور است، برای محاسبه مانده تابع در این نقطه باید بسط لوران حول $z=1$ را نوشت:

$$f(z)=\sin\left(\frac{z-1+1}{z-1}\right)=\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\sin 1\cos\frac{1}{z-1}+\cos 1\sin\frac{1}{z-1}$$

$$=\sin 1\left(1-\frac{1}{(z-1)^2 2!}+\cdots\right)+\cos 1\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{(z-1)^3 3!}+\cdots\right)$$

بنابراین $\operatorname{Res} f(z)\big|_{z=1}=\cos 1$ بوده و حاصل انتگرال مورد نظر $I=2\pi i\cos 1$ می‌باشد.

نکته‌ای در ارتباط با یافتن مانده یک تابع زوج در نقطه تکین $z=0$:

اگر $f(z)$ تابعی زوج باشد در بسط آن تابع حول نقطه $z=0$ فقط توان‌های زوج z می‌تواند وجود داشته باشد (توان‌های زوج مثبت و یا منفی) بنابراین طبیعی است اگر $z=0$ برای تابع زوجی نقطه تکین باشد قطعاً مانده تابع در آن برابر صفر است.

مثال : مانده تابع $f(z)=\frac{1}{1-\cos z}$ در نقطه تکین $z=0$ بیابید.

بدیهی است $z=0$ یک قطب مرتبه دوم تابع است، زیرا:

مخرج: $1-\cos z\big|_{z=0}=0$

مشتق اول مخرج $\sin z\big|_{z=0}=0$

مشتق دوم مخرج $\cos z \Big|_{z=0} \neq 0$

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=0} = \lim \frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left\{z^2 \frac{1}{1-\cos z}\right\} = \ldots\ldots = 0$$

اما می‌توان گفت چون تابع $f(z)$ تابعی زوج است، لذا:

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=0} = 0$$

نکته بسیار مهم:

همان‌طور که گفتیم توابع $\bar{z}$ و $\operatorname{Im} z$ و $\operatorname{Re} z$ و $|z|$ هیچ کجا تحلیلی نیستند، بنابراین وجود این ترم‌ها در تابع زیر علامت انتگرال استفاده مستقیم از روش مانده‌ها را تعطیل می‌کند اما در زمانی که انتگرال‌گیری مختلط روی $|z| = a$ تعریف شود می‌توان با استفاده از روابط زیر این عوامل را حذف کرده و به محاسبه انتگرال پرداخت:

$$\begin{cases} z+\bar{z} = 2x = 2\operatorname{Re} z \\ z-\bar{z} = 2iy = 2i\operatorname{Im} z \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \operatorname{Re} z = \dfrac{z+\bar{z}}{2} \\ \operatorname{Im} z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i} \end{matrix}$$

$$\bar{z} = \frac{z.\bar{z}}{z} = \frac{|z|^2}{z}$$

مثال : مطلوب است محاسبه انتگرال مختلط $I = \int_{|z|=2} \dfrac{e^z}{\bar{z}-3i}dz$

حل: بدیهی است به واسطه وجود ترم $\bar{z}$ استفاده مستقیم از روش مانده‌ها مجاز نمی‌باشد اما می‌توان نوشت:

$$I = \int_{|z|=2} \frac{ze^z}{z\bar{z}-3iz}dz$$

اما می‌دانیم $z\bar{z} = |z|^2$ و چون حاصل انتگرال را روی مرز $|z| = 2$ حساب می‌کنیم.

$$z\bar{z} = 2^2 = 4$$

پس به دست می‌آید:

$$I = \int_{|z|=2} \frac{ze^z}{4-3iz}dz$$

حال می‌توان به قضیه مانده‌ها ارجاع داد:

$$f(z) = \frac{ze^z}{4-3iz}$$

نقطه $z = \dfrac{4}{3i} = -\dfrac{4}{3}i$ قطب مرتبه اول است و چون داخل $|z| = 2$ است می‌نویسیم:

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=-\frac{4}{3}i} = \frac{ze^z}{-3i}\Big|_{z=-\frac{4}{3}i} = \frac{-\frac{4i}{3}.e^{-\frac{4i}{3}}}{-3i} = \frac{4}{9}e^{-\frac{4}{3}i} \qquad I = 2\pi i\left(\frac{4}{9}e^{-\frac{4}{3}i}\right) = \cdots$$

مثال : مطلوب است محاسبهٔ $I=\int_{|z|=1}\left(\frac{z}{|z|}+\sin z\right)d\bar{z}$

حل: از آن جا که $|z|$ و $\bar{z}$ هیچ کجا تحلیلی نمی‌باشد لذا استفاده مستقیم از روش مانده‌ها مجاز نمی‌باشد چون روی مسیر $|z|=1$ کار می‌کنیم داریم $z\bar{z}=|z|^2=1$ و می‌نویسیم:

$$I=\int_{|z|=1}\left(\frac{z}{1}+\sin z\right)d\left(\frac{z\bar{z}}{z}\right)=\int_{|z|=1}(z+\sin z)\,d\left(\frac{1}{z}\right)=\int_{|z|=1}(z+\sin z).\frac{-1}{z^2}dz=-\int_{|z|=1}\frac{z+\sin z}{z^2}dz$$

حال می‌توان از روش مانده‌ها استفاده کرد.

با توجه به بسط زیر:

$$-\frac{z+\sin z}{z^2}=-\frac{z+\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)}{z^2}=\frac{-2z+\frac{z^3}{3!}+\cdots}{z^2}\Rightarrow \operatorname{Res}f(z)\big|_{z=0}=-2\Rightarrow I=-4\pi i$$

محاسبهٔ برخی انتگرال‌های حقیقی با استفاده از انتگرال‌های مختلط

الف) در محاسبهٔ انتگرال‌هایی به فرم $I=\int_0^{2\pi}f(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$ با توجه به آن که داریم:

$$\boxed{\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}\qquad\qquad \boxed{\cos\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}}$$

با استفاده از فرض $z=e^{i\theta}$ به‌دست می‌آید:

$$dz=ie^{i\theta}d\theta\quad\Rightarrow\quad d\theta=\frac{dz}{iz}$$

$$\sin\theta=\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\quad;\quad\cos\theta=\frac{z+\frac{1}{z}}{2}$$

لذا انتگرال مورد نظر به فرم زیر قابل بیان است:

$$I=\int_{|z|=1}h(z)dz$$

که با استفاده از روش مانده‌ها قابل حل است.

مثال : مطلوب است محاسبهٔ $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{2}-\sin\theta}$

حل:

$$I=\int_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{\sqrt{2}-\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}}=\xrightarrow[\text{در 2iz ضرب می‌کنیم}]{\text{صورت و مخرج را}}\int\frac{2dz}{2\sqrt{2}iz-z^2+1}$$

نقاط تکین عبارت است از:

$$-z^2+2\sqrt{2}iz+1=0\Rightarrow z=\frac{-\sqrt{2}i\pm\sqrt{-2+1}}{-1}=i\left(\sqrt{2}\pm1\right)$$

هر دو نقطهٔ تکین از نوع قطب مرتبه اولند و فقط $\left(\sqrt{2}-1\right)i$ داخل دایره $|z|=1$ واقع می‌باشد.

لذا:

$$\operatorname{Res} f(z)\Big|_{z=(\sqrt{2}-1)i} = \frac{2}{2\sqrt{2}\,i-2z}\Bigg|_{z=(\sqrt{2}-1)i} = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i}$$

$$I = 2\pi i\left(\frac{1}{i}\right) = 2\pi$$

مطلوب است محاسبهٔ انتگرال روبه‌رو با فرض $n \in N$

$$I = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}.e^{-i(n\theta+\sin\theta)}.d\theta$$

حل:

$$I = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}.e^{-i(n\theta+\sin\theta)}.d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta - i\sin\theta}.e^{-in\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} e^{e^{-i\theta}}\left(e^{i\theta}\right)^{-n} d\theta$$

با فرض $z = e^{i\theta}$ داریم:

$$e^{-i\theta} = \frac{1}{z}$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$I = \int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}}.z^{-n}\,\frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}}\,\frac{dz}{iz^{n+1}}$$

تنها نقطه تکین $z=0$ است که از نوع تکین اساسی است و البته داخل $|z|=1$ می‌باشد لذا می‌نویسیم:

$$e^{\frac{1}{z}} \times \frac{1}{z^{n+1}} = \frac{1}{z^{n+1}}\left\{1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2\,2!} + \cdots\right\}$$

بنابراین چون n یک عدد طبیعی است $(n \ge 1)$ لذا در بسط مورد نظر اساساً جملهٔ $\frac{1}{z}$ ای درست نمی‌شود یعنی $\operatorname{Ref}(z)\Big|_{z=0} = 0$ ،

$$I = 2\pi i(0) = 0$$

ب) در محاسبهٔ انتگرال‌هایی به فرم $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ دو چند جمله‌ای از x هستند که درجه $Q(x)$ لااقل دو درجه از درجه $P(x)$ بزرگ‌تر است و $Q(x)$ صفر حقیقی ندارد می‌توان نشان داد:

$$I = \int_{\operatorname{Im} z>0} \frac{P(z)}{Q(z)}dz$$

یعنی کافی است مانده‌های تابع‌های $\frac{P(z)}{Q(z)}$ درنقاط تکینی که در نیم صفحه فوقانی واقع هستند حساب کرده و با ضرب $2\pi i$ در مجموع آن مانده‌ها جواب انتگرال مورد نظر را پیدا کنیم.

مثال : مطلوب است محاسبهٔ انتگرال زیر:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2+1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}.dx$$

حل:

نقاط تکین:

$$z^2+1=0 \quad ; \quad z=\pm i$$

$$z^2+4=0 \quad ; \quad z=\pm 2i$$

با استفاده از بحث (ب) ما برای انتگرال‌گیری فقط به مانده در $z=i$ و $z=2i$ نیازمندیم:

$$\operatorname{Res}\frac{2z^2+1}{(z^2+1)(z^2+4)}\Bigg|_{z=i}=\frac{2z^2+1}{(2z)(z^2+4)+2z(z^2+1)}\Bigg|_{z=i}=\frac{-1}{(2i)(3)}$$

$$\operatorname{Res}\frac{2z^2+1}{(z^2+1)(z^2+4)}\Bigg|_{z=2i}=\frac{2z^2+1}{(2z)(z^2+4)+(2z)(z^2+1)}\Bigg|_{z=2i}=\frac{-7}{(-3)(4i)}$$

$$I=2\pi i\left(\frac{1}{-6i}+\frac{7}{12i}\right)$$

ج) در محاسبه انتگرال‌های حقیقی به فرم $A=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\cos ax.dx$ و $B=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\sin ax.dx$ که در آن $\frac{P(x)}{Q(x)}$ وضعیتی مانند وضعیت (ب) دارد کافی است نخست انتگرال مختلط زیر را حساب کنیم:

$$I=\int_{\operatorname{Im}>0}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{iaz}dz$$

حال می‌توان نشان داد:

$$\begin{cases}A=\operatorname{Re}(I)\\ B=\operatorname{Im}(I)\end{cases}$$

مثال : مطلوب است محاسبه انتگرال‌های مختلط زیر:

$$A=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+1}dx$$

حل: داریم $\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{1}{z^2+1}$ و لذا نقاط تکین تابع $\frac{P(z)}{Q(z)}e^{2iz}$ عبارتند از:

$$z^2+1=0 \;\Rightarrow\; z=\pm i$$

و البته فقط $z=i$ در نیم صفحه فوقانی است و داریم:

$$\operatorname{Res}\left(e^{2iz}\frac{1}{z^2+1}\right)\Bigg|_{z=i}=\frac{e^{2iz}}{2z}\Bigg|_{z=i}=\frac{e^{-2}}{2i}$$

$$I=\int_{\operatorname{Im} z>0}e^{2iz}\frac{1}{z^2+1}dz=2\pi i\left\{\frac{e^{-2}}{2i}\right\}=\frac{\pi}{e^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2+1}dx=\operatorname{Re}(I)=\frac{\pi}{e^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+1}dx=\operatorname{Im}(I)=0$$

$$B=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2+2x+5}dx$$

برای $\frac{e^{iz}}{z^2+2z+5}$ نقاط تکین عبارتند از:

$$z^2+2z+5=0 \;\Rightarrow\; z=-1\pm\sqrt{1-5}=-1\pm 2i$$

که هر دو قطب مرتبه اولند و فقط $-1+2i$ در نیم صفحه فوقانی است پس:

$$\operatorname{Res}\frac{e^{iz}}{z^2+2z+5}\bigg|_{z=-1+2i}=\frac{e^{iz}}{2z+2}\bigg|_{z=-1+2i}=\frac{e^{i(-1+2i)}}{4i}$$

$$I=\int_{\operatorname{Im}z>0}\frac{e^{iz}}{z^2+2z+5}\,dz=2\pi i\frac{e^{i(-1+2i)}}{4i}=\frac{\pi}{2}e^{-i-2}=\frac{\pi}{2}e^{-2}(\cos 1-i\sin 1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+2x+5}\,dx=\operatorname{Re}(I)=\frac{\pi}{2}e^{-2}\cos 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2+2x+5}\,dx=\operatorname{Im}(I)=-\frac{\pi}{2}e^{-2}\sin 1$$

د) در محاسبه انتگرال‌هایی به فرم $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{i\alpha x}\,dx$ که درآن $P(x)$ و $Q(x)$ دو چند جمله‌ای از x می‌باشند، که درجه $Q(x)$ لااقل یک واحد از درجه $P(x)$ بیشتر است و تمام ریشه‌های حقیقی معادله $Q(x)$ ریشه‌های مرتبه اول می‌باشند که بر صفرهای توابع $\sin(\alpha x)$ یا $\cos(ax)$ منطبق‌اند می‌توان نشان داد.

$$I=2\pi i\left\{\begin{array}{c}\text{مجموع مانده‌های تابع}\\ e^{i\alpha z}\dfrac{P(z)}{Q(z)}\ \text{که در نقاط تکین}\\ \text{واقع بر نیم صفحه فوقانی هستند}\end{array}+\frac{1}{2}\left(\begin{array}{c}\text{مجموع مانده‌های تابع}\ e^{i\alpha z}\dfrac{P(z)}{Q(z)}\\ \text{در نقاط تکین حقیقی}\end{array}\right)\right\}$$

مثال : مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx$.

حل: برای تابع $\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}$ نقاط تکین عبارتند از: $z=\pm i\ ;\ z=0$

$$\operatorname{Res}\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\bigg|_{z=i}=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)e^{iz}}{z(z-i)(z+i)}=\frac{e^{-1}}{i(2i)}=\frac{-e^{-1}}{2}$$

$$\operatorname{Res}\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\bigg|_{z=0}=\lim_{z\to 0}z\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}=\frac{1}{1}=1$$

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x(x^2+1)}dx=2\pi i\left(\frac{e^{-1}}{-2}+\frac{1}{2}(1)\right)=\pi i\left(1-\frac{1}{e}\right)\ \rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}\,dx=\operatorname{Im}(I)=\pi\left(1-\frac{1}{e}\right)\qquad\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x(x^2+1)}dx=\operatorname{Re}(I)=0$$

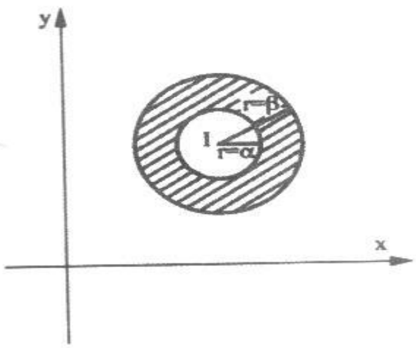
نوشتن بسط لوران معتبر در نواحی مختلف

همان‌طور که می‌دانید دو بسط زیر که به سری‌های هندسی موسوم هستند، فقط با شرط $|A|<1$ اعتبار دارند بنابراین در زمان استفاده از هر کدام از آن‌ها باید وجود این شرط را ارزیابی کنیم و در غیر این صورت مجاز به استفاده از این بسط نیستیم.

$$\boxed{\frac{1}{1-A}=\sum_{n=0}^{\infty}A^n}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+A}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n A^n}$$

مثال : تابع $f(z)=\dfrac{1}{z(1+z)}$ مفروض است بسط این تابع معتبر در ناحیه $1<|z|$ را بنویسید.



حل:

مطابق قرارداد، وقتی می‌خواهیم بسط تابعی را که در ناحیه $\alpha<|z-z_0|<\beta$ معتبر است بنویسیم، بسط تابع بر حسب توان‌های مختلف $(z-z_0)$ می‌باشد و چنانچه توان‌های منفی عبارت $(z-z_0)$ وجود داشته باشد. اصطلاحاً جنس بسط از نوع لوران است و اگر توان منفی از عبارت $(z-z_0)$ نباشد، جنس از نوع تیلور است.

$$f(z)=\frac{1}{z(1+z)}=\frac{1}{z}\frac{1}{z+1}$$

حال لازم است که بسط $\dfrac{1}{1+z}$ را حول نقطه $z=0$ و معتبر در ناحیه $1<|z|$ بنویسیم داریم:

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n \qquad \left(|z|>1\Rightarrow\left|\frac{1}{z}\right|<1\right)$$

$$f(z)=\frac{1}{z}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n-2}}$$

مثال : تابع $f(z)=\dfrac{2z-1}{z^2-z-2}$ مفروض است بسط معتبر برای این تابع در ناحیه $1<|z|<2$ را بنویسید:

حل:

بسط تابع را حول نقطه $z=0$ و معتبر در ناحیه $1<|z|<2$ را می‌خواهیم، پس داریم:

$$f(z)=\frac{2z-1}{(z+1)(z-2)}\xrightarrow{\text{روش تجزیه کسرها}}\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z-2}$$

با کمی محاسبه به دست می‌آید $A=B=1$

$$f(z)=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-2}$$

حال باید بسط دو تابع $\dfrac{1}{z+1}$ و $\dfrac{1}{z-2}$ را حول نقطه $z=0$ در ناحیه مورد نظر بنویسیم:

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}.\frac{1}{1+\frac{1}{z}}\Rightarrow\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^n \qquad \boxed{1<|z|<2\Rightarrow\frac{1}{2}<\left|\frac{1}{z}\right|<1}$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{-1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \qquad \boxed{1<|z|<2\Rightarrow\frac{1}{2}<\left|\frac{z}{2}\right|<1}$$

پس داریم:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

جنس بسط مذکور از نوع لوران است به واسطه آن که در آن توان منفی عبارت z وجود دارد.

مثال : بسط تیلور تابع $f(z)=\frac{1}{z-1+2i}$ را حول نقطه $z=2-3i$ نوشته و شعاع همگرایی را تعیین کنید:

حل: چون قرار است بسط را حول نقطه $z=2-3i$ بنویسیم (که البته باید بسط تیلوری باشد) لذا باید در بسط جملات توان‌های نامنفی عبارت $z-z_0=z-2+3i$ پدید می‌آید، لذا داریم:

$$f(z)=\frac{1}{(z-2+3i)+1-i}=\frac{1}{(1-i)}\frac{1}{1+\left(\frac{z-2+3i}{1-i}\right)}=\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2+3i)^n}{(1-i)^n} \qquad \left(\text{با شرط } \left|\frac{z-2+3i}{1-i}\right|<1\right)$$

البته ناحیه همگرایی چنین است:

$$\left|\frac{z-2+3i}{1-i}\right|<1\Rightarrow|z-2+3i|<|1-i|\Rightarrow|z-2+3i|<\sqrt{2}$$

و لذا شعاع همگرایی $R=\sqrt{2}$ است.

دقت کنید شعاع همگرایی بسط تیلور مذکور را قبل از هر کاری می‌توان تعیین کرد بدین ترتیب که min فاصله نقطه z_0 تا تمام نقاط تکین تابع $f(z)$ همان شعاع همگرایی بسط تیلور تابع حول نقطه z_0 است. در این مساله تنها نقطه تکین تابع $f(z)$ نقطه $1-2i$ است که البته فاصله آن تابع $z_0=2-3i$ چنین است:

$$R=\sqrt{(2-1)^2+(-3+2)^2}=\sqrt{2}$$

مثال : سری لوران تابع $f(z)=\frac{1}{z^2-1}$ در ناحیه $2<|z-1|$ کدام است؟

حل:

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z+1)}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{z+1}$$

اینک هدف ما این است که تابع $\frac{1}{z+1}$ را بر حسب توان‌های مختلف $(z-1)$ بنویسیم، که در ناحیه $|z-1|>2$ اعتبار داشته باشد.

$$g(z)=\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z-1+2}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{1+\frac{2}{z-1}}$$

اما در ناحیه مورد نظر داریم $|z-1|>2\Rightarrow\frac{|z-1|}{2}>1\Rightarrow\left|\frac{2}{z-1}\right|<1$ ، لذا می‌توان نوشت:

$$g(z)=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z-1}\right)^n\Rightarrow f(z)=\frac{1}{z-1}\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{z-1}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(z-1)^{n+2}}$$

مثال: ضریب $(z-1)^{-1}$ در بسط لوران تابع $f(z)=\dfrac{1}{z(z-5)}$ در ناحیه $2<|z-1|<3$ کدام است؟

حل: با استفاده از روش تجزیه کسرها می‌توان به‌دست آورد:

$$f(z)=\frac{1}{z(z-5)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{z-5}-\frac{1}{z}\right)$$

حال بسط توابع $\dfrac{1}{z-5}$ و $\dfrac{1}{z}$ را حول نقطه $z=1$ که در داخل ناحیه $2<|z-1|<3$ معتبر است، می‌نویسیم:

$$A=\frac{1}{z-5}=\frac{1}{z-1-4}=\frac{1}{4}\,\frac{1}{\frac{z-1}{4}-1}=\frac{-1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{z-1}{4}}$$

با توجه به شرط $2<|z-1|<3$ داریم $\left|\dfrac{z-1}{4}\right|<1$ و لذا می‌توان نوشت:

$$=\frac{-1}{4}\left(1+\frac{z-1}{4}+\left(\frac{z-1}{4}\right)^2+\cdots\right)$$

$$B=\frac{1}{z}=\frac{1}{z-1+1}=\frac{1}{z-1}\,\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}$$

با توجه به شرط $2<|z-1|<3$ داریم $\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{|z-1|}<\dfrac{1}{2}$ بوده، لذا $\dfrac{1}{|z-1|}<1$ و می‌توان نوشت:

$$=\frac{1}{z-1}\left(1-\frac{1}{z-1}+\left(\frac{1}{z-1}\right)^2-+\cdots\right)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$f(z)=\frac{1}{5}\left(\frac{-1}{4}\left(1+\frac{z-1}{4}+\left(\frac{z-1}{4}\right)^2+\cdots\right)-\frac{1}{z-1}\left(1-\frac{1}{z-1}+\left(\frac{1}{z-1}\right)^2-+\cdots\right)\right)$$

لذا به وضوح دیده می‌شود که ضریب $\dfrac{1}{z-1}$ عبارت است از $\dfrac{-1}{5}$.