نام جزوه :

روش های انتگرال گیری

دانشکده علوم پایه – دانشگاه آزاد واحد کرج

گرد آورنده : مهران محمدی

ایمیل :

Mehran.m10_7@Yahoo.com

مقدمه

بيش از دو هزار سال پيش ارشميدس (287-212 قبل از ميلاد) فرمول هايي را براي محاسبه سطح وجه ها ، ناحيه ها و حجم هاي جامد مثل كره ، مخروط و سهمي يافت . روش انتگرال گيري ارشميدس استثنايي و فوق العاده بود . جبر ، نقش هاي بنيادي ، كليات و حتي واحد اعشار را هم نمي دانست

ليبنيز (1716-1646) و نيوتن (1727-1642) حسابان را كشف كردند . عقيده كليدي آنها اين بود كه مشتق گيري و انتگرال گيري اثر يكديگر را خنثي مي كنند با استفاده از اين ارتباط ها آنها توانستند تعدادي از مسائل مهم در رياضي فورير (1830-1768) در مورد رسانش گرما بوسيله سلسله زمان هاي مثلثاتي را مي.، فيزيك و نجوم را حل كنند خواند تا نقش هاي بنيادي را نشان دهد .رشته هاي فورير و جابجايي انتگرال امروزه در زمينه هاي مختلفي چون . داروسازي و موزيك اجرا مي شود

گائوس (1855-1777) اولين جدول انتگرال را نوشت و همراه ديگران سعي در عملي كردن انتگرال در رياضي و علوم فيزيك كرد . كايوچي (1857-1789) انتگرال را در يك دامنه همبستگي تعريف كرد . ريمان (1866-1826) و ليبيزگو . (1941-1875) انتگرال معين را بر اساس يافته هاي مستدل و منطقي استوار كردند

ليوويل (1882-1809) يك اسكلت محكم براي انتگرال گيري بوجود آورد بوسيله فهميدن اينكه چه زماني انتگرال نامعين از نقش هاي اساسي دوباره در مرحله جديد خود نقش اساسي مرحله بعد هستند . هرميت 1901 (1822-1901) يك شيوه علمي براي انتگرال گيري به صورت عقلي و فكري (يك روش علمي براي انتگرال گيري سريع) در دهه . 1940 بعد از ميلاد استراسكي اين روش را همراه لگاريتم توسعه بخشيد

در دهه بيستم ميلادي قبل از بوجود آمدن كامپيوترها رياضيدانان تئوري انتگرال گيري و عملي كردن آن روي جداول انتگرال را توسعه داده بودند و پيشرفت هايي حاصل شده بود .در ميان اين رياضيدانان كساني چون واتسون ، تيچمارش ، بارنر ، ملين ، ميچر ، گرانبر ، هوفريتر ، اردلي ، لوئين ، ليوك ، مگنوس ، آپل بلت ، ابرتينگر ، گرادشتاين ، . اكستون ، سريواستاوا ، پرودنيكف ، برايچيكف و ماريچيف حضور داشتند

در سال 1969 رايسيچ پيشرفت بزرگي در زمينه روش علمي گرفتن انتگرال نامعين حاصل كرد . او كارش را بر پايه تئوري عمومي و تجربي انتگرال گيري با قوانين بنيادي منتشر كرد روش او عملاً در همه گروه هاي قضيه بنيادي كارگر نيست تا زماني كه در وجود آن يك معادله سخت مشتق گيري هست كه نياز دارد تا حل شود . تمام تلاش ها ااز آن پس بر روي حل اين معادله با روش علمي براي موفقيت هاي مختلف قضيه اساسي گذاشته شد . ايت تلاش ها باعث پيشرفت كامل سير و روش علمي رايسيچ شد . در دهه1980 پيشرفت هايي نيز براي توسعه روش او در . موارد خاص از قضيه هاي مخصوص و اصلي او شد

از قابليت تعريف انتگرال معين به نتايجي دست ميابيم كه نشان دهنده قدرتي است كه در رياضيات مي باشد (1988) جامعيت و بزرگي به ما ديدگاه موثر و قوي در مورد گسترش در رياضيات و همچنين كارهاي انجام شده در قوانين انتگرال مي دهد . گذشته از اين رياضيات توانايي دارد تا به تعداد زيادي از نتيجه هاي مجموعه هاي مشهور انتگرال پاسخ دهد (اينكه بفهميم اين اشتباهات ناشي از غلط هاي چاپي بوده است يا نه) . رياضيات اين را ممكن مي سازد تا هزاران مسئله انتگرال را حل نماييم به طوريكه تا كنون در هيچ يك از كتابهاي دستنويس قبلي نيامده باشد . در آينده ديگر وظيفه ضروري انتگرال اين است كه به ازمايش تقارب خطوط ، ارزش اصلي آن و مكانيسم فرض . ها بپردازد

انتگرالها یک بحث اساسی ریاضیات عالی را تشکیل داده که میتوان کاربرد آنرا درتمام علوم طبیعی، انسانی وغیره .مورد مطالعه قرارداد

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

.اولین بار لایب نیتس نماد استانداردی برای انتگرال معرفی کرد a و b نقاط ابتدا و انتهای بازه
.نمادی برای متغیر انتگرال گیری است dx تابعی انتگرال‌پذیر است و f هستند و

یک کمیت بی نهایت کوچک را نشان می‌دهد. هر چند در تئوریهای جدید، انتگرال گیری بر پایه dx از لحاظ تاریخی .متفاوتی پایه گذاری شده است

فرمولهای مهم انتگرال گیری

1. $\int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$
2. $\int \sin x \; dx = -\cos x + c$
3. $\int \cos x \, dx = \sin x + c$
4. $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + c$
5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$
6. $\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + c = \ln |\sec x| + c$
7. $\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + c$
8. $\int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + c$
9. $\int \csc u \, du = \ln |\csc u - \cot u| + c$
10. $\int sec^2 u du = \int (1 + \tan^2 u) du = \tan u + c$
11. $\int csc^2 u \, du = \int (1 + \cot^2 u) du = -\cot u + c$
12. $\int \sec u \tan u du = \sec u + c$
13. $\int \csc u \cot u du = -\csc u + c$
14. $\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + c,$ $\quad \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + c$
15. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + c,$ $\quad \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{a} + c$

$Z = tg \frac{x}{2}$

$\cos x = \frac{1-Z^2}{1+Z^2}$

$\sin x = \frac{2Z}{1+Z^2}$

$dx = \frac{2dZ}{1+Z^2}$

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$\csc x = \frac{1}{\sin x}$

انتگرال گیری به کمک تغییر متغیر

معمولا در حل انتگرال هایی که شامل یک تابع و مشتق آن می باشند، از روش تغییر متغیر استفاده می شود.

مثال .

$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

$= \int \sin u \, du = \cos u + c = -\cos(lnx) + c$

تغییر متغیر: $u = \ln x, \; du = \frac{dx}{x}$

مثال.

$$\int (cos^4x)\,(sin^3x)\,dx$$

$$= \int (cos^4x)\,(sin^2x)(sinx)\,dx = \int (cos^4x)\,(1- cos^2x)(sinx)\,dx$$

$$= \int (cos^4x - cos^6x)\,(\sin x)dx$$

تغییرمتغیر $u = \cos x \ , \ du = -sinx\,dx$

$$= \int (u^4 - u^6)(-du) = -\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + c = -\frac{cos^5x}{5} + \frac{cos^7x}{7} + c.$$

مثال.

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$$

تغییرمتغیر $x = t^2,\ dx = 2tdt$

$$= \int \frac{2tdt}{t^2-t} = 2\int \frac{dt}{t-1} = 2\ln|t-1| + c = 2ln|x^2-1| + c.$$

مثال.

$$\int \frac{dx}{(\tan^{-1}x)(1+x^2)}$$

تغییر متغیر $t = \tan^{-1}x \ \rightarrow dt = \frac{1}{1+x^2}dx$

$$= \int \frac{1}{t}dt = \ln t + c = \ln(\tan^{-1}x) + c$$

مثال.

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$$

$$= \int \frac{e^x}{1+e^x}e^x dx$$

تغییر متغیر $t = 1 + e^x \ \rightarrow \ dt = e^x dx$

$$= \int \frac{t-1}{t}dt = \int dt - \int \frac{dt}{t} = t - \ln t + c = (1+e^x) - \ln(1+e^x) + c$$

انتگرال گیری جزء به جزء

با استفاده از روش جزء به جزء می توان انتگرال های دشوار را به انتگرال های ساده تر تبدیل کرد. این روش در مورد انتگرال هایی به صورت $\int f(x)g(x)dx$ کاربرد دارد که در آن f تابعی است که پس از چند بار مشتق گرفتن صفر می شود و g تابعی است که می توان بارها و بدون هیچ مشکلی از آن انتگرال گرفت. معمولا f و g توابعی مانند $sinx,\ cosx,\ lnx,\ e^x, x^n$ می باشند.

فرمول انتگرال جز به جز به صورت زیر می باشد که از قاعده $d(uv) = udv + vdu$ حاصل می شود.

$$\int udv = uv - \int vdu$$

مثال.

$$\int x\cos x dx \qquad u = x \to du = dx\ ,\ cosxdx = dv \to v = sinx$$

$$= xsinx - \int sinxdx = xsinx + cosx + c.$$

مثال.

$$\int \ln x\, dx \qquad u = lnx,\ dv = dx \Longrightarrow du = \frac{dx}{x}\ ,\ v = x$$

$$= xlnx - \int dx = xlnx - x + c.$$

نکته. برای انتخاب u و dv دقت کنید که u را تابعی می گیریم که پس از مشتق گیری ساده تر شود و dv را قسمتی می گیریم که محاسبه انتگرالش ساده باشد. *به مثال بعد توجه کنید.*

مثال.

$$\int \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad u = \sin^{-1}x \to du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\quad ,\quad dv = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \to v = -\sqrt{1-x^2}$$

$$= -\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x + \int dx = -\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x + x + c.$$

مثال.

$$\int x\, sin^{-1}(\frac{1}{x})dx \qquad u = sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \to du = -\frac{1}{x^2}\times\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$xdx = dv \to v = \frac{1}{2}x^2$$

$$= \frac{1}{2}x^2 sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\int x^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}x^2 sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\int x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\int 2x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}x^2 sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} \qquad t = 1 + x^2 \to dt = 2xdx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{4}\sqrt{t} = \frac{1}{2}x^2 sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + c.$$

حل کردن معادله انتگرالی نسبت به انتگرال مجهول

گاهی اوقات با یک بار استفاده از روش جز به جز، انتگرالی دیگر ظاهر می شود که شبیه انتگرال اولی می باشد. برای حل این نوع انتگرال ها باید دو بار از روش جز به جز استفاده کرد. مثال زیر را ببینید.

مثال.

$$\int e^{2x}cos3xdx = \qquad u = e^{2x},\ dv = cos3xdx \Longrightarrow du = 2e^{2x}dx,\ v = \frac{1}{3}sin3x$$

$$= \frac{1}{3}e^{2x}sin3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}sin3x\,dx \quad ☆$$

اکنون برای حل انتگرال $\int e^{2x}sin3x\,dx$ دوباره باید از جز به جز استفاده کنیم.

$$\int e^{2x}sin3x\,dx \qquad u = e^{2x},\ dv = sin3xdx \Longrightarrow du = 2e^{2x}dx,\ v = -\frac{1}{3}cos3x$$

$$= -\frac{1}{3}e^{2x}cos3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}cos3xdx$$

بنابراین با قرار دادن در رابطه ☆ داریم:

$$\int e^{2x}cos3xdx = \frac{1}{3}e^{2x}sin3x - \frac{2}{3}\int e^{2x}sin3x\,dx =$$
$$\frac{1}{3}e^{2x}sin3x - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}e^{2x}cos3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}cos3xdx\right) =$$
$$\frac{1}{3}e^{2x}sin3x + \frac{2}{9}e^{2x}cos3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}cos3xdx$$

در نتیجه:

$$\int e^{2x}cos3xdx+\frac{4}{9}\int e^{2x}cos3xdx=\frac{1}{3}e^{2x}sin3x+\frac{2}{9}\,e^{2x}cos3x$$

$$\int e^{2x}cos3xdx=\frac{9}{13}\left(\frac{1}{3}e^{2x}sin3x+\frac{2}{9}\,e^{2x}cos3x\right).$$

انتگرال گیری جز به جز به کمک تشکیل جدول

در زیر روش محاسبه انتگرال جز به جز به کمک تشکیل جدول با یک مثال نمایش داده شده است.

$f(x)$ ومشتقاتش		$g(x)$ وانتگرال هایش
x^2	$+$	e^x
$2x$	$-$	e^x
2	$+$	e^x
0		e^x

$$\Rightarrow \quad \int x^2e^xdx=x^2e^x-2xe^x+2e^x+c$$

انتگرال گیری از حاصلضربهاو توانهای توابع مثلثاتی

توان های فرد مثبت سینوس ها و کسینوس ها

$$\int sin^{2n+1}xdx=\int(sin^{2n}x)\,(sinx)dx=\int(1-cos^2x)^n sinxdx=\;-\int(1-u^2)^n du$$

$$\int cos^{2n+1}xdx=\int cos^{2n}x\,cosxdx=\int(1-sin^2)^n cosdx=\;\int(1-u^2)^n du$$

مثال.

$$\int cos^5xdx = \int cos^4x\, cosxdx = \int (cos^2x)^2\, cosx$$
$$= \int (1-sin^2x)^2 cosxdx$$
$$= \int (1-u^2)^2 du = \int (1-2u^2+u^4)du = u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + c$$
$$= sinx - \frac{2}{3}sin^3x + \frac{1}{5}sin^5x + c.$$

$u = sinx$

انتگرال توان‌های زوج سینوس‌ها و کسینوس‌ها

در این انتگرال‌ها با استفاده از اتحادهای $sin^2x = \frac{1-\cos2x}{2}$ و $cos^2x = \frac{1+cos2x}{2}$، سعی در کاهش توان‌های زوج و حذف ریشه‌ها داریم.

- ✓ کاهش توان‌های زوج.

مثال.

$$\int cos^4xdx = \int (cos^2x)^2\, dx = \int \frac{1}{4}(1+cos2x)^2dx$$
$$= \frac{1}{4}\int (1+2cos2x+cos^22x)dx = \frac{1}{4}\int (1+2cos2x+\frac{1}{2}(1+cos4x))dx$$
$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}sin2x + \frac{1}{32}sin4x + c.$$

نکته. اگر حاصلضربی از توان‌های زوج سینوس و کسینوس داشته باشیم، آنها را تبدیل به فرم فوق می‌نمائیم.

مثال.

$$\int sin^2xcos^4dx = \int (1-cos^2x)cos^4\, xdx = \int cos^4\, x - \int cos^6xdx$$

حال انتگرال های بوجود آمده توان های زوجی از cos هستند که به روش بالا حل می شوند.

✓ حذف ریشه‌های دوم.

مثال.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+cos4x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2cos^2 2x}\, dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} |cos2x|$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2xdx = \sqrt{2} \frac{sin2x}{2} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

انتگرال‌های سکانت و کسکانت

ایزاک بارون معلم آیزاک نیوتن در دانشگاه کمبریج، نخستین روش واضح محاسبه انتگرال سکانت را در کتاب خود به نام درس‌های هندسه عرضه کرد.

$$\int secxdx = \int secx \frac{tanx+secx}{tanx+secx} dx = \int \frac{secx\, tanx+sec^2 x}{tanx+secx} dx = \int \frac{du}{u}$$

$$= ln|u| + c = \ln|secx + tanx| + c.$$

بنابراین

$$\int secxdx = \ln|secx + tanx| + c$$

$$\int \csc xdx = \ln|cscx - cotx| + c$$

انتگرال‌های $\int sec^n xd$ و $\int csc^n xdx$

الف. اگر n زوج باشد.

برای محاسبه انتگرال توان های زوج sec و csc از تغییر متغیر استفاده می کنیم. فرض کنید $n = 2k$ زوج باشد.

در مورد sec از تغییر متغیر $t = tanx$ و در مورد csc از تغییر متغیر $t = cotx$ به صورت زیر استفاده می کنیم.

$$\int \sec^n xdx = \int (sec^{n-2}x)(sec^2x)dx = \int (sec^2x)^{\frac{n-2}{2}}(sec^2x)dx$$

$$= \int (1 + tan^2x)^{\frac{n-2}{2}}(sec^2x)dx = \int (1 + t^2)^{\frac{n-2}{2}}dt$$

$t = tanx$

مثال.

$$\int sec^6xdx = \int (sec^4x)(sec^2x)dx = \int (sec^2x)^2(sec^2x)dx$$

$$= \int (1 + tan^2x)^2(sec^2x)dx = \int (1 + t^2)^2dt = \int (1 + 2t^2 + t^4)dt$$

$$= t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + c = tanx + \frac{2}{3}tan^3x + \frac{1}{5}tan^5x + c.$$

ب. اگر n فرد باشد.

برای محاسبه انتگرال توان های فرد sec و csc از روش جز به جز استفاده می شود.

$$\int sec^nxdx = \int (sec^{n-2}\,x)sec^2xdx$$

$$sec^{n-2}x = u \;\longrightarrow\; du = (n-2)sec^{n-3}xsecx.tanxdx = (n-2)(sec^{n-2}x)(tanx)dx$$

$$sec^2xdx = dv \;\longrightarrow\; v = tanx$$

$$\int sec^n xdx = \int (sec^{n-2}x)sec^2 xdx$$
$$= (tanx)(sec^{n-2}x) - (n-2)\int (tan^2 x)(sec^{n-2}x)dx$$
$$= (tanx)(sec^{n-2}x) - (n-2)\int (sec^2 x - 1)\,(sec^{n-2}x)dx$$
$$= (tanx)(sec^{n-2}x) - (n-2)\int sec^n\, xdx + (n-2)\int sec^{n-2}xdx$$

بنابراین

$$(n-1)\int sec^n\, xdx = tanxsec^{n-2}x + (n-2)\ \underbrace{\int sec^{n-2}xdx}_{\text{برای حل این انتگرال}}$$

روش فوق را تکرار می‌کنیم

مثال.

$$\int sec^3 xdx = \int secx.sec^2\, xdx \qquad u = secx \ \longrightarrow\ du = secxtanxdx$$
$$dv = sec^2 xdx \ \longrightarrow\ v = tanx$$

$$= secxtanx - \int secxtan^2\, xdx = secxtanx - \int (sec^2 x - 1)secxdx$$
$$\to \int sec^3 xdx \ = sextanx - \int sec^3 xdx \ + \int secx\, dx$$
$$\to 2\int sec^3 xdx = secxtanx + \ln\ |secx + tanx|$$
$$\to \int sec^3 xdx = \frac{1}{2}(secxtanx + \ln|secx + tanx|) + c.$$

انتگرال حاصلضرب‌های سینوس‌ها و کسینوس‌ها

$$\int sinnxsinmxdx \ \text{و} \int sinmxcosnxdx \ \text{و} \ \int cosmxcosnxdx$$

با این انتگرال‌ها در موارد، جریان متناوب، مسائل انتقال گرما، خمش تیرها، تحلیل تنش کابلها در پلهای معلق و مسائل مربوط به مهندسی و علوم و ریاضیات که در آنها از سریهای مثلثاتی استفاده می‌شود، برخورد می‌کنیم.

برای حل آنها می‌توان دوبار از روش جزء به جزء استفاده کرد. ولی روش ساده‌تر استفاده از اتحادهای زیر است.

$$sinmxsinnx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

$$sinmxcosnx = \frac{1}{2}[\sin(m-n)x + \sin(m+n)x]$$

$$cosmxcosnx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$$

مثال.

$$\int sin3xcos5xdx = \int \frac{1}{2}[sin(3-5)x + \sin(3+5)x]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(-2x)\,dx + \frac{1}{2}\int sin8xdx = \frac{\cos(-2x)}{4} - \frac{cos8x}{16} + c.$$

انتگرال‌های $\int tan^n\, xdx$ و $\int cot^n xdx$

برای حل آنها به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\int tan^n xdx = \int tan^{n-2}x.tan^2 xdx = \int tan^{n-2}x(sex^2x - 1)dx$$

$$= \int tan^{n-2}xsec^2xdx - \int tan^{n-2}xdx = \int t^{n-2}dt - \int tan^{n-2}xdx$$

$$= \frac{1}{n-1}t^{n-1} - \int tan^{n-2}xdx = \frac{1}{n-1}tan^{n-1}x - \int tan^{n-2}xdx$$

$t = tanx$

اکنون برای حل $\int tan^{n-2}xdx$ دوباره از همین روش استفاده می کنیم. با ادامه این روند، هر بار توان انتگرالده کمتر می شود تا به توان یک یا دو برسد که انتگرال آن ها شناخته شده است. مثال زیر را ببینید.

مثال.

$$\int tan^8 xdx = \int tan^6 x.tan^2xdx = \int tan^6 x(sec^2x - 1)dx$$

$$= \int tan^6xsec^2xdx - \int tan^6xdx = \frac{1}{7}tan^7x - \int tan^4 x(sec^2x - 1)dx$$

$$= \frac{1}{7}tan^7x - \int tan^4xsec^2xdx + \int tan^4xdx$$

$$= \frac{1}{7}tan^7x - \frac{1}{5}tan^5x + \int tan^2x(sec^2x - 1)dx$$

$$= \frac{1}{7}tan^7x - \frac{1}{5}tan^5x + \frac{1}{3}tan^3x - \int tan^2 xdx$$

$$= \frac{1}{7}tan^7x - \frac{1}{5}tan^5x + \frac{1}{3}tan^3x - \int sec^2x + \int dx$$

$$= \frac{1}{7}tan^7x - \frac{1}{5}tan^5x + \frac{1}{3}tan^3x - tan\,x + x + c.$$

انتگرال‌های به فرم $\int sec^n x.tan^m xdx$ و $\int csc^n x.cot^m xdx$ (m , n صحیح)

الف) اگر n عددی صحیح مثبت و زوج باشد.

$$\int sec^n x.tan^m xdx = \int sec^{n-2}x.tan^m x.sec^2xdx$$

$$= \int (sec^2x)^{\frac{n-2}{2}}.tan^m x.sec^2xdx = \int (1 + tan^2x)^{\frac{n-2}{2}} tan^m x.sec^2xdx$$

$$= \int (1 + t^2)^{\frac{n-2}{2}} t^m dt$$

$t = tanx$

مثال.

$$\int sec^6 x.tan^3x = \int sec^4 xtan^3xsec^2xdx = \int (1 + tan^2 x)^2 tan^3xsec^2xdx$$

$$= \int (1 + t^2)^2 t^3 dt = \int (1 + t^4 + 2t^2)\, t^3 dt$$

$$= \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{8}t^8 + \frac{2}{6}t^6 + c = \frac{1}{4}tan^4x + \frac{1}{8}tan^8x + \frac{2}{6}tan^6x + c.$$

www.prozhe.com

ب) اگر m عددی صحیح مثبت و فرد باشد، داریم.

$$\begin{aligned}
&\int sec^n x. tan^m x dx \\
&\qquad = \int sec^{n-1} x. tan^{m-1} x. secxtanxdx \\
&\qquad = \int sec^{n-1}. (tan^2 x)^{\frac{m-1}{2}}. secxtanxdx \\
&\qquad = \int sec^{n-1} x. (sec^2 x - 1)^{\frac{m-1}{2}}. secxtanxdx \\
&\qquad = \int t^{n-1} (t^2 - 1)^{\frac{m-1}{2}} dt
\end{aligned}$$

$t = secx$

دقت کنید $\frac{m-1}{2}$ عددی صحیح است.

مثال.

$$\begin{aligned}
\int tan^3 x sec^6 x dx &= \int sec^5 x tan^2 x\, secxtanxdx \\
&= \int sec^5 x (sec^2 x - 1) secxtanxdx \\
&= \int (sec^7 x - sec^5 x) secxtanxdx = \frac{1}{8} sec^8 x - \frac{1}{6} sec^6 x + c.
\end{aligned}$$

ج) اگر m زوج و n فرد باشد.

$$\int sec^n x. tan^m x dx = \int sec^n x. (tan^2 x)^{\frac{m}{2}} dx = \int sec^n x (sec^2 x - 1)^{\frac{m}{2}} dx$$

بعد از توان رساندن، انتگرال شامل توان زوج یا فرد sec می‌باشد که راه حل آن قبلاً گفته شده است.

انتگرال‌های به فرم $\int sin^m x cos^n x dx$

الف) حداقل یکی از m یا n فرد باشد. فرض کنید $n = 2k + 1$.

$$\int sin^m x cos^n x dx = \int sin^m x cos^{2k} x cosx dx$$
$$= \int sin^m x (cos^2 x)^k cosx dx$$
$$= \int sin^m x (1 - sin^2 x)^k cosx dx = \int u^m (1 - u^2)^k du$$

ب) m و n هر دو زوج باشند.

$$\int sin^m x cos^n x dx = \int (cos^2 x)^k (sin^2 x)^r dx$$

در ادامه از جانشانی $sin^2 x = \frac{1-cos2x}{2}$ و $cos^2 x = \frac{1+cos2x}{2}$ استفاده می‌شود.

انتگرال توابعی که بر حسب $sinx$ و $cosx$ می‌باشند. $\int F(sinx, cosx)dx$

در این نوع انتگرال‌ها از تغییر متغیر $tan\frac{x}{2} = t$ استفاده می‌شود.

$$tan\frac{x}{2} = t \implies x = 2tan^{-1}x \implies dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$sin2x = 2sinxcosx \implies sinx = 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} = \frac{2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{sin^2\frac{x}{2}+cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\implies sinx = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$cos2x = cos^2 x - sin^2 x \implies cosx = \frac{cos^2\frac{x}{2}-sin^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}+sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Longrightarrow cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

بنابراین
$$\int F(sinx, cosx)dx = \int F\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

مثال.

$$\int \frac{cosx}{1+cosx}dx = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}.\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1-t^2}{2}.\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1-t^2}{1+t^2}dt = -\int \frac{t^2-1}{t^2+1}dt$$

$$= -\int \frac{t^2+1-2}{t^2+1}dt = -\int dt + 2\int \frac{dt}{1+t^2} = -t + 2tan^{-1}t + c$$

$$= -tan\frac{x}{2} + 2\tan^{-1}(\tan\frac{x}{2}) + c.$$

انتگرال توابعی که بر حسب sin^2x و cos^2x می‌باشند.
$$\int F(sin^2x, cos^2x)dx$$

برای حل این نوع انتگرال‌ها از تغییر متغیر $t = tanx$ استفاده می‌شود.

$$tanx = t \implies x = tan^{-1}x \implies dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$cos^2x = \frac{cos^2x}{cos^2x + sin^2x} = \frac{1}{1+t^2} \quad , \quad sin^2x = \frac{sin^2x}{cos^2x + sin^2x} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

مثال.

$$\int \frac{dx}{2-sin^2x} = \int \frac{1}{2-\frac{t^2}{1+t^2}}.\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}tan^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + c = \frac{1}{\sqrt{2}}tan^{-1}\left(\frac{tanx}{\sqrt{2}}\right) + c.$$

جانشانی های مثلثاتی برای عبارات a^2+x^2 و a^2-x^2 و x^2-a^2 $\quad a>0$

با جانشانی $x=asint$، عبارت a^2-x^2 به a^2cos^2t تبدیل می‌شود.

با جانشانی $x=asect$، عبارت x^2-a^2 به a^2tan^2t تبدیل می‌شود.

با جانشانی $x=atant$، عبارت a^2+x^2 به a^2sec^2t تبدیل می‌شود.

برای اینکه بتوانیم پس از حل انتگرال، مقدار اولیه را به جای t قرار دهیم، باید sin ، tan و sec معکوس‌پذیر باشند. بنابراین.

$$x=asint \longrightarrow t=sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \qquad -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$$

$$x=atant \longrightarrow t=tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \qquad -\frac{\pi}{2}< t<\frac{\pi}{2}$$

$$x=asect \longrightarrow t=sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \qquad \begin{cases}\frac{x}{a}\ge 1 \longrightarrow 0\le\theta<\frac{\pi}{2}\\ \frac{x}{a}\le -1 \qquad \frac{\pi}{2}<\theta\le\pi\end{cases}$$

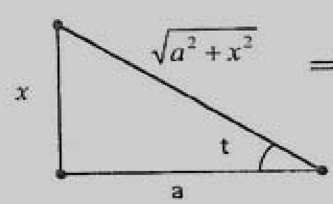
مثال. مطلوبست محاسبه انتگرال مقابل.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad a>0 \qquad\qquad x=atant \quad -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2} \rightarrow dx=asec^2tdt$$

$$=\int\frac{asec^2tdt}{\sqrt{a^2tan^2t+a^2}}=\int\frac{asec^2tdt}{|asect|}=\int sectdt \qquad (\text{به ازای } sect>0\,,\ -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})$$

$$=\ln|sect+tant|+c=\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+c.$$

باتوجه به تغییر متغیر داده شده، مثلثی مانند روبرو به نام مثلث مرجع داریم که با استفاده از آن می توان نسبت های به دست آمده در جواب را جایگزین کرد.



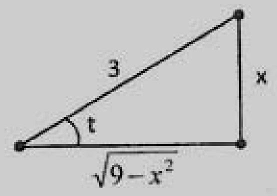
$$\Rightarrow cost=\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} \Rightarrow sect=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$$

مثال.

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}} \qquad\qquad x = 3sint \longrightarrow dx = 3costdt$$

$$= \int \frac{(9sin^2t)(3costdt)}{3cost} = 9\int sin^2tdt = 9\int \frac{1-cos2t}{2}dt = \frac{9}{2}\left(t - \frac{sin2t}{2}\right) + c$$

$$= \frac{9}{2}(t - sintcost) + c = \frac{9}{2}\left(sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{3}\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right) + c.$$



$$cost = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

نکته. انتگرال های به فرم $\int F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ با تبدیلات فوق قابل حل هستند.

(*) انتگرال‌های شامل $ax^2 + bx + c$

به کمک مربع کامل کردن می‌توان سه جمله‌ای $ax^2 + bx + c$ را به صورت $a(u^2 \pm A^2)$ درآورد و سپس با استفاده از جانشانی‌های مثلثاتی آن را حل کرد.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a} = a(u^2 \pm A^2)$$

مثال.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-1+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-2x+1)+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x-1)^2+1}}$$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = sin^{-1}(u) + c = sin^{-1}(x-1) + c \qquad u = x-1 \longrightarrow du = dx$$

مثال.

$$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2x^2-6x+4}} = \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2(x^2-3x+\frac{9}{4})+4-\frac{18}{4}}} = \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}} \qquad (\mathrm{I})$$

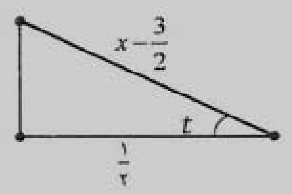
$$\left(x-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}sect \implies (x-3)^2 = \frac{1}{4}sec^2t \ , \quad x = \frac{1}{2}sect + \frac{3}{2} \implies dx = \frac{1}{2}(sect)tantdt$$

$$(\mathrm{I}) \implies \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\frac{1}{2}sect+\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}sec^2t-\frac{1}{4}}} \left(\frac{1}{2}sect\right)tantdt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\left(\frac{1}{2}sect+\frac{5}{2}\right)(sect)(tant)}{\frac{1}{2}tant} dt$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int (sec^2t + 5sect)dt = \frac{1}{2\sqrt{2}}tant + \frac{5}{2\sqrt{2}}\ln|sect + tant| + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2-3x+2} + \frac{5}{2\sqrt{2}}\ln\left|2x-3+2\sqrt{x^2-3x+2}\right| + c$$

$$y = \sqrt{(x-\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}} = \sqrt{x^2-3x+2} \implies tant = \frac{y}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x^2-3x+2}$$



انتگرال توابع کسری به فرم $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$

برای حل این نوع انتگرال‌ها ابتدا مشتق مخرج را به جای x صورت قرار می‌دهیم و سپس ضرایب را طوری در صورت کسر جدید اصلاح می‌کنیم که مساوی کسر اولی باشد.

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{ax^2+bx+c}dx$$

$$= \frac{A}{2a}\underbrace{\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx}_{(\mathrm{I})} + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\underbrace{\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}}_{(\mathrm{II})}$$

انتگرال (I) با متغیر ($t =$ مخرج) به راحتی قابل حل است. انتگرال (II) نیز به روش گفته شده در (*) حل می‌شود.

انتگرال توابع کسری به شکل $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad (a>0)$

در این نوع انتگرال ها، از ضریب x^2 فاکتور می‌گیریم و از انتگرال بیرون می‌آوریم. بقیه راه حل مشابه انتگرال گفته شده در (*) است.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}$$

نکته: اگر a منفی باشد، از $-a$ فاکتور گرفته و از رادیکال بیرون می‌آوریم. بقیه راه حل مشابه بالاست.

انتگرال توابع کسری به شکل $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

مانند قبل، ابتدا سعی می‌کنیم مشتق ax^2+bx+c را در صورت به وجود آوریم و با تغییر ضرایب صورت کسر جدید را مساوی با صورت کسر اولی می‌کنیم. سپس انتگرال به دو انتگرال تبدیل می‌شود که حل آنها مشابه قسمت‌های قبل است.

نکته. در انتگرال‌گیری از توابع کسری، هرگاه درجه صورت از مخرج بیشتر باشد، صورت را به مخرج تقسیم می‌کنیم.

انتگرال‌گیری به کمک تجزیه کسرها

تجزیه کسر

برای تجزیه یه کسر به روش زیر عمل می کنیم.

ابتدا مخرج کسر را به عوامل تحویل ناپذیر، یعنی چندجمله ای های با کمترین درجه ممکن تجزیه می کنیم. سپس با توجه به نوع عوامل موجود در مخرج چند حالت ممکن است اتفاق بیفتد.

۱. اگر مخرج کسر دارای چند عامل درجه اول باشد. یعنی کسری به صورت $\frac{F(x)}{(x+b_1)(x+b_2)\dots(x+b_n)}$ داریم.

در این حالت می نویسیم:

$$\frac{F(x)}{(x+\mathrm{b}_1)(x+\mathrm{b}_2)\dots(x+\mathrm{b}_\mathrm{n})}=\frac{A_1}{x+\mathrm{b}_1}+\frac{A_2}{x+\mathrm{b}_2}+\dots+\frac{A_n}{x+\mathrm{b}_\mathrm{n}}$$

اکنون با هم مخرج کردن کسرهای سمت راست و مساوی قرار دادن کسر حاصل با کسر سمت چپ تساوی بالا، و دادن مقادیر متفاوت به x می توان اعداد A_1 تا A_n را به دست آورد.

مثال.

$$\frac{2x+3}{(x-4)(x+2)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$

بنابراین چون مخرج دو کسر مساوی است باید صورت آنها نیز مساوی باشد. یعنی $2x+3=A(x+2)+B(x-4)$

حال با دادن مقدار به x، اعداد A و B به دست می آیند:

$$x=-2\ \rightarrow 2(-2)+3=B(-2-4)\ \rightarrow\ -6B=-1\ \rightarrow\ B=\frac{1}{6}$$

$$x=4\ \rightarrow\ 2(4)+3=A(4+2)\ \rightarrow\ 6A=11\ \rightarrow\ A=\frac{11}{6}$$

در نتیجه داریم:

$$\frac{2x+3}{(x-4)(x+2)}=\frac{\frac{11}{6}}{x-4}+\frac{\frac{1}{6}}{x+2}$$

نکته. در هنگام عددگذاری به جای x برای به دست آوردن A , B بهتر است ریشه های مخرج را به جای x قرار دهیم.

۲. هرگاه مخرج کسر دارای عامل درجه اول با تکرار باشد. یعنی کسری به صورت $\frac{F(x)}{(x+b_1)^{m_1}(x+b_2)^{m_2}\dots(x+b_n)^{m_n}}$ داریم. در این حالت برای هر یک از عامل ها به تعداد تکرار آن، کسر در سمت راست در نظر می گیریم . مثال بعد را ببینید.

مثال.

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B_1}{(x+1)}+\frac{B_2}{(x+1)^2}+\frac{B_3}{(x+1)^3}$$
$$=\frac{A(x+1)^3+B_1(x+1)^2(x-2)+B_2(x+1)(x-2)+B_3(x-2)}{(x+1)^3(x-2)}$$

اکنون به جای x عدد قرار می‌دهیم و ضرایب A و B را محاسبه می‌کنیم. بهتر است ریشه‌های مخرج را قرار دهیم.

$$x=2 \Rightarrow A(3)^3=6 \longrightarrow A=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$$

$$x=-1 \Rightarrow B_3(-3)=3 \longrightarrow B_3=-1$$

$$x=0 \Rightarrow A-2B_1-2B_2-2B_3=2 \longrightarrow -2(B_1+B_2)=2-\frac{2}{9}-2=-\frac{2}{9} \rightarrow B_1+B_2=\frac{1}{9}$$

$$x=1 \Rightarrow 8\left(\frac{2}{9}\right)-4B_1-2B_2+1=3 \longrightarrow 2B_1+B_2=\frac{1}{9}$$

$$\begin{cases} B_1+B_2=\frac{1}{9} \\ 2B_1+B_2=\frac{1}{9}\end{cases} \Longrightarrow B_1=0\ ,\ B_2=\frac{1}{9}$$

۳. اگر مخرج کسر دارای یک عامل از درجه دو مانند $(\mathrm{a}x^2+\mathrm{b}x+\mathrm{c})$ باشد، یعنی کسری به صورت $\frac{F(x)}{\mathrm{G(x)(ax^2+bx+c)}}$ داشته باشیم، آنگاه در تجزیه کسر، صورت را یک عامل درجه اول به شکل $Ax+B$ در نظر می گیریم. بقیه راه حل مشابه قبل است.

مثال. کسر $\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}$ را تجزیه کنید.

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}=\frac{(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)} \Longrightarrow x=(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)$$

$$x=1 \rightarrow 2C=1 \longrightarrow C=\frac{1}{2}$$

$$x=0 \rightarrow -B+C=0 \longrightarrow B=C=\frac{1}{2}$$

$$x=-1 \rightarrow -2(B-A)+2C=-1 \longrightarrow -2\left(\frac{1}{2}-A\right)+1=-1 \rightarrow A=-\frac{1}{2}$$

بنابراین
$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}=\frac{\frac{-1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}.$$

۴. هرگاه مخرج کسر دارای عامل درجه دومی با تکرار باشد یعنی مخرج دارای جمله ای مانند $(ax^2+bx+c)^m$ باشد، آنگاه در تجزیه کسر متناظر با این عامل به تعداد تکرارها یعنی m تا کسر در نظر می گیریم. مثال بعد را ببینید.

مثال. کسر $\frac{2x-1}{(x-2)^2(2x^2+1)^2}$ را تجزیه کنید.

$$\frac{2x-1}{(x-2)^2(2x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C_1x+D_1}{2x^2+1}+\frac{C_2x+D_2}{(2x+1)^2}$$

$$=\frac{A(x-2)(2x^2+1)^2+B(2x^2+1)^2+(C_1x+D_1)(2x^2+1)(x-2)^2+(C_2x+D_2)(x-2)^2}{(x-2)^2(2x^2+1)^2}$$

بنابراین

$$2x-1=$$
$$A(x-2)(2x^2+1)^2+B(2x^2+1)^2+(C_1x+D_1)(2x^2+1)(x-2)^2+(C_2x+D_2)(x-2)^2$$

اکنون با قرار دادن اعداد مختلف به جای x، ضرایب مجهول را بدست می آوریم.

مثال. برای محاسبه انتگرال $\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}dx$، ابتدا کسر انتگرالده را تجزیه می کنیم. این کسر در مثال های قبل تجزیه شده است و داریم $\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{\frac{-1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}$. بنابراین

$$\int\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=-\frac{1}{4}\int\frac{du}{u}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}$$
$$=-\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+\frac{1}{2}tan^{-1}x+\frac{1}{2}\ln|x-1|+c.$$

نکته: اگر مخرج کسر به صورت حاصلضرب عوامل اول تجزیه نشده باشد، باید آن را به صورت حاصلضرب عوامل اول تجزیه کرد.

مثال. مطلوبست محاسبه انتگرال $\int \frac{1}{x^3+1}dx$.

ابتدا مخرج کسر را به عوامل تحویل ناپذیر یعنی چندجمله ای های از کمترین درجه ممکن تجزیه می کنیم. با استفاده از اتحاد مجموع مکعبات داریم $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$. دقت کنید که x^2-x+1 دارای ریشه حقیقی نیست و نمی توان آنرا به چند جمله ای های درجه اول تجزیه کرد. حال می توان کسر را تجزیه کرد.

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}=\frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

بنابراین $A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)=1$.

$$x=-1 \ \rightarrow\ 3A=1 \ \rightarrow\ A=\frac{1}{3}$$

$$x=0 \ \rightarrow A+C=1 \ \rightarrow C=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$x=1 \ \rightarrow\ A+2B+2C=1 \ \rightarrow\ B=-\frac{1}{3}$$

در نتیجه

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2-x+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\int\frac{x}{x^2-x+1}dx+2\int\frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1+1}{x^2-x+1}dx+2\int\frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx-\frac{1}{6}\int\frac{1}{x^2-x+1}dx+2\int\frac{dx}{x^2-x+1}$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\int\frac{dt}{t}+\left(2-\frac{1}{6}\right)\int\frac{1}{x^2-x+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{11}{6}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{11}{6}\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+c.$$

مثال. $\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}dx$

برای حل این انتگرال باید کسر را تجزیه کنیم. برای تجزیه کسر، ابتدا باید چند جمله ای مخرج را به عوامل اول تجزیه کنیم. داریم

$$x=-1 \;\rightarrow (-1)^3+(-1)^2+4(-1)+4=0$$

بنابراین $x=-1$ یک ریشه مخرج است و در نتیجه $(x+1)$ یک عامل از چندجمله ای مخرج می باشد. با تقسیم چند جمله ای مخرج یعنی x^3+x^2+4x+4 بر $(x+1)$ عامل دیگر به صورت (x^2+4) به دست می آید. توجه کنید که چون $x^2+4=0$ ریشه حقیقی ندارد، نمیتوان آنرا به عوامل درجه یک تجزیه کرد. بنابراین مخرج کسر به صورت مقابل تجزیه می شود. $x^3+x^2+4x+4=(x+1)(x^2+4)$

اکنون برای تجزیه کسر می نویسیم

$$\frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{C}{x+1}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+4)}{x^3+x^2+4x+4}$$

با قرار دادن مقادیر مختلف به x در تساوی بالا داریم

$$x=-1 \;\rightarrow\; 3(-1)-7=5C \;\rightarrow C=-2$$

$$x=0 \;\rightarrow\; -7=B+4C=B-8 \;\rightarrow\; B=1$$

$$x=1 \;\rightarrow\; -4=2(A+B)+5C=2A+2-10 \;\rightarrow A=2$$

در نتیجه کسر انتگرالده به صورت زیر تجزیه می شود

$$\frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}=\frac{2x+1}{x^2+4}-\frac{2}{x+1}$$

بنابراین

$$\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}dx$$

$$=\int \frac{2x+1}{x^2+4}dx-2\int \frac{dx}{x+1}=\int \frac{2x}{x^2+4}dx+\int \frac{dx}{x^2+4}-2\int \frac{dx}{x+1}$$

$$=\ln|x^2+4|+\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}-2\ln|x+1|+c.$$

انتگرال توابع اصم

الف) انتگرال توابع بر حسب x و رادیکالهایی از x به صورت $\int F(x, x^{\frac{r_1}{s_1}}, x^{\frac{r_2}{s_2}}, \ldots\ x^{\frac{r_m}{s_m}})dx$

در این نوع انتگرال‌ها فرض کنید k مخرج مشترک کسرهای $\frac{r_1}{s_1}, \ldots, \frac{r_m}{s_m}$ باشد. در این صورت از تغییر متغیر $x = t^k$ استفاده می‌کنیم که انتگرال اصم را به انتگرال گویا تبدیل می کند.

مثال:

$$x = t^4 \quad (k=4) \implies dx = 4t^3dt$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}dx$$

$$= \int \frac{(t^4)^{\frac{1}{2}}}{(t^4)^{\frac{3}{4}}+1}4\,t^3dt = \int \frac{t^2}{t^3+1}4t^3dt = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}dt = 4\left(\int t^2dt - \int \frac{t^2}{t^3+1}dt\right)$$

$$= \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\ln|t^3+1| + c = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{4}{3}\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right| + c.$$

ب) انتگرال توابع اصم به فرم $\int G\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{s_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_2}{s_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_m}{s_m}}\right)dx$

فرض کنید k مخرج مشترک کسرهای $\frac{r_1}{s_1}, \ldots, \frac{r_m}{s_m}$ باشد. در این صورت از تغییر متغیر $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ استفاده می‌کنیم که انتگرال اصم را به انتگرال گویا تبدیل می کند.

مثال.

$$x+4 = t^2 \longrightarrow dx = 2tdt$$

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$$

$$= \int \frac{t}{t^2-4}2tdt = 2\int \frac{t^2dt}{t^2-4} = 2\int dt + 8\int \frac{dt}{t^2-4} = 2t + 8\left(\int \frac{\frac{1}{4}}{t-2}dt + \int \frac{\frac{-1}{4}}{t+2}dt\right)$$

$$= 2t + 2\ln|t-2| - 2\ln|t+2| + c = 2t + \ln\left(\frac{t-2}{t+2}\right)^2 + c$$

$$= 2\sqrt{x+4} + ln\left(\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right)^2 + c.$$

مثال.

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$$

با استفاده از تغییر متغیر $\frac{1-x}{1+x}=t^2$ انتگرال بالا را به یک انتگرال گویا تبدیل می کنیم.

$$\frac{1-x}{1+x}=t^2 \rightarrow t^2(1+x)=1-x \rightarrow x(t^2+1)=1-t^2 \rightarrow x=\frac{1-t^2}{t^2+1}$$

$$\frac{-2}{(1+x)^2}dx=2tdt \quad \rightarrow \quad dx=-t(1+x)^2dt=-t\left(1+\frac{1-t^2}{t^2+1}\right)^2 dt=\frac{-4tdt}{(t^2+1)^2}$$

بنابراین داریم

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx=\int\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)^2 t\,\frac{-4t}{(t^2+1)^2}dt=-4\int\frac{t^2}{(1-t^2)^2}dt \quad (I)$$

برای حل انتگرال $\int\frac{t^2}{(1-t^2)^2}dt$ از تجزیه کسرها کمک میگیریم.

$$\frac{t^2}{(1-t^2)^2}=\frac{t^2}{(1-t)^2(1+t)^2}=\frac{A}{1-t}+\frac{B}{(1-t)^2}+\frac{C}{1+t}+\frac{D}{(1+t)^2}$$
$$=\frac{A(1-t)(1+t)^2+B(1+t)^2+C(1+t)(1-t)^2+D(1-t)^2}{(1-t)^2(1+t)^2}$$

$$t=1 \rightarrow 4B=1 \rightarrow B=\frac{1}{4}$$

$$t=-1 \rightarrow 4D=1 \rightarrow D=\frac{1}{4}$$

$$t=0 \rightarrow A+\frac{1}{4}+C+\frac{1}{4}=0 \rightarrow A+C=-\frac{1}{2}$$

$$t=2 \rightarrow -9A+\frac{9}{4}+3C+\frac{1}{4}=4 \rightarrow -9A+3C=\frac{3}{2}$$

$$C=\frac{-3}{12}=-\frac{1}{4} \;\&\; A=-\frac{1}{4}$$

بنابراین

$$\frac{t^2}{(1-t^2)^2}=\frac{-\frac{1}{4}}{1-t}+\frac{\frac{1}{4}}{(1-t)^2}+\frac{-\frac{1}{4}}{1+t}+\frac{\frac{1}{4}}{(1+t)^2}$$

درنتیجه

$$(I) = -\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1-t}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(1-t)^2}-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1+t}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(1+t)^2}$$
$$=\frac{1}{4}\ln|1-t|+\frac{1}{4}\frac{1}{1-t}-\frac{1}{4}\ln|1+t|-\frac{1}{4}\frac{1}{1+t}$$

در پایان به جای t مقدار آن یعنی $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ را قرار می دهیم.

انتگرال دوجمله ای دیفرانسیلی $\int x^m(a+bx^n)^p dx$

برای حل اینگونه انتگرال ها، ابتدا سعی می کنیم توان n را به یک تبدیل کنیم. بنابراین از تبدیل $x = z^{\frac{1}{n}}$ استفاده می کنیم. داریم

$$x = z^{\frac{1}{n}} \;\rightarrow\; dx = \frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz$$

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \int z^{\frac{m}{n}}(a+bz)^p\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bz)^p dz$$
$$=\frac{1}{n}\int z^q(a+bz)^p dz$$

حال اگر p ,q هر دو صحیح باشند، جملات را به توان رسانده و انتگرال به راحتی حل می شود. اگر حداقل یکی از آنها گویا باشد، یکی از حالات زیر اتفاق می افتد.

حالت اول. اگر p صحیح (مثبت یا منفی) و q گویا $(q=\frac{r}{s})$ باشد. در اینصورت از تغییر متغیر $z = u^s$ استفاده می کنیم. داریم

$$z = u^s \;\rightarrow dz = su^{s-1}du$$

$$\int z^q(a+bz)^p dz \;= \int u^r(a+bu^s)^p\, su^{s-1}du$$

بنابراین با توان رساندن جملات انتگرال حل می شود.

حالت دوم. اگر p گویا $(p=\frac{r}{s})$ و q صحیح باشد. در اینصورت از تغییر متغیر $a+bz=u^s$ استفاده می کنیم.

داریم
$$a+bz=u^s \rightarrow dz=\frac{s}{b}u^{s-1}du$$

$$\int z^q(a+bz)^p dz = \int (\frac{u^s-a}{b})^q u^r \frac{s}{b}u^{s-1}du$$

دوباره انتگرال به یک انتگرال گویا تبدیل می شود که با توان رساندن جملات انتگرال حل می شود.

حالت سوم. هر گاه p و q هر دو گویا باشند اما $p+q$ صحیح باشد. فرض کنیم $p=\frac{r_1}{s_1}$ و $q=\frac{r_2}{s_2}$. در این حالت انتگرالده را در $\frac{z^p}{z^p}$ ضرب می کنیم.

$$\int z^q(a+bz)^p dz = \int z^{q+p}\left(\frac{a+bz}{z}\right)^p dz$$

اکنون از تغییر متغیر $a+bz=u^{s_1}$ استفاده می کنیم.

نکته. اگر هیچ کدام از حالات فوق برقرار نباشد، انتگرال جواب ندارد.

مثال.

تغییر متغیر $x=z^{\frac{3}{2}} \rightarrow dx=\frac{3}{2}z^{\frac{1}{2}}dz$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(1+\sqrt[3]{x^2})}=\int x^{-\frac{2}{3}}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}dx$$
$$=\frac{3}{2}\int z^{-1}(1+z)^{-1}z^{\frac{1}{2}}dz=\frac{3}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}(1+z)^{-1}dz$$

بنابراین حالت اول برقرار است. $p=-1$ و $q=-\frac{1}{2}$. در نتیجه از تغییر متغیر $z=u^2$ استفاده می کنیم.

داریم

$$\frac{3}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}(1+z)^{-1}dz$$
$$=\frac{3}{2}\int u^{-1}(1+u^2)^{-1}2udu=3\int\frac{du}{1+u^2}=3\tan^{-1}u+c$$
$$=3\tan^{-1}\sqrt{z}+c=3\tan^{-1}\sqrt[3]{x}+c.$$

مثال.
$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

تغییر متغیر $x = z^{\frac{1}{2}} \rightarrow dx = \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz$

$$= \int x^{-3}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx$$

$$= \int z^{\frac{-3}{2}}(1+z)^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz = \frac{1}{2}\int z^{-2}(1+z)^{-\frac{3}{2}}dz \quad (I)$$

حالت دوم برقرار است. از تغییر متغیر $1 + z = u^2$ استفاده می کنیم. داریم $dz = 2udu$ و $z = u^2 - 1$ پس

$$(I) = \frac{1}{2}\int (u^2-1)^{-2}u^{-3}2u\,du = \int \frac{dt}{(u^3-u)^2}$$

انتگرال حاصل به روش تجزیه کسر قابل حل است. (حل کنید!)

مثال.
$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

تغییر متغیر $x = z^{\frac{1}{2}} \rightarrow dx = \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz$

$$= \int x^{-2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx$$

$$= \int z^{-1}(1+z)^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz = \frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}}(1+z)^{-\frac{3}{2}}dz \quad (I)$$

حالت سوم برقرار است. بنابراین انتگرالده را در $\frac{z^{-\frac{3}{2}}}{z^{-\frac{3}{2}}}$ ضرب می کنیم. داریم

$$(I) = \frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}\left(\frac{1+z}{z}\right)^{-\frac{3}{2}}dz \quad (II)$$

اکنون از تغییر متغیر $\frac{1+z}{z} = u^2$ استفاده می کنیم. داریم

$$\frac{1+z}{z} = u^2 \rightarrow z = \frac{1}{u^2-1} \rightarrow dz = \frac{-2u}{(u^2-1)^2}du$$

با قرار دادن در (II) داریم $(II) = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u^2-1}\right)^{-3}u^{-3}\frac{-2u}{(u^2-1)^2}du = \int\frac{1-u^2}{u^2}du = -\frac{1}{u} - u + c =$

$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{1+z}{z}}} - \sqrt{\frac{1+z}{z}} + c = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + c.$$