دانشکده مکانیک

استاتیک

شاهرخ حسینی هاشمی

اهداف

شناخت نیروها و ایجاد قابلیت رسم دیاگرام آزاد نیروهای وارده بر سازه ها جهت بررسی تعادل استاتیکی و تحلیل مسایل، پرورش دید حرفه ای از موضوعات و مفاهیم بنیادی استاتیک و ایجاد توانایی در انتخاب مناسب ابزارهای ریاضی بمنظور تحلیل مسایل.

فهرست مطالب

۱- مقدمه، ارایه برداری نیرو و تعادل ذره مادی

۲- نیرو، گشتاور و زوج نیرو

۳-تعادل جسم صلب

۴-تعیین مراکز

۵-تحلیل سازه ها

۶-تحلیل تیرها

۷-تحلیل کابل ها

۸-اصطکاک

۹-ممان اینرسی

۱۰-کار مجازی وپایداری

۱- مقدمه، ارایه برداری نیرو و تعادل ذره مادی

تعاریف:

مکانیک: بخشی از علوم است که درباره وضع سکون و حرکت اجسام تحت تأثیر نیروها گفتگو میکند.

فضا: یک ناحیه هندسی است که بوسیله اجسام اشغال میشود و درآن رویدادها بوقوع میپیوندد. مـوقعیت هر نقطه از جسمی بوسیله مختـصات مربوط به آن نقـطه با انتخاب دستگاه مختصات مناسب مشخص میشود.

زمان: معیار توالی رویدادهاست. در مکانیک نیوتونی زمان یک کمیت مطلق محسوب میشود.

نیرو (Force) :

اثر برداری یک جسم بر جسم دیگر است. نیرویی که بر جسمی وارد میشود، تمایل دارد آن جسم را در راستا و جهتی که بر آن اثر کرده است به حرکت درآورد.

ذره مادی (Particle):

نمایــشگر یک جسم است با ابعاد قابل اغـماض. به هنگامیکه ابعاد یک جسم در تشریح حرکت آن و یا اثر نیروهای وارده بر آن مطرح نیستند، جسم را ذره مادی فرض میکنند.

جسم صلب (Rigid body) :

جسمی است که بین اجزاء تشکیل دهنده آن هیچ تغییر شکل نسبی بوجود نیاید. بعبارت دیگر: هرگاه تغییر شکل جسم در مقایسه با ابـعاد کلی جسم ناچیز باشد، جسم را صلب فرض میکنیم.

استاتیک (Statics) :

شاخه ای از علم مکانیک است که در ارتباط با تعادل اجسام بحث می کند. در استاتیک، فرض برآنست که جسم مورد نظر کاملاً صلب است؛ یعنی هیچ تغییر شکلی بواسطه نیروهای اعمالی در آن ایجاد نمی شود.

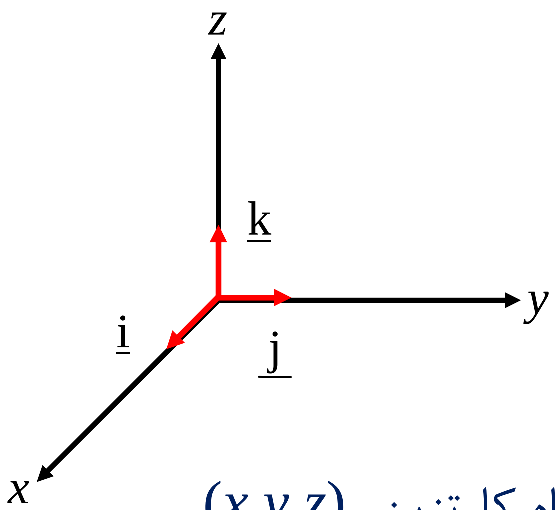
دیاگرام آزاد (Free body diagram) :

یک سیستم مکانیکی را میتوان بصورت یک جسم یا گروهی از اجسام که میتوان آنها را از یکدیگر مجزا نمود تعریف کرد. در حل مسایل مـکانیک لازم است که نیروهای وارده بر جسم یا اجزای تشکیل دهنده سیستم مکانیکی مورد بررسی قرار گیرد. بدین منظور از دیـاگرام آزاد که نمایـشگر نیروهای وارده بر جسم یا اجزای تشکیل دهنده سیستم مکانیکی میباشد استفاده میکنند.

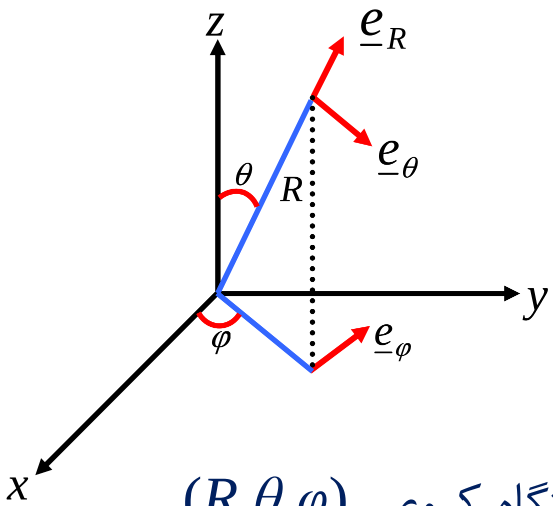
سیستم آحاد

		طول	جرم	زمان
SI	MKS	m	kg	s
	CGS	cm	gr	s
English		ft	slug	s

نمایش بردارهای یکه:

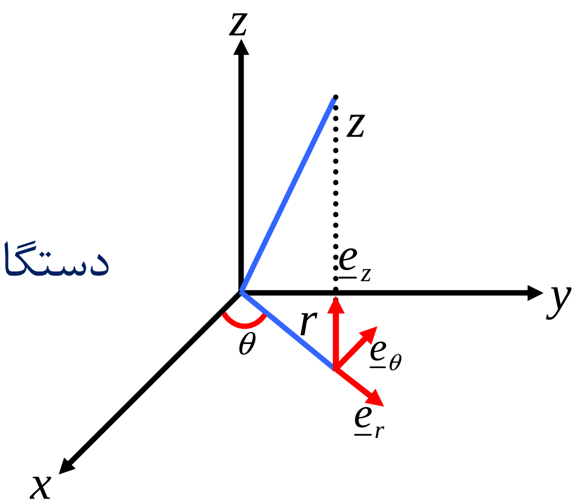


(x,y,z) دستگاه کارتزین



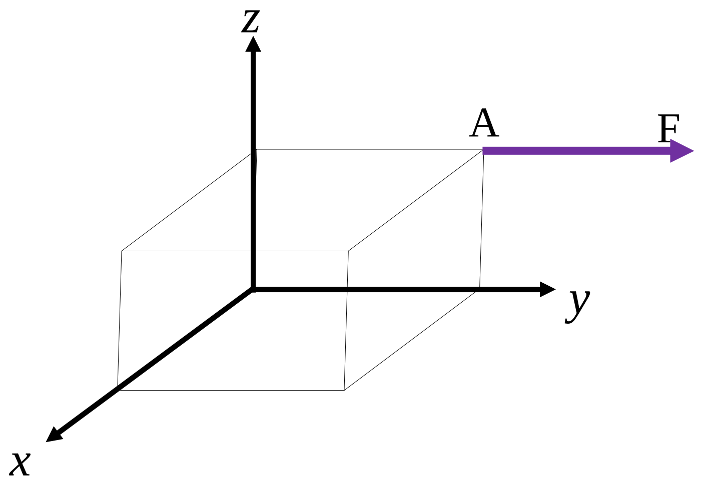
(R,θ,φ) دستگاه کروی

(r,θ,z) دستگاه استوانه ای



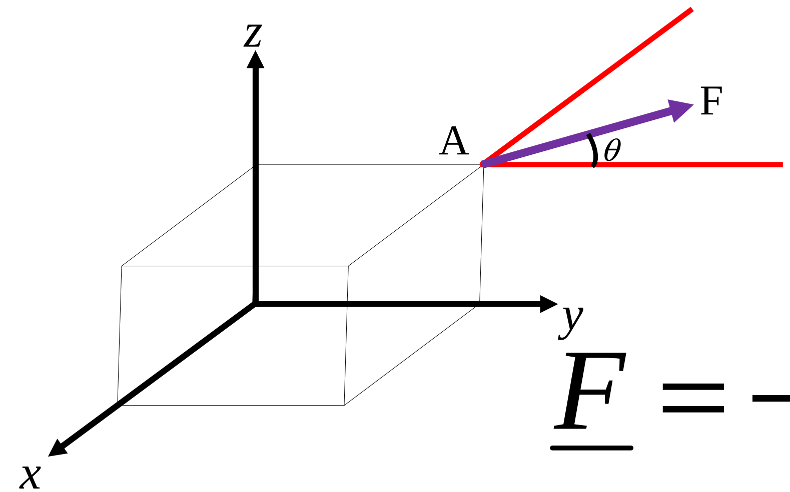
نمایش نیروها:

نیروی محوری:



$$\underline{F} = F\,\underline{j}$$

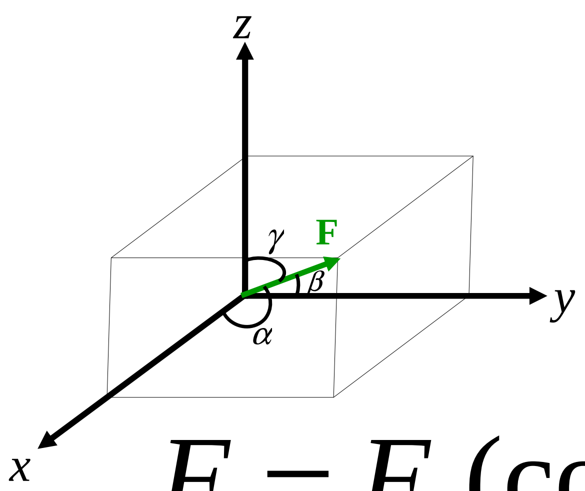
نیروی صفحه ای:



$$\underline{F} = -F_x\,\underline{i} + F_y\,\underline{j}$$

$$\underline{F} = -F\,\sin\theta\,\underline{i} + F\,\cos\theta\,\underline{j}$$

نیروی فضایی:



$$\underline{F} = F_x \underline{i} + F_y \underline{j} + F_z \underline{k}$$

$$\underline{F} = F\,(\cos\alpha\ \underline{i} + \cos\beta\ \underline{j} + \cos\gamma\ \underline{k})$$

$$\cos\ \alpha = \frac{F_x}{F}$$

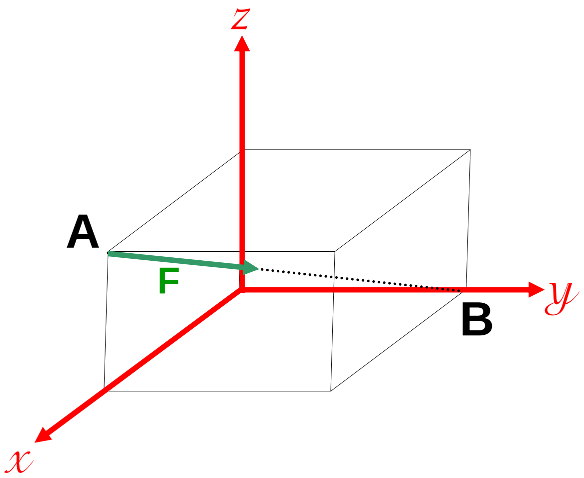
$$\cos\ \beta = \frac{F_y}{F}$$

$$\cos\ \gamma = \frac{F_z}{F}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

نحوه ارایه یک نیرو در فضا به شکل برداری:

روش اول: با معلوم بودن مختصات دو نقطه از امتداد نیرو:



$$A = (x_A, y_A, z_A)$$

$$B = (x_B, y_B, z_B)$$

$$\underline{\lambda}_{AB} = \underline{\lambda} = \frac{\underline{AB}}{AB} = \frac{(x_B - x_A)\underline{i} + (y_B - y_A)\underline{j} + (z_B - z_A)\underline{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

$$\underline{F} = F\ \underline{\lambda}$$

$$\underline{\lambda}_{BA} = -\underline{\lambda}_{AB}$$

روش دوم:

اگر کسینوس های هادی معلوم باشند، آنگاه داریم:

$$\underline{\lambda}_{AB} = \underline{\lambda} = \cos\ \alpha_x\ \underline{i} + \cos\ \alpha_y\ \underline{j} + \cos\ \alpha_z\ \underline{k}$$

$$\underline{F} = F\ \underline{\lambda}$$

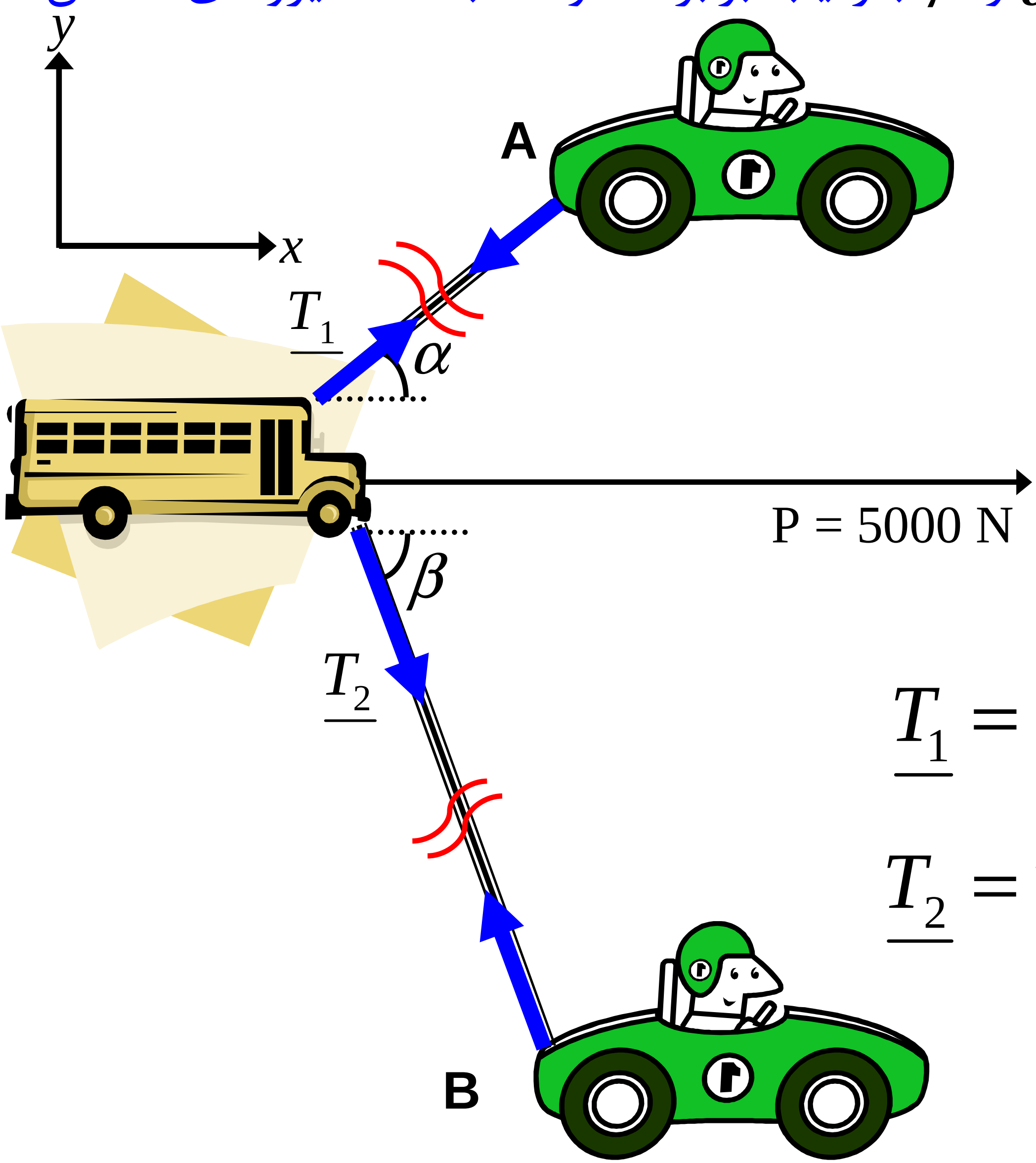
تعادل ذره مادی (Equilibrium of a particle)

یک ذره مادی به هنگامی در وضعیت تعادل است که برآیند نیروهای وارده بر آن برابر صفر باشد.

بعبارت دیگر؛ جهت ارضای قانون اول نیوتون میبایست داشته باشیم:

$$\underline{R}=\sum \underline{F}=0$$

مثال: اتوبوسی بوسیله دو خودرو A و B در جهت و امتداد نشان‌داده‌شده در شکل تحت تأثیر نیروی P کشیده می‌شود. چنانچه زوایای α و β بترتیب برابر 30 و 45 باشند، نیروهای کشش وارده از طرف کابل‌ها را بر اتوبوس بیابید:



قدم اول: انتخاب دستگاه مختصات

قدم دوم: دیاگرام آزاد (رسم نیروها)

قدم سوم: معرفی نیروها

$$\underline{P} = 5000\ \underline{i}$$

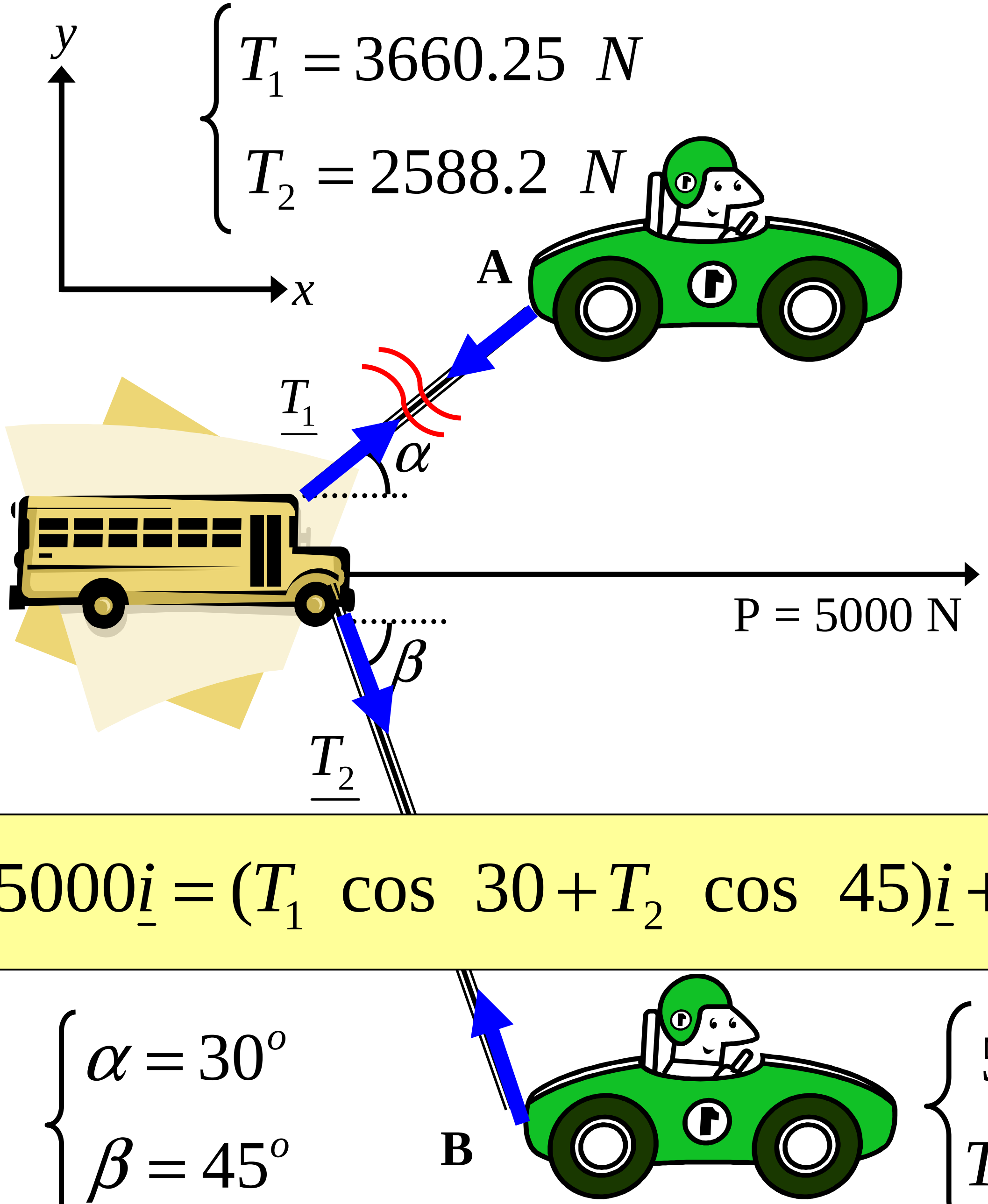
$$\underline{T}_1 = T_1\ (\cos\ \alpha\ \underline{i} + \sin\ \alpha\ \underline{j})$$

$$\underline{T}_2 = T_2\ (\cos\ \beta\ \underline{i} - \sin\ \beta\ \underline{j})$$

قدم آخر: محاسبه خواسته سؤال

$$\begin{cases} T_1 = 3660.25 \ \ N \\ T_2 = 2588.2 \ \ N \end{cases}$$

$$\underline{P} = \underline{T}_1 + \underline{T}_2$$

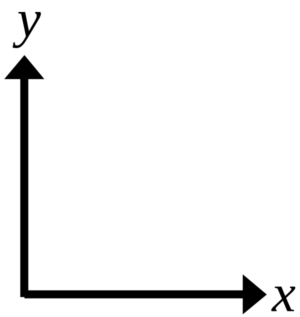


$$5000\underline{i} = (T_1 \ \cos \ 30 + T_2 \ \cos \ 45)\underline{i} + (T_1 \ \sin \ 30 - T_2 \ \sin \ 45)\underline{j}$$

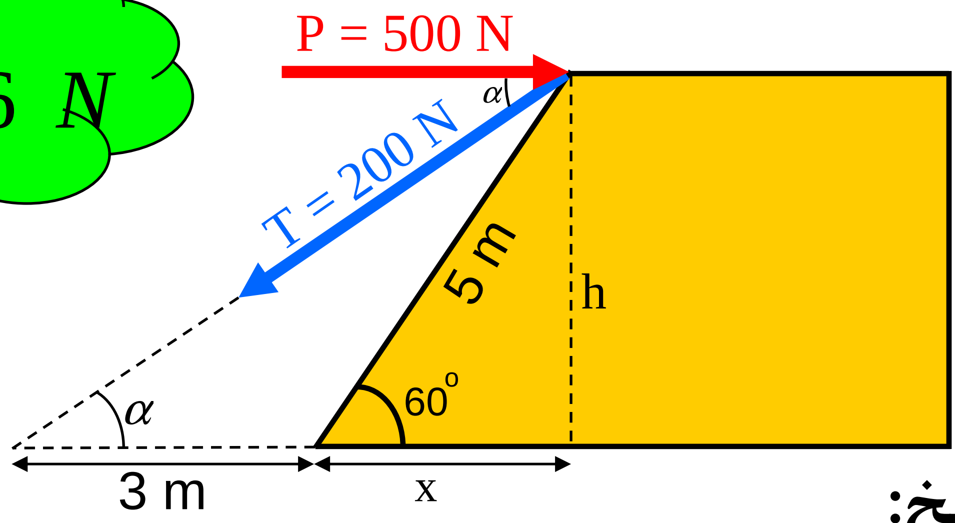
$$\begin{cases} \alpha = 30^o \\ \beta = 45^o \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5000 = T_1 \ \cos 30 + T_2 \ \cos 45 \\ T_1 \ \sin \ 30 - T_2 \ \sin \ 45 = 0 \end{cases}$$

مثال: بر سازه زیر دو نیروی P و T مطابق شکل وارد می شود. مطلوبست محاسبه برآیند نیروها و بزرگی آن؟



$$R = 364.46 \ \ N$$



پاسخ:

$$x = 5 \ \cos \ 60^o = 2.5$$

$$h = 5 \ \sin \ 60^o = 4.3$$

$$\tan \ \alpha = \frac{h}{x+3} = \frac{4.3}{5.5}$$

$$\alpha = 38.2^o$$

$$\underline{P} = 500 \ \ \underline{i}$$

$$\underline{T} = -200 \ (\cos \ \alpha \ \underline{i} + \sin \ \alpha \ \underline{j})$$

$$\underline{T} = -200 \ (0.79 \ \underline{i} + 0.62 \ \underline{j})$$

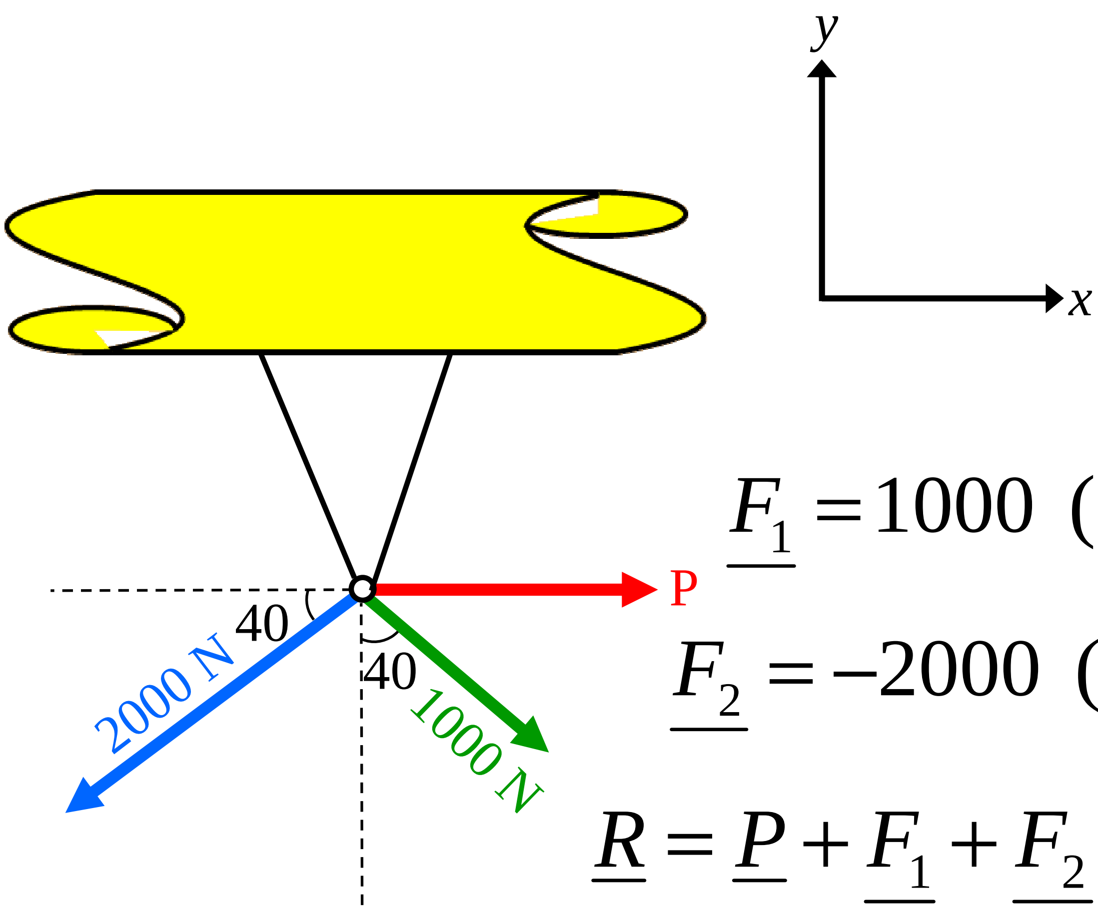
$$\underline{R} = \underline{P} + \underline{T}$$

$$\underline{R} = (500 - 157.17)\underline{i} - 123.68\underline{j}$$

$$\underline{R} = 342.83\underline{i} - 123.68\underline{j} \ \ \ N$$

مثال: یک جرثقیل سقفی مطابق شکل تحت تأثیر سه نیرو قرار گرفته است. نیروی P را بنحوی تعیین کنید که برآیند نیروها در امتداد قائم باشد؛

پاسخ:



$$\underline{P} = P\ \underline{i}$$

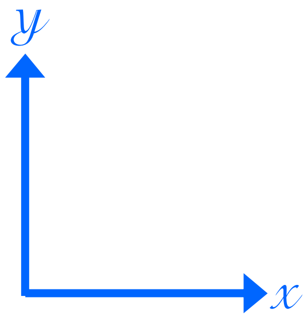
$$\underline{F_1} = 1000\ (\sin\ 40^o \underline{i} - \cos\ 40^o\ \underline{j})$$

$$\underline{F_2} = -2000\ (\cos\ 40^o \underline{i} + \sin\ 40^o\ \underline{j})$$

$$\underline{R} = \underline{P} + \underline{F_1} + \underline{F_2}$$

$$\underline{R} = (P - 889.3)\underline{i} - (2051.62)\underline{j} \Longrightarrow \begin{cases} \underline{P} = 889.3\ \underline{i}\ \ N \\ \underline{R} = -2051.62\ \ \underline{j}\ \ N \end{cases}$$

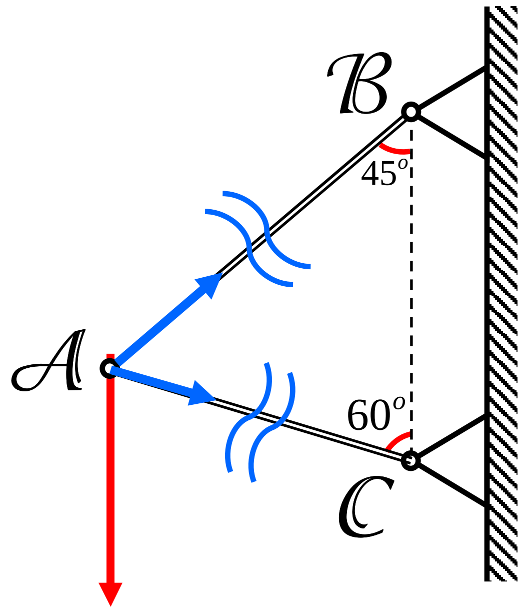
مثال: به سازه ای مطابق شکل که شامل دو میله AB و AC است، نیروی F در نقطه A اعمال شده است.این نیرو در امتداد اعضای AB و AC سازه چه نیروهایی را ایجاد میکند؟



$$\boxed{F_{AB} = -313.8\ \ N}$$

$$\boxed{F_{AC} = 256.2\ \ N}$$

پاسخ:



F = 350 N

$$\underline{F_1} = F_{AB}\ (\cos\ 45\ \underline{i} + \sin\ 45\ \underline{j})$$

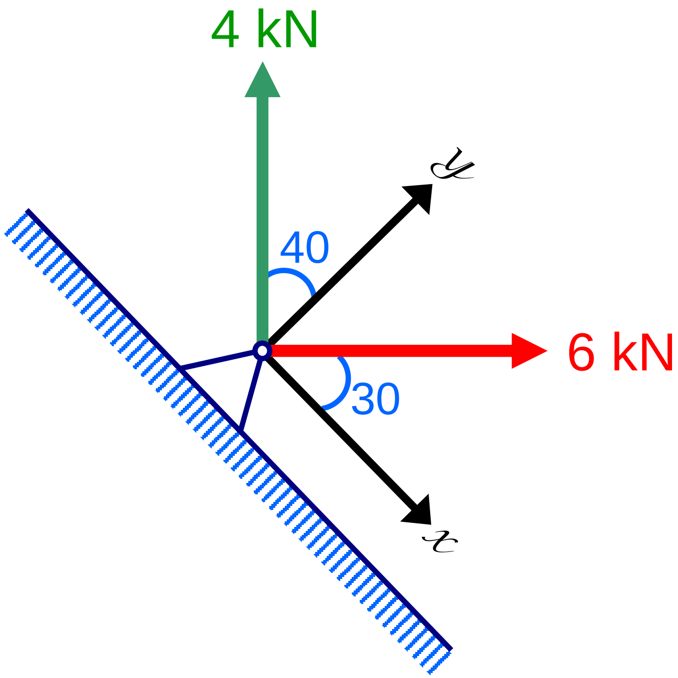
$$\underline{F_2} = F_{AC}\ (\cos\ 30\ \underline{i} - \sin\ 30\ \underline{j})$$

$$\underline{F} = -350\ \underline{j} \qquad\qquad \underline{R} = \underline{F_1} + \underline{F_2} = \underline{F}$$

$$\underline{R} = (F_{AB}\ \cos\ 45 + F_{AC}\ \cos\ 30)\underline{i} + (F_{AB}\ \sin\ 45 - F_{AC}\ \sin\ 30)\underline{j} = -350\underline{j}$$

$$F_{AB}\cos 45 + F_{AC}\cos 30 = 0 \qquad\qquad F_{AB}\sin 45 - F_{AC}\sin 30 = -350$$

مثال: به مفصلی از یک سازه مطابق شکل دو نیرو در امتدادهای نشان داده شده، اعمال شده اند. آن ها را با یک نیرو تعویض نمایید و امتداد نیروی تعویضی را مشخص کنید؛



پاسخ:

$$\underline{F_1} = 6\ (\cos\ 30\ \underline{i} + \sin\ 30\ \underline{j})$$

$$\underline{F_2} = -4\ (\sin\ 40\ \underline{i} - \cos\ 40\ \underline{j})$$

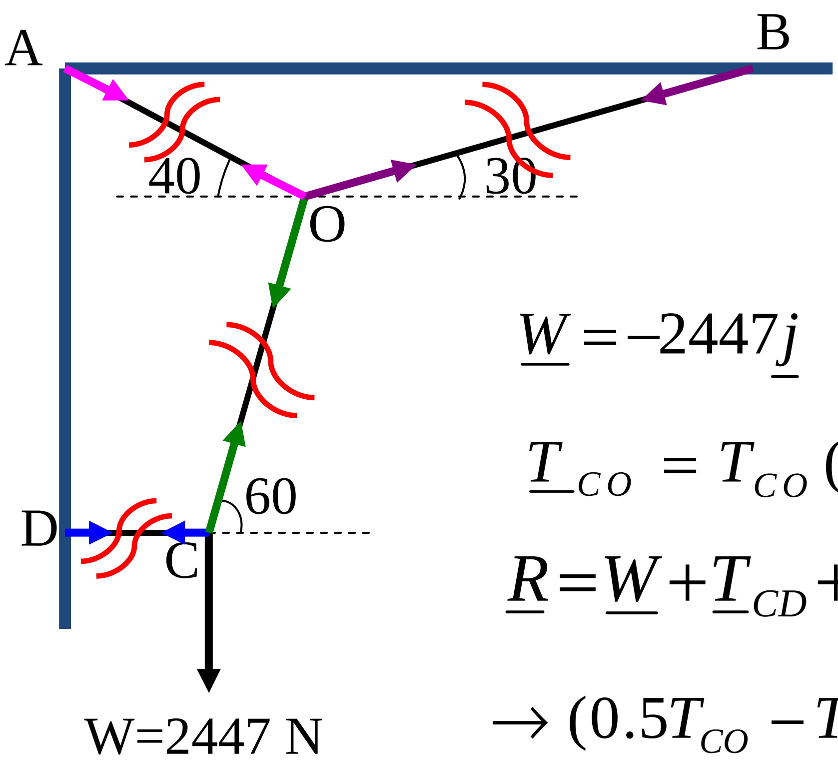
$$\underline{R} = \underline{F_1} + \underline{F_2}$$

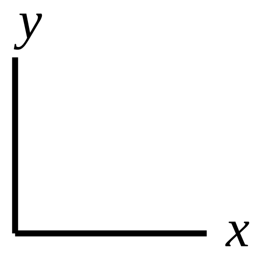
$$\underline{R} = (6\ \cos\ 30 - 4\ \sin\ 40)\underline{i} + (6\ \sin\ 30 + 4\ \cos\ 40)\underline{j}$$

$$\underline{R} = 2.62\underline{i} + 6.06\underline{j}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{6.06}{2.62}\right) \Longrightarrow \theta = 66.6^o$$

مثال: به نقطه C از یک سازه مطابق شکل نیروی W اعمال شده است. مطلوبست تعین نیروهای کشش در کابلهای OA, OB OC, CD





پاسخ:

$$\underline{W} = -2447\underline{j} \qquad \underline{T}_{CD} = -T_{CD}\,\underline{i}$$

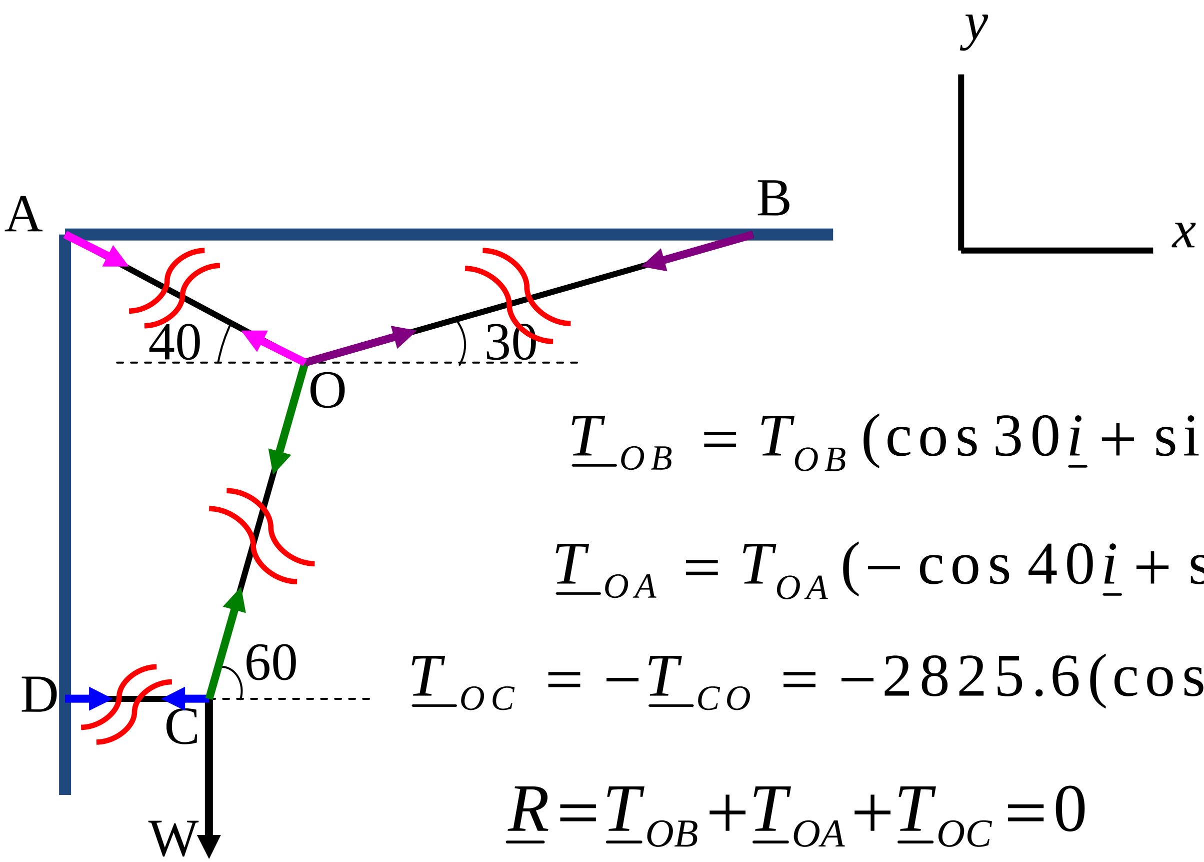
$$\underline{T}_{CO} = T_{CO}(\cos 60\,\underline{i} + \sin 60\,\underline{j})$$

$$\underline{R} = \underline{W} + \underline{T}_{CD} + \underline{T}_{CO} = 0$$

$$\rightarrow (0.5T_{CO} - T_{CD})\underline{i} + (0.866T_{CO} - 2447)\underline{j} = 0$$

$$0.5T_{CO} - T_{CD} = 0 \qquad 0.866\,T_{CO} - 2447 = 0$$

$$\boxed{T_{CO} = 2825.6N} \qquad \boxed{T_{CD} = 1412.8N}$$



$$\underline{T}_{OB} = T_{OB}(\cos 30\underline{i} + \sin 30\underline{j})$$

$$\underline{T}_{OA} = T_{OA}(-\cos 40\underline{i} + \sin 40\underline{j})$$

$$\underline{T}_{OC} = -\underline{T}_{CO} = -2825.6(\cos 60\underline{i} + \sin 60\underline{j})$$

$$\underline{R} = \underline{T}_{OB} + \underline{T}_{OA} + \underline{T}_{OC} = 0$$

$$\rightarrow (0.866T_{OB} - 1412.8 - 0.766T_{OA})\underline{i} + (0.5T_{OB} - 2447 + 0.643T_{OA})\underline{j} = 0$$

$$0.866T_{OB} - 1412.8 - 0.766T_{OA} = 0 \qquad 0.5T_{OB} - 2447 + 0.643T_{OA} = 0$$

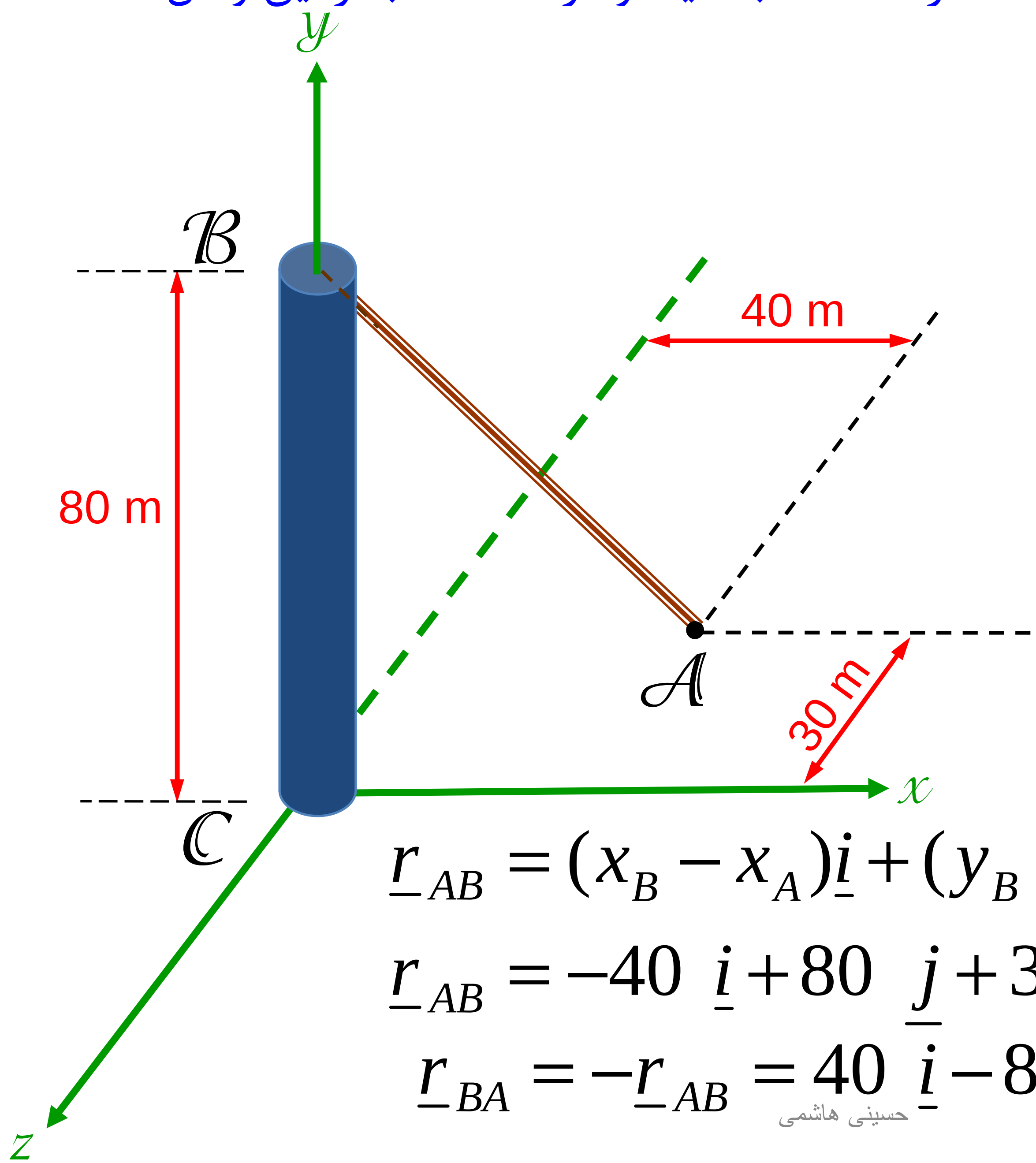
$$\boxed{T_{OA} = 1503\,N} \qquad \boxed{T_{OB} = 2961\,N}$$

مثال: میله قائم BC بوسیله کابل AB در نقطه B به میله و در نقطه A به زمین وصل شده است. مطلوبست:

الف. بردار وضعیت AB ؛

ب. بردار وضعیت BA ؛

پ. بردار یکه AB .



پاسخ:

$$A(40,0,-30)$$

$$B(0,80,0)$$

$$\underline{r}_{AB}=(x_B-x_A)\underline{i}+(y_B-y_A)\underline{j}+(z_B-z_A)\underline{k}$$

$$\underline{r}_{AB}=-40\ \underline{i}+80\ \underline{j}+30\ \underline{k}$$

$$\underline{r}_{BA}=-\underline{r}_{AB}=40\ \underline{i}-80\ \underline{j}-30\ \underline{k}$$

$$\underline{\lambda}_{AB} = \frac{\underline{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{(x_B - x_A)\underline{i} + (y_B - y_A)\underline{j} + (z_B - z_A)\underline{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

$A(40,0,-30)$

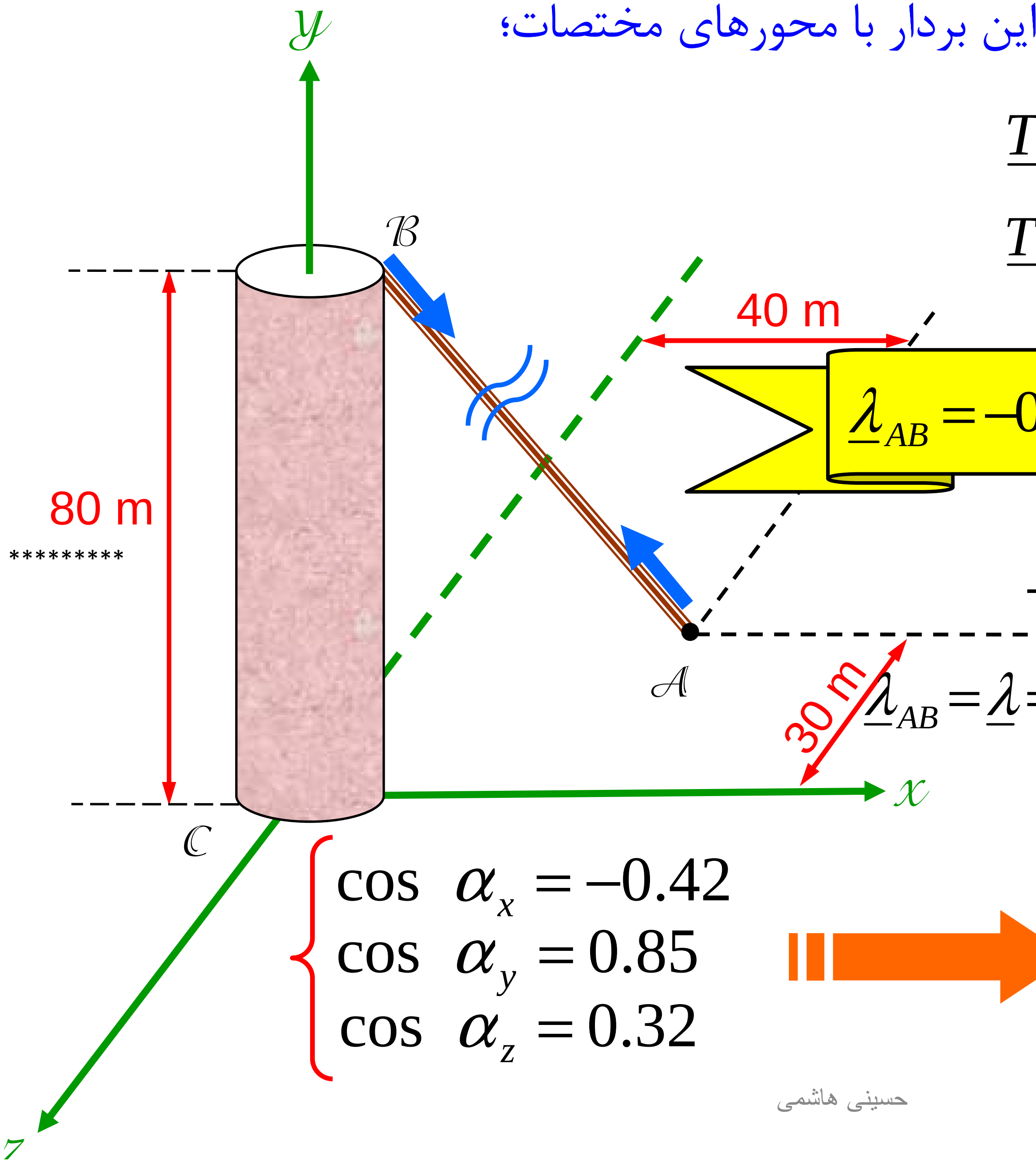
$B(0,80,0)$

$$\underline{r}_{AB} = -40\ \underline{i} + 80\ \underline{j} + 30\ \underline{k}$$

$$\underline{\lambda}_{AB} = \frac{\underline{r}_{AB}}{r_{AB}} = \frac{-40\ \underline{i} + 80\ \underline{j} + 30\ \underline{k}}{\sqrt{(-40)^2 + (80)^2 + (30)^2}} = -0.42\ \underline{i} + 0.85\ \underline{j} + 0.32\ \underline{k}$$

مثال: چنانچه در مثال قبل بزرگی نیروی کشش در کابل برابر 2500 N باشد، مطلوبست:

الف: بردار کشش AB ؛ ب: زاویه این بردار با محورهای مختصات؛



پاسخ:

$$\underline{T}_{AB} = T_{AB} \times \underline{\lambda}_{AB}$$

$$\underline{T}_{AB} = 2500\ \underline{\lambda}_{AB}$$

$$\underline{\lambda}_{AB} = -0.42\ \underline{i} + 0.85\ \underline{j} + 0.32\ \underline{k}$$

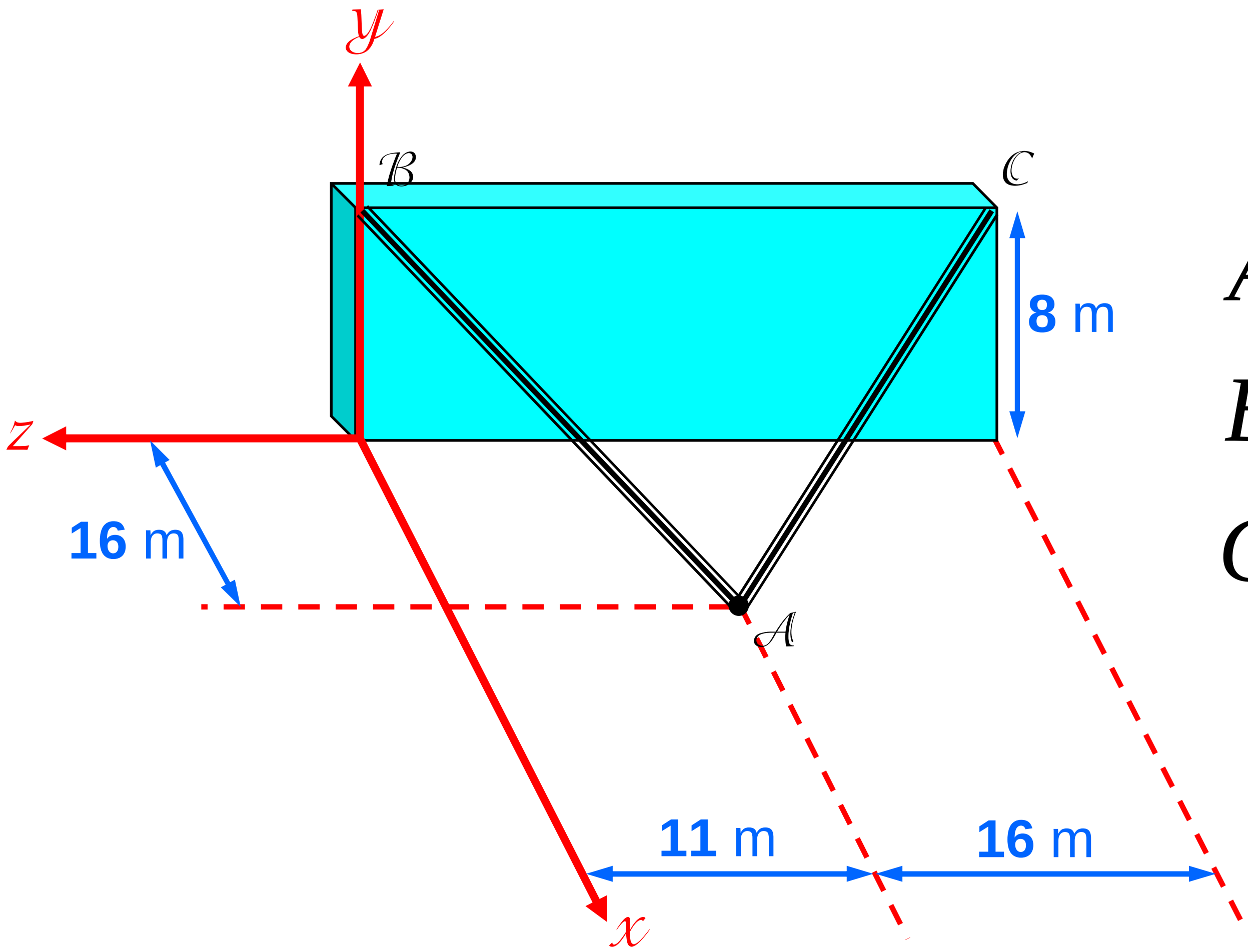
$$\underline{T}_{AB} = -1050\,\underline{i} + 2125\underline{j} + 800\underline{k}$$

$$\underline{\lambda}_{AB} = \underline{\lambda} = \cos\alpha_x\ \underline{i} + \cos\alpha_y\ \underline{j} + \cos\alpha_z\ \underline{k}$$

$$\begin{cases} \cos\ \alpha_x = -0.42 \\ \cos\ \alpha_y = 0.85 \\ \cos\ \alpha_z = 0.32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_x = 114.8^o \\ \alpha_y = 31.79^o \\ \alpha_z = 71.34^o \end{cases}$$

مثال: یک دیوار سیمانی بطور موقت بوسیله کابل های نشان داده شده در شکل نگهداری شده است. کشش در کابل AC برابر 1200 N و در کابل AB برابر 840 N است. مطلوبست: بزرگی و جهت برآیند نیروهای کابل AB و AC در نقطه A

پاسخ:



$$A(16,0,-11)$$

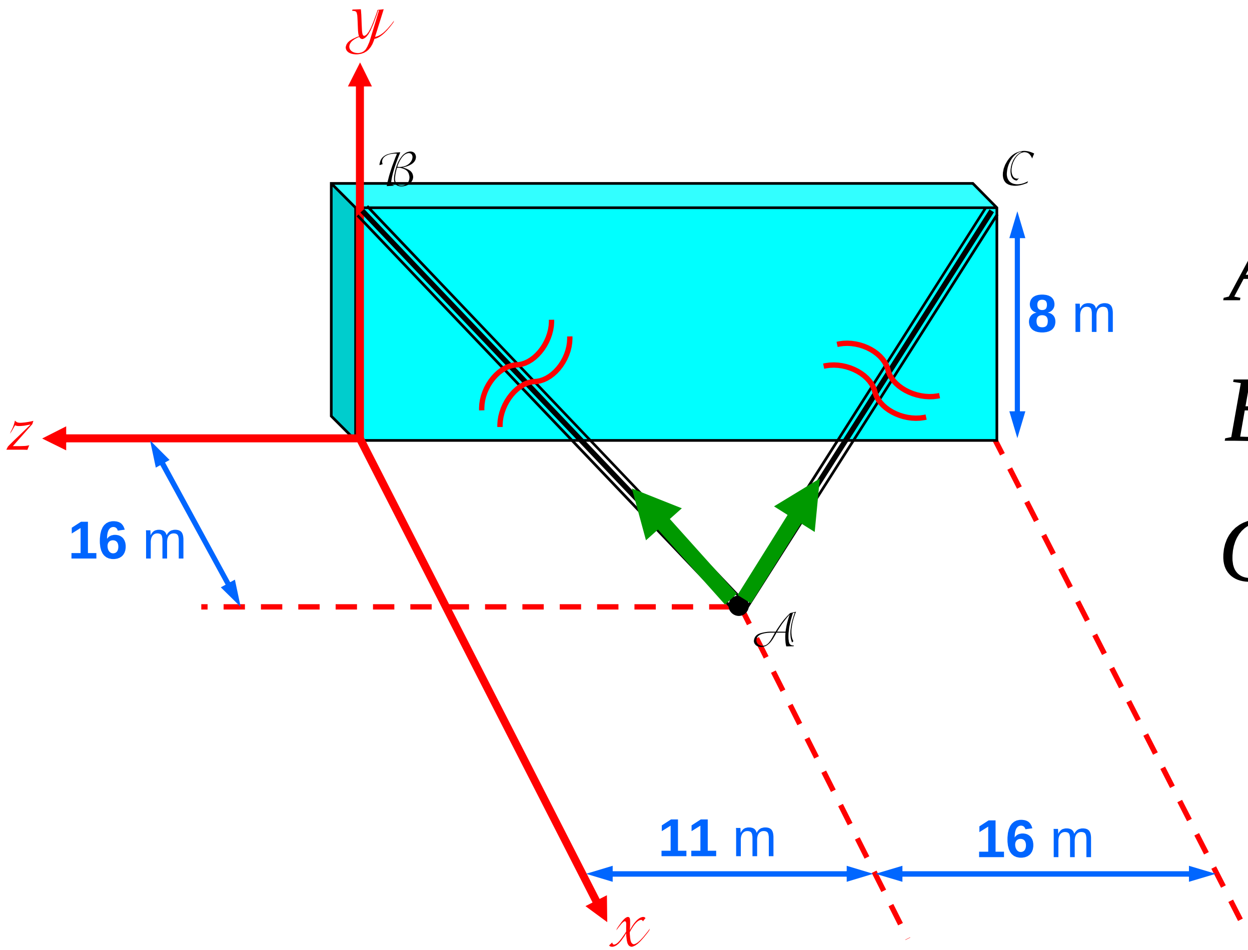
$$B(0,8,0)$$

$$C(0,8,-27)$$

$$\begin{cases} T_{AB} = 840 \ \ N \\ T_{AC} = 1200 \ \ N \end{cases}$$

$$\underline{\lambda}_{AB}=\frac{\underline{r}_{AB}}{r_{AB}}=\frac{-16\ \underline{i}+8\ \underline{j}+11\ \underline{k}}{\sqrt{(-16)^2+(8)^2+(11)^2}}=\frac{-16\ \underline{i}+8\ \underline{j}+11\ \underline{k}}{21}$$

$$\underline{\lambda}_{AC}=\frac{\underline{r}_{AC}}{r_{AC}}=\frac{-16\ \underline{i}+8\ \underline{j}-16\ \underline{k}}{\sqrt{(-16)^2+(8)^2+(-16)^2}}=\frac{-16\ \underline{i}+8\ \underline{j}-16\ \underline{k}}{24}$$



$$A(16,0,-11)$$

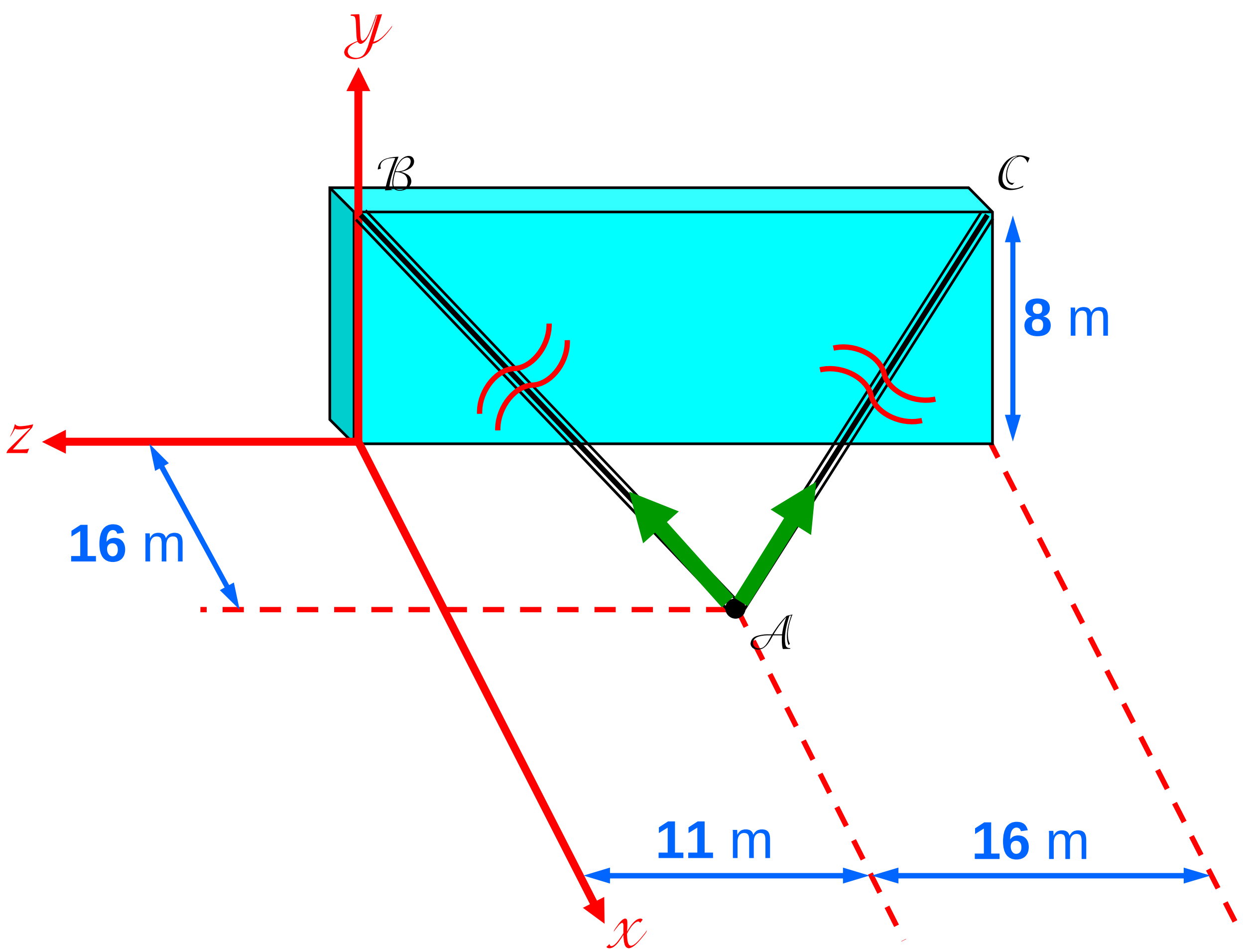
$$B(0,8,0)$$

$$C(0,8,-27)$$

$$\begin{cases} T_{AB}=840\ N \\ T_{AC}=1200\ N \end{cases}$$

$$\underline{T}_{AB} = \underline{\lambda}_{AB} \times T_{AB} = -640\,\underline{i} + 320\,\underline{j} + 440\,\underline{k}$$

$$\underline{T}_{AC} = \underline{\lambda}_{AC} \times T_{AC} = -800\,\underline{i} + 400\,\underline{j} - 800\,\underline{k}$$



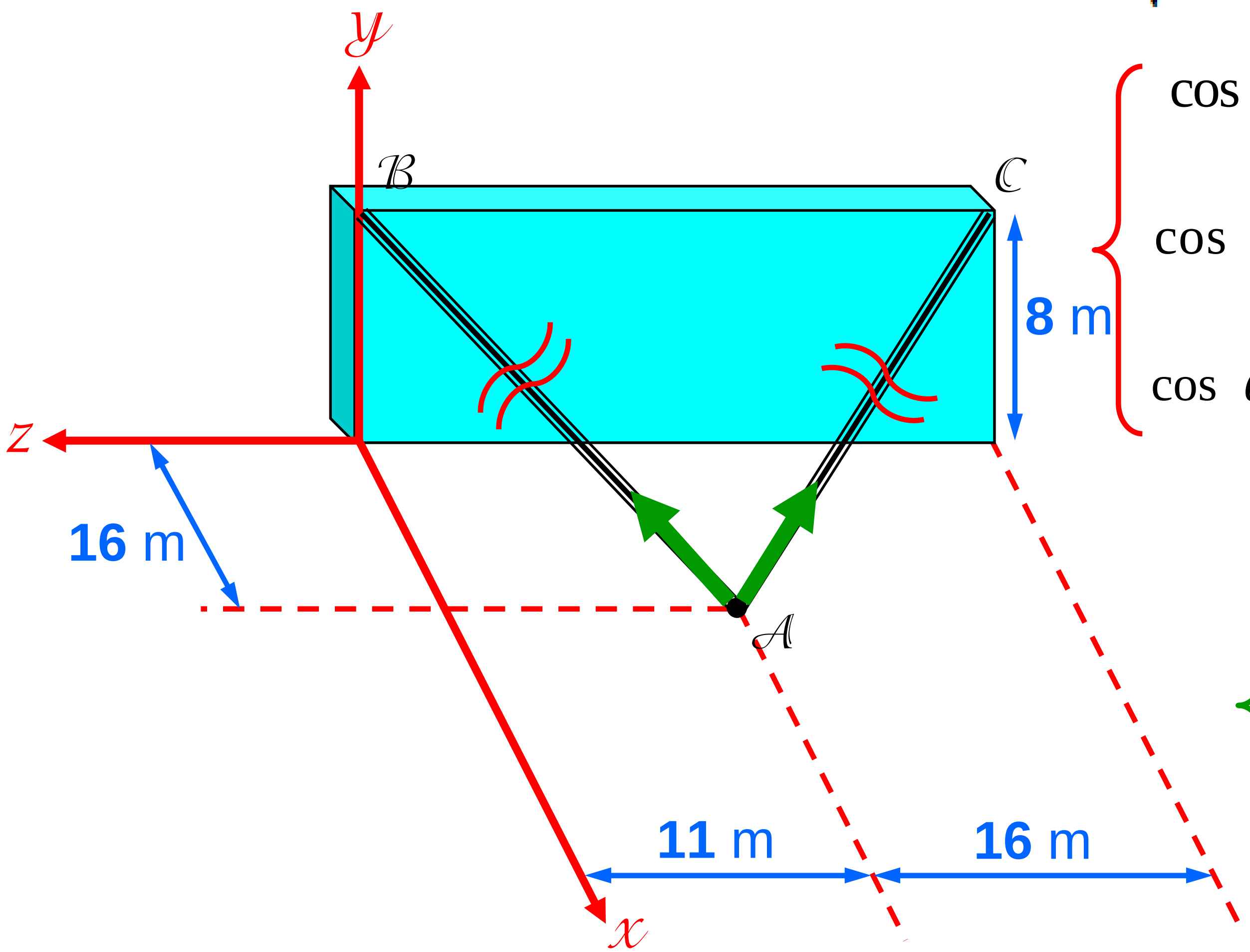
$$\underline{T}_{AB} = \underline{\lambda}_{AB} \times T_{AB} = -640\ \underline{i} + 320\ \underline{j} + 440\ \underline{k}$$

$$\underline{T}_{AC} = \underline{\lambda}_{AC} \times T_{AC} = -800\underline{i} + 400\underline{j} - 800\underline{k}$$

$$\boxed{\underline{R} = \underline{T}_{AB} + \underline{T}_{AC}}$$

$$\underline{R} = -1440\ \underline{i} + 720\ \underline{j} - 360\ \underline{k}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 1649.7$$

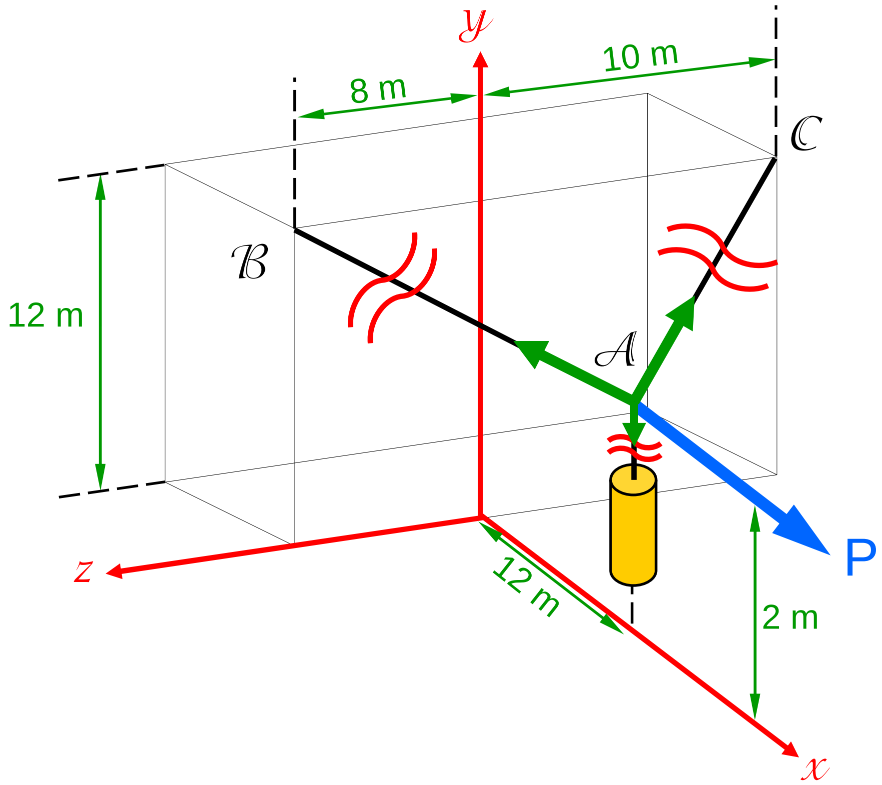


$$\left\{\begin{aligned} \cos\ \theta_x &= \frac{R_x}{R} = \frac{-1440}{1649.7} = -0.87 \\ \cos\ \theta_y &= \frac{R_y}{R} = \frac{720}{1649.7} = 0.44 \\ \cos\ \theta_z &= \frac{R_z}{R} = \frac{-360}{1649.7} = -0.22 \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \theta_x &= 150.5^0 \\ \theta_y &= 64.1^0 \\ \theta_z &= 102.6^0 \end{aligned}\right.$$

مثال: یک وزنه ۲۰۰ کیلوگرمی بوسیله دو کابل AB و AC و نیروی P در وضعیت شکل نگهداری شده است. مطلوبست: محاسبه بزرگی نیروی کشش کابل ها و بزرگی نیروی P

پاسخ



$$\underline{P} = P\,\underline{i}$$

$$\underline{W} = -2000\ \underline{j}$$

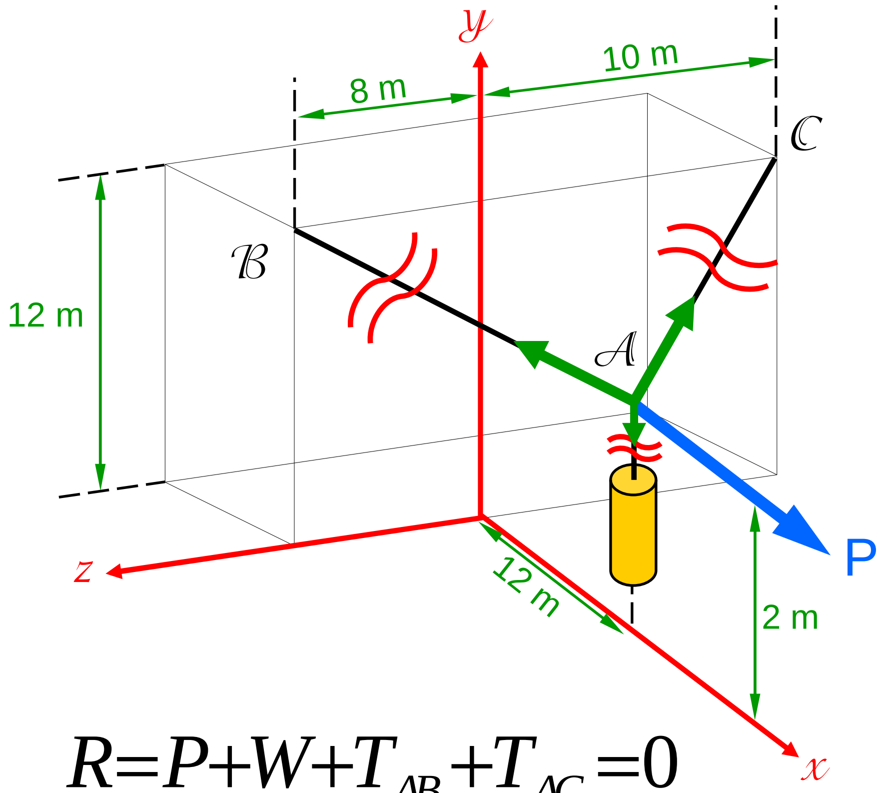
$$\underline{T}_{AB} = T_{AB}(-0.68\ \underline{i} + 0.57\ \underline{j} + 0.46\ \underline{k})$$

$$A\,(12\,,\,2\,,\,0\,)$$

$$C\,(\,0\,,12\,,-10\,)$$

$$\underline{T}_{AC} = T_{AC} \times \underline{\lambda}_{AC} = T_{AC} \times \frac{-12\ \underline{i} + 10\ \underline{j} - 10\ \underline{k}}{18.55} = T_{AC}(-0.65\ \underline{i} + 0.54\ \underline{j} - 0.54\ \underline{k})$$

$$P = 2395.54 \ N$$
$$T_{AB} = 1941.75 \ N$$
$$T_{AC} = 1654.08 \ N$$



$$\underline{P} = P\,\underline{i}$$

$$\underline{W} = -2000 \ \underline{j}$$

$$\underline{T}_{AB} = T_{AB}(-0.68 \ \underline{i} + 0.57 \ \underline{j} + 0.46 \ \underline{k})$$

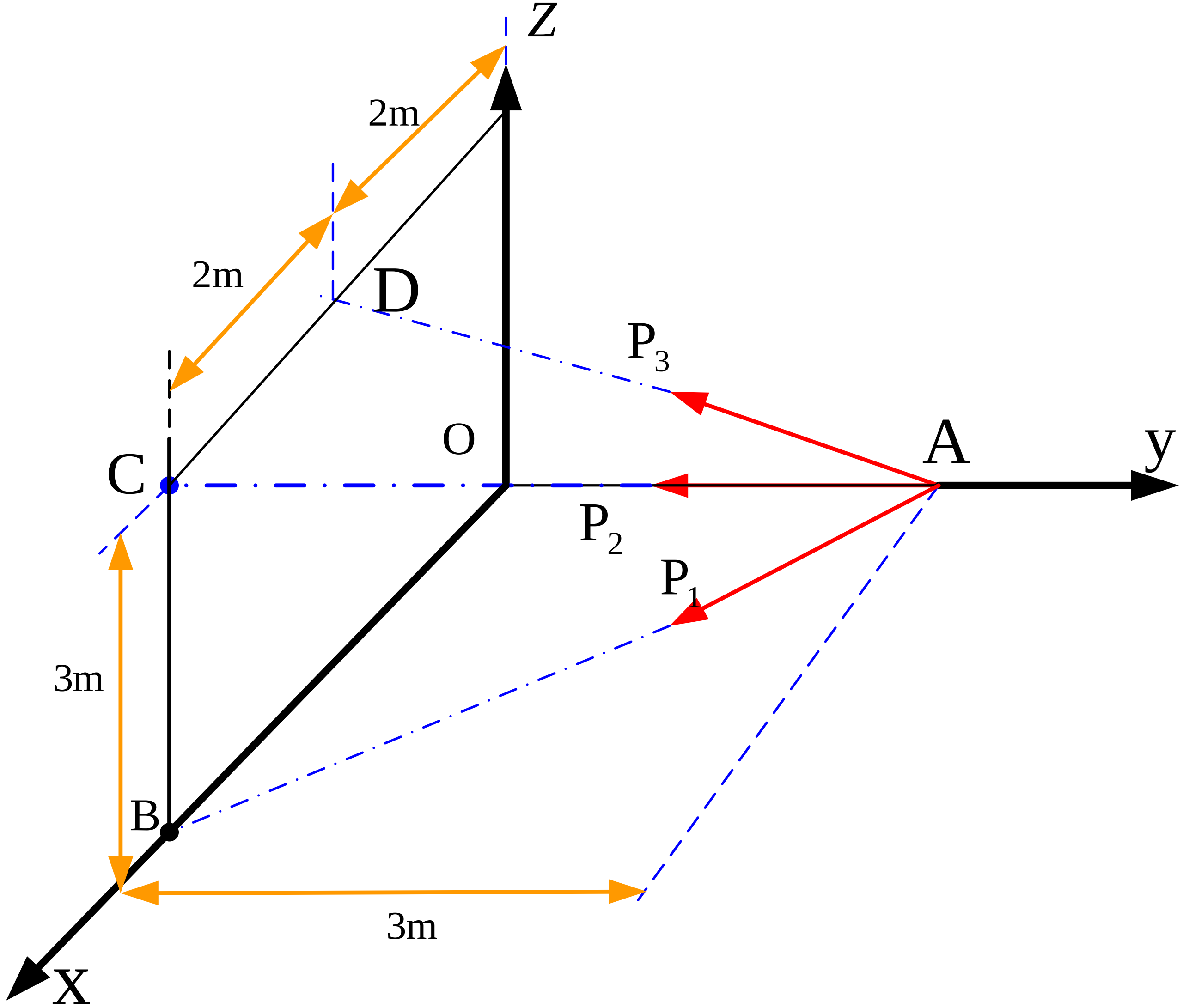
$$\underline{T}_{AC} = T_{AC}(-0.65 \ \underline{i} + 0.54 \ \underline{j} - 0.54 \ \underline{k})$$

$$\begin{cases} 0.54 \ T_{AC} + 0.57 \ T_{AB} = 2000 \\ 0.46 \ T_{AB} - 0.54 \ T_{AC} = 0 \\ -0.65T_{AC} - 0.68T_{AB} + P = 0 \end{cases}$$

$$\underline{R} = \underline{P} + \underline{W} + \underline{T}_{AB} + \underline{T}_{AC} = 0$$

$$\underline{R} = (-0.65T_{AC} - 0.68T_{AB} + P)\underline{i} + (0.54T_{AC} + 0.57T_{AB} - 2000)\underline{j} + (0.46T_{AB} - 0.54T_{AC})\underline{k} = 0$$

مثال: مقادیر سه نیروی نشان داده شده در شکل را با توجه به اینکه نیروی برآیند آنها برابر با $\underline{R} = 200\underline{i} - 100\underline{j} + 50\underline{k}\ (kN)$ باشد تعیین کنید.



A(0,3,0) , B(4,0,0) , C(4,0,3) , D(2,0,3) **پاسخ**

$$\underline{\lambda}_{AB}=\frac{\underline{\underline{AB}}}{AB}=\frac{4\underline{i}-3\underline{j}}{5}=\frac{1}{5}\left(4\underline{i}-3\underline{j}\right)$$

$$\underline{\lambda}_{AC}=\frac{\underline{\underline{AC}}}{AC}=\frac{4\underline{i}-3\underline{j}+3\underline{k}}{\sqrt{34}}=\frac{1}{\sqrt{34}}\left(4\underline{i}-3\underline{j}+3\underline{k}\right)$$

$$\underline{\lambda}_{AD}=\frac{\underline{\underline{AD}}}{AD}=\frac{2\underline{i}-3\underline{j}+3\underline{k}}{\sqrt{22}}=\frac{1}{\sqrt{22}}\left(2\underline{i}-3\underline{j}+3\underline{k}\right)$$

$$\underline{P}_1=P_1\underline{\lambda}_{AB}=\frac{P_1}{5}\left(4\underline{i}-3\underline{j}\right)$$

$$\underline{P}_2=P_2\underline{\lambda}_{AC}=\frac{P_2}{\sqrt{34}}\left(4\underline{i}-3\underline{j}+3\underline{k}\right)$$

$$\underline{P}_3 = P_3 \underline{\lambda}_{AD} = \frac{P_3}{\sqrt{22}}\left(2\underline{i} - 3\underline{j} + 3\underline{k}\right)$$

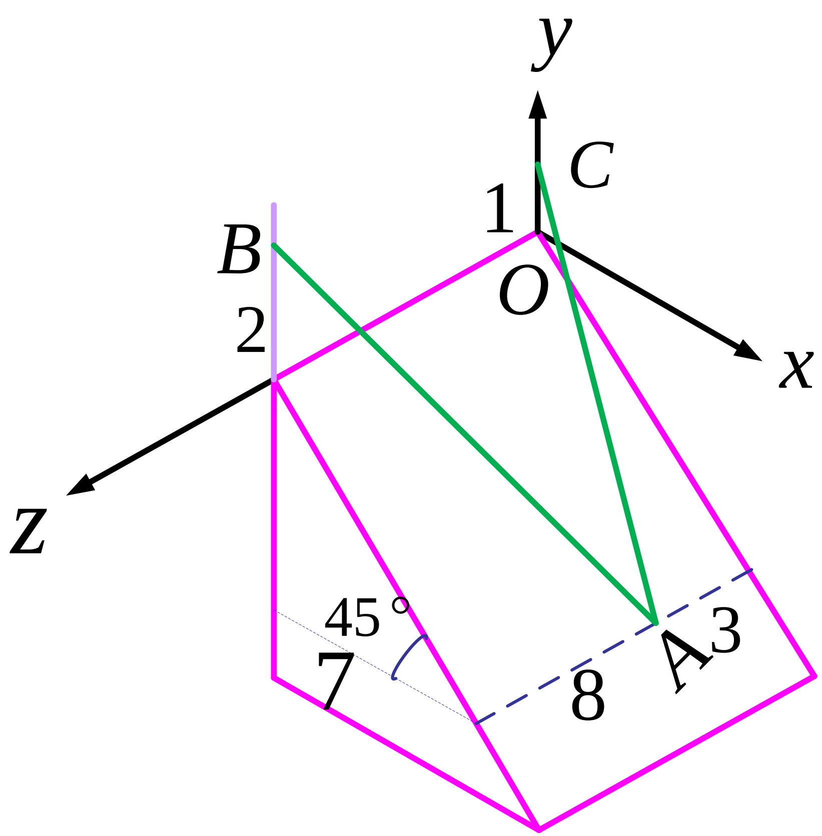
$$\underline{R} = \underline{P}_1 + \underline{P}_2 + \underline{P}_3 = \left(\frac{4}{5}P_1 + \frac{4}{\sqrt{34}}P_2 + \frac{2}{\sqrt{22}}P_3\right)\underline{i} - \left(\frac{3}{5}P_1 + \frac{3}{\sqrt{34}}P_2 + \frac{3}{\sqrt{22}}P_3\right)\underline{j}$$

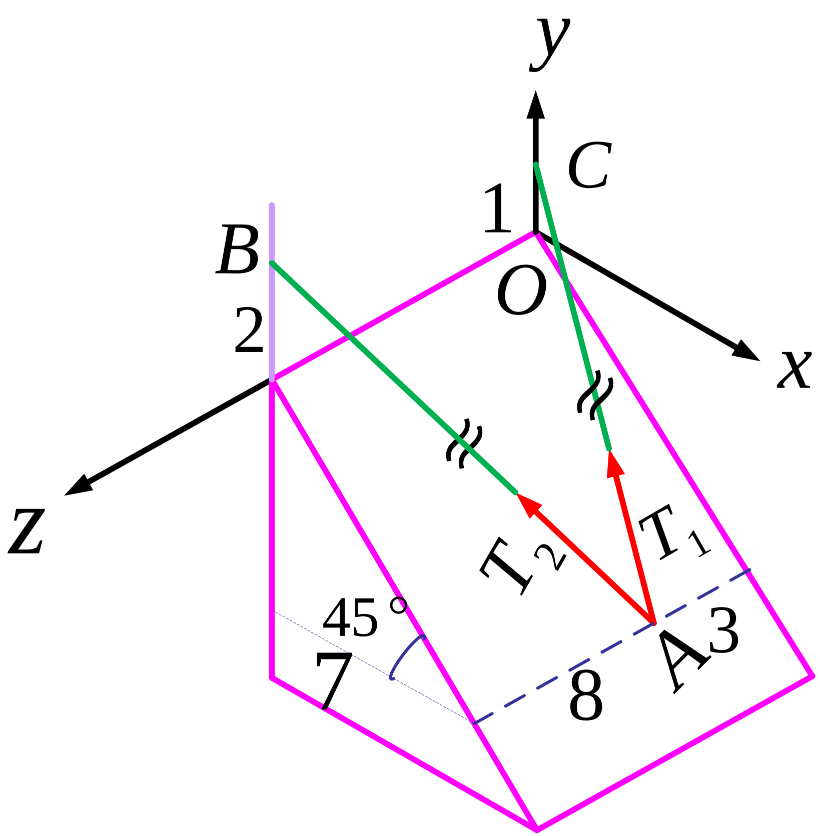
$$+\left(\frac{3}{\sqrt{34}}P_2 + \frac{3}{\sqrt{22}}P_3\right)\underline{k} = 200\underline{i} - 100\underline{j} + 50\underline{k}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{5}P_1 + \frac{2}{\sqrt{34}}P_2 + \frac{1}{\sqrt{22}}P_3 = 100 \\ \frac{1}{5}P_1 + \frac{1}{\sqrt{34}}P_2 + \frac{1}{\sqrt{22}}P_3 = \frac{100}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{34}}P_2 + \frac{1}{\sqrt{22}}P_3 = \frac{50}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 = 250 \ kN \\ P_2 = -293.3 \ kN \\ P_3 = 471.86 \ kN \end{cases}$$

مثـال: جسمی به وزن 780N بوسیله ی دو ریسمان ABوAC مطابق شکل روی یک سطح صیقلی نگه داشته شده اند.مطلوب است تعیین کشش در ریسمان ها.(واحد ها بر حسب متر هستند.)





$$C\,(0,1,0)$$

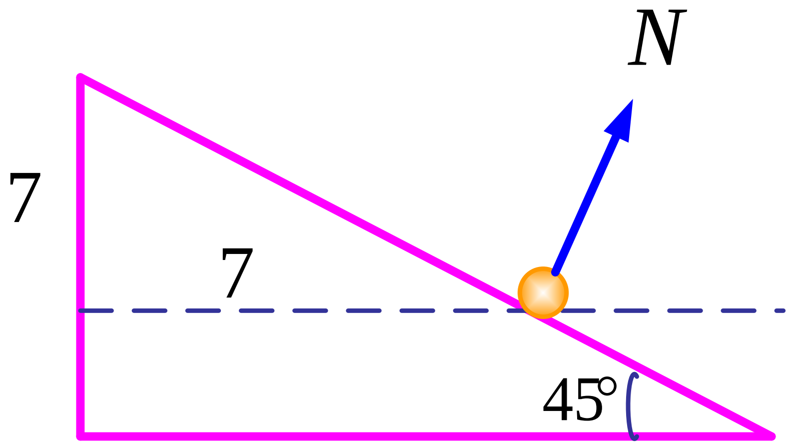
$$B\,(0,2,11)$$

$$A\,(7,-7,3)$$

$$w=-780\,\underline{j}$$

$$\underline{T}_1=T_1\,\underline{\lambda}_{AC}=T_1\,\frac{-7\underline{i}+8\underline{j}-3\underline{k}}{\sqrt{49+64+9}}=T_1\left(-0.63\underline{i}+0.72\underline{j}-0.27\underline{k}\right)$$

$$\underline{T}_2=T_2\,\underline{\lambda}_{AB}=T_2\,\frac{-7\underline{i}+9\underline{j}+2\underline{k}}{\sqrt{49+81+64}}=T_2\left(-0.5\underline{i}+0.63\underline{j}+0.56\underline{k}\right)$$



$$\underline{N} = N\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\underline{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\underline{j}\right)$$

$$\sum \underline{F} = \underline{T}_1 + \underline{T}_2 + \underline{w} + \underline{N} = 0$$

$$0.63T_1 - 0.5T_2 + N\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$0.72T_1 + 0.63T_2 + N\frac{\sqrt{2}}{2} - 780 = 0$$

$$-0.7T_1 + 0.56T_2 = 0$$

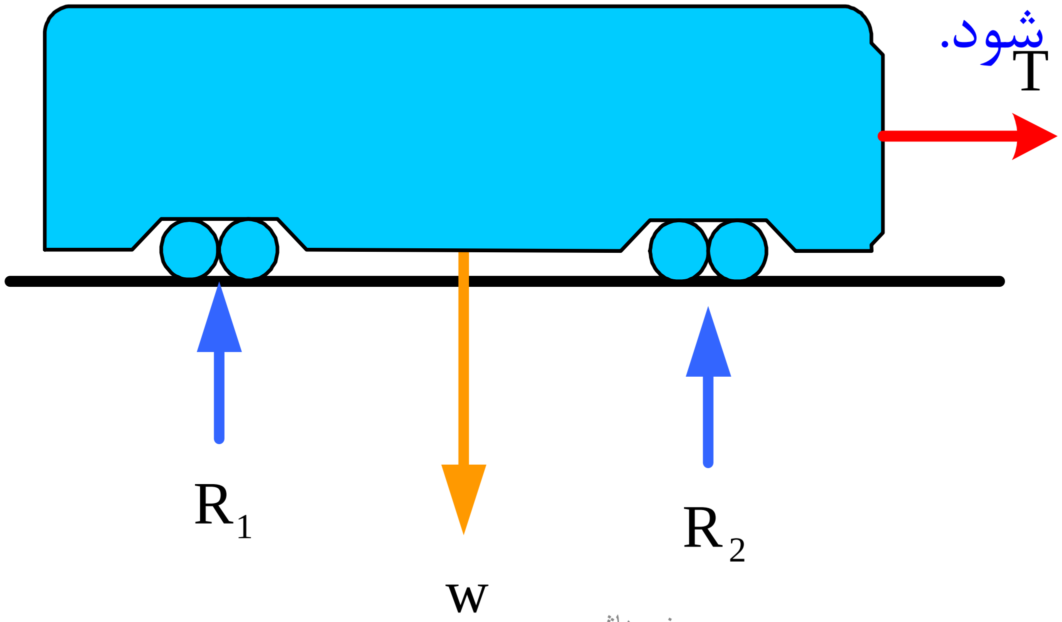
$$T_1 = 411.5\ N \quad T_2 = 198.8N \quad N = 504.93N$$

۲- نیرو، گشتاور و زوج نیرو

نیروهای خارجی و داخلی:

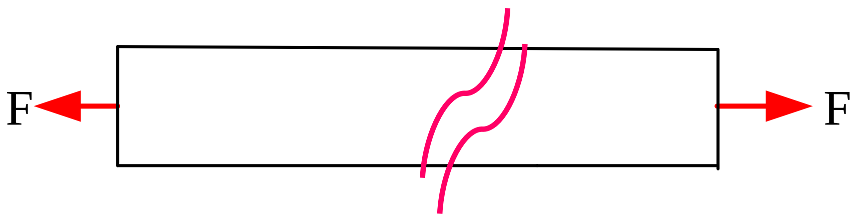
نیروهای خارجی، نیروهایی هستند که از طرف اجسام دیگر برجسم صلب وارد می شوند و سبب رفتار خارجی جسم می شوند به عبارت دیگر یا عامل به حرکت درآوردن جسم اند یا عامل به سکون درآوردن آن.

بعنوان مثال یک خودرو را درنظر بگیرید که در امتداد افقی به وسیله کابلی توسط افرادی کشیده شود.

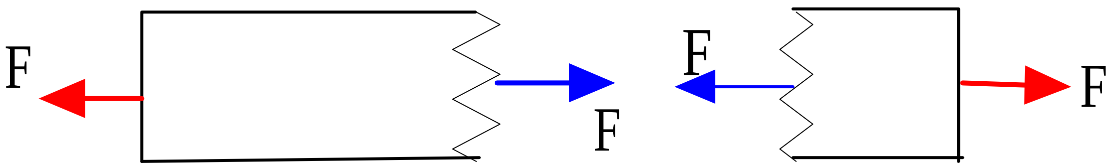


نیروهای داخلی نیروهایی هستند که سبب می شوند اجزاءتشکیل دهنده جسم صلب در جوار یکدیگر باقی بمانند و از هم جدا نشوند.

بعنوان مثال یک میله را درنظر بگیرید و فرض کنید که میله در دو انتها تحت تاثیردو نیروی مساوی و مختلف الجهت قرار گرفته باشد.

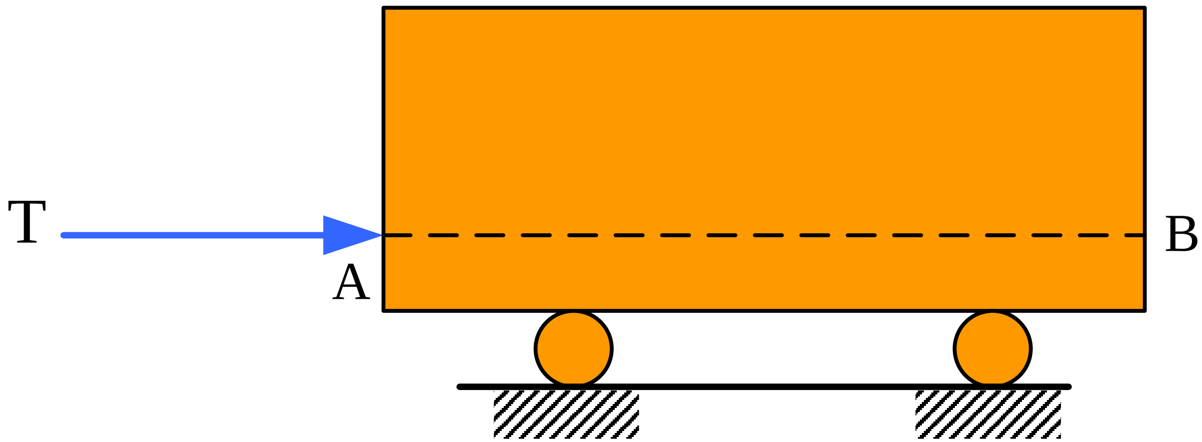


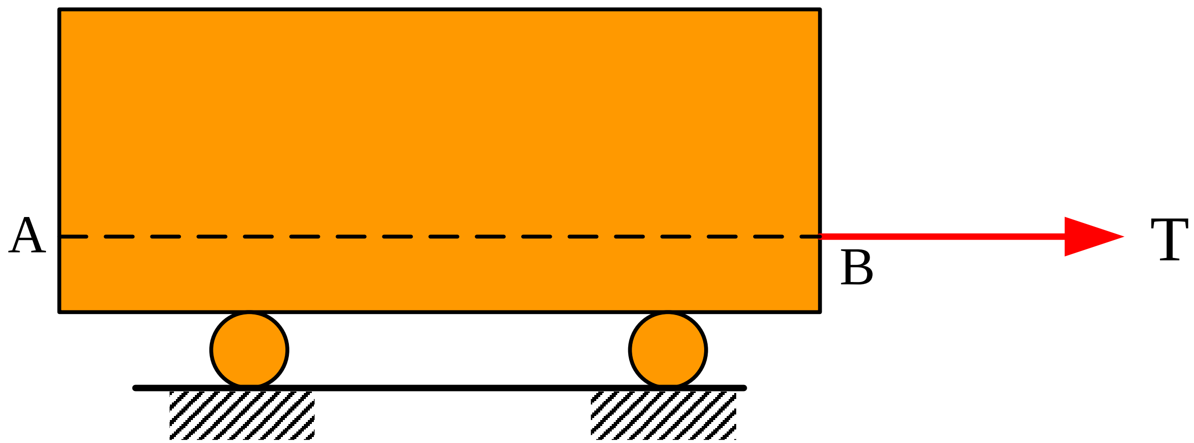
Fهای با رنگ آبی نیروهای داخلی اند.

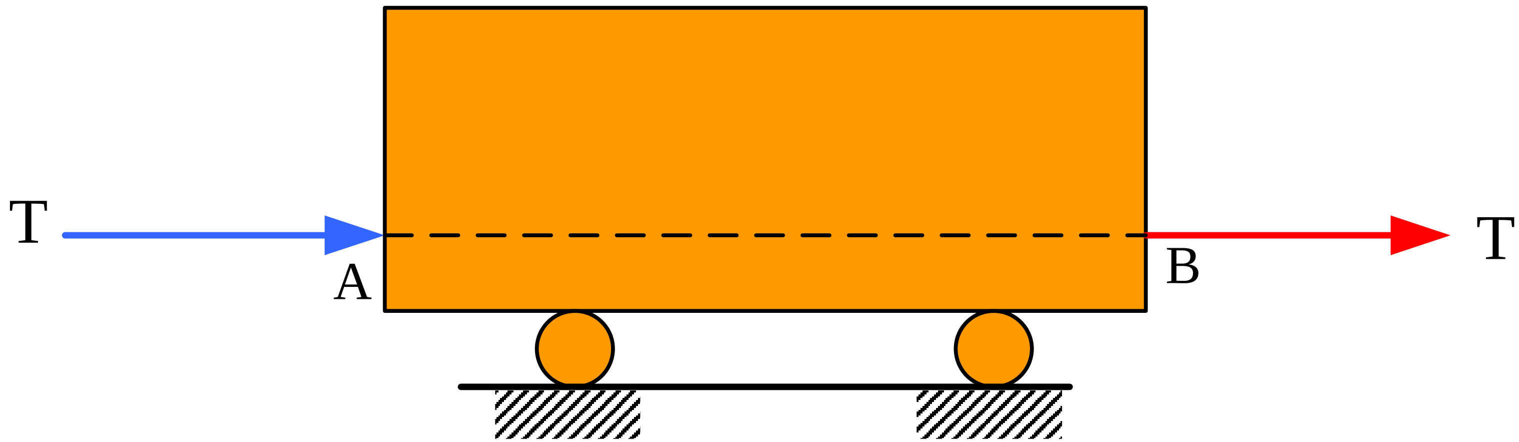


اصل قابلیت انتقال نیرو:

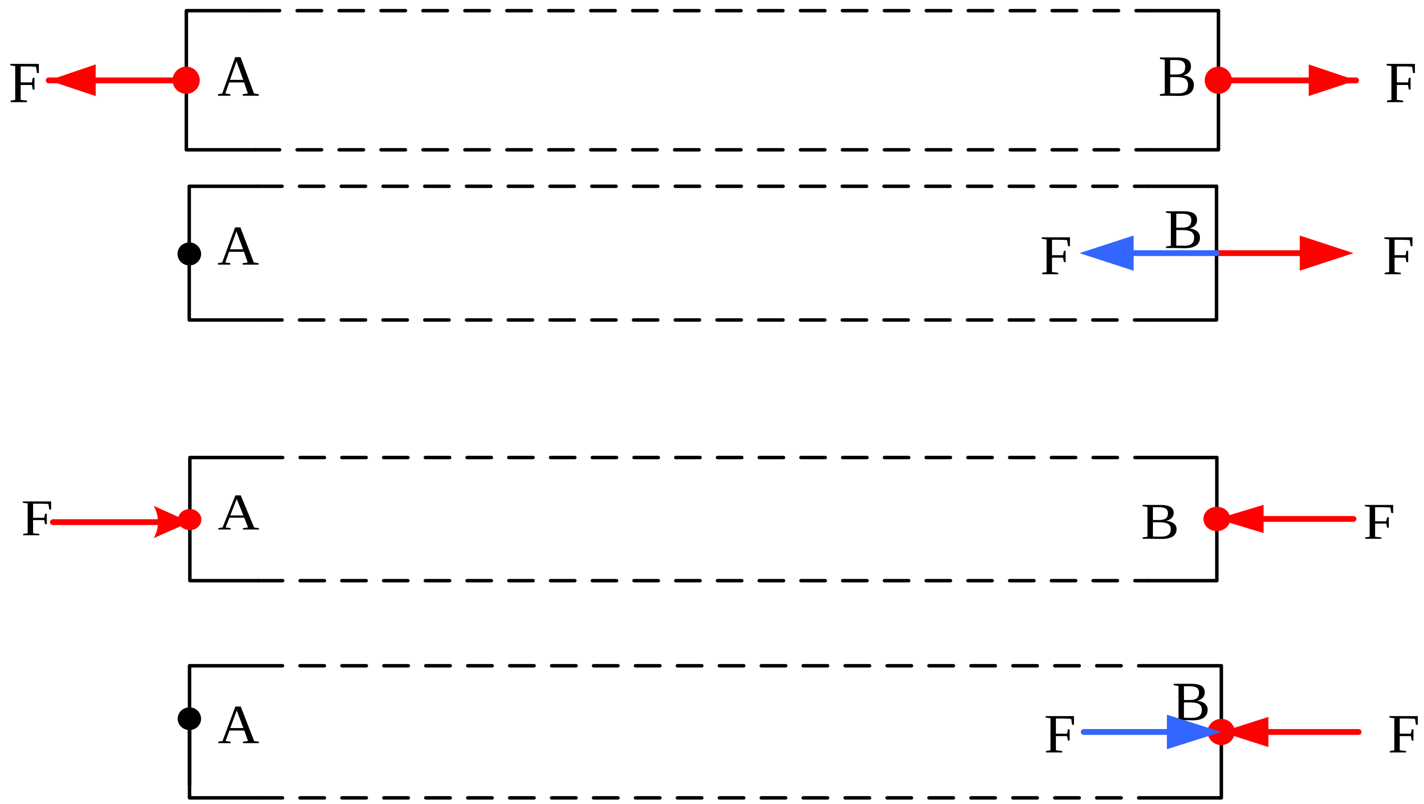
شرایط تعادل یا حرکت جسم صلب بدون تغییر خواهد ماند، چنانچه نیرویی را که به نقطه ای از جسم اثر می کند با یک نیرو در نقطه ای دیگر که مساوی و هم جهت با نیروی اولیه باشد تعویض کنیم. مشروط برآن که امتداد نیروی تعویضی (خط اثر نیروی تعویضی) همان خط اثر نیروی اولیه باشد.


T
A
B

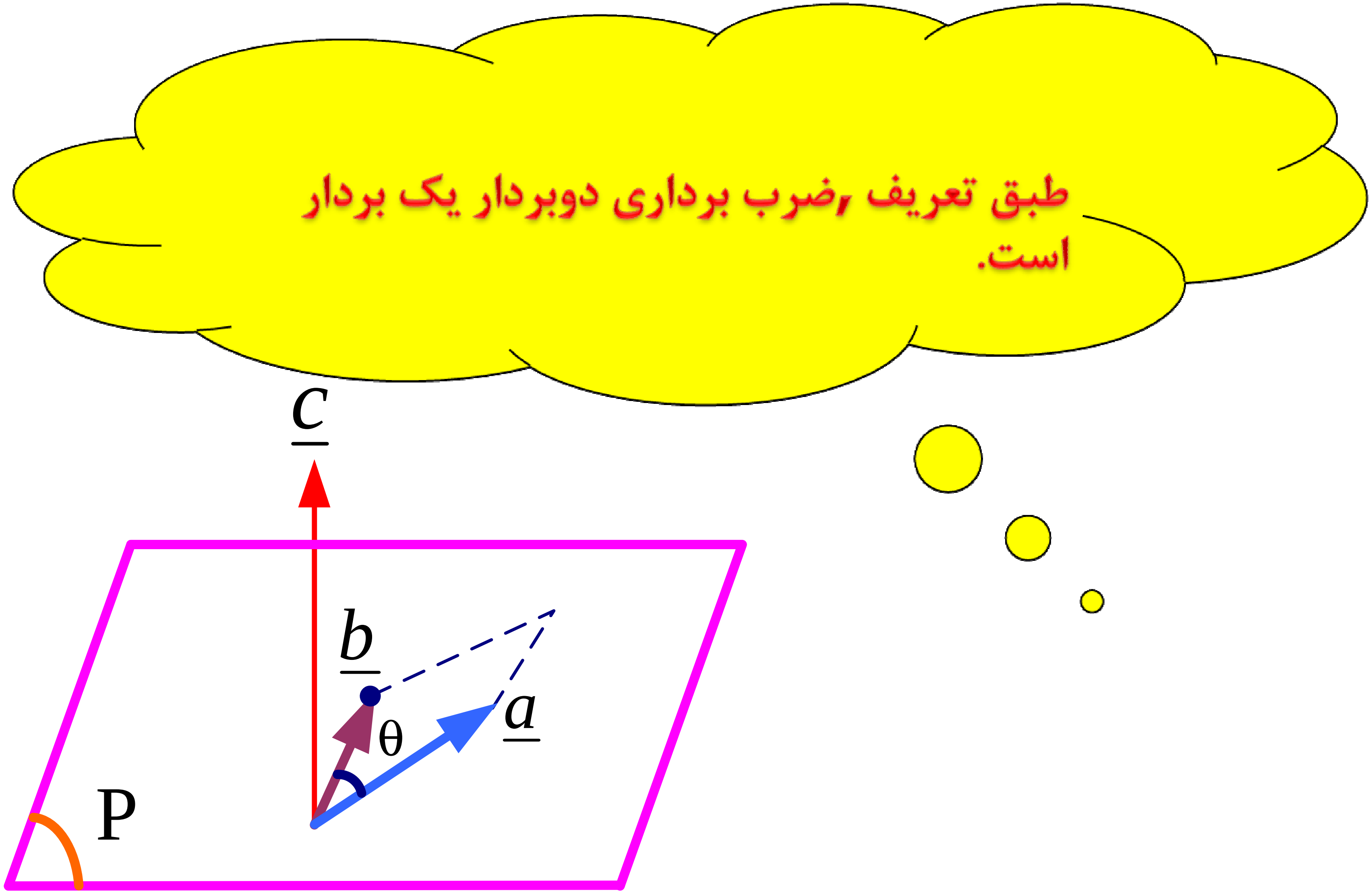

A
B
T


T
A
B
T

اصل قابلیت انتقال نیرو فقط برای مطالعه رفتار خارجی اجسام کاملا درست است.



ضرب برداری دو بردار



b = بردار مؤخر

a = بردار مقدم

$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b}$$

$$c = ab \sin \theta$$

مساحت متوازی الاضلاعی که روی دوبردار بنا شود.

امتداد عمود بر صفحه دو بردار $\underline{b}, \underline{a}$ به عبارت دیگر یعنی صفحه P

جهت بردار c به وسیله قانون دست راست تعیین می شود.

$$\underline{a} = a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k}$$

$$\underline{b} = b_x \underline{i} + b_y \underline{j} + b_z \underline{k}$$

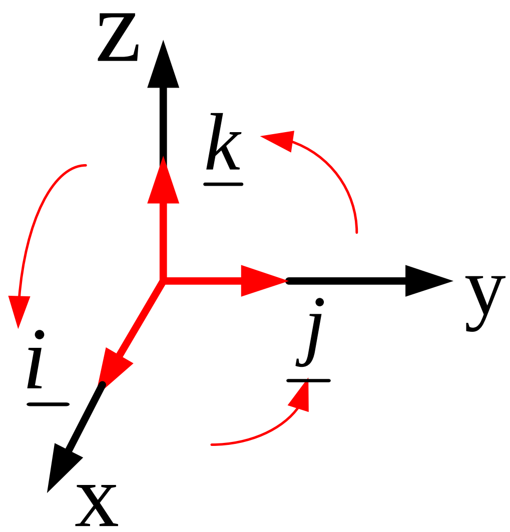
$$\underline{c} = \underline{a} \times \underline{b} = \left(a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k}\right) \times \left(b_x \underline{i} + b_y \underline{j} + b_z \underline{k}\right)$$

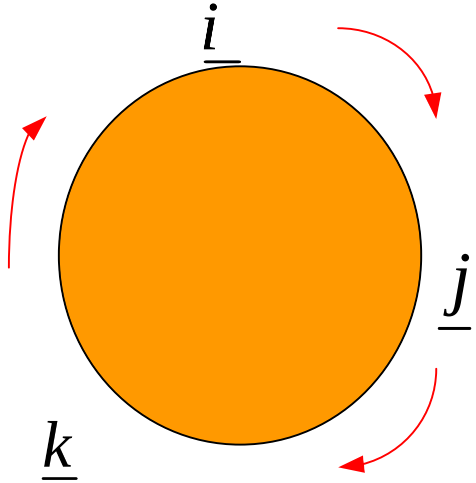
$$= a_x b_x \left(\underline{i} \times \underline{i}\right) + a_x b_y \left(\underline{i} \times \underline{j}\right) + a_x b_z \left(\underline{i} \times \underline{k}\right) + a_y b_x \left(\underline{j} \times \underline{i}\right)$$

$$+ a_y b_y \left(\underline{j} \times \underline{j}\right) + a_y b_z \left(\underline{j} \times \underline{k}\right) + a_z b_x \left(\underline{k} \times \underline{i}\right) + a_z b_y \left(\underline{k} \times \underline{j}\right)$$

$$+ a_z b_z \left(\underline{k} \times \underline{k}\right)$$

$$\underline{i} \times \underline{j} = \underline{k}$$
$$\underline{j} \times \underline{k} = \underline{i}$$
$$\underline{k} \times \underline{i} = \underline{j}$$



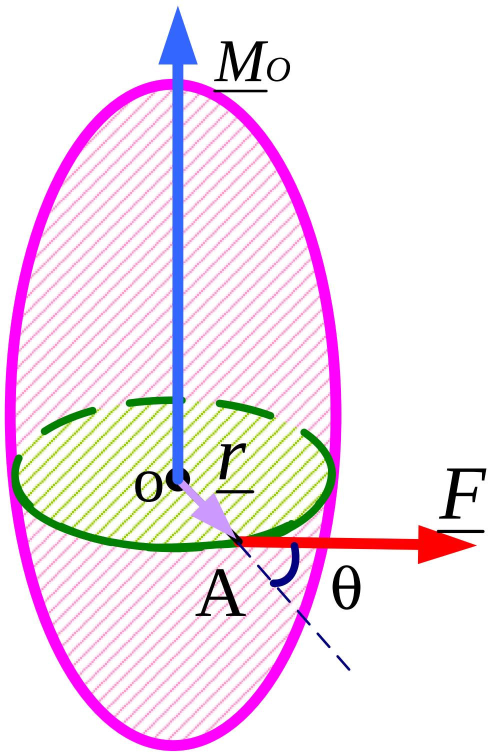


$$\underline{c} = a_x b_y \underline{k} - a_x b_z \underline{j} - a_y b_x \underline{k} + a_y b_z \underline{i} + a_z b_x \underline{j} - a_z b_y \underline{i}$$
$$= (a_y b_z - a_z b_y)\underline{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\underline{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\underline{k}$$
$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

گشتاور حول یک نقطه

$\underline{r}$ بردار وضعیت است. از مبدأ به نقطه اثر نیروی F وصل شده است.

ترتیب بردارها مهم است.



$$\underline{M}_O = \underline{r} \times \underline{F}$$

$$\begin{cases} \underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k} \\ \underline{F} = F_x\underline{i} + F_y\underline{j} + F_z\underline{k} \end{cases}$$

$$M_O = rF\sin\theta$$

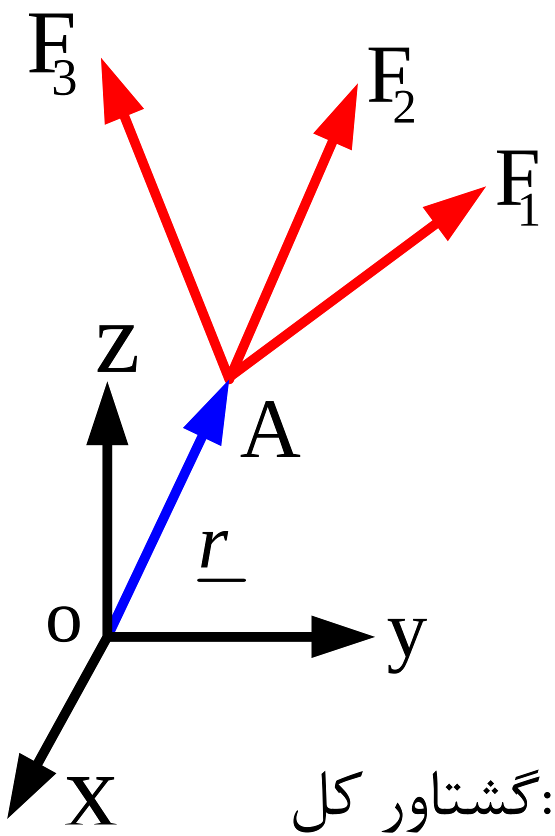
$$\underline{M}_o = \underline{r}\times\underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(yF_z - zF_y\right)\,\underline{i} - \left(xF_z - zF_x\right)\,\underline{j} + \left(xF_y - yF_x\right)\,\underline{k}$$

$$= M_o)_x\,\underline{i} + M_o)_y\,\underline{j} + M_o)_z\,\underline{k}$$

$$\begin{cases} M_O)_x = yF_z - zF_y \\ M_O)_y = zF_x - xF_z \\ M_O)_z = xF_y - yF_x \end{cases}$$

قضیه ورینون (Varignon)

یک نقطه از جسم صلب مثل نقطه A را درنظر می گیریم که به آن انواع نیروها وارد شده باشند.



$$\underline{M}_1 o) = \underline{r} \times \underline{F}_1$$

$$\underline{M}_2 o) = \underline{r} \times \underline{F}_2$$

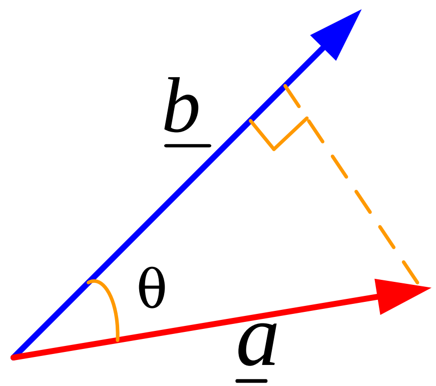
$$\underline{M}_3 o) = \underline{r} \times \underline{F}_3$$

گشتاور کل: $\underline{M}_O = \underline{M}_1 o + \underline{M}_2 o + \underline{M}_3 o + \ldots.$

$$= \underline{r} \times \left(\underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 + \ldots. \right) = \underline{r} \times \underline{R}$$

گشتاور برایندنیروهای متقارب حول یک نقطه برابر است بامجموع برداری گشتاورهای حاصل از هر یک از نیروها حول ان نقطه.

ضرب اسکالر دو بردار



$$\underline{a}.\underline{b} = ab\cos\theta$$

$$\begin{cases} \underline{a} = a_x\underline{i} + a_y\underline{j} + a_z\underline{k} \\ \underline{b} = b_x\underline{i} + b_y\underline{j} + b_z\underline{k} \end{cases}$$

$$\underline{a}.\underline{b} = \left(a_x\underline{i} + a_y\underline{j} + a_z\underline{k}\right).\left(b_x\underline{i} + b_y\underline{j} + b_z\underline{k}\right)$$

$$= a_x b_x\left(\underline{i}.\underline{i}\right) + a_x b_y\left(\underline{i}\cdot\underline{j}\right) + a_x b_z\left(\underline{i}.\underline{k}\right) + a_x b_z\left(\underline{i}.\underline{j}\right) + a_y b_y\left(\underline{j}.\underline{j}\right)$$

$$a_y b_z\left(\underline{j}.\underline{k}\right) + a_z b_x\left(\underline{k}.\underline{i}\right) + a_z b_y\left(\underline{k}.\underline{j}\right) + a_z b_z\left(\underline{k}.\underline{k}\right)$$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab\cos\theta$$

کاربرد یک: تعیین زاویه ما بین دو بردار در فضا

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}$$

کاربرد دو : تعیین تصویر یا مولفه یک بردار در امتداد یک بردار دیگر

$$\underline{a}.\underline{b} = ab\cos\theta$$

تصویر یا مولفه a در امتداد b است

$$a\cos\theta$$

$$\frac{\underline{a}.\underline{b}}{b}=\underline{a}.\left(\frac{\underline{b}}{b}\right)=\underline{a}.\underline{\lambda}$$

تصویر یا مولفه بردار a در امتداد b

$\underline{\lambda}$: بردار یکه در امتداد بردار $\underline{b}$

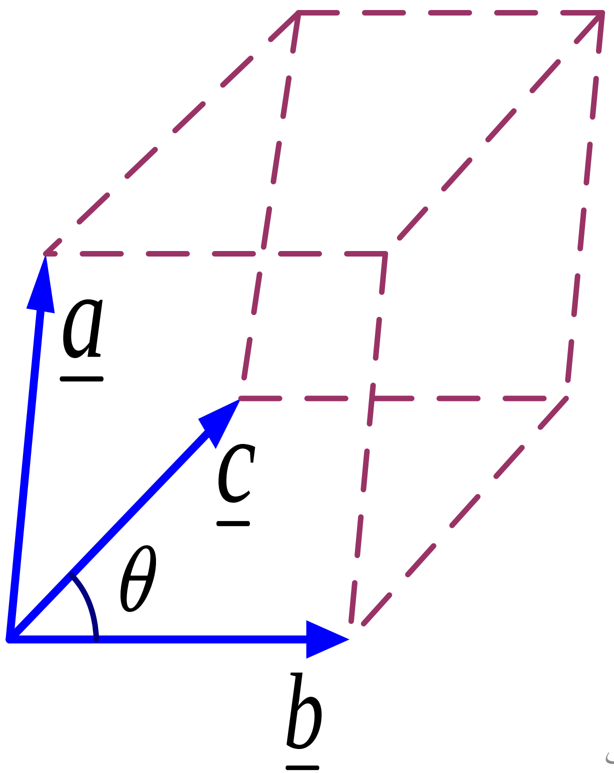
ضرب مختلط سه بردار

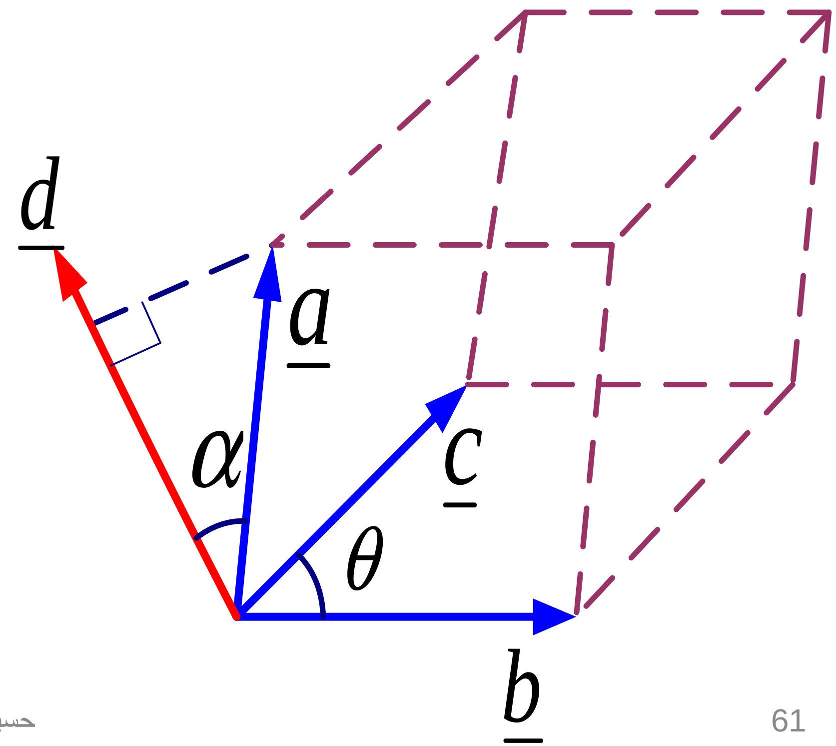
$$\underline{a}.\left(\underline{b}\times\underline{c}\right)$$

یک کمیت اسکالر

$$\underline{d}=\underline{b}\times\underline{c} \qquad d=bc\sin\theta$$

$$\underline{a}.\left(\underline{b}\times\underline{c}\right)=\underline{a}.\underline{d}=ad\cos\alpha=abc\sin\theta\cos\alpha$$





$$\underline{a}.\left(\underline{b}\times\underline{c}\right)=abc\sin\theta\cos\alpha$$

حجم متوازی السطوحی که روی سه بردار

$\underline{c}, \underline{b}, \underline{a}$ بنا می شود.

$$\begin{cases} \underline{a} = a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k} \\ \underline{b} = b_x \underline{i} + b_y \underline{j} + b_z \underline{k} \\ \underline{c} = c_x \underline{i} + c_y \underline{j} + c_z \underline{k} \end{cases}$$

$$\underline{b} \times \underline{c} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \left(b_y c_z - c_y b_z\right) \underline{i} - \left(b_x c_z - c_x b_z\right) \underline{j} + \left(b_x c_y - c_x b_y\right) \underline{k} = \underline{d}$$

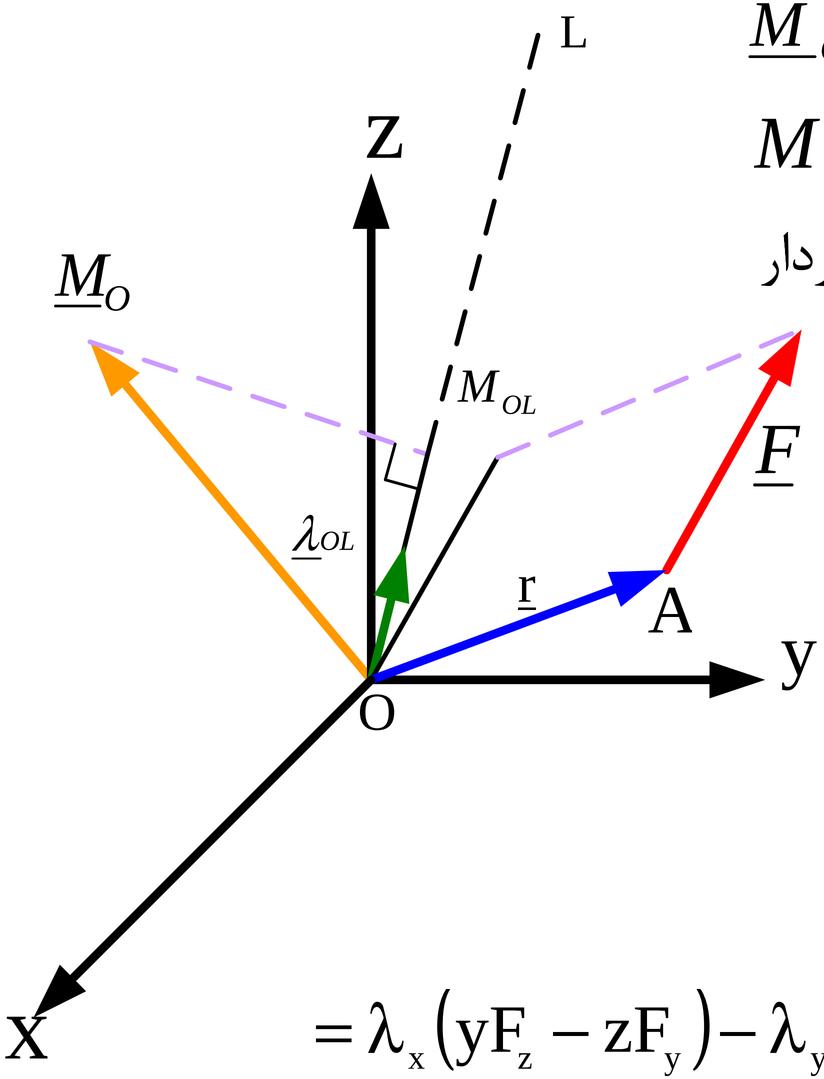
$$\underline{a}.\underline{d}=\underline{a}.(\underline{b}\times\underline{c})=(a_x\underline{i}+a_y\underline{j}+a_z\underline{k})[(b_yc_z-c_yb_z)\underline{i}$$

$$-(b_xc_z-c_xb_z)\underline{j}+(b_xc_y-c_xb_y)\underline{k}]$$

$$=a_x(b_yc_z-c_yb_z)+a_y(c_xb_z-c_zb_x)+a_z(b_xc_y-c_xb_y)$$

$$=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

گشتاور حول یک محور



$$\underline{M}_O = \underline{r} \times \underline{F}$$

$$M_{OL} = \underline{\lambda}_{OL} . (\underline{M}_O) = \underline{\lambda}_{OL} . (\underline{r} \times \underline{F})$$

حجم متوازی السطوحی است که روی سه بردار

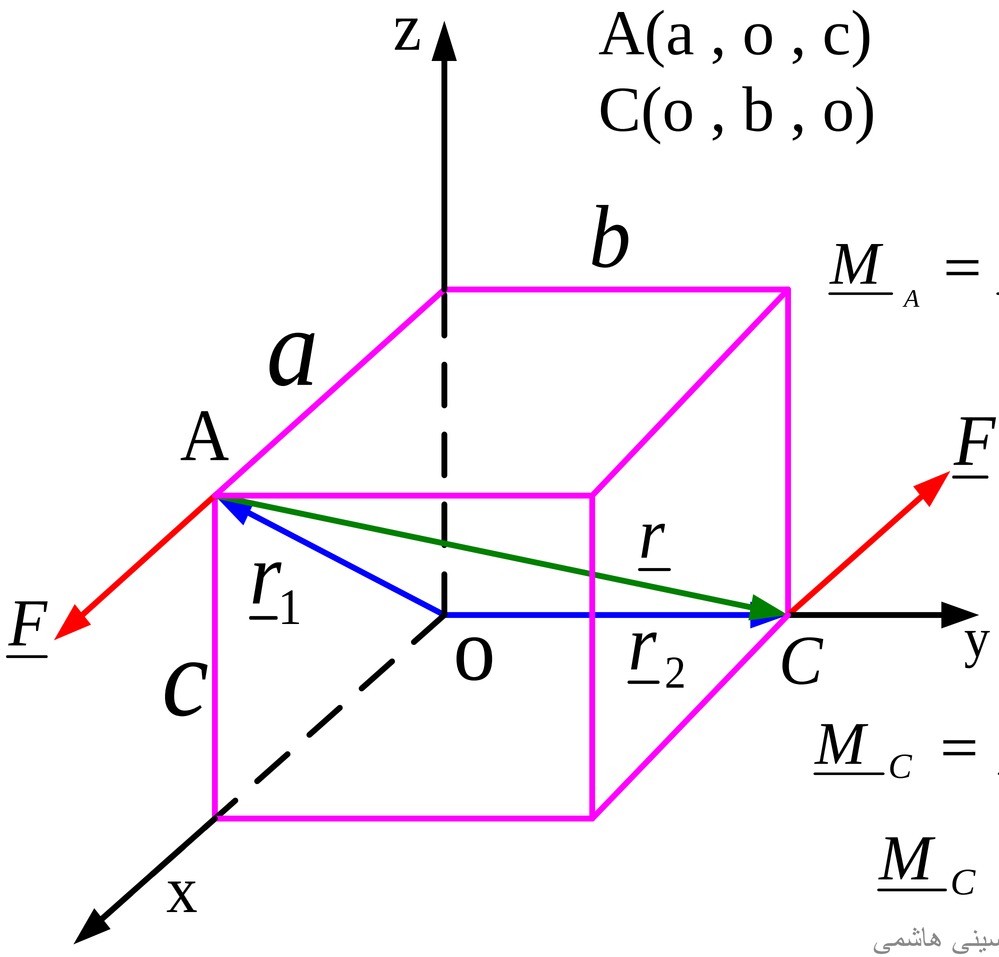
بنامی شود $\underline{F}, \underline{r}, \underline{\lambda}_{oL}$

$$M_{OL} = \underline{\lambda}_{OL} . (\underline{r} \times \underline{F}) = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_x (yF_z - zF_y) - \lambda_y (xF_z - zF_x) + \lambda_z (xF_y - yF_x)$$

زوج نیرو (Force Couple) و گشتاور زوج نیرو

دو نیرو با اندازه های یکسان و راستاهای موازی را که مخالف جهت هم به دو نقطه از جسمی وارد شوند زوج نیرو میگویند.



$$\underline{r} = -a\,\underline{i} + b\,\underline{j} - c\,\underline{k}$$

$$\underline{F})_C = -F\,\underline{i}$$

$$\underline{M}_A = \underline{r} \times \underline{F})_C = \left(-a\underline{i} + b\underline{j} - c\underline{k}\right) \times \left(-F\underline{i}\right)$$

$$= F\left(c\,\underline{j} + b\,\underline{k}\right)$$

$$\underline{r}^* = -\underline{r} = a\underline{i} - b\underline{j} + c\underline{k}$$

$$\underline{F})_A = F\,\underline{i}$$

$$\underline{M}_C = \underline{r}^* \times \underline{F})_A = \left(a\underline{i} - b\,\underline{j} + c\,\underline{k}\right) \times F\,\underline{i}$$

$$\underline{M}_C = F\left(c\,\underline{j} + b\underline{k}\right)$$

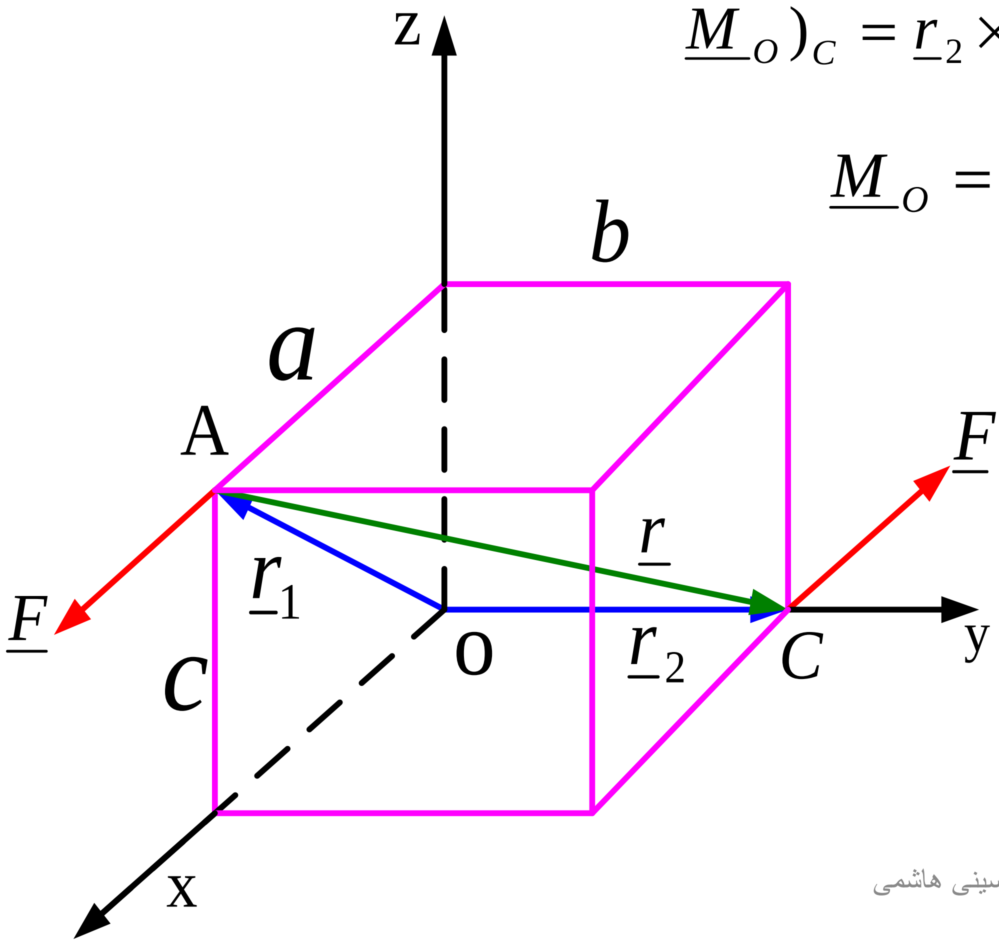
$$\underline{r}_1 = \left(a\underline{i} + c\underline{k}\right) \qquad \underline{F}\,)_A = F\,\underline{i}$$

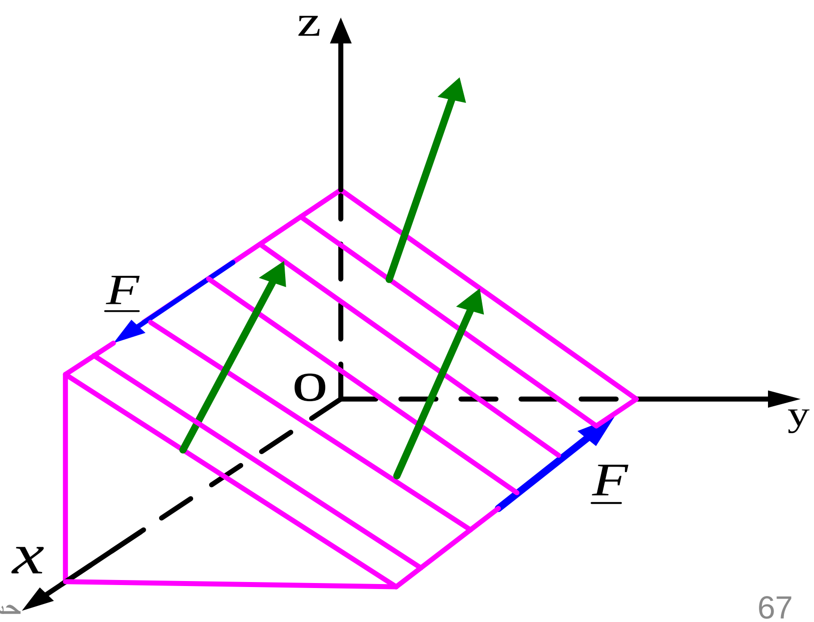
$$\underline{M}_O)_A = \underline{r}_1 \times \underline{F})_A = \left(a\underline{i} + c\underline{k}\right) \times \left(F\,\underline{i}\right) = cF\,\underline{j}$$

$$\underline{r}_2 = b\,\underline{j} \qquad \underline{F}\,)_C = -F\,\underline{i}$$

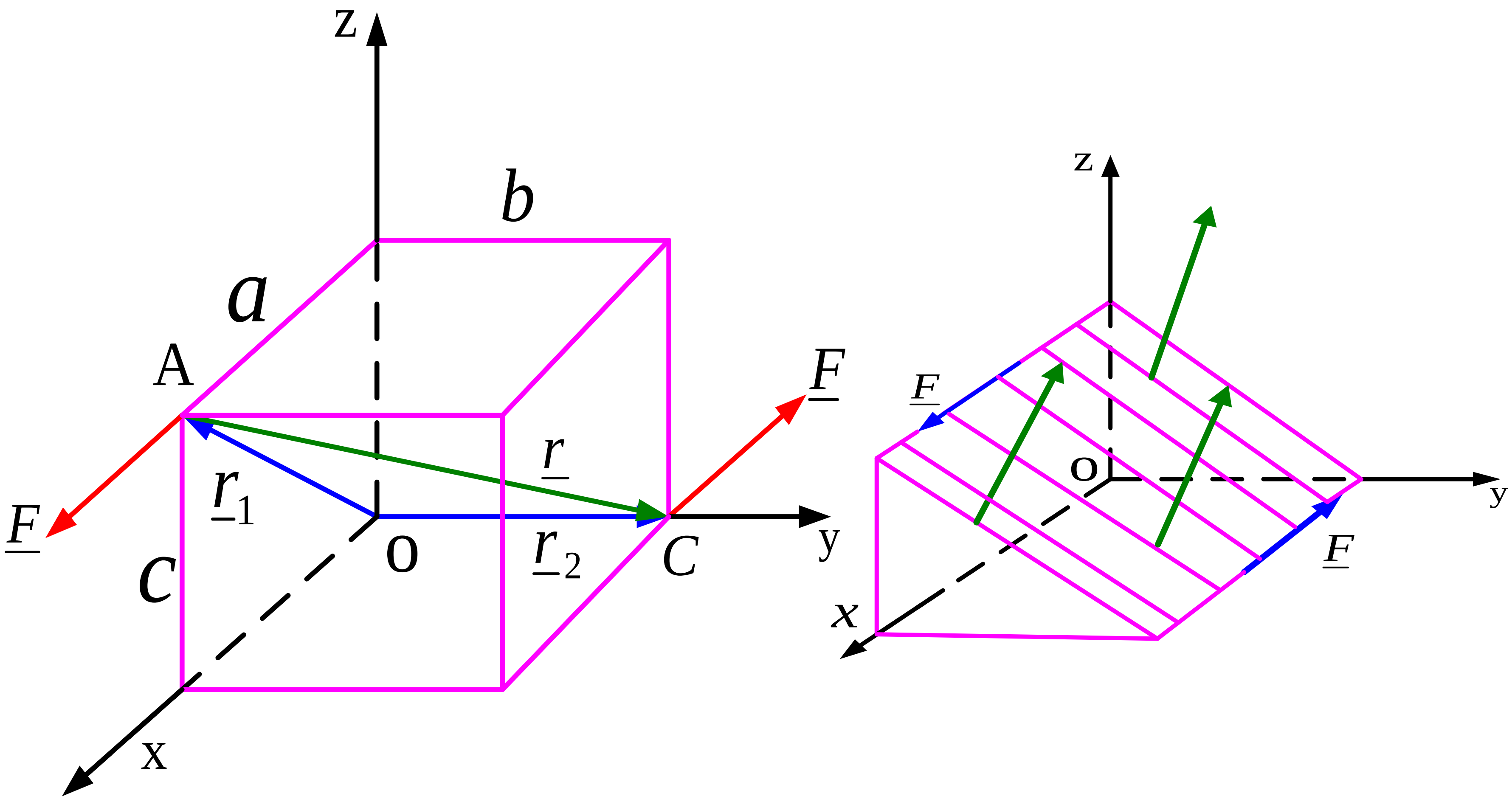
$$\underline{M}_O)_C = \underline{r}_2 \times \underline{F})_C = \left(b\,\underline{j}\right) \times \left(-F\,\underline{i}\right) = bF\,\underline{k}$$

$$\underline{M}_O = \underline{M}_O)_A + \underline{M}_O)_C = F\left(c\,\underline{j} + b\underline{k}\right)$$



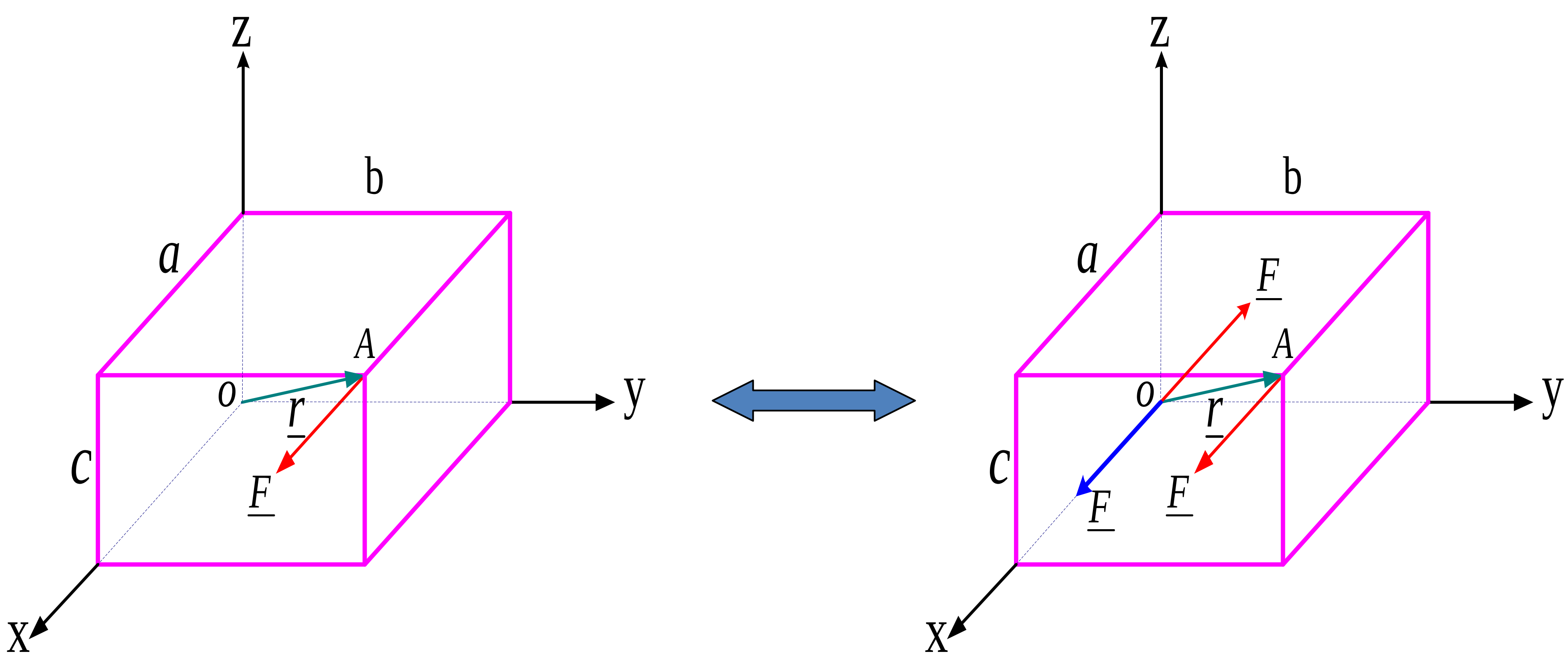


گشتاور زوج نیرو یک بردار ازاد (Free vector) است



تجزیه (تعویض) یک نیروی مفروض به یک نیرو و بردار کوپل در نقطه ای مثل O

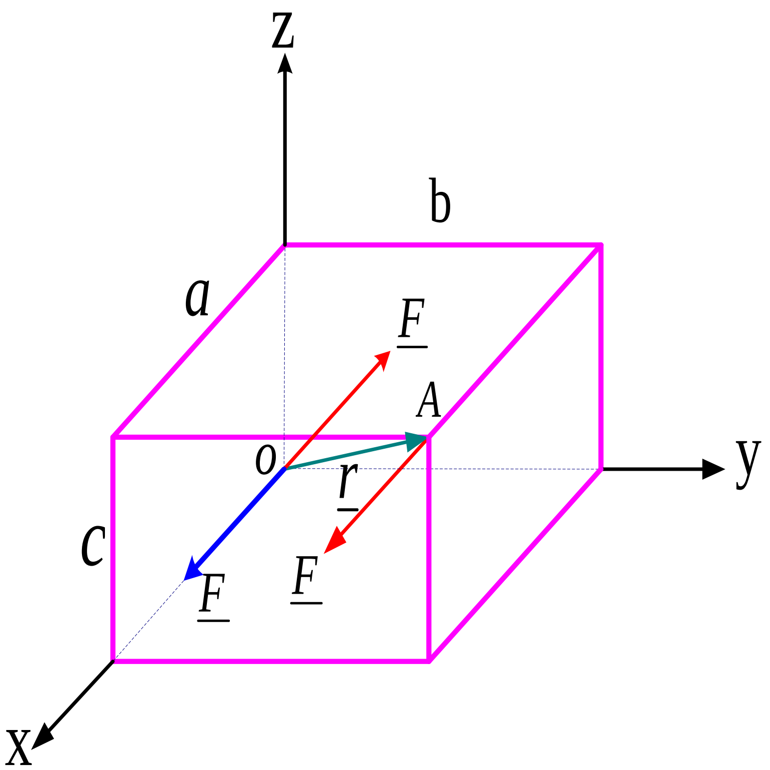
اثر زوج نیرو ایجاد گشتاور است.

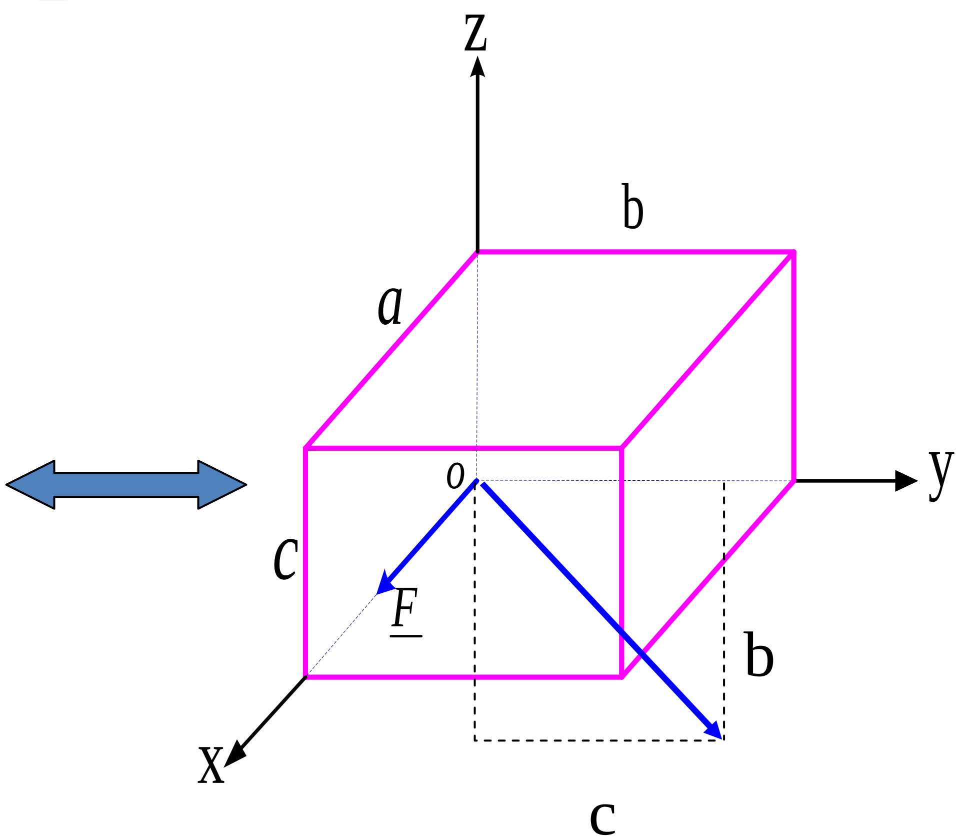


$$\underline{M}_O = \underline{r} \times \underline{F})_A \qquad \underline{r} = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k} \qquad F)_A = F\underline{i}$$

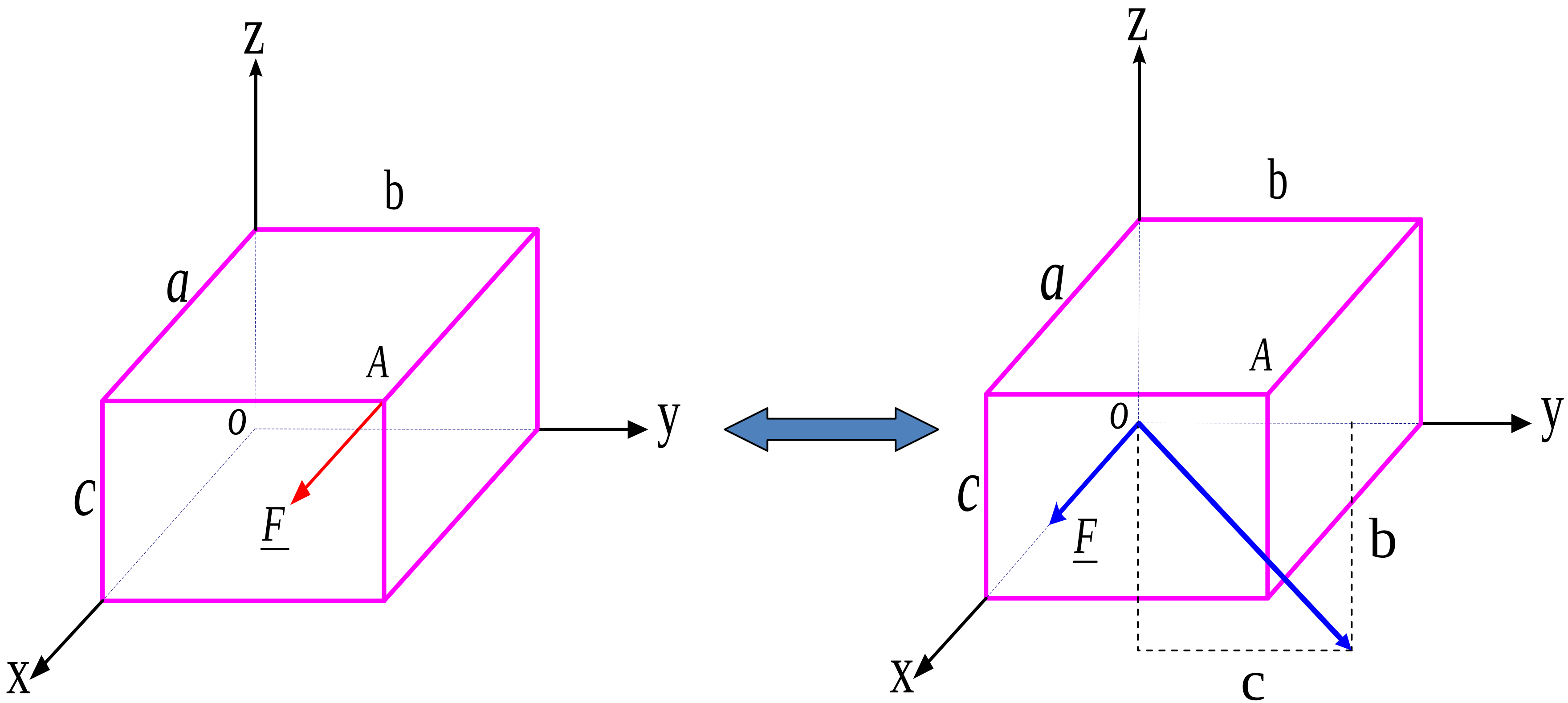
$$\underline{M}_O = \underline{r} \times \underline{F})_A = (a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k}) \times F\underline{i} = F(c\underline{j} - b\underline{k})$$

$$\underline{M}_O . \underline{F} = F(c\underline{j} - b\underline{k}).(F\underline{i}) = 0$$

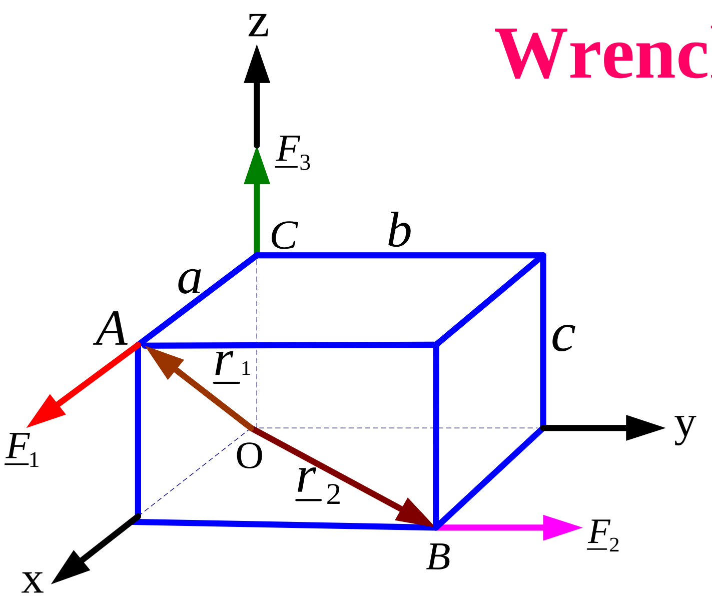


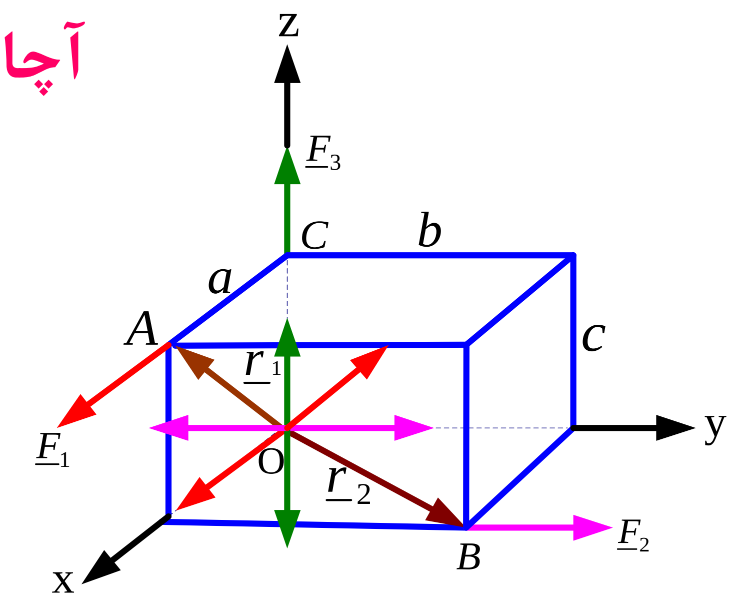


می توان نیرویی را که بنقطه ای از جسم وارد شده با یک نیرو و بردار کوپل در هر نقطه مفروضی تعویض کرد.نیروی تعویضی وبردار کوپل بر هم عمودند. بالعکس اگر یک نیرو و کوپل عمود بر هم داشته باشیم می توانیم آنها را با یک نیرو تعویض کنیم.



Wrench آچار

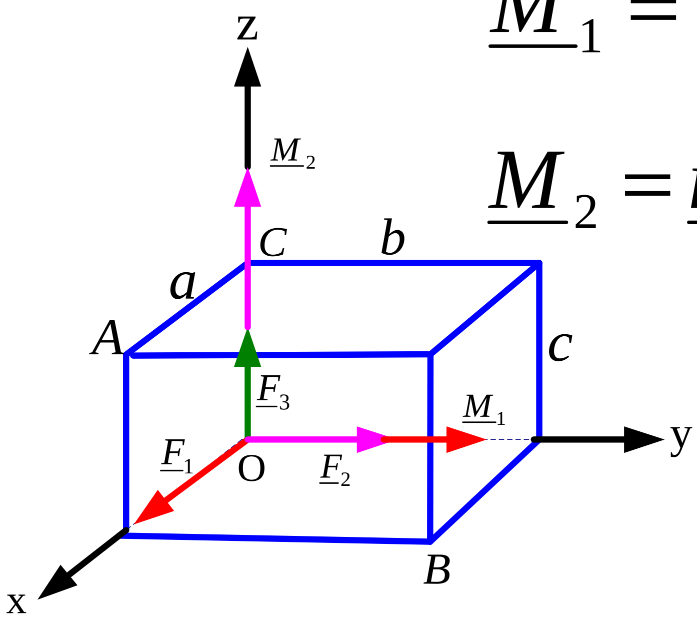




$$\underline{M}_1 = \underline{r}_1 \times \underline{F}_1 = \left(a\underline{i} + c\underline{k}\right) \times F_1 \underline{i} = cF_1 \underline{j}$$

$$\underline{M}_2 = \underline{r}_2 \times \underline{F}_2 = \left(a\underline{i} + b\underline{j}\right) \times F_2 \underline{j} = aF_2 \underline{k}$$

$$\underline{M}_3 = 0$$

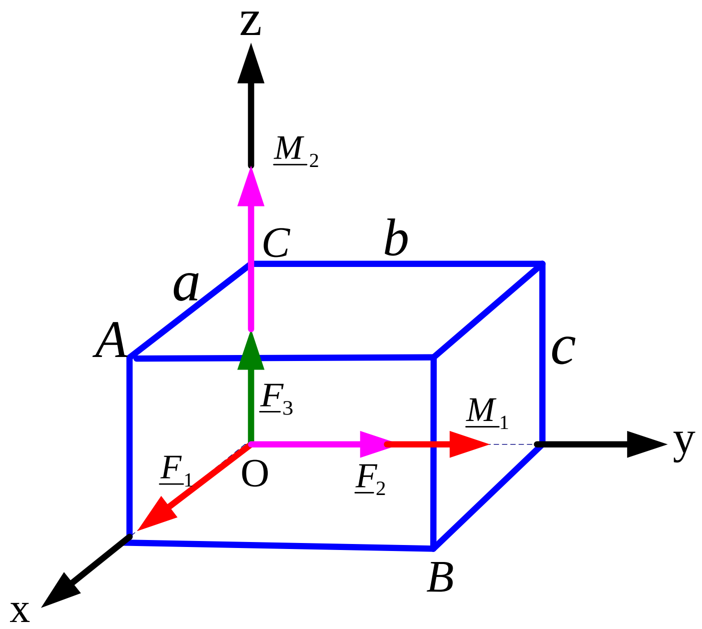


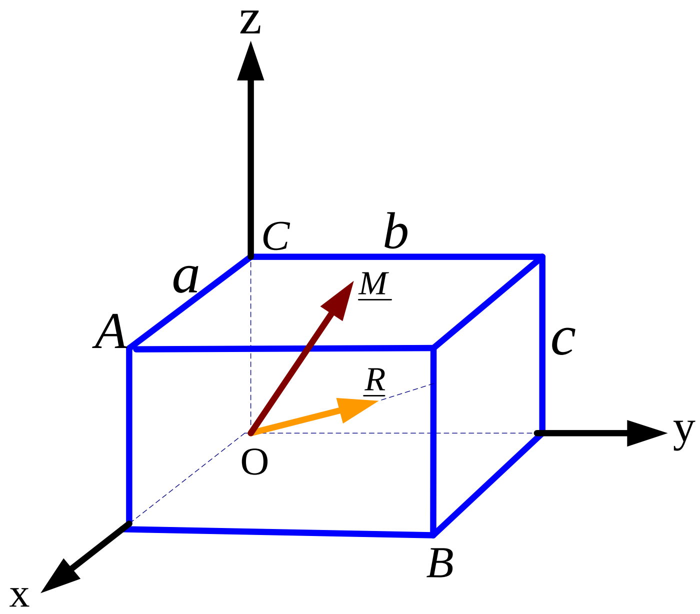
$$\underline{F}_1 = F_1\underline{i} \qquad \underline{F}_2 = F_2\underline{j} \qquad \underline{F}_3 = F_3\underline{k}$$

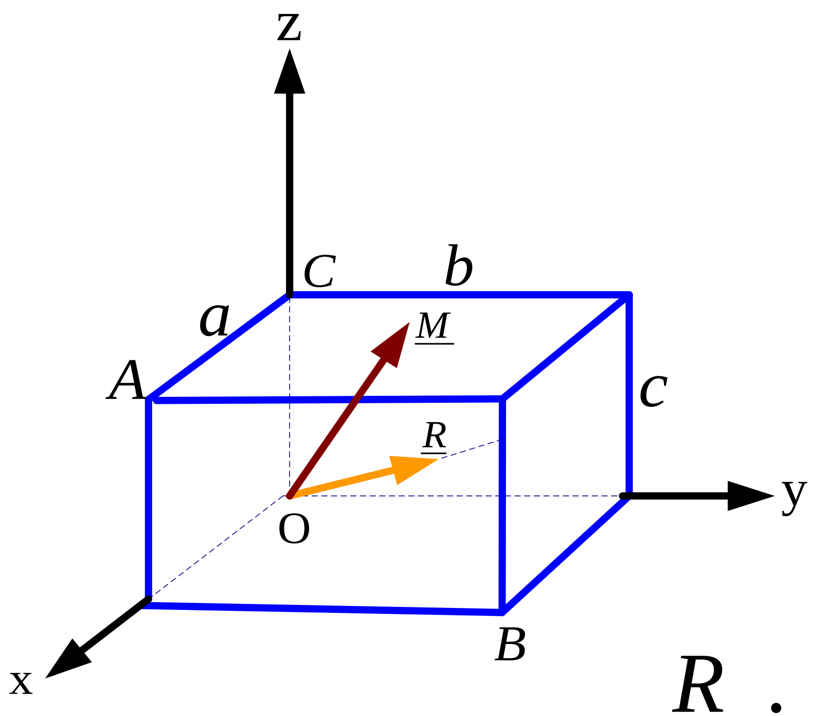
$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = \left(F_1\underline{i} + F_2\underline{j} + F_3\underline{k}\right)$$

$$\underline{M}_1 = cF_1\underline{j} \qquad \underline{M}_2 = aF_2\underline{k} \qquad \underline{M}_3 = 0$$

$$\underline{M} = \underline{M}_1 + \underline{M}_2 + \underline{M}_3 = \left(cF_1\underline{j} + aF_2\underline{k}\right)$$







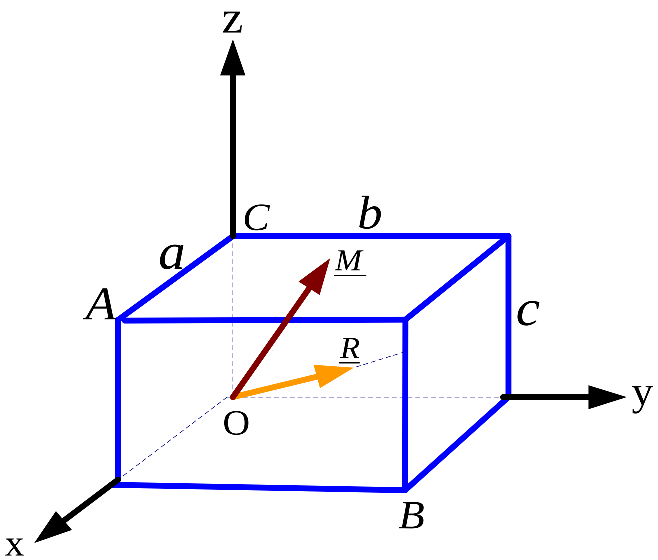
$$\underline{R} = F_1 \underline{i} + F_2 \underline{j} + F_3 \underline{k}$$

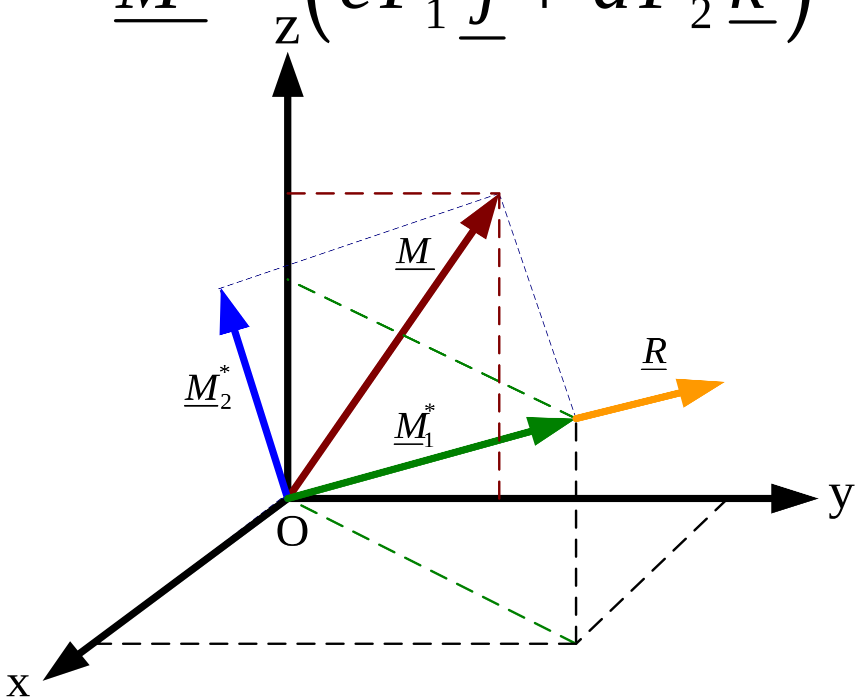
$$\underline{M} = \left(cF_1 \underline{j} + aF_2 \underline{k} \right)$$

$$\underline{R} \,.\, \underline{M} = F_2 \left(cF_1 + aF_3 \right) \neq 0$$

هر نیرو و بردار کوپل مربوط به خودش بر هم عمودند لیکن بردار های برآیند نیروها و برآیند کوپل ها بر هم عمود نیستند

$$\underline{R} = F_1\underline{i} + F_2\underline{j} + F_3\underline{k} \qquad \underline{M} = \left(cF_1\underline{j} + aF_2\underline{k}\right)$$



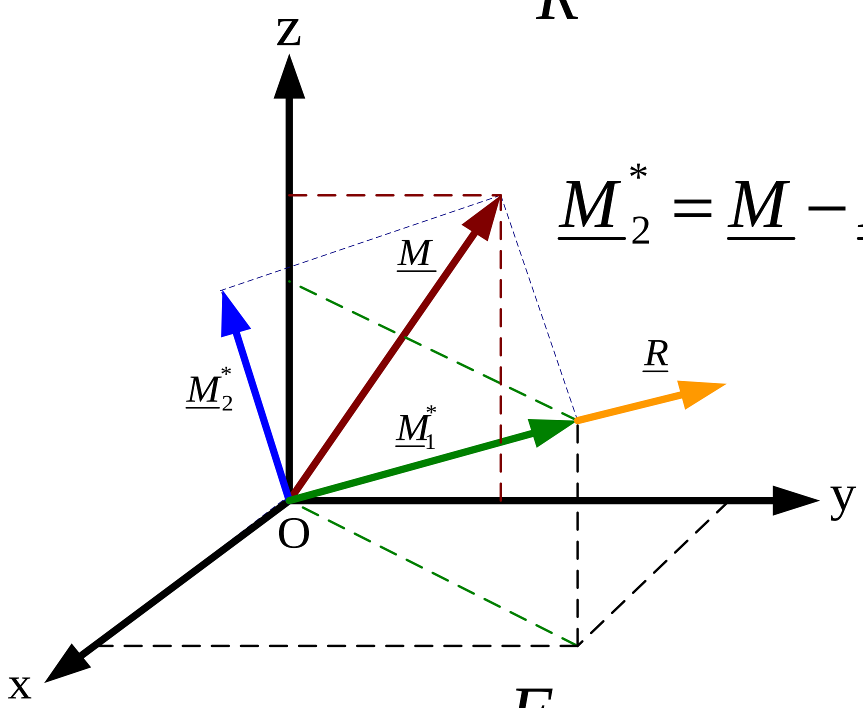


$$\underline{M} = \underline{M}_1^* + \underline{M}_2^* \qquad \underline{\lambda}_R = \frac{\underline{R}}{R} = \frac{F_1\underline{i} + F_2\underline{j} + F_3\underline{k}}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}}$$

$$M_1^* = \underline{\lambda}_R . \underline{M} = \frac{F_2}{R}\left(cF_1 + aF_3\right)$$

$$\underline{M}_1^* = M_1^* \underline{\lambda}_R = \frac{F_2}{R^2}\left(cF_1 + aF_3\right)\underline{R}$$

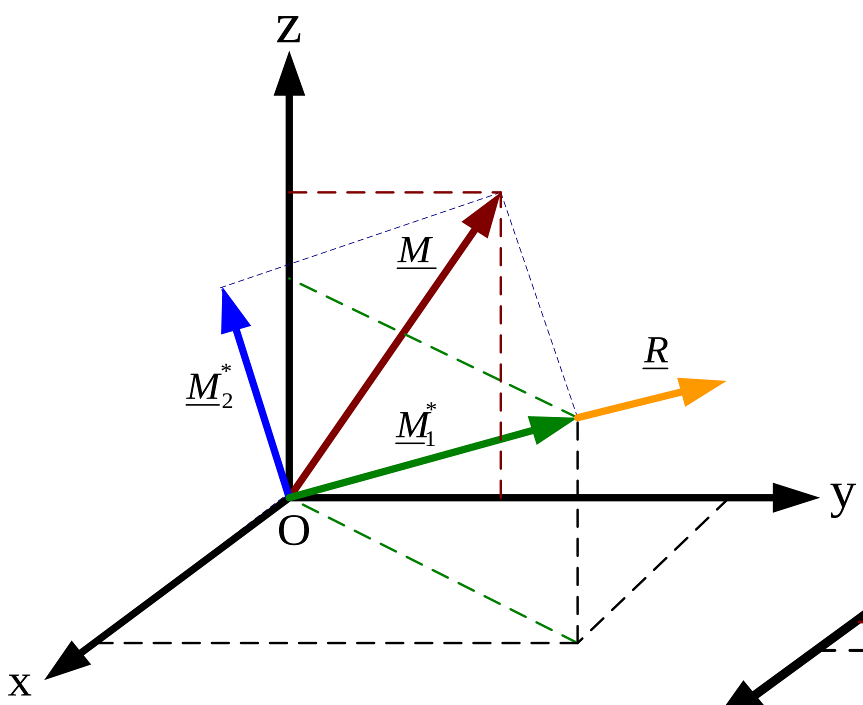
$$\underline{M}_1^* = M_1^* \underline{\lambda}_R = \frac{F_2}{R^2}(cF_1 + aF_3)\underline{R} \qquad \underline{M} = \left(cF_1 \underline{j} + aF_2 \underline{k}\right)$$

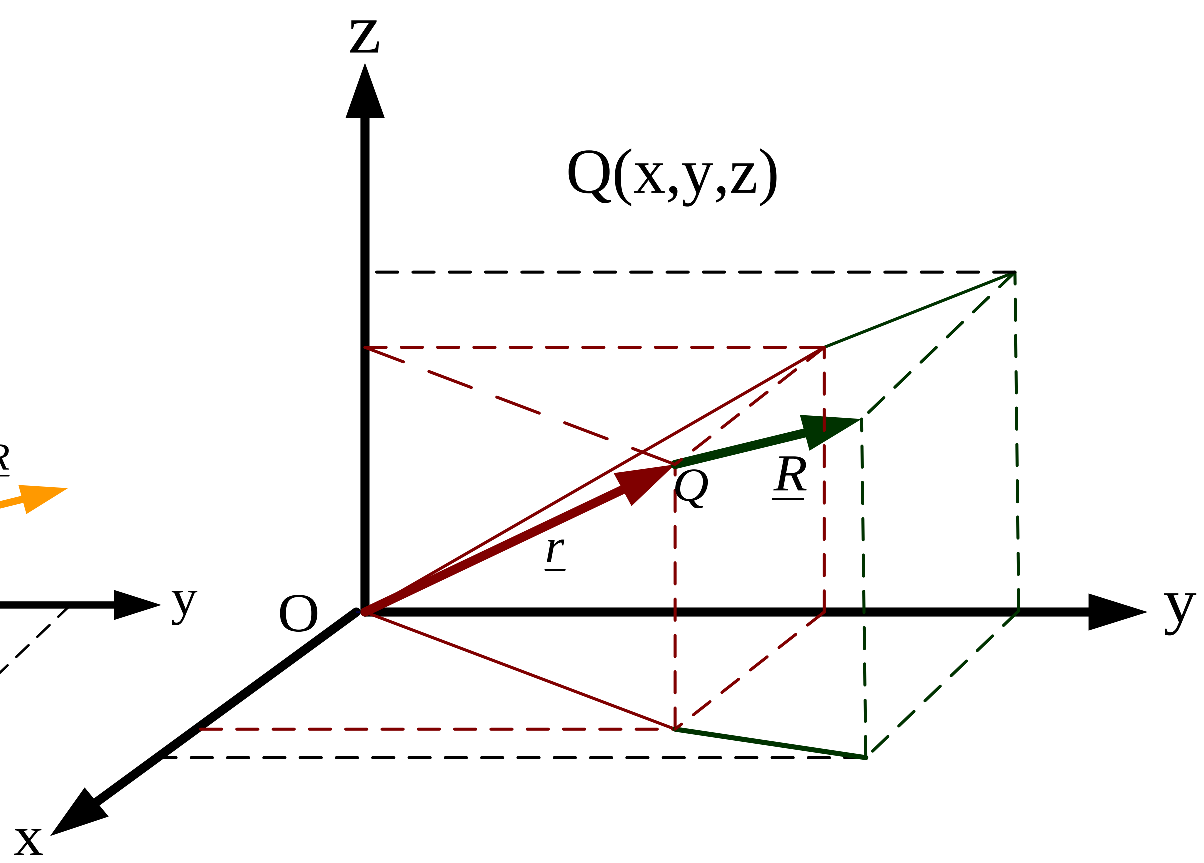


$$\underline{M}_2^* = \underline{M} - \underline{M}_1^* = cF_1 \underline{j} + aF_2 \underline{k} - \frac{F_2}{R^2}(cF_1 + aF_3)\underline{R}$$

$$\underline{M}_2^* = -\frac{F_2}{R^2}\left(cF_1 + aF_3\right) F_1 \underline{i} + [cF_1 - \frac{F_2}{R^2}\left(cF_1 + aF_3\right) F_2]\underline{j}$$

$$+[aF_2 - \frac{F_2}{R^2}\left(cF_1 + aF_3\right) F_3]\underline{k}$$





$$\underline{R} = F_1\,\underline{i} + F_2\,\underline{j} + F_3\,\underline{k} \qquad \underline{r} = x\underline{i} + y\,\underline{j} + z\underline{k}$$

$$\underline{M}_2^* = \underline{r} \times \underline{R} = \left(x\underline{i} + y\,\underline{j} + z\underline{k}\right) \times \left(F_1\underline{i} + F_2\,\underline{j} + F_3\underline{k}\right)$$

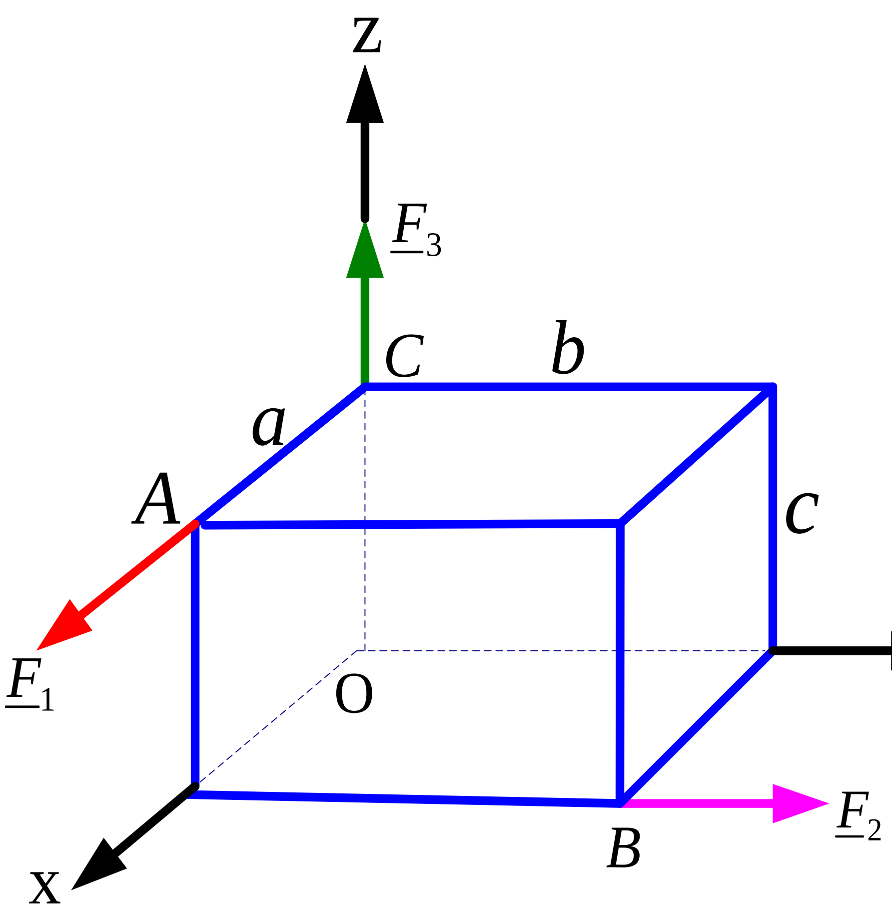
$$= (yF_3 - zF_2)\underline{i} + (zF_1 - xF_3)\,\underline{j} + (xF_2 - yF_1)\underline{k}$$

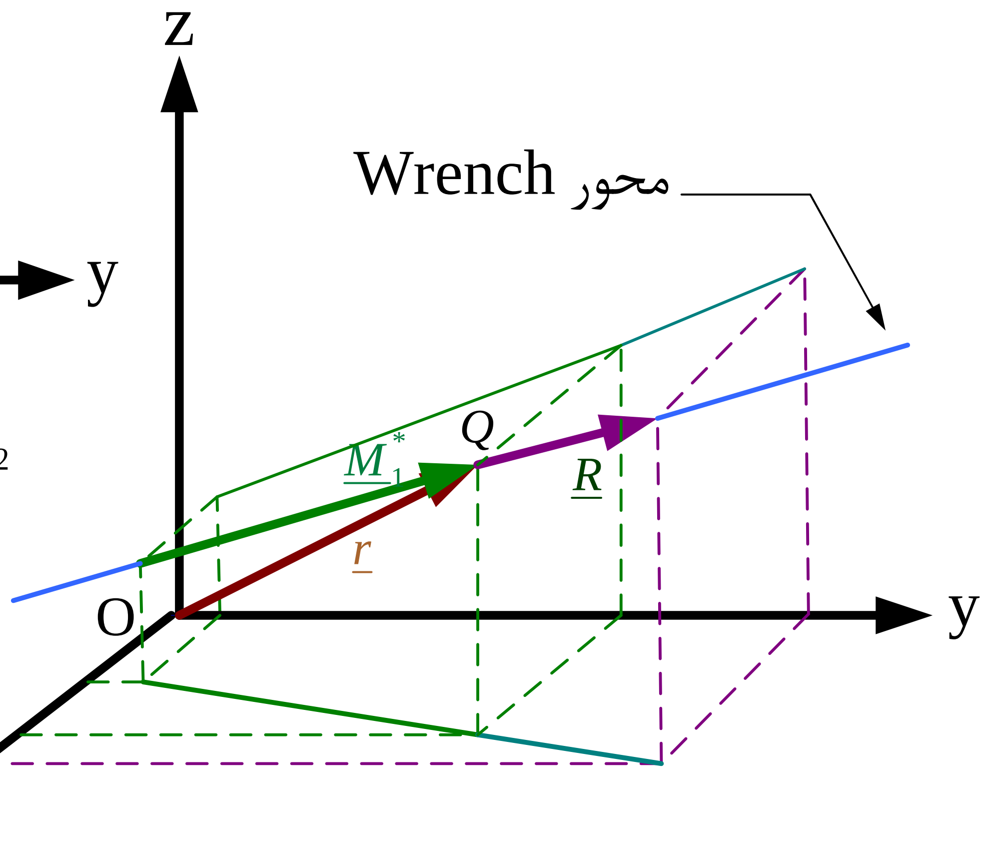
$$\underline{M}_2^* = (yF_3 - zF_2)\underline{i} + (zF_1 - xF_3)\underline{j} + (xF_2 - yF_1)\underline{k}$$

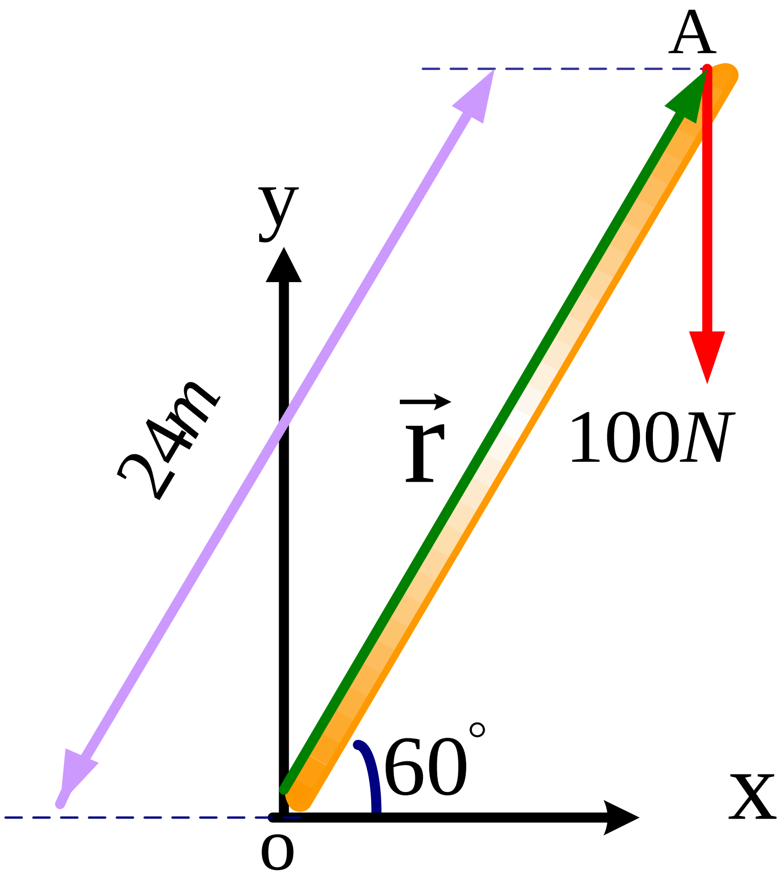
$$\underline{M}_2^* = cF_1\underline{j} + aF_2\underline{k} - \frac{F_2}{R^2}\left(cF_1 + aF_3\right)\underline{R}$$

$$\underline{M}_2^* = -\frac{F_2}{R^2}\left(cF_1 + aF_3\right)F_1\underline{i} + [cF_1 - \frac{F_2}{R^2}\left(cF_1 + aF_3\right)F_2]\underline{j} + [aF_2 - \frac{F_2}{R^2}\left(cF_1 + aF_3\right)F_3]\underline{k}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{F_2}{R^2}\left(cF_1 + aF_3\right)F_1 = yF_3 - zF_2 \\ cF_1 - \dfrac{F_2}{R^2}\left(cF_1 + aF_3\right)F_2 = zF_1 - xF_3 \\ aF_2 - \dfrac{F_2}{R^2}\left(cF_1 + aF_3\right)F_3 = xF_2 - yF_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{F_2}{R^2 F_3}\left(cF_1 + aF_3\right)F_2 - c\dfrac{F_1}{F_3} \\ y = -\dfrac{F_1 F_2}{R^2 F_3}\left(cF_1 + aF_3\right) \\ z = 0 \end{cases}$$


z
$\underline{F}_3$
C
b
a
A
c
y
$\underline{F}_1$
O
$\underline{F}_2$
x
B


z
Wrench محور
Q
$\underline{M}_1^*$
$\underline{R}$
$\underline{r}$
O
y
x



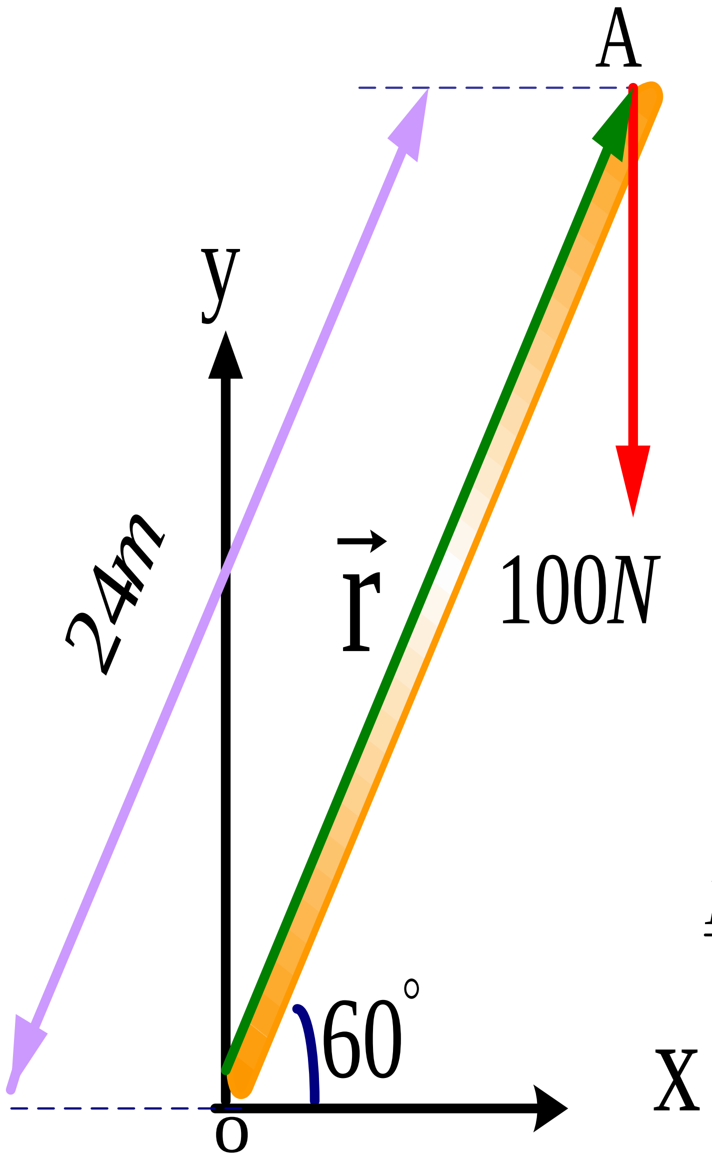
مثال: برای میله OA مطابق شکل که در نقطـه A تحت تاثیر نیـروی صـد نیـوتن (100N) قـرار دارد مطلوب است:

الف) گشتاور نیروی 100N حول نقطه O.

ب) بزرگی نیرویی که به طور افقی در نقطه A اعمال شود و همان گشتاور را حول نقطه O ایجاد نماید.

ج) کوچکترین نیروی اعمال شده در نقطه A که همان گشتاور را حول نقطه O ایجاد کند.

د) چنانچه در نقطه ای از میله OA نیرویی با بزرگی 240N و در امتداد عمودی اعمال کنیم فاصله این نقطه از O چقدر باید باشد تا گشتاوری برابر با همان گشتاور قبلی ایجاد کند؟

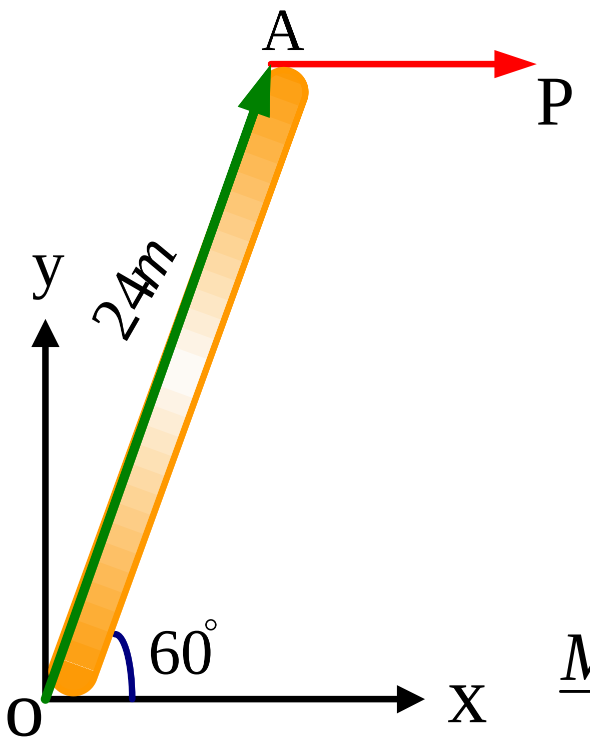


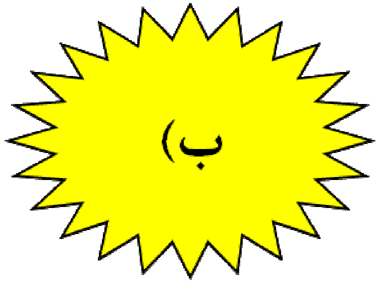
الف)

$$\underline{F} = -100\,\underline{j}$$

$$\underline{r} = 24\cos 60\,\underline{i} + 24\sin 60\,\underline{j} = 12(\underline{i} + \sqrt{3}\,\underline{j})$$

$$\underline{M}_o = \underline{r} \times \underline{f} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 12 & 12\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -100 & 0 \end{vmatrix} = -1200\ \underline{k}\ \ (N.m)$$





$$\underline{M} = \underline{r} \times \underline{p}$$

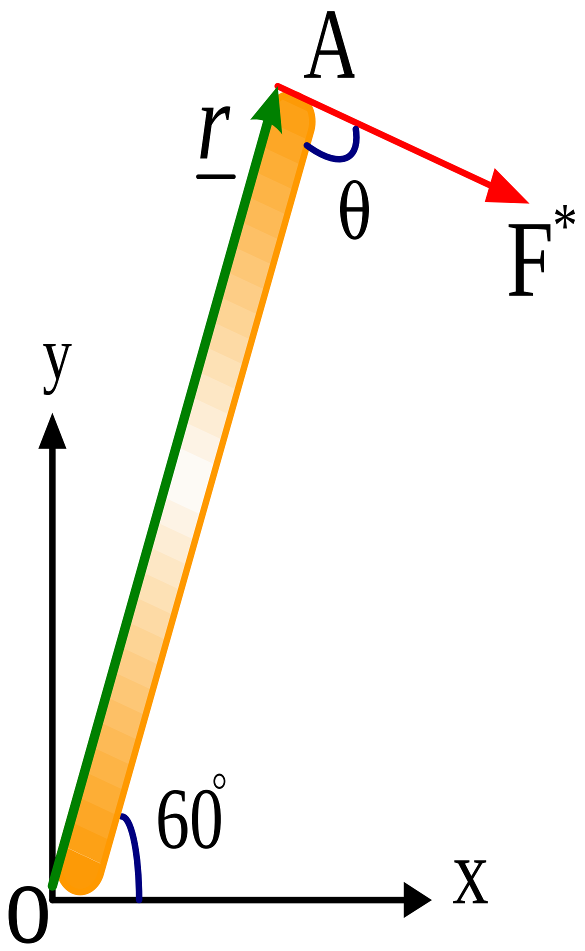
$$\underline{p} = p\,\underline{i}$$

$$\underline{r} = 12\,(\underline{i} + \sqrt{3}\,\underline{j})$$

$$\underline{M} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 12 & 12\sqrt{3} & 0 \\ p & 0 & 0 \end{vmatrix} = -12\sqrt{3}p\,\underline{k} = -1200\underline{k}$$

$$p = \frac{1200}{12\sqrt{3}} = \frac{100\sqrt{3}}{3}\,N$$

ج)



$$\underline{M}_o = \underline{r} \times \underline{\overset{*}{F}} \qquad M_o = r\overset{*}{F}\sin\theta$$

$$\overset{*}{F} = \frac{M_o}{r\sin\theta}$$

r و M_o ثابت اند

برای اینکه $\overset{*}{F}$ کمترین مقدار باشد

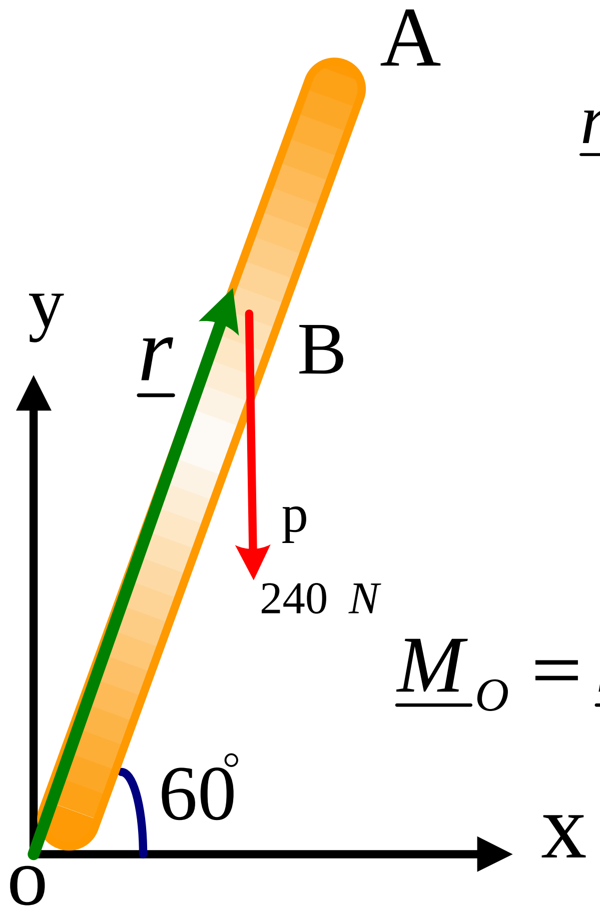
$\sin\theta$ باید بیشترین مقدار خود را داشته باشد.

$$\sin\theta = 1 \rightarrow \theta = \pi/2$$

$$\underline{\overset{*}{F}} = \overset{*}{F}(\cos 30^\circ \underline{i} - \sin 30^\circ \underline{j}) \qquad \underline{r} = 12(\underline{i} + \sqrt{3}\,\underline{j})$$

$$\underline{M}_O = \underline{r} \times \underline{\overset{*}{F}} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 12 & 12\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3}/2\,\overset{*}{F} & -\overset{*}{F}/2 & 0 \end{vmatrix} = (-6\overset{*}{F} - 18\overset{*}{F})\underline{k}$$

$$24\overset{*}{F} = 1200 \Rightarrow \overset{*}{F} = 50\,N$$



(د

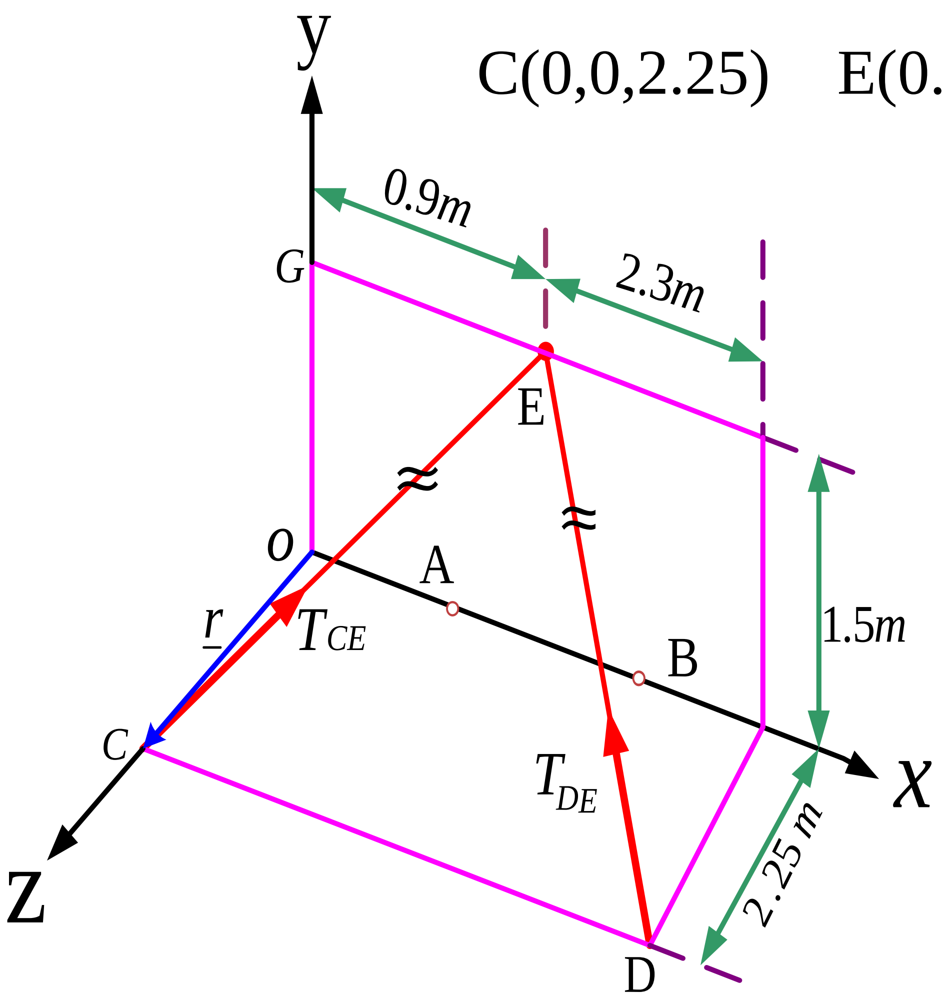
$$\underline{r} = r(\cos 60\,\underline{i} + \sin 60\,\underline{j})$$

$$\underline{p} = -p\,\underline{j} = -240\,\underline{j}$$

$$\underline{M}_O = \underline{r} \times \underline{p} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ r/2 & -\sqrt{3}/2\; r & 0 \\ 0 & -240 & 0 \end{vmatrix} = -120r\underline{k}$$

$$120\,r = 1200 \rightarrow r = 10\,m$$

مثال: یک سکوی مستطیلی در نقاط A , B مفصل شده و به وسیله کابلی که از حلقه بدون اصطکاک E می گذرد نگهداری شده است. کشش در کابل CE 1934N است.
مطلوب است گشتاور نیروی وارد شده بر کابل CE از نقطه Cحول مبدأ دستگاه مختصات.



C(0,0,2.25) E(0.9 , 1.5 , 0) $\underline{T}_{CE} = T_{CE}\,\underline{\lambda}_{CE}$

$$\underline{\lambda}_{CE} = \frac{0.9\underline{i} + 1.5\underline{j} - 2.25\underline{k}}{\sqrt{(0.9)^2 + (1.5)^2 + (2.25)^2}}$$

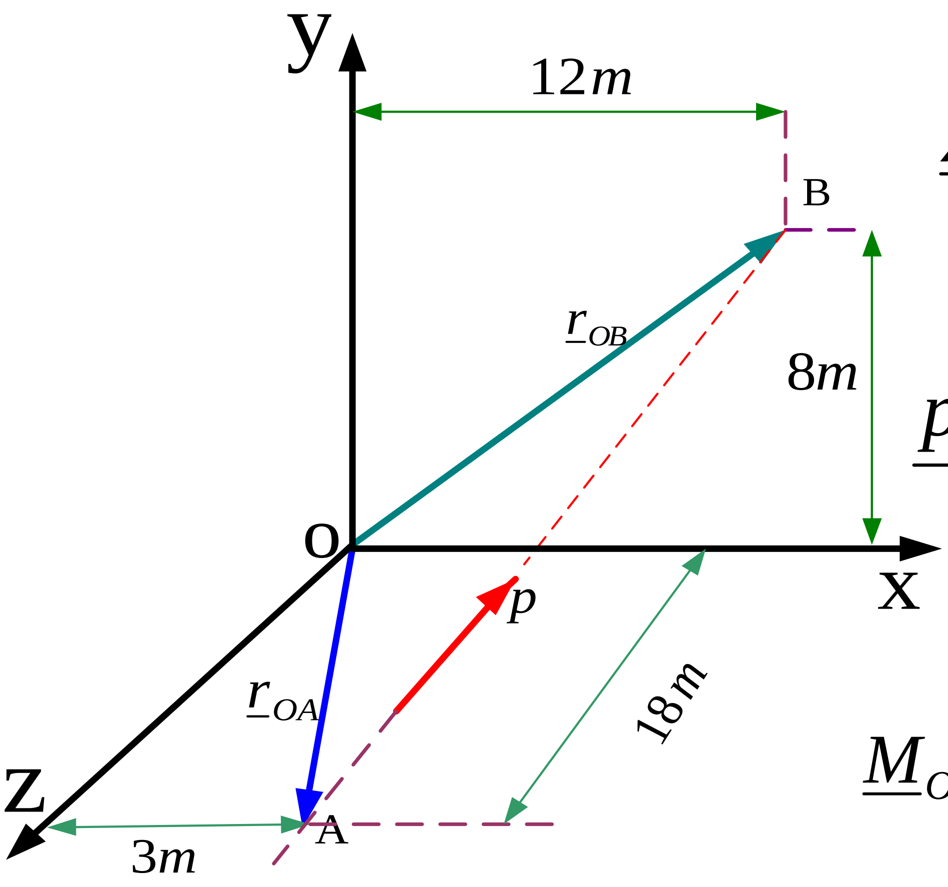
$$\underline{T}_{CE} = \frac{1934}{2.85} \times \left(0.9\underline{i} + 1.5\underline{j} - 2.25\underline{k}\right)$$

$$\underline{r} = 2.25\ \underline{k}$$

$$\underline{M}_O = \underline{r} \times \underline{T}_{CE} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 0 & 2.25 \\ 425.9 & 709.9 & -1064.9 \end{vmatrix} = -1597.2\underline{i} + 958.2\underline{j}$$

مثال: خط اثر نیروی P که برابر با 420Nاست از دو نقطه A , B مطابق شکل می گذرد. فاصله قائم خط اثر P را از مبدأ مختصات (O) به دست آورید.

A(3,0,18)   B(12,8,0)



$$\underline{\lambda}_{AB}=\frac{9\underline{i}+8\underline{j}-18\underline{k}}{\sqrt{(9)^2+(8)^2+(18)^2}}$$

$$\underline{p}=p\underline{\lambda}_{AB}=\frac{420}{21.66}\left(9\underline{i}+8\underline{j}-18\underline{k}\right)$$

$$\underline{p}=(174.5\underline{i}+155.1\underline{j}-349\underline{k})$$

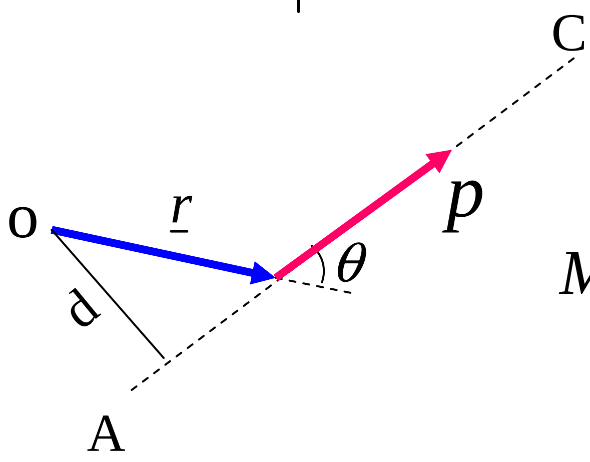
$$\underline{M}_O=\underline{r}_{OA}\times\underline{p}=\underline{r}_{OB}\times\underline{p}$$

قابلیت انتقال نیرو

$$\underline{r}_{OA} = 3\underline{i} + 18\underline{k} \qquad \underline{r}_{OB} = 12\underline{i} + 8\underline{j}$$

$$\underline{M}_O = \underline{r}_{OA} \times \underline{p} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & 0 & 18 \\ 174.5 & 155.1 & -349 \end{vmatrix} = -2792\underline{i} + 4188\underline{j} + 465\underline{k}$$

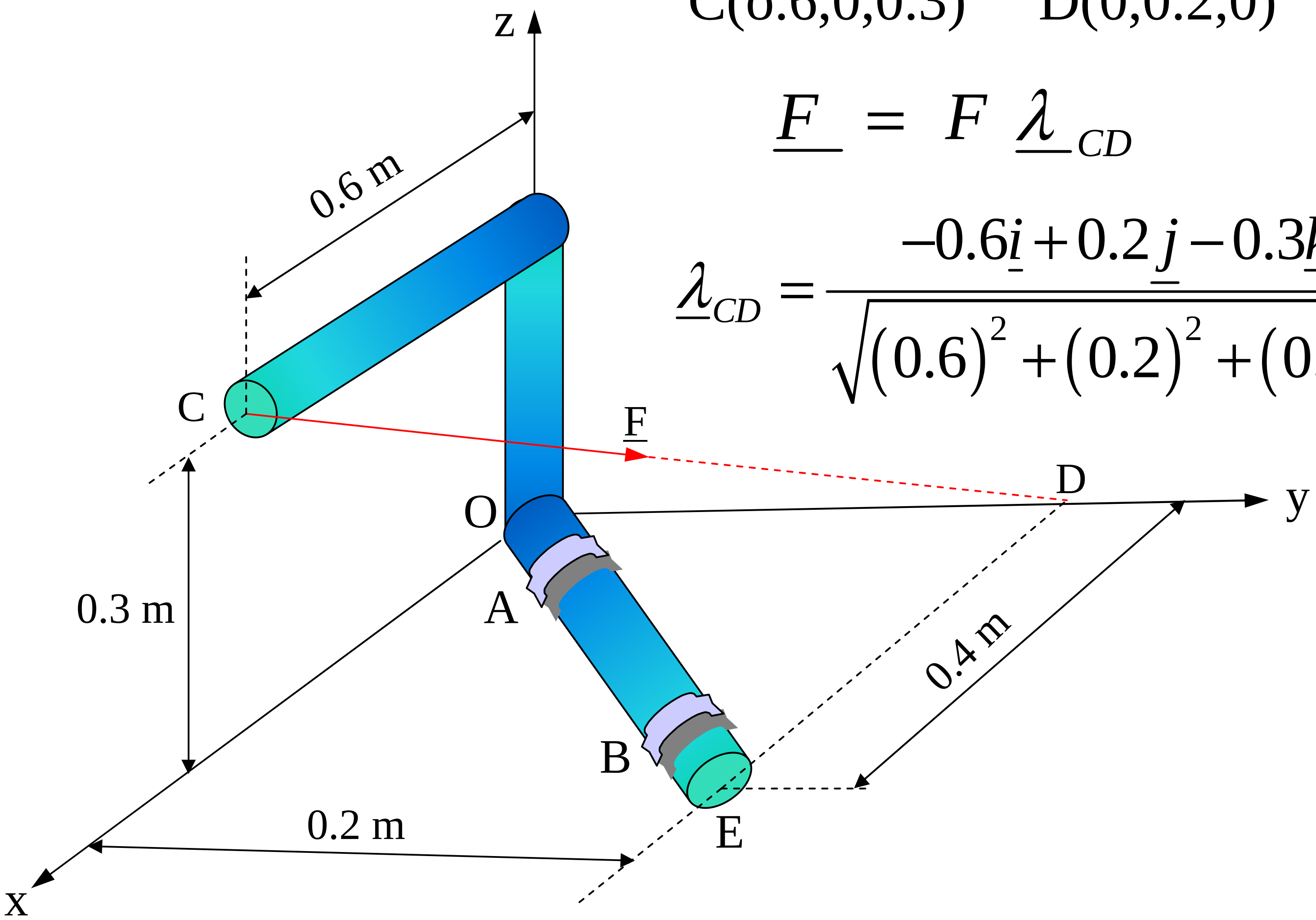
$$\underline{M}_O = \underline{r}_{OB} \times \underline{p} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 12 & 8 & 0 \\ 174.5 & 155.1 & -349 \end{vmatrix} = -2792\underline{i} + 4188\underline{j} + 465\underline{k}$$



$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = pr\sin\theta = pd$$

$$M_O = 5054.78 \qquad d = \frac{M_O}{p} = 12 \text{ m}$$

مثال: میله نشان داده شده در شکل به وسیله دو یاتاقان A , B نگهداری شده است در صورتیکه بزرگی نیروی F، 700N باشد گشتاور نیروی F را حول محور AB پیدا کنید.



C(o.6,0,0.3)   D(0,0.2,0)

$$\underline{F} = F\,\underline{\lambda}_{CD}$$

$$\underline{\lambda}_{CD} = \frac{-0.6\underline{i} + 0.2\,\underline{j} - 0.3\underline{k}}{\sqrt{(0.6)^2 + (0.2)^2 + (0.3)^2}}$$

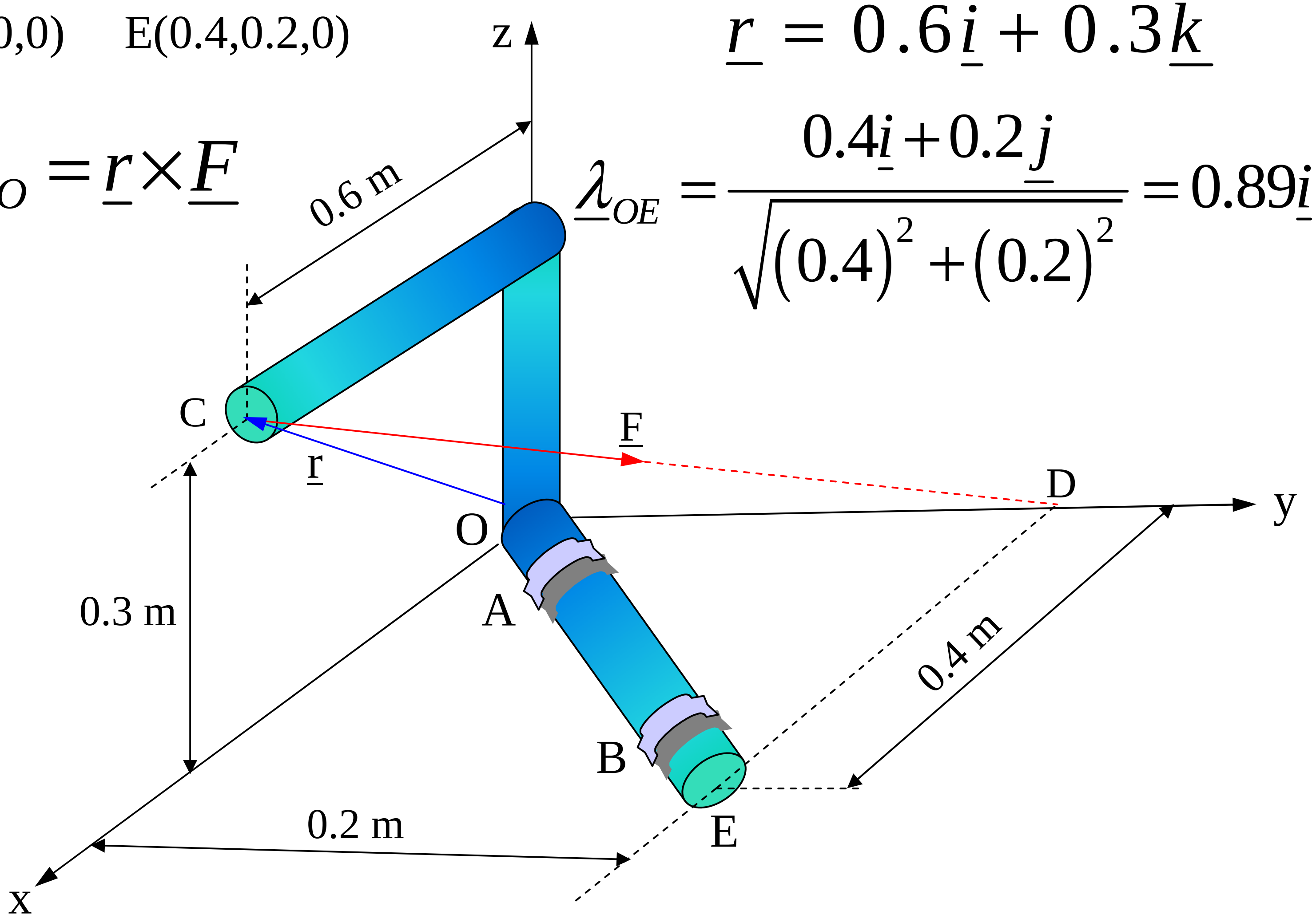
$$\underline{F} = (700)\frac{-0.6\underline{i} + 0.2\underline{j} - 0.3\underline{k}}{0.7} = -600\underline{i} + 200\underline{j} - 300\underline{k}$$

O(0,0,0)   E(0.4,0.2,0)

$$\underline{r} = 0.6\underline{i} + 0.3\underline{k}$$

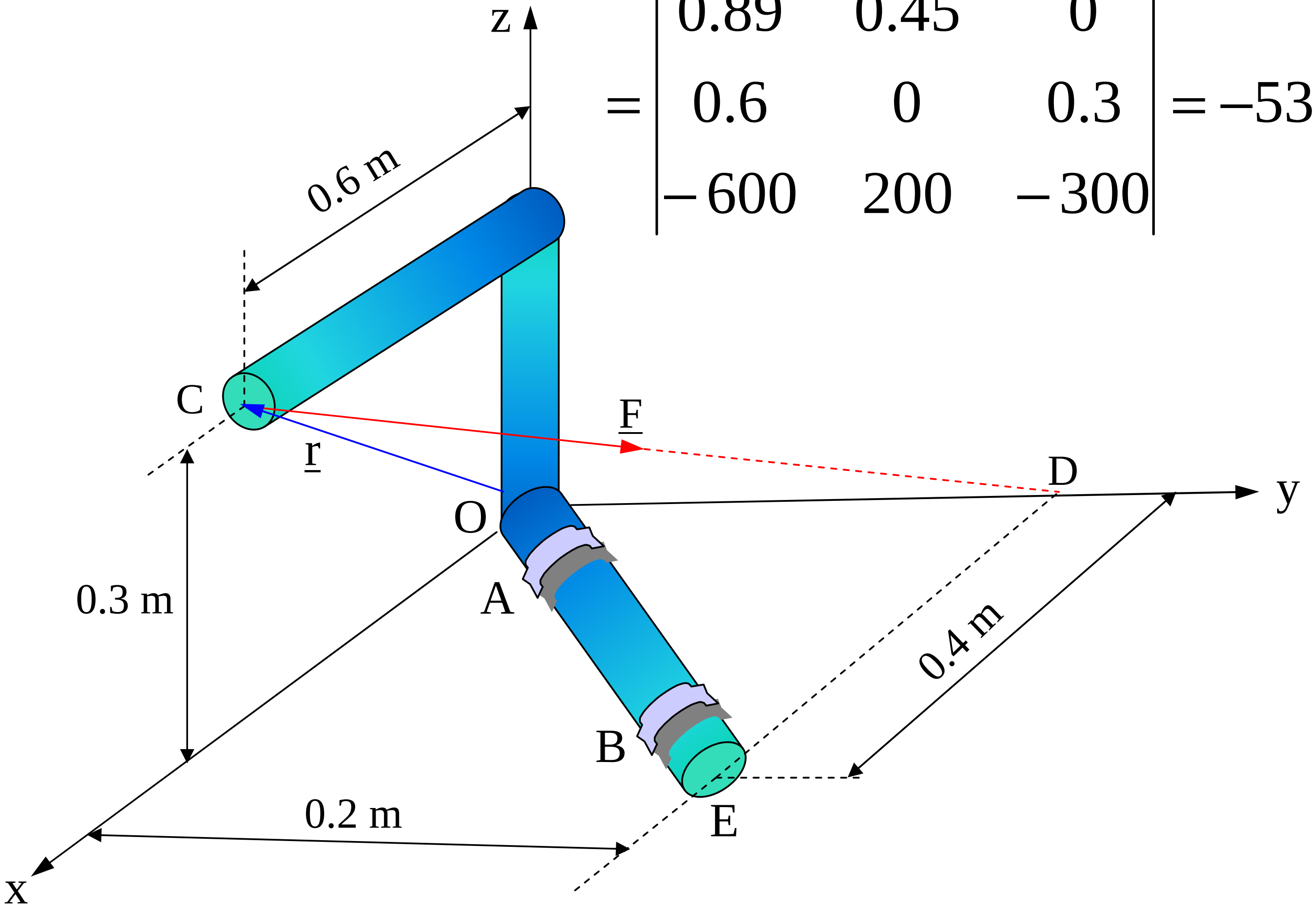
$$\underline{M}_O = \underline{r} \times \underline{F}$$

$$\underline{\lambda}_{OE} = \frac{0.4\underline{i} + 0.2\underline{j}}{\sqrt{(0.4)^2 + (0.2)^2}} = 0.89\underline{i} + 0.45\underline{j}$$

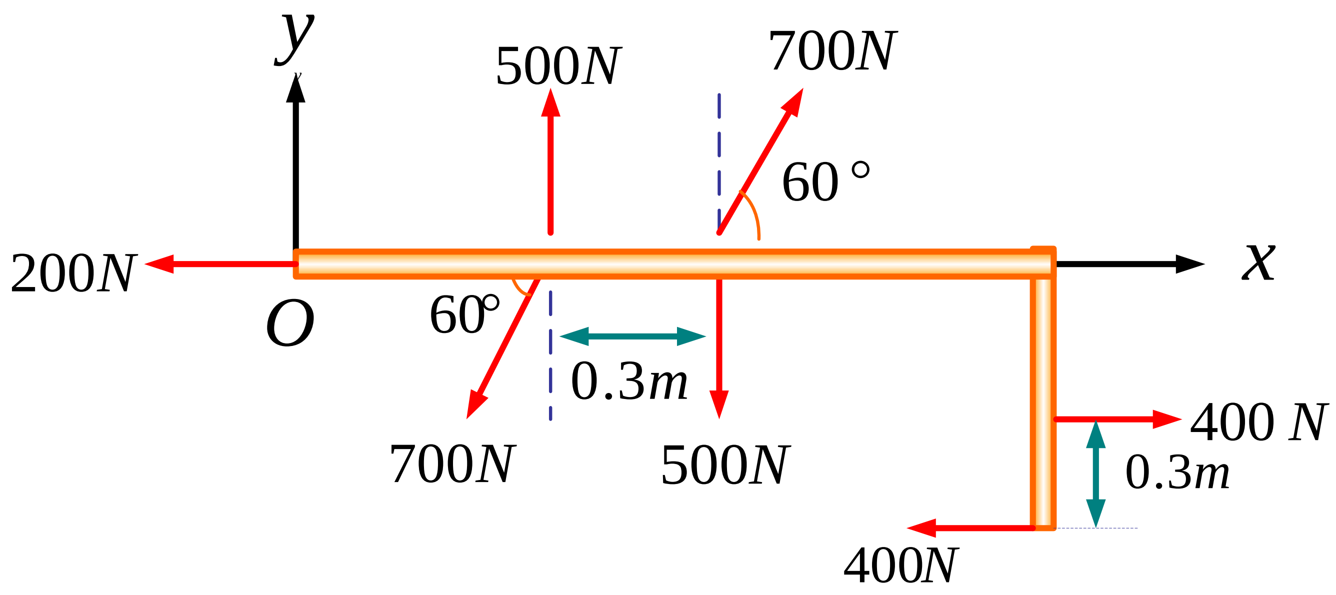


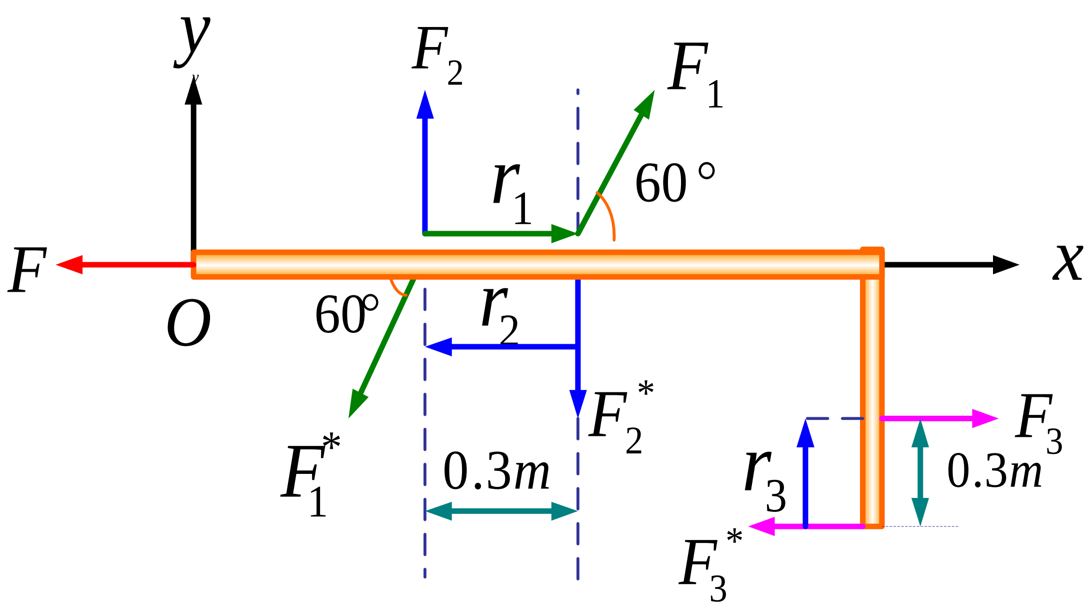
$$M_{AB} = \underline{\lambda}_{OE} \cdot \underline{M}_O = \underline{\lambda}_{OE} \cdot (\underline{r} \times \underline{F})$$

$$= \begin{vmatrix} 0.89 & 0.45 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.3 \\ -600 & 200 & -300 \end{vmatrix} = -53.6\, N.m$$



مثال: سیستم نشان داده شده در شکل را با یک نیرو و بردار کوپل در نقطـه O تعویض کنید.



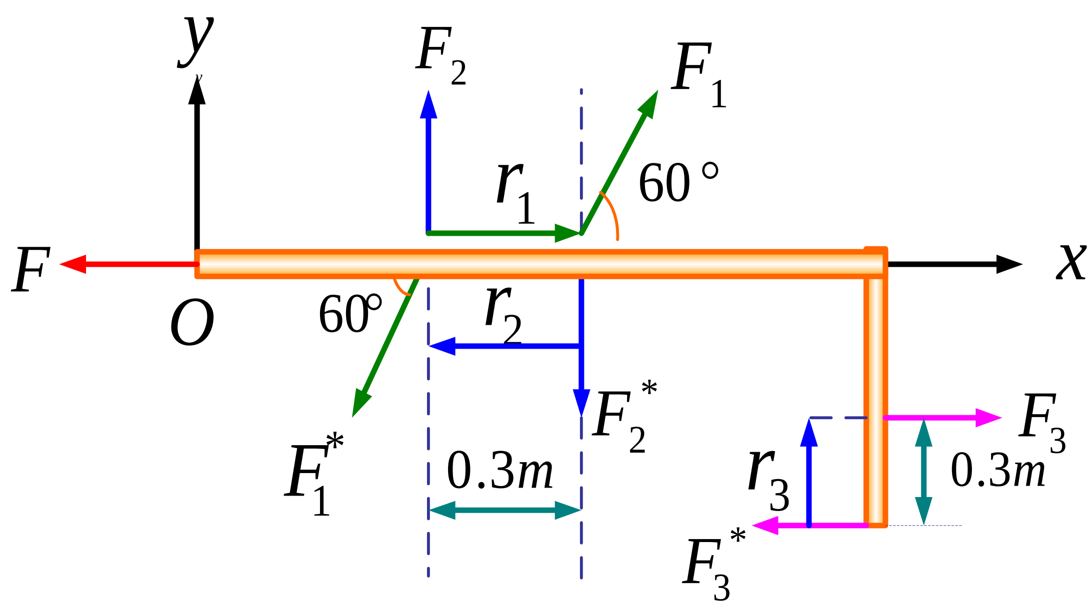


$F = 200N$ $\quad F_1 = F_1^* = 700N$ $\quad F_2 = F_2^* = 500N$ $\quad F_3 = F_3^* = 400N$

$\underline{F} = -200\,\underline{i}$ $\quad \underline{F}_1 = 700(\cos 60\underline{i} + \sin 60\,\underline{j})$ $\quad \underline{F}_2 = 500\,\underline{j}$

$\underline{F}_3 = 400\,\underline{i}$ $\quad \underline{R} = \underline{F} = -200\,\underline{i}$

$\underline{r}_1 = 0.3\underline{i}$ $\quad \underline{M}_1 = \underline{r}_1 \times \underline{F}_1 = 210\,\underline{i} \times (\cos 60\,\underline{i} + \sin 60\,\underline{j}) = 105\sqrt{3}\,\underline{k}$



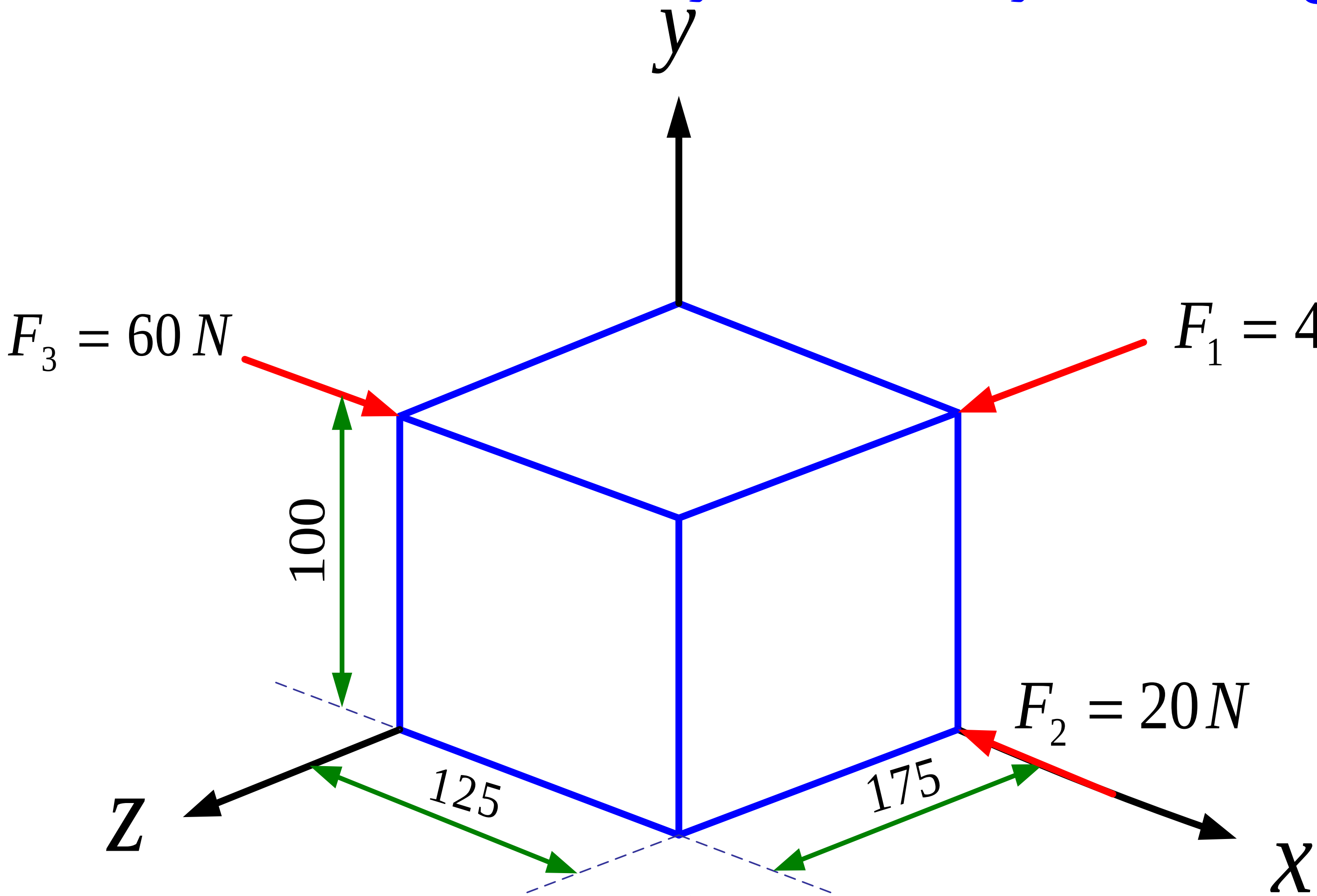
$$\underline{F}_2 = 500\,\underline{j} \qquad \underline{F}_3 = 400\,\underline{i}$$

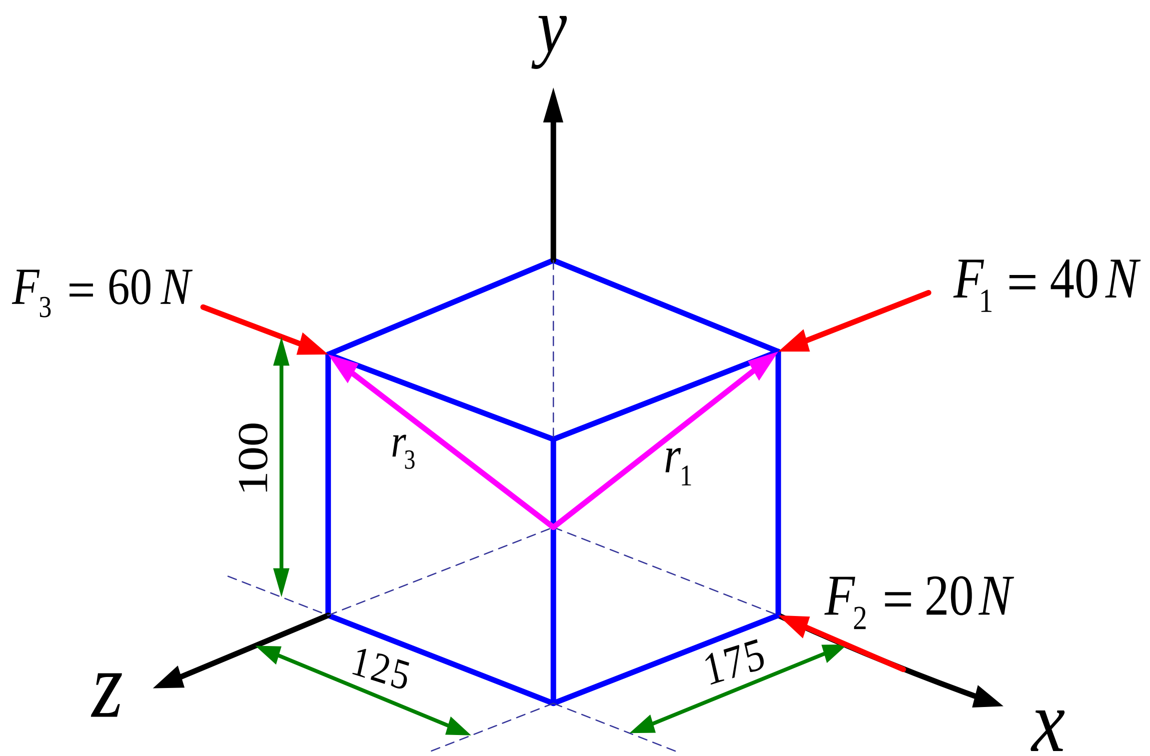
$$\underline{r}_2 = -0.3\underline{i} \qquad \underline{M}_2 = \underline{r}_2 \times \underline{F}_2 = -0.3\underline{i} \times 500\,\underline{j} = -150\underline{k}$$

$$\underline{r}_3 = 0.3\,\underline{j} \qquad \underline{M}_3 = 0.3\,\underline{j} \times 400\underline{i} = -120\underline{k}$$

$$\underline{M} = \underline{M}_1 + \underline{M}_2 + \underline{M}_3 = \left(-270 + 105\sqrt{3}\right)\underline{k} = -88.14\underline{k}$$

مثال: سه نیرو در امتداد یال های یک جسم مکعب مستطیل شکل اعمال میشوند. مطلوب است: 1- تعویض این نیروها با یک رنچ معادل 2-بزرگی و جهت برآیند R 3-نقطه ای که محور رنچ صفحه yz را قطع می کند. (ابعاد بر حسب میلیمتر هستند)



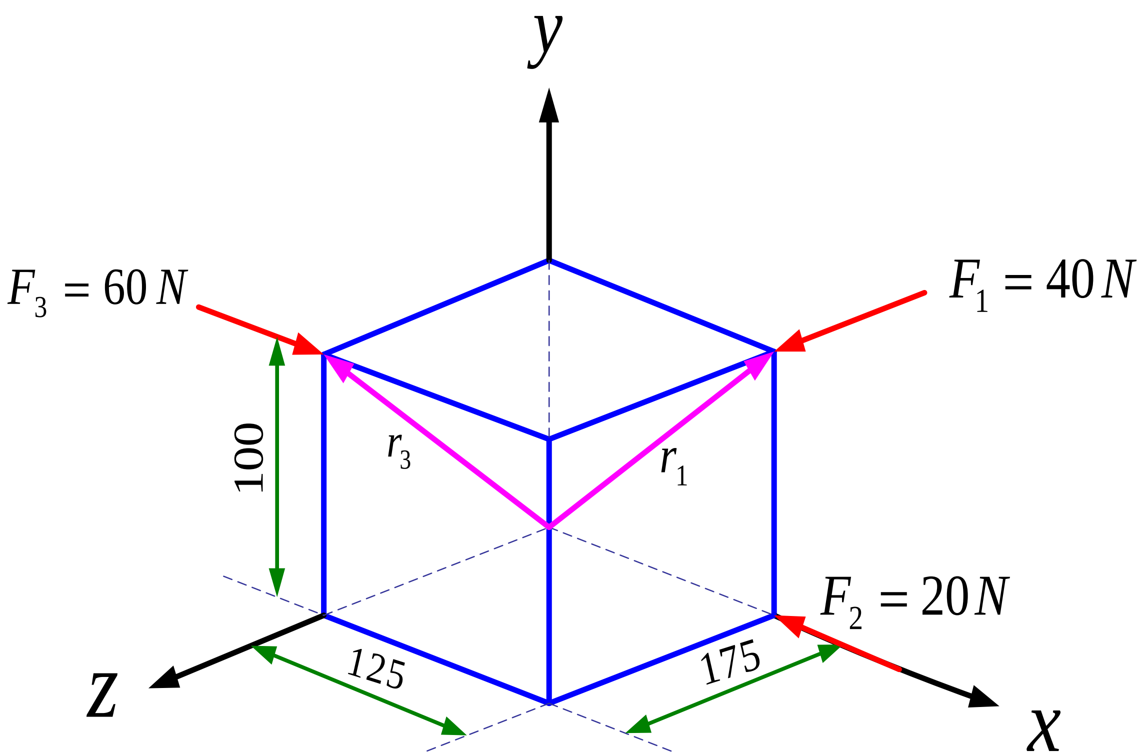


$$\underline{F}_1 = 40\ \underline{k} \qquad \underline{F}_2 = -20\ \underline{i} \qquad \underline{F}_3 = 60\ \underline{i}$$

$$\underline{R} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = 40\left(\underline{i} + \underline{k}\right)$$

$$\underline{r}_1 = 0.125\,\underline{i} + 0.1\,\underline{j}$$

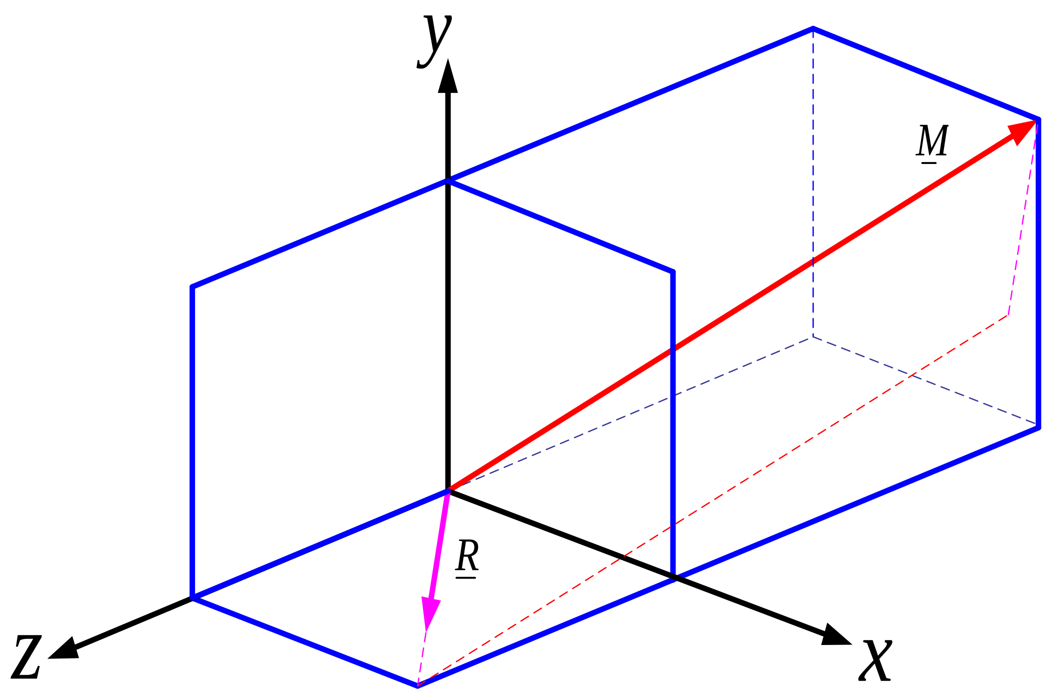
$$\underline{M}_1 = \underline{r}_1 \times \underline{F}_1 = \left(0.125\underline{i} + 0.1\,\underline{j}\right) \times (40)\ \underline{k} = -5\,\underline{j} + 4\underline{i}$$



$$\underline{M}_2 = 0 \qquad \underline{F}_3 = 60\,\underline{i} \qquad \underline{r}_3 = 0.1\,\underline{j} + 0.175\,\underline{k}$$

$$\underline{M}_3 = \underline{r}_3 \times \underline{F}_3 = \left(0.1\underline{j} + 0.175\underline{k}\right) \times 60\underline{i} = -6\underline{k} + 10.5\,\underline{j}$$

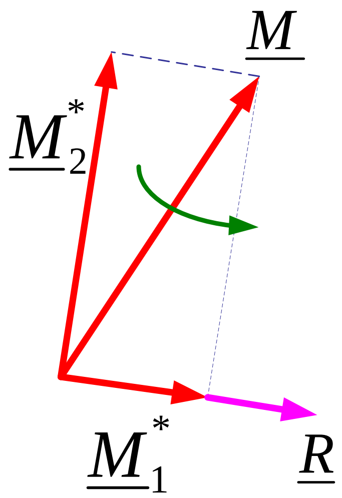
$$\underline{M} = \underline{M}_1 + \underline{M}_2 + \underline{M}_3 = 4\underline{i} + 5.5\,\underline{j} - 6\underline{k}$$



$$\underline{M} = 4\underline{i} + 5.5\underline{j} - 6\underline{k}$$

$$\underline{R} = 40\left(\underline{i} + \underline{k}\right)$$

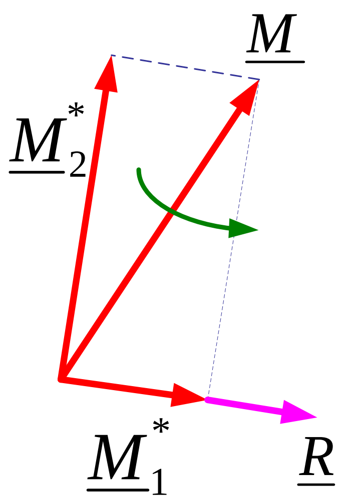
$$\underline{M} = \underline{M}_1^* + \underline{M}_2^*$$



$$\underline{\lambda} = \frac{\underline{R}}{\left|\underline{R}\right|} = \frac{40\left(\underline{i} + \underline{k}\right)}{40\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\underline{i} + \underline{k}\right)$$

$$M_1^* = \underline{M}.\underline{\lambda} = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

$$\underline{\overset{*}{M}}_1 = \overset{*}{M}_1\,\underline{\lambda} = -\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\underline{i} + \underline{k}\right)\right) = -\left(\underline{i} + \underline{k}\right)$$



$$\underline{R} = 40\left(\underline{i} + \underline{k}\right)$$

$$\overset{*}{\underline{M}}_1 = -(\underline{i} + \underline{k}) \qquad \underline{M} = 4\underline{i} + 5.5\underline{j} - 6\underline{k}$$

$$\overset{*}{\underline{M}}_2 = \underline{M} - \overset{*}{\underline{M}}_1 = 5\underline{i} + 5.5\underline{j} - 5\underline{k}$$

$$\overset{*}{\underline{M}}_2 = \underline{r} \times \underline{R} = 40\left(x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}\right) \times \left(\underline{i} + \underline{k}\right)$$

$$= 40y\,\underline{i} - 40\left(x - z\right)\underline{j} - 40y\,\underline{k}$$

$$\begin{cases} 40y = 5 \\ 40\left(x - z\right) = -5.5 \end{cases} \qquad x = 0 \Rightarrow \quad y = 1/8\ m \quad , \quad z = 11/88\ m$$

۳-تعادل جسم صلب

$$\begin{cases} \underline{R} = \sum \underline{F} = 0 \\ \sum \underline{M} = 0 \end{cases}$$

تعادل کامل

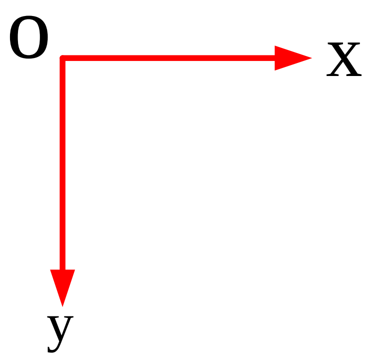
$$\sum \underline{F} = \sum F_x \underline{i} + \sum F_y \underline{j} + \sum F_z \underline{k} = 0$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

$$\sum \underline{M} = \sum M_x \underline{i} + \sum M_y \underline{j} + \sum M_z \underline{k} = 0$$

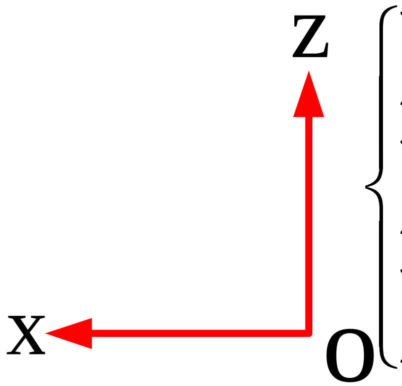
$$\begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

برای یک جسم صلب سه بعدی ۶ معادله اسکالر تعادل داریم:



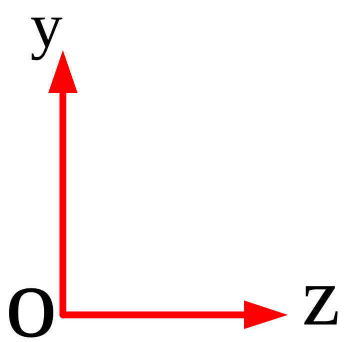
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum M_z = \sum M_O = 0 \end{cases}$$

برای یک جسم دوبعدی در صفحه xy



$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_z = 0 \\ \sum M_y = \sum M_O = 0 \end{cases}$$

در صفحه xz

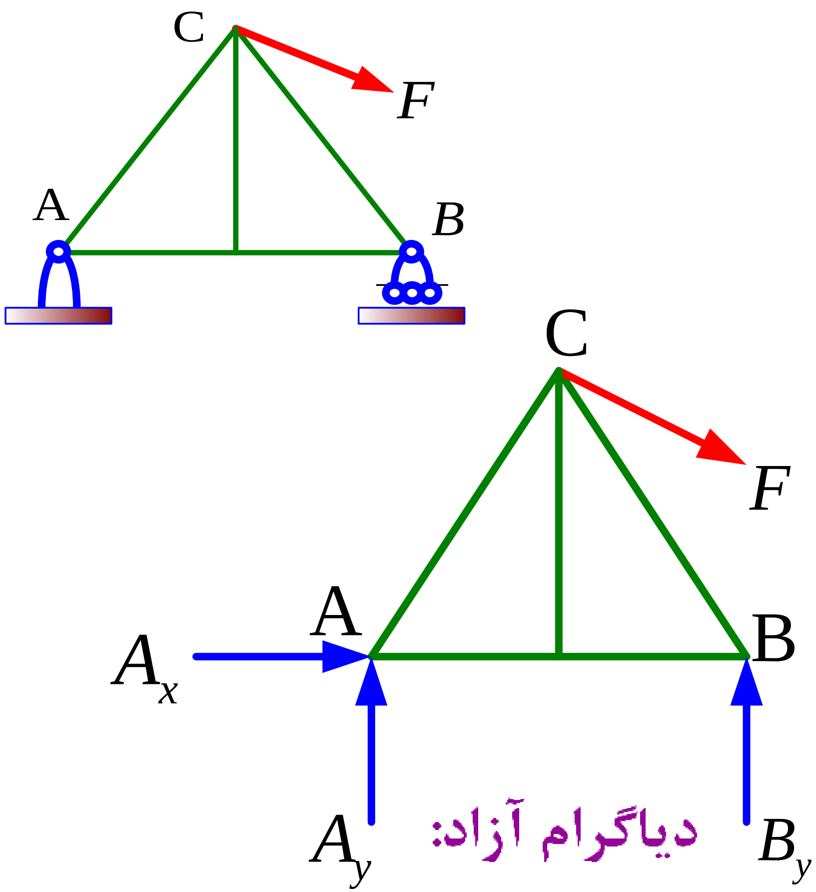


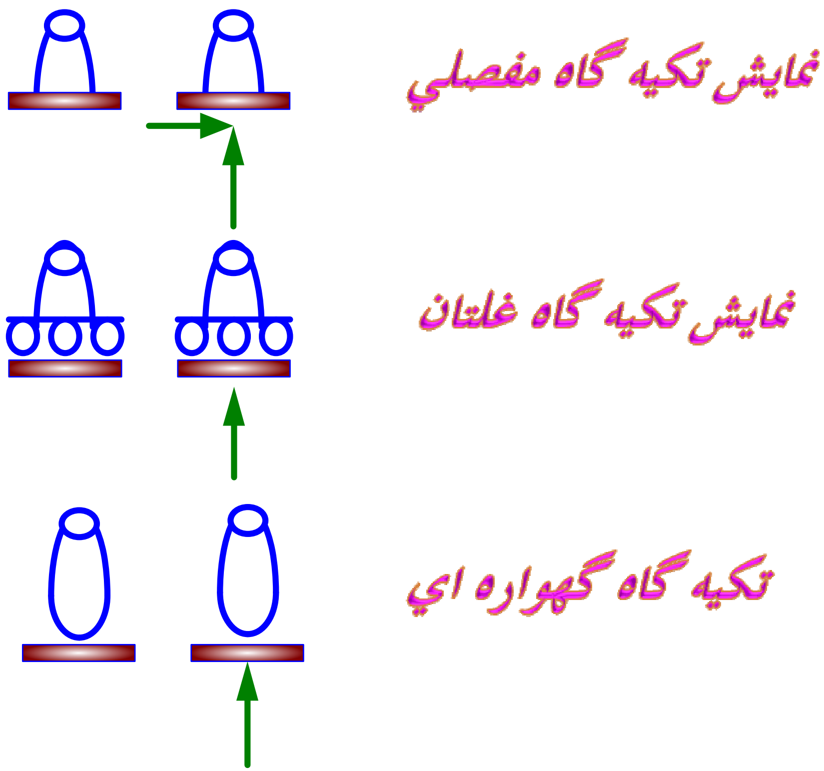
$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \\ \sum M_x = \sum M_O = 0 \end{cases}$$

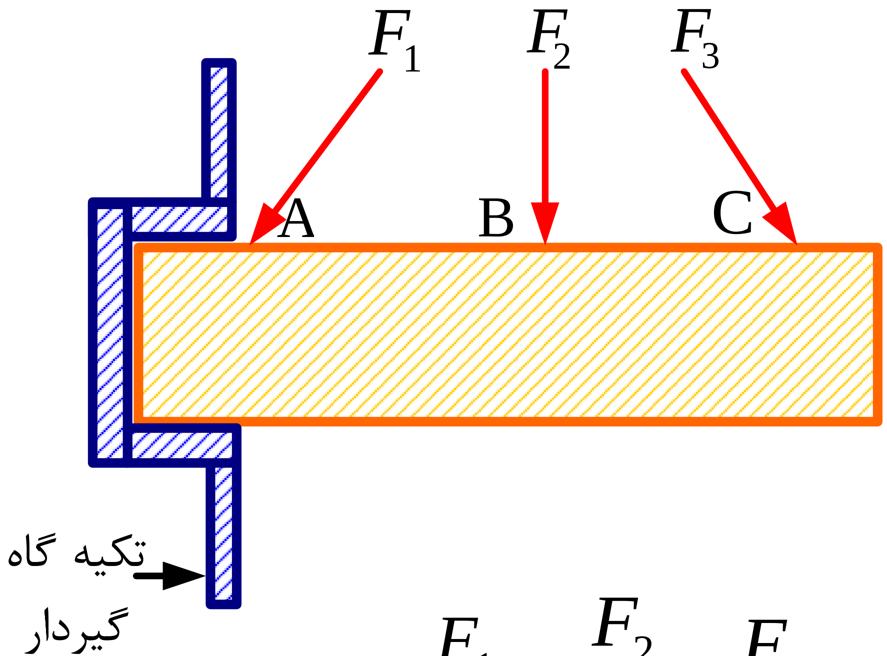
در صفحه yz

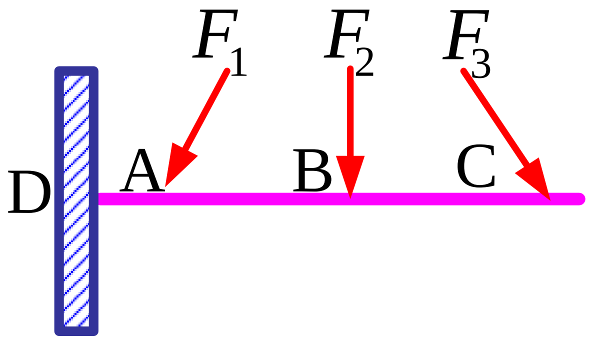
دیاگرام آزاد (FBD(Free Body Diagram:

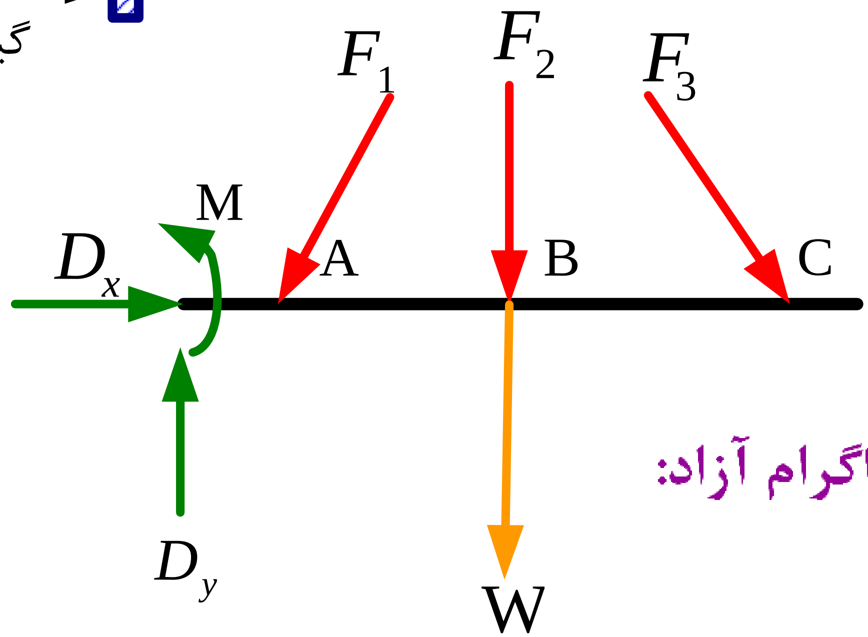
در حل مسائل مکانیک لازم است که نیروهای وارد بر جزء به جزء اجزای تشکیل دهنده سیستم مکانیکی مشخص شوند. برای این کار از دیاگرام آزاد که نمایشگر نیروهای وارد بر جزء به جزء اجزای تشکیل دهنده سیستم مکانیکی است استفاده می کنند.



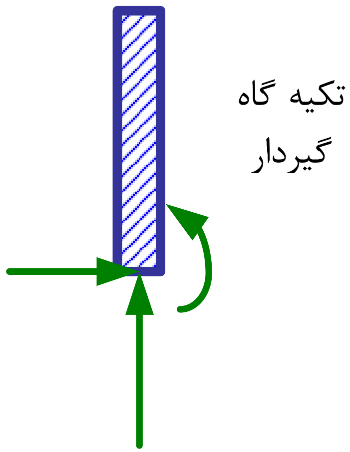


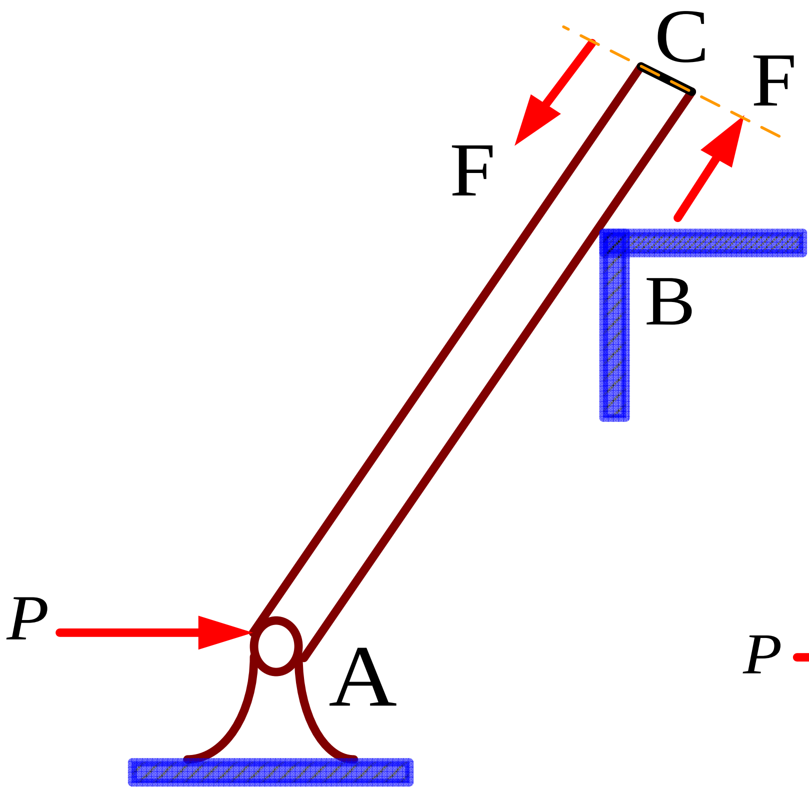


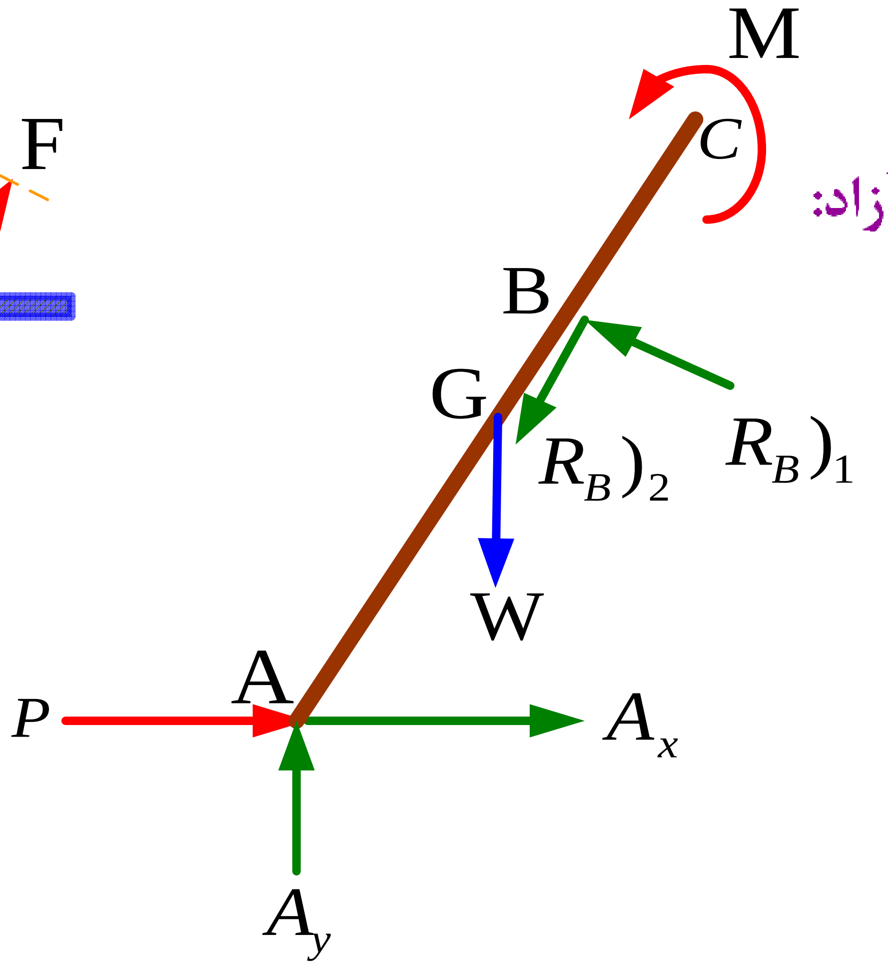




دیاگرام آزاد:







دیاگرام آزاد:

اگر تکیه گاه Bصیقلی باشد:

$$\underline{R}_B)_2 = 0 \rightarrow \underline{R}_B = \underline{R}_B)_1$$

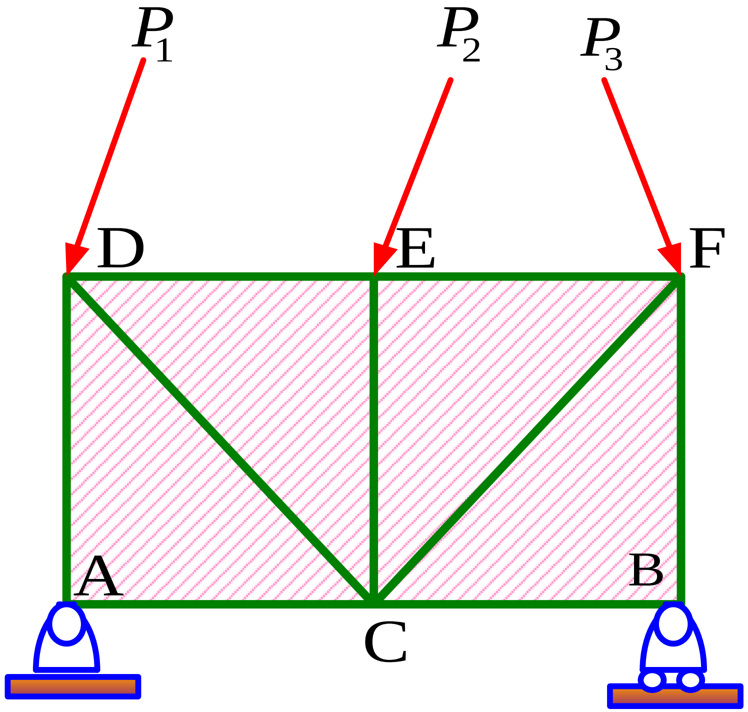
اگر تکیه گاه B غیر صیقلی باشد:

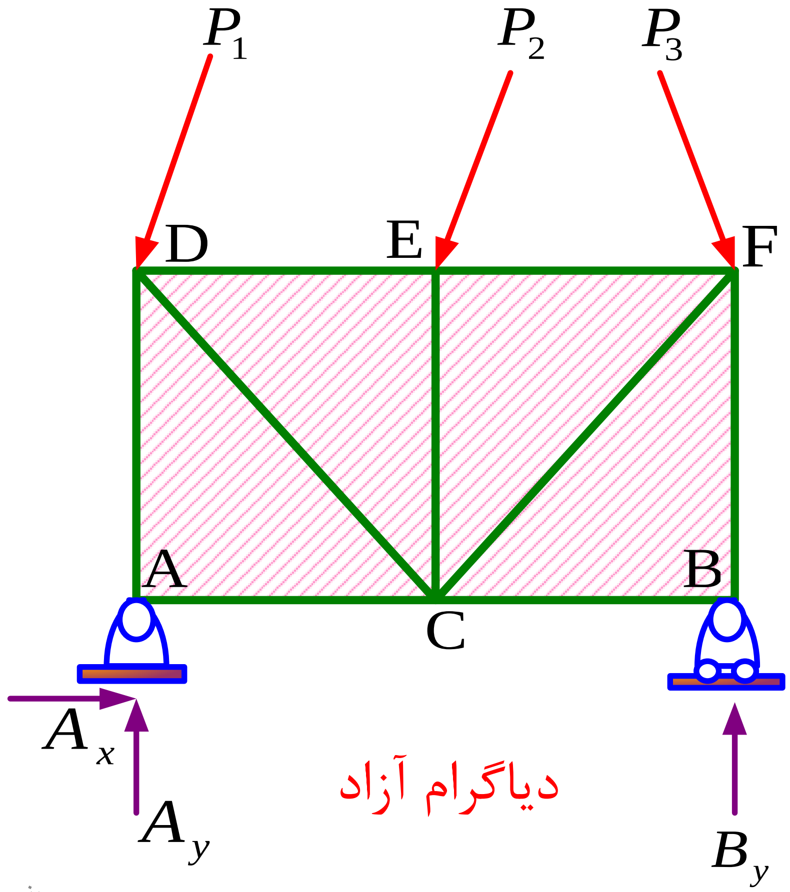
$$\underline{R}_B = \underline{R}_B)_1 + \underline{R}_B)_2$$

$R_B)_2$ به منزله اصطکاک است.

عکس العمل های نامعین استاتیکی

از وزن سازه صرف نظر کرده ایم. ابعاد هم معلوم هستند. نیروهای p_3, p_2, p_1 نیز معلومند. با توجه به این که سازه را دو بعدی فرض کرده ایم بنا بر این سه معادله تعادل داریم:





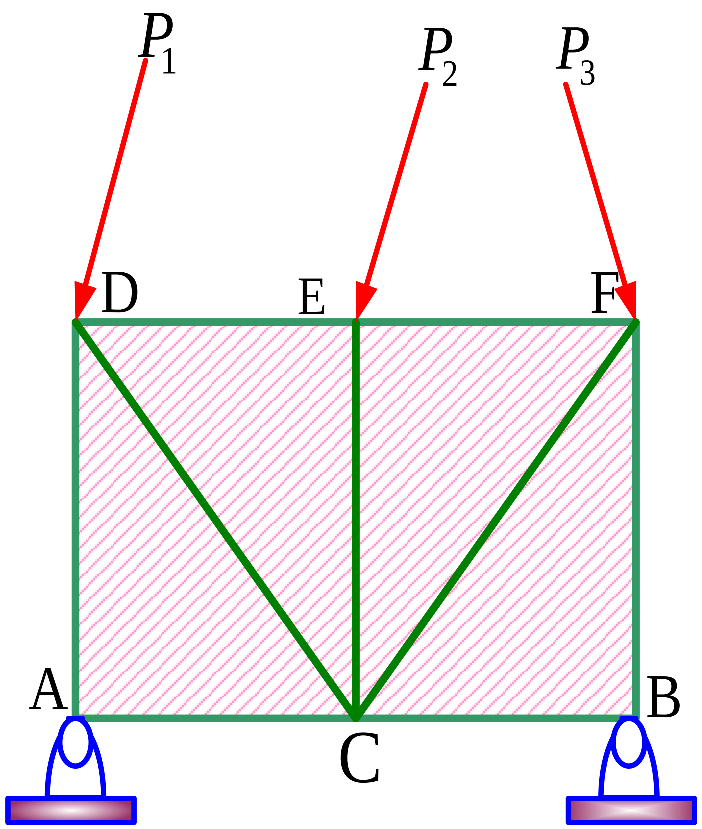
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow$$ تنها مجهول $B_y \Rightarrow$ B_y تعیین میشود

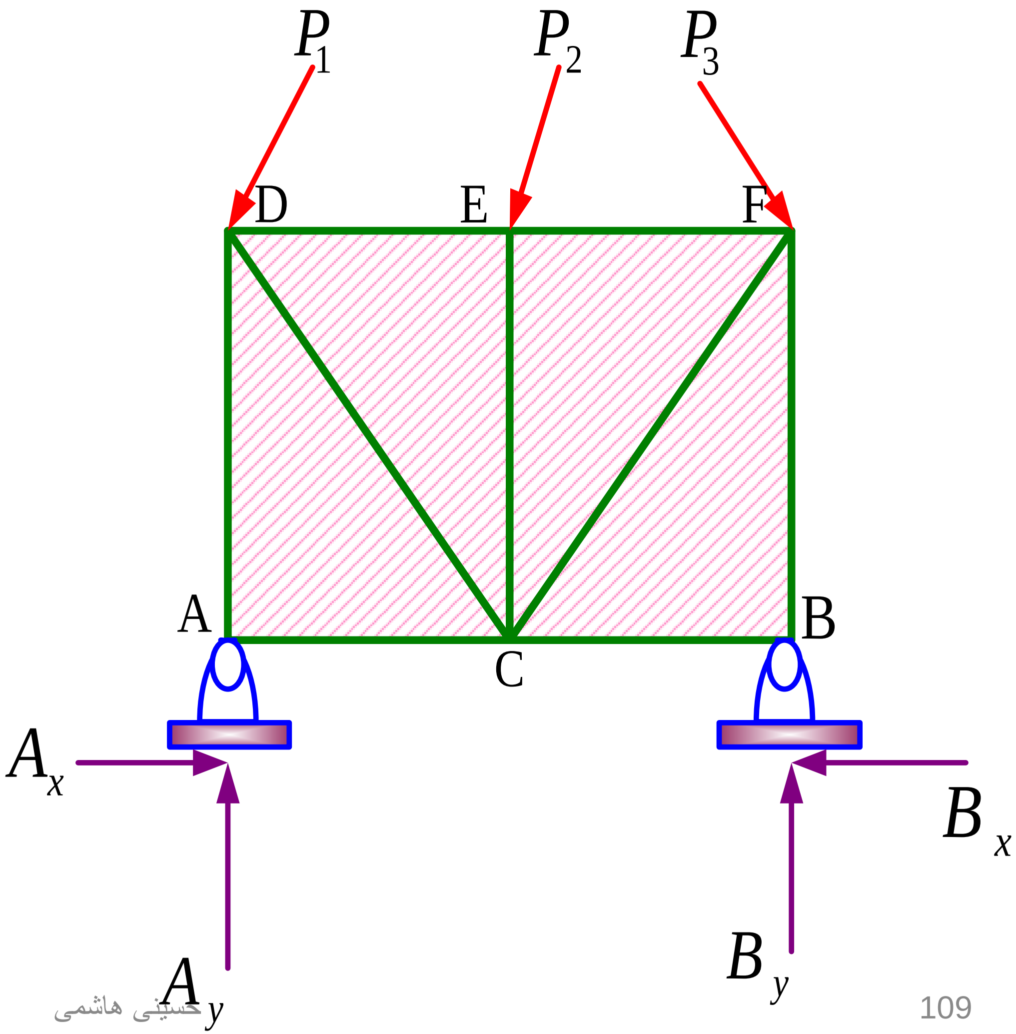
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow$$ تنها مجهول $A_y \Rightarrow$ A_y تعیین میشود

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow$$ تنها مجهول $A_x \Rightarrow$ A_x تعیین میشود

از نظر استاتیکی عکس العمل ها معین اند.

سازه با همان شرایط قبل که این بار در هر دو تکیه گاه مفصل شده





$\sum M_A = 0 \Rightarrow$ تنها مجهول $B_y \Rightarrow$ B_y تعیین میشود

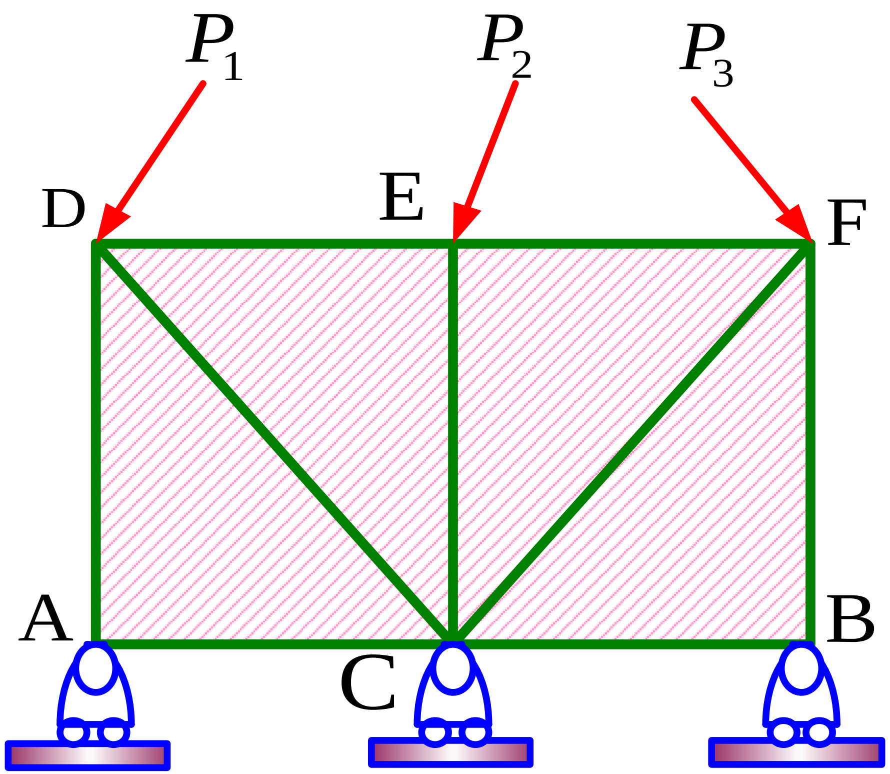
$\sum F_y = 0 \Rightarrow$ تنها مجهول $A_y \Rightarrow$ A_y تعیین میشود

$\sum \mathrm{F_x} = 0 \Rightarrow$ B_x, A_x معادله ای با دو مجهول

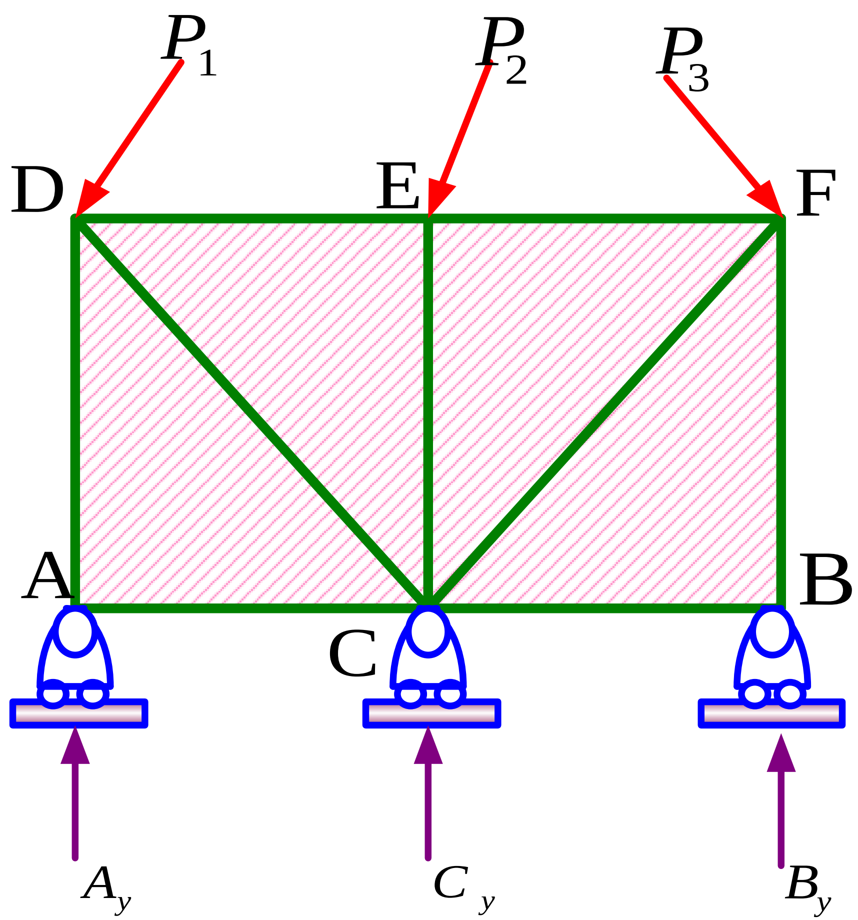
بنابراین A_x , B_x از نظر استاتیکی عکس العمل های نـامعین انـد.

$$\sum M_D = 0, \sum M_C = 0, \sum M_B = 0, \sum M_E = 0, \sum M_F = 0$$

هیچکدام از معادلات بالا را نمی توان برای بدست آوردن مجهول جدیدی استفاده کرد.
نوشتن آنها معادله مستقلی را بدست نمی دهد



P1
P2
P3
D
E
F
A
C
B



P1
P2
P3
D
E
F
A
C
B
Ay
Cy
By

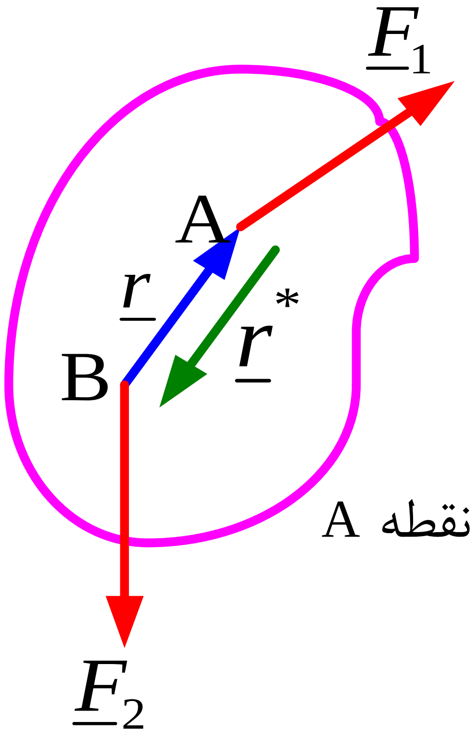
$\sum M_A = 0 \Rightarrow$ معادله ای با دومجهول C_y, B_y می دهد.

$\sum F_y = 0 \Rightarrow$ معادله ای با سه مجهول C_y, B_y, A_y می دهد.

$\sum F_x = 0 \Rightarrow$ معادله ای بدست می آید فاقد مجهولات C_y, B_y, A_y

عکس العمل ها از نظر استاتیکی نا معین اند

تعادل اجسام دو نیرویی



نسبت به نقطه B

$$\sum \underline{M}_B = \underline{r} \times \underline{F}_1 = 0$$

می بایست نیروی F_1 در امتداد بردار $\underline{r}$ باشد.

نسبت به نقطه A

$$\sum \underline{M}_A = \underline{r}^* \times \underline{F}_2 = -\underline{r} \times \underline{F}_2 = 0$$

می بایست نیروی F_2 در امتداد بردار $\underline{r}$ باشد.

برای برقراری شرایط تعادل دورانی یعنی : $\sum \underline{M} = 0$

میبایست دو نیرو در یک امتداد باشند

برای برقراری شرایط تعادل انتقالی یعنی: $\sum \underline{F} = 0 \rightarrow \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = 0$

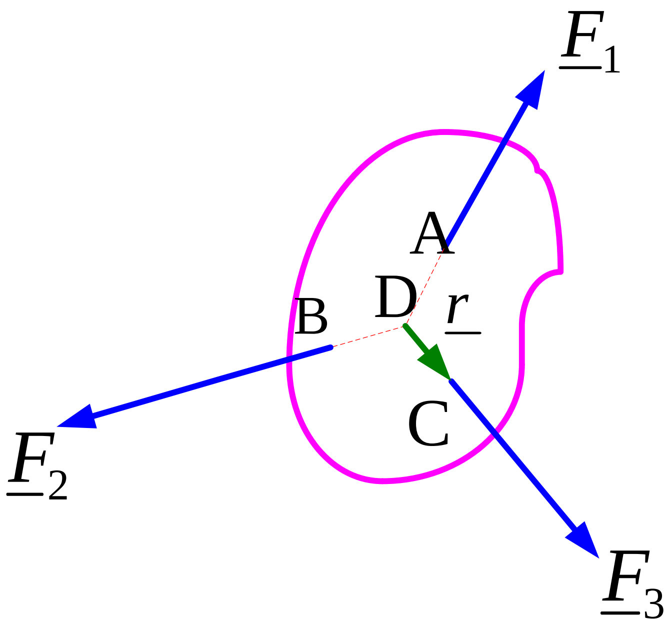
دو نیرو میبایست مساوی و مختلف الجهت باشند

نتیجه کلی: برای تعادل کامل جسم دو نیرویی دو نیرو باید مساوی و مختلف الجهت و نیز در یک راستا باشند

تعادل اجسام سه نیرویی

دو بردار F_2, F_1 را امتداد می دهیم تا یکدیگر را در نقطه D قطع کنند.

از D به نقطه اثر F_3 وصل می کنیم.



تعادل دورانی:

$$\sum \underline{M}_D = \underline{r} \times \underline{F}_3 = 0$$

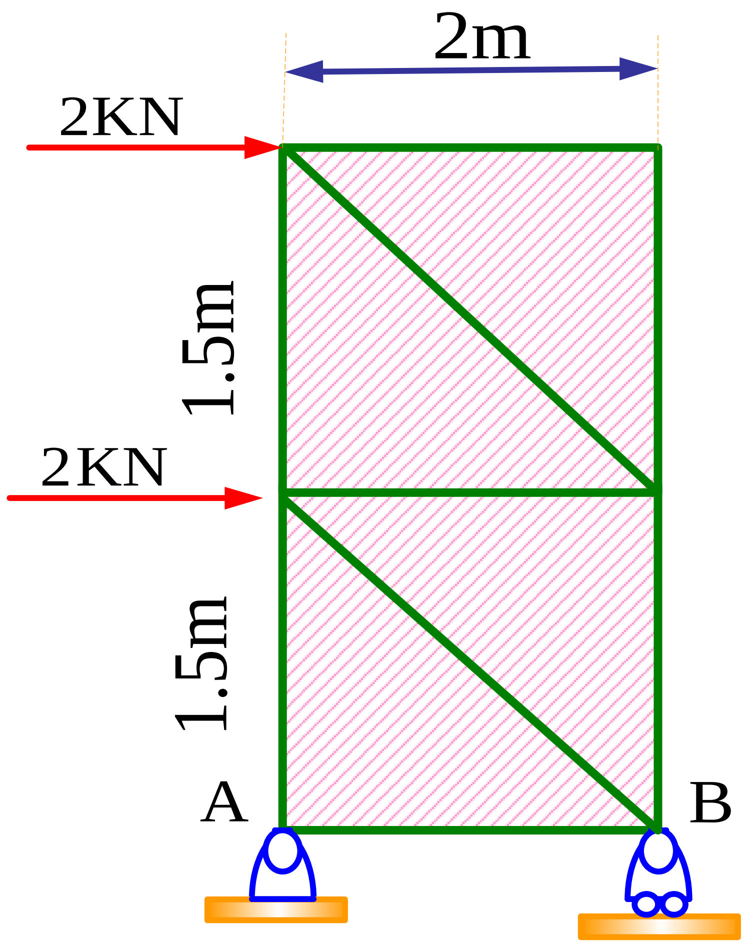
سه نیرو می بایست متقارب باشند.

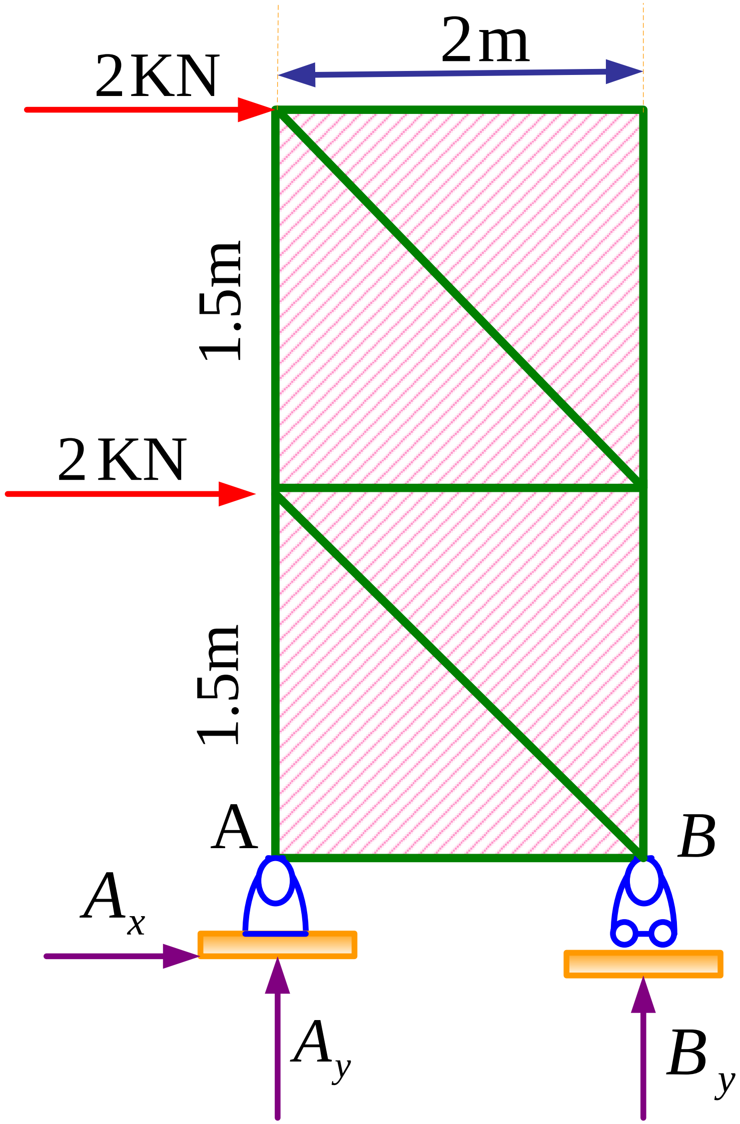
تعادل انتقالی:

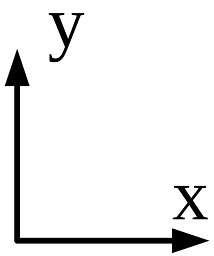
$$\sum \underline{F} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 = 0$$

نتیجه: برای تعادل کامل جسم سه نیرویی می بایست: سه نیرو متقارب بوده وهمچنین شرط تعادل انتقالی نیز برقرار باشد

مثال: برای خرپای نشان داده شده در شکل مؤلفه های عکس العمل در تکیه گاه های A , B را بیابید.







$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + 2 + 2 = 0$$

$$A_x = -4KN$$

علامت منفی نشان می دهد جهت آن مخالف جهتی است که ما فرض کرده ایم.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2B_y - 2\times 3 - 2(1.5) = 0$$

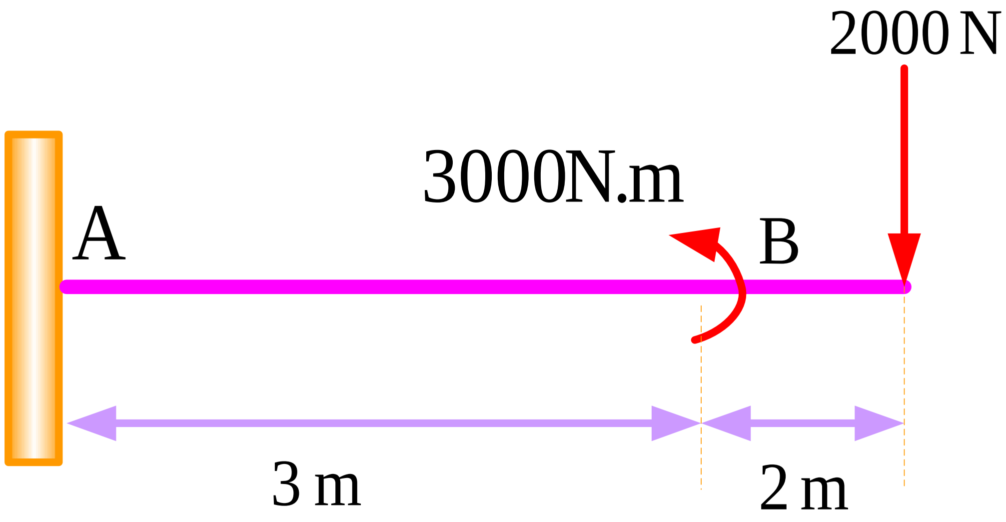
$$B_y = 4.5KN$$

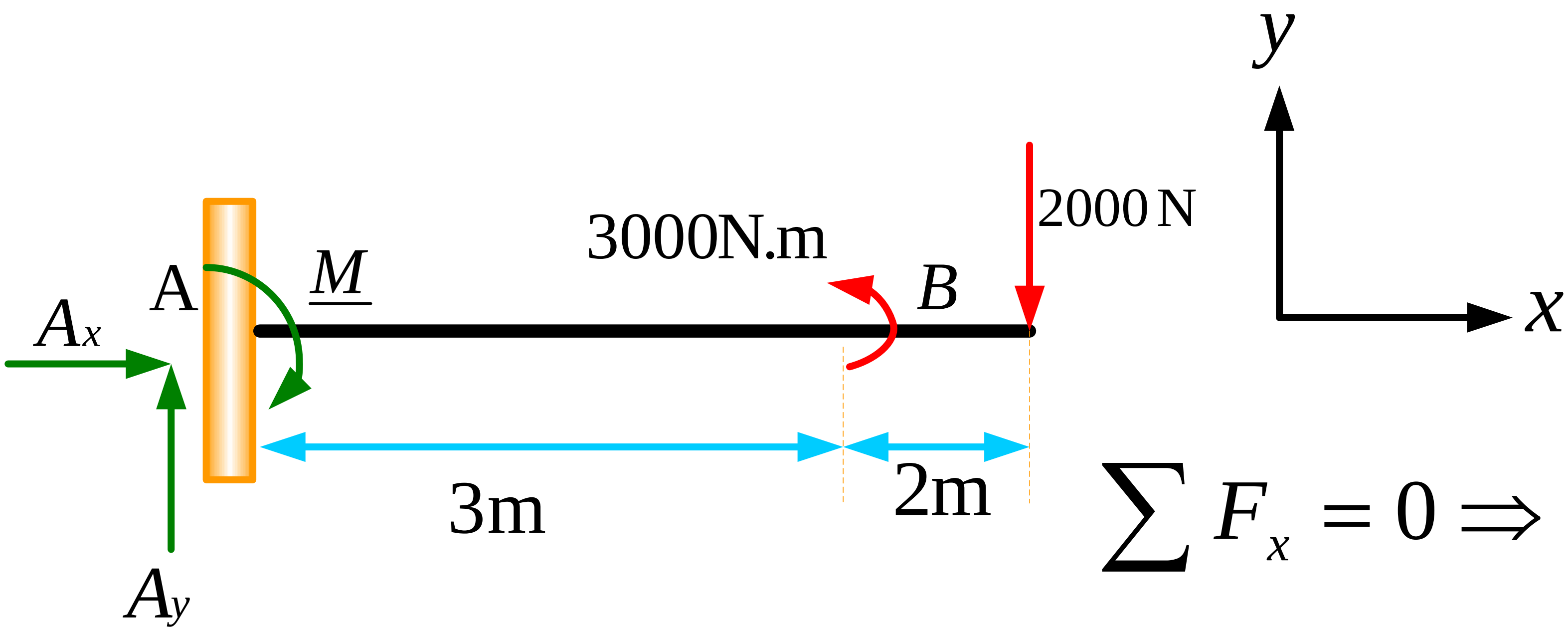
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y = 0 \rightarrow A_y = -B_y$$

$$A_y = -4.5KN$$

این ساختار از نظر استاتیکی عکس العمل هایش معین اند.

مثال: برای تیر نشان داده شده در شکل عکس العمل ها را در A تعیین کنید.





$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

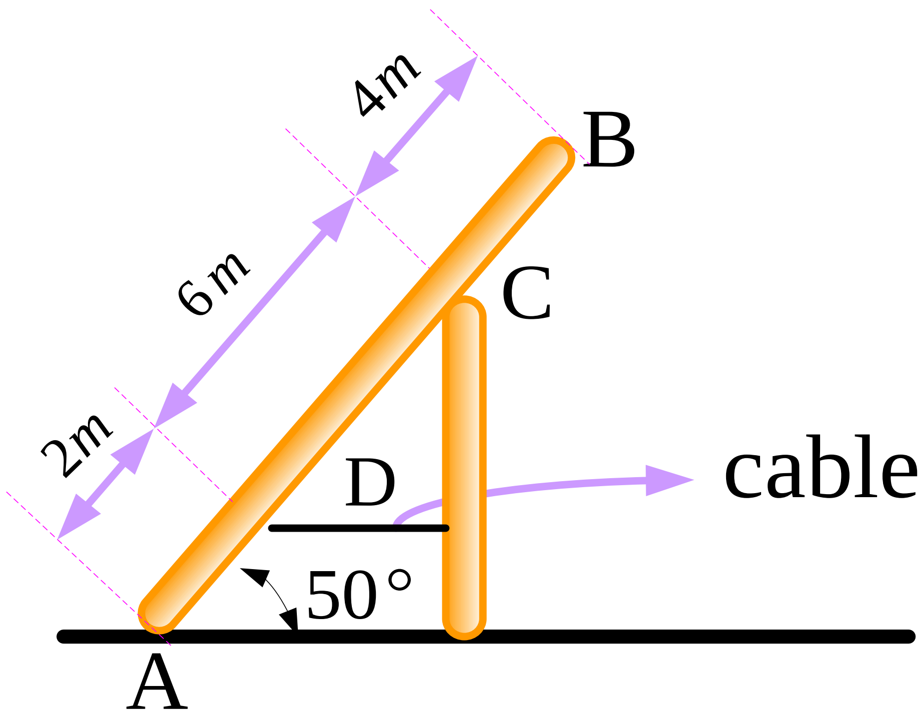
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 2000 = 0 \Rightarrow A_y = 2000\,N$$

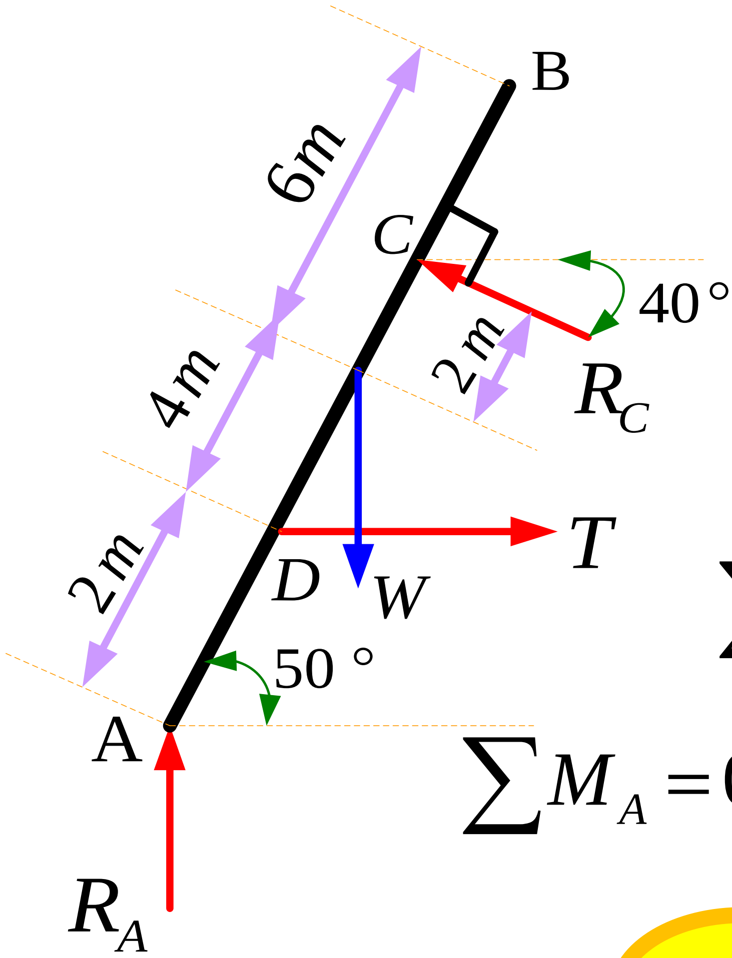
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2000 \times 5 - 3000 + M = 0$$

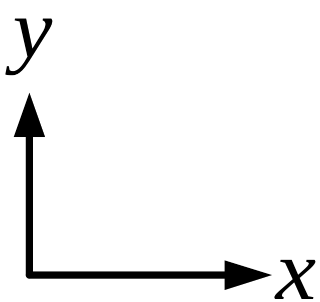
$$M = -7000 \quad N.M$$

علامت منفی نشان می دهد جهت آن مخالف آن جهتی است که انتخاب کرده ایم.

مثال : میله ABبه وزن 250N در وضعیت نشان داده شده در شکل قرار گرفته است چنانچه سطوح تکیه گاهی میله صیقلی فرض شوند مطلوبست تعیین کشش در کابل ونیروها در نقاط A و C .







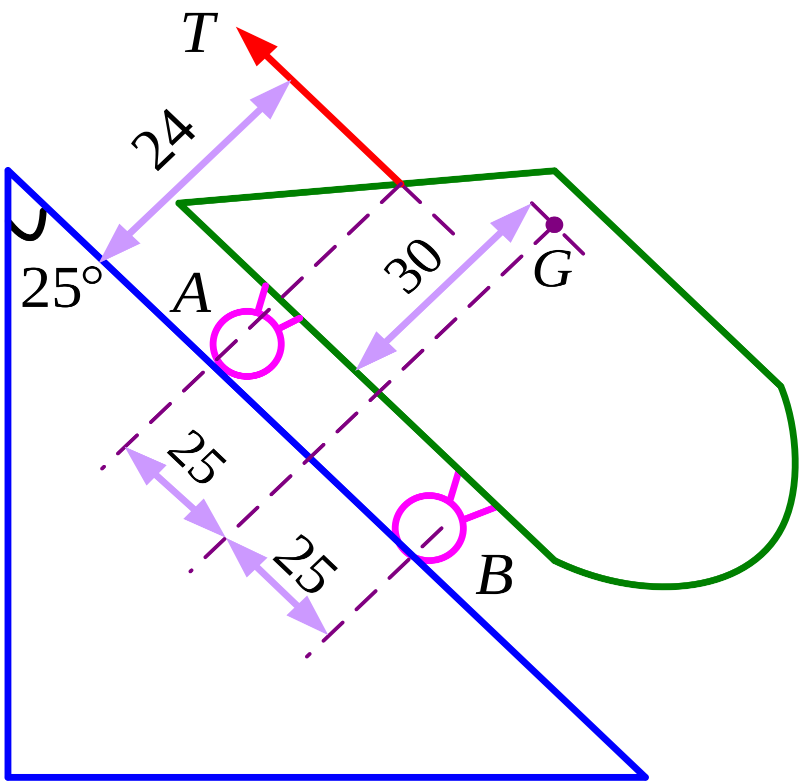
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T - R_C \cos 40 = 0$$

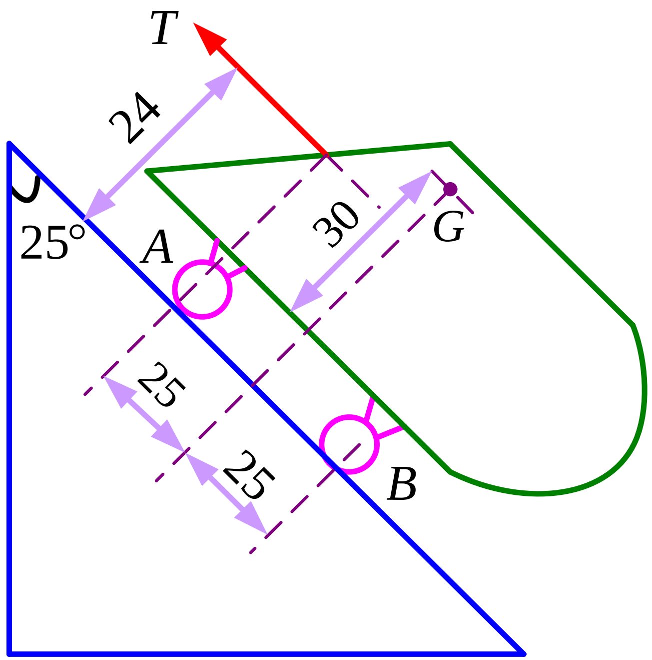
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_C \sin 40 + R_A - 250 = 0$$

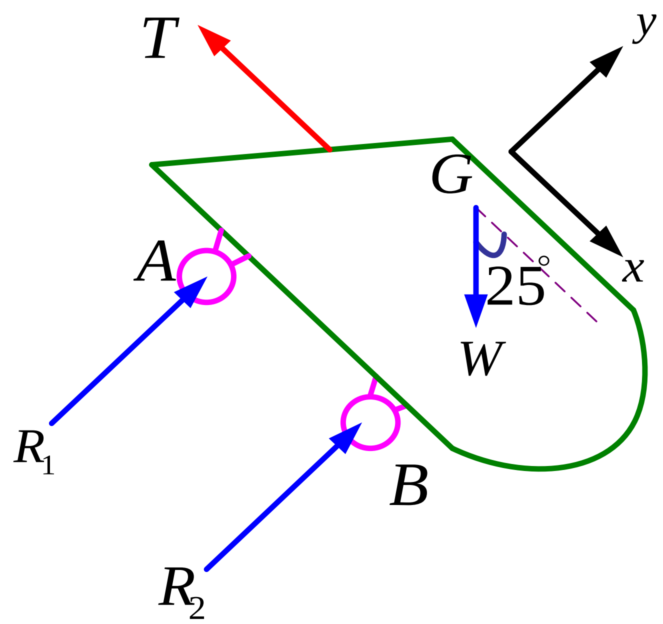
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 8R_C - 250 \times (6\cos 50) - 2T \sin 50 = 0$$

$$R_C = 141.3\ N$$
$$R_A = 159.3\ N$$
$$T = 108.23\ N$$

مثال: مدل ارابه ای به وزن 100N که مرکز ثقل آن در نقطه G می باشد بر روی سطح شیبداری مطابق شکل قرار گرفته است و به وسیله نیروی کشش T در امتداد سطح شیبدار نگهداری شده است. مطلوبست تعیین نیروی T و عکس العمل های چرخ ها در صورتیکه از اصطکاک صرف نظر شود. (ابعاد بر حسب سانتیمترهستند)







$$W = 100\ N$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \qquad W\cos 25 - T = 0 \Rightarrow \qquad T = 90.6\,N$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow$$

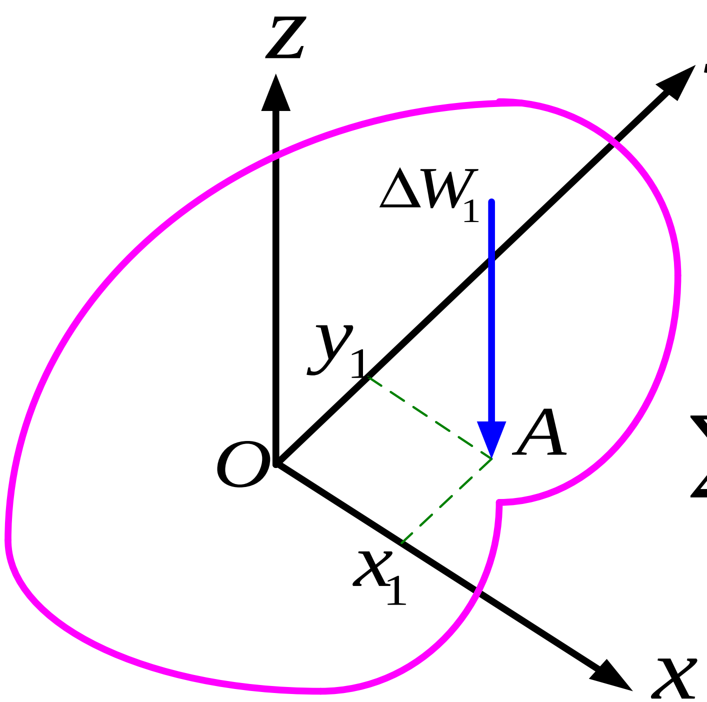
$$0.5R_2 + 0.24T - 0.3W\cos 25^\circ - 0.25W\sin 25^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 32.02\ N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \qquad R_1 + R_2 - W\sin 25^\circ = 0 \qquad R_1 = 10.3\,N$$

۴-تعیین مراکز

مراکز: ثقل و حجم

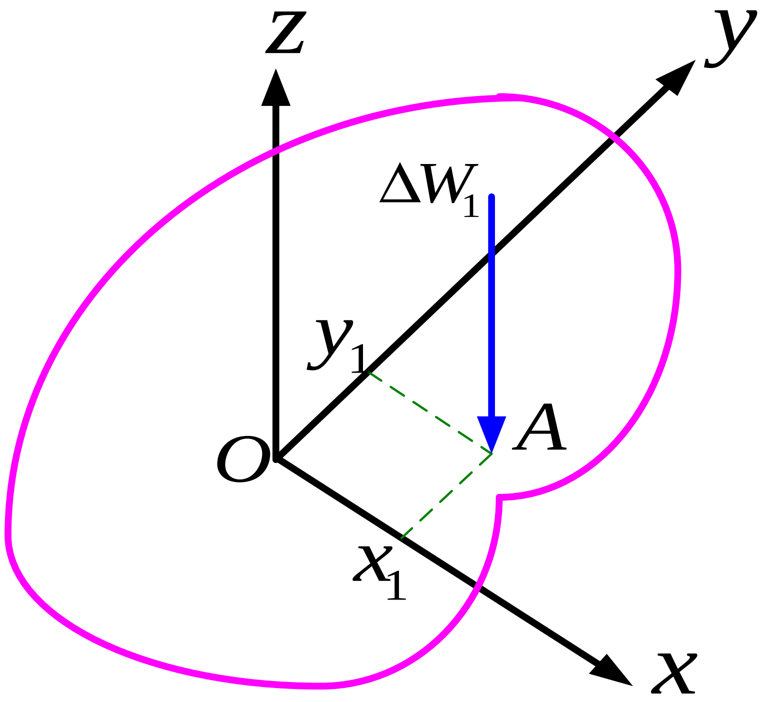
مرکز ثقل: نقطه اثر برآیند نیروهای وارده از طرف زمین بر ذرات تشکیل دهنده جسم است.

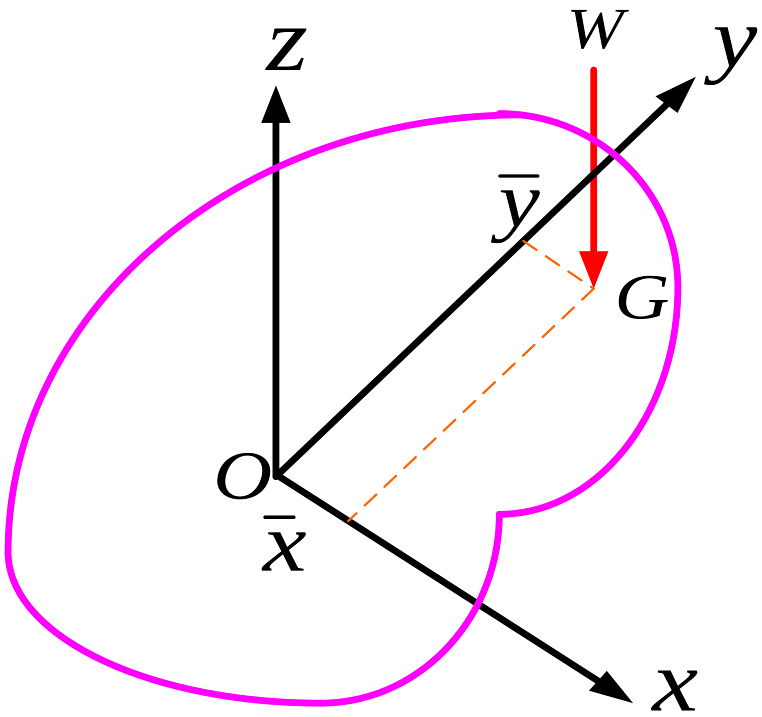


$$M_x^{(1)} = y_1 \Delta w_1 \qquad M_y^{(1)} = x_1 \Delta w_1$$

$$M_x^{(2)} = y_2 \Delta w_2 \qquad M_y^{(2)} = x_2 \Delta w_2$$

$$\sum M_x^{(i)} = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \Delta w_i \qquad \sum M_y^{(i)} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \Delta w_i$$





$$w\bar{x} = \sum M_y^{(i)} \qquad w = \sum \Delta w_i \qquad \sum M_y^{(i)} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \Delta w_i \qquad \bar{x} = \frac{\sum x_i \Delta w_i}{\sum \Delta w_i} = \frac{\int x dw}{\int dw}$$

$$w\bar{y} = \sum M_x^{(i)} \qquad \sum M_x^{(i)} = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \Delta w_i \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i \Delta w_i}{\sum \Delta w_i} = \frac{\int y dw}{\int dw}$$

مرکز ثقل

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dw}{\int dw} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int y\,dw}{\int dw} \quad , \quad \bar{z} = \frac{\int z\,dw}{\int dw}$$

مرکز حجم

$$w = \gamma v \Rightarrow \gamma = \rho g \Rightarrow w = \rho v g$$

وزن مخصوص

اگر جسم هموزن باشد $\Rightarrow \quad dw = \rho \, g dv .$

$$\bar{x} = \frac{\int xdw}{\int dw} = \frac{\rho g \int xdv}{\rho g \int dv} = \frac{\int xdv}{\int dv}$$

$$\bar{x} = \frac{\int xdv}{\int dv}, \quad \bar{y} = \frac{\int ydv}{\int dv}, \quad \bar{z} = \frac{\int zdv}{\int dv}$$

مرکز سطح و گشتاور اول سطح

$$v = At$$

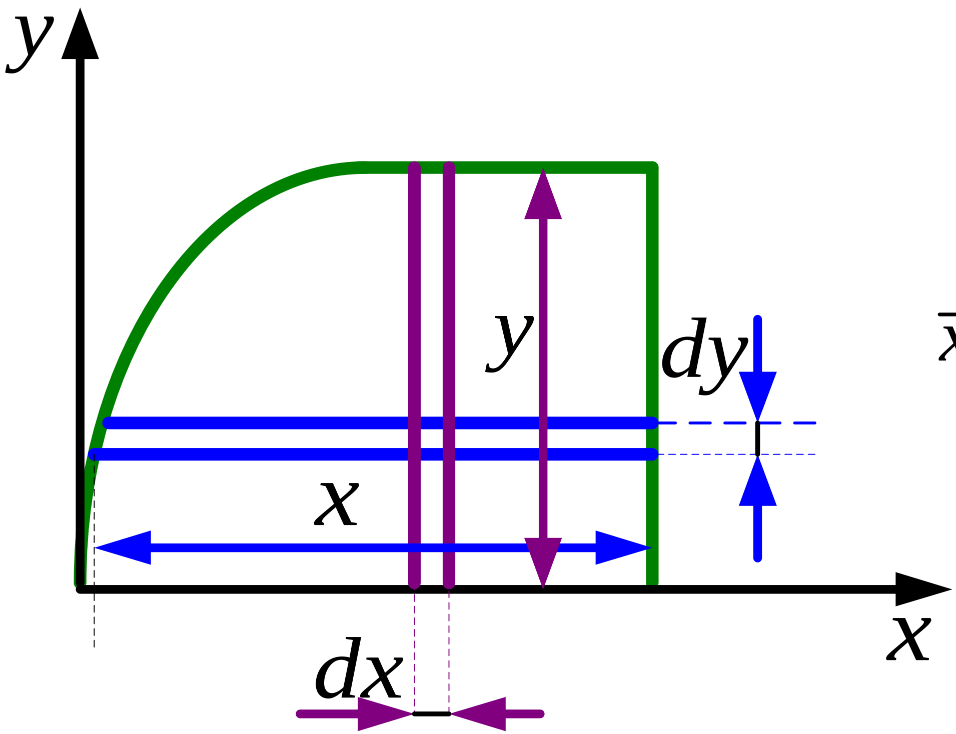
سطح مقطع ↲ ↳ ضخامت (ثابت)

$$dv = tdA$$

$$dA = xdy$$

$$dA = ydx$$

$$\bar{x} = \frac{\int xdv}{\int dv} = \frac{t\int xdA}{t\int dA} = \frac{\int xdA}{\int dA}$$



اگرسطح در صفحه x,y باشد

مرکز سطح

$$\bar{x} = \frac{\int x_{el}\, dA}{\int dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int y_{el}\, dA}{\int dA}$$

$$Q_y = \int x dA$$

گشتاور اول سطح حول y

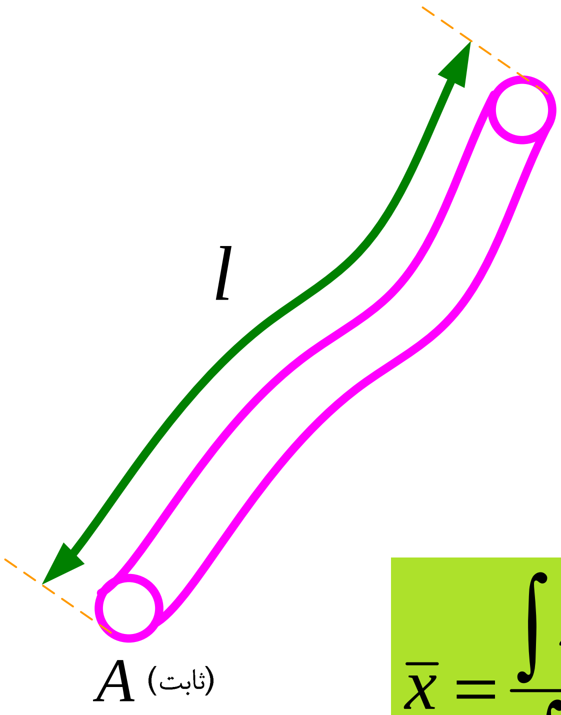
$$Q_x = \int y dA$$

گشتاور اول سطح حول x

مرکز خط

جسمی که دو بعد آن درمقابل بعد سوم ناچیز باشد.

$$v = Al \qquad dv = Adl$$



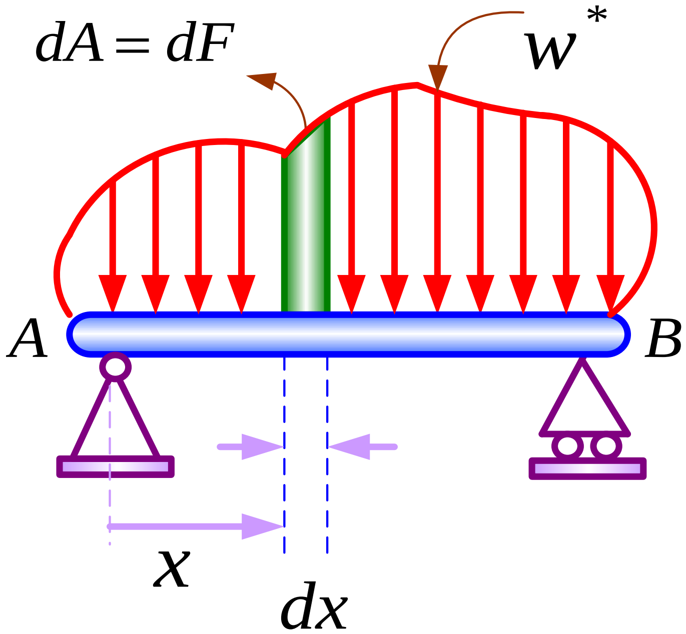
$$\bar{x} = \frac{\int x\,dv}{\int dv} = \frac{A\int x\,dl}{A\int dl} = \frac{\int x\,dl}{\int dl}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x\,dl}{\int dl}, \qquad \bar{y} = \frac{\int y\,dl}{\int dl}, \qquad \bar{z} = \frac{\int z\,dl}{\int dl}$$

مرکز نیرو

w^* شدت نیرو درواحد طول ← نیروی توزیعی در واحد طول

واحد آن در دستگاه (M K S) N/m است.

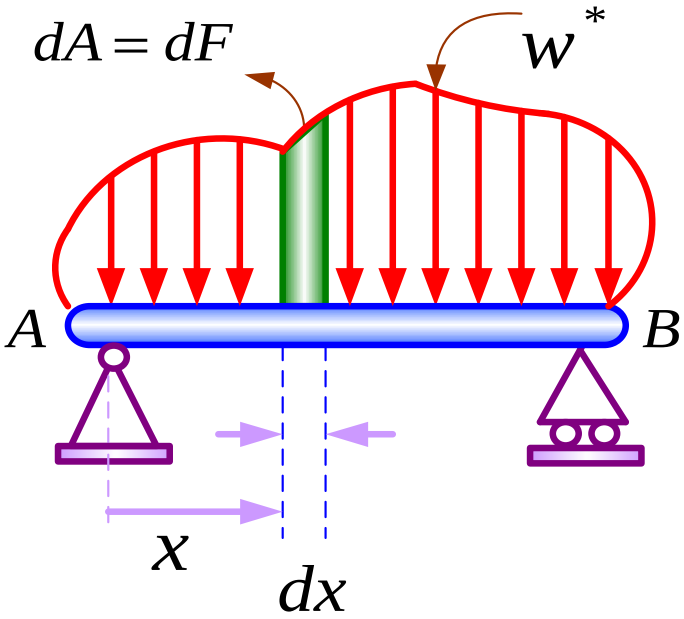


$$w^* = w^*(x)$$ (شدت نیرو)

$$dF = dA = w^*(x)dx$$

$$F = A = \int w^*(x)dx$$

سطح زیر منحنی تغییرات شدت نیرو برحسب طول تیر



$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dF}{\int dF}$$

$$dF = dA = w^{*}(x) dx$$

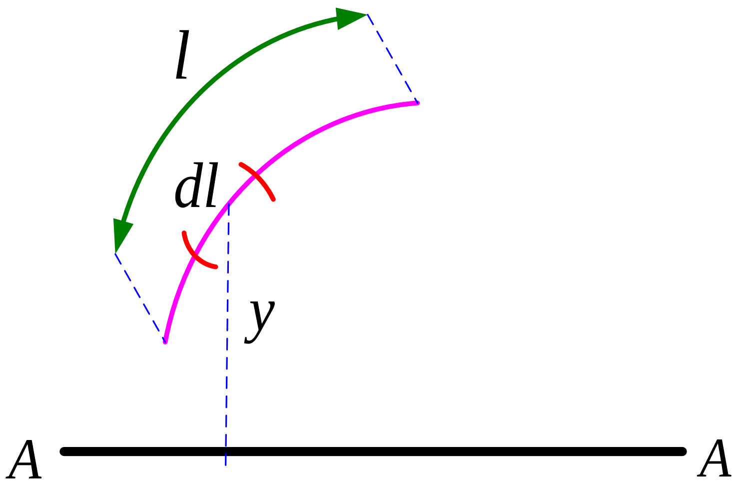
$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{\int x dF}{\int dF} = \frac{\int x w^{*}(x) dx}{\int w^{*}(x) dx}$$

قضایای پاپوس گلدینوس(Popus Goldinus)

قضیه یک

$$dA = 2\pi y dl$$

$$A = 2\pi \int y dl$$

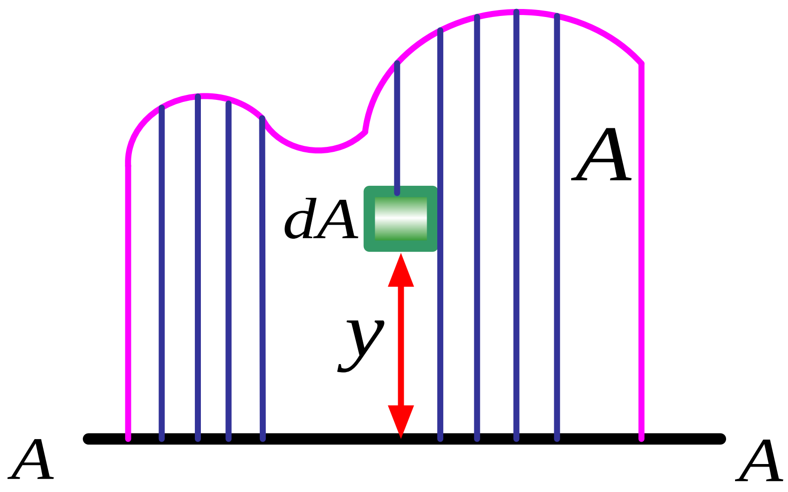


$$\bar{y} = \frac{\int y dl}{\int dl} = \frac{\int y dl}{l}$$

$$\mapsto \quad A = 2\pi \bar{y} l$$

سطح جاروب شده بوسیله دوران خط به طول L برابر است با حا صل ضرب طول خط مولد سطح در مسافتی که مرکز خط در طی حادث شدن سطح می پیماید.

قضیه دو



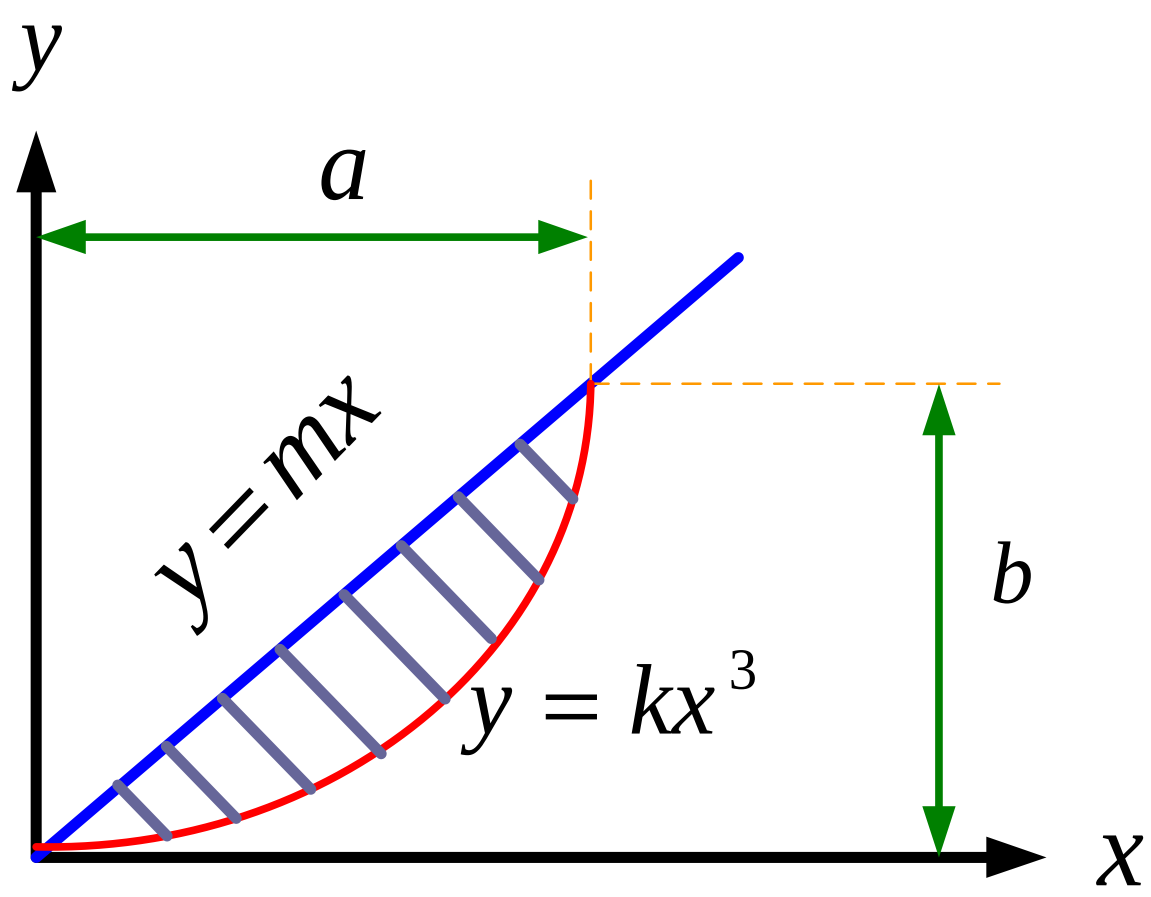
$$dv = 2\pi y dA \qquad v = 2\pi \int y dA$$

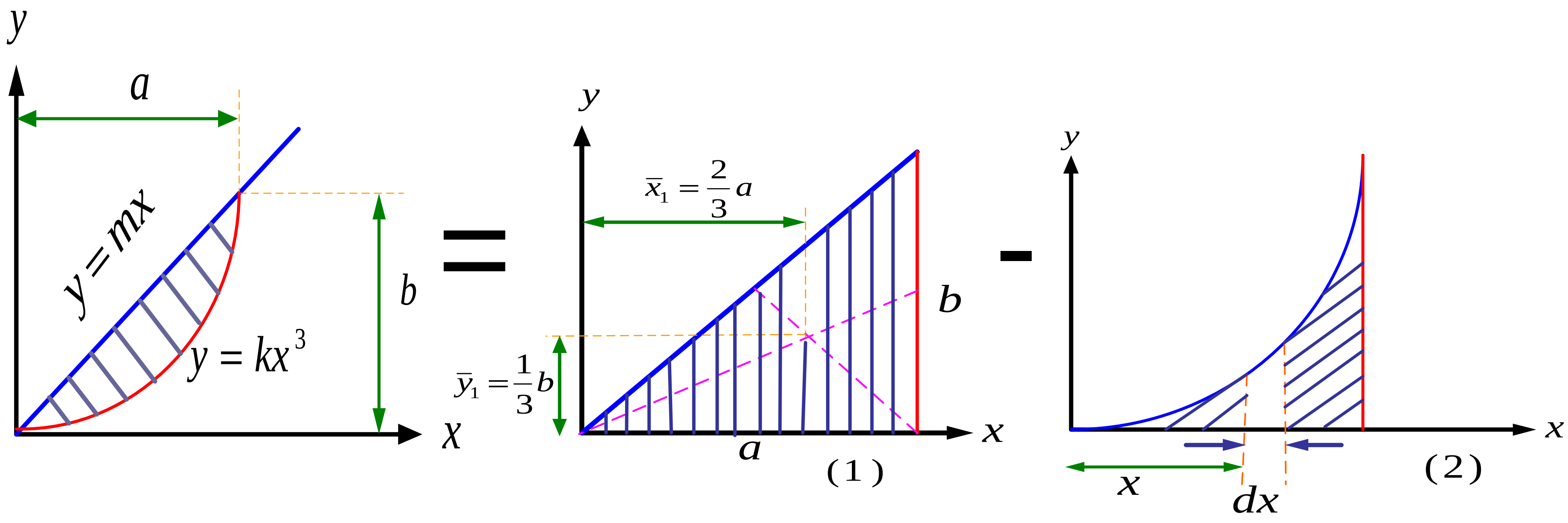
مرکز سطح $\bar{y} = \dfrac{\int y dA}{\int dA} = \dfrac{\int y dA}{A}$

$$\int y dA = \bar{y} A \quad \mapsto \quad v = 2\pi \bar{y} A$$

حجم جاروب شده بوسیله دوران سطح بمساحت A برابر است با حاصل ضرب مساحت سطح مولد حجم در مسافتی که مرکز سطح درطی حادث شدن حجم می پیماید.

مثال: برای سطح هاشور خورده مطابق شکل مختصات مرکز سطح را مشخص کنید.

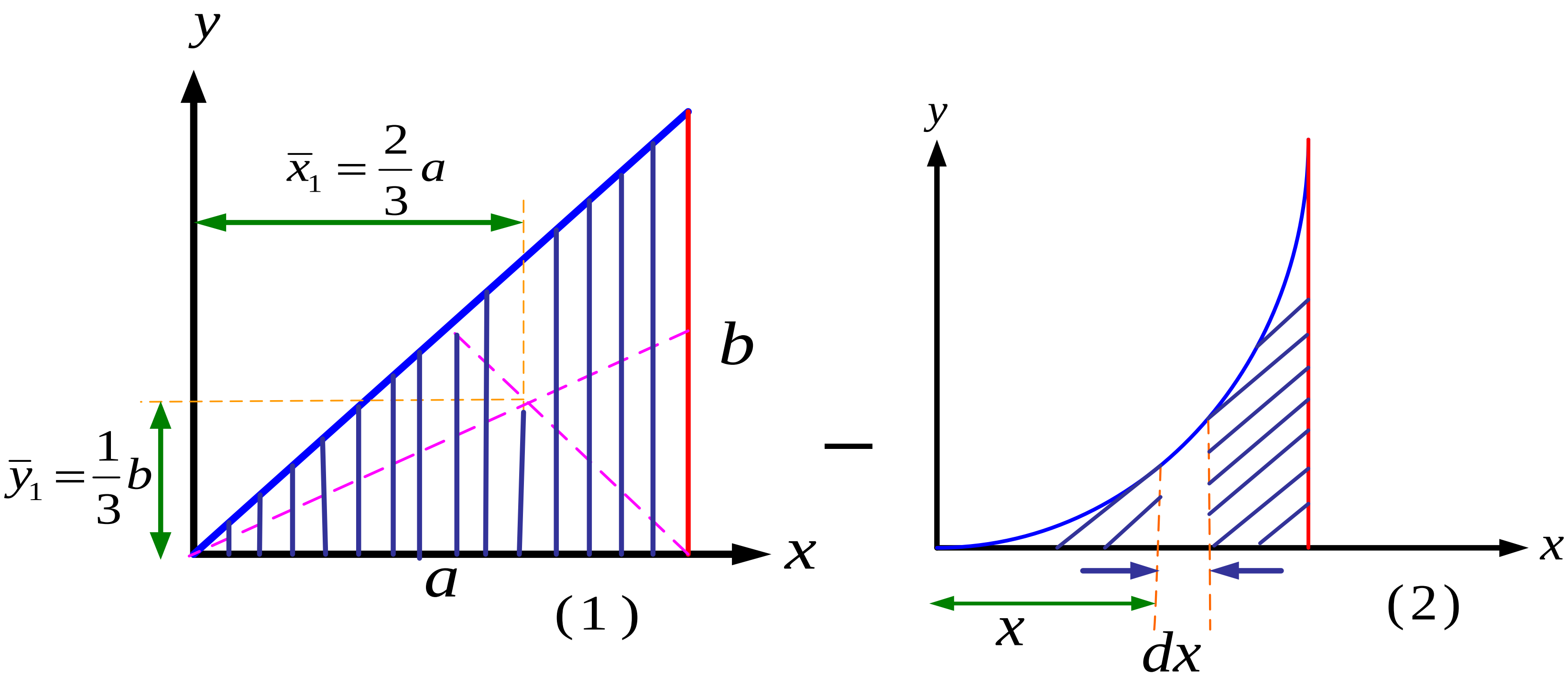




$$(1) \qquad A_1 = \frac{ba}{2}$$

$$(2) \qquad : b = ka^3 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{b}{a^3} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{b}{a^3}x^3 \qquad dA = ydx$$

$$\int dA = \int ydx = \int_0^a \frac{b}{a^3}x^3 dx = \frac{b}{a^3} \times \frac{1}{4} \times a^4 = \frac{1}{4}ab \qquad A_2 = \frac{ba}{4}$$



$$\int xdA = \int x_{el}dA = \int xydx = \frac{b}{a^3}\int_0^a x^4 dx = \frac{b}{a^3}\left(\frac{1}{5}\right)a^5 = \frac{1}{5}a^2 b$$

$$\int ydA = \int y_{el}dA = \int \frac{1}{2}ydA = \frac{1}{2}\int y^2 dx = \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^6}\int_0^a x^6 dx = \frac{1}{14}ab^2$$

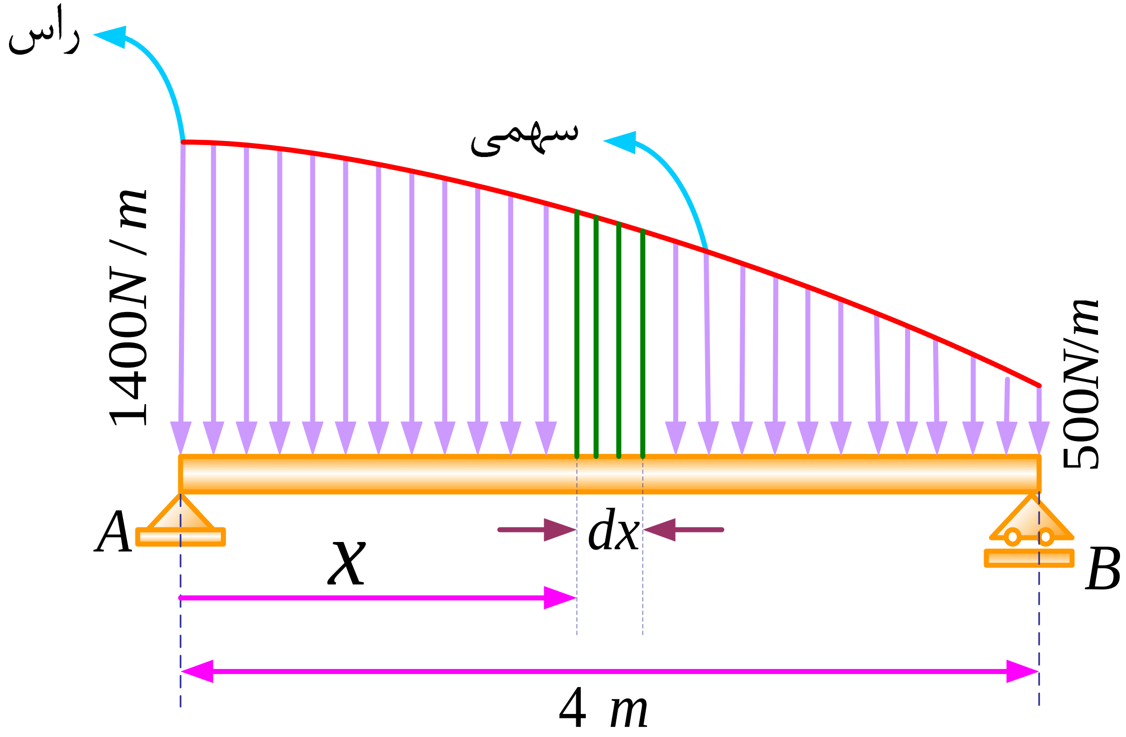
$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{\int dA} = \frac{\int x_{el} dA}{\int dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int y dA}{\int dA} = \frac{\int y_{el} dA}{\int dA}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\frac{1}{5} a^2 b}{\frac{1}{4} ab} = \frac{4}{5} a \qquad \bar{y}_2 = \frac{\frac{1}{14} b^2 a}{\frac{1}{4} ab} = \frac{2}{7} b$$

$$\bar{x} = \frac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 \bar{x}_1 - A_2 \bar{x}_2}{A_1 - A_2} = \frac{\frac{a^2 b}{3} - \frac{2 a^2 b}{15}}{\frac{ab}{2} - \frac{ab}{4}} = \frac{8}{12} a$$

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 \bar{y}_1 - A_2 \bar{y}_2}{A_1 - A_2} = \frac{\frac{ab^2}{6} - \frac{ab^2}{28}}{\frac{ab}{2} - \frac{ab}{4}} = \frac{8}{21} b$$

مثال: مطلوبست تعیین بزرگی و نقطه اثر نیروی توزیعی وارد بر تیر نشان داده شـده در شکل و هم چنین تعیین نیروهای عکس العمل در نقاط A و B.



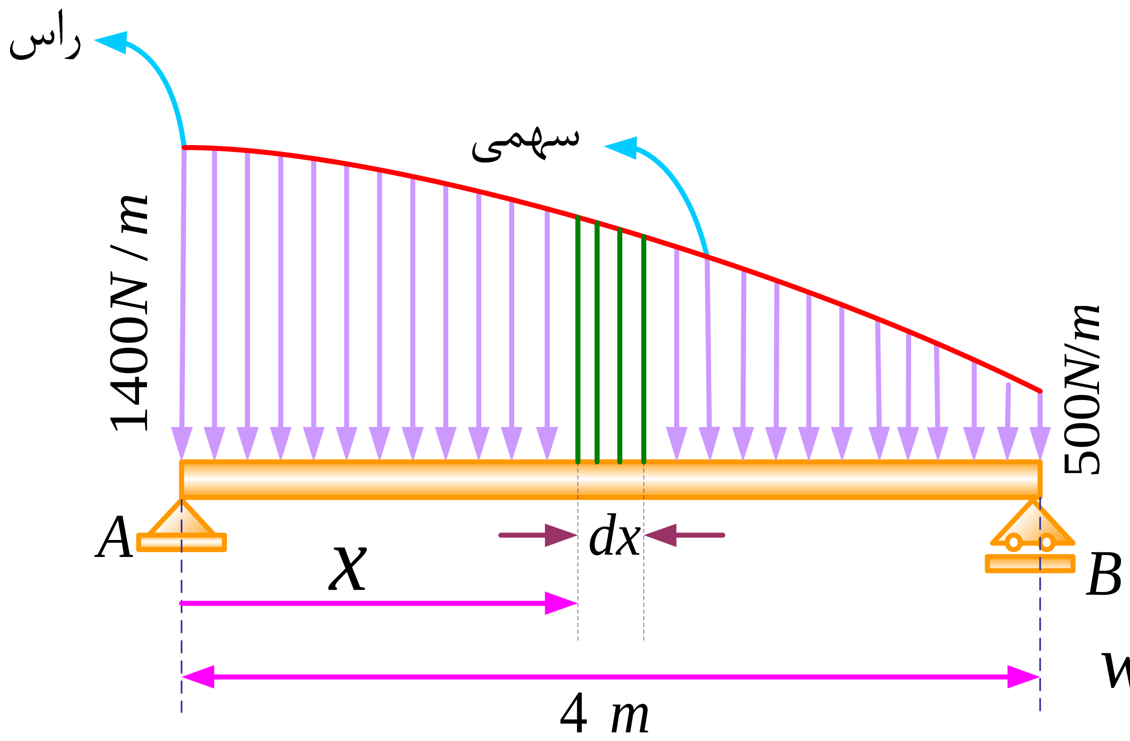
$$y = ax^2 + bx + c$$

نسبت به محور y متقارن است

$$y = ax^2 + c$$

$$\begin{cases} 1400 = a \times (0) + c \\ 500 = a \times 16 + c \end{cases}$$

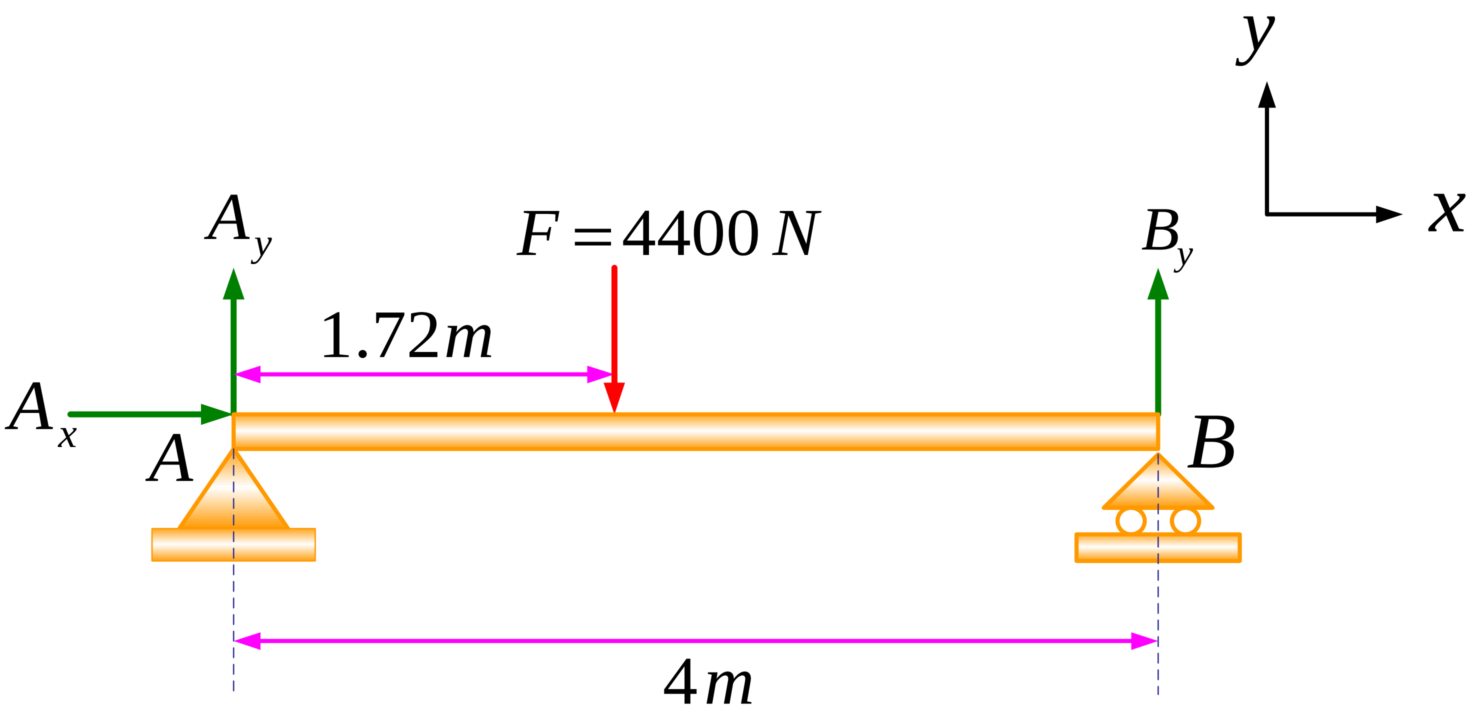
$$\Rightarrow \begin{cases} c = 1400 \\ 16a = -900 \rightarrow a = -\dfrac{225}{4} \end{cases} \qquad \Rightarrow y = -\frac{225}{4}x^2 + 1400$$



$$w^* = y = -\frac{225}{4}x^2 + 1400$$

$$F = A = \int y\,dx = \int w^*(x)\,dx = \int_0^4 \left(-\frac{225}{4}x^2 + 1400\right)dx = 4400\,N$$

$$\bar{x} = \frac{\int x w^*(x)\ dx}{\int w^*(x)\ dx} = \frac{\int x\,dA}{\int dA} = \frac{\int x\,dA}{A} = \frac{\int_0^4 x\left(-\frac{225}{4}x^2 + 1400\right)dx}{4400} = 1.72\,m$$



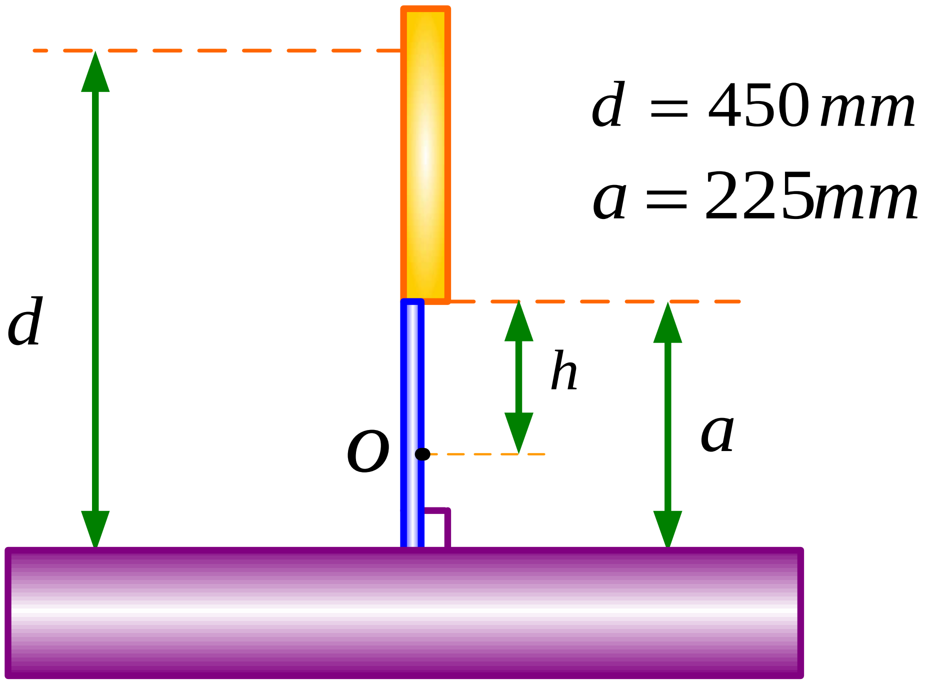
$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow A_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \;\Rightarrow -4400 + B_y + A_y = 0$$

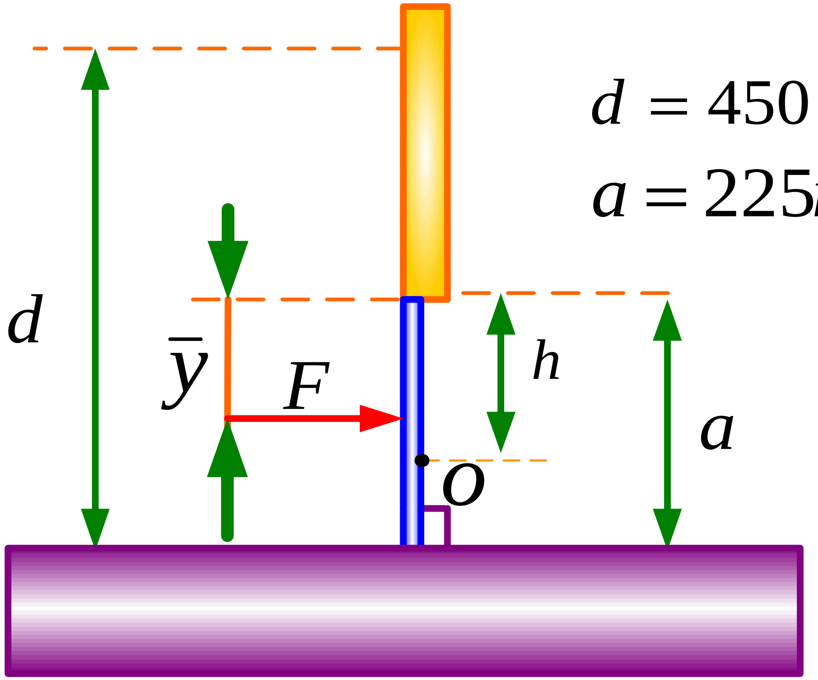
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 4400 \times 1.72 - 4B_y = 0$$

$$B_y = 1892\ N$$

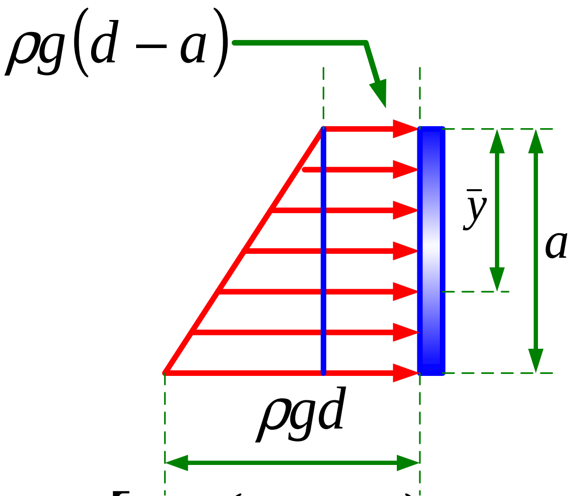
$$A_y = 2508\ N$$

مثال: یک دریچه مربعی شکل اتوماتیک به ابعاد $225 \times 225\ mm^2$ حول محوری که از O می گذرد مفصل شده است بـه هنگامیکـه ارتفـاع سـیال 450mm است دریچه شروع به بـاز شـدن مـی کنـد مطلوبـست تعیـین فاصله h.





$$d = 450\,mm$$
$$a = 225mm$$



$$F = V = \frac{[\rho g(d-a) + \rho g d]a^2}{2}$$

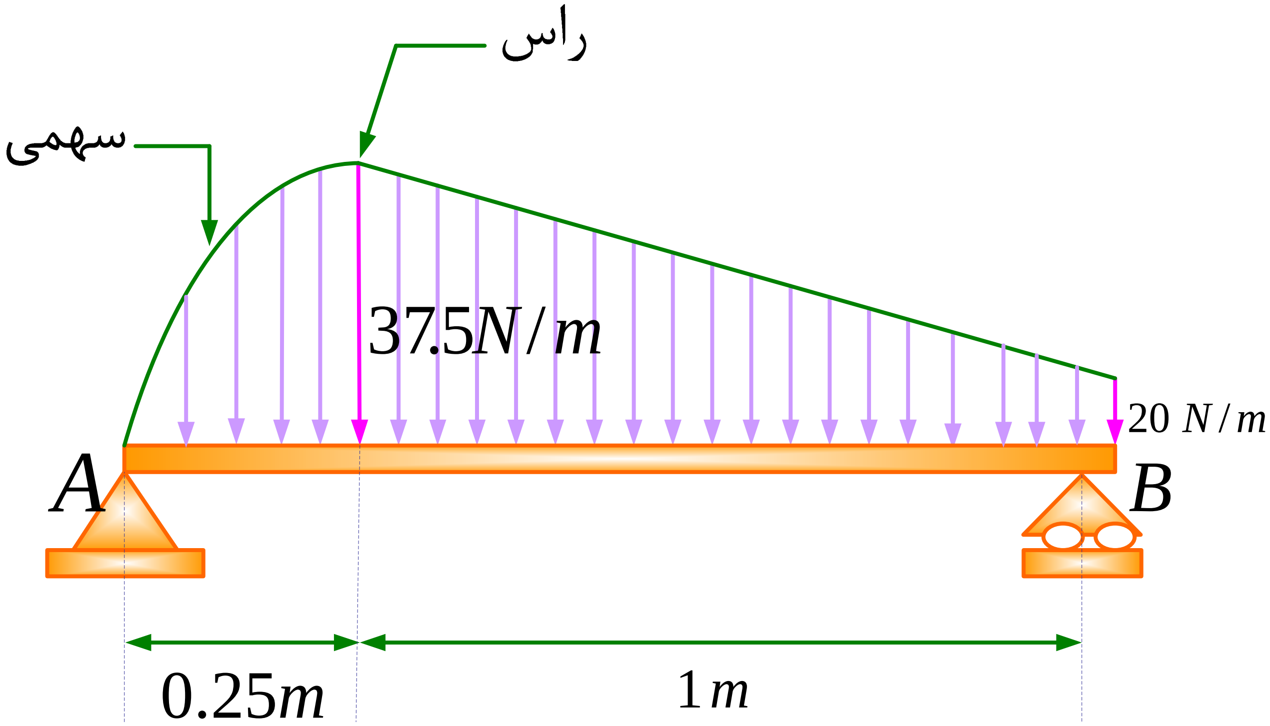
$$A_1 = \rho g(d-a)a = 50625\rho g \qquad \bar{y}_1 = a/2 = 112.5$$

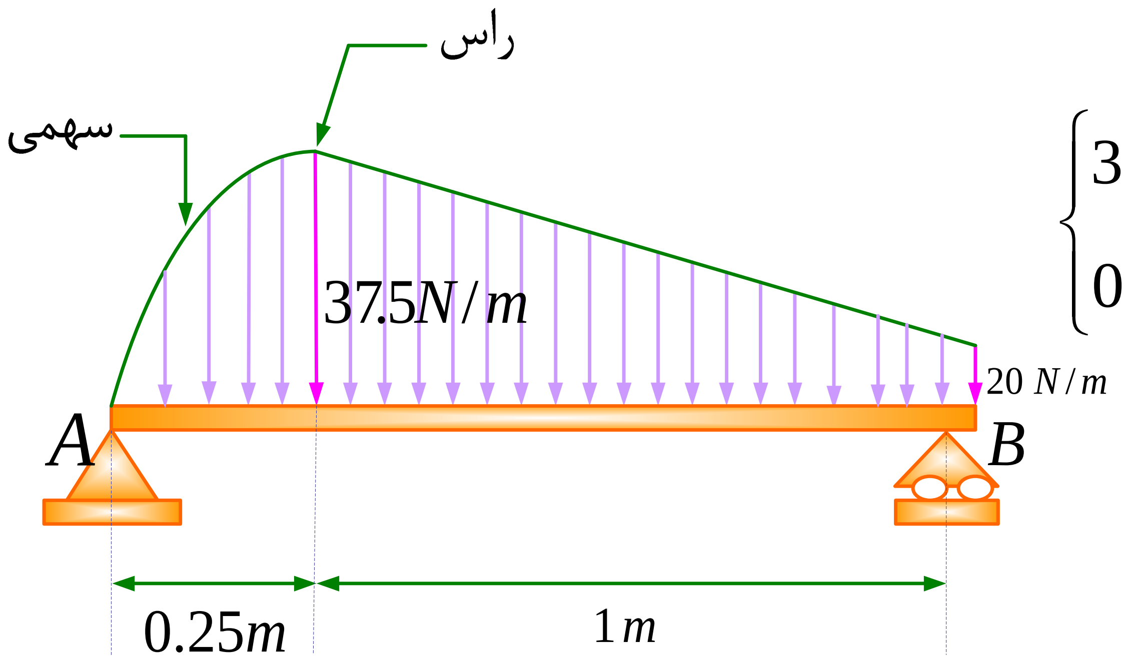
$$A_2 = {}^1\!/_2\,\rho g a \times a = {}^1\!/_2\,\rho g a^2 = 25312.5\rho g \qquad \bar{y}_2 = 2a/3 = 150$$

$$\bar{y} = \frac{A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2}{A_1 + A_2} = \frac{50625\times112.5 + 25312.5\times150}{50625 + 25312.5} = 125mm$$

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow F(h-\bar{y}) = 0 \Rightarrow h = \bar{y} = 125\ mm$$

مثال: برای تیر مطابق شکل که تحت تأثیر نیروی توزیعی قـرار دارد، مؤلفـه های عکس العمل را در تکیه گاههای A و B تعیین کنید.





$$y = ax^2 + bx$$

$$\begin{cases} 37.5 = a(0.25)^2 + b(0.25) \\ 0 \quad = a(0.5)^2 + b(0.5) \end{cases}$$

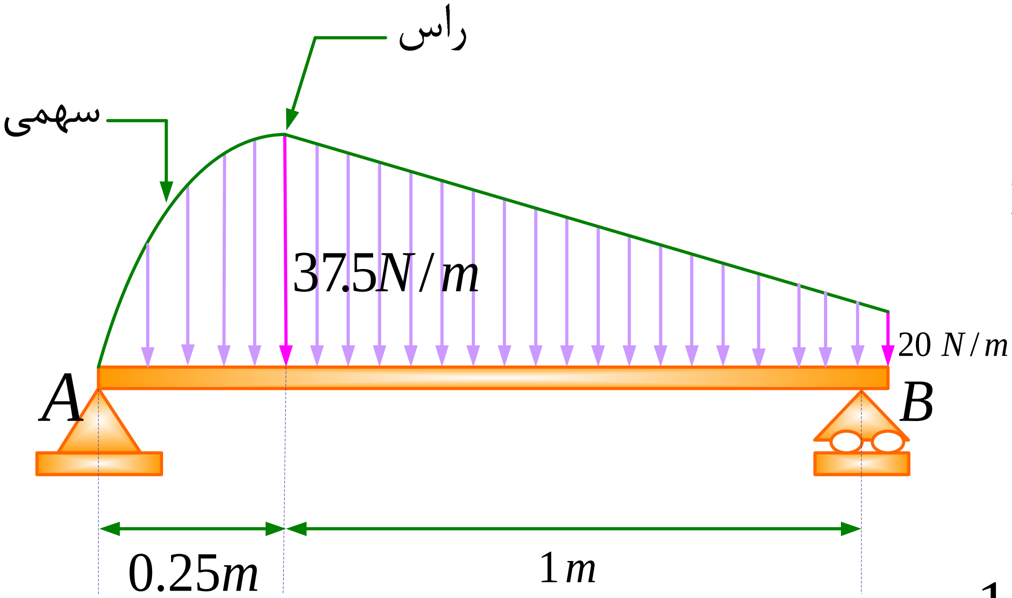
$$a = -600 \ , \ b = 300$$

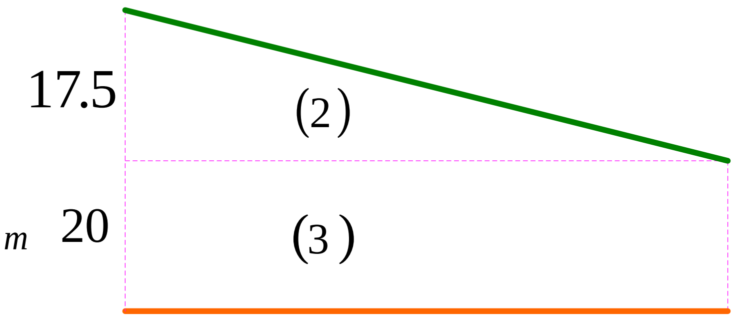
$$w(x) = -600x^2 + 300x$$

$$A_1 = \int w(x)\ dx = 300\int_0^{0.25} \left(-2x^2 + x\right)\ dx = 6.255\,N = F_1$$

$$\int xdA = \int xw(x)\ dx = 300\int_0^{0.25} \left(-2x^3 + x^2\right)\ dx = 0.977$$

$$\overline{x}_1 = \frac{\int xw(x)dx}{\int w(x)dx} = \frac{\int xdA}{\int dA} = \frac{0.977}{6.225} = 0.156\ m$$

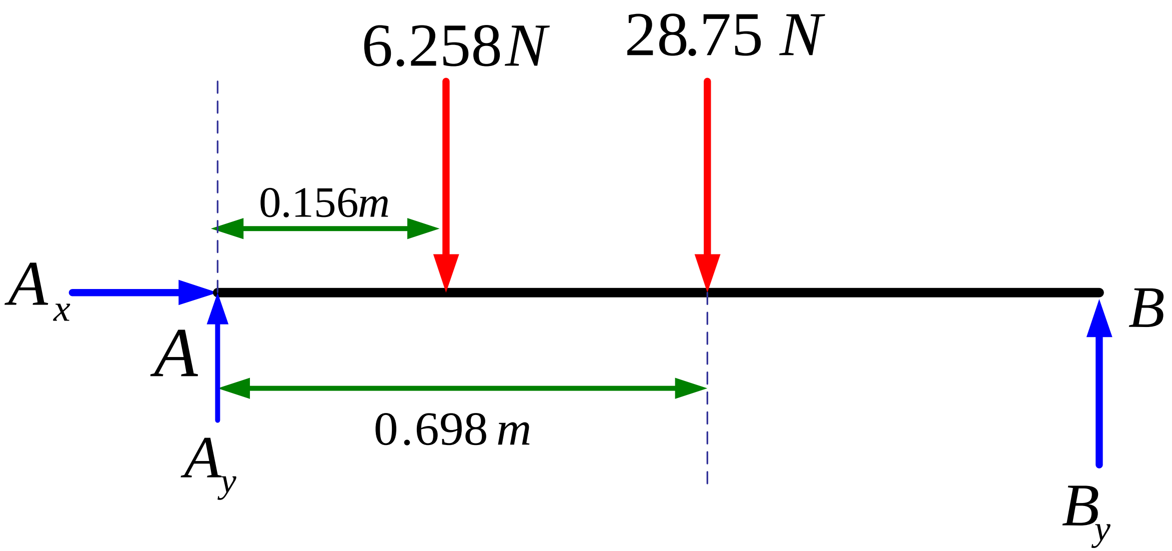




$$A_2 = \frac{17.5\times 1}{2} = 8.75N \qquad \bar{x}_2 = \frac{1}{3}m$$

$$A_3 = 1\times 20 = 20 \qquad \bar{x}_3 = \frac{1}{2}m \qquad x_2^* = \frac{A_2\bar{x}_2 + A_3\bar{x}_3}{A_2 + A_3} = 0.448\ m$$

$$A_2^* = A_2 + A_3 = 28.75\ N$$



$$A_1 = 6.25\,N = F_1$$

$$\bar{x}_1 = 0.156\ m$$

$$A_2^* = A_2 + A_3 = 28.75$$

$$x_2^* = 0.448\,m$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$1.25 \times B_y - 28.75 \times 0.698 - 6.25 \times 0.15 = 0 \quad \Rightarrow B_y = 16.83N$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 28.75 + 6.258 - A_y - B_y = 0 \quad \Rightarrow A_y = 18.17N$$

۵-تحلیل سازه ها

تراس ها - قاب ها - ماشین ها

تراس ها

به منظور تحمل نیروها طراحی می شوند. از اعضای مستقیم دو نیرویی تشکیل شده اند و برای تحلیل فرض می شوند که در دو انتها به یکدیگر پین (مفصل) شده باشند. نیروها در امتداد عضو وارد می شوند و مساوی و مختلف الجهت در دو انتها هستند.

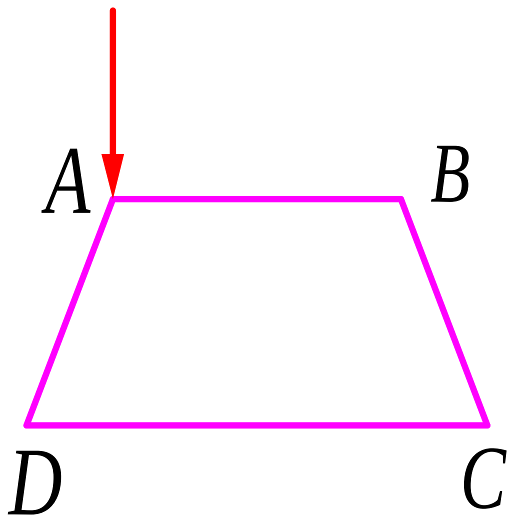
قاب ها

مانند تراس ها به منظور تحمل نیروها به کار گرفته می شوند. حداقل دارای یک عضو هستند که به آن عضو چندین نیرو اعمال می شود.

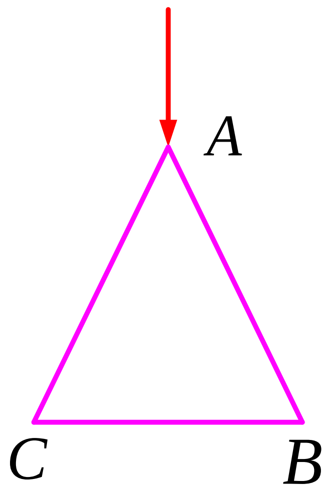
ماشین ها

به منظور انتقال و اصلاح نیروها به کار گرفته می شوند و دارای قسمت های متحرک هستند.

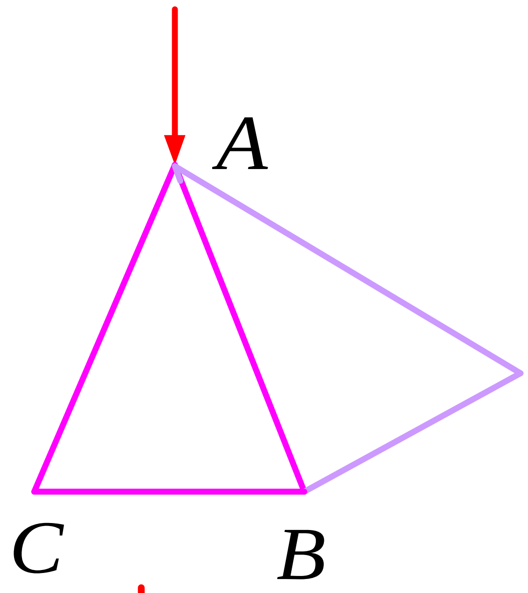
تراس صلب وساده



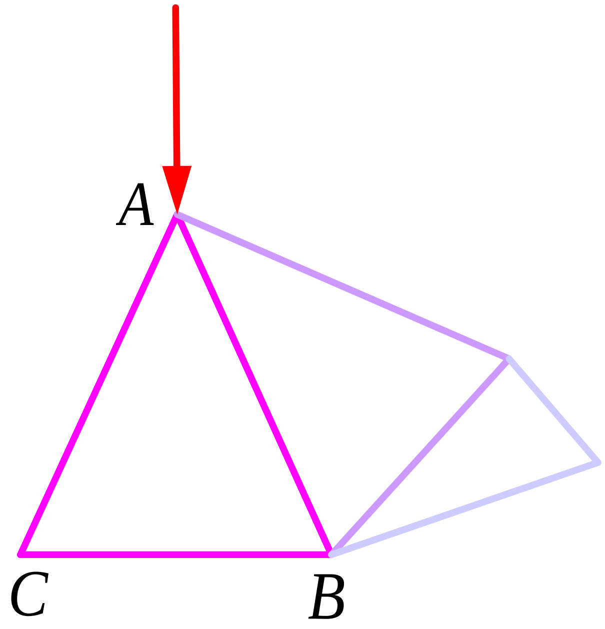
تراس صلب نیست.



تراس صلب است و می تواند نیرو تحمل کند.



تراس ساده که همچنین تراس صلب هم هست.



تعداد اعضاء = m

تعداد مفصل ها= n

$m=3 \qquad n=3$

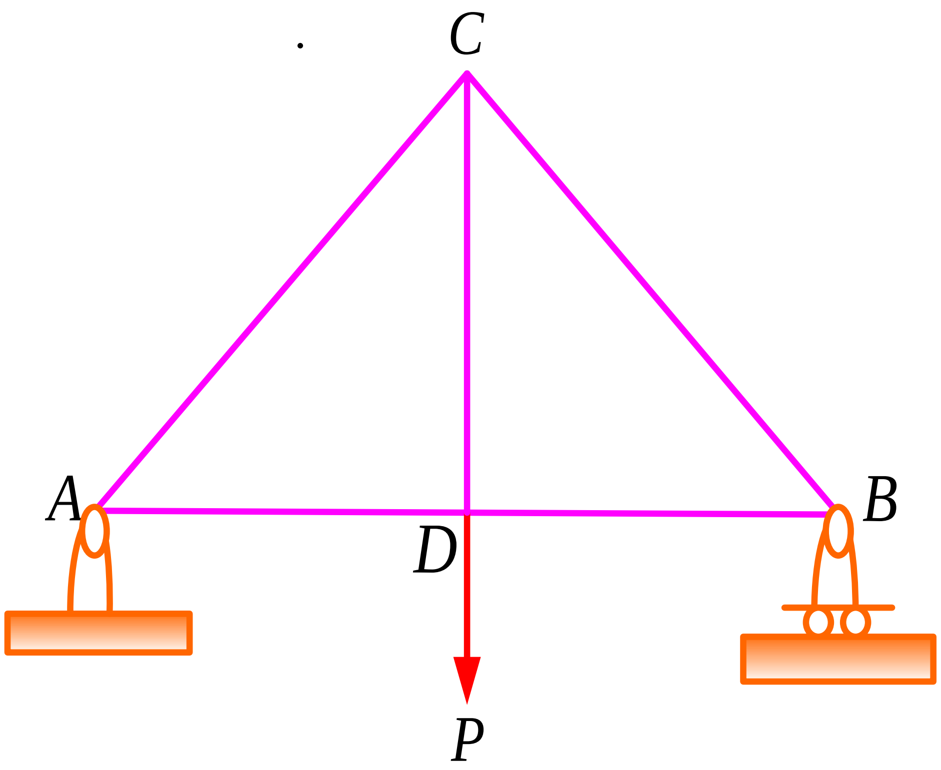
$m=5 \qquad n=4$

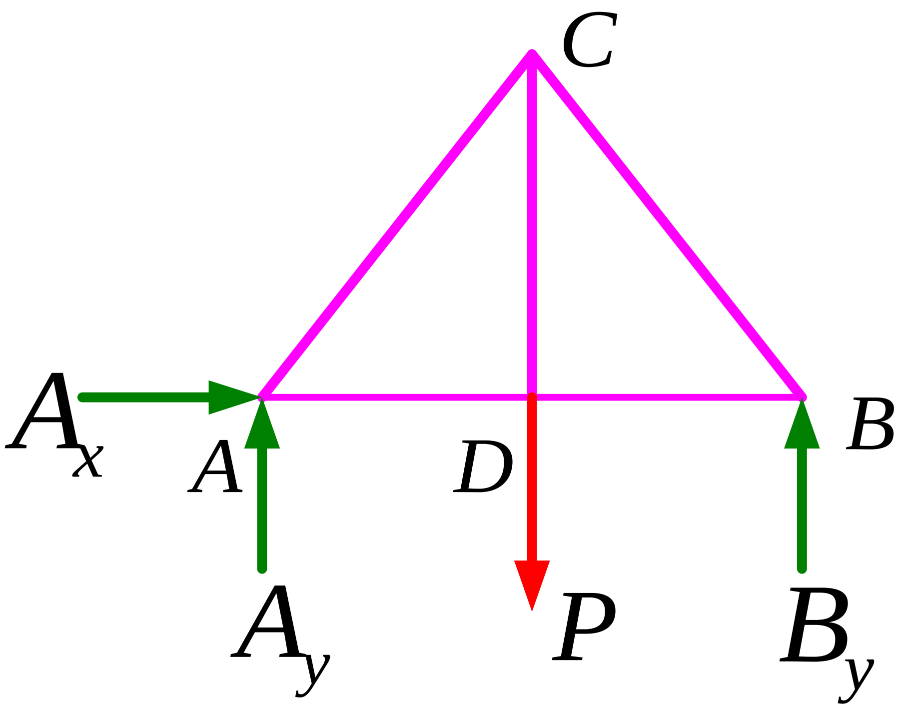
$m=7 \qquad n=5$

$$\boxed{m = 2n - 3}$$

تحلیل تراس ها

۱) روش مفصل ها





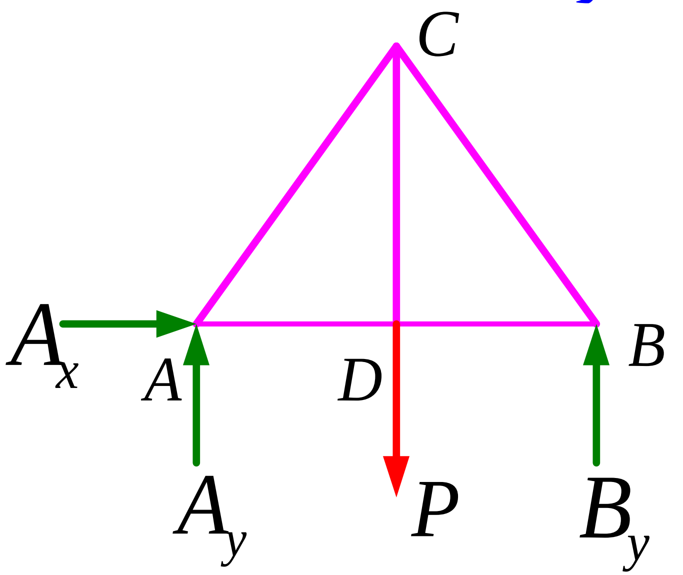
از وزن تراس در مقال نیروهای اعمالی صرف نظر می شود.

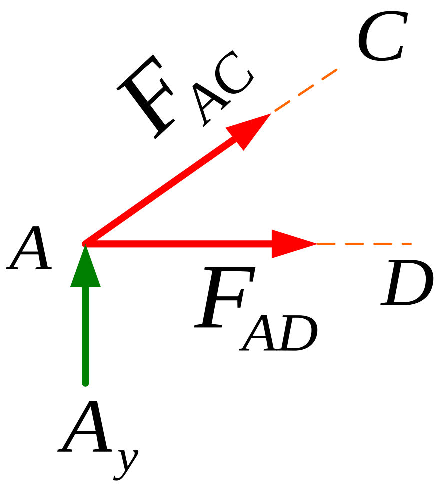
$\sum M_A = 0 \Rightarrow$ تنها مجهول B_y است $\longrightarrow$ B_y تعیین می شود

$\sum F_y = 0 \Rightarrow$ تنها مجهول A_y است $\longrightarrow$ A_y تعیین می شود

$\sum F_x = 0 \Rightarrow$ تنها مجهول A_x است $\longrightarrow$ A_x تعیین می شود

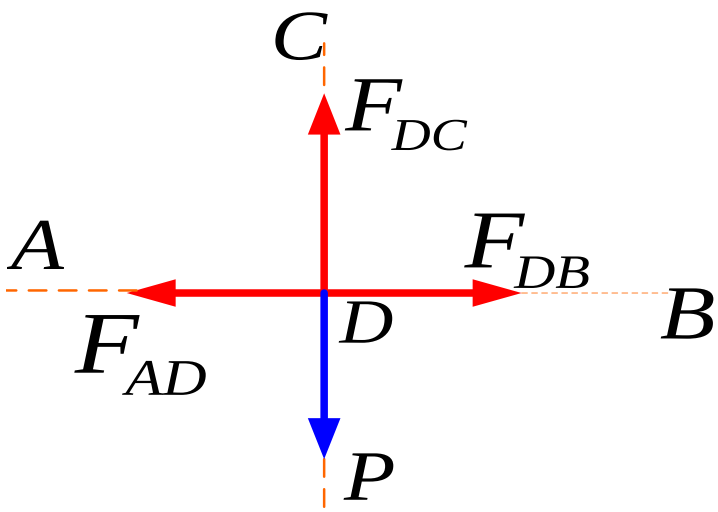
دیاگرام آزاد برای تک گره ها





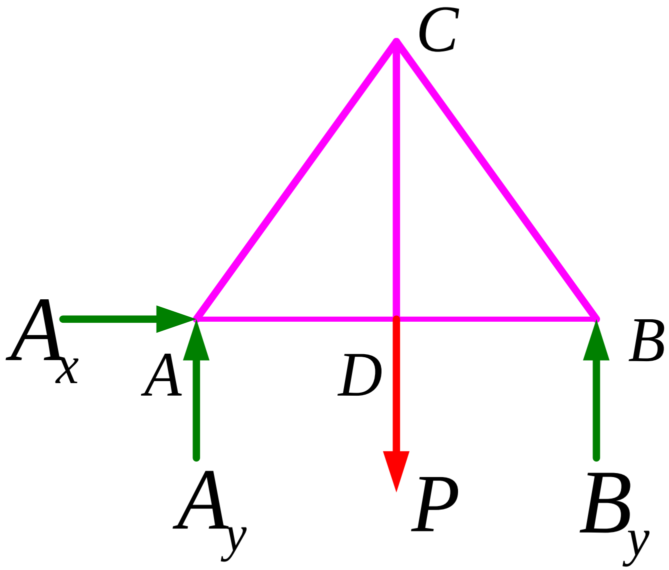
$$\sum F_x = 0$$

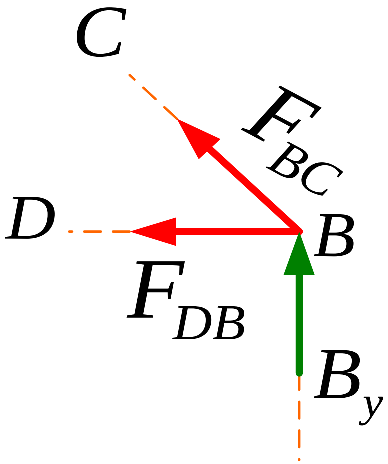
$$\sum F_y = 0$$



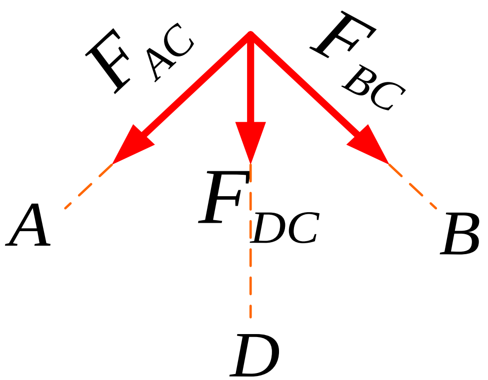
$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$





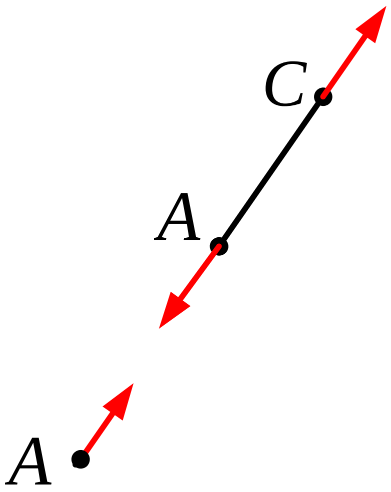
$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$



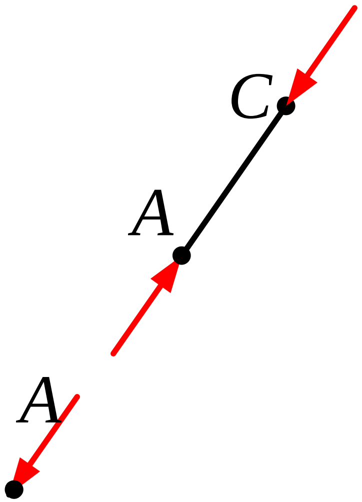
$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$

مجهولات: $F_{AC}, F_{AD}, F_{BC}, F_{DB}, F_{DC}$

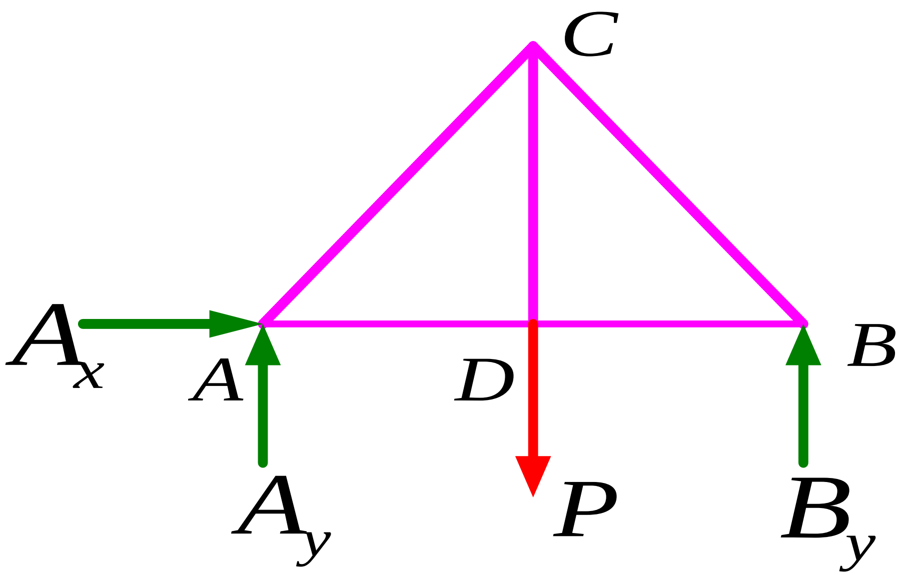
اگرنیرو به بیرون گره متوجه باشد آن عضوی که به آن مربوط می شود تحت تأثیرکشش است.



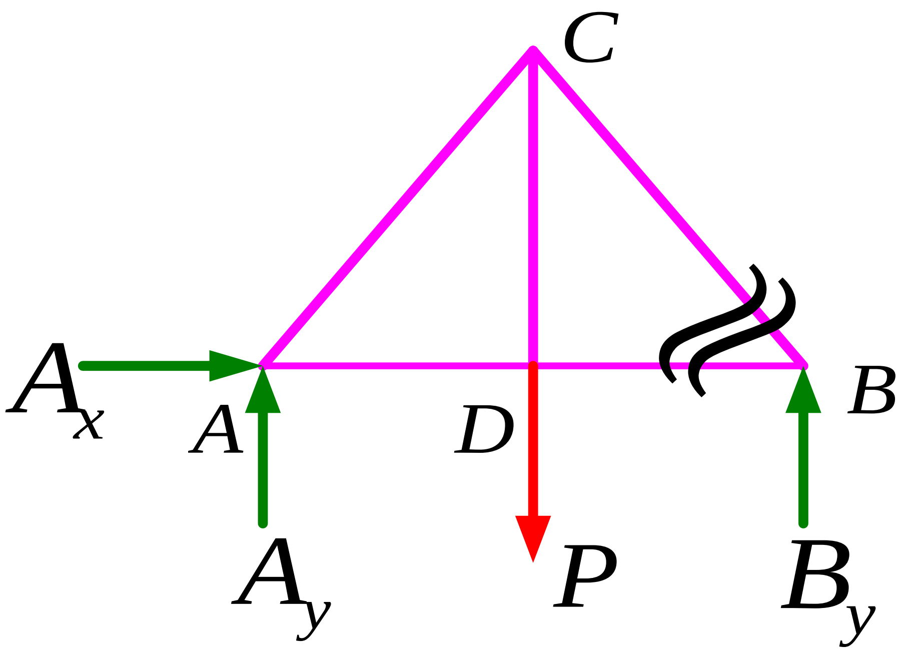
اگر نیرو به طرف گره متوجه باشد آن عضوی که به آن مربوط می شود تحت تأثیر تراکم است.

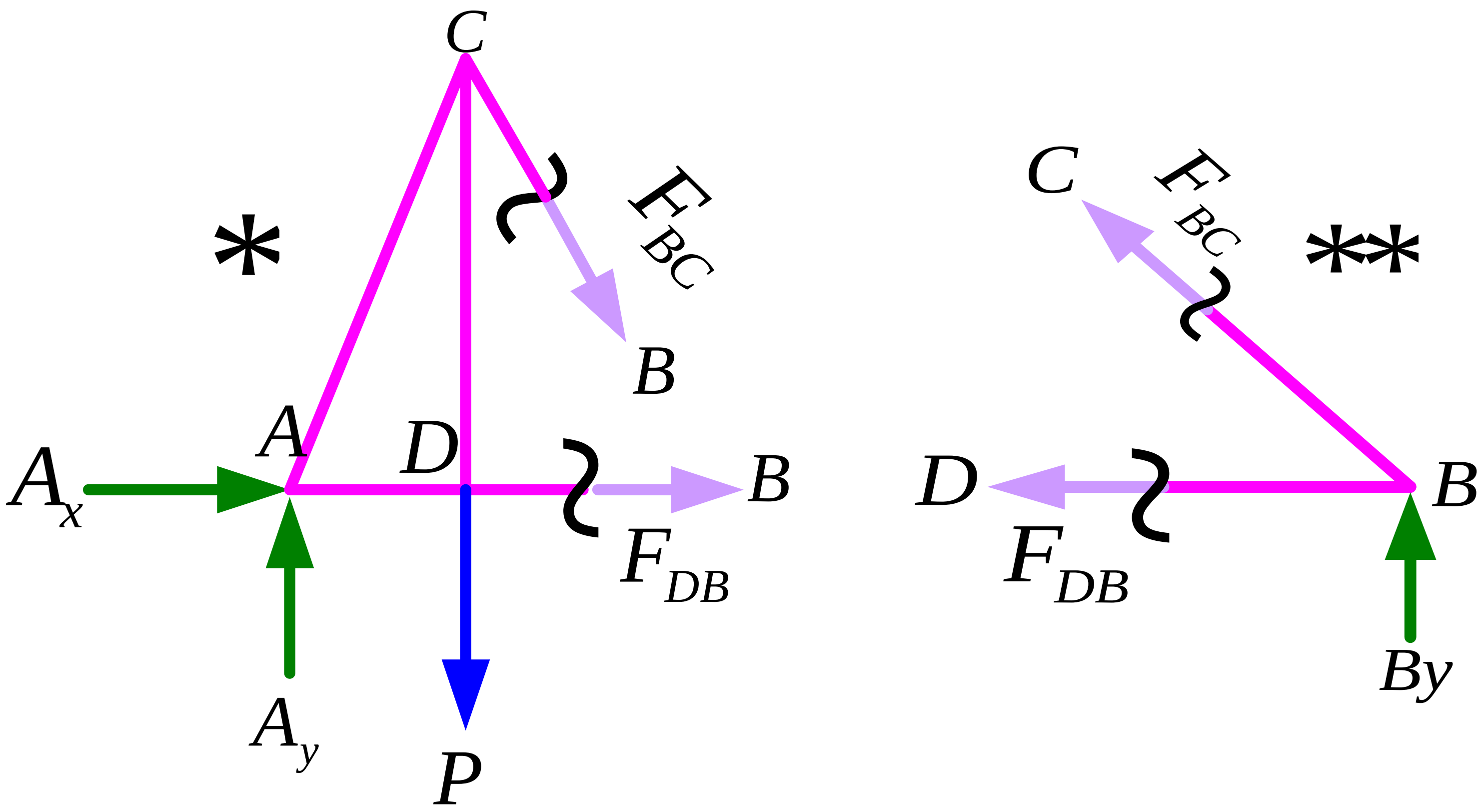


روش مقاطع



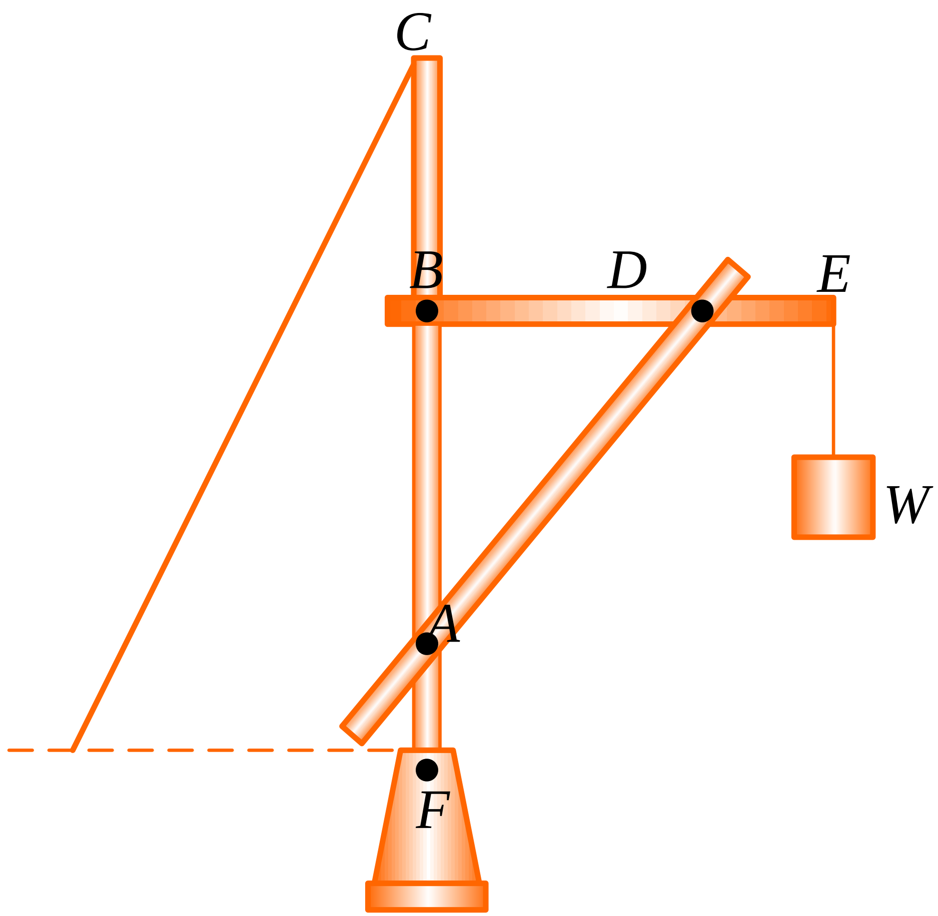
در تراس قبلی می خواهیم نیروی داخلی در عضو DB را بدست آوریم:

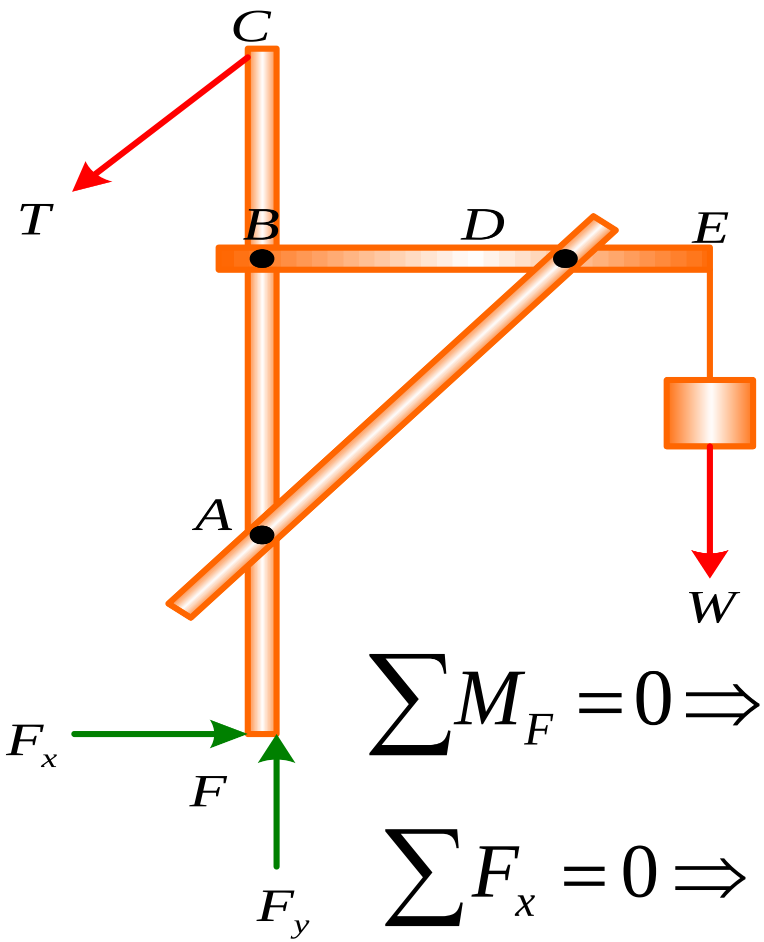




$* \rightarrow \sum M_C = 0 \Rightarrow$ F_{DB} تعیین می شود

تحلیل قاب ها

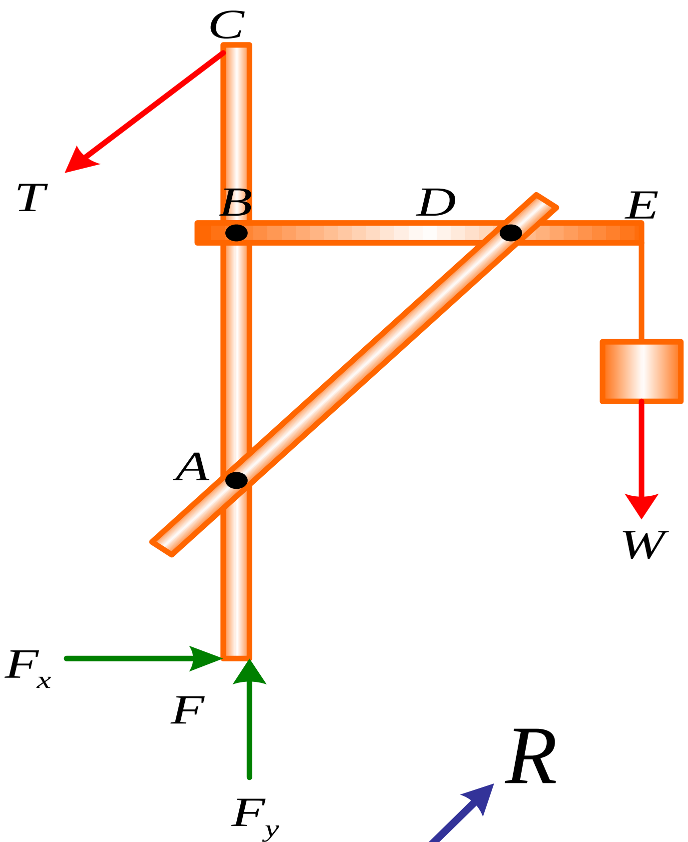


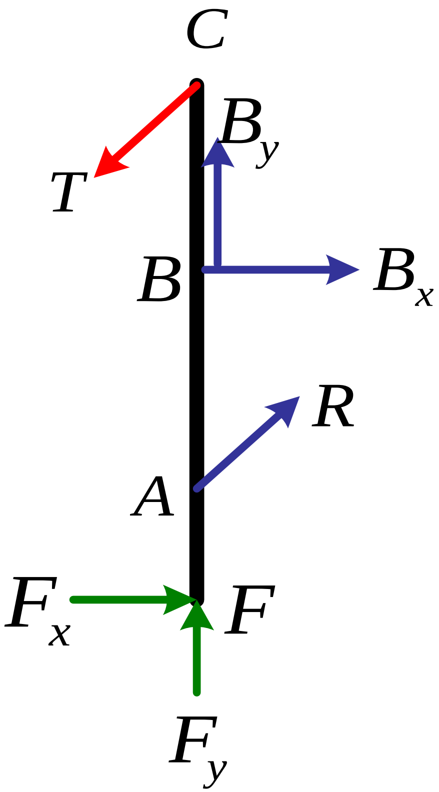


$\sum M_F = 0 \Rightarrow$ تنها مجهول T $\longrightarrow$ T بدست می آید

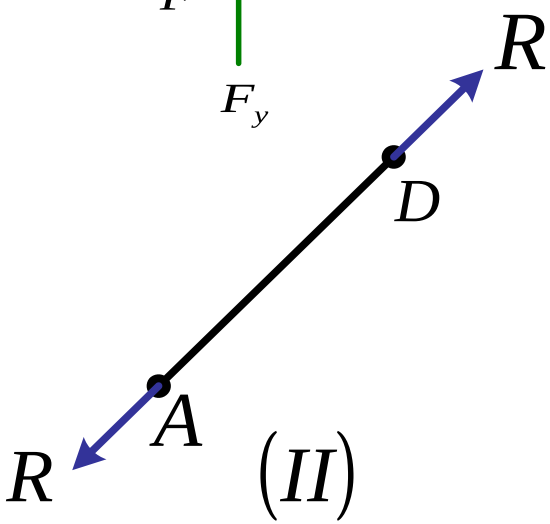
$\sum F_x = 0 \Rightarrow$ تنها مجهول F_x $\longrightarrow$ F_x تعیین می شود

$\sum F_y = 0 \Rightarrow$ تنها مجهول F_y $\longrightarrow$ F_y تعیین می شود

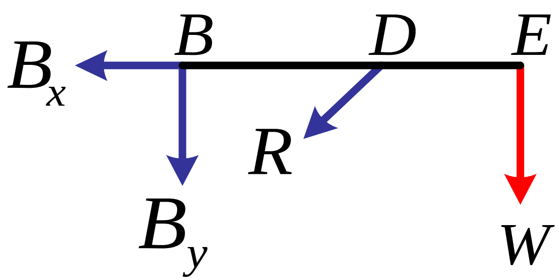




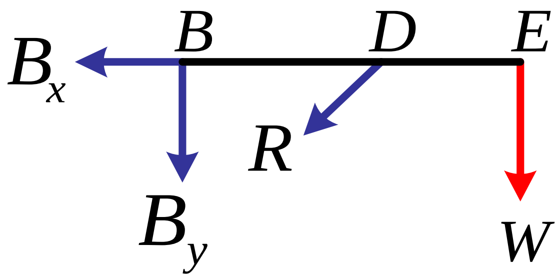
(I)



(II)



(III)



مجهولات: B_y,B_x,R

$\sum M_B = 0 \Rightarrow$ تنها مجهول R $\rightarrow$ R تعیین می شود

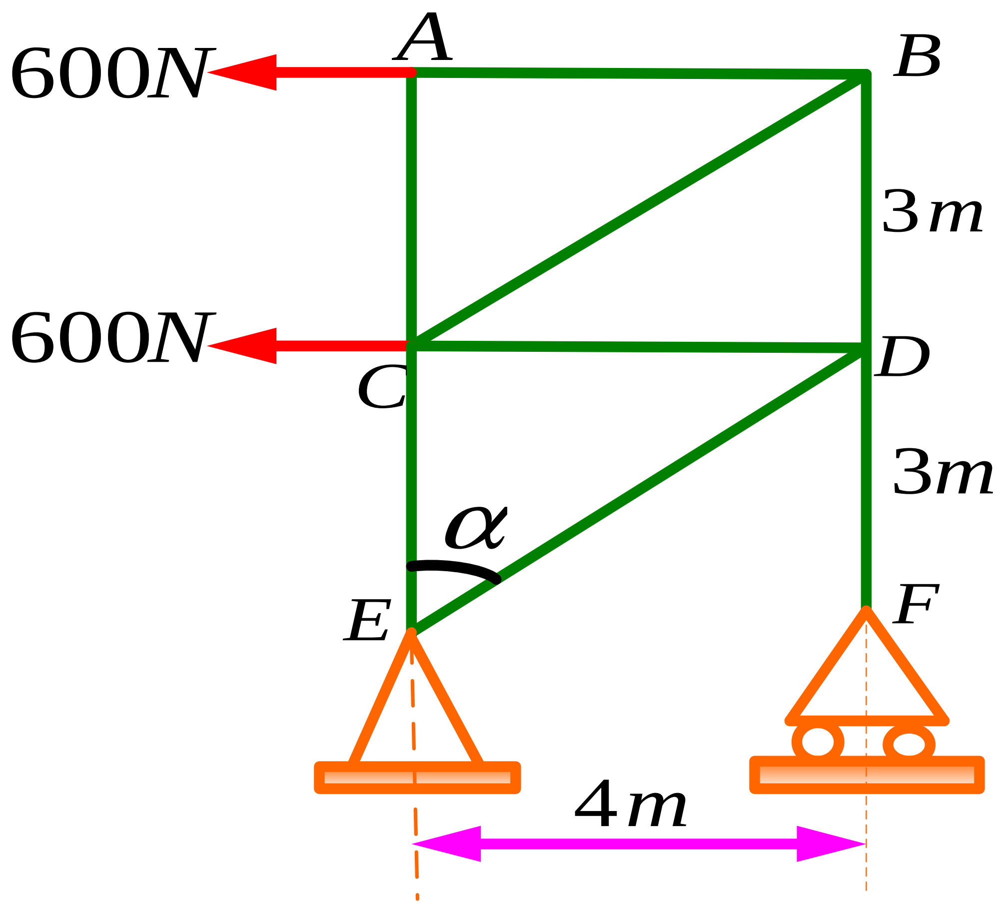
$\sum Fx = 0 \Rightarrow$ تنها مجهول B_x $\rightarrow$ B_x تعیین می شود

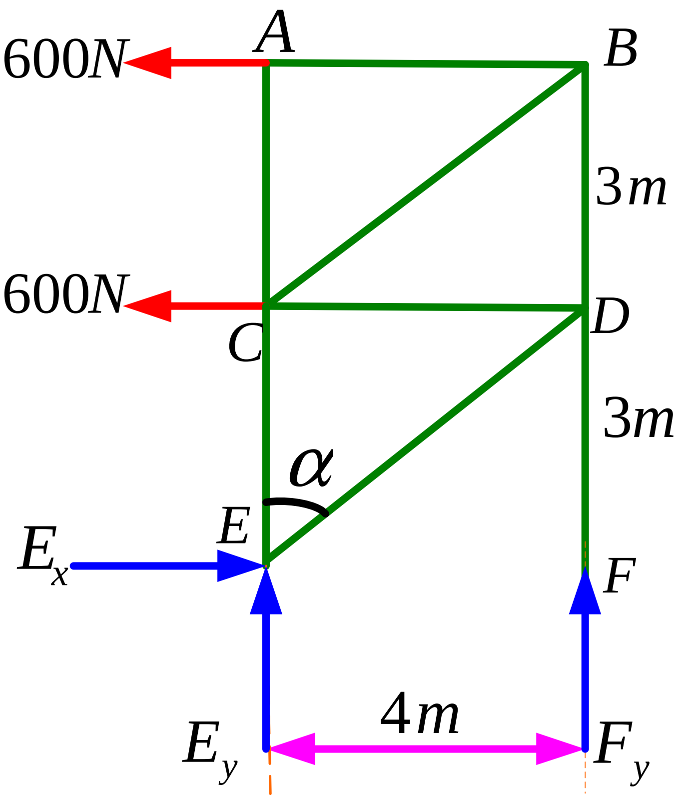
$\sum F_y = 0 \Rightarrow$ تنها مجهول B_y $\rightarrow$ B_y تعیین می شود

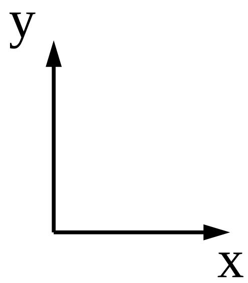
تحلیل ماشین ها

همانند تحلیل قاب ها می باشد.

مثال: با استفاده از روش مفصل ها نیروهای داخلی را در هریک از اعضای تراس ذیل بدست آورید.







$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; -600 - 600 + E_x = 0$$

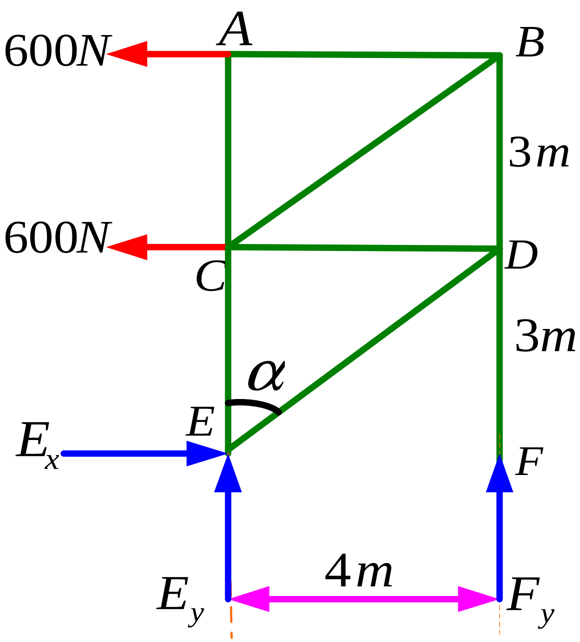
$$E_x = 1200N$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow$$

$$4F_y + 600(6) + 600(3) = 0$$

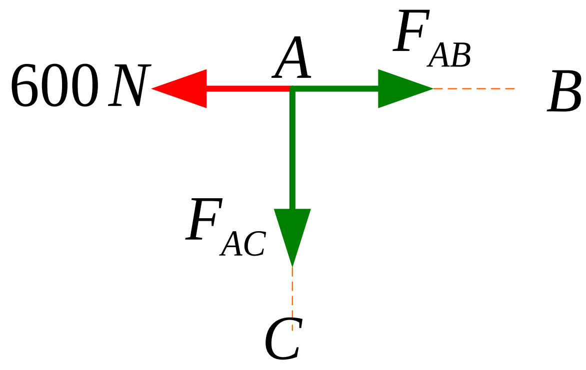
$$F_y = -1350\,N$$

$$\sum F_y \;\Rightarrow\; E_y + F_y = 0 \Rightarrow E_y = 1350$$



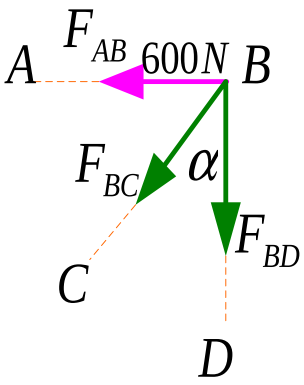
$$\sin\alpha = 0.8$$

$$\cos\alpha = 0.6$$



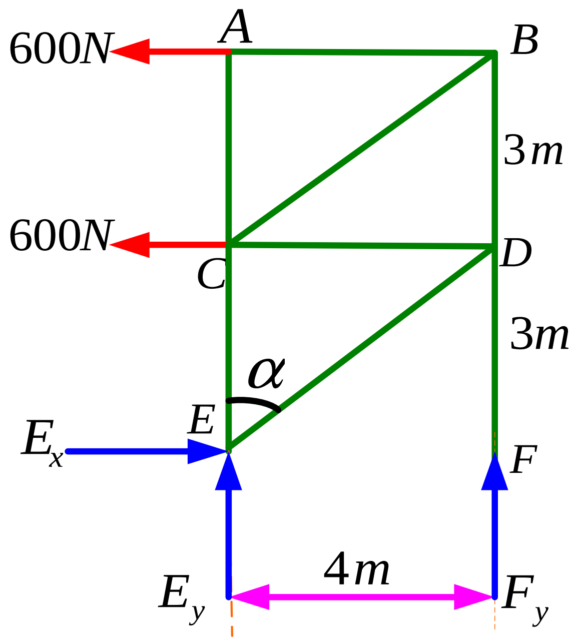
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} - 600 = 0 \qquad \boxed{F_{AB} = 600N}$$

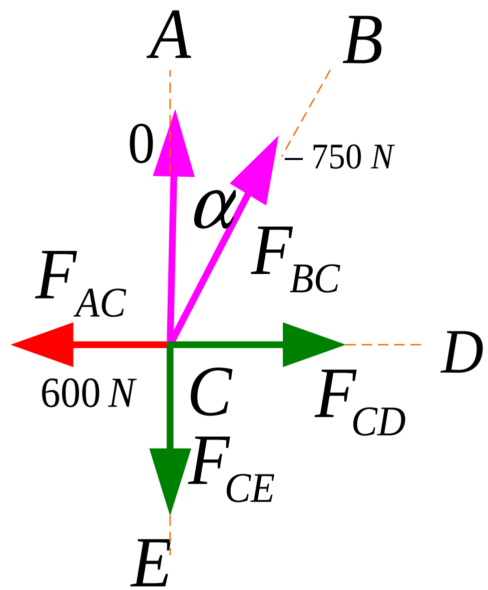
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \qquad \boxed{F_{AC} = 0}$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} + 0.8F_{BC} = 0 \Rightarrow \qquad \boxed{F_{BC} = -750N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{BD} + 0.6F_{BC} = 0 \Rightarrow \qquad \boxed{F_{BD} = 450N}$$



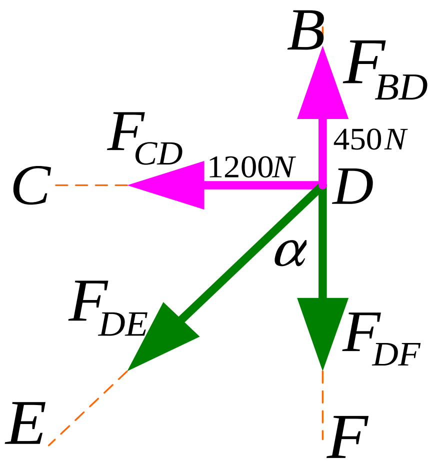


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{CD} - 600 + 0.8F_{BC} = 0$$

$$\boxed{F_{CD} = 1200N}$$

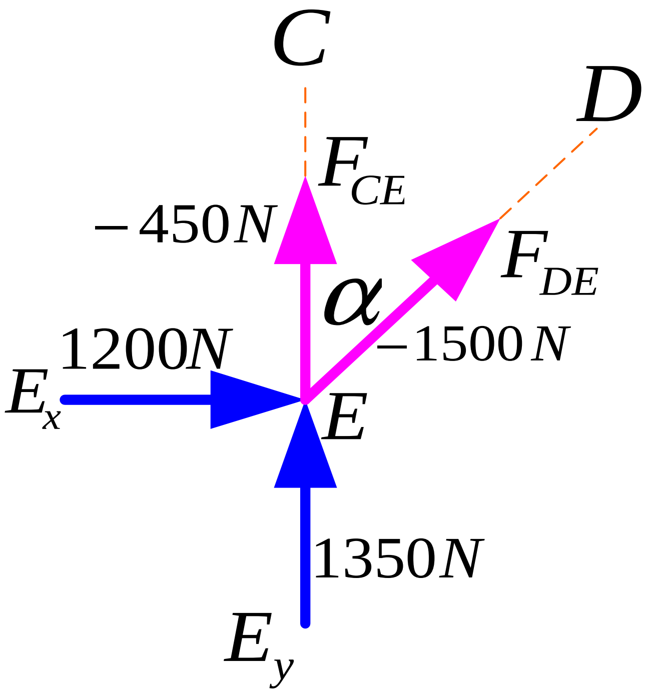
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 0.6F_{BC} + F_{AC} - F_{CE} = 0$$

$$\boxed{F_{CE} = -450N}$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F_{CD} - 0.8F_{DE} = 0 \qquad F_{DE} = -1500N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -F_{DF} - 0.6F_{DE} + F_{BD} = 0 \qquad F_{DF} = 1350N$$



$$\sum F_x = 0$$

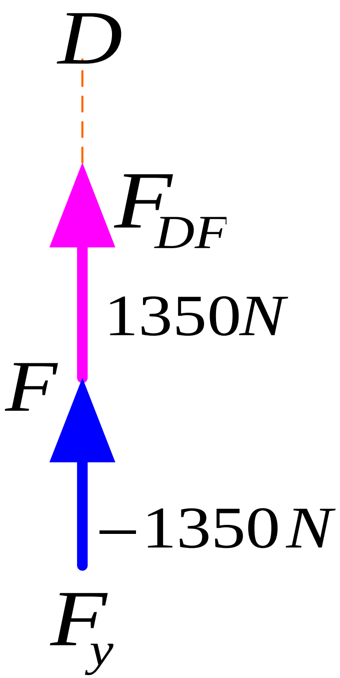
$$1200 + 0.8F_{DE} = 0$$

$$F_{DE} = -1500N$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{CE} + 1350 + 0.6F_{DE} = 0$$

$$F_{CE} = -450N$$

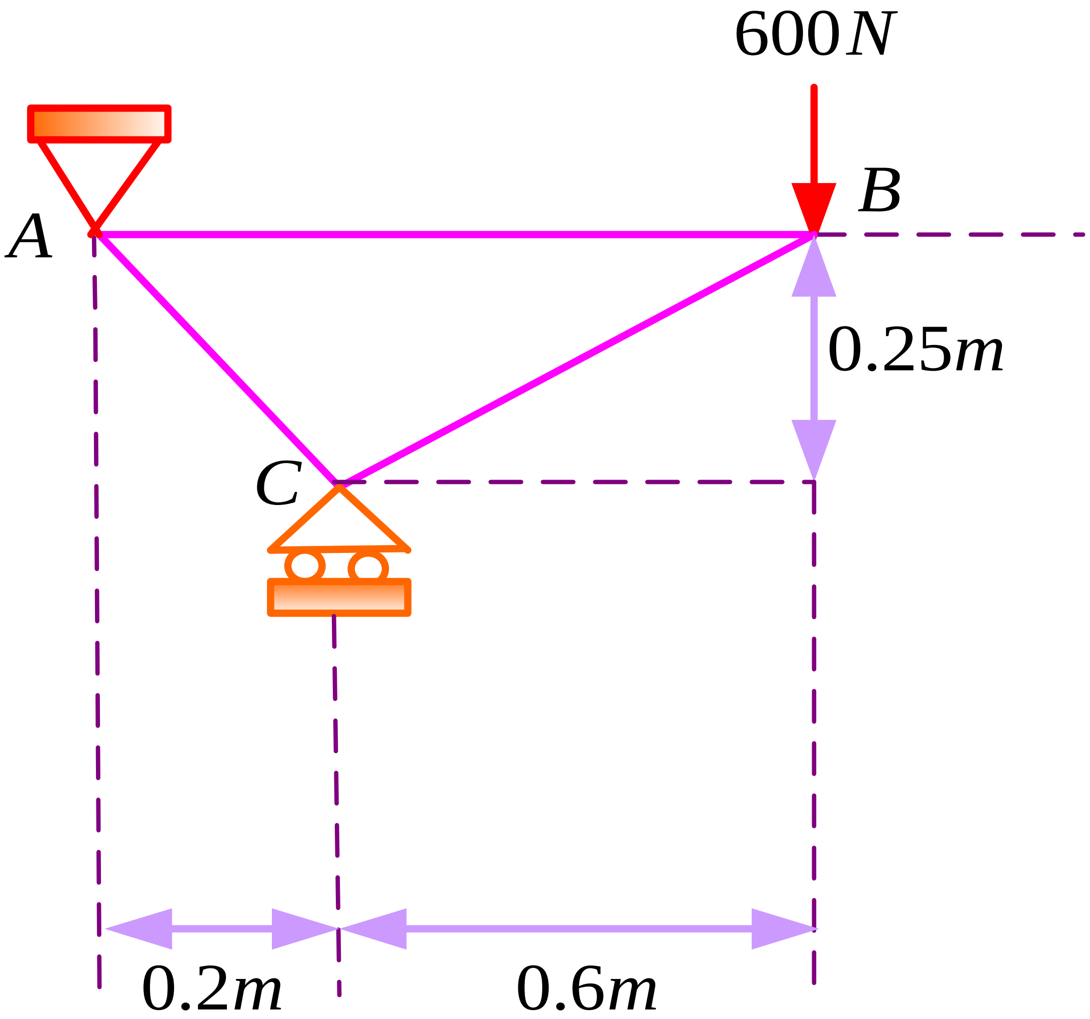


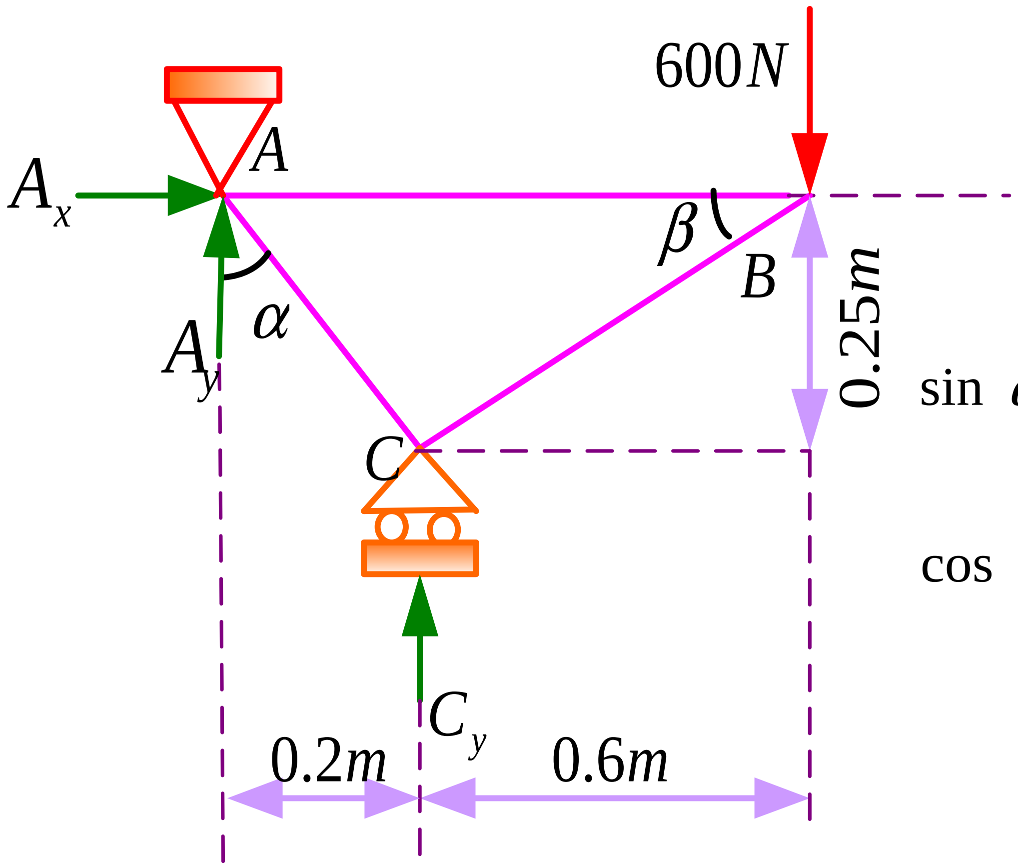
$$\sum F_y = 0$$

$$F_y + F_{DF} = 0$$

$$F_{DF} = 1350N$$

مثال: برای تراس مطابق شکل نیروهای داخلی در هر یک ازاعضا را تعیین کرده و اعـضای کششی و فشاری را مشخص کنید.





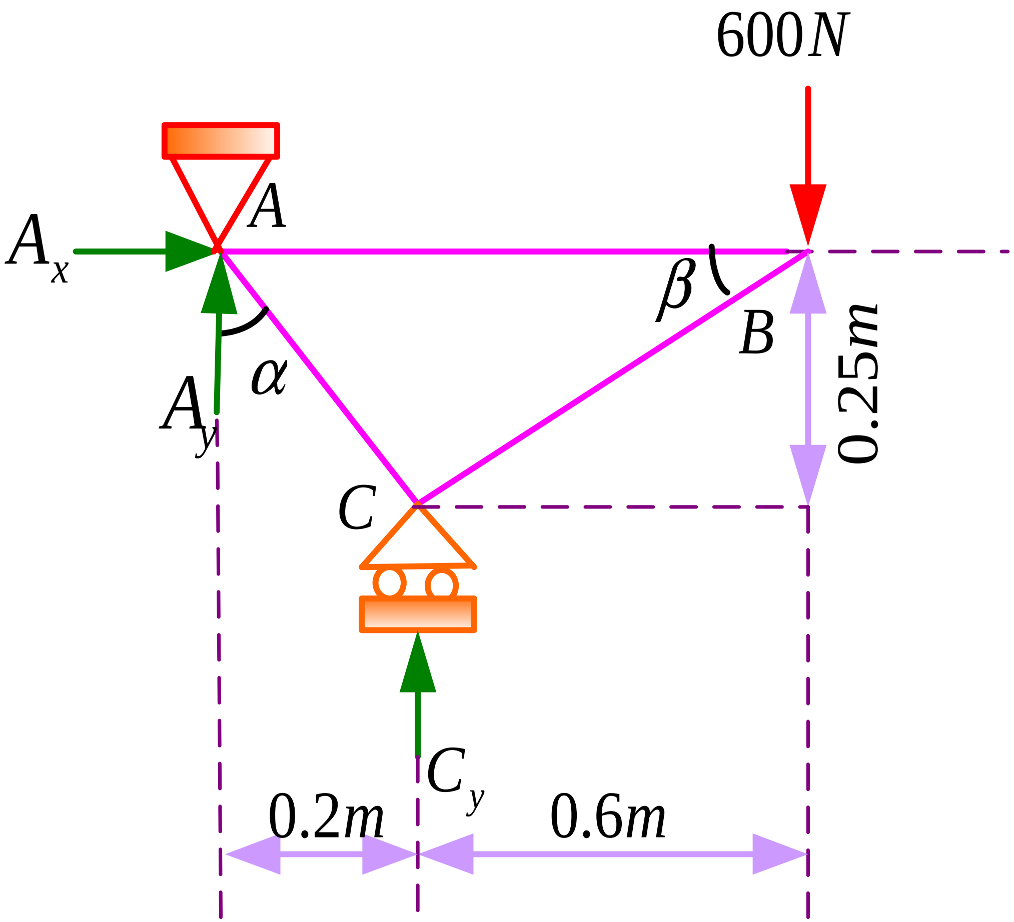
$$\sin\alpha = \frac{0.2}{\sqrt{(0.2)^2 + (0.25)^2}} = 0.63$$

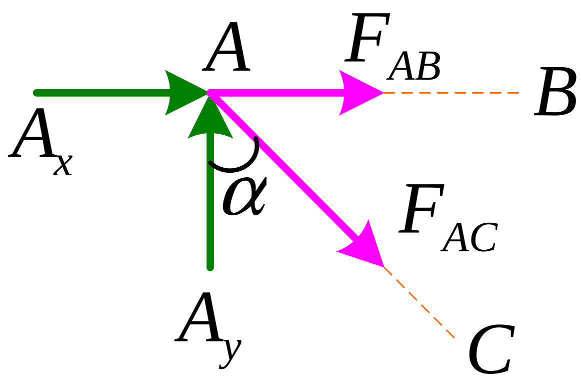
$$\cos\alpha = \frac{0.25}{\sqrt{(0.2)^2 + (0.25)^2}} = 0.78$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 0.2C_y - 600(0.8) = 0 \;\Rightarrow C_y = 2400N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \; C_y + A_y - 600 = 0 \;\Rightarrow A_y = -1800N$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \; A_x = 0$$





$$\sin\alpha = 0.63$$

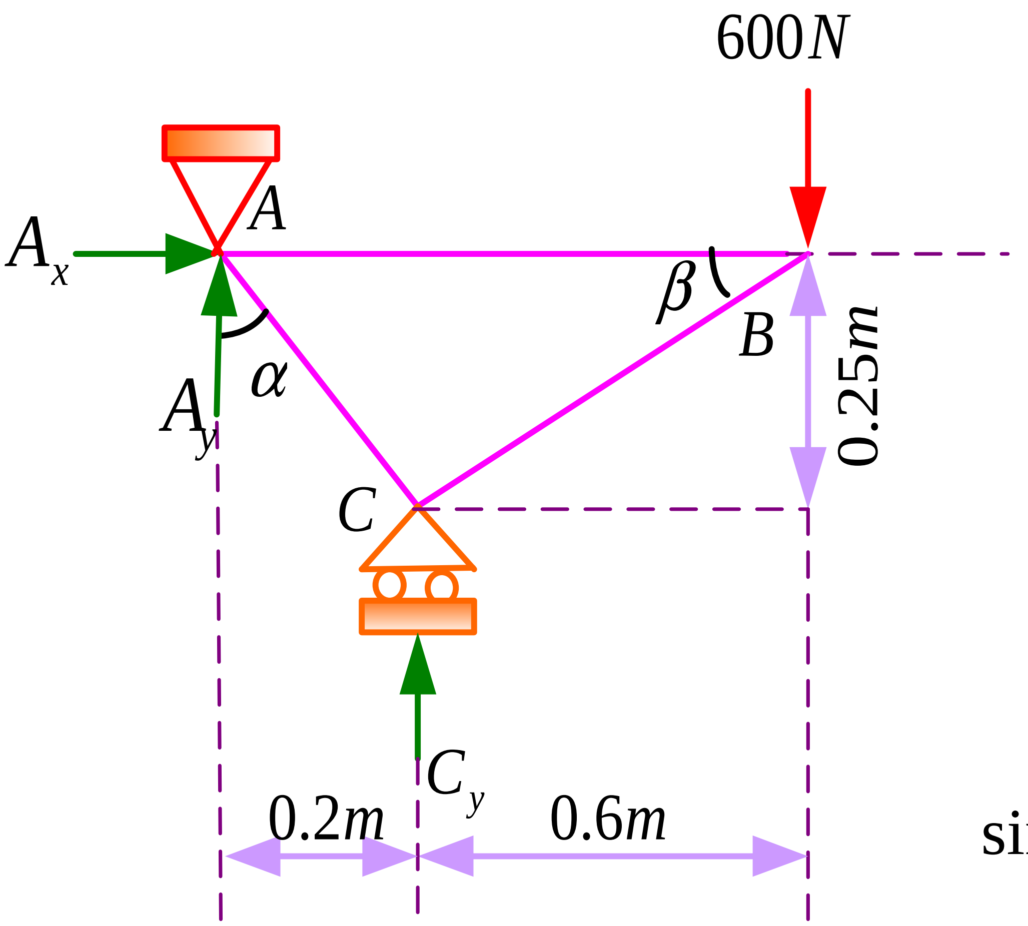
$$\cos\alpha = 0.78$$

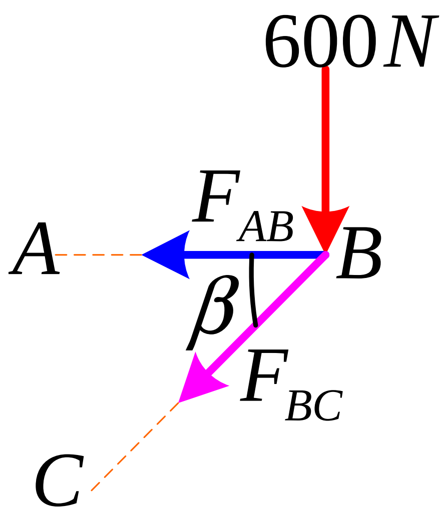
$$A_x = 0 \qquad A_y = -1800N$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} + F_{AC}\sin\alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - F_{AC}\cos\alpha = 0$$

$$-1800 - F_{AC}(0.78) = 0 \Rightarrow \begin{cases} F_{AC} = -2307.6N \\ F_{AB} = 1435.8N \end{cases}$$



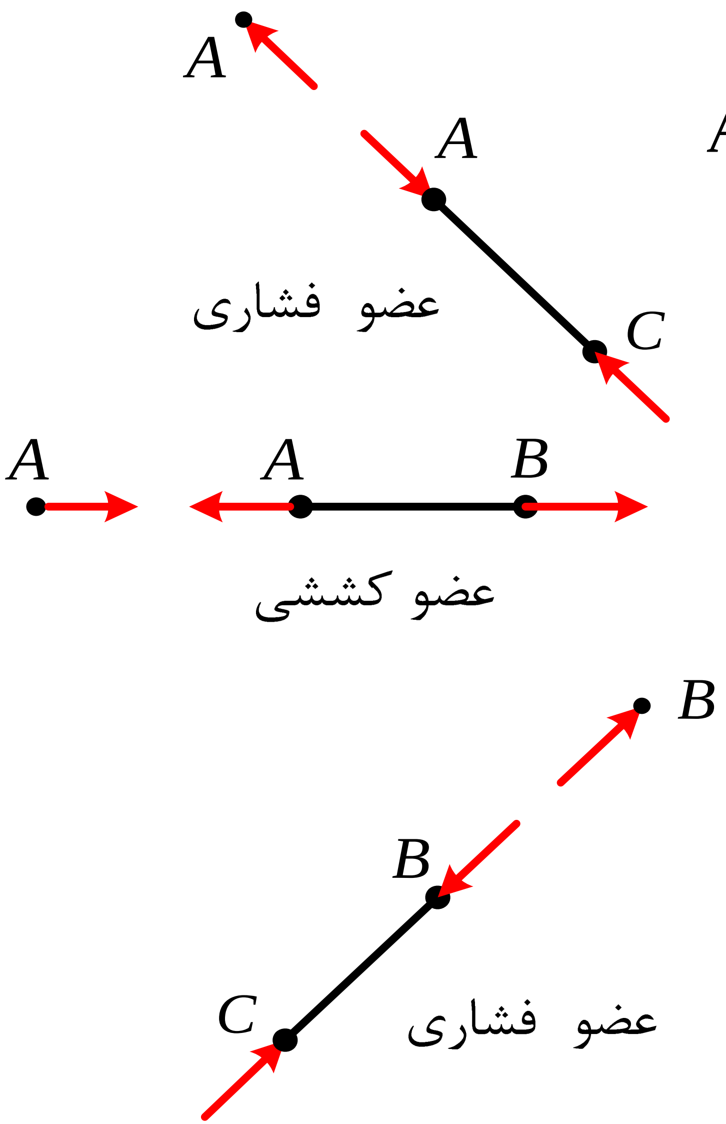


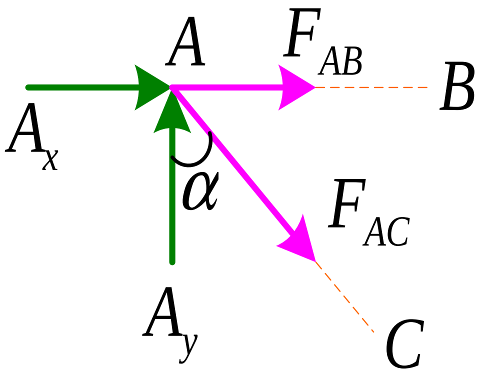
$$F_{AB} = 1435.8N$$

$$\sin\beta = \frac{0.25}{\sqrt{(0.25)^2 + (0.6)^2}} = 0.38$$

$$\cos\beta = \frac{0.6}{\sqrt{(0.25)^2 + (0.6)^2}} = 0.92$$

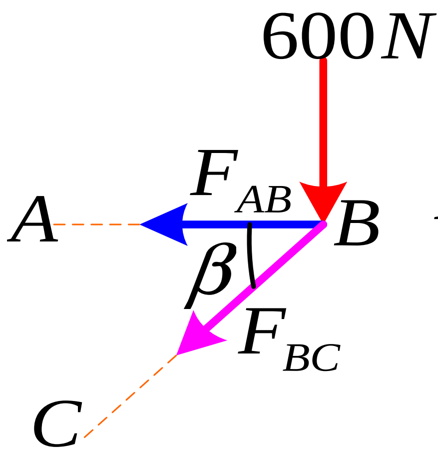
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} + F_{BC}\cos\beta = 0 \Rightarrow F_{BC} = -1580.2$$





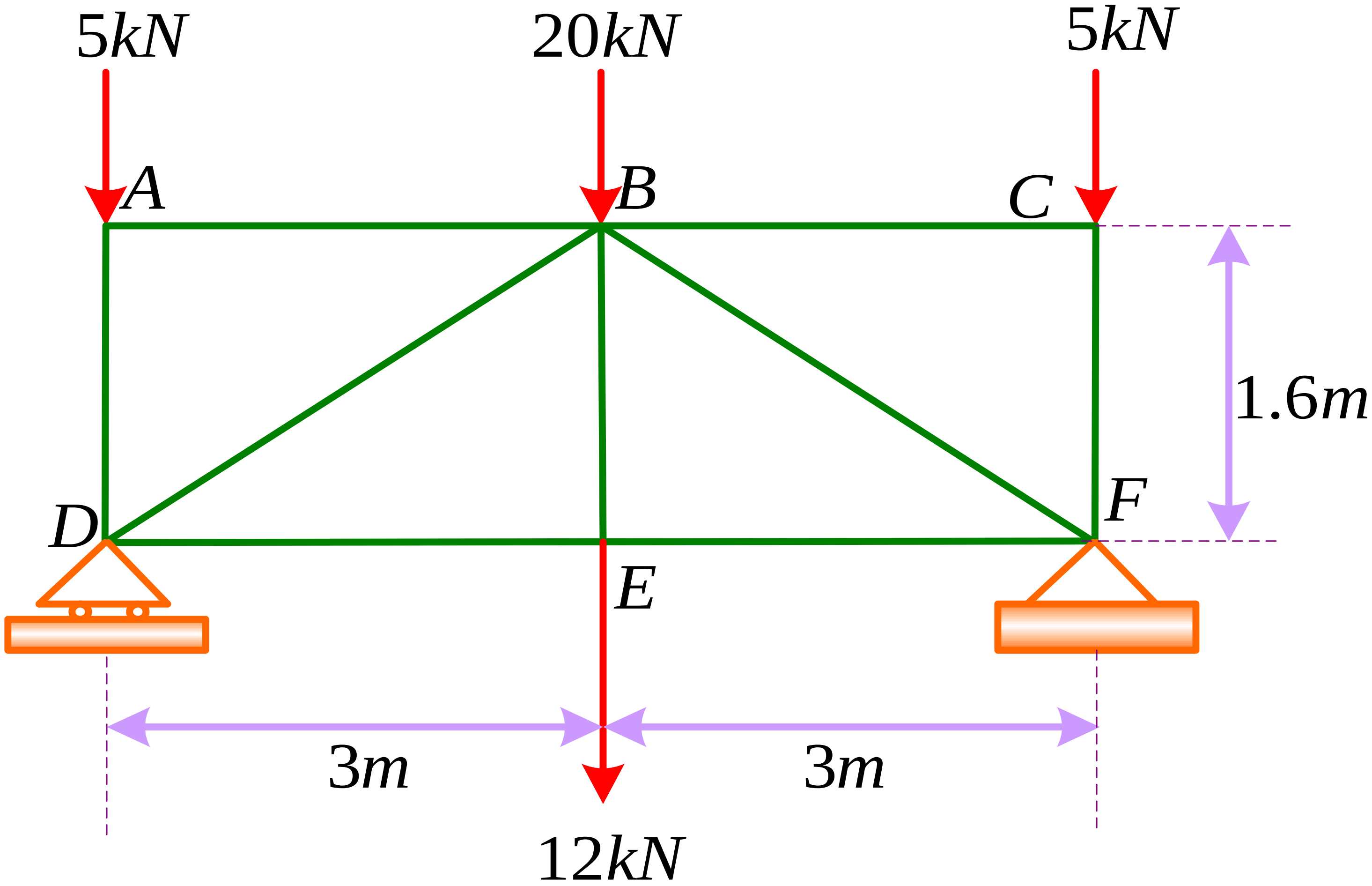
$$F_{AC} = -2307.6N$$

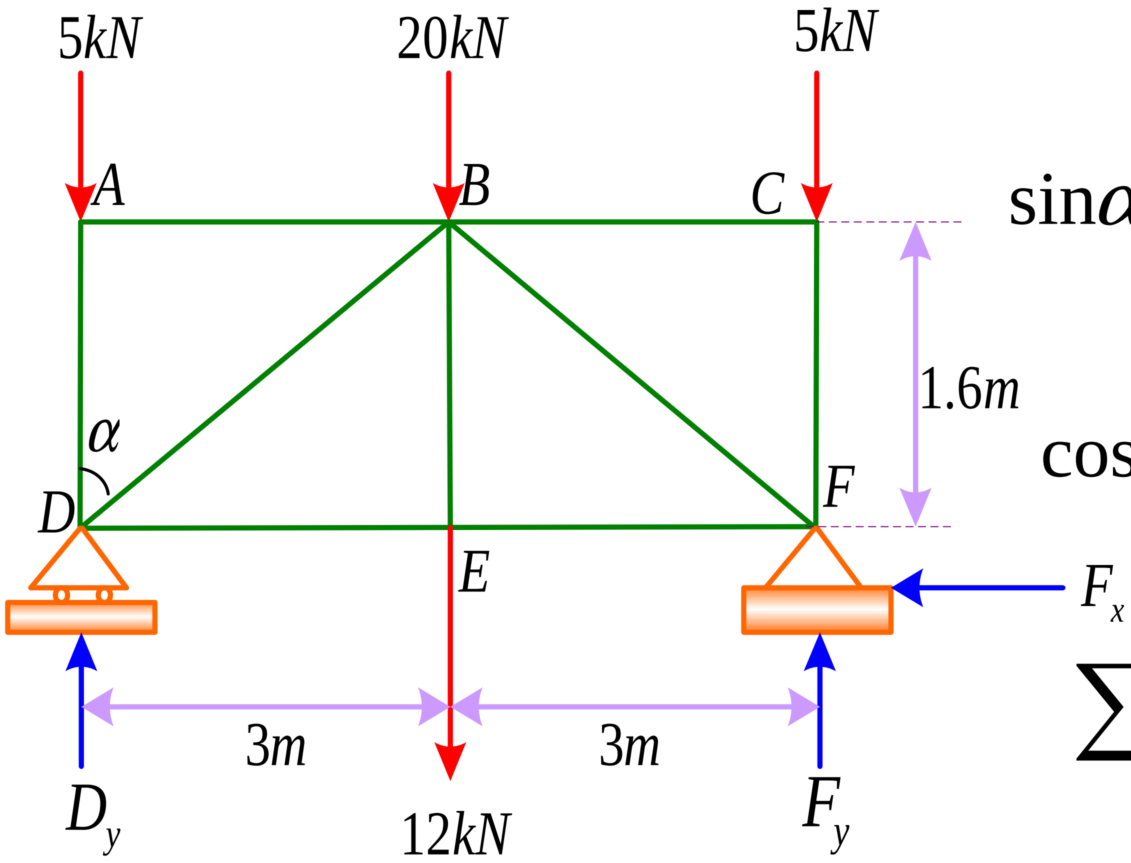
$$F_{AB} = 1435.8N$$



$$F_{BC} = -1580.2$$

مثال: برای تراس نشان داده شده در شکل نیروهای داخلی را در هر یـک از اعـضا مشخص کنید.





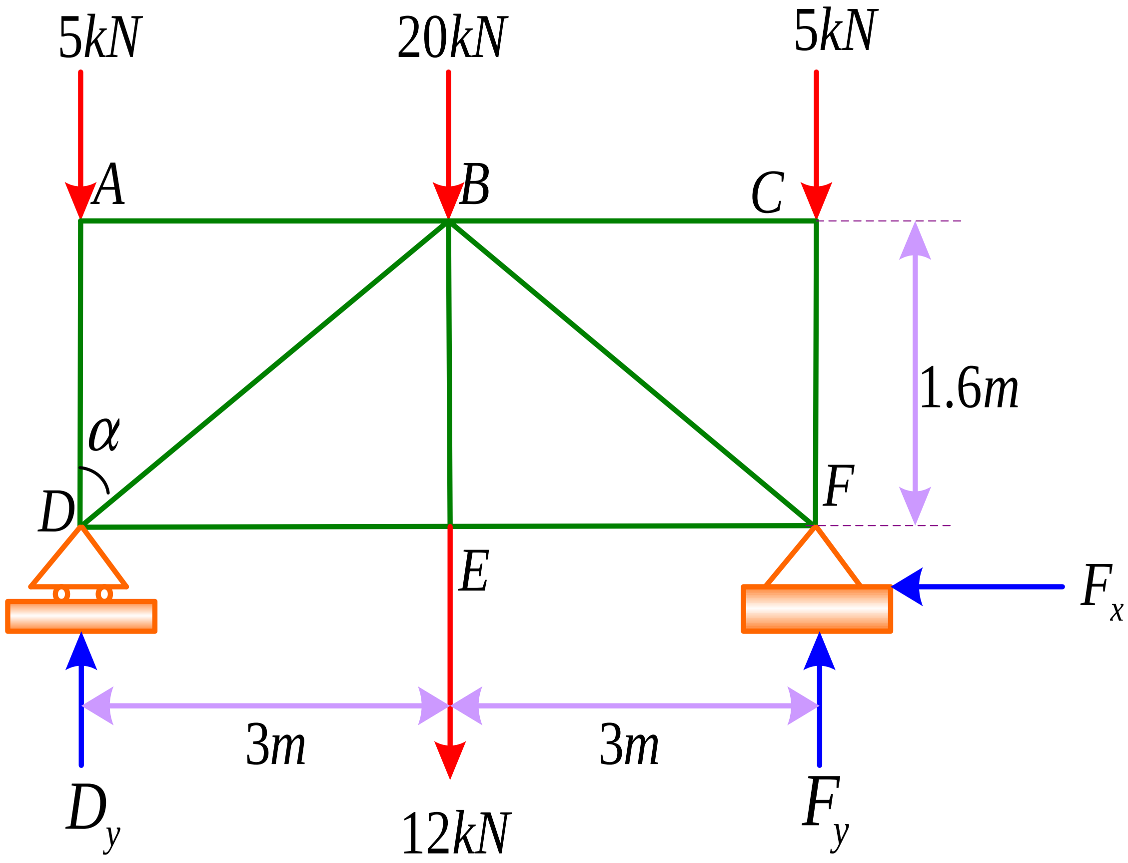
$$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2 + (1.6)^2}} = 0.88$$

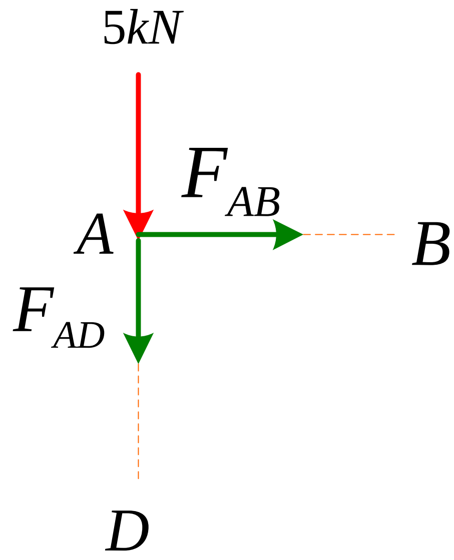
$$\cos\alpha = \frac{1.6}{\sqrt{3^2 + (1.6)^2}} = 0.47$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_x = 0$$

$$\sum M_F = 0 \quad D_y(6) - 12(3) - 20(3) - 5(6) = 0 \Rightarrow \quad D_y = 21kN$$

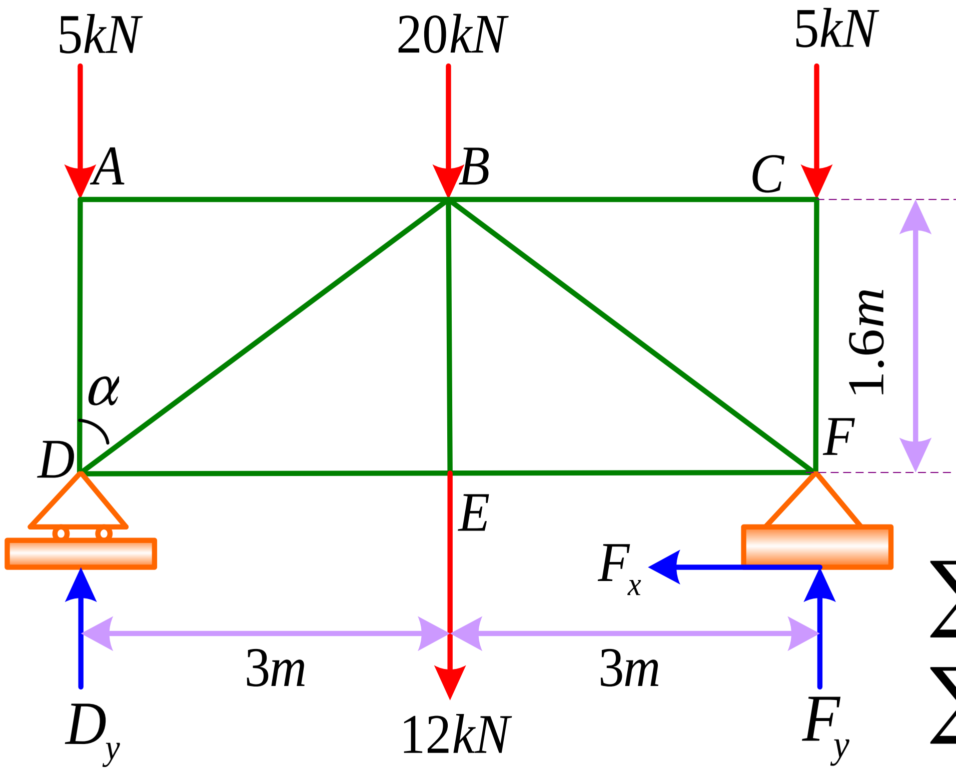
$$\sum F_y = 0 \quad F_y + D_y - 5 - 20 - 12 - 5 = 0 \Rightarrow \quad F_y = 21kN$$





$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 5 + F_{AD} = 0 \Rightarrow \quad F_{AD} = -5kN$$

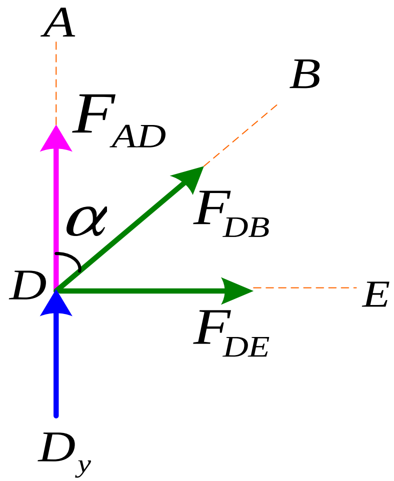


$$\sin\alpha = 0.88$$

$$\cos\alpha = 0.47$$

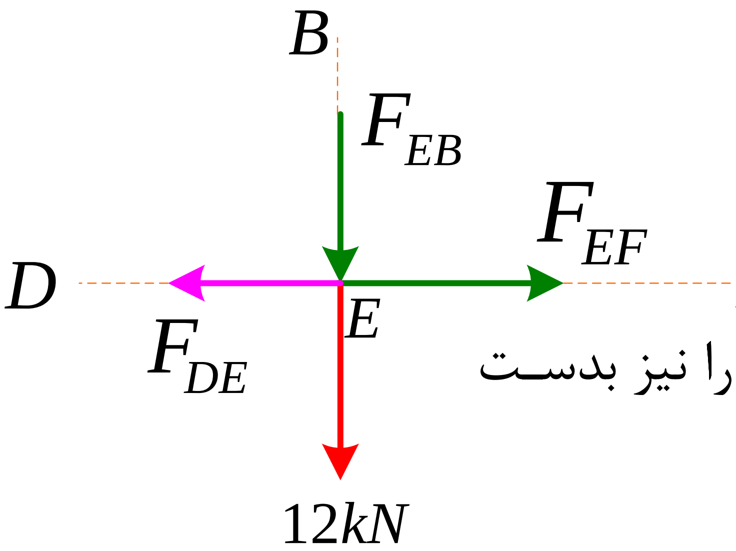
$$F_{AD} = -5kN$$

$$D_y = 21kN$$



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow D_y + F_{AD} + F_{DB}\cos\alpha = 0$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{DE} + F_{DB}\sin\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} F_{DB} = -34\,kN \\ F_{DE} = 30\,kN \end{cases}}$$

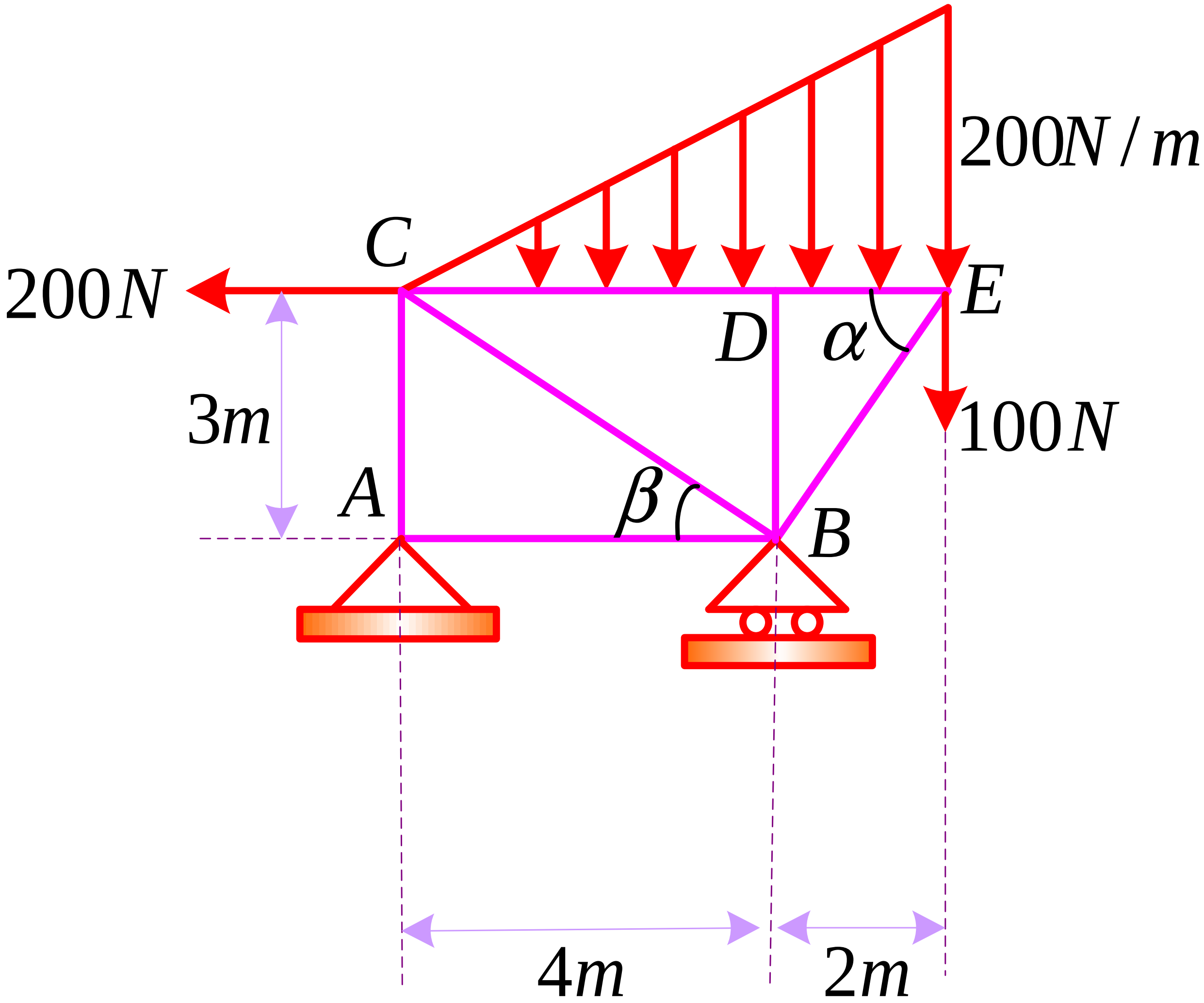


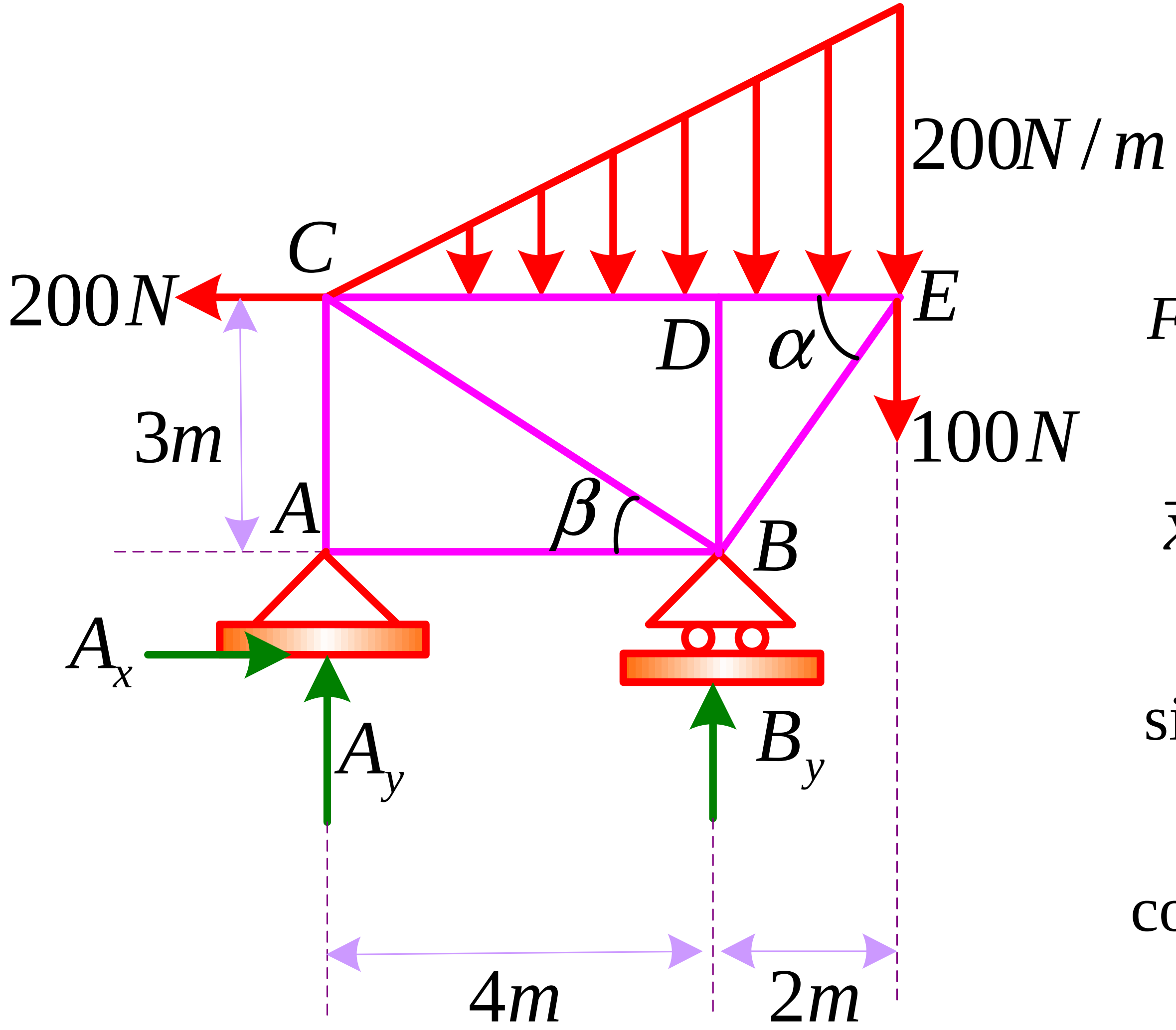
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{EF} - F_{DE} = 0 \Rightarrow \boxed{F_{EF} = 30kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{EB} - 12 = 0 \Rightarrow \boxed{F_{EB} = 12kN}$$

چون شکل متقارن است می توانیم بقیه نیروهای داخلی را نیز بدست آوریم.

مثال: برای تراس نشان داده شده در شکل نیروهای داخلی در هر یک از اعضا را تعیین کنید.



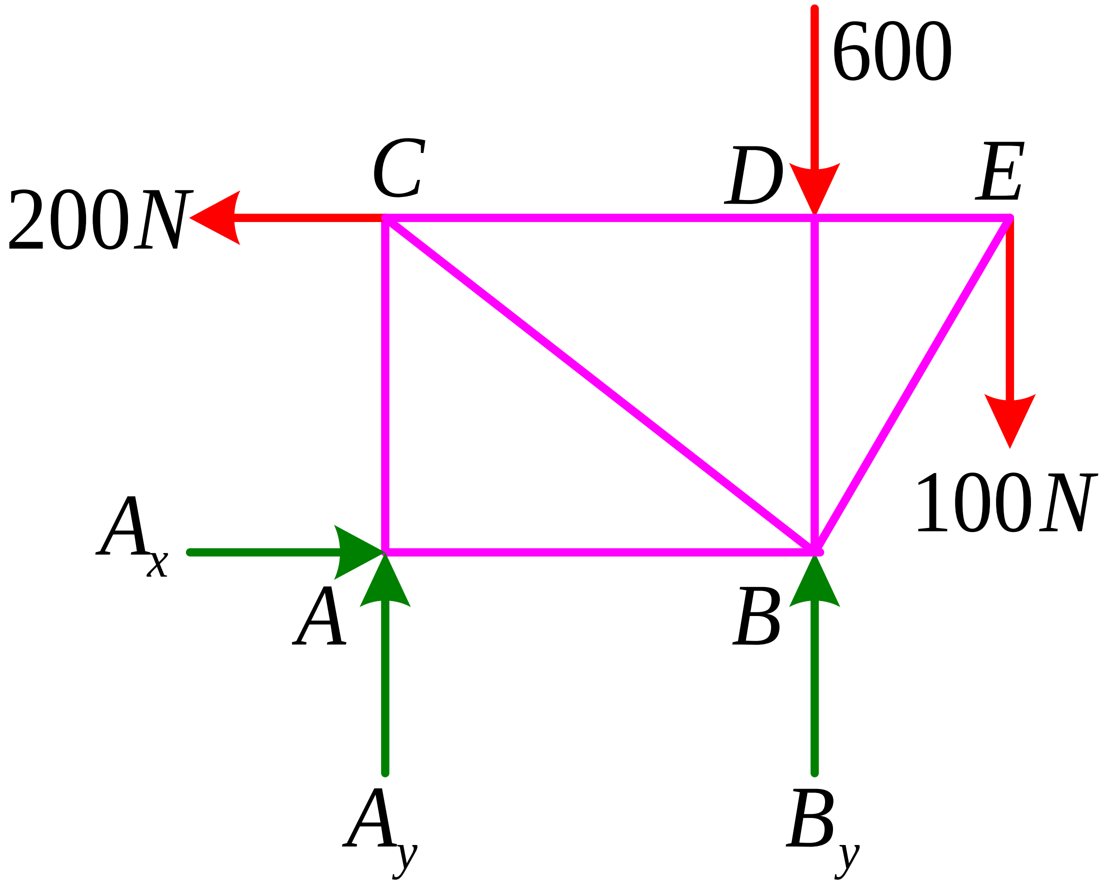


$$F = \frac{1}{2}(200\times 6) = 600N$$

$$\bar{x} = \frac{2}{3}\times 6 = 4$$ از نقطه c

$$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

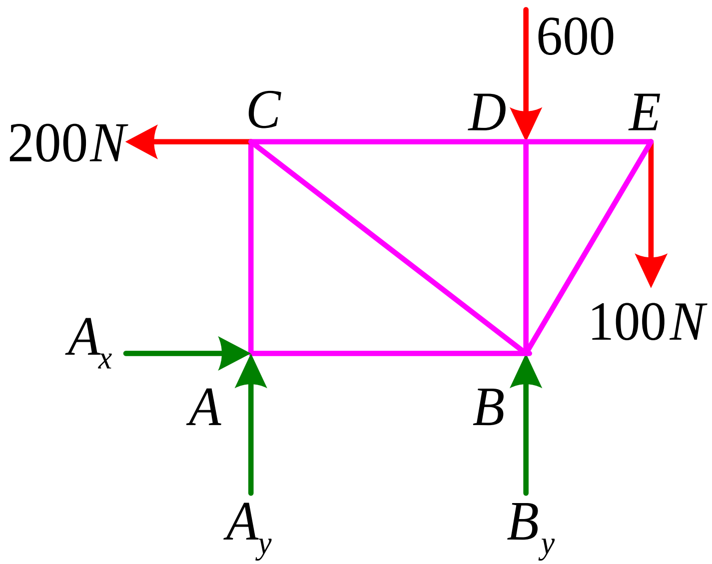
$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x - 200 = 0 \Rightarrow \quad A_x = 200\,N$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 200(3) + 4B_y - 100(6) - 600(4) = 0 \Rightarrow B_y = 600\,N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 600 - 100 = 0 \Rightarrow A_y = 100N$$

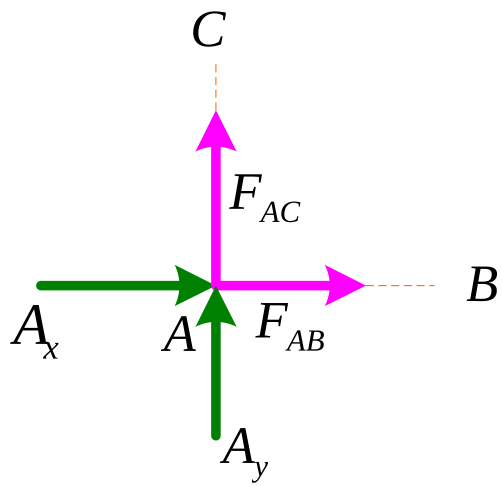


$$A_x = 200\,N$$

$$A_y = 100\,N$$

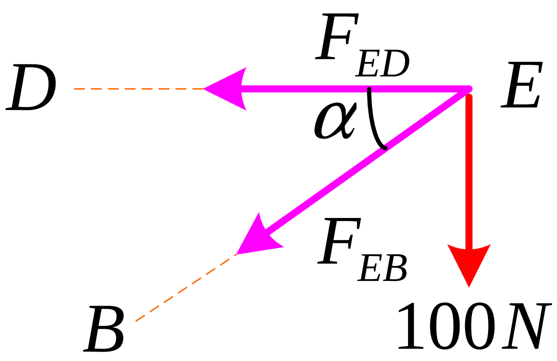
$$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$



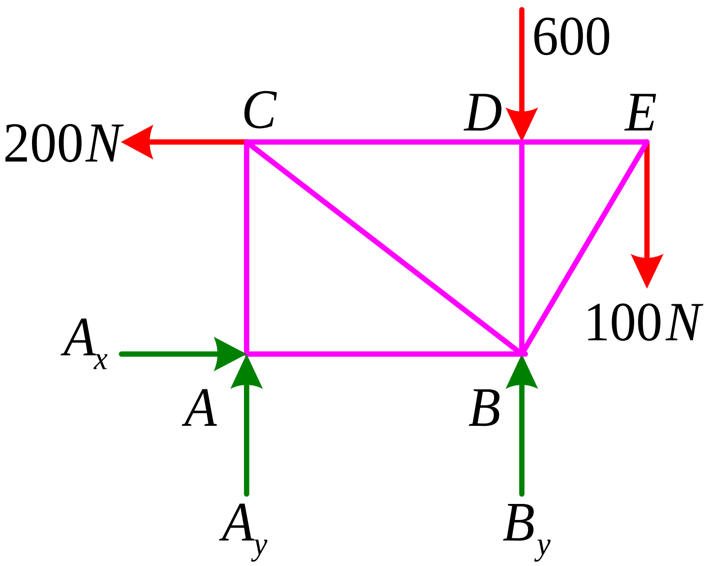
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} + A_x = 0 \Rightarrow F_{AB} = -200\,N$$

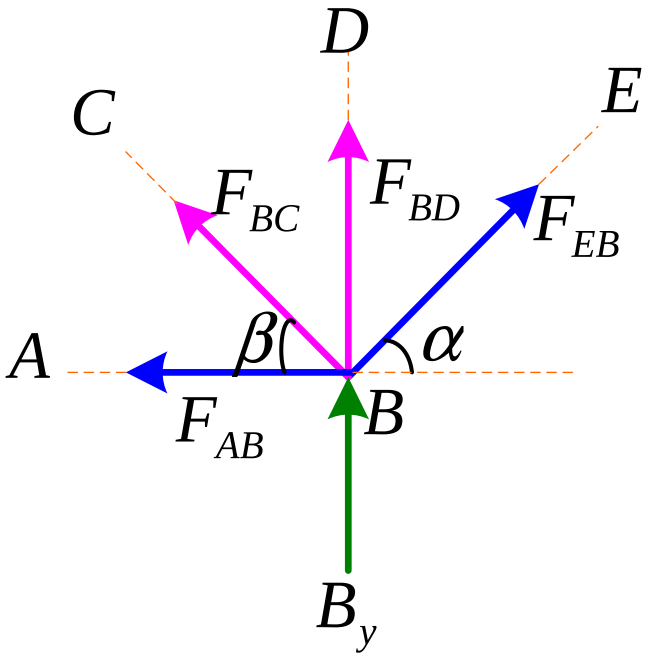
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{AC} + A_y = 0 \Rightarrow F_{AC} = -100\,N$$



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 100 + F_{EB}\sin\alpha = 0 \Rightarrow F_{EB} = -100\frac{\sqrt{13}}{3}\,N$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{ED} + F_{EB}\cos\alpha = 0 \Rightarrow F_{ED} = \frac{200}{3}\,N$$





$$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

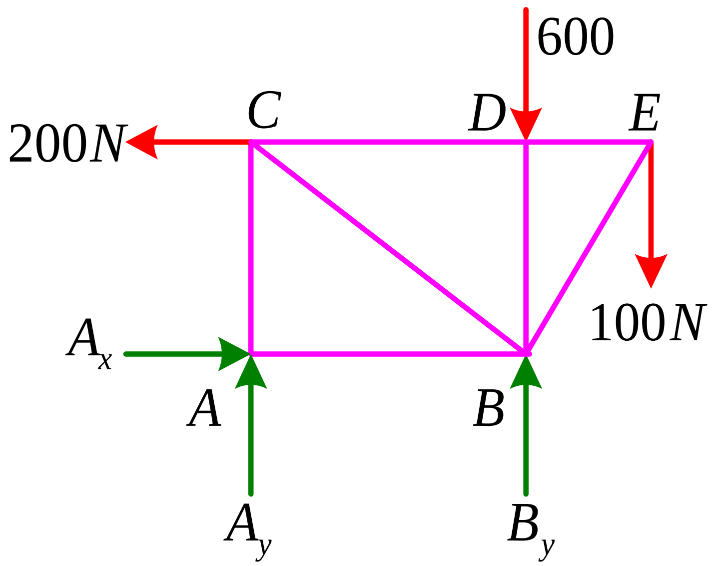
$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

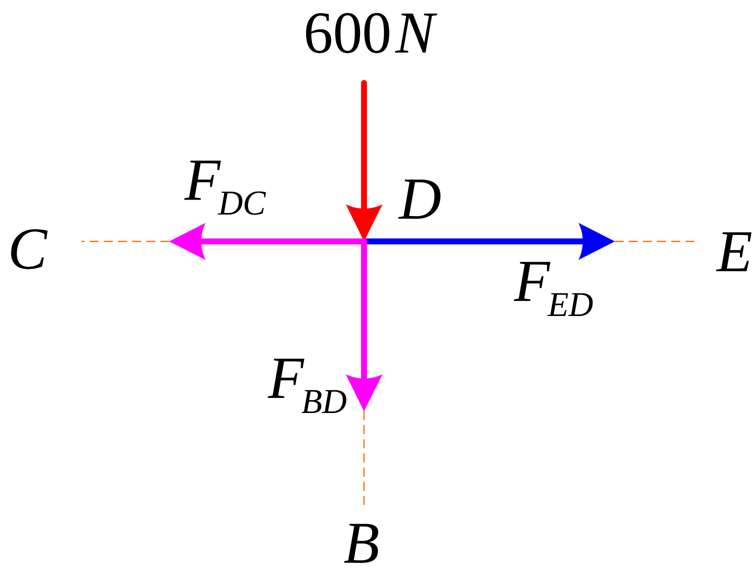
$$F_{AB} = -200N \qquad F_{EB} = -100\frac{\sqrt{13}}{3}N$$

$$\cos\beta = \frac{4}{5}\ ,\ \sin\beta = \frac{3}{5}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} + F_{BC}\cos\beta - F_{EB}\cos\alpha = 0 \Rightarrow F_{BC} = \frac{500}{3}N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y + F_{BD} + F_{BC}\sin\beta + F_{EB}\sin\alpha = 0 \Rightarrow F_{BD} = -600N$$



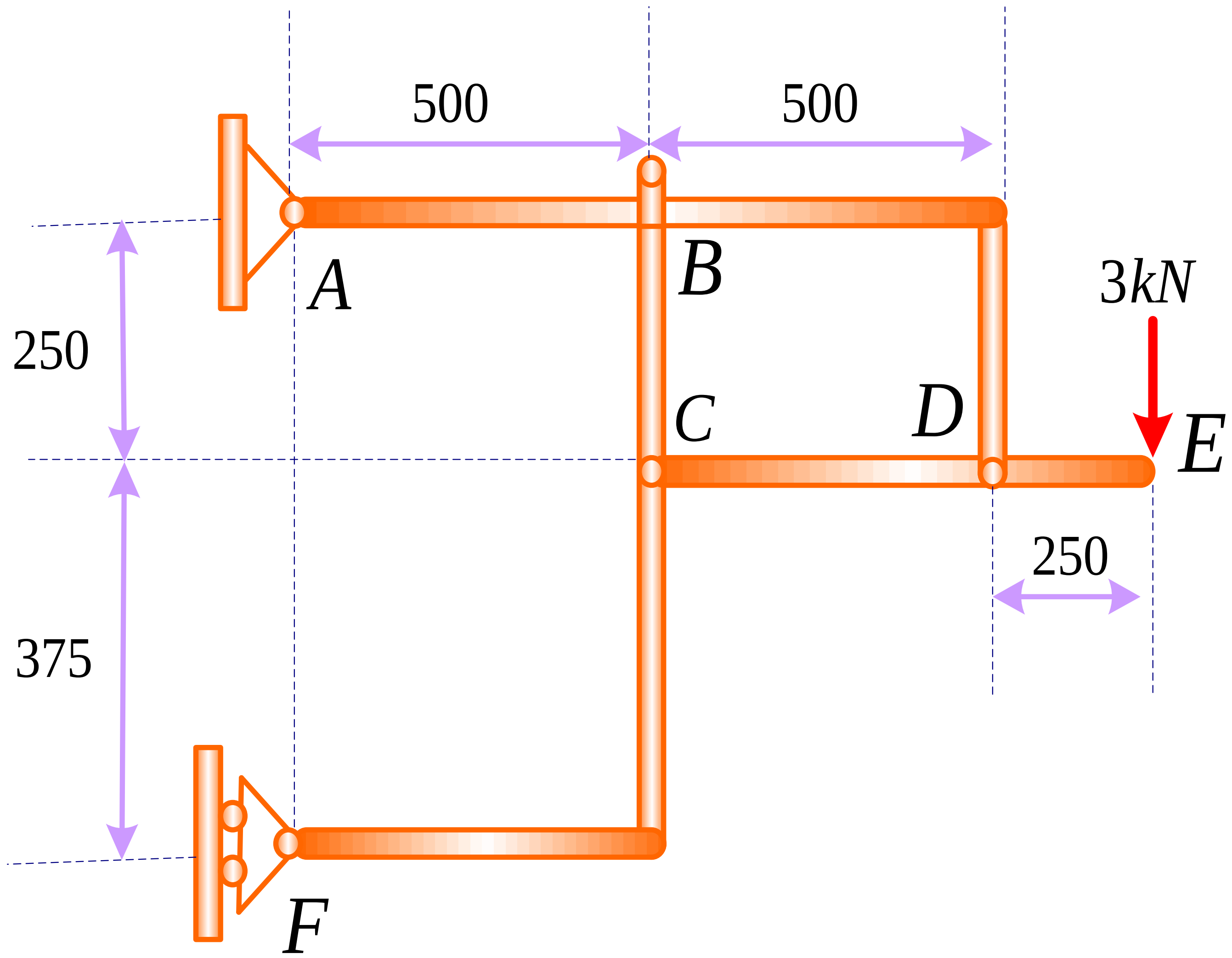


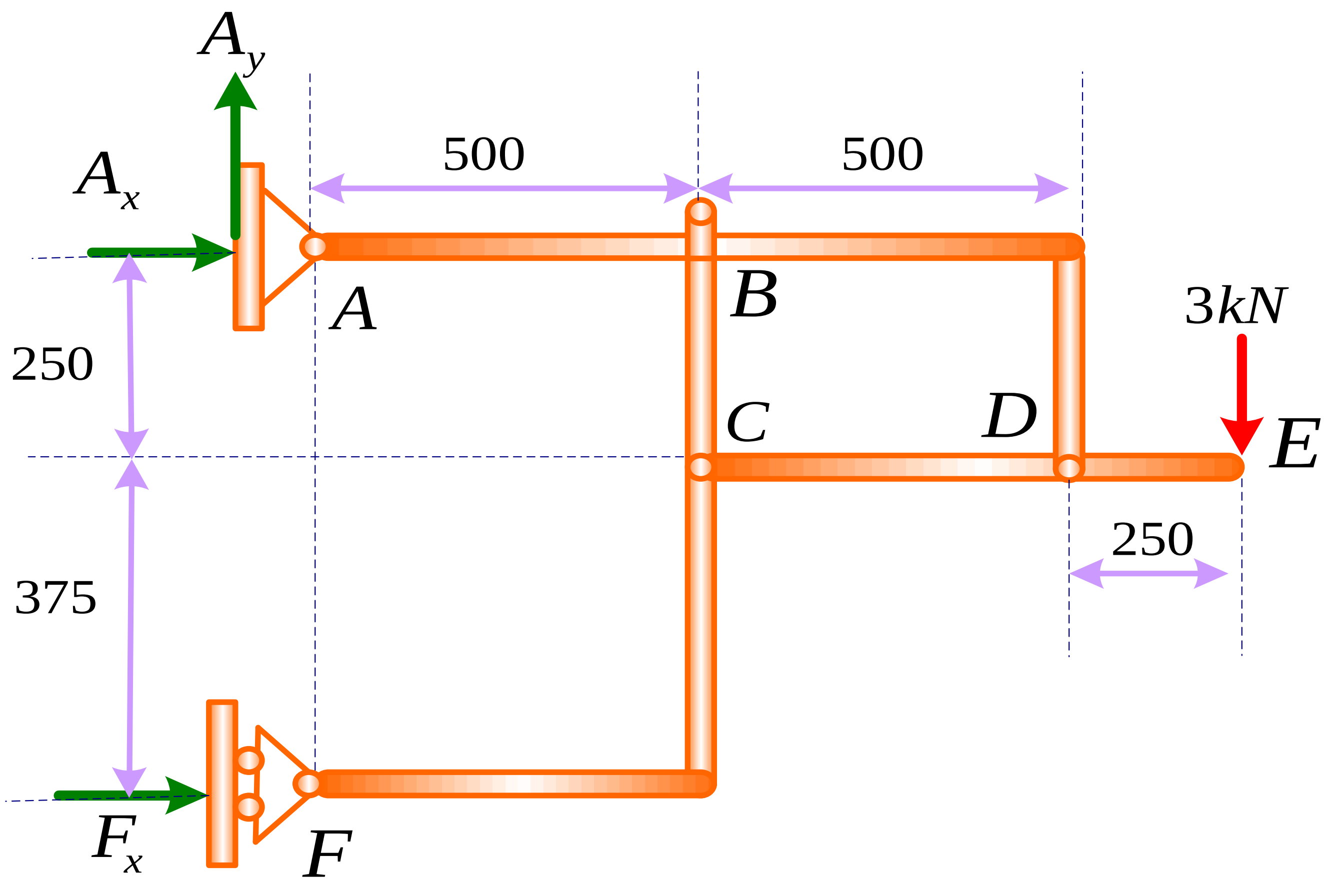
$$F_{ED} = \frac{200}{3} N$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{ED} - F_{DC} = 0 \Rightarrow F_{DC} = -\frac{200}{3} N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 600 + F_{BD} = 0 \Rightarrow F_{BD} = -600N$$

مثال: برای قاب نشان داده شده در شکل نیروهای وارده بر اعضای قاب را تعیین کنیـد.
(ا بعاد بر حسب میلیمتر هستند.)

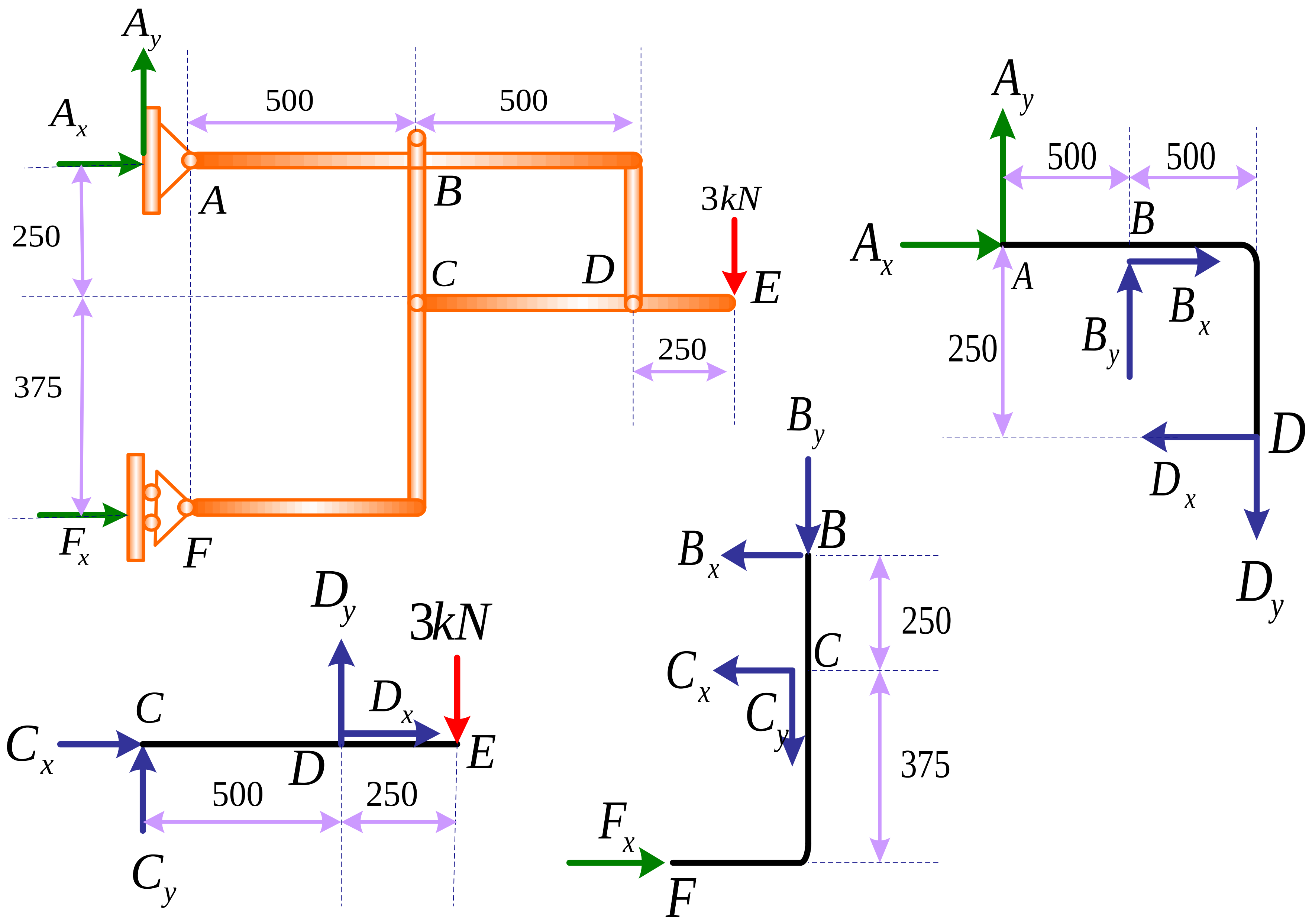




$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 3(1.25) - F_x \times (0.625) = 0 \Rightarrow F_x = 6kN$$

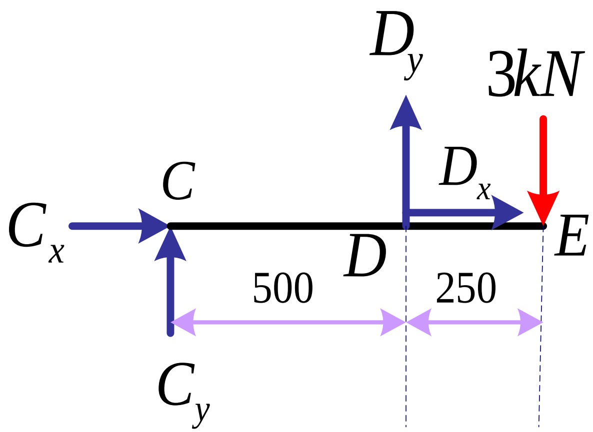
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - 3 \rightarrow A_y = 3kN$$

$$\sum F_x = 0 \qquad A_x + F_x = 0 \rightarrow A_x = -6kN$$



A_y
A_x
500
500
A
B
C
D
E
F
$3kN$
250
375
250
F_x
A_y
A_x
500
500
B
A
B_x
B_y
250
D
D_x
D_y
B_y
B
B_x
C
C_x
C_y
250
375
F_x
F
D_y
$3kN$
D_x
C
C_x
D
E
500
250
C_y

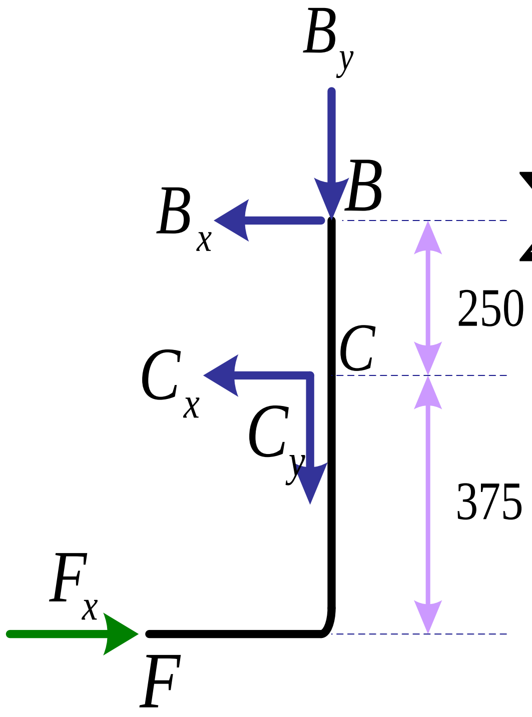
$$A_x = -6kN \quad F_x = 6kN \quad A_y = 3kN$$



$$\sum M_C = 0 \Rightarrow D_y(0.5) - 3(0.75) = 0 \Rightarrow \boxed{D_y = 4.5kN}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 4.5 - 3 + C_y \Rightarrow \boxed{C_y = -1.5kN}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow D_x + C_x = 0$$



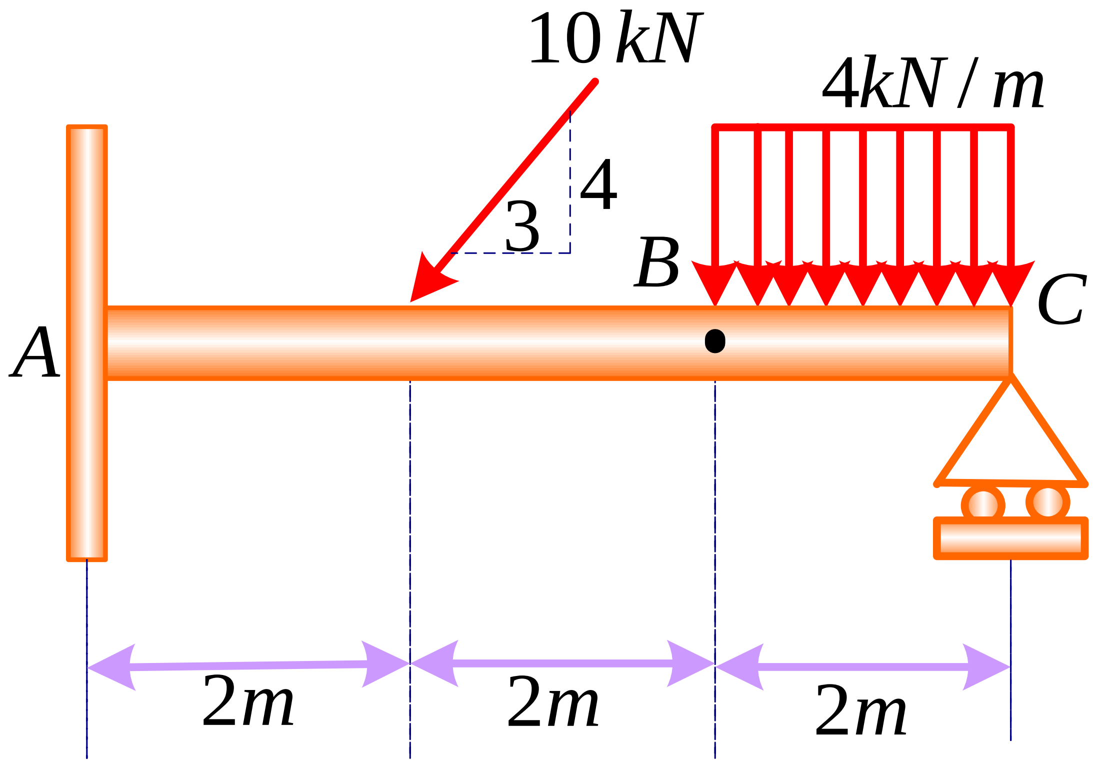
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow F_x(0.625) - C_x(0.25) \Rightarrow \boxed{C_x = 15\,kN}$$

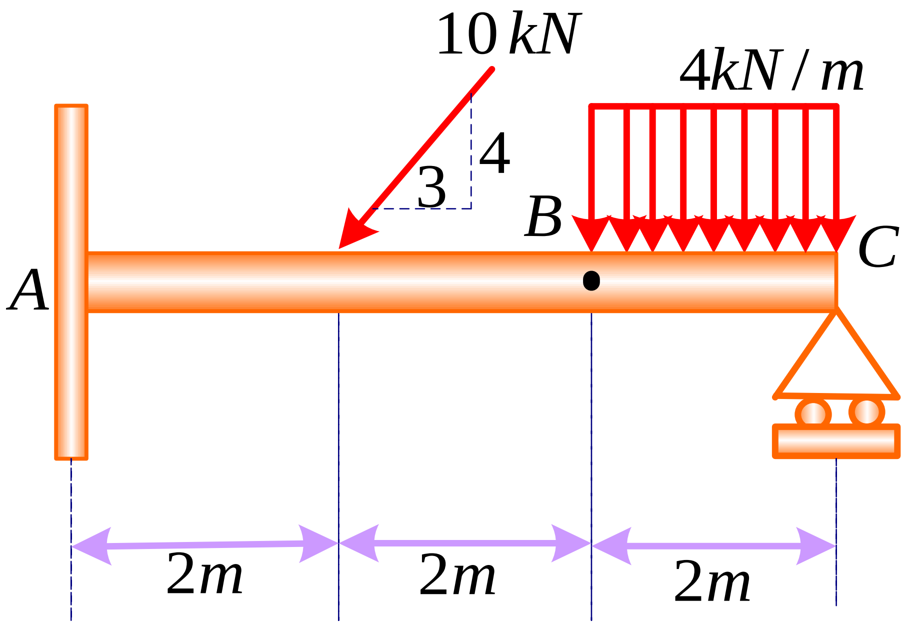
$$\boxed{D_x = -C_x = -15\,kN}$$

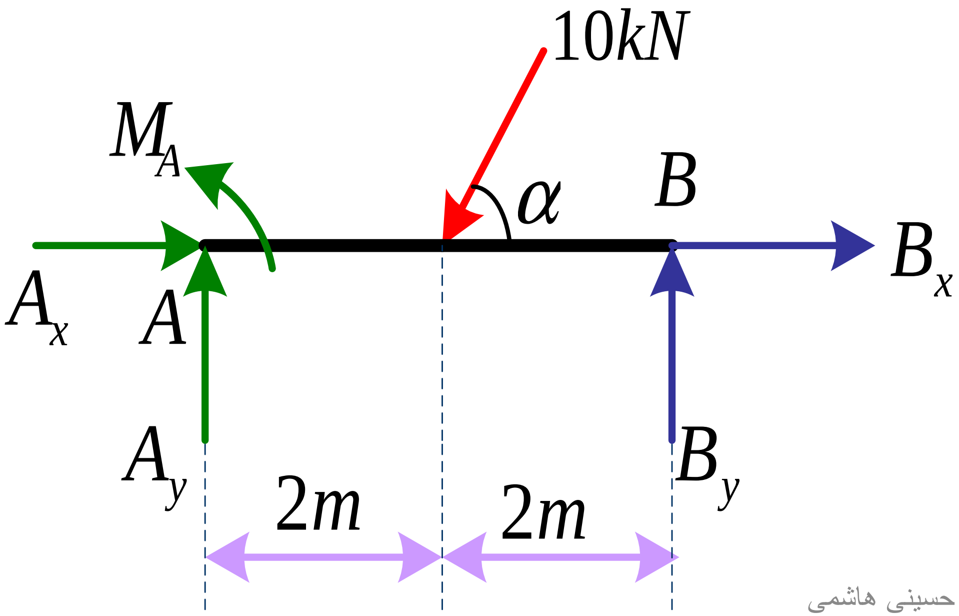
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y - 1.5 = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = 1.5kN}$$

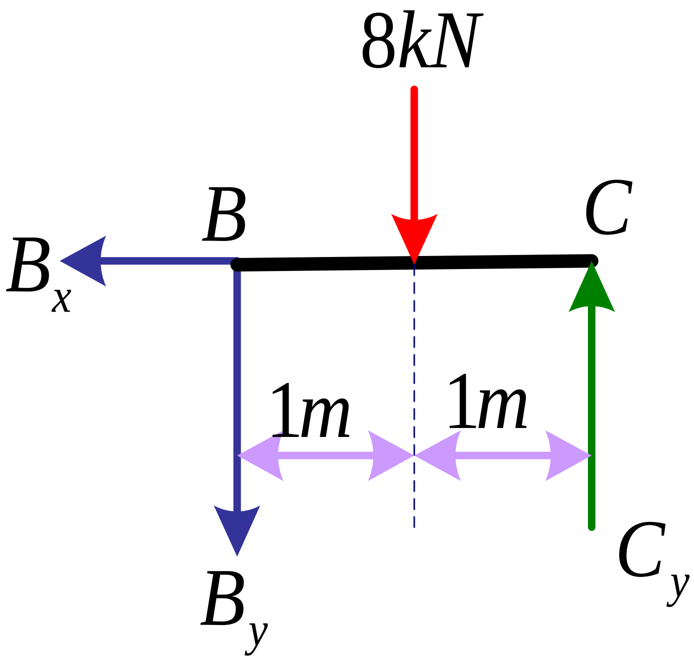
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow B_x + 15 - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{B_x = -9\,kN}$$

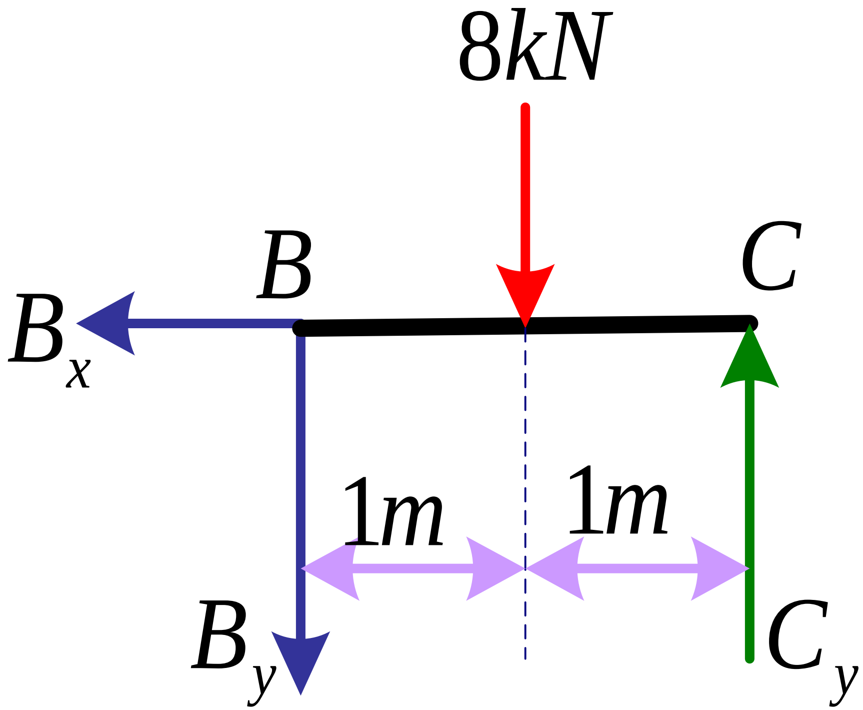
مثال: برای تیر نشان داده شده در شکل که در B دارای اتصال مفصلی ودر A گیرداراست عکس العمل ها در تکیه گاه ها را بدست آورید.




10 kN
4kN / m
4
3
B
C
A
2m
2m
2m


10kN
M_A
α
B
B_x
A_x
A
A_y
B_y
2m
2m

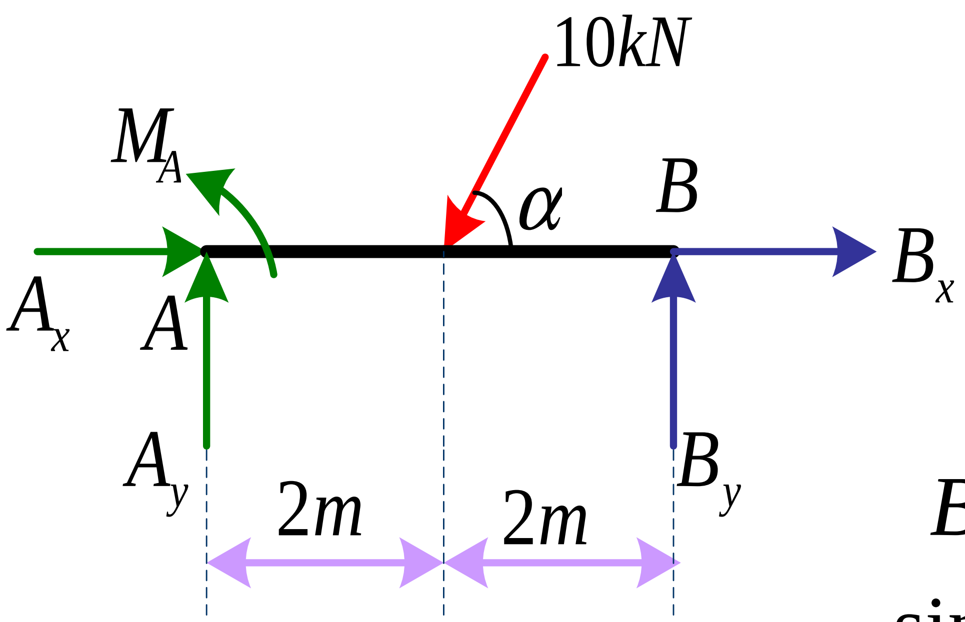

8kN
B
C
B_x
1m
1m
B_y
C_y



$$\sum M_B = 0 \rightarrow 2C_y - 8(1) \Rightarrow C_y = 4kN$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow C_y - B_y - 8 = 0 \Rightarrow B_y = -4kN$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow B_x = 0$$



$$B_x = 0 \qquad B_y = -4kN$$

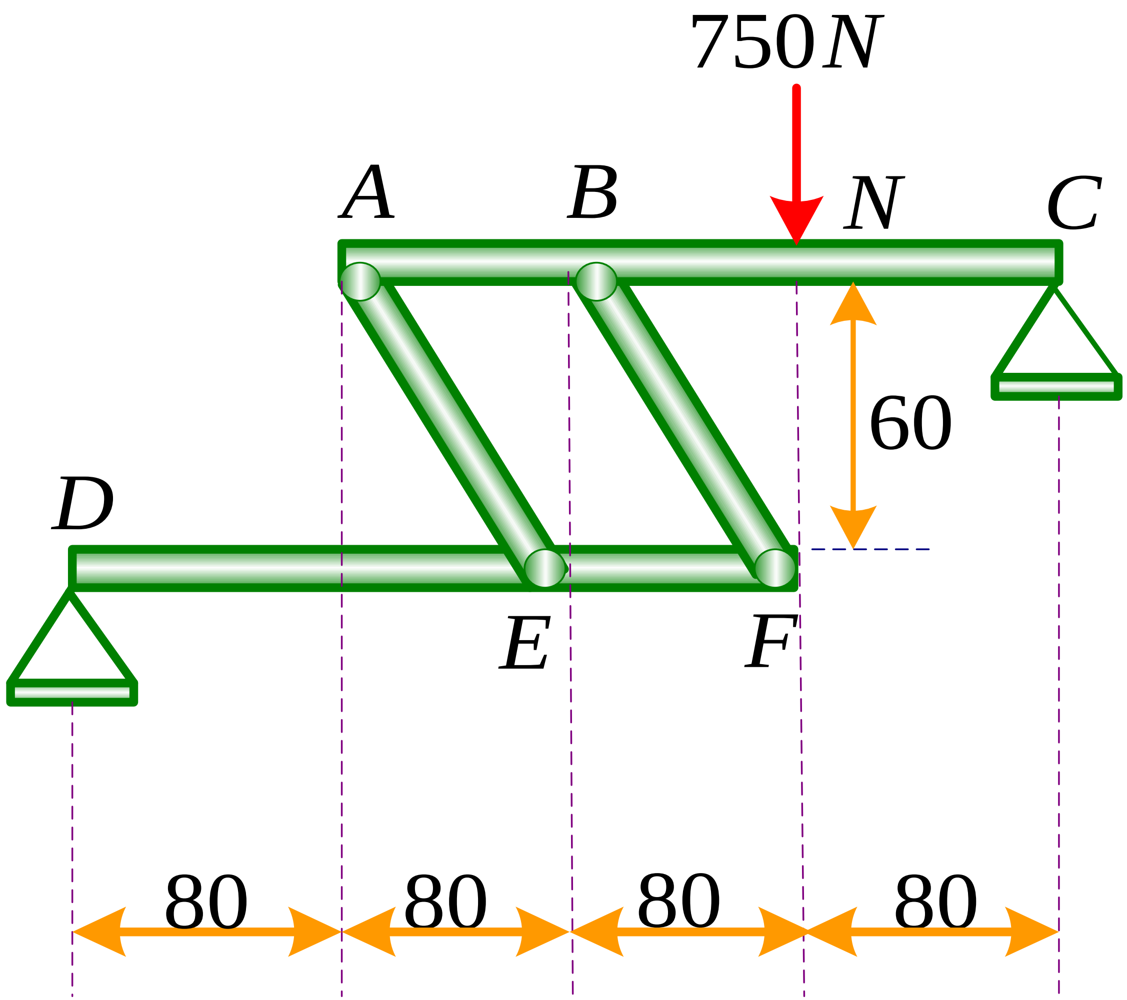
$$\sin\alpha = 0.8 \qquad \cos\alpha = 0.6$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow B_y + A_y - 10\sin\alpha = 0 \rightarrow A_y = 12kN$$

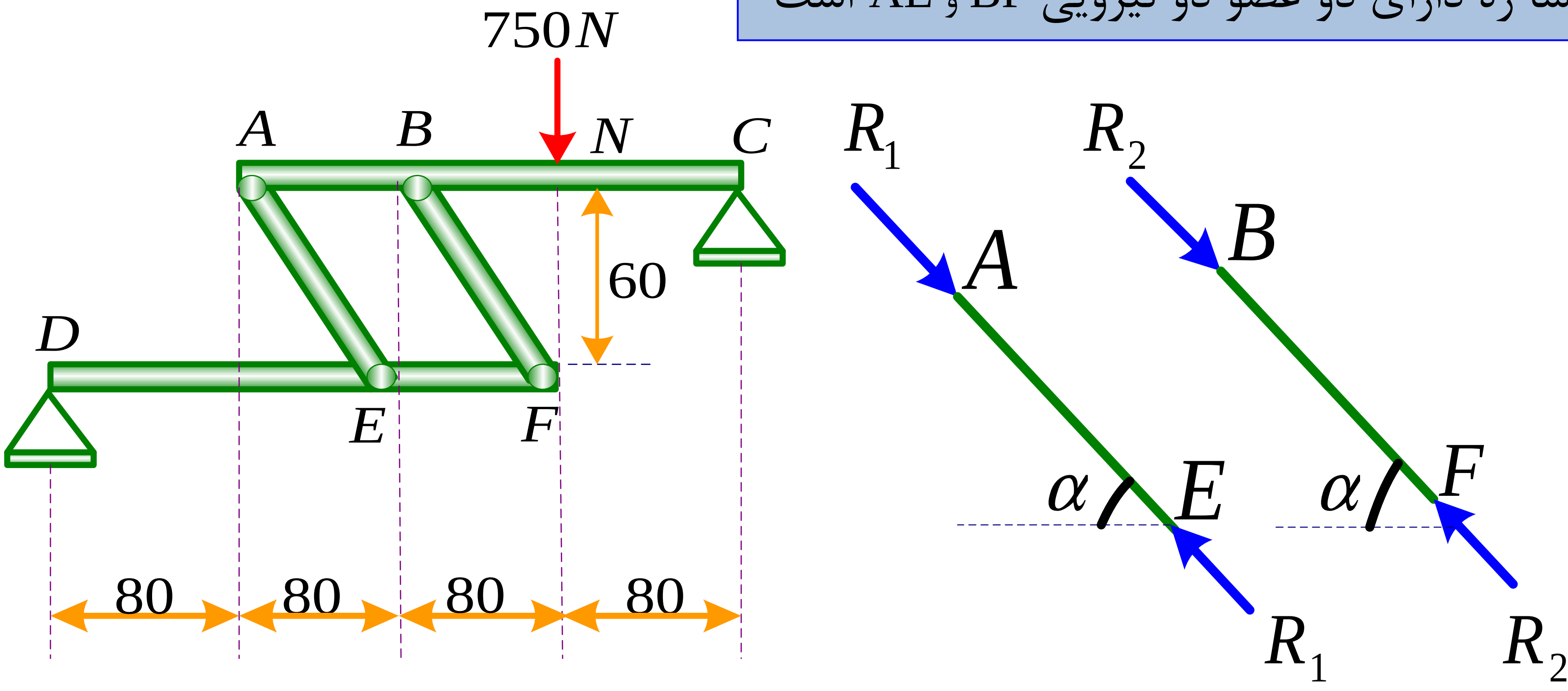
$$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x + B_x - 10\cos\alpha = 0 \rightarrow A_x = 6kN$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow 4B_y - 10\sin\alpha \times 2 + M_A = 0 \Rightarrow M_A = 32kN.m$$

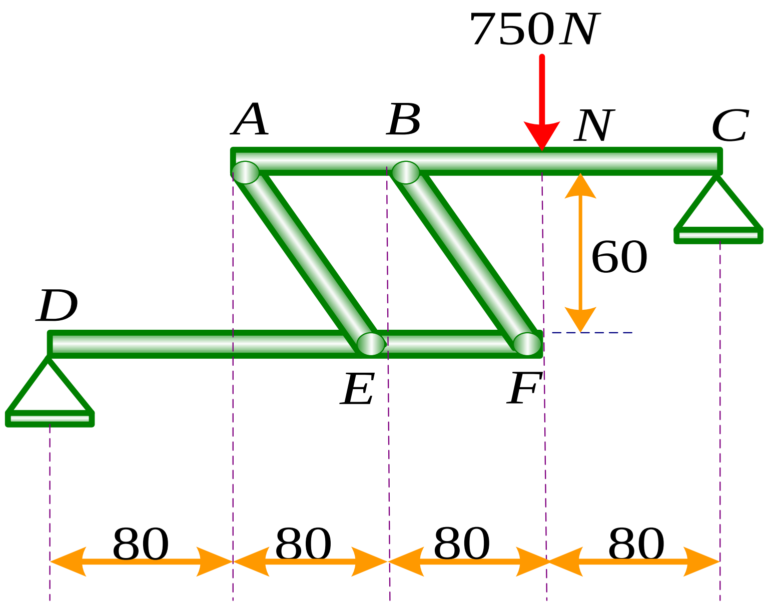
مثال: برای سازه نشان داده شده در شکل که در نقطـه N تحـت تـأثیر نیـروی 750N قـرار دارد مؤلفه های عکس العمل ها را در نقاط C و D پیدا کنید. (ا بعاد بر حسب میلیمتر هستند.)

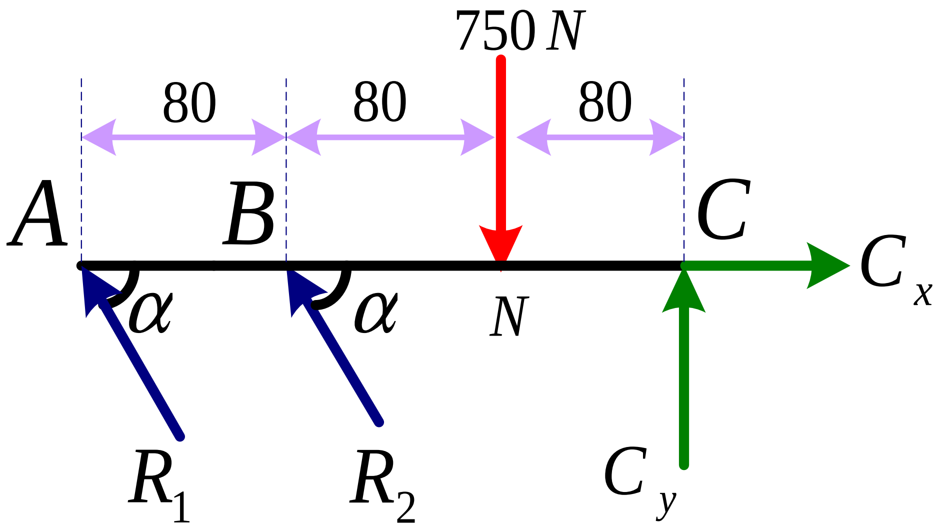


سا زه دارای دو عضو دو نیرویی BF و AE است



$$\sin\alpha=\frac{60}{\sqrt{60^2+80^2}}=0.6\,,\quad \cos\alpha=\frac{80}{\sqrt{60^2+80^2}}=0.8$$





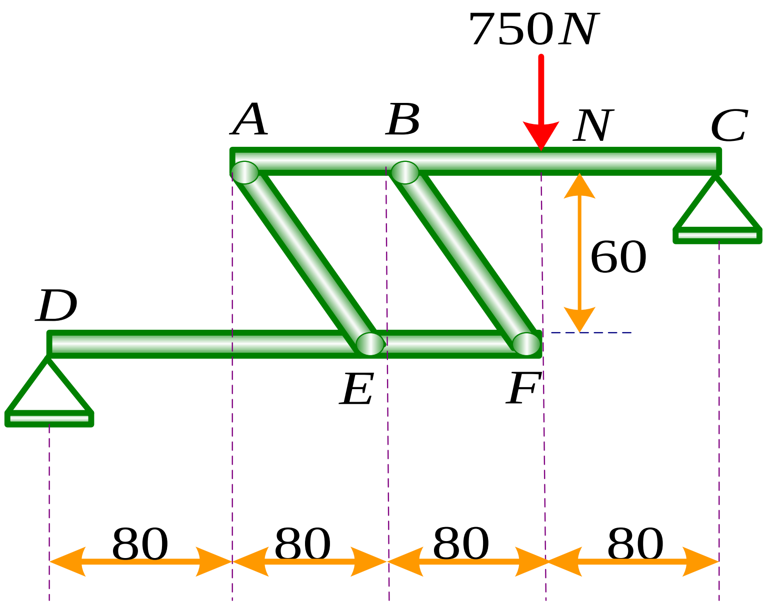
$$\sum M_C = 0 \Rightarrow R_1 \sin\alpha \times (0.24) + R_2 \sin\alpha \times (0.16) - 750 \times 0.08 = 0$$

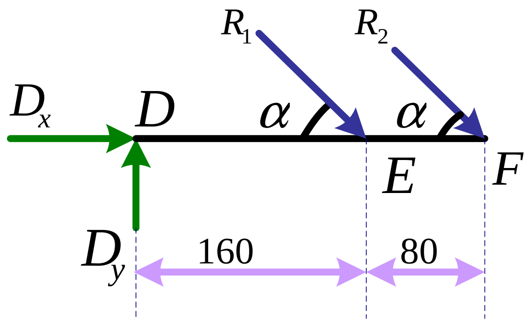
$$\boxed{3R_1 + 2R_2 = 1250}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \; C_y - 750 + R_1 \sin\alpha + R_2 \sin\alpha = 0$$

$$\boxed{C_y - 750 + 0.6\;(R_1 + R_2) = 0}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_x - R_1 \cos\alpha - R_2 \cos\alpha = 0 \qquad \boxed{C_x - 0.8(R_1 + R_2) = 0}$$





$$\sum M_D = 0 \Rightarrow R_1 \sin\alpha(0.16) + R_2 \sin\alpha(0.24) = 0 \qquad \boxed{2R_1 + 3R_2 = 0}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \; D_y - R_1 \sin\alpha - R_2 \sin\alpha = 0 \qquad \boxed{D_y - 0.6(R_1 + R_2) = 0}$$

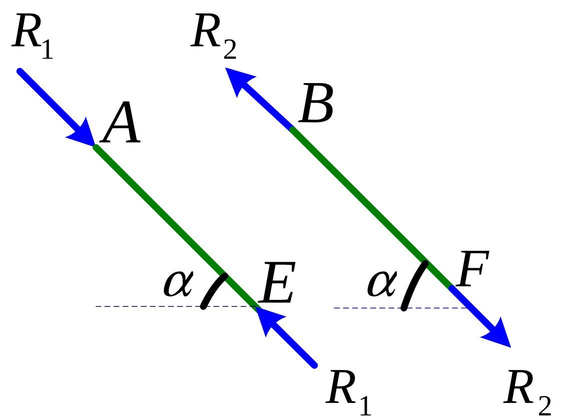
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \; D_x + R_1 \cos\alpha + R_2 \cos\alpha = 0 \qquad \boxed{D_x + 0.8(R_1 + R_2) = 0}$$

$$2R_1+3R_2=0$$ $$3R_1+2R_2=1250$$ $$R_1=750N$$ $$R_2=-500N$$

$$C_x-0.8(R_1+R_2)=0$$ $$C_x=200N$$ $$D_y-0.6(R_1+R_2)=0$$

$$D_y=150N$$ $$C_y-750+0.6\ (R_1+R_2)=0$$ $$C_y=600N$$

$$D_x+0.8(R_1+R_2)=0$$ $$D_x=-200N$$



عضو AE فشاری و عضوBF کششی است.

۶-تحلیل تیرها

مقدمه

تیر: عضوی که به منظور تحمل نیروها در سرتاسر طولش طراحی میشود تیر نام دارد. تیرها طویل و مقاطع آنها به اشکال مختلفی میباشد (دایروی، مستطیلی، چند ضلعی، U شکل،Tشکل، L شکل و ...)

نیروها: معمولاًعمود بر محور تیر اعمال می شوند و سبب برش و خمش می گردند. نیروها میتوانند متمرکز ویا توزیعی و یا ترکیبی از متمرکز و توزیعی باشند.

طراحی تیر

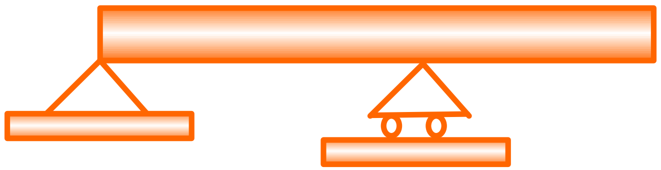
قسمت اول: نیروهای برشی و گشتاور خمشی در نقاط مختلف تیر تحت تأثیر نیروهای خارجی اعمالی تعیین می شود. (استاتیک)

قسمت دوم: تعیین سطح مقطع تیر به منظور تحمل نیروهای خارجی اعمالی. (مقاومت مصالح)

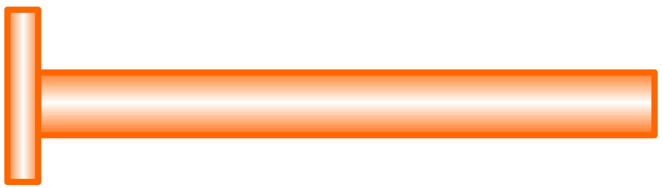
تیرها را بر حسب تکیه گاهشان طبقه بندی می کنند:

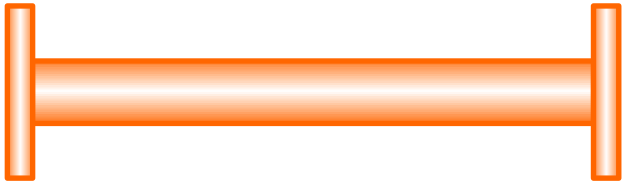
تیری که در دو انتها روی تکیه گاه ساده قرار دارد

تیر نیمه آویزان

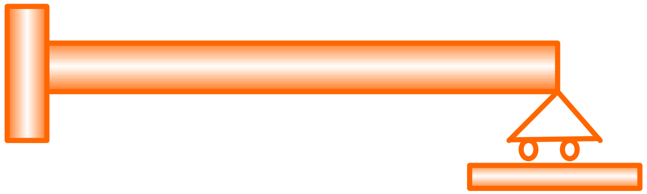


تیر یک سرگیردار

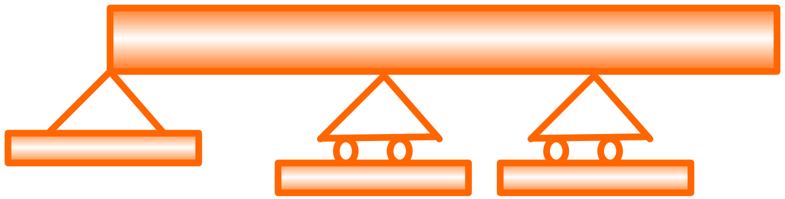




تیر دو سرگیردار



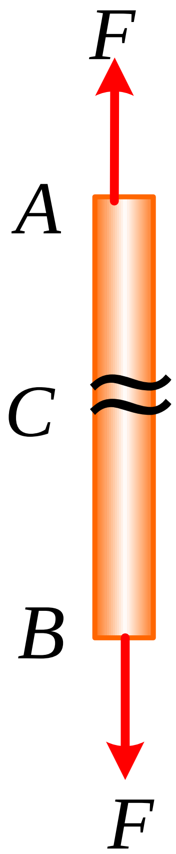
تیری که در یک سر گیردار و در سر دیگر روی تکیه گاه قرار دارد

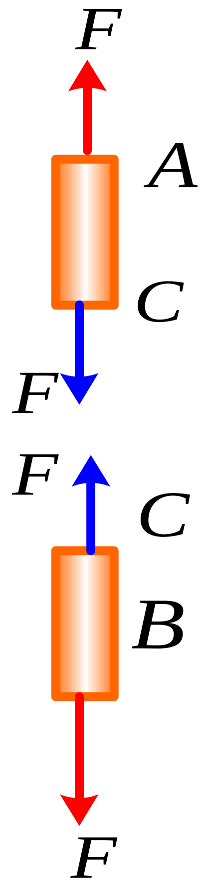


تیر با تکیه گاه های ساده متعدد

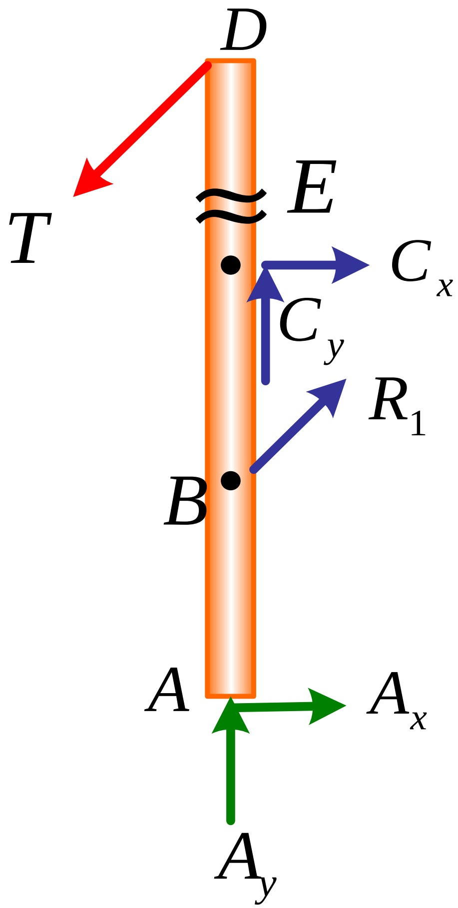
تحلیل تیرها

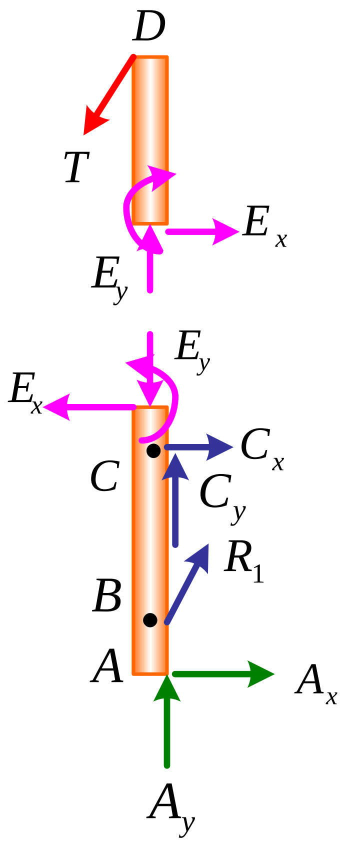
نیروهای داخلی در عضوهای دو نیرویی





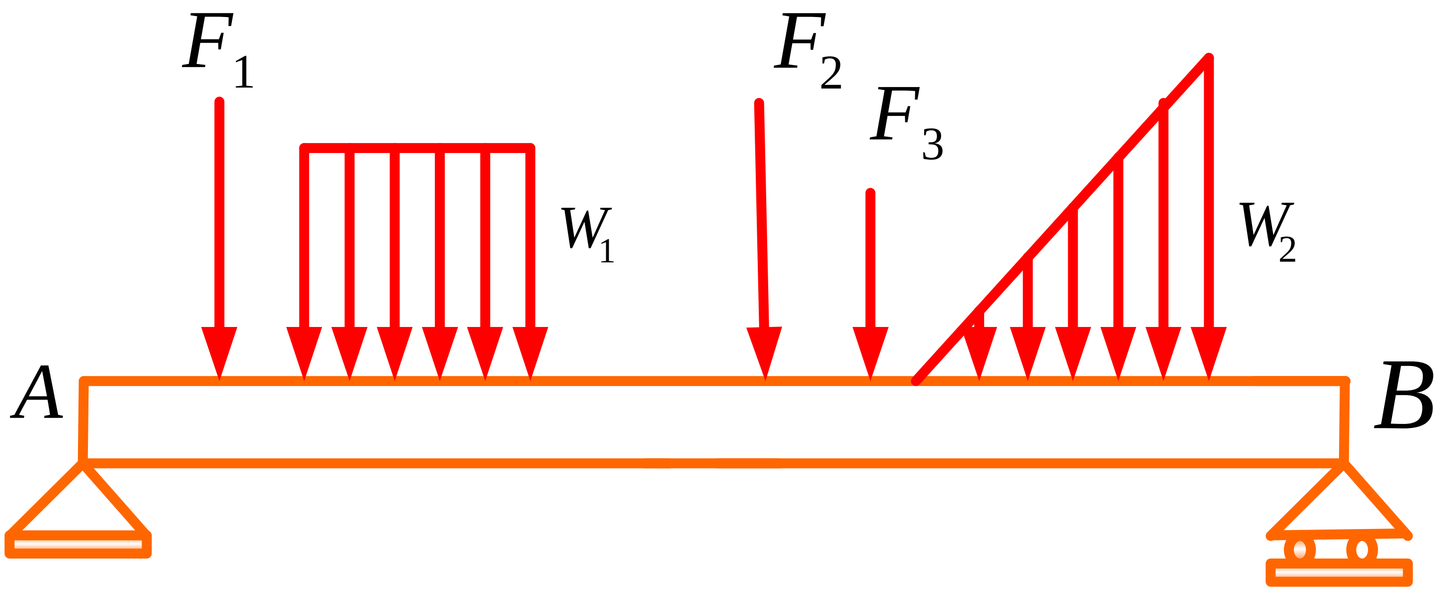
نیروهای داخلی در عضوهای چند نیرویی

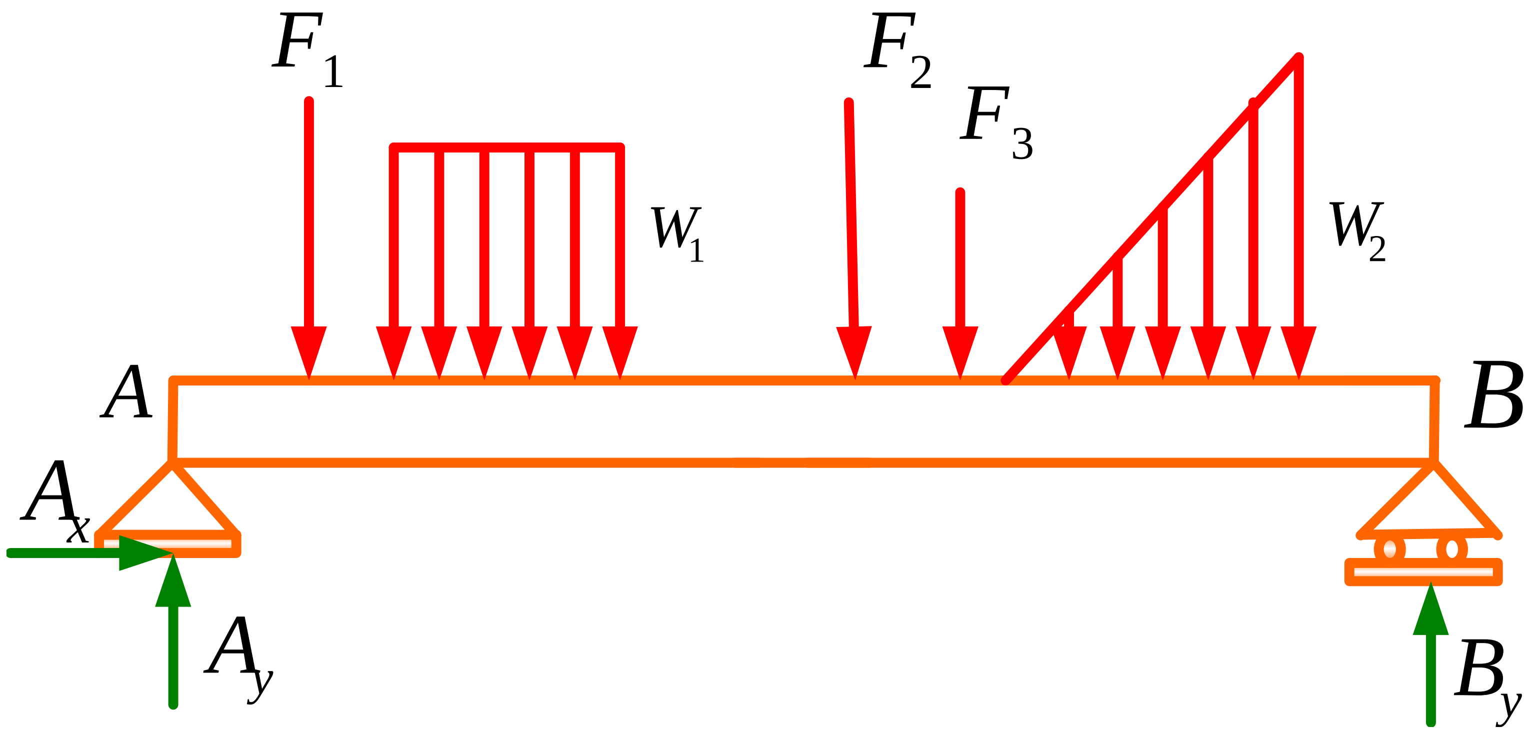




به صورت یک سیستم نیرو و کوپل ظاهر می شود.

تعیین نیروی برشی و گشتاور خمشِی در تیرها

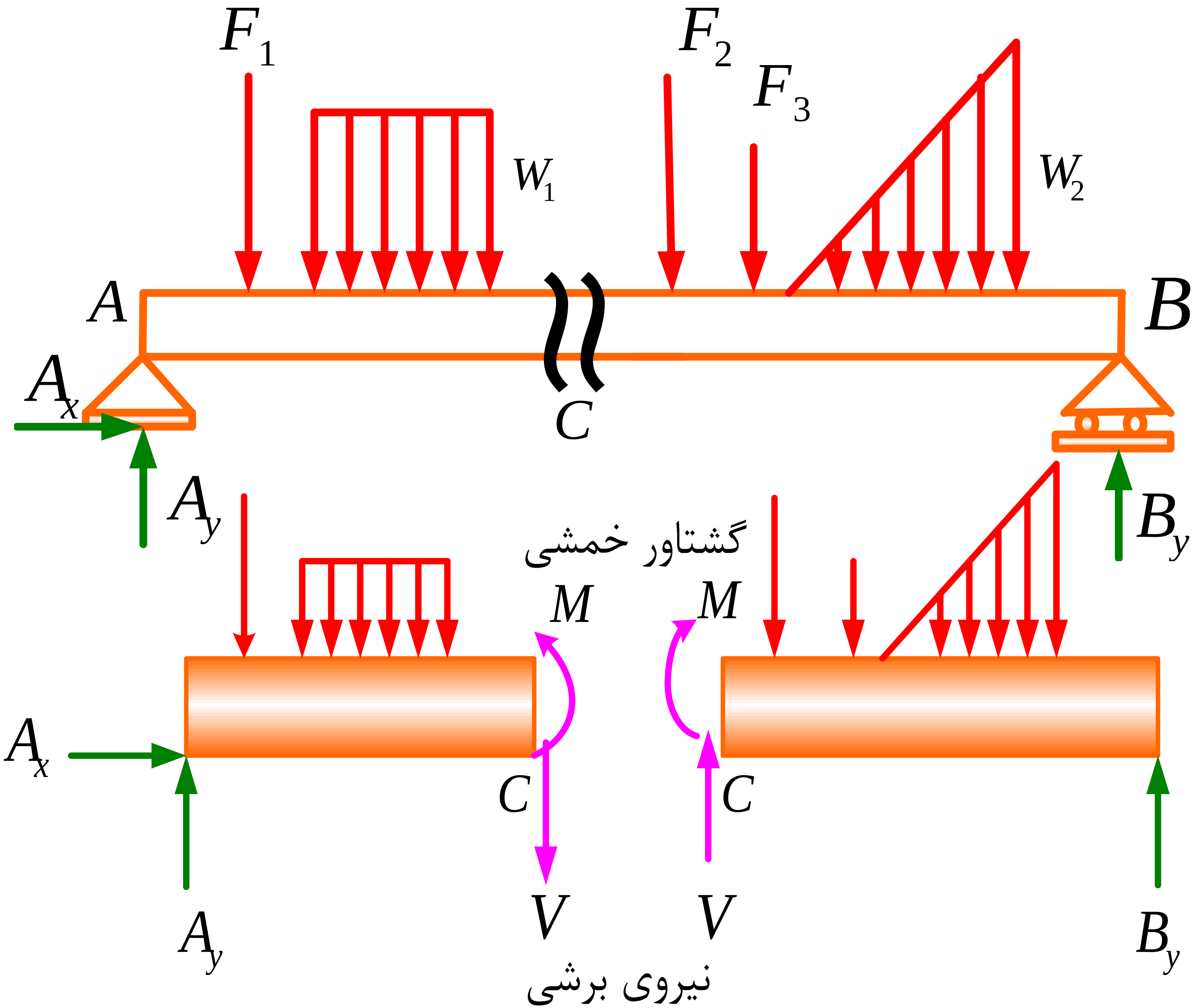


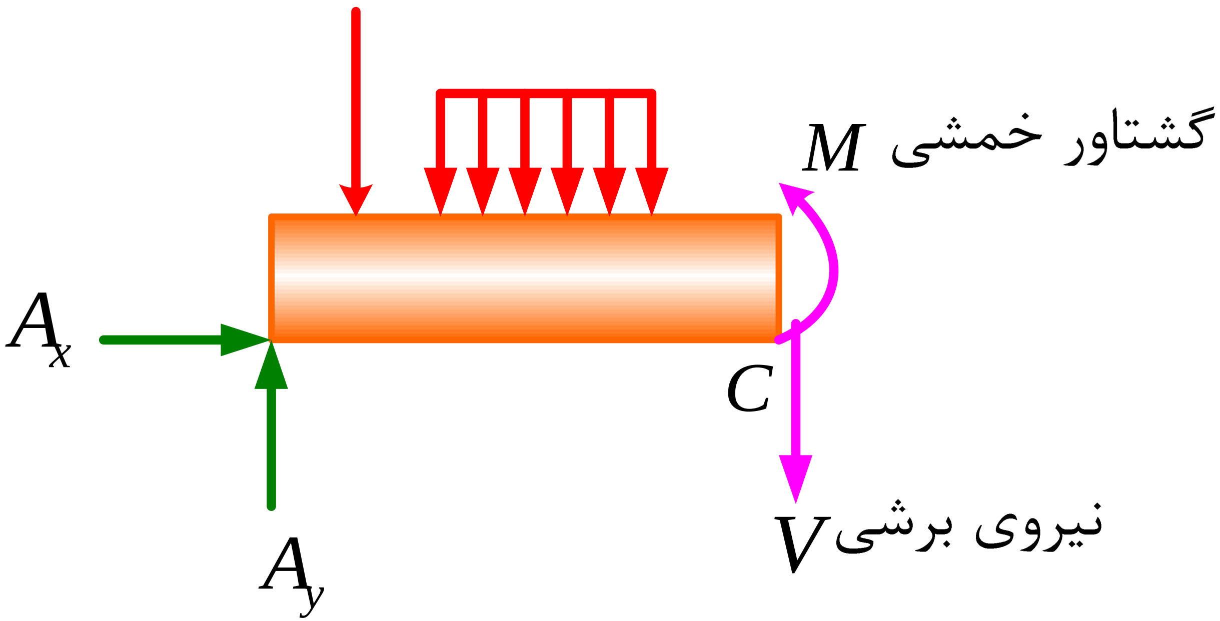


$\sum M_A = 0 \Rightarrow$ تنها مجهول B_y $\longrightarrow$ تعیین میشود B_y

$\sum F_y = 0 \Rightarrow$ تنها مجهول A_y $\longrightarrow$ تعیین میشود A_y

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$


F_1
F_2
F_3
W_1
W_2
A
B
A_x
C
A_y
B_y
گشتاور خمشی
M
M
A_x
C
C
V
V
A_y
B_y
نیروی برشی



M=گشتاور خمشی

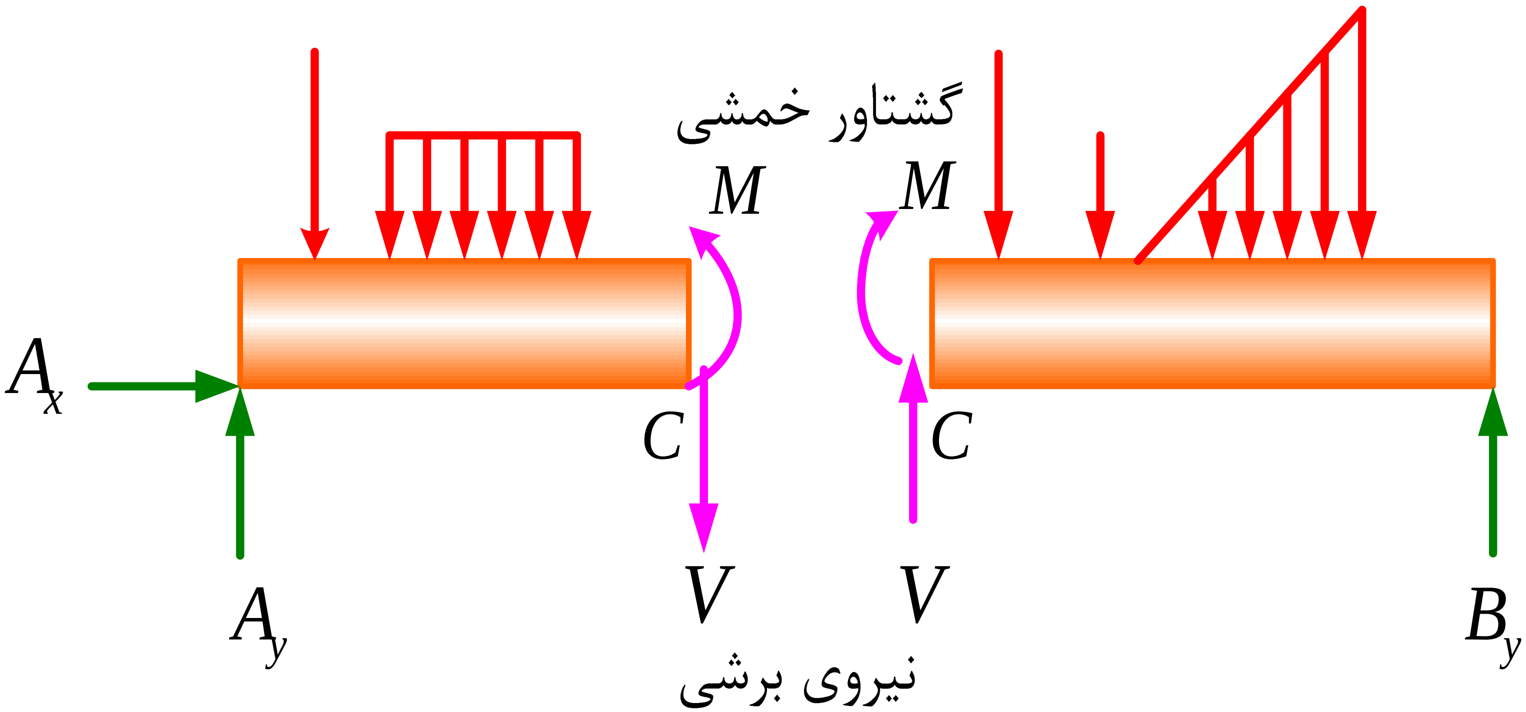
V= نیروی برشی

$\sum F_y = 0 \Rightarrow$ v تنها مجهول $\rightarrow$ vتعیین می شود

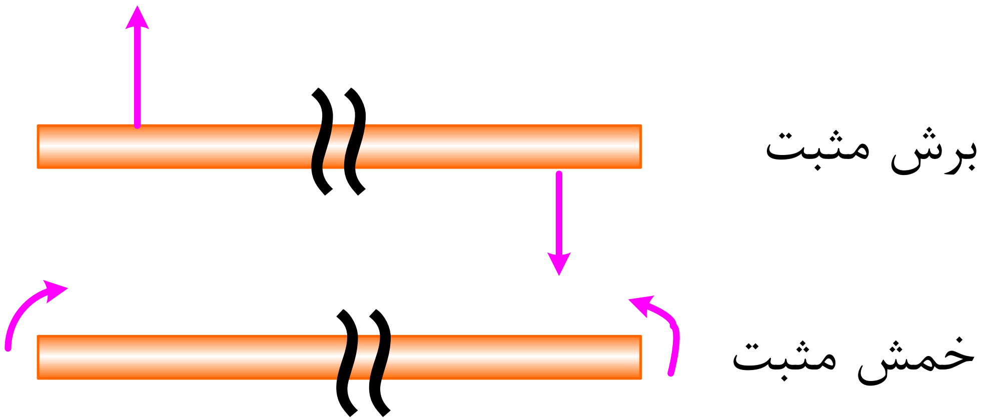
$\sum M_C = 0 \Rightarrow$ M تنها مجهول $\rightarrow$ M تعیین می شود

در حل مسائل رسم دیاگرام آزاد سمت چپ محل بریده شده کفایت می کند.

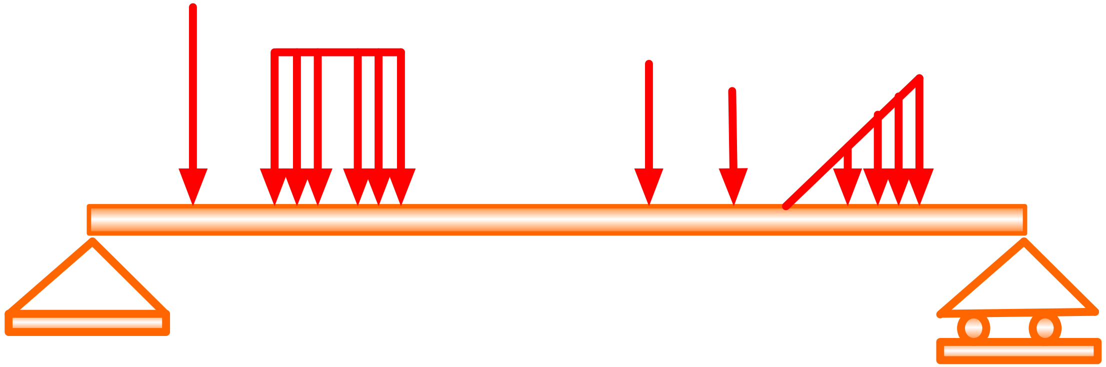
در حل مسائل تیرها همواره جهت های نیروی برشــی و گـشتاور خمـشی را مطـابق شـکل انتخاب می کنیم.



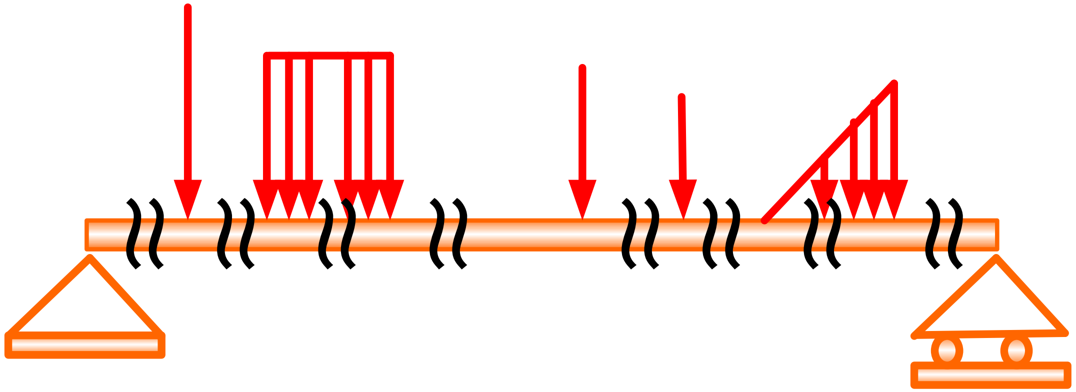
چنانچه جهت نیروی برشی و گشتاور خمشی مطابق شکل باشد برش و خمش را مثبت می نامند.

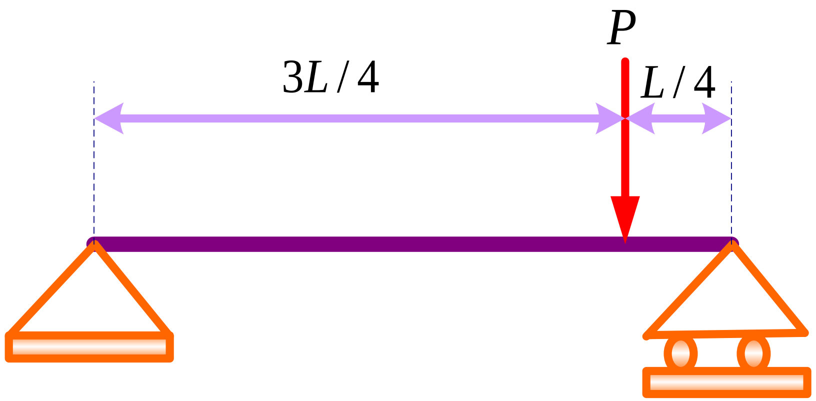


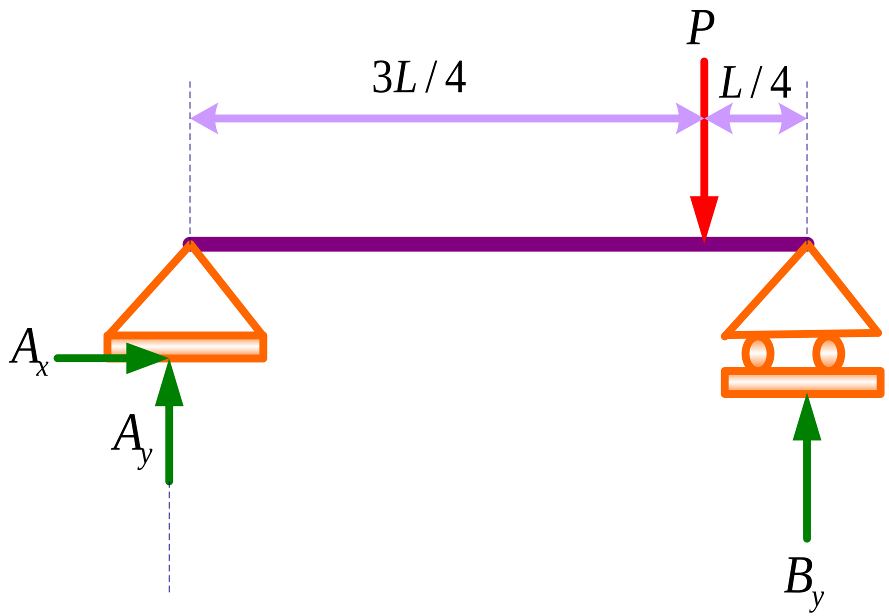
دیاگرام نیروی برشی و گشتاور خمشی



قبل از هر اتفاق جدید و بعد از آن یک برش لازمست. برای هر نیروی توزیعی هم یــک برش لازمست.

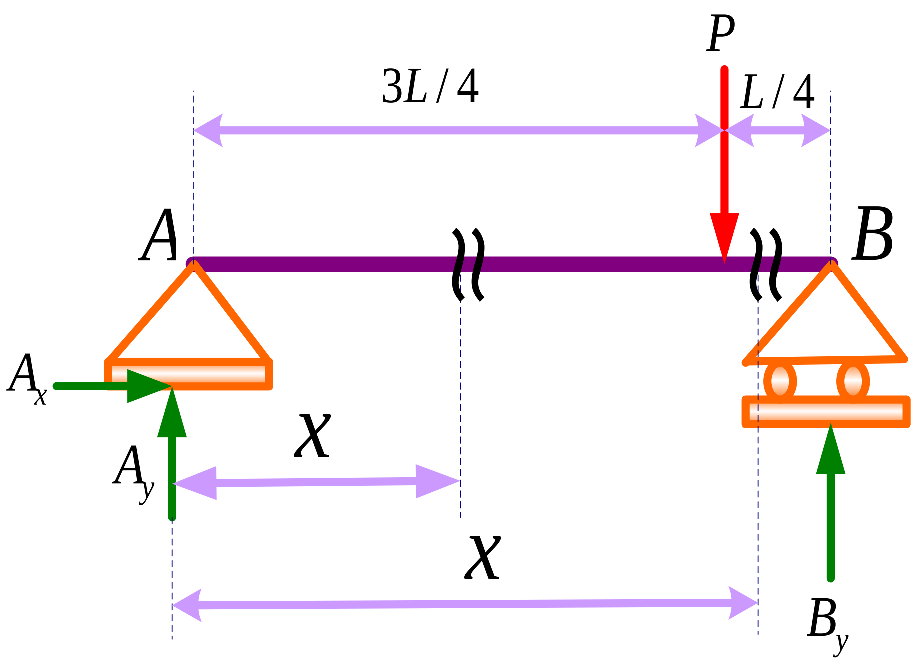


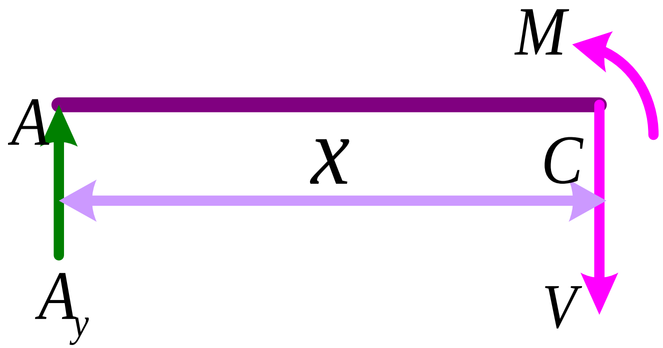


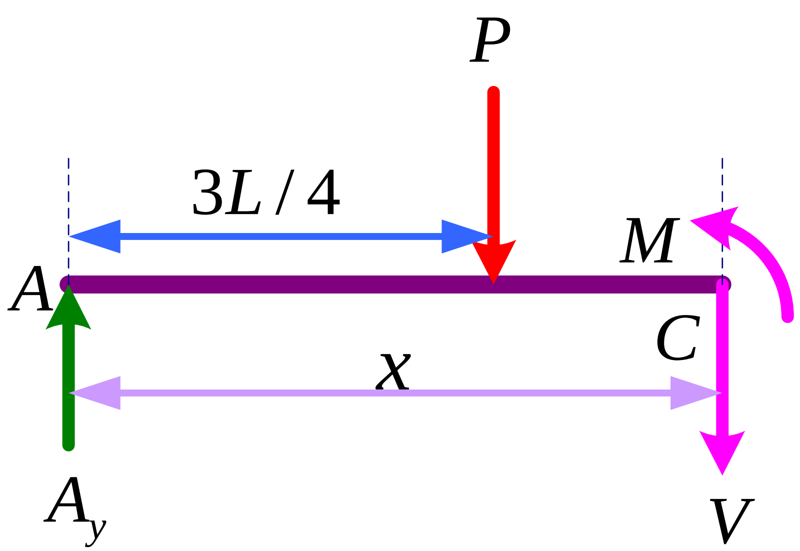


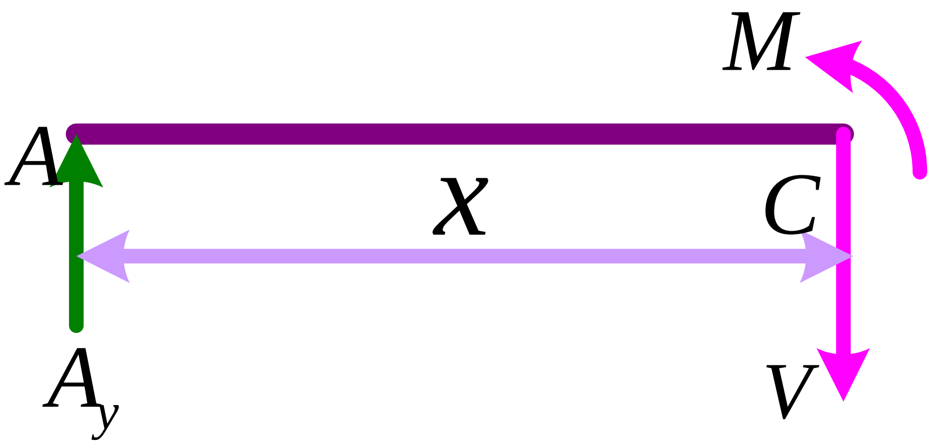
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \quad LB_y - P\left(\frac{3l}{4}\right) = 0 \Rightarrow B_y = \frac{3P}{4}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - P = 0 \Rightarrow \quad A_y = \frac{P}{4}$$

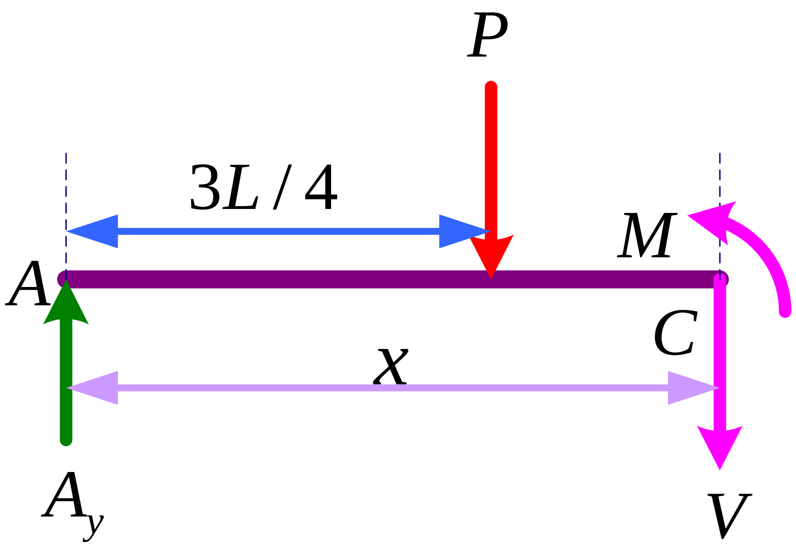

P
3L / 4
L / 4
A
B
A x
A y
x
x
B y


M
A
x
C
A y
V


P
3L / 4
M
A
C
x
A y
V



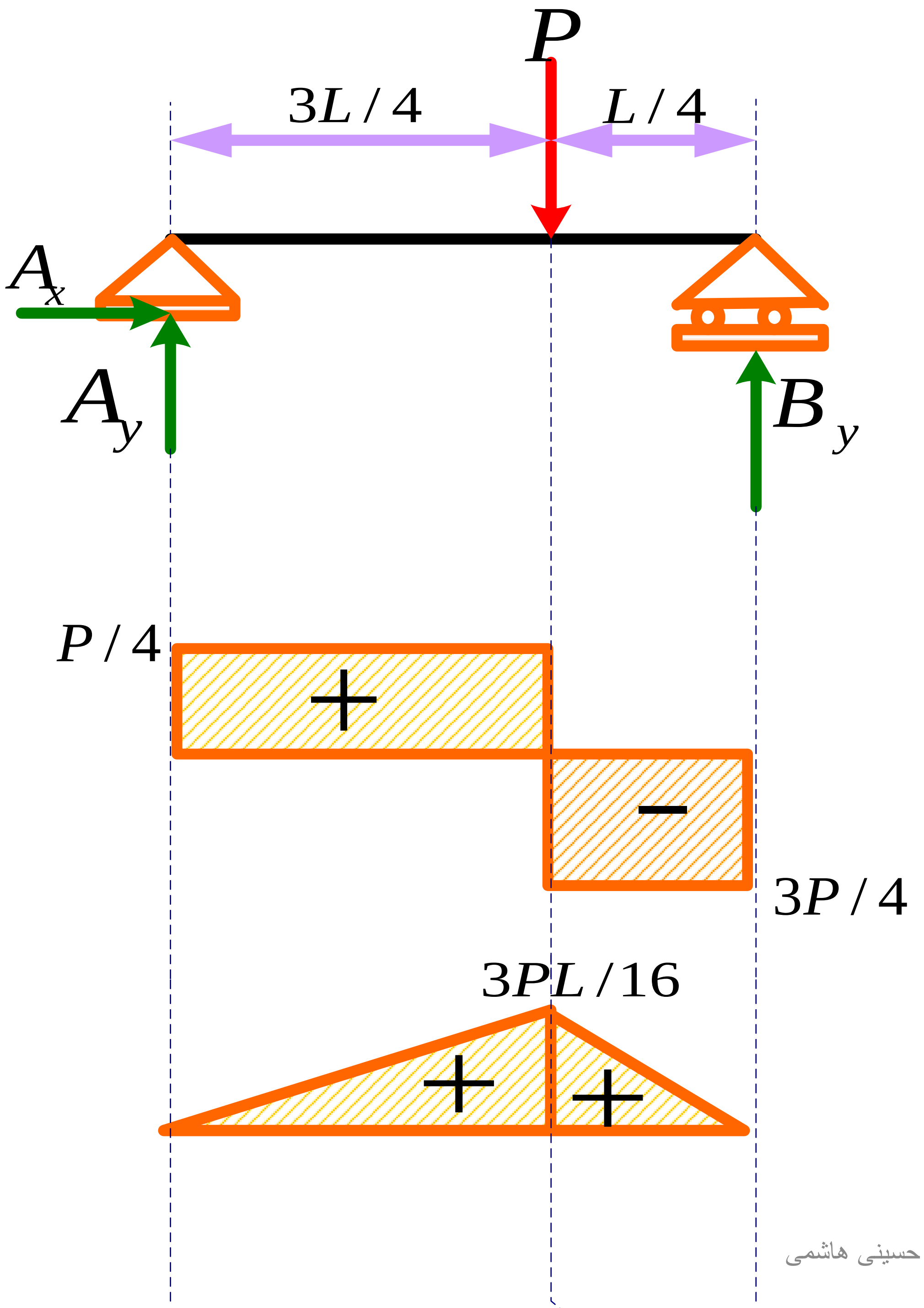
$$\left.\begin{aligned}\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - V = 0 \Rightarrow V = \frac{P}{4}\\ \sum M_C = 0 \Rightarrow A_y x - M = 0 \Rightarrow M = \frac{P}{4}x\end{aligned}\right\} 0 \le x \le 3L/4$$



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - P - v = 0 \;\Rightarrow\; v = \frac{-3P}{4}$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow A_y x - \left(x - \frac{3L}{4}\right)P - M = 0 \Rightarrow M = \frac{3P}{4}(l - x)$$

$$3L/4 \leq x \leq L$$



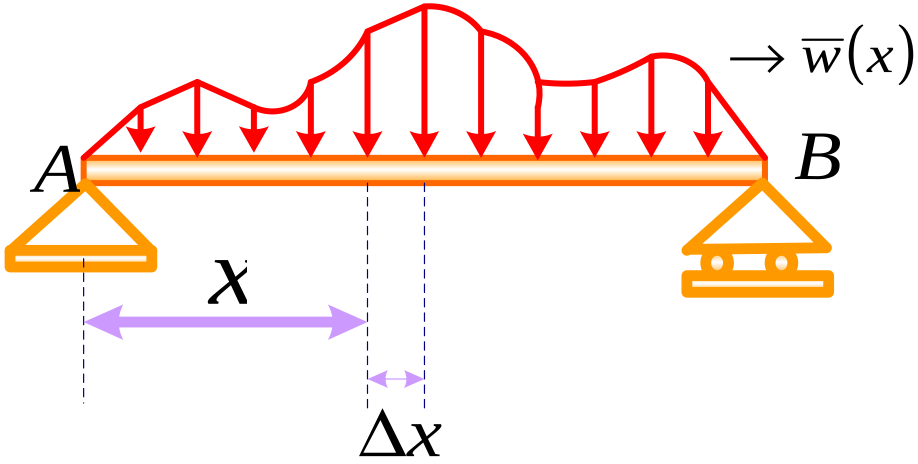
$$V=\frac{P}{4}\qquad M=\frac{P}{4}x$$

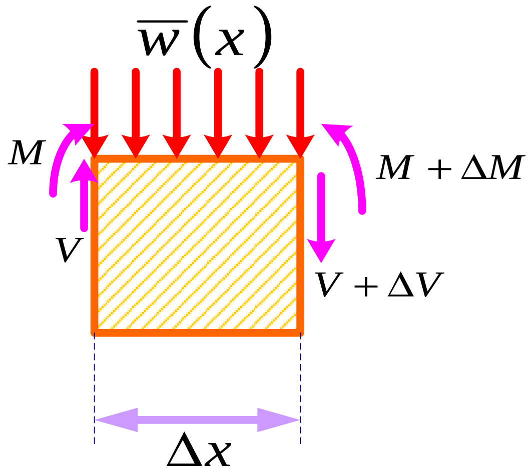
$$0\le x\le 3L/4$$

$$v=\frac{-3P}{4}\qquad M=\frac{3P}{4}(l-x)$$

$$3L/4\le x\le L$$

رابطه ما بین نیروی برشی و گشتاور خمشی

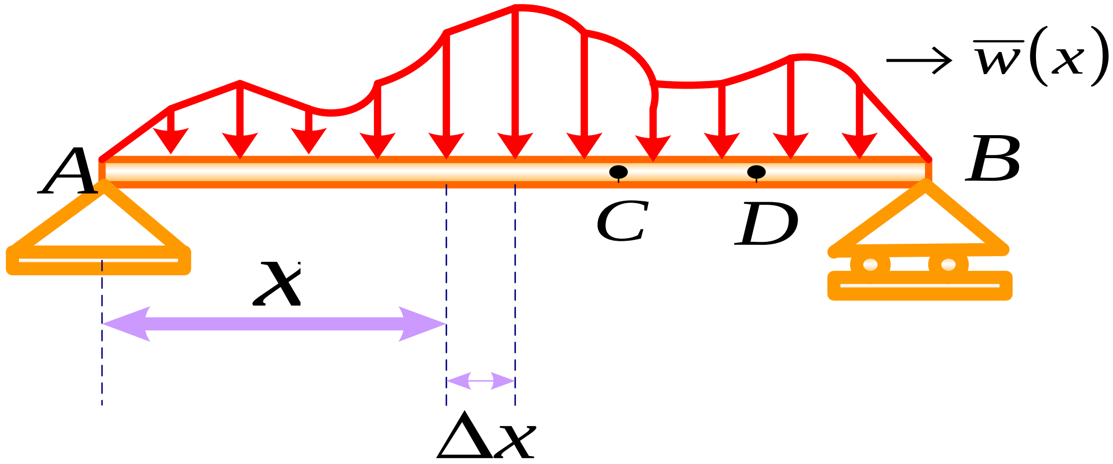




$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V + \Delta V - V + \overline{W}\Delta x = 0 \qquad \frac{\Delta V}{\Delta x} = -\overline{W}(x)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{dv}{dx} = -\overline{W}(x) \qquad \frac{dv}{dx} = -\overline{W}(x)$$

منهای شدت نیرو = شیب منحنی تغییرات نیروی برشی برحسب طول تیر

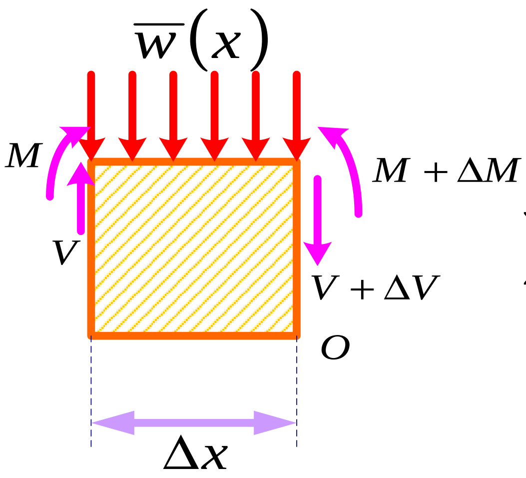


$$\frac{dv}{dx} = -\overline{W}(x)$$

$$dv = -\overline{W}(x)dx$$

$$\int_{V_c}^{V_d} dv = -\int_{x_c}^{x_d} \overline{W}(x)dx \Rightarrow V_d - V_c = -\int_{x_c}^{x_d} \overline{W}(x)dx$$

سطح زیر منحنی تغییرات شدت نیرو **بر**حسب طول تیر در فاصله x_c تا x_d



$$\sum M_O = 0 \Rightarrow V\Delta x + M - \overline{W}(x)\Delta x\left(\frac{\Delta x}{2}\right) - (M+\Delta M) = 0$$

$$V\Delta x - \overline{W}(x)\frac{\Delta x^2}{2} - \Delta M = 0$$

$$V - \frac{\overline{W}(x)}{2}\Delta x - \frac{\Delta M}{\Delta x} = 0 \Rightarrow \frac{\Delta M}{\Delta x} = -\frac{\overline{W}(x)}{2}\Delta x + V \qquad \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{dM}{dx} = V$$

$$V = \frac{dM}{dx}$$

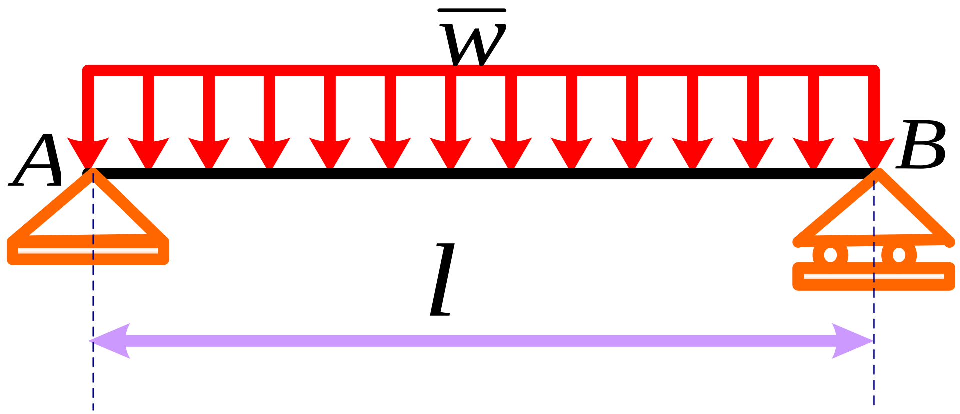
نیروی برشی = شیب منحنی تغییرات گشتاور خمشی بر حسب طول تیر

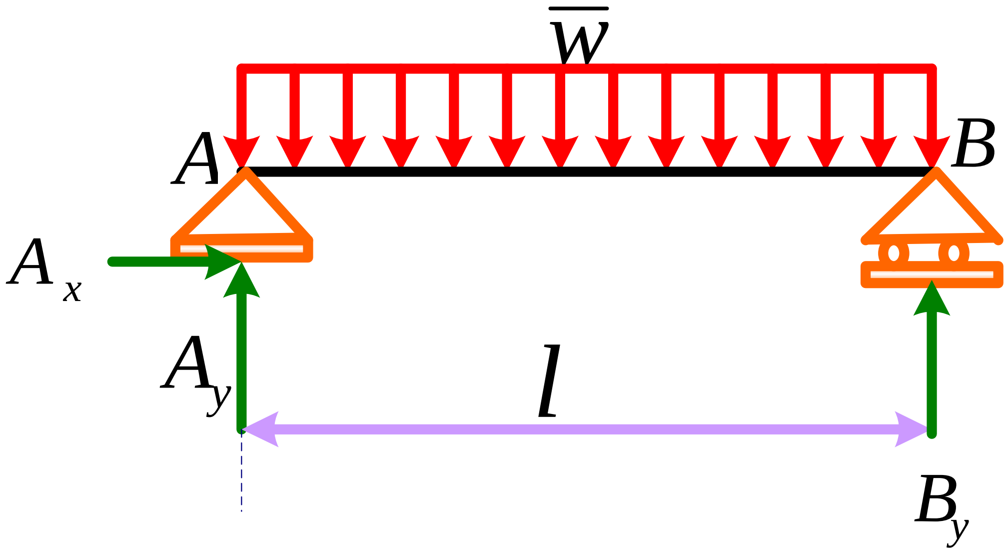
$$dM = Vdx \Rightarrow$$

$$\int_{M_c}^{M_d} dM = \int_{x_c}^{x_d} Vdx \Rightarrow M_d - M_c = \int_{x_c}^{x_d} Vdx$$

سطح زیر منحنی تغییرات نیروی برشی بر حسب طول تیر در فاصله x_c تا x_d

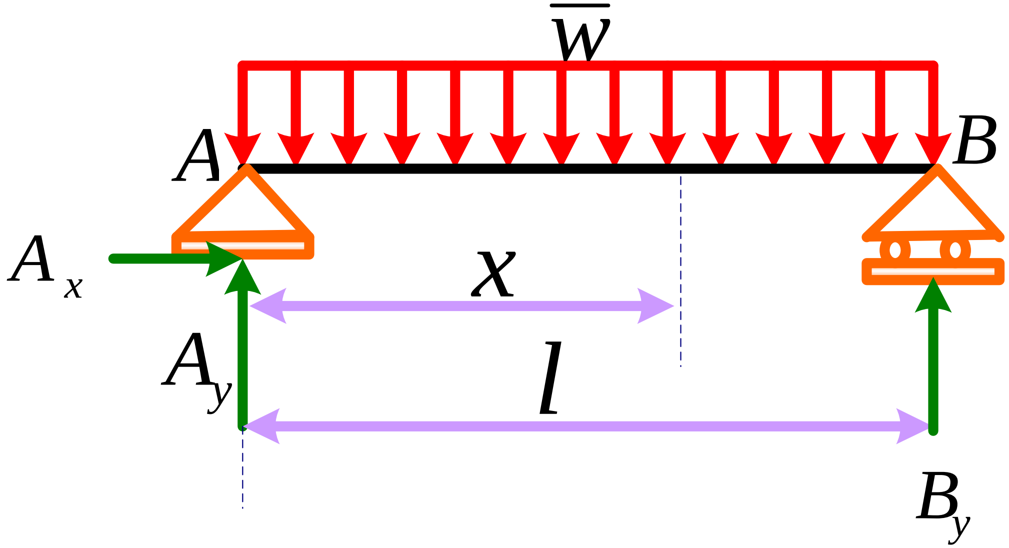
مثال: برای تیر نشانداده شده در شکل دیاگرام های نیروی برشی وگشتاور خمشی را رسم کنید.





$$\sum M_A = 0 \Rightarrow LB_y - \bar{W}(l)\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \Rightarrow B_y = \bar{W}\frac{l}{2}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - \bar{W}(l)\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \Rightarrow A_y = \overline{W}\frac{l}{2}$$



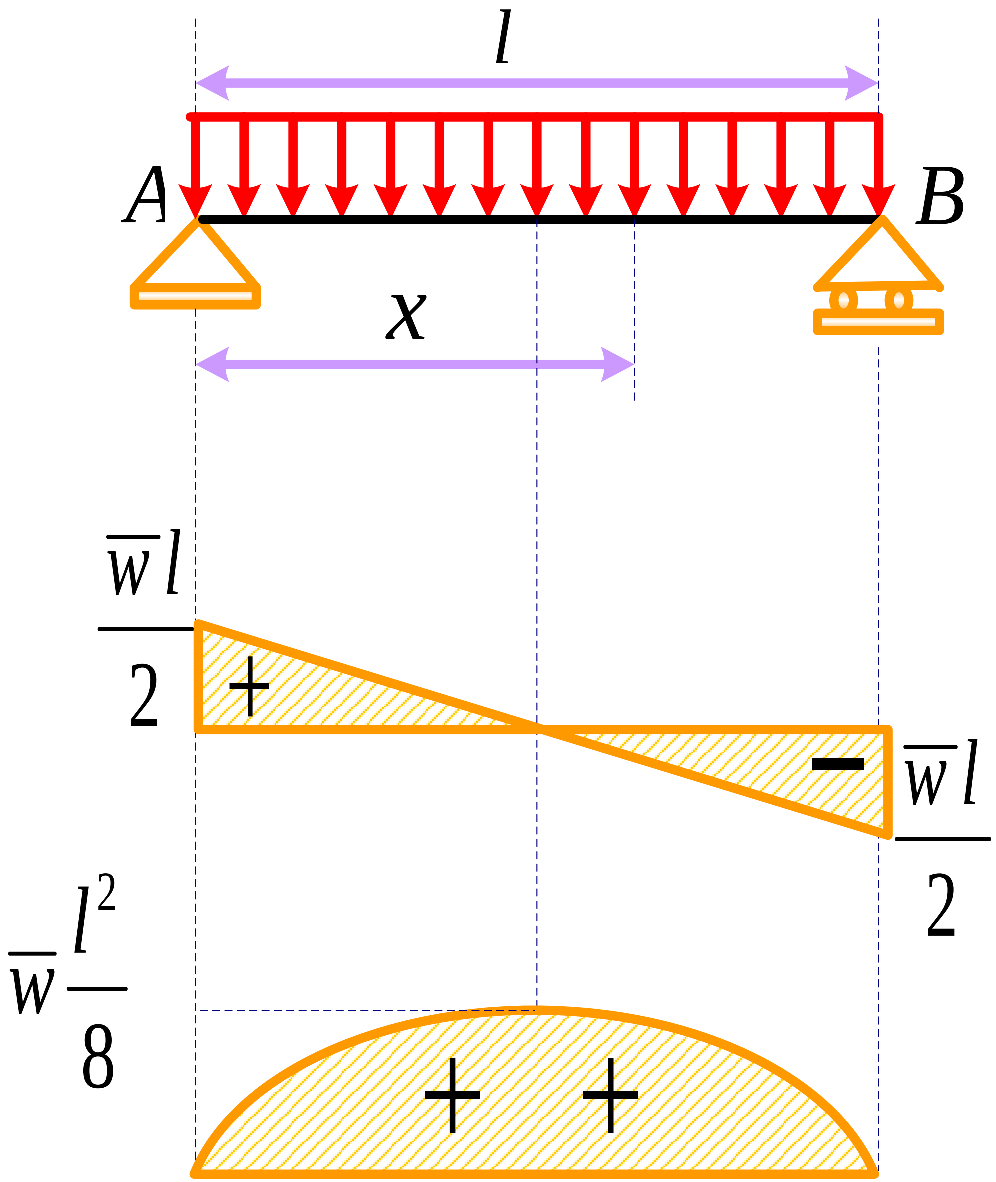
$$A_y = \overline{W}\frac{l}{2}$$

$$\frac{dV}{dx} = -\overline{W} \Rightarrow dV = -\overline{W}dx \Rightarrow \int_{A_y}^{V} dV = -\overline{W}\int_0^x dx$$

$$\Rightarrow V - A_y = -\overline{W}x \Rightarrow V = \overline{W}\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

$$\frac{dM}{dx} = V = \overline{W}\left(\frac{l}{2} - x\right) \Rightarrow dM = \overline{W}\left(\frac{l}{2} - x\right)dx$$

$$\int_0^M dM = \overline{W}\int_0^x \left(\frac{l}{2} - x\right)dx \Rightarrow M = \overline{W}\left(\frac{l}{2}x - \frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow M = \frac{\overline{W}}{2}\left(lx - x^2\right)$$

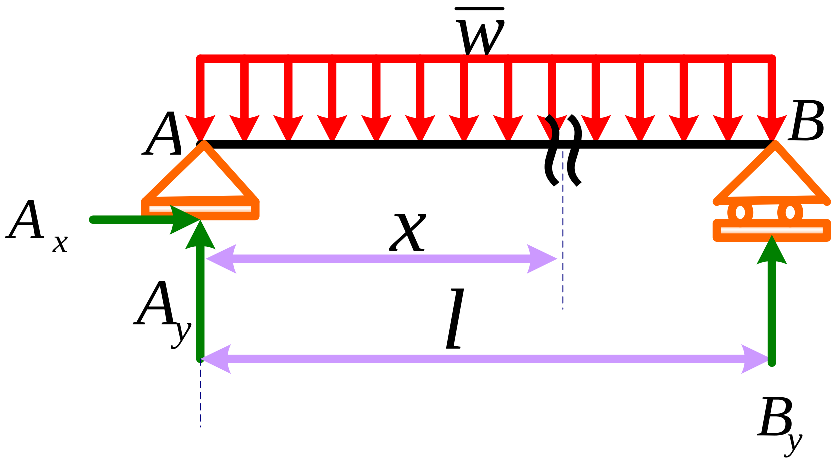


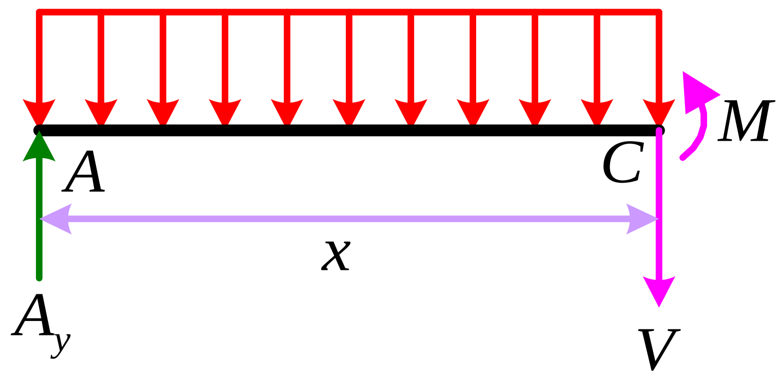
$$V = \overline{W}\left(\frac{l}{2} - x\right)$$

$$M = \frac{\overline{W}}{2}\left(lx - x^2\right)$$

$$\frac{\overline{w}\,l}{2} \qquad \frac{\overline{w}\,l}{2} \qquad \overline{w}\frac{l^2}{8}$$

حل مسئله قبل با روش مقطع:



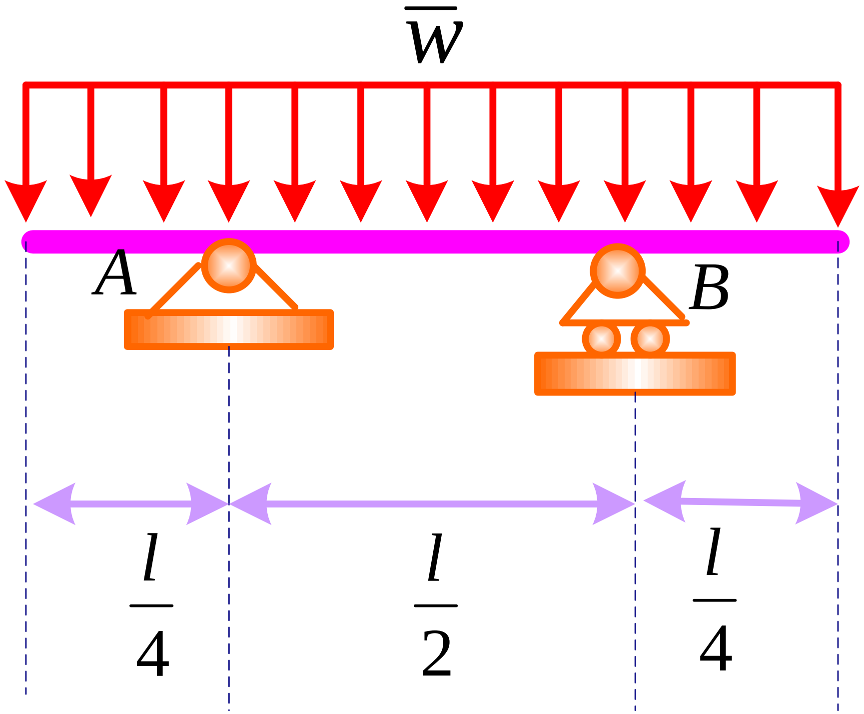


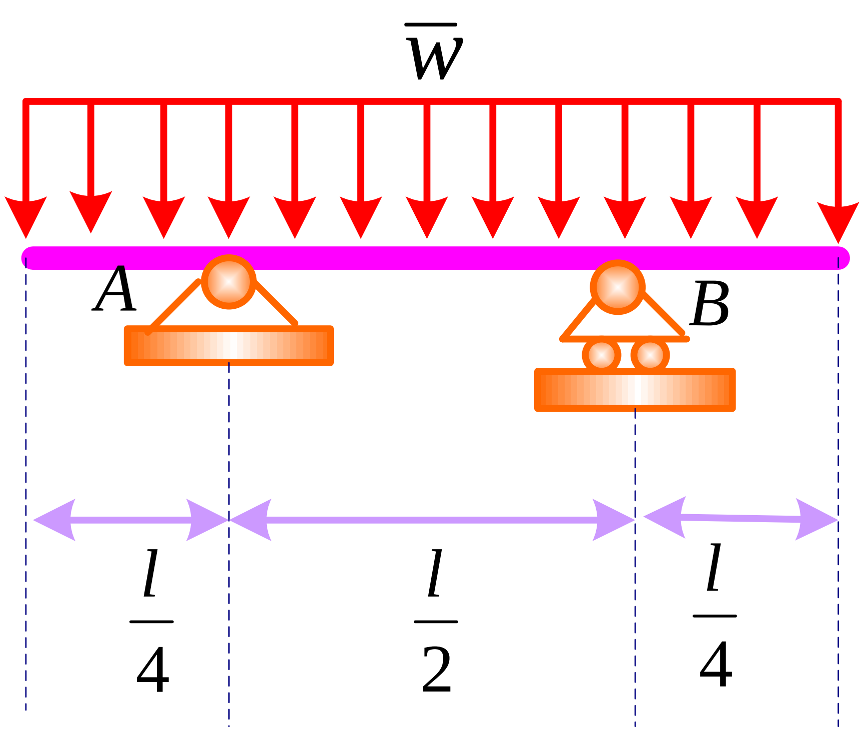
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - \overline{W}x - V = 0 \qquad V = A_y - \overline{W}(x) = \overline{W}\frac{l}{2} - \overline{W}x$$

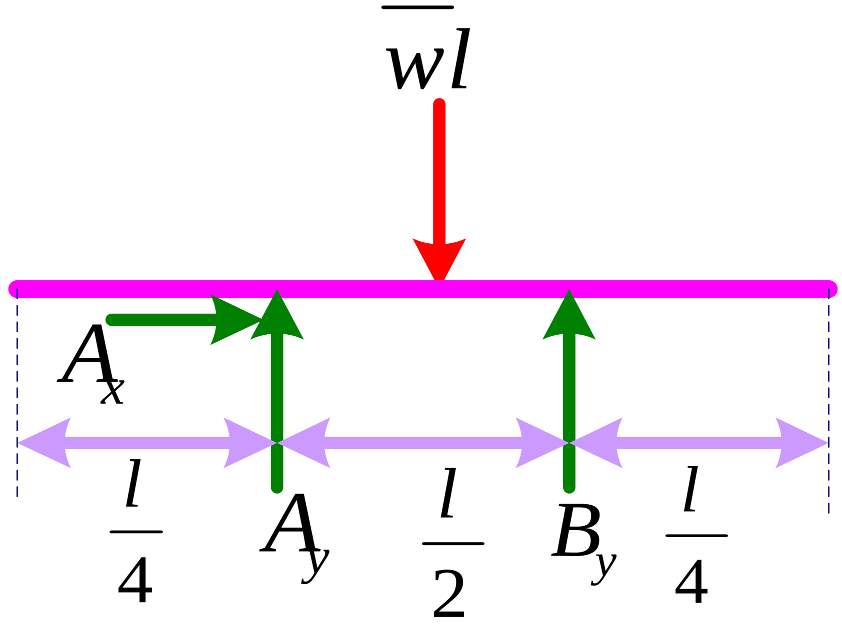
$$V = \overline{W}\left(\frac{l}{2} - x\right) \qquad \sum M_C = 0 \Rightarrow A_y x - \overline{W}x\left(\frac{x}{2}\right) - M = 0$$

$$M = \overline{W}\frac{l}{2}x - \overline{W}\frac{x^2}{2} = \frac{\overline{W}}{2}\left(lx - x^2\right)$$

مثال: دیاگرام های نیروی برشی و گشتاور خمشی را برای تیر نشان داده شــده در شکل که تحت تأثیر بار توزیعی با شدت ثابت قرار گرفته است رسم کنید.

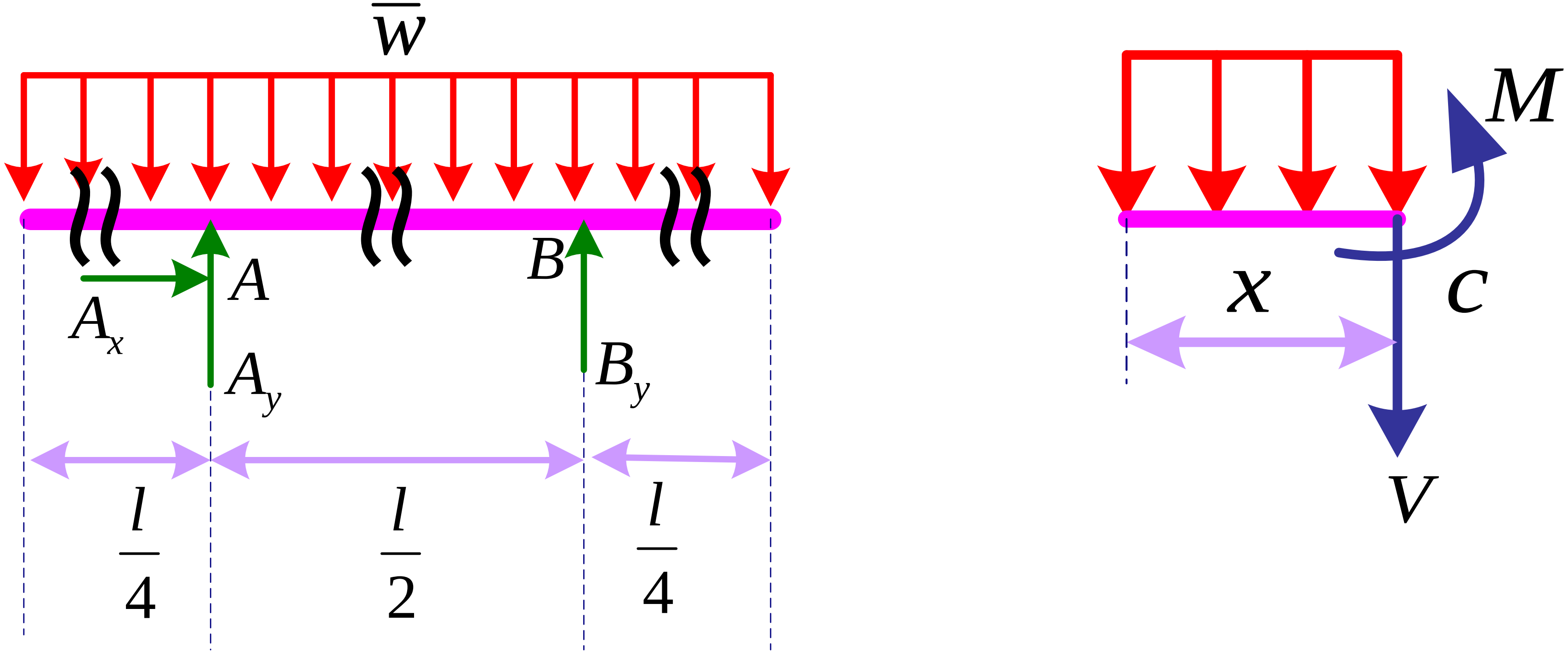




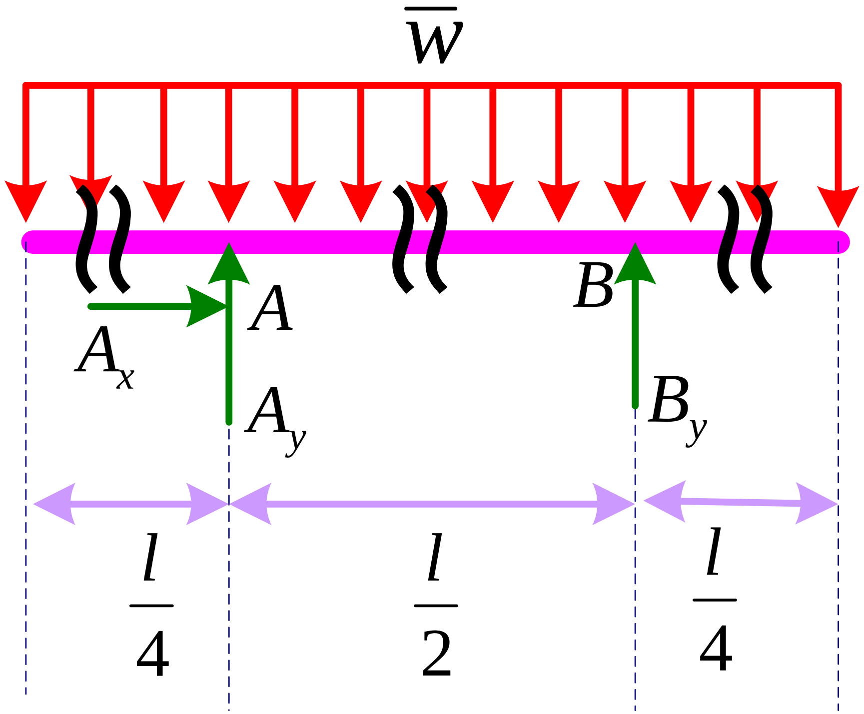


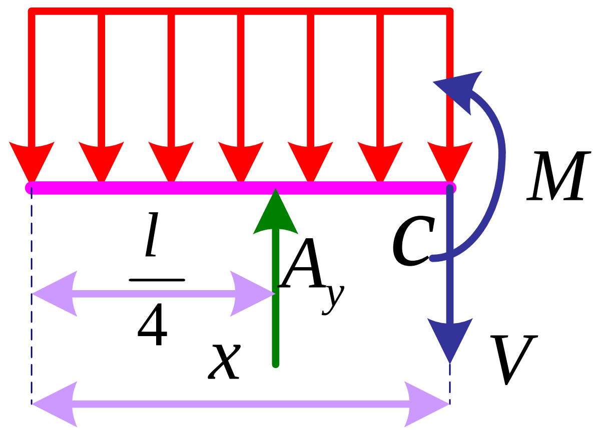
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y\left(\frac{l}{2}\right) - Wl\left(\frac{l}{4}\right) = 0 \Rightarrow B_y = \frac{\overline{W}l}{2}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - \overline{W}l = 0 \Rightarrow A_y = \overline{W}\frac{l}{2}$$



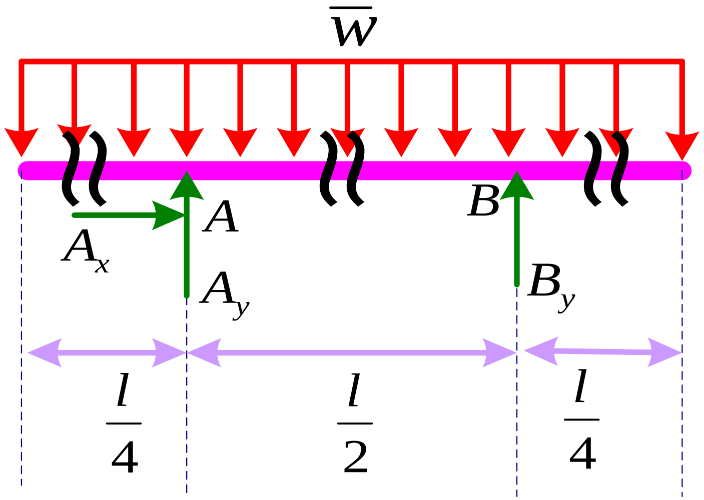
$$\left.\begin{aligned}\sum F_y &= 0 \Rightarrow \overline{W}x + v = 0 \Rightarrow v = -\overline{W}x \\ \sum M_C &= 0 \Rightarrow \overline{W}x\left(\frac{x}{2}\right) + M = 0 \Rightarrow M = -\frac{Wx^2}{2}\end{aligned}\right\} 0 \le x \le l/4$$

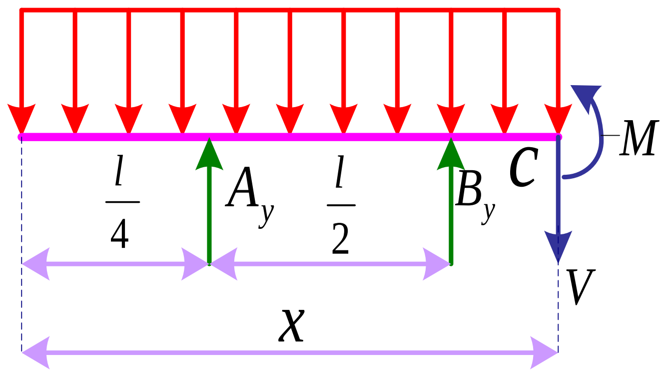




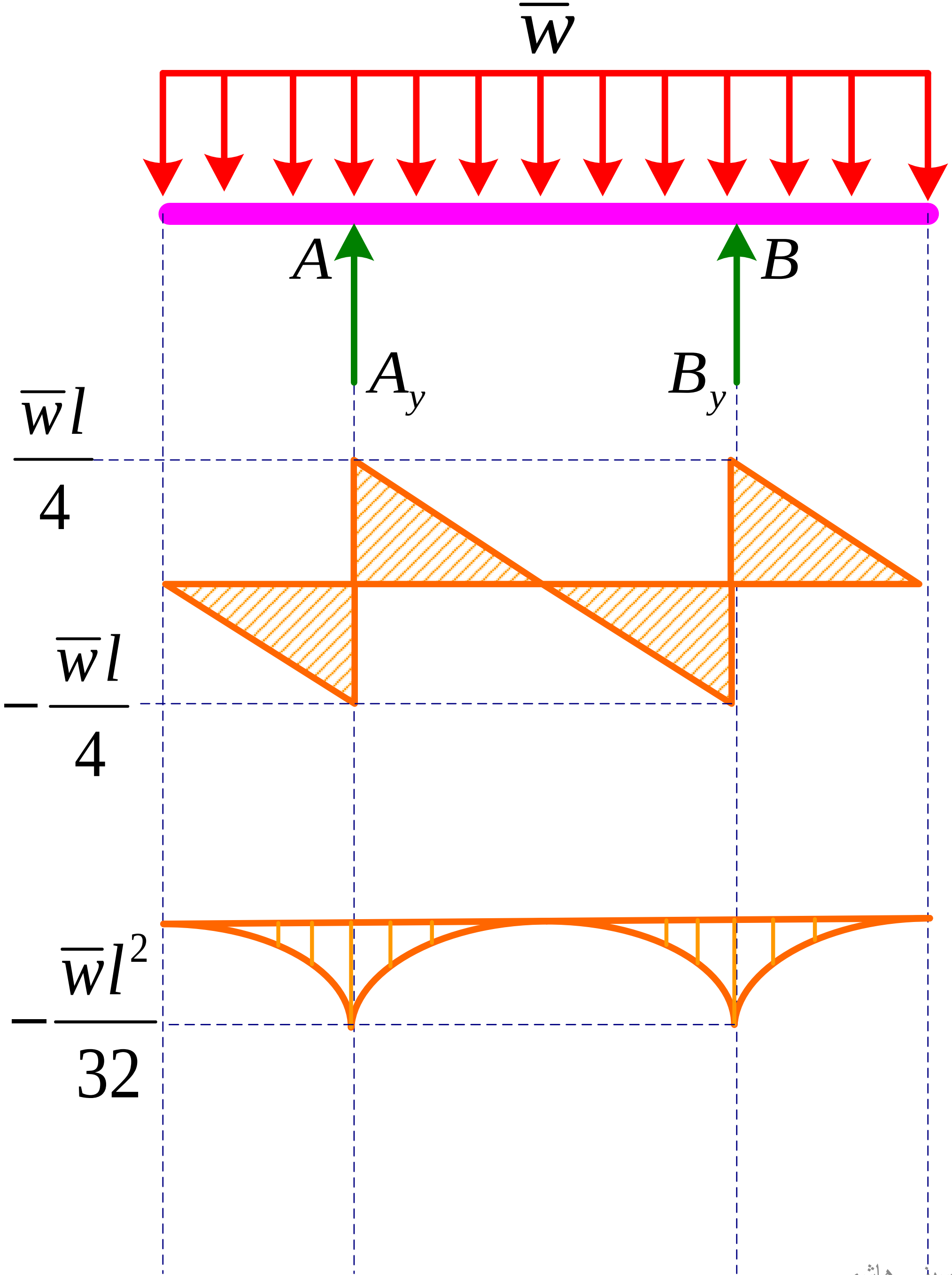
$$A_y = \overline{W}\,\frac{l}{2}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - \overline{W}x - v = 0 \Rightarrow v = \overline{W}\left(\frac{l}{2} - x\right)\\
&\sum M_C = 0 \Rightarrow -A_y\left(x - \frac{l}{4}\right) + \overline{W}x\left(\frac{x}{2}\right) + M = 0\\
&\Rightarrow M = -\frac{\overline{W}x^2}{2} + \frac{\overline{W}l}{2}\left(x - \frac{l}{4}\right)
\end{aligned}\right\} \quad \frac{l}{4} \le x \le 3\frac{l}{4}$$





$$\left.\begin{array}{l}\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - \overline{W}x - v = 0 \Rightarrow v = \overline{W}(l-x) \\ \sum M_C = 0 \Rightarrow -A_y\left(x-\frac{l}{4}\right) + \overline{W}x\left(\frac{x}{2}\right) - B_y\left(x-\frac{3l}{4}\right) + M = 0 \\ \Rightarrow M = \frac{\overline{W}l}{2}\left(x-\frac{l}{4}\right) + \frac{\overline{W}l}{2}\left(x-\frac{3l}{4}\right) - \frac{\overline{W}x^2}{2}\end{array}\right\} \frac{3l}{4} \le x \le l$$



$$A_y = \bar{W}\frac{l}{2} \qquad B_y = \frac{\bar{W}l}{2}$$

$$v = -\bar{W}x \qquad M = -\frac{\bar{W}x^2}{2}$$

$$0 \le x \le l/4$$

$$v = \bar{W}\left(\frac{l}{2} - x\right) \qquad M = -\frac{\bar{W}x^2}{2} + \frac{\bar{W}l}{2}\left(x - \frac{l}{4}\right)$$

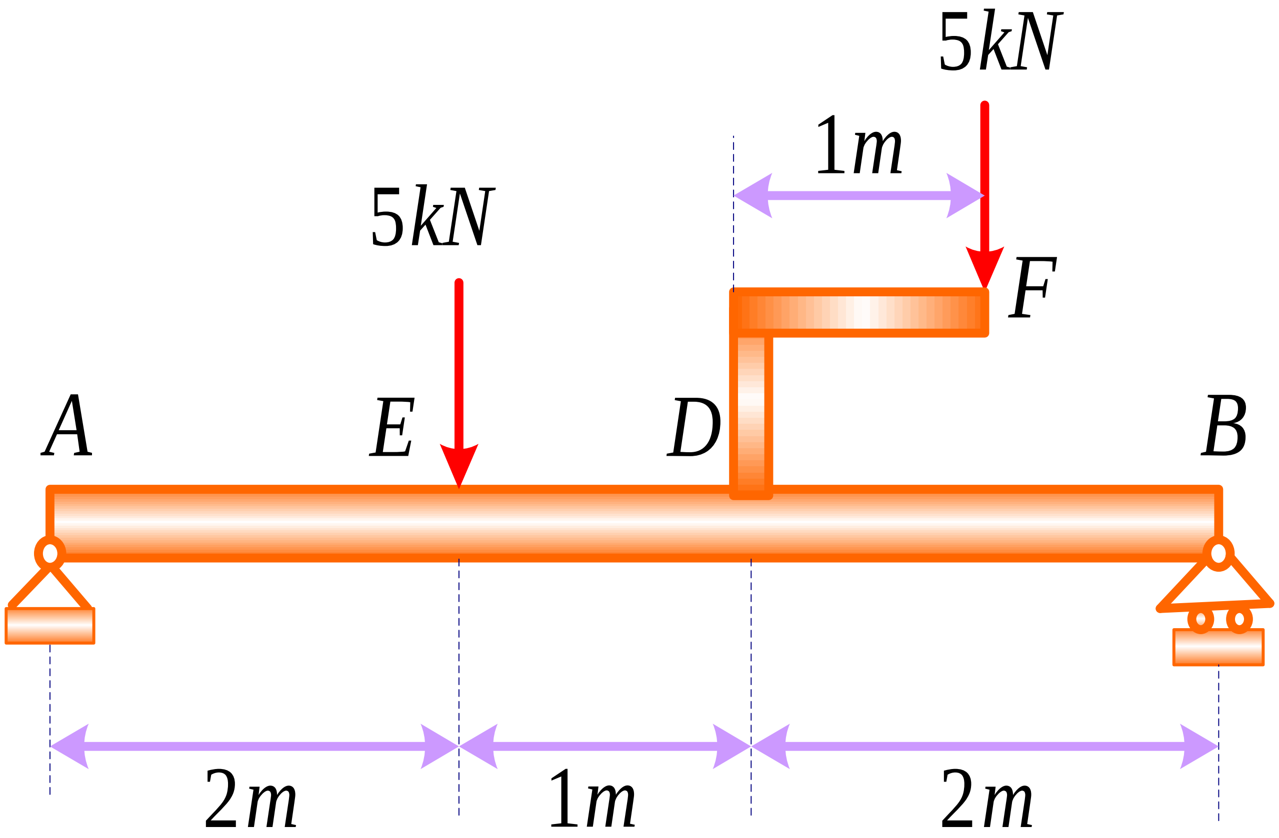
$$l/4 \le x \le 3l/4$$

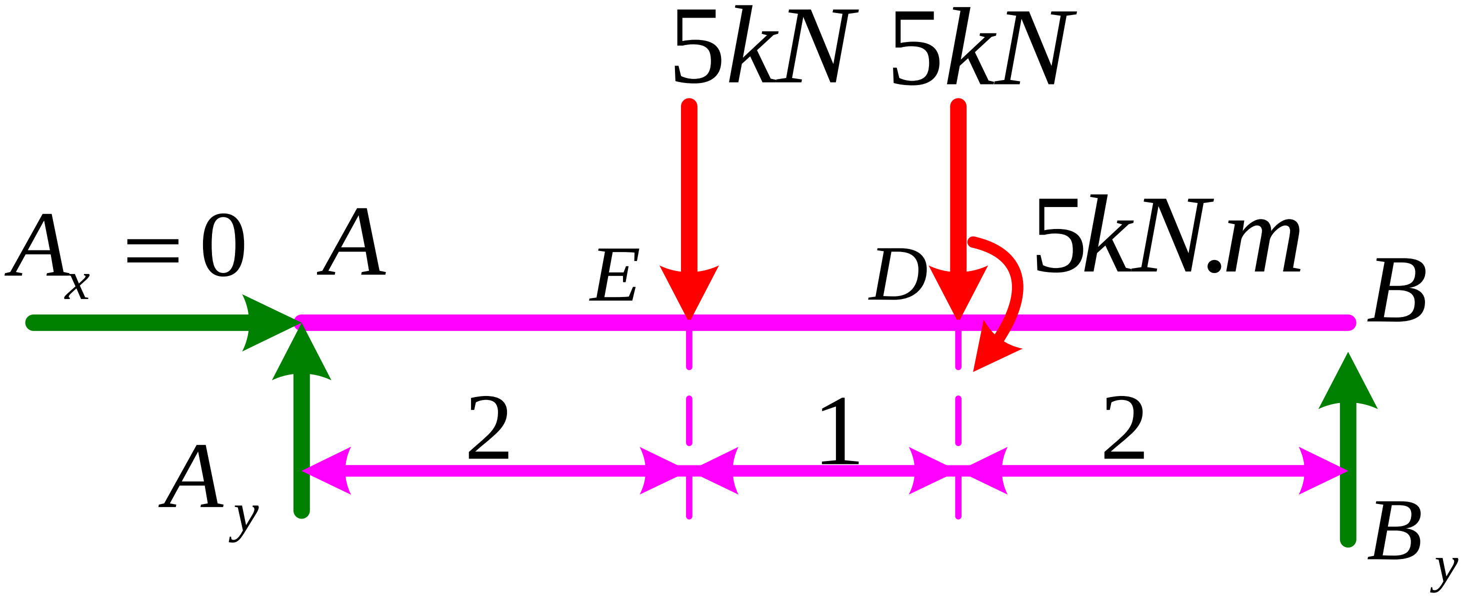
$$v = \bar{W}(l - x)$$

$$M = \frac{\bar{W}l}{2}\left(x - \frac{l}{4}\right) + \frac{\bar{W}l}{2}\left(x - \frac{3l}{4}\right) - \frac{\bar{W}x^2}{2}$$

$$3l/4 \le x \le l$$

مثال: دیاگرام های نیروی برشی و گشتاور خمــشی را بــرای تیــر نــشان داده شده در شکل رسم کنید؟



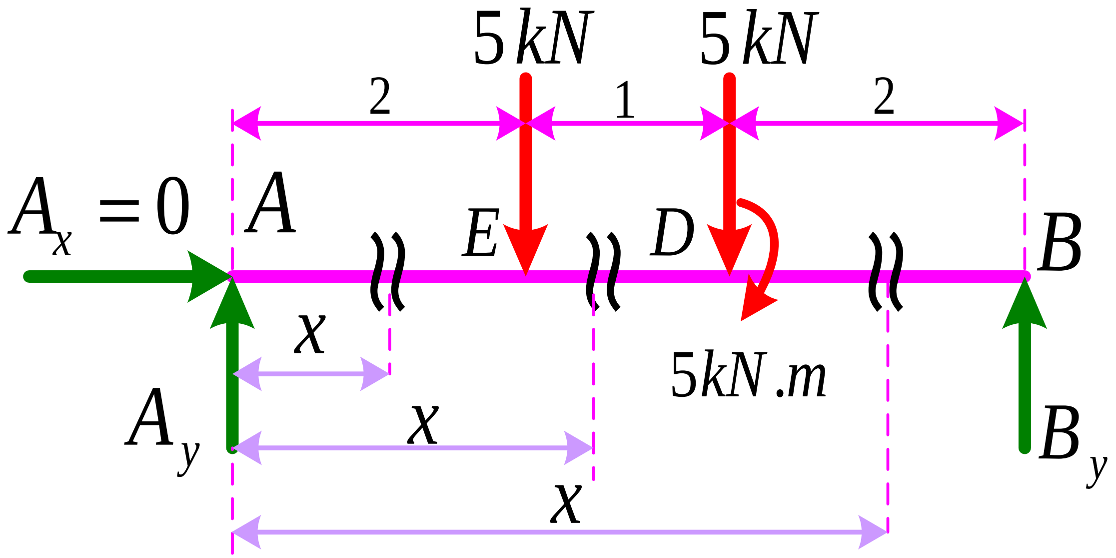


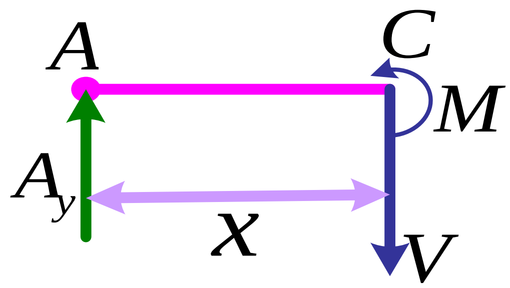
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow 2\times5 + 3\times5 + M - 5B_y = 0$$

$$B_y = 6kN$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - 10 = 0$$

$$A_y = 4kN$$

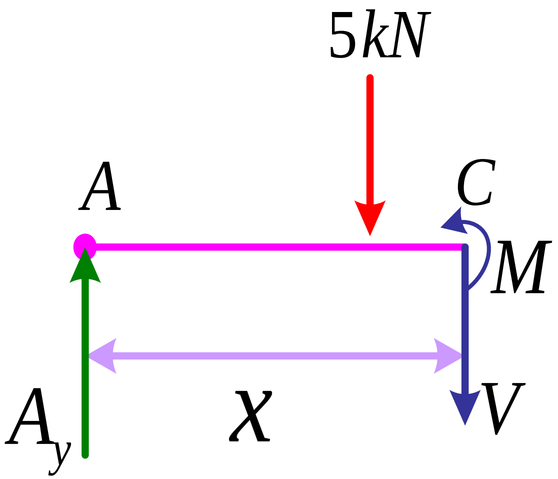




$$A_y = 4kN$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow v = 4kN \qquad \sum M_C = 0 \Rightarrow M - A_y x = 0 \Rightarrow M = 4x$$

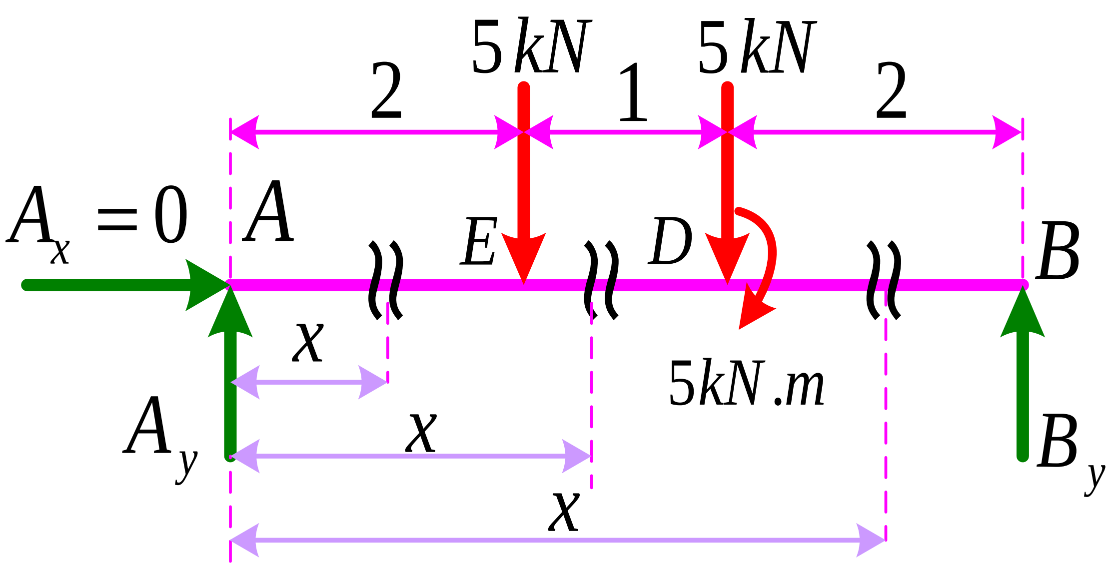
$$0 \le x \le 2$$

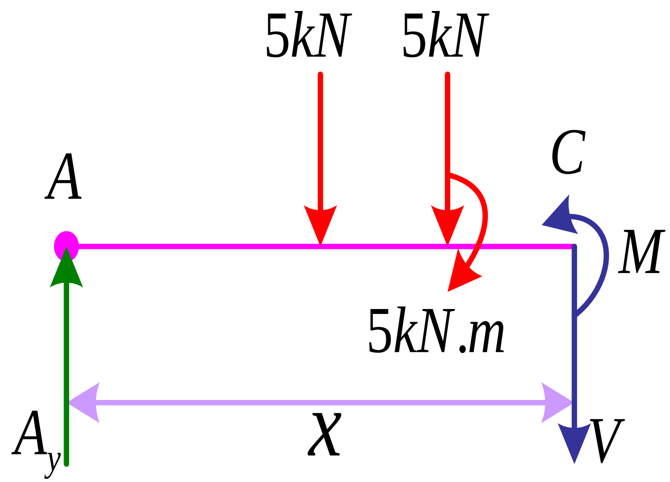


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow v = -1kN$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M + 5(x-2) - 4x = 0$$

$$\Rightarrow M = -x + 10 \qquad 2 \le x \le 3$$



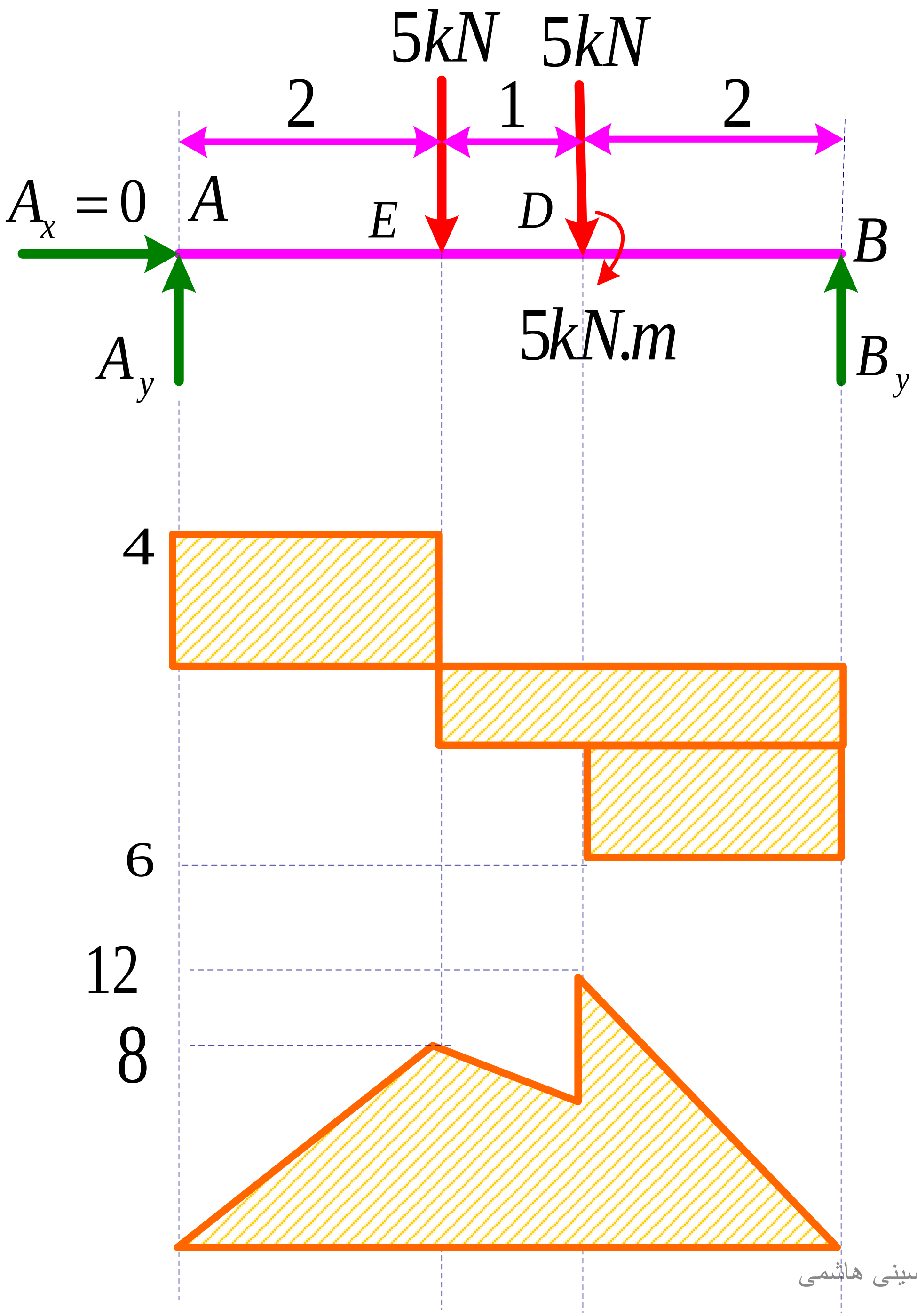


$$A_y = 4kN$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow v = -6kN$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -M - 5(x-3) - 5(x-2) + 5 + 4x = 0$$

$$M = -6x + 30 \qquad 3 \le x \le 5$$



$$v = 4kN \qquad M = 4x$$

$$0 \le x \le 2$$

$$v = -1kN \qquad M = -x + 10$$

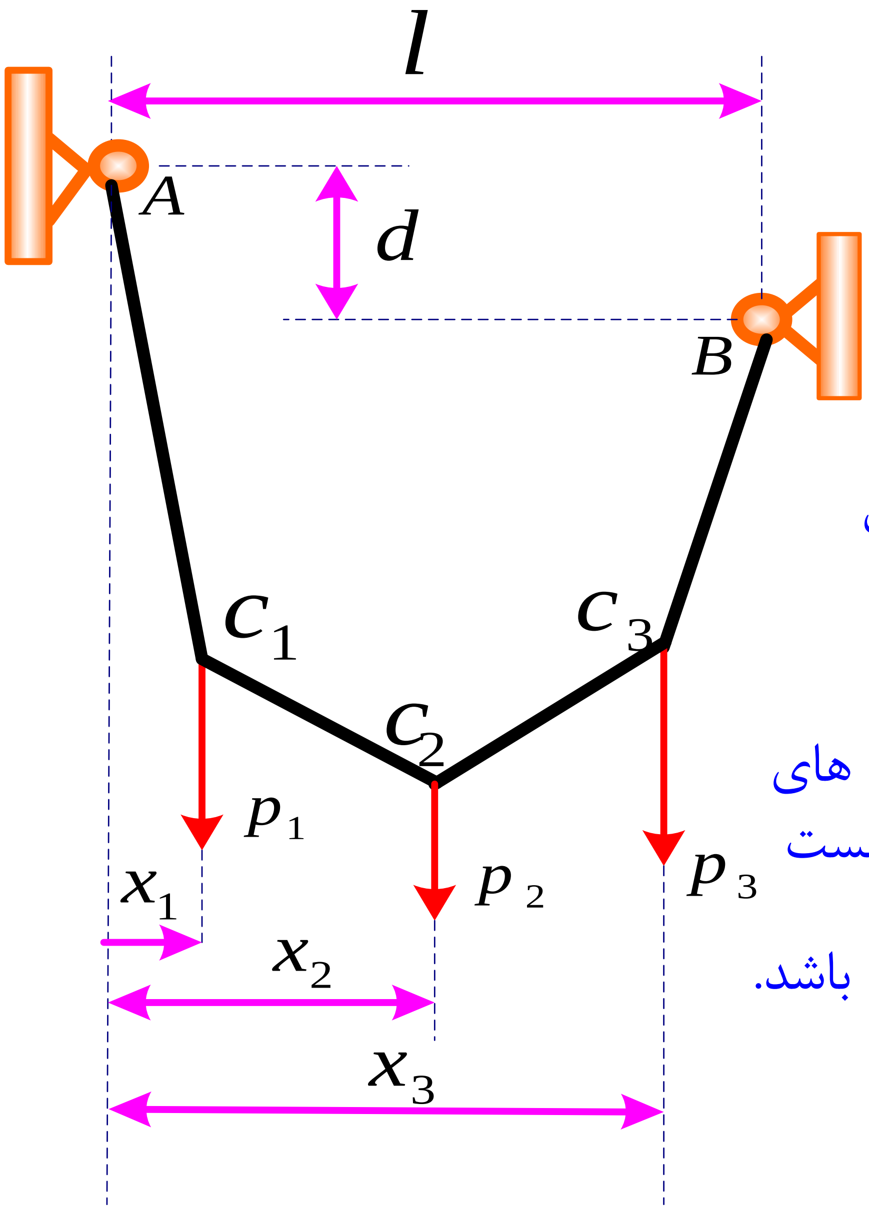
$$2 \le x \le 3$$

$$v = -6kN \quad M = -6x + 30$$

$$3 \le x \le 5$$

$$A_y = 4kN \qquad B_y = 6kN$$

۷-تحلیل کابل ها



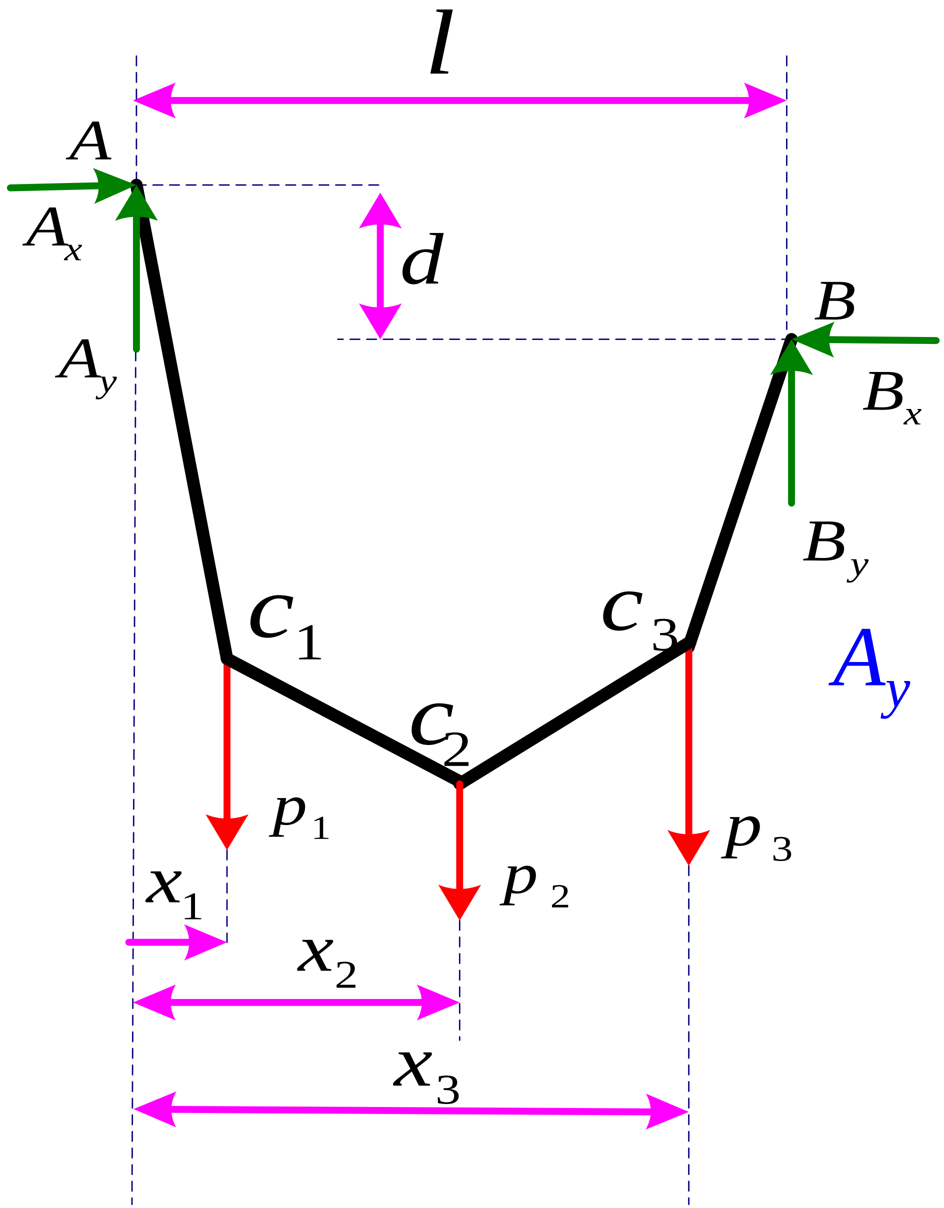
۱- کابل ها با نیروی متمرکز

کابل مقابل بین دو نقطه A و B وصل شده است و به نقاط مختلف آن نیرو اعمال می شود. این کابل، کابل قابل انعطاف است یعنی مقاومت کابل در مقابل خمش، ضعیف است. شکل کابل متأثر از نیروهای وارد بر آن است.

هدف تعیین مولفه های عکس العمل ها در تکیه گاه های A وB و فواصل قایم نقاط C1 و C2 و C3 از A هست

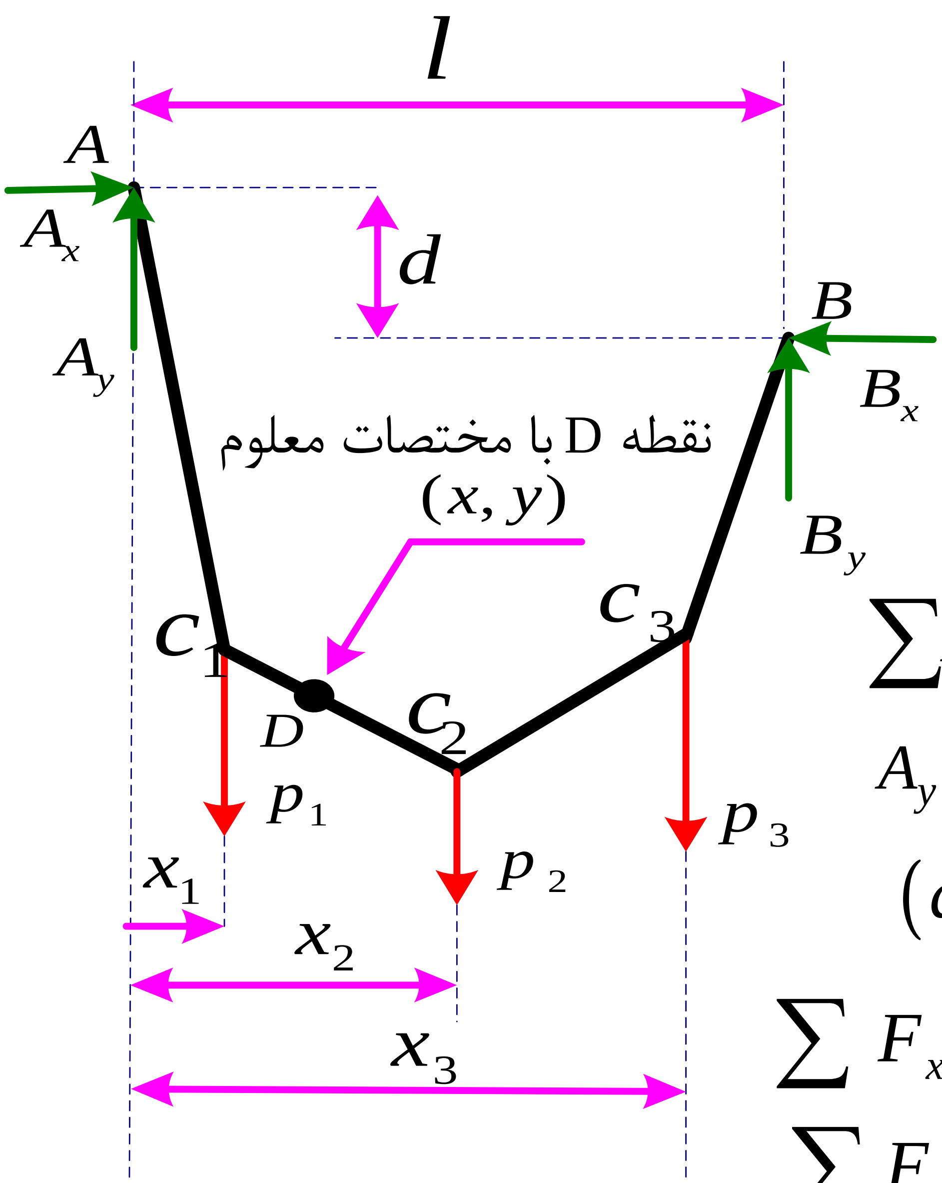
نیروی کشش در هر قست از کابل در امتداد آن می باشد.

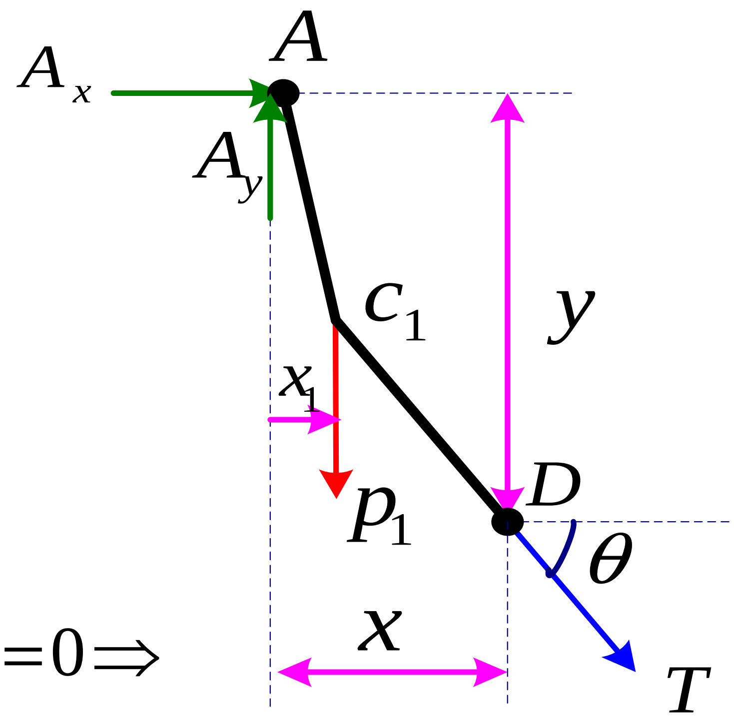
دیاگرام آزاد کل کابل:



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow$$

(a) معادله با دو مجهول A_x و A_y





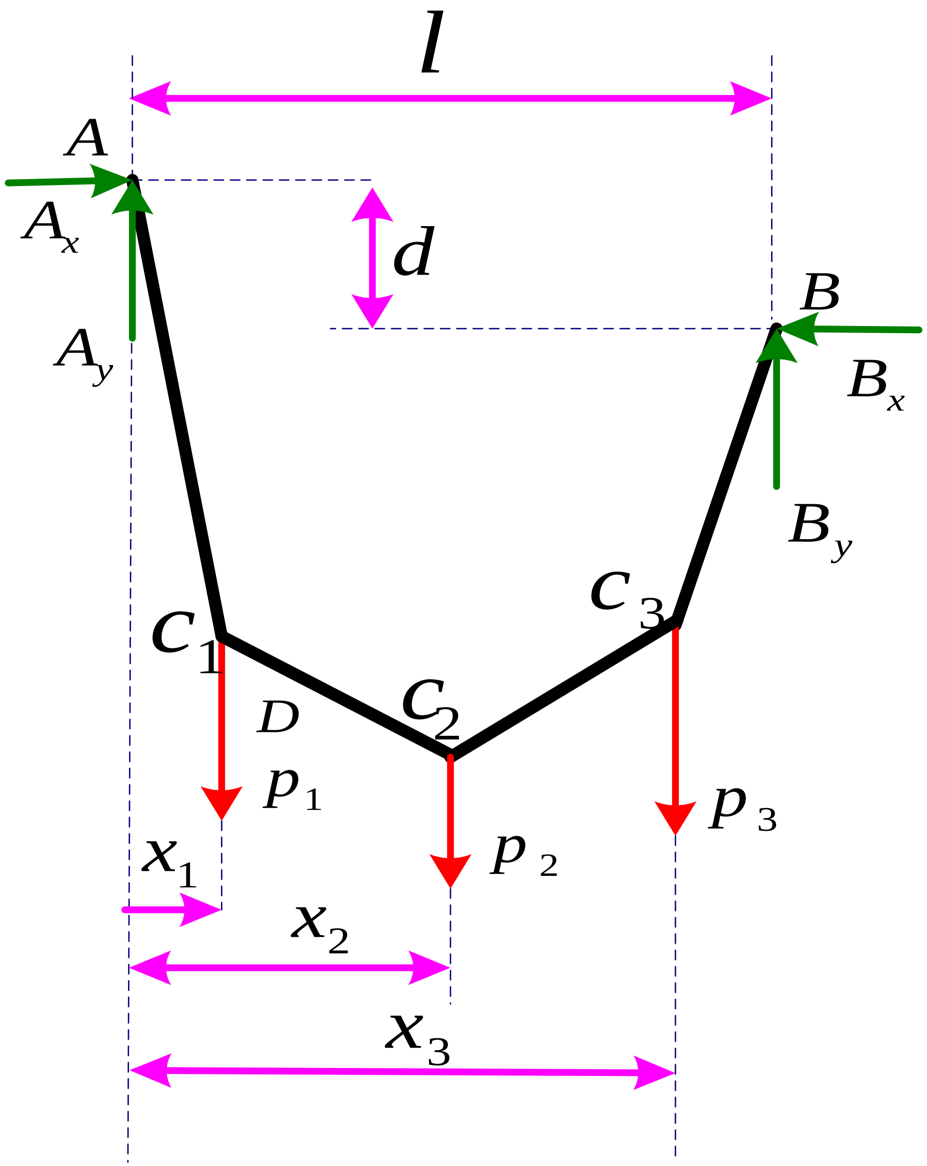
$$\sum M_D = 0 \Rightarrow$$

یک معادله با دو مجهول A_x و A_y $\qquad (b)$

$(a)\ ,\ (b) \rightarrow A_x, A_y$ تعیین می شوند

$$\left.\begin{array}{l} \sum F_x = 0 \Rightarrow \text{دو مجهول } T, \theta \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow \text{دو مجهول } T, \theta \end{array}\right\}$$

θ, T تعیین می شوند.

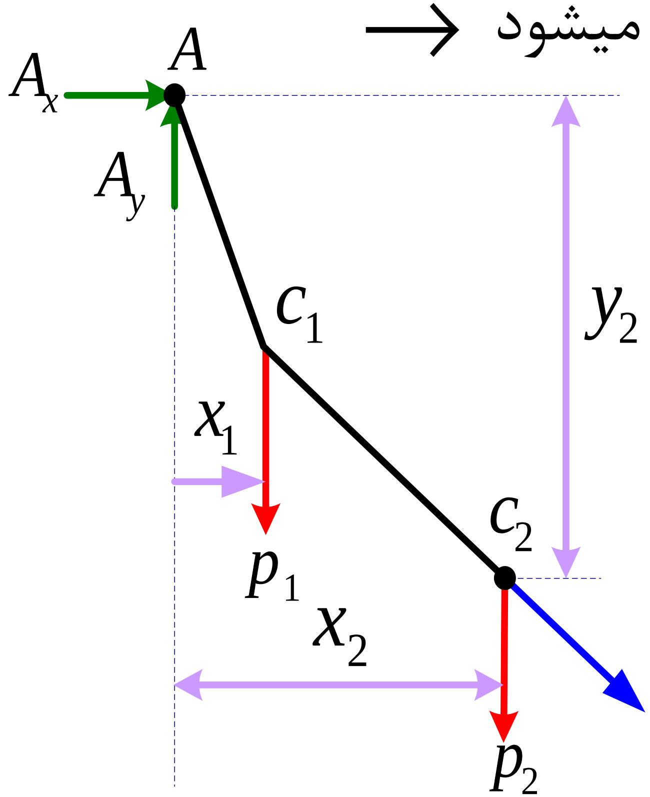


$\sum F_x = 0 \Rightarrow$ مجهول B_x

$\rightarrow$ تعیین میشود B_x

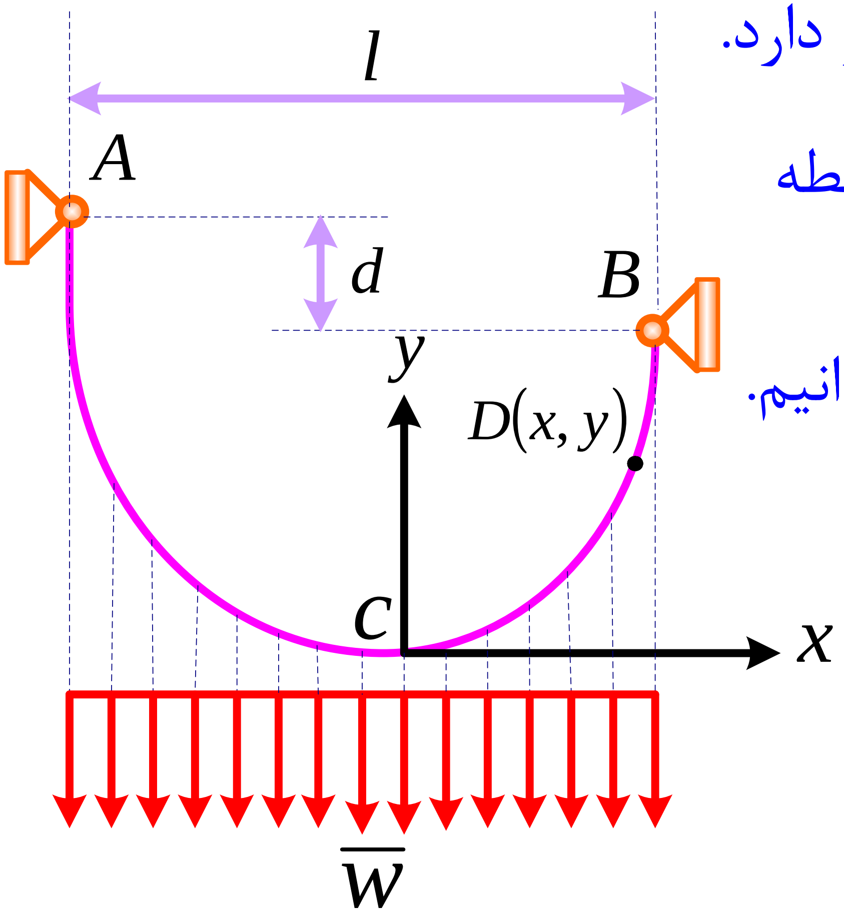
$\sum F_y = 0 \Rightarrow$ مجهول B_y

$\rightarrow$ تعیین میشود B_y



$\sum M_{C_2} = 0 \Rightarrow$ مجهول $y_2 \rightarrow$ تعیین می شود y_2

۲- کابل های سهمی

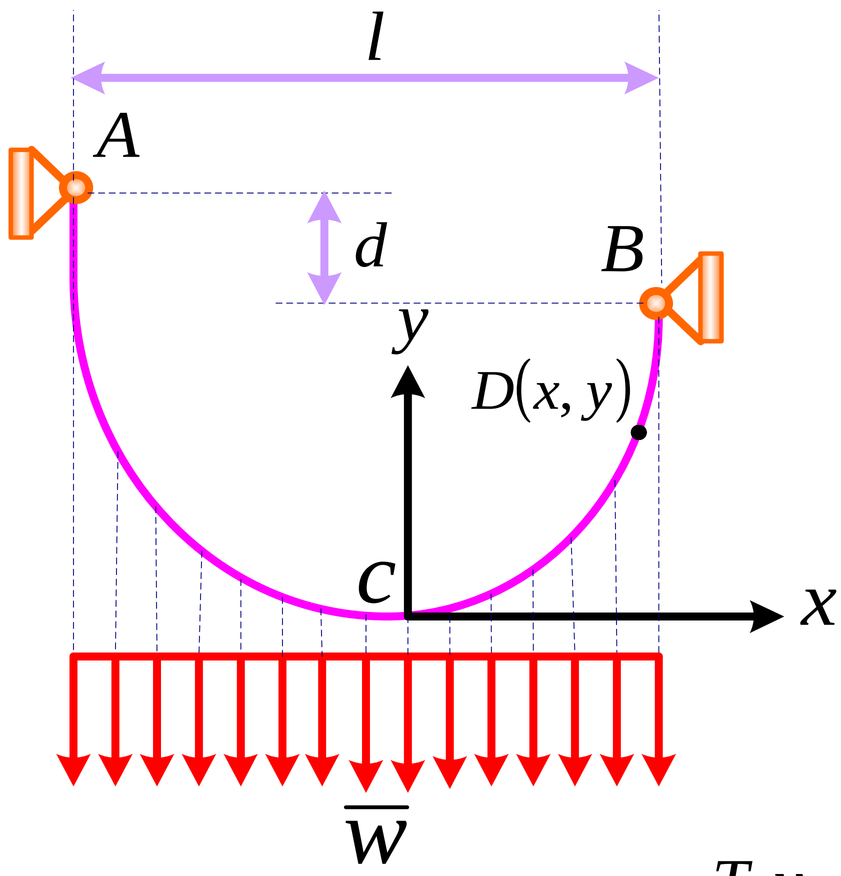


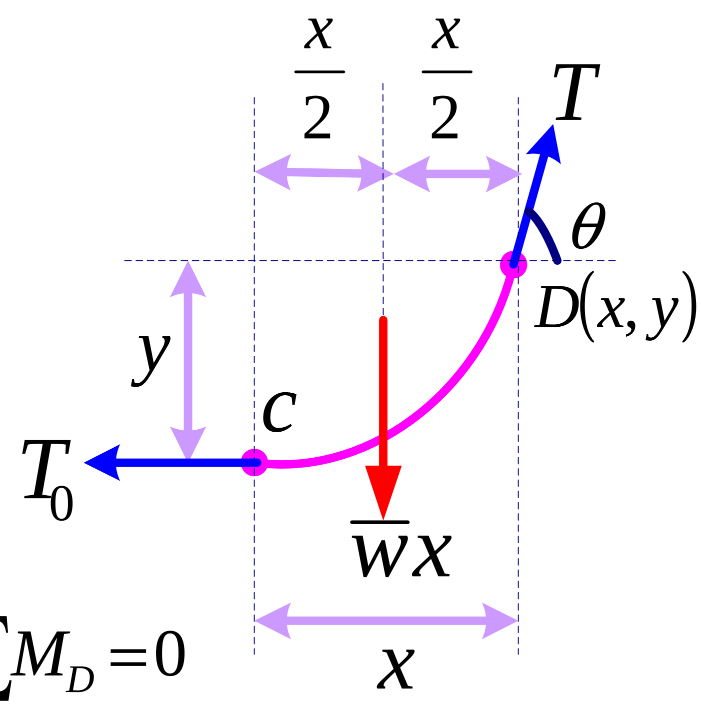
کابل تحت تاثیر نیروی توزیعی ثابتی قرار دارد.

دستگاه مختصات را بر روی پایین ترین نقطه کابل انتخاب میکنیم.

برخلاف کابل قبلی، مختصات D را نمی دانیم.

یعنی (x,y) مجهول هستند.





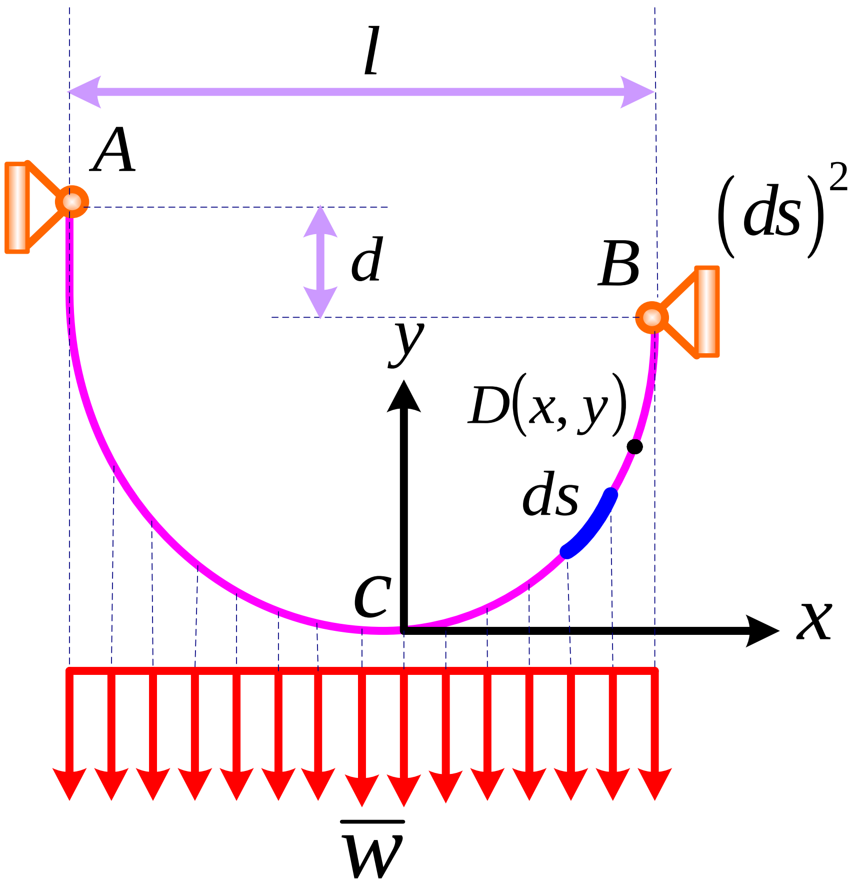
$$\sum M_D = 0$$

$$T_0 y - \bar{W}x\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow y = \frac{\bar{W}}{2T_0}x^2$$

معادله یک سهمی است که رأس آن در مبدأ مختصات می باشد.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T\cos\theta = T_0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T\sin\theta - \bar{W}x = 0 \rightarrow T\sin\theta = \bar{W}x \quad T^2 = T_0^2 + \bar{W}^2x^2 \quad \tan\theta = \frac{\bar{W}x}{T_0}$$

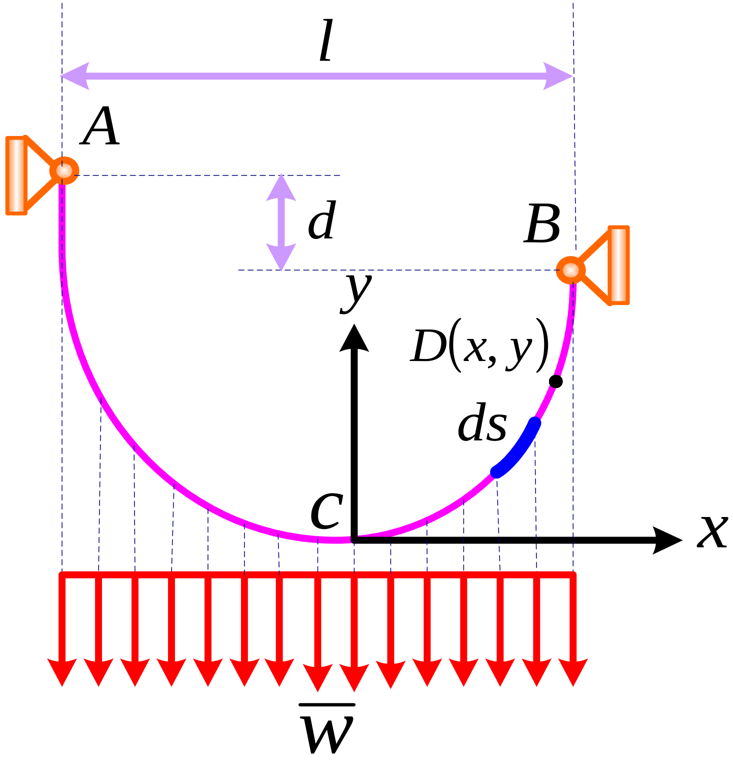


$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2=(dx)^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

$$y=\frac{\overline{W}}{2T_0}x^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\overline{W}}{T_0}x \rightarrow (ds)^2=(dx)^2\left(1+\frac{\overline{W}^2}{T_0^2}x^2\right)$$

$$ds=\left(1+\frac{\overline{W}^2}{T_0^2}x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx$$



$$ds=\left(1+\frac{\bar{W}^2}{T_0^2}x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$Z=\frac{\bar{W}^2}{T_0^2}x^2 \qquad n=1/2$$

$$ds=(1+Z)^n\,dx$$

$$(1+Z)^n=1+nZ+\frac{n(n-1)}{2!}Z^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}Z^3+\ldots$$

$$ds=\left(1+\frac{\bar{W}^2}{2T_\circ^2}x^2-\frac{\bar{W}^4}{8T_0^4}x^4+\frac{\bar{W}^6}{16T_0^6}x^6+\ldots\right)dx$$

$$\int_0^{s_{CB}}ds=\int_0^{x_B}\left(1+\frac{\bar{W}^2}{2T_\circ^2}x^2-\frac{\bar{W}^4}{8T_0^4}x^4+\frac{\bar{W}^6}{16T_0^6}x^6+\ldots\right)dx$$

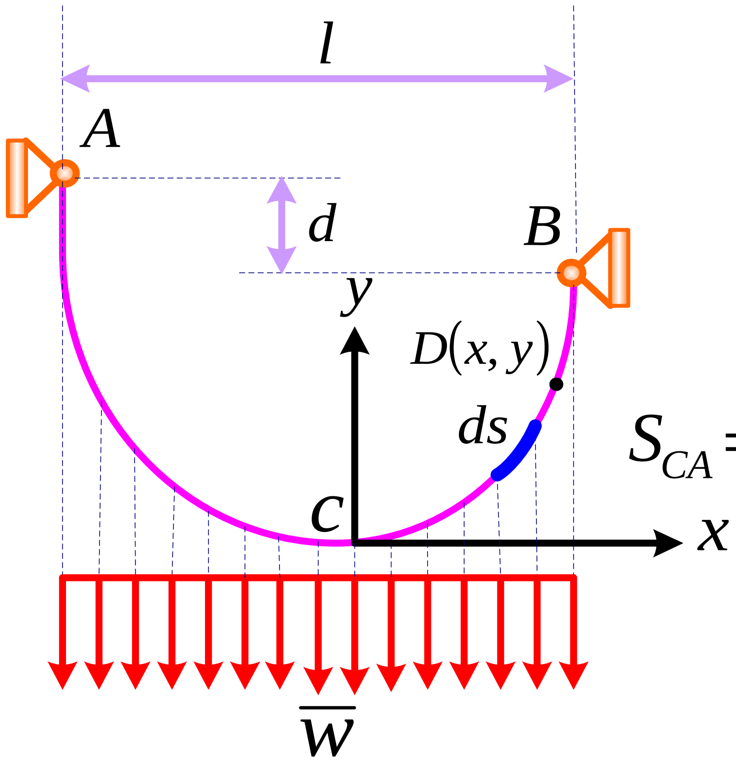
$$S_{CB} = x_B + \frac{\overline{W}^2}{6T_0^2} x_B^3 - \frac{\overline{W}^4}{40T_0^4} x_B^5 + \frac{\overline{W}^6}{112T_0^6} x_B^7 + \dots$$

$$S_{CB} = x_B \left(1 + \frac{\overline{W}^2}{6T_0^2} x_B^2 - \frac{\overline{W}^4}{40T_0^4} x_B^4 + \frac{\overline{W}^6}{112T_0^6} x_B^6 + \dots \right)$$

$$y_B = \frac{\overline{W}}{2T_0} x_B^2 \qquad \frac{\overline{W}}{T_0} = 2\frac{y_B}{x_B^2}$$

$$S_{CB} = x_B\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^4 + \frac{4}{7}\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^6 + \dots\right]$$

به طریق مشابه برای قسمت CA



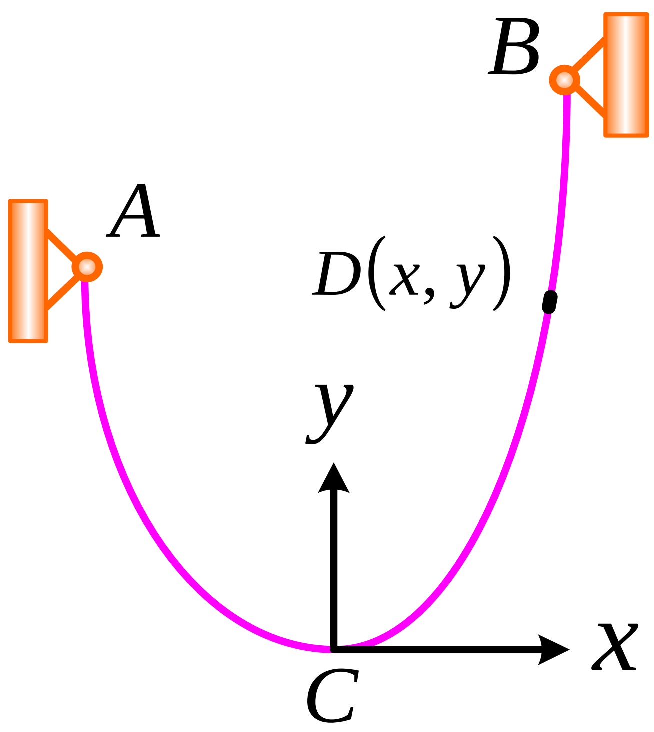
$$y_A = \frac{\bar{W}}{2T_0} x_A^2 \qquad \frac{\bar{W}}{T_0} = 2\frac{y_A}{x_A^2}$$

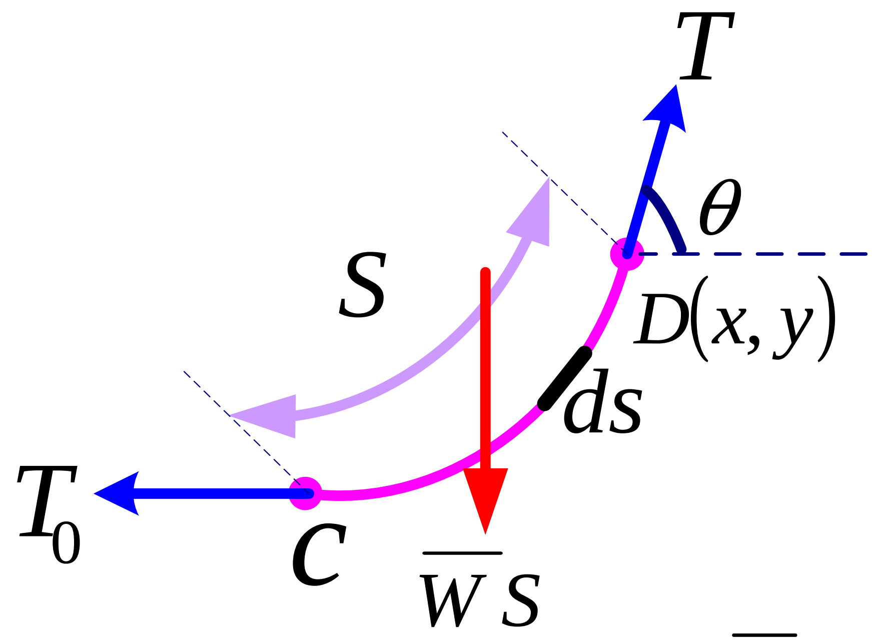
$$S_{CA} = x_A\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{y_A}{x_A}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{y_A}{x_A}\right)^4 + \frac{4}{7}\left(\frac{y_A}{x_A}\right)^6 + \dots\right]$$

$$\begin{cases} x_B - x_A = l \\ y_A - y_B = d \end{cases}$$

۳-کابل تحت تاثیر نیروی وزنش

هدف تعیین منحنی شکل کابل می باشد.

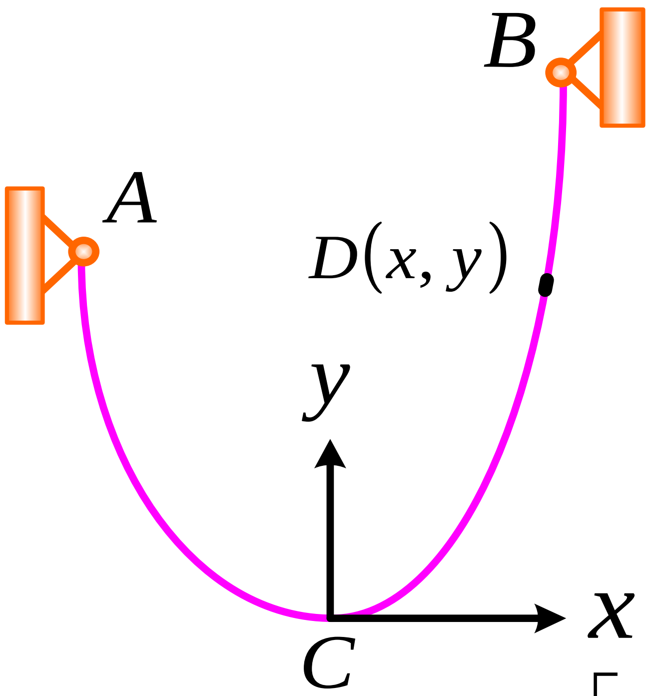


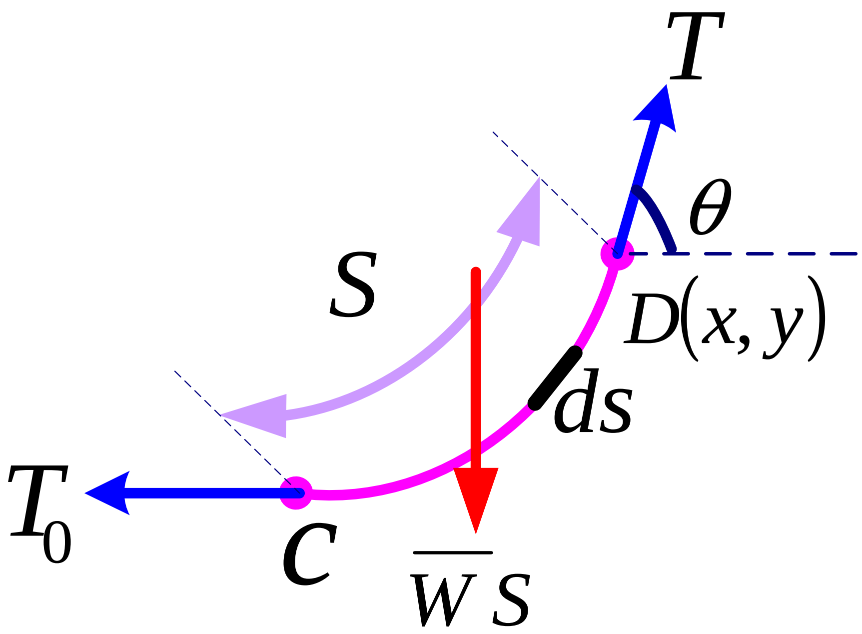


$\overline{W}$: نیروی وزن کابل بر واحد طول کابل

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T\cos\theta - T_0 \Rightarrow T\cos\theta = T_0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \overline{W}S - T\sin\theta = 0 \Rightarrow T\sin\theta = \overline{W}S \qquad \tan\theta = \frac{\overline{W}S}{T_0} = \frac{dy}{dx}$$





$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (dx)^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\overline{W}S}{T_0}$$

$$(ds)^2 = \left(dx^2\right)\left[1+\frac{\overline{W}^2S^2}{T_0^2}\right] \Rightarrow \qquad ds = \sqrt{1+\frac{\overline{W}^2S^2}{T_0^2}}\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^S \frac{ds}{\sqrt{1+\frac{\overline{W}^2S^2}{T_0^2}}} \rightarrow x = \int_0^S \frac{ds}{\sqrt{1+\frac{\overline{W}^2S^2}{T_0^2}}}$$

$$x=\int_0^S \frac{ds}{\sqrt{1+\frac{\overline{W}^2 S^2}{T_0^2}}}$$

$$\frac{\overline{W}S}{T_0}=\sinh\alpha \Rightarrow \frac{\overline{W}}{T_0}ds=\cosh\alpha d\alpha \Rightarrow \quad S=\frac{T_0}{\overline{\overline{W}}}\sinh(\alpha)$$

$$x=\int \frac{T_0}{\overline{\overline{W}}}\frac{\cosh\alpha d\alpha}{\cosh\alpha}=\frac{T_0}{\overline{\overline{W}}}\int_0^{\sinh^{-1}\frac{S\overline{W}}{T_\circ}} d\alpha \quad =\frac{T_0}{\overline{\overline{W}}}\sinh^{-1}\frac{S\overline{W}}{T_0}$$

$$\Rightarrow \sinh^{-1}\left(\frac{S\overline{W}}{T_0}\right)=\frac{\overline{W}x}{T_0}\Rightarrow \frac{S\overline{W}}{T_0}=\sinh\left(\frac{Wx}{T_0}\right)$$

$$S=\frac{T_0}{\overline{\overline{W}}}\sinh\left(\frac{\overline{W}x}{T_0}\right)$$

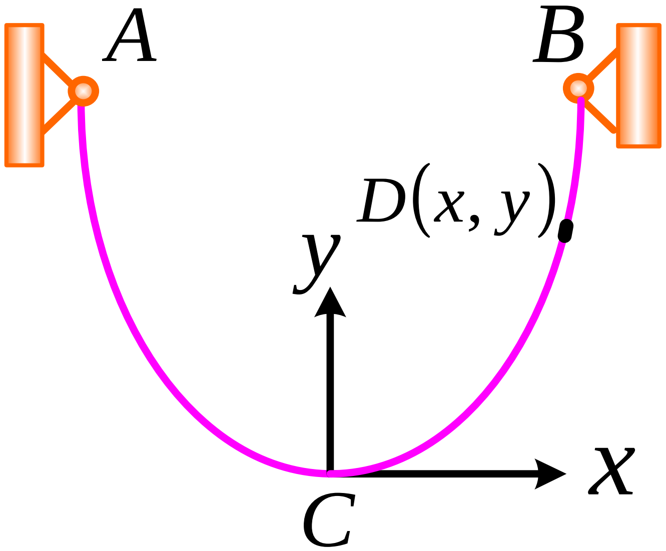
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\bar{W}S}{T_0} \qquad S=\frac{T_0}{\bar{W}}\sinh\left(\frac{\bar{W}x}{T_0}\right)$$

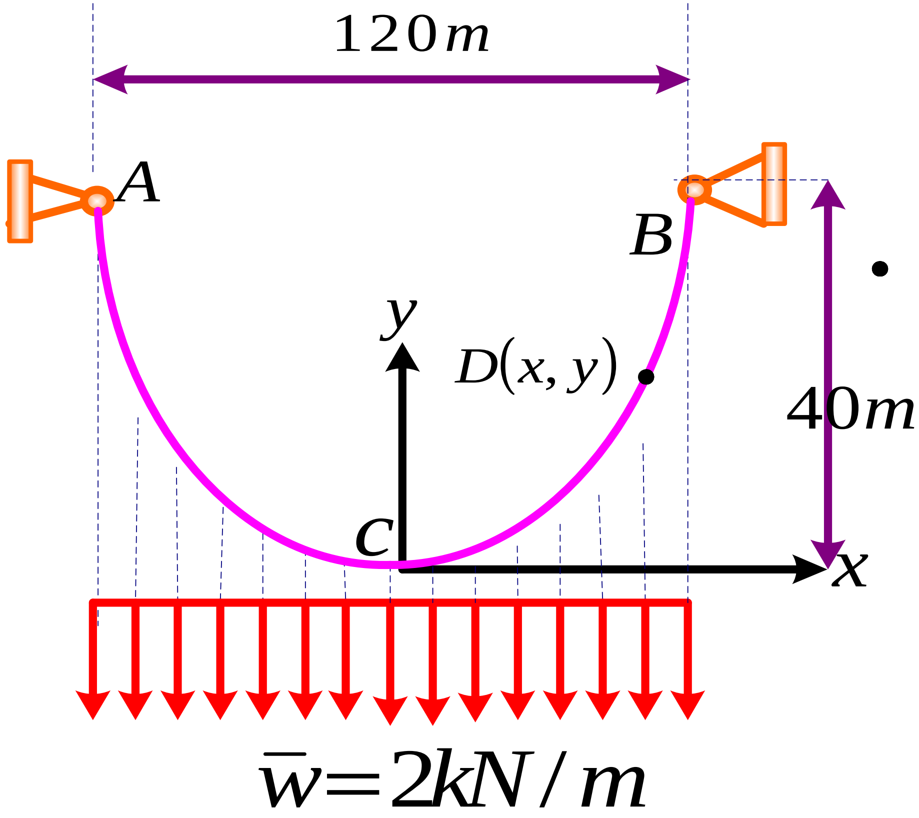
$$\frac{dy}{dx}=\sinh\frac{\bar{W}x}{T_0} \Rightarrow dy=\sinh\frac{\bar{W}x}{T_0}dx \xrightarrow{\int} y=\frac{T_0}{\bar{W}}\cosh\left(\frac{\bar{W}x}{T_0}\right)+C_1$$

$$0=\frac{T_0}{\bar{W}}+C_1 \Rightarrow C_1=-\frac{T_0}{\bar{W}}$$

$$y=\frac{T_0}{\bar{W}}\left(\cosh\left(\frac{\bar{W}}{T_0}x\right)-1\right)$$

معادله Catenary


A
B
$D(x, y)$
y
x
C

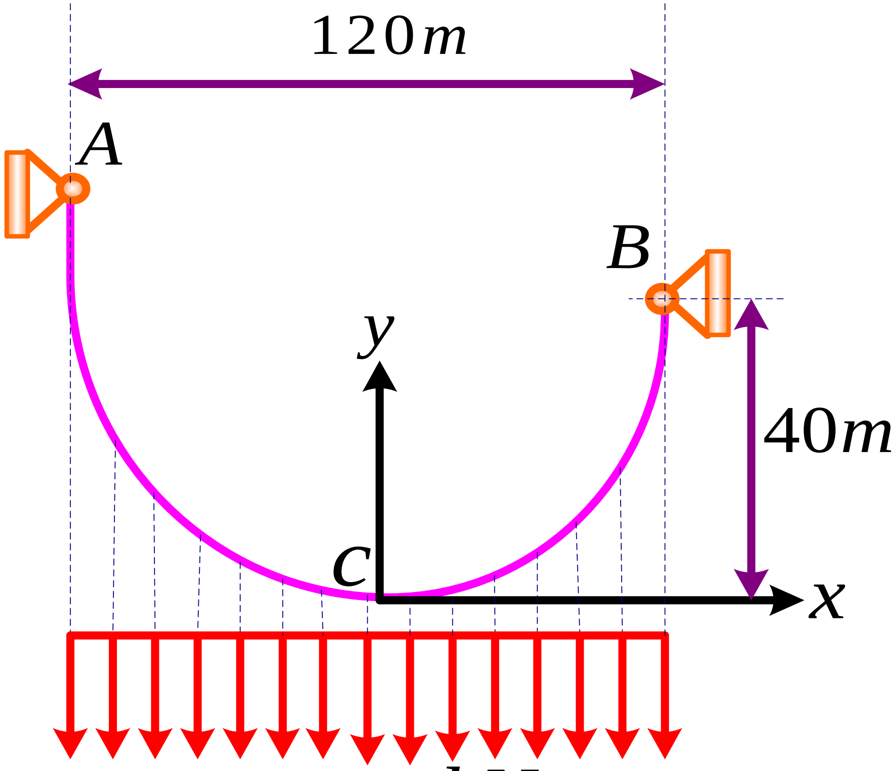

120m
A
B
y
$D(x, y)$
40m
C
x
$\bar{w} = 2kN/m$

مثال: برای کابل نشان داده در شکل مطلوبست:

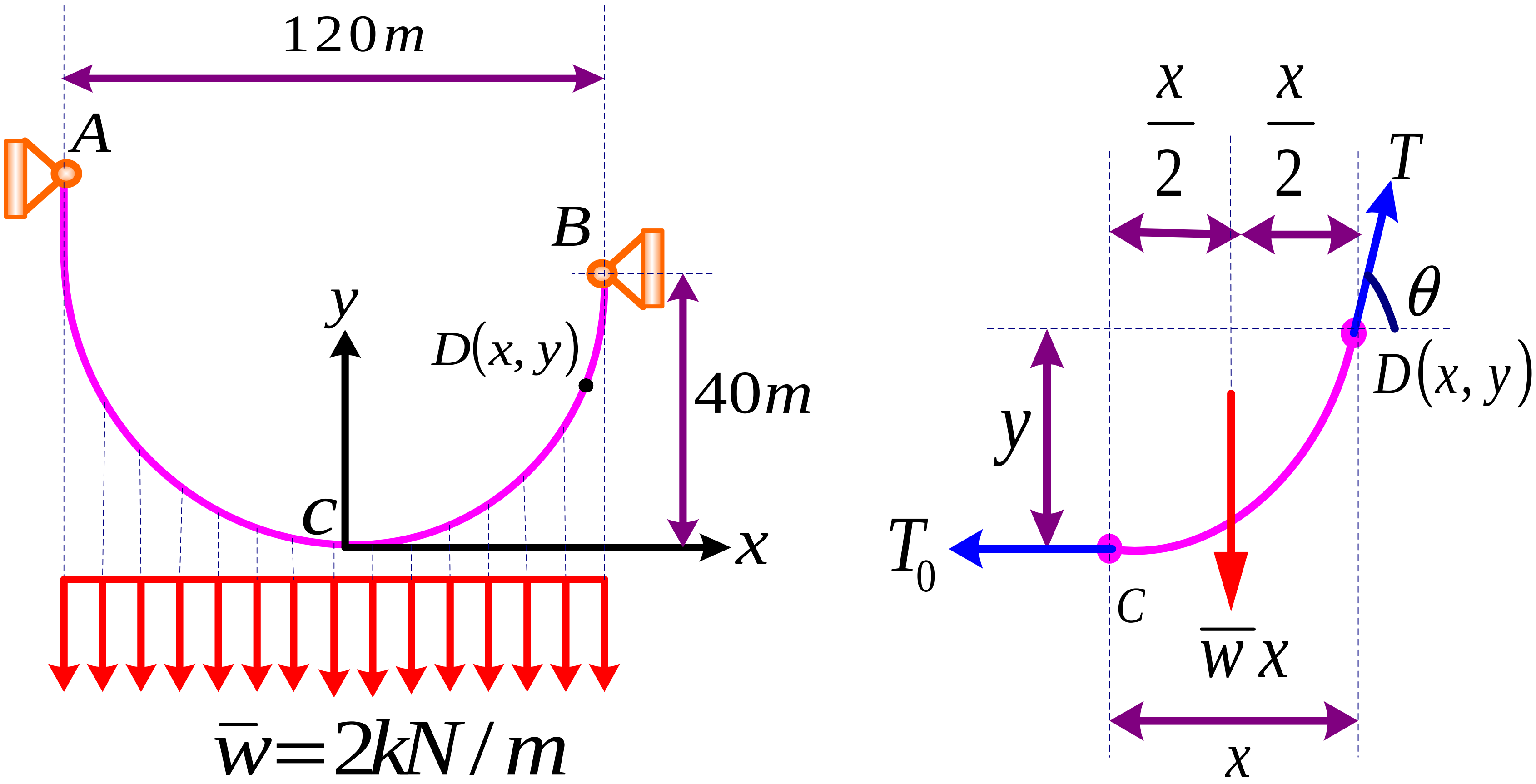
1-کشش در پایین ترین نقطه کابل.

2-کشش ماکزیمم.

3- طول قسمت CBکابل. (نقطه C پایین ترین نقطه کابل است)

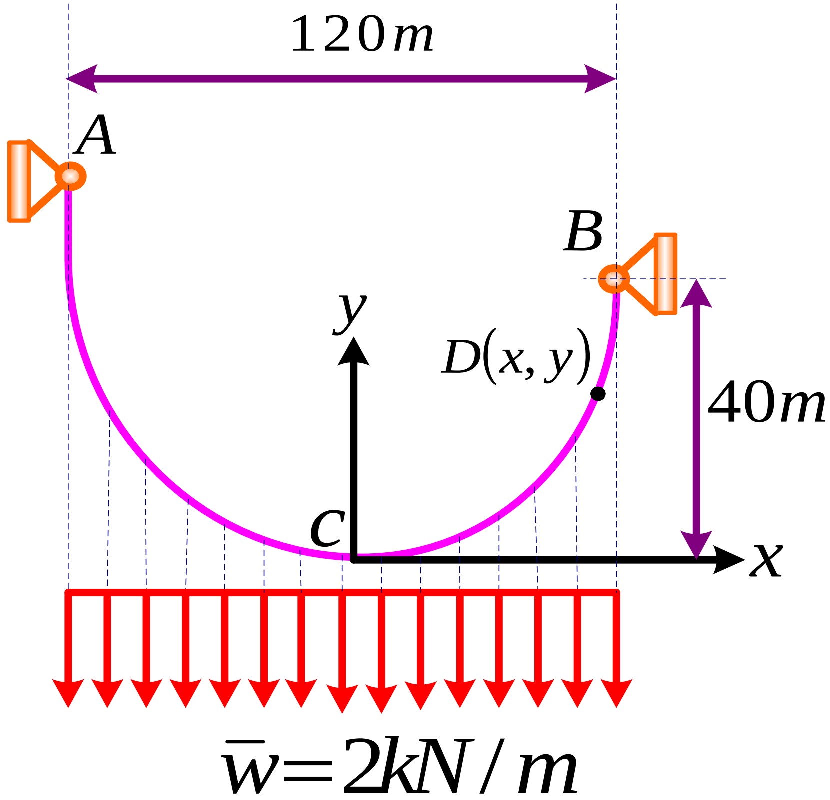


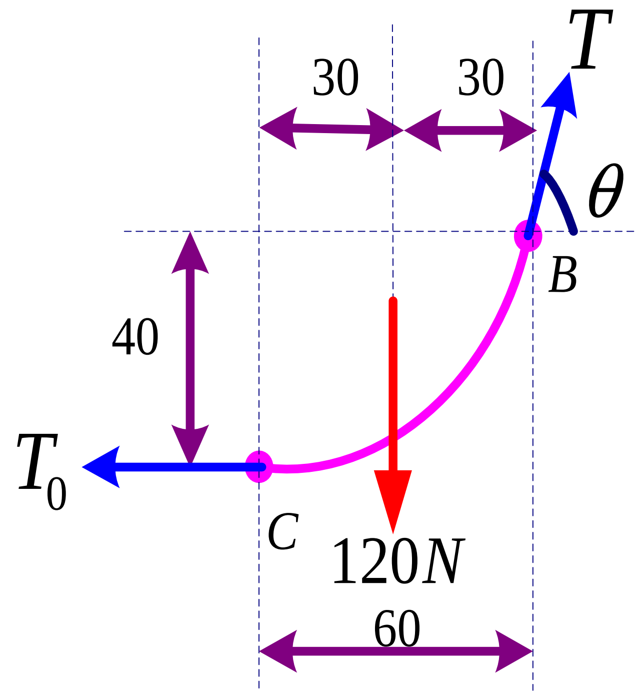
$$\overline{w}=2\frac{kN}{m}$$



$$\sum M_D = T_0 y - \overline{W}x\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow y = \frac{\overline{W}}{2T_0}x^2$$ نمایشگر سهمی است

$$y_B = \frac{\overline{W}}{2T_0}x_B^2 \Rightarrow T_0 = \frac{\overline{W}}{2y_B}x_B^2 = \frac{2(3600)}{80} = 90kN$$



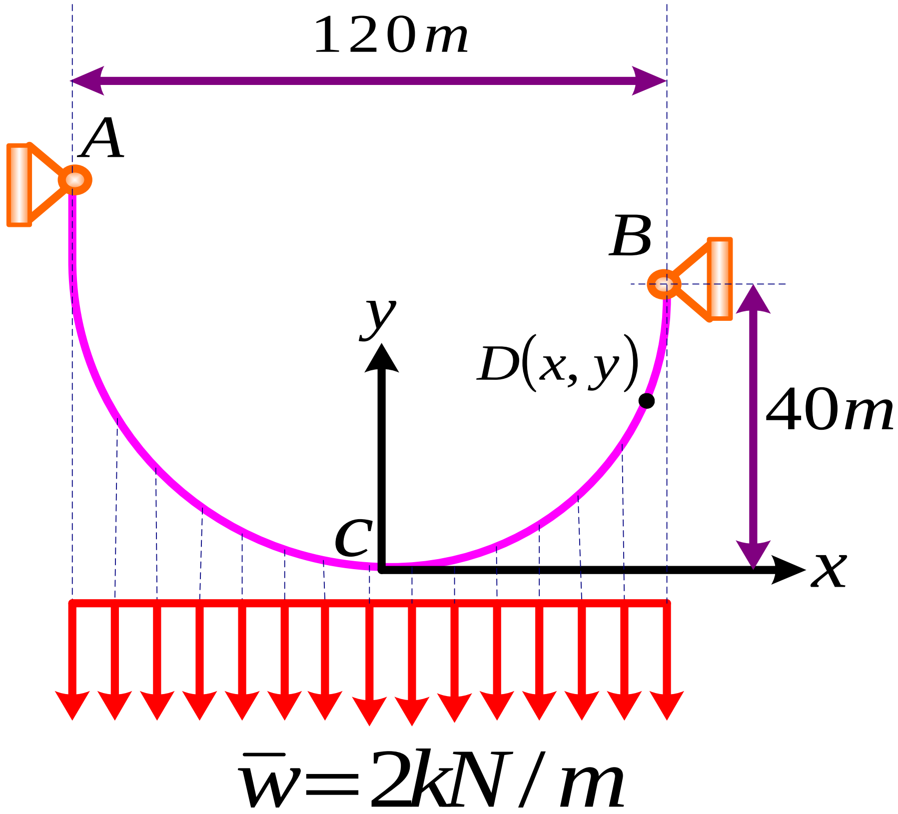


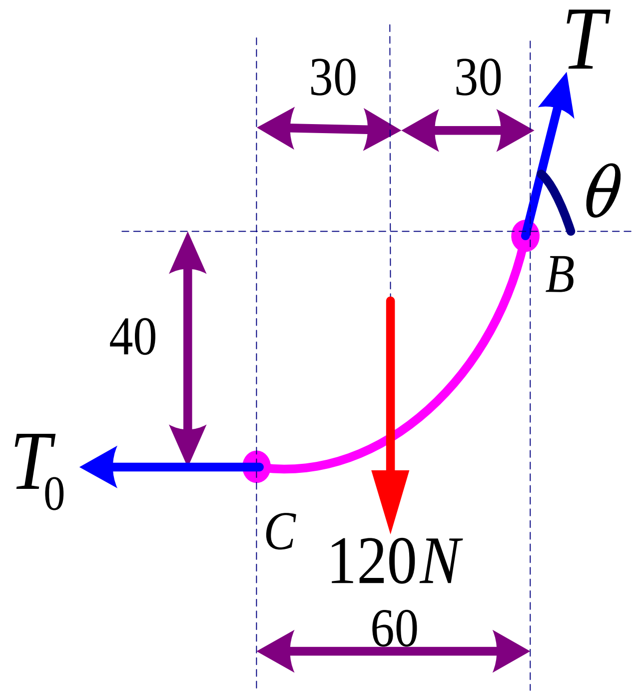
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T\cos\theta - T_0 \Rightarrow T\cos\theta = 90$$

$$\sum F_y \Rightarrow T\sin\theta - 60\ \bar{W} = 0 \Rightarrow T\sin\theta = 120$$

$$T^2 = (90)^2 + (120)^2 \Rightarrow T = 150kN$$

$$\tan\theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{4}{3} = 53^\circ$$



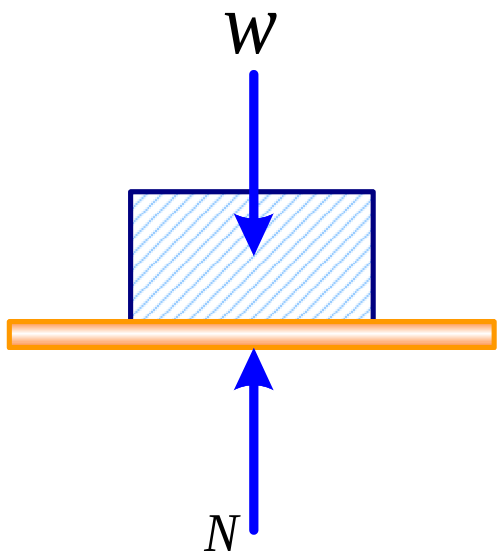


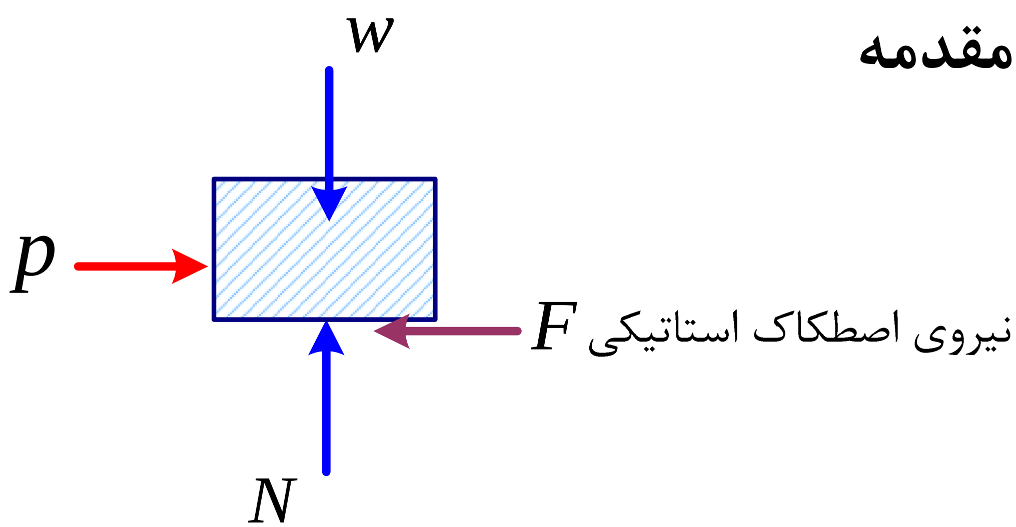
$$S_{CB}=x_B\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^2-\frac{2}{5}\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^4+\frac{4}{7}\left(\frac{y_B}{x_B}\right)^6\right]\cdots$$

$$S_{CB}=60\left[1+\frac{8}{27}-\frac{32}{405}+\frac{256}{5103}+\ldots\right]=76.04m$$

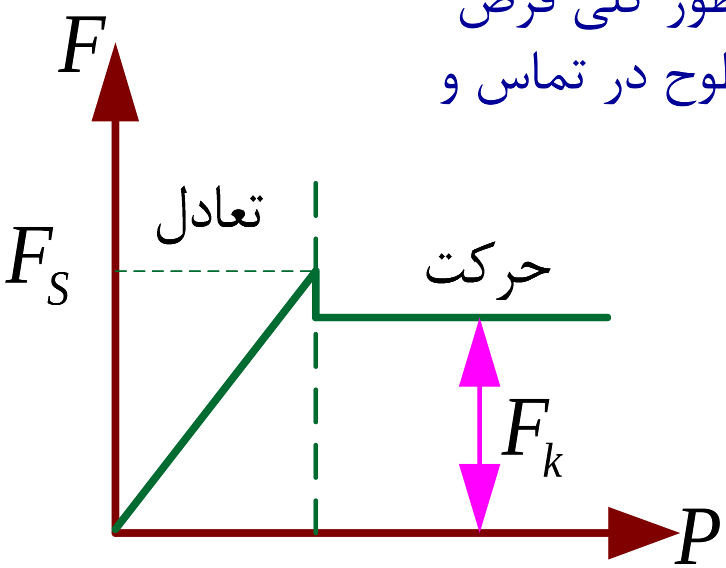
۸- اصطکاک

مقدمه





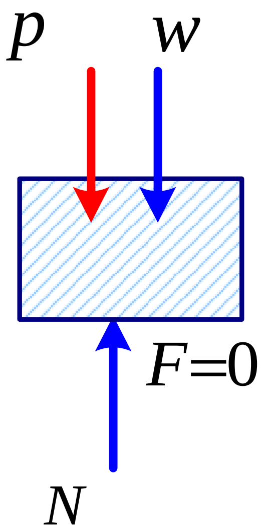
ماهیت این نیروها کاملا شناخته شده نیست اما بطور کلی فرض میشود که این نیروها بواسطه غیر منظم بودن سطوح در تماس و تا حدودی بواسطه جاذبه ملکولی باشند



$$F_S = \mu_S N_S$$

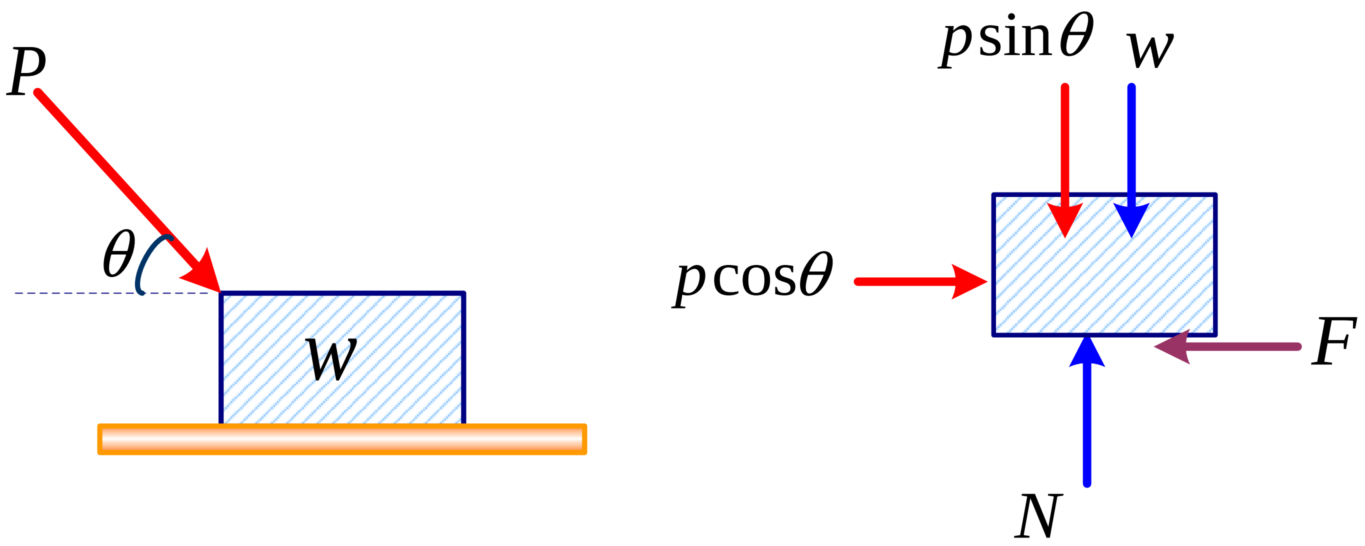
$$F_k = \mu_k N_k$$

حالت اول: نیروی های اعمالی به جسم تمایل به حرکت دادن جسم در طول سطح تماس ندارند.



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow W + p - N = 0$$

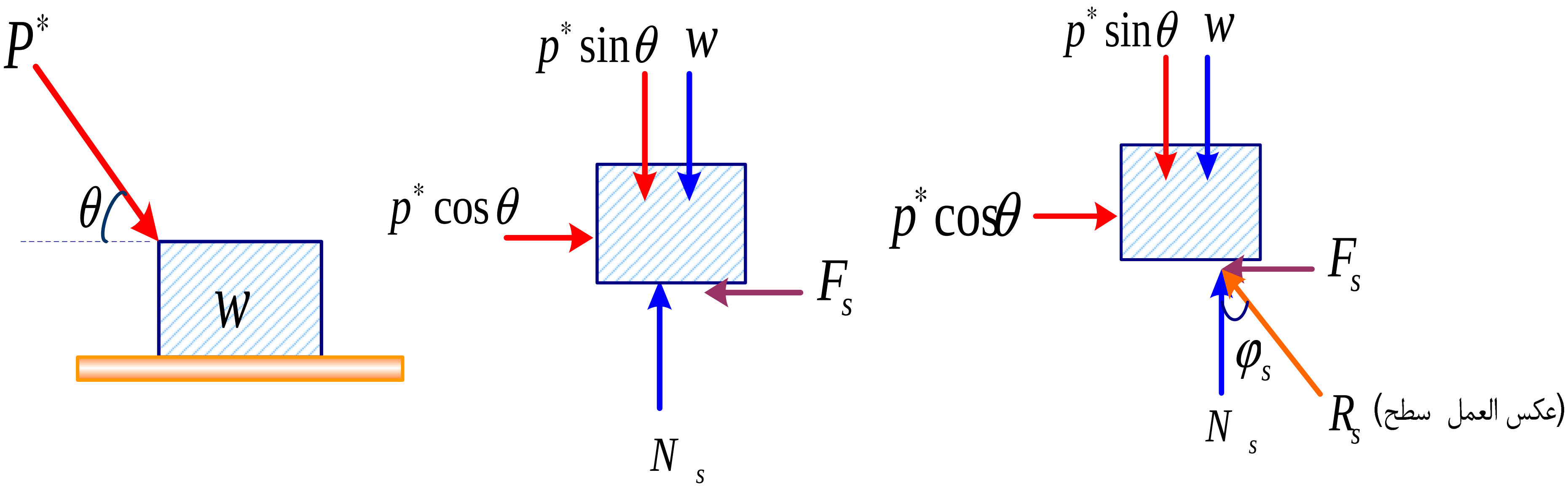
حالت دوم: نیروهای اعمالی به جسم تمایل به حرکت دادن جسم در طول سطح تماس دارند اما به اندازه کافی بزرگ نیستند تا قادر باشند جسم را به حرکت در آورند.



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow W + p\sin\theta - N = 0$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow p\cos\theta - F = 0 \Rightarrow p\cos\theta = F < F_S$$

حالت سوم: نیروی P* سبب می شود که جسم در امتداد افقی در آستانه لغزش قرار بگیرد.



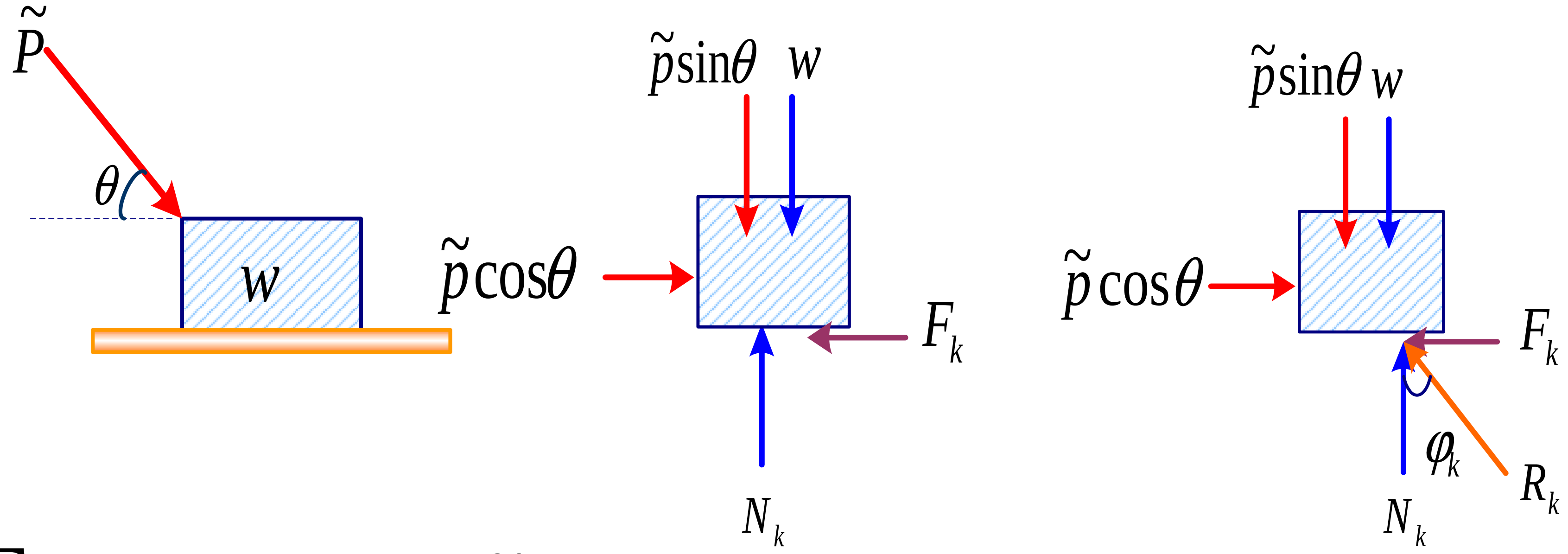
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow W + p^* \sin\theta - N_s = 0$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow p^* \cos\theta - F_S = 0 \qquad p^* \cos\theta = F_S$$

$$\underline{R}_S = \underline{F}_S + \underline{N}_S \qquad \tan\varphi_S = \frac{F_S}{N_S}$$

$$\Rightarrow \tan\varphi_s = \frac{\mu_S N_S}{N_S} = \mu_S$$ زاویه اصطکاک در حالت استاتیکی

حالت چهارم: نیروی $\tilde{P}$ سبب می شود که جسم در امتداد افقی به حرکت در آید.



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow W + \tilde{p}\sin\theta - N_K = 0$$

$$\sum F_x = ma_x$$ (دینامیک) $$\tilde{p}\cos\theta > F_s$$

F_k : نیروی اصطکاک دینامیکی

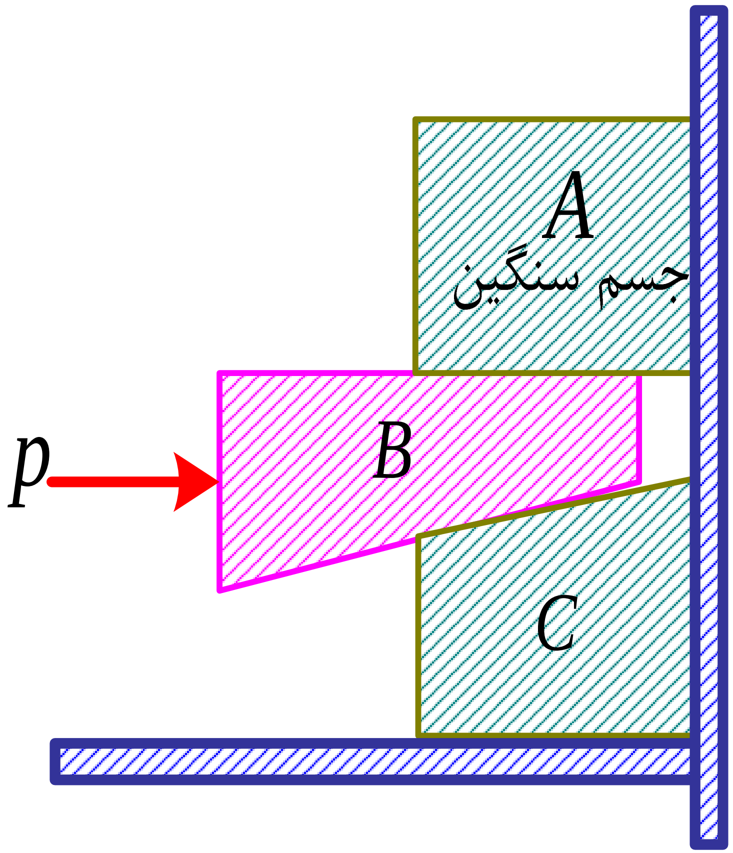
F_s : نیروی اصطکاک استاتیکی

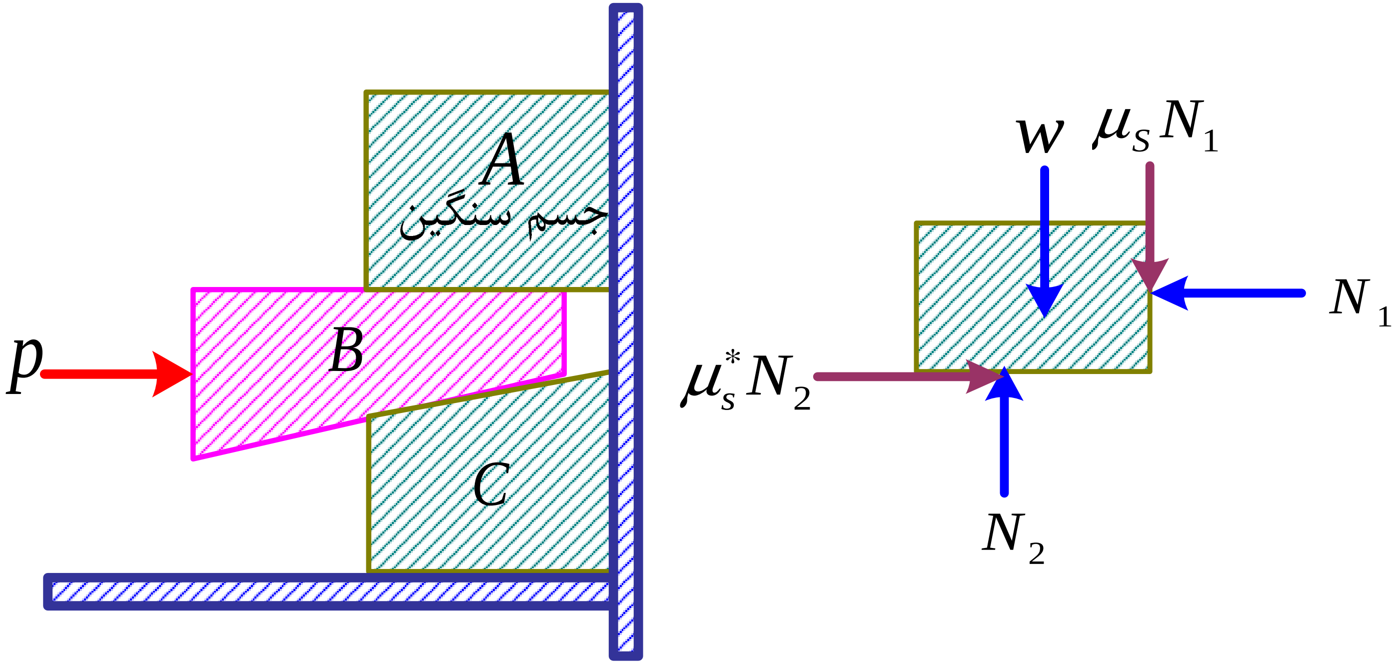
$$\underline{R}_k = \underline{F}_k + \underline{N}_k \qquad \tan\varphi_k = \frac{F_k}{N_k} = \frac{\mu_N N_K}{N_K} = \mu_K$$

گوه ها

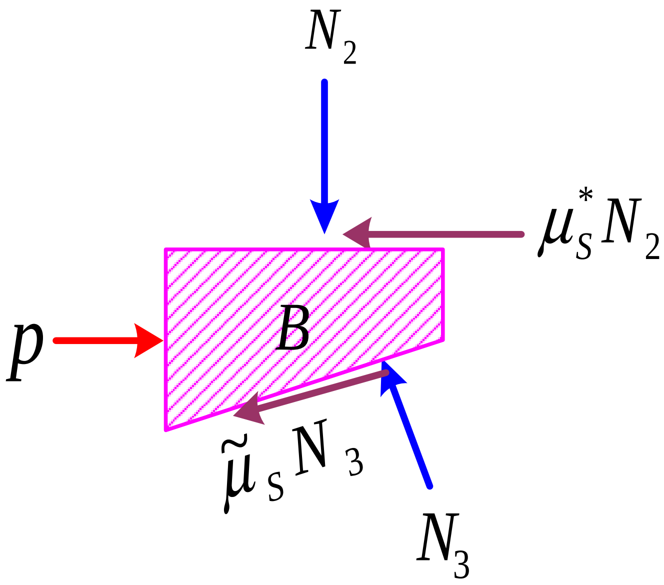
ماشین هایی ساده هستند که برای بلندکردن اجسام سنگین مورد استفاده قرار می گیرند.
معمولاً از وزن گوه ها صرف نظر می شود.

می خواهیم جسم سنگین A را با گوه B با استفاده از نیروی P در آستانه ی لغزش به سمت بالا قرار دهیم. همه سطوح اصطکاک دارند.



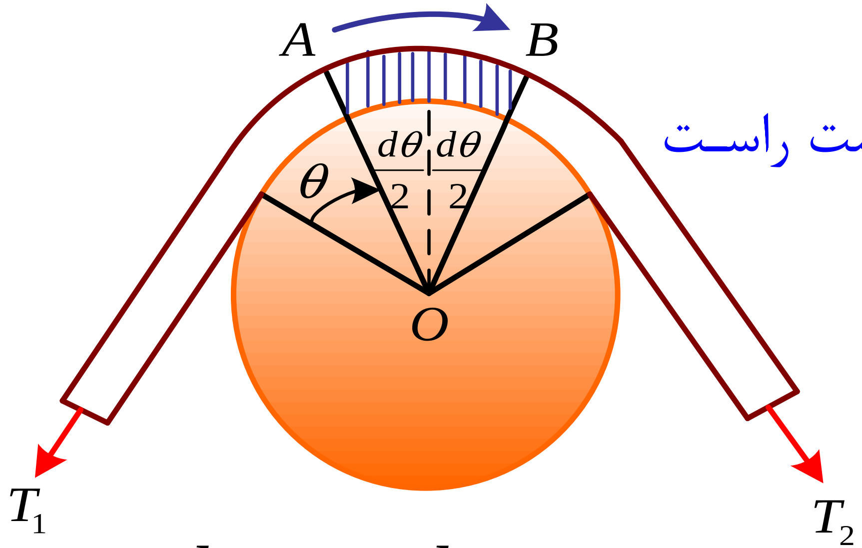


$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$

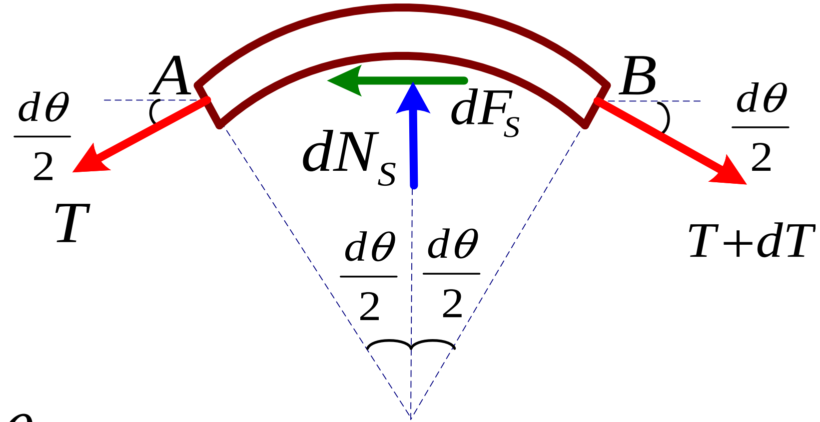


$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$

اصطکاک تسمه ها



فرض می کنیم تسمه در آستانه لغزش به سمت راست باشد.



$$dF_S = \mu_S dN_S$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow (T + dT)\cos\frac{d\theta}{2} - T\cos\frac{d\theta}{2} - \mu_S dN_S = 0$$

$$(I)\ \ dT\cos\frac{d\theta}{2} = \mu_S dN_S$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -(T + dT)\sin\frac{d\theta}{2} - T\sin\frac{d\theta}{2} + dN_S = 0$$

$$(II)\ dN_S = 2T\sin\frac{d\theta}{2} + dT\sin\frac{d\theta}{2}$$

$$(I)\ dT\cos\frac{d\theta}{2}=\mu_S dN_S \qquad dN_S=\frac{1}{\mu_S}dT\cos\frac{d\theta}{2}$$

$$(II)\ dN_S=2T\sin\frac{d\theta}{2}+dT\sin\frac{d\theta}{2} \qquad \frac{1}{\mu_S}dT\cos\frac{d\theta}{2}-2T\sin\frac{d\theta}{2}-dT\sin\frac{d\theta}{2}=0$$

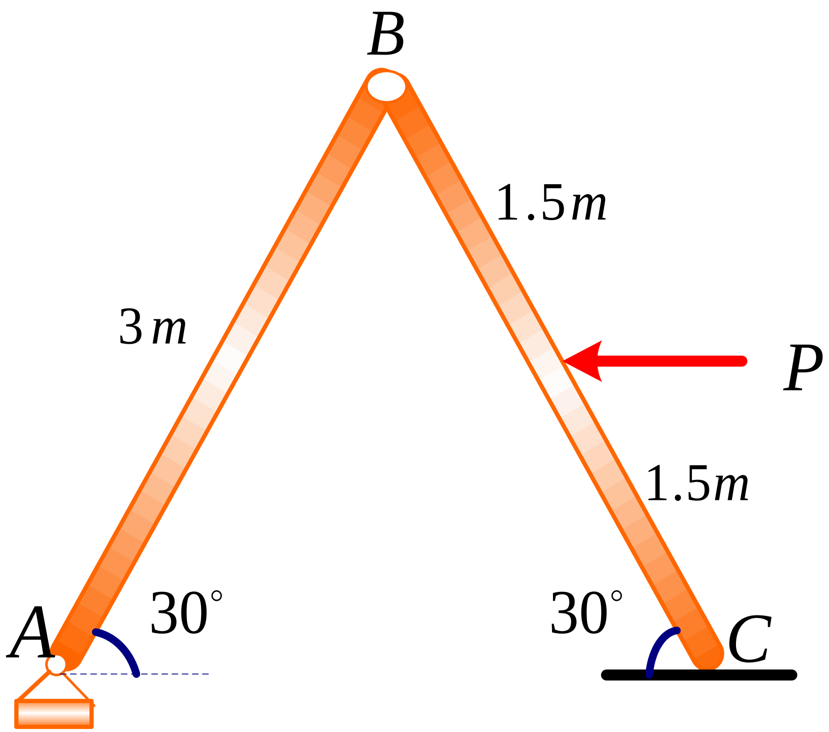
$$\sin\frac{d\theta}{2}=\frac{d\theta}{2} \qquad \cos\frac{d\theta}{2}=1$$

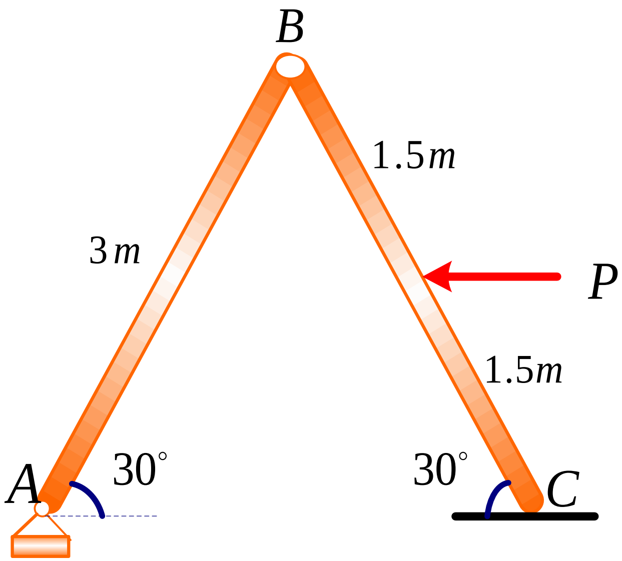
$$\frac{1}{\mu_S}dT-Td\theta=0\Rightarrow \qquad \frac{1}{\mu_S}dT=Td\theta$$

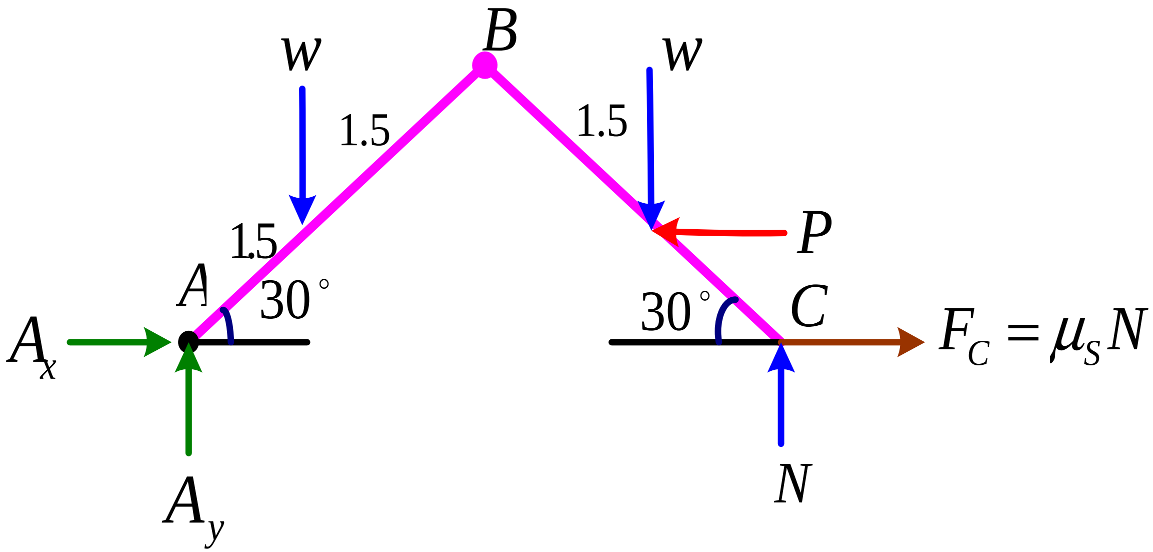
$$\frac{dT}{T}=\mu_S d\theta\xrightarrow{\int}\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T}=\int_0^{\theta}\mu_S d\theta\Rightarrow \qquad \ln(\frac{T_2}{T_1})=\mu_S\theta$$

$$\frac{T_2}{T_1}=e^{\mu_S\theta}\Rightarrow \qquad \boxed{T_2=T_1e^{\mu_S\theta}}$$

مثال: برای دستگاه نشان داده شده در شکل چنا نچه جرم میله های AB و BC برابر 100 kg و ضریب اصطکاک استاتیکی بین میله BC در نقطه C و سطح افقی برابر 0.5 باشد حداقل و حداکثر نیروی P را برای آنکه دستگاه در حالت تعادل استاتیکی باقی بماند تعیین کنید؟ $g=9.81 m/s^2$





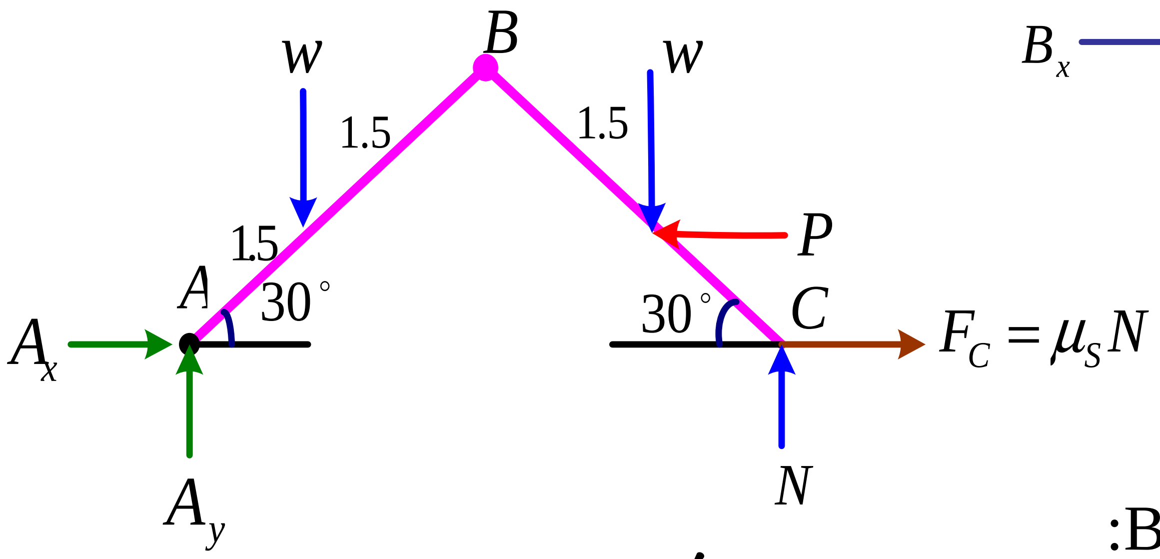


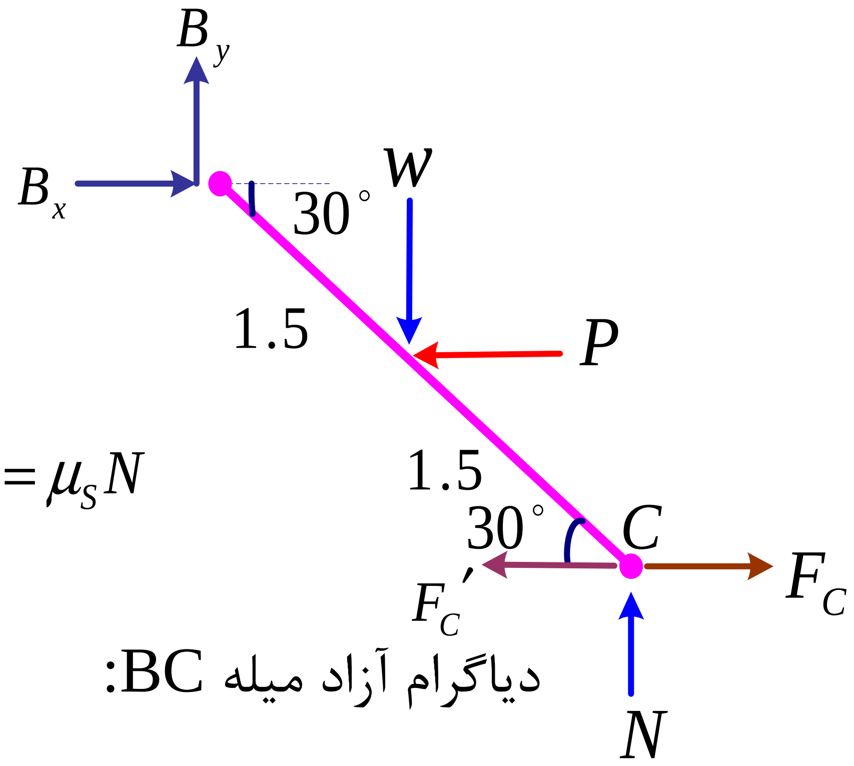
دیاگرام آزاد کل دستگاه

$$\sum M_A = 0$$

$$N(6\cos 30^\circ) + P(1.5\sin 30^\circ) - W(4.5\cos 30^\circ) - W(1.5\cos 30^\circ) = 0$$

$$3\sqrt{3}\,N + 0.75\,p = 5097.4$$





دیاگرام آزاد میله BC:

$$\sum M_B = 0 \quad F_C = F_C' = \mu_S N$$

$$-W\left(1.5\cos 30^\circ\right) - p\left(1.5\sin 30^\circ\right) + N(3\cos 30^\circ) + F_C(3\sin 30^\circ) = 0$$

$$-W\left(1.5\cos 30^\circ\right) - p\left(1.5\sin 30^\circ\right) + N(3\cos 30^\circ) - F_C'(3\sin 30^\circ) = 0$$

$$2.59N - 0.75p - 1274.35 + 0.75N = 0 \qquad 3.34N - 0.75p = 1274.35$$

$$2.59N - 0.75p - 1274.35 - 0.75N = 0 \qquad 1.84N - 0.75p = 1274.35$$

$$3\sqrt{3}\,N + 0.75p = 5097.4$$

با لحاظ کردن F_C

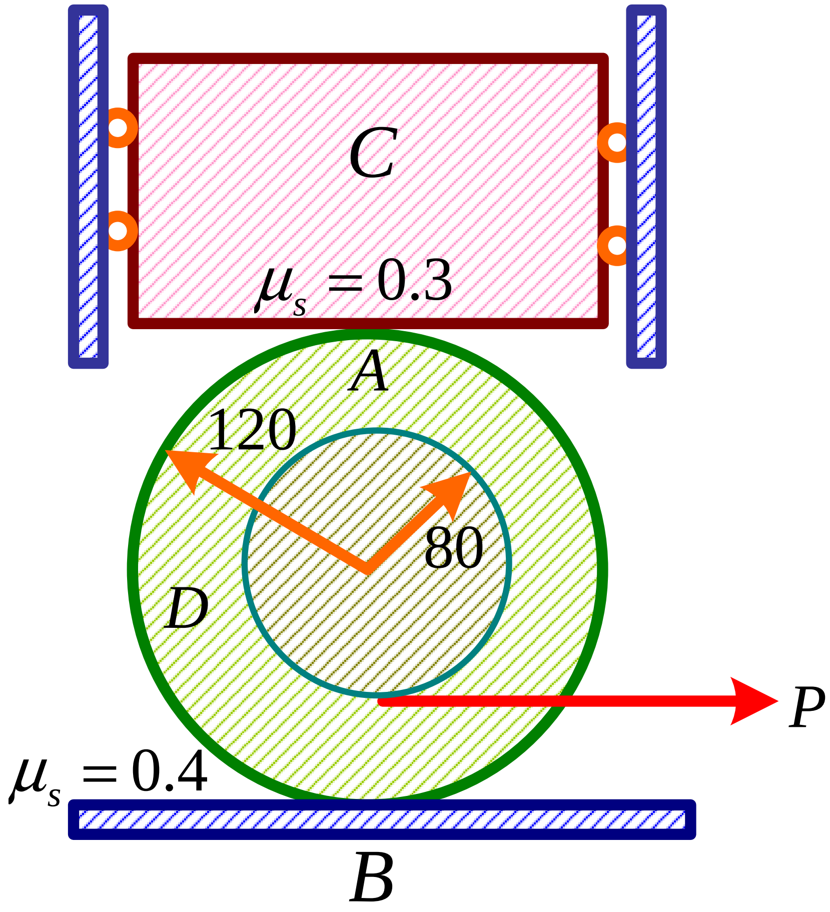
$$3.34N - 0.75p = 1274.35 \rightarrow P = 1633.4N \qquad N = 746.11N$$

با لحاظ کردن F'_C

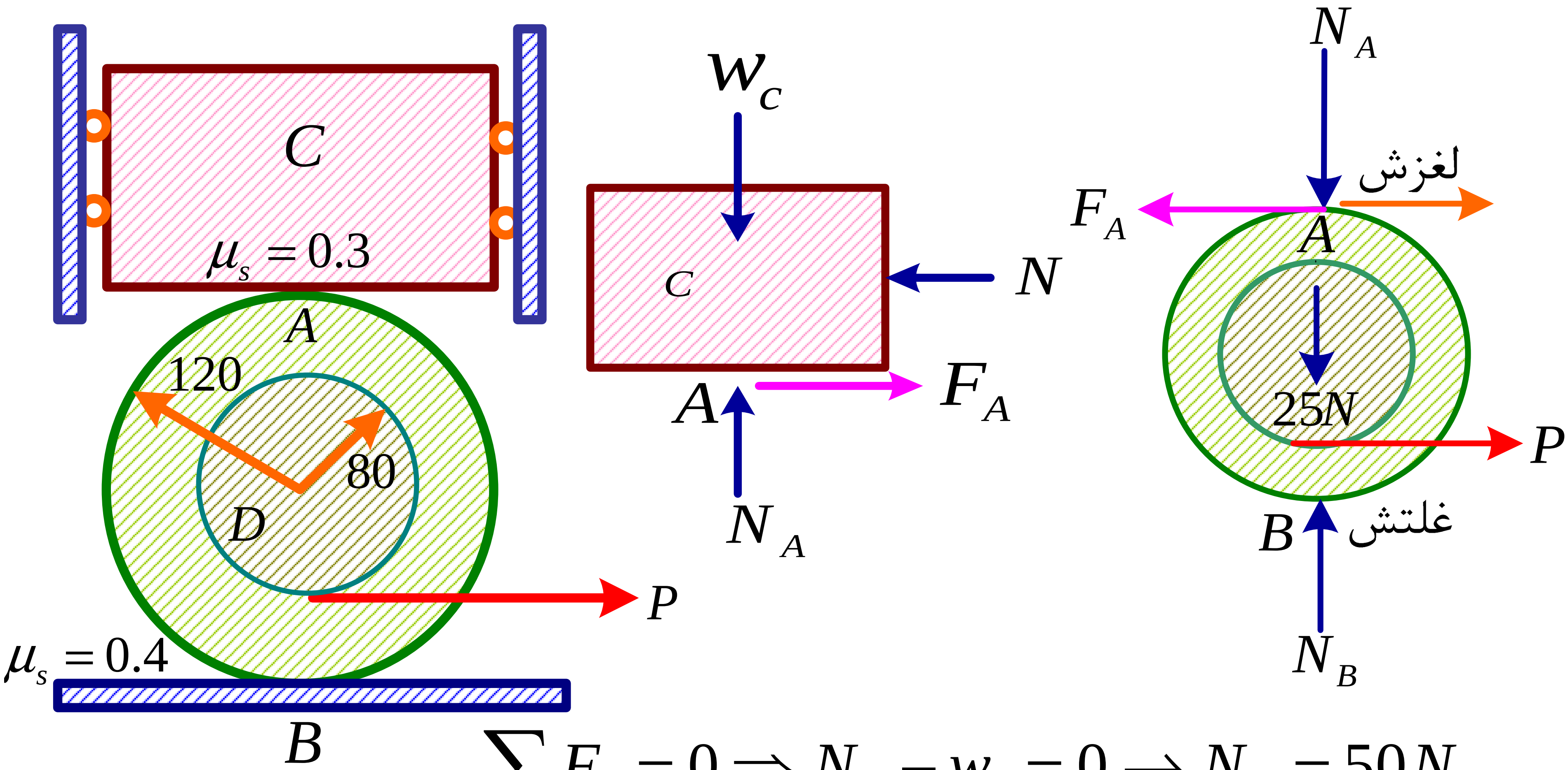
$$1.84N - 0.75p = 1274.35 \rightarrow P = 524.5N \qquad N = 906.3N$$

$$P_{\min} = 524.5N \qquad P_{\max} = 1633.4N$$

مثال: قرقره D مطابق شکل در نقطه A با جعبه C و در نقطه B با سطح افقی در تماس است. چنانچه وزن جعبه برابر 50N و وزن قرقره برابر 25N باشد بیشترین نیروی P را که می توان بدون بر هم زدن تعادل دستگاه وارد کرد تعیین کنید؟



چنانچه قرار باشد تحت تأثیر نیروی P در آستانه حرکت باشد می تواند به صورت لغزش در A و غلتش در B و یا به صورت غلتش در A و لغزش در B باشد.

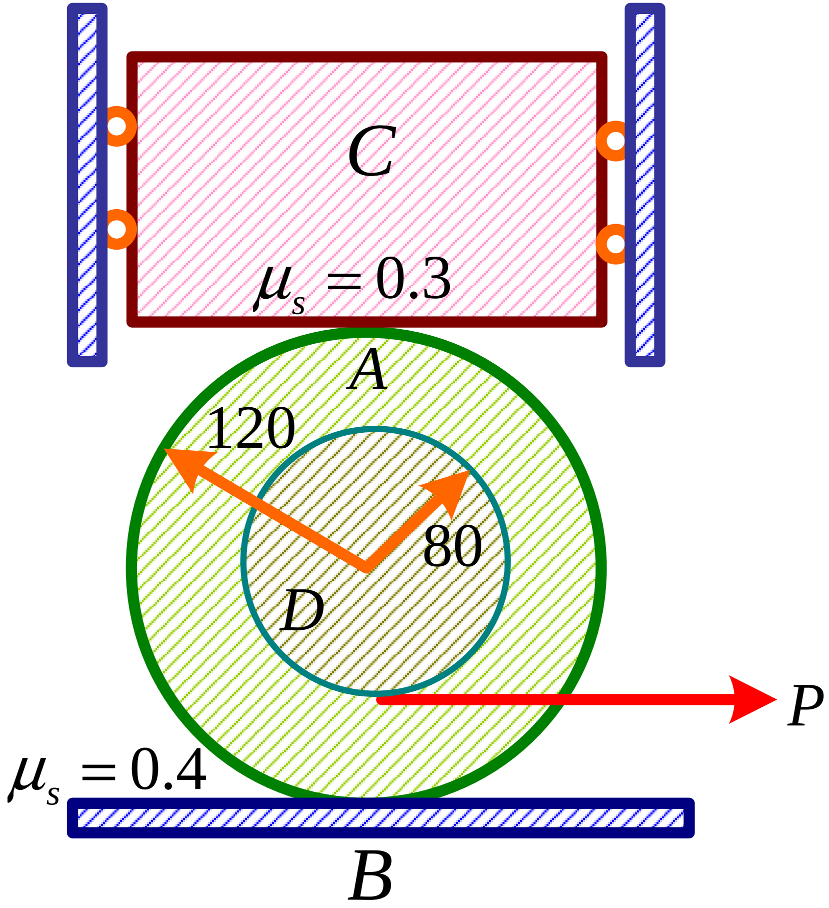


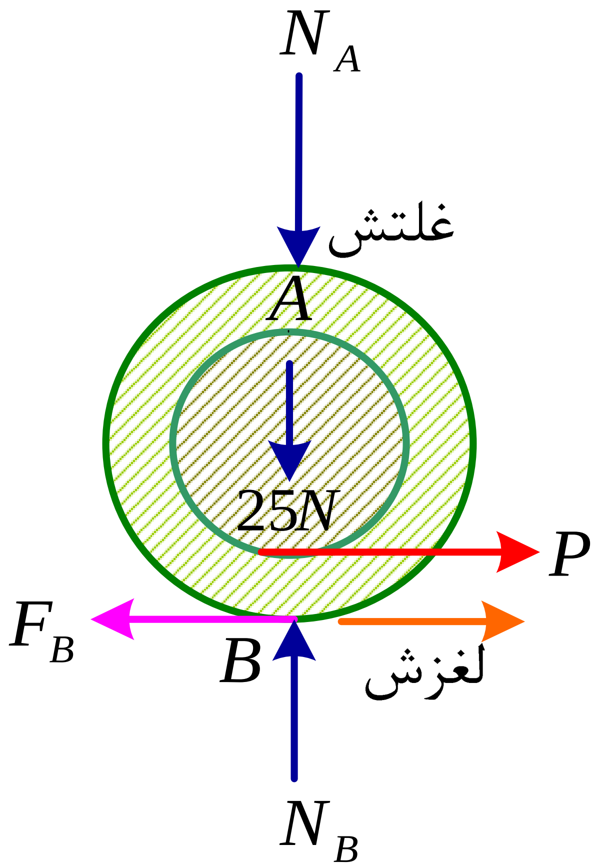
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_A - w_c = 0 \rightarrow N_A = 50N$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_A + 25 - N_B = 0 \rightarrow N_B = 75N$$

$$F_A = \mu_S)_A N_A = 0.3 \times 50 = 15N$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow P(40) - F_A(240) = 0 \qquad P = 6F_A = 6 \times 15 = 90N$$





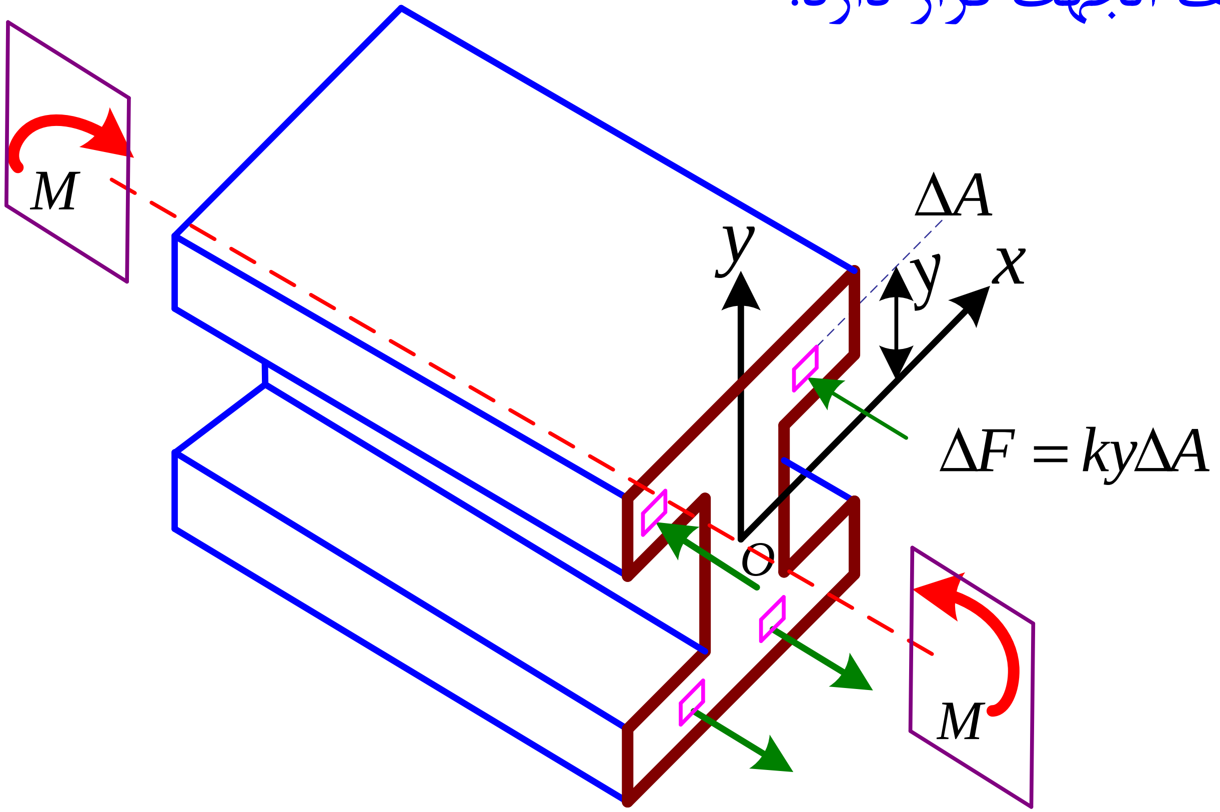
$$F_B = \mu_s)_B N_B = 0.4 \times 75 = 30N$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow P(200) - F_B(240) = 0$$

$$P = 1.2F_B = 1.2(30) = 36N$$

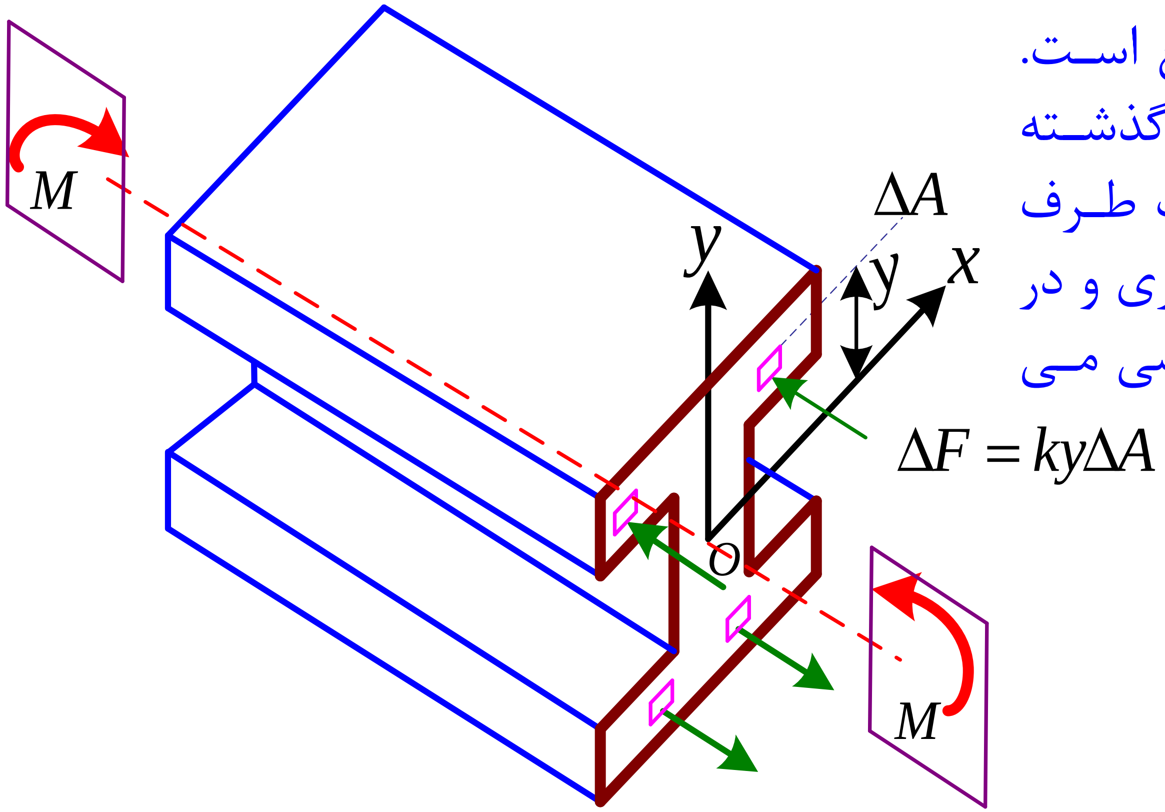
۹-ممان اینرسی

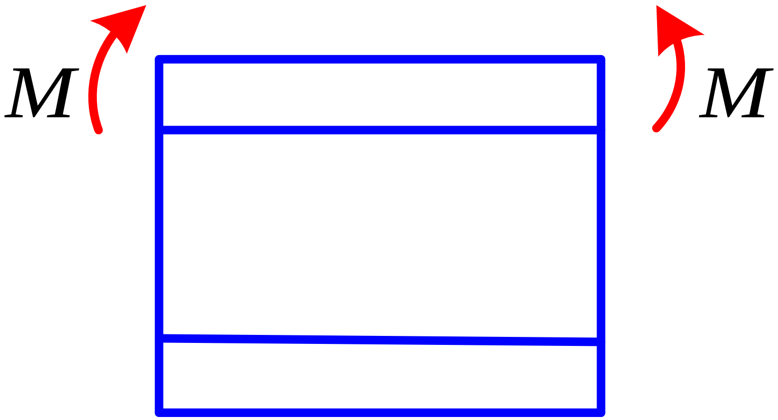
تیری با مقطع I شکل مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید کـه تحـت تـأثیر دو گشتاور مساوی و مختلف الجهت قرار دارد.

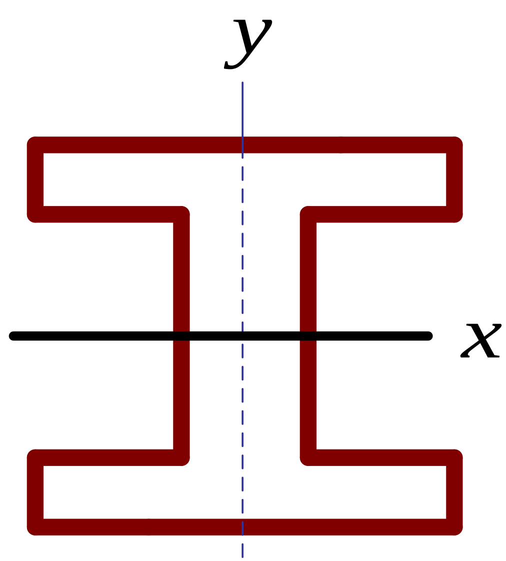


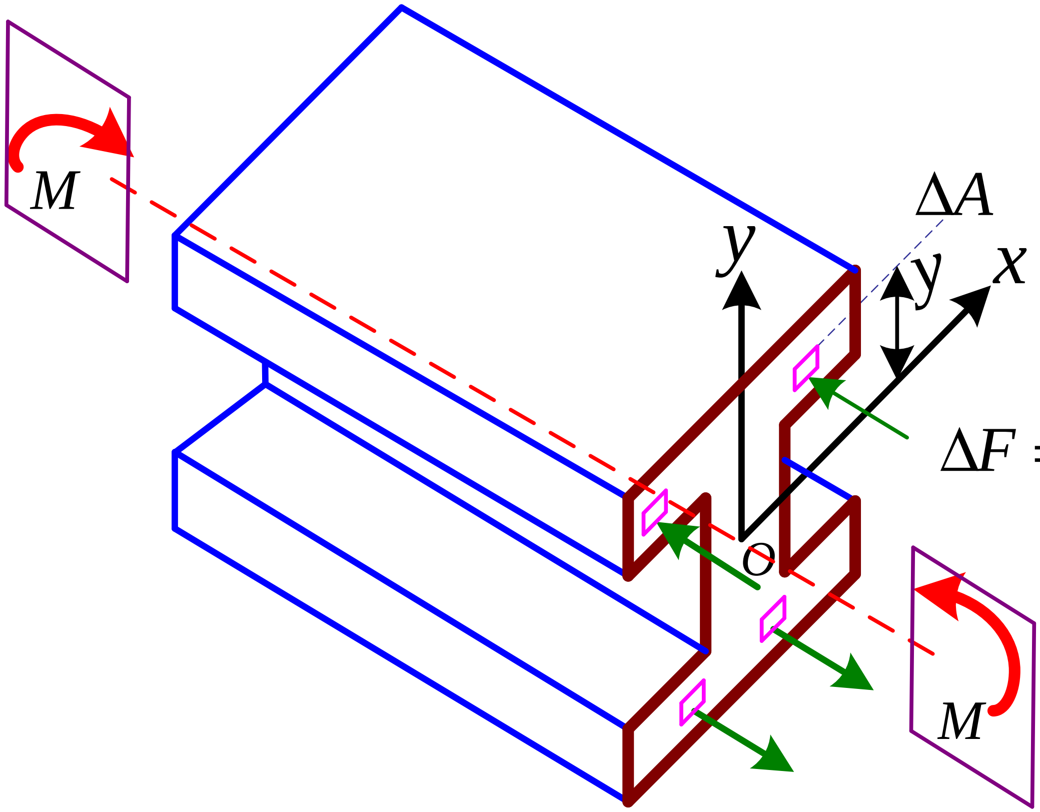
این تیر تحت تأثیر خمش خالص قرار گرفته (pure bending).

محور x مار بر مرکز سطح مقطع است. محور x را که مرکز سطح از آن گذشته محور خنثی می نامند. در یک طرف محور خنثی نیروها به صورت فشاری و در طرف دیگر آن به صورت کششی می باشند.









$$\Delta F = ky\Delta A$$

برآیند نیروهای داخلی

$$R = \sum \Delta F$$

$$K\sum y\Delta A = k\int ydA$$

$$\bar{y} = \frac{\int ydA}{A} = 0$$

$$R = K\int ydA = 0$$

گشتاور نیروها

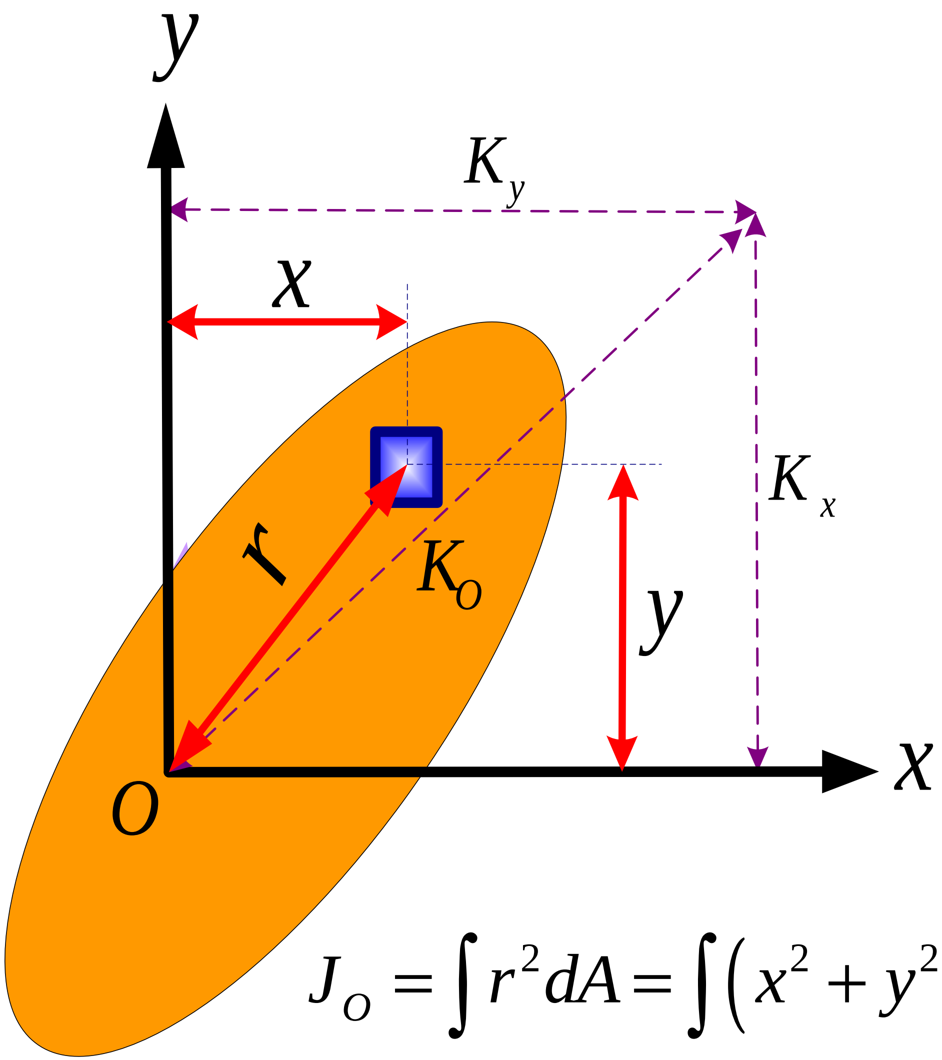
$$\Delta M = y\Delta F = Ky^2\Delta A$$

$$M = K\sum y^2\Delta A = K\int y^2 dA$$

$$I = \int y^2 dA$$

ممان اینرسی سطح یا گشتاور دوم سطح حول محور x

ممان اینرسی سطح، ممان اینرسی قطبی و شعاع ژیراسیون (چرخش)



$$I_x = \int y^2 dA$$

x ممان اینرسی سطح حول I_x

$$I_y = \int x^2 dA$$

y ممان اینرسی سطح حول I_y

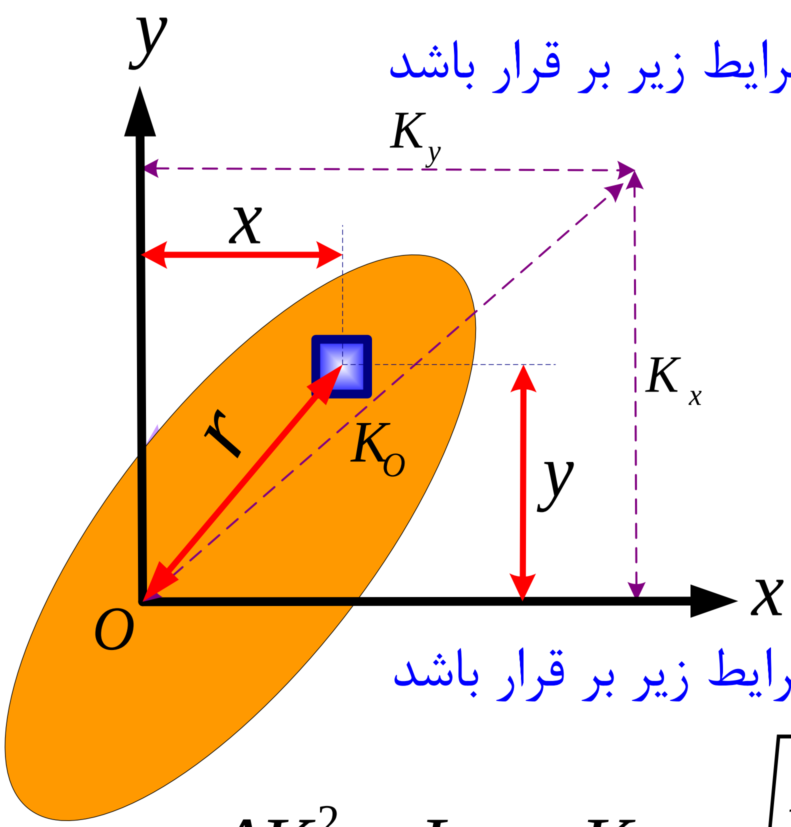
$$J_O = \int r^2 dA$$

ممان اینرسی قطبی J_O

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$J_O = \int r^2 dA = \int \left(x^2 + y^2\right) dA = \int y^2 dA + \int x^2 dA = I_x + I_y$$

$$J_O = I_x + I_y$$



فاصله ای را از محور x طوری انتخاب میکنیم که شرایط زیر بر قرار باشد

$$AK_x^2 = I_x \rightarrow K_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

شعاع ژیراسیون سطح حول محور x

فاصله ای را از محورy طوری انتخاب میکنیم که شرایط زیر بر قرار باشد

$$AK_y^2 = I_y \rightarrow K_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

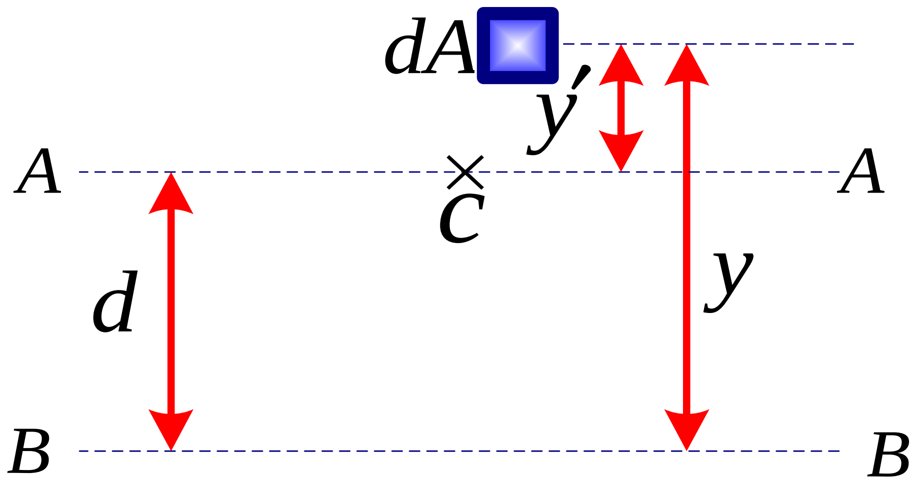
شعاع ژیراسیون سطح حول محور y

فاصله ای را از O طوری انتخاب میکنیم که شرایط زیر بر قرار باشد

$$AK_O^2 = J_O \rightarrow K_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}}$$

شعاع ژیراسیون قطبی

$$K_O^2 = K_x^2 + K_y^2$$



قضیه انتقال محورهای موازی

C: مرکز سطح

محور AA: مار بر مرکز سطح

محور BB: موازی محور AA

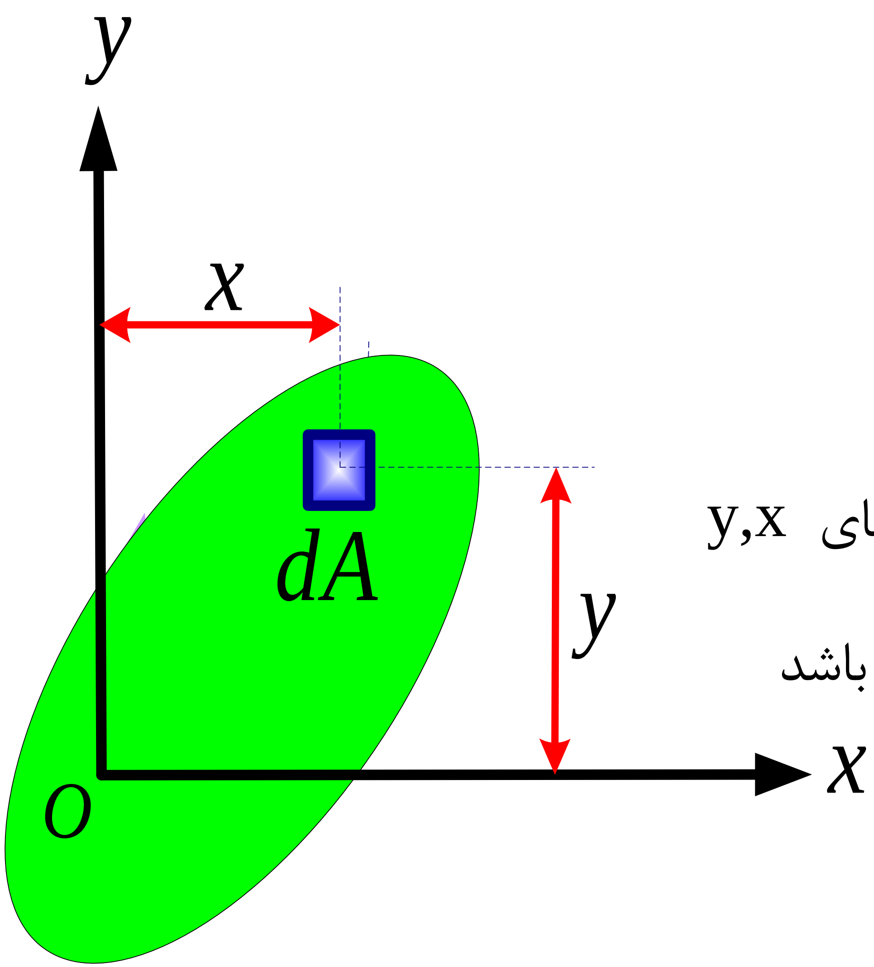
$$I_{BB}=\int y^2 dA=\int (y'+d)^2 dA=\int y'^2 dA+2d\int y' dA+d^2\int dA$$

$$\bar{y}=\frac{\int y' dA}{A}=0 \rightarrow \int y' dA=0$$

$$I_{BB}=I_{AA}+Ad^2$$

قضیه انتقال محورهای موازی

I_{AA} : ممان اینرسی نسبت به محور مار بر مرکز سطح



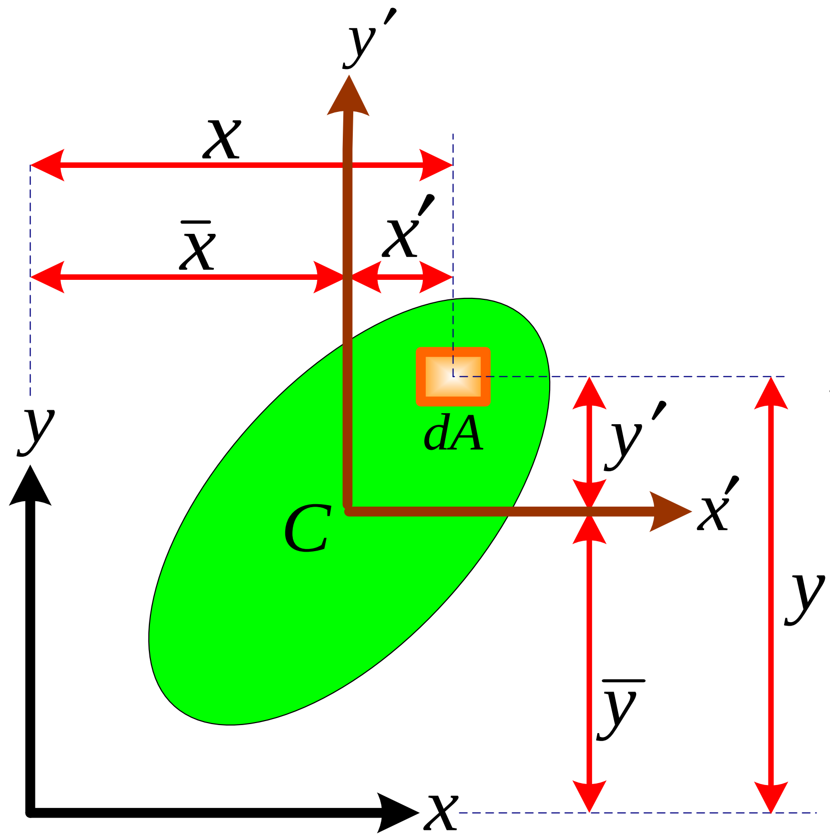
حاصل ضرب اینرسی

$$I_{xy} = \int xy\,dA$$

حاصل ضرب اینرسی سطح نسبت به محورهای y,x

حاصل ضرب اینرسی می تواند مثبت یا منفی باشد

قضیه انتقال برای حاصلضرب اینرسی



C مرکز سطح است

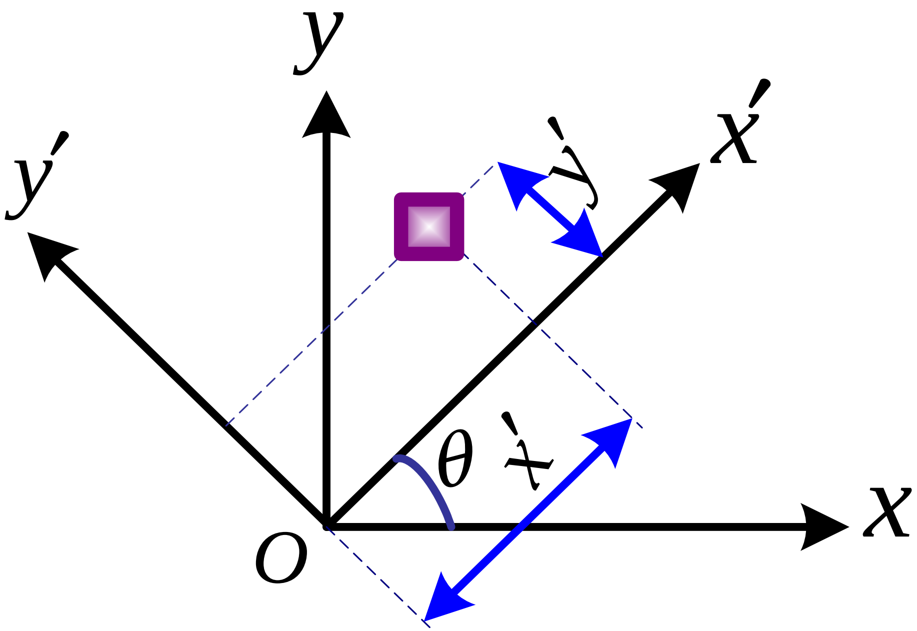
$$I_{xy} = \int xy dA = \int (\bar{x} + x')(\bar{y} + y')\, dA$$

$$= \bar{x}\bar{y}\int dA + \bar{x}\int y' dA + \bar{y}\int x' dA + \int x'y' dA$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A$$

حاصل ضرب اینرسی سطح نسبت به دستگاه مختصات با مرکز منطبق بر مرکز سطح

دوران محورهای مختصات



$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y' = y\cos\theta - x\sin\theta$$

$$I_{x'} = \int y'^2 dA = \int (y\cos\theta - x\sin\theta)^2 dA$$

$$= \cos^2\theta \int y^2 dA - 2\sin\theta\cos\theta \int xy dA + \sin^2\theta \int x^2 dA$$

$$I_{x'} = I_x \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta \; I_{xy} + I_y \sin^2\theta$$

$$I_{x'} = I_x \cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta \; I_{xy} + I_y \sin^2\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \qquad \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\boxed{I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta}$$

$$I_{y'} = \int x'^2 dA = \int (x\cos\theta + y\sin\theta)^2 dA$$

$$= \cos^2\theta \int x^2 dA + 2\sin\theta\cos\theta \int xy dA + \sin^2\theta \int y^2 dA$$

$$= I_y \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta \; I_{xy} + I_x \sin^2\theta$$

$$I_{y'} = I_y \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta \;\; I_{xy} + I_x \sin^2\theta$$

$$\boxed{I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta}$$

$$I_{x'y'} = \int x'y'dA = \int (x\cos\theta + y\sin\theta)(y\cos\theta - x\sin\theta)dA$$

$$= \cos^2\theta \int xydA - \sin\theta\cos\theta \int x^2 dA$$

$$+ \sin\theta\cos\theta \int y^2 dA - \sin^2\theta \int xydA$$

$$\boxed{I_{x'y'} = I_{xy}\cos 2\theta + \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta}$$

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = I_{xy}\cos 2\theta + \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta$$

$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y$$

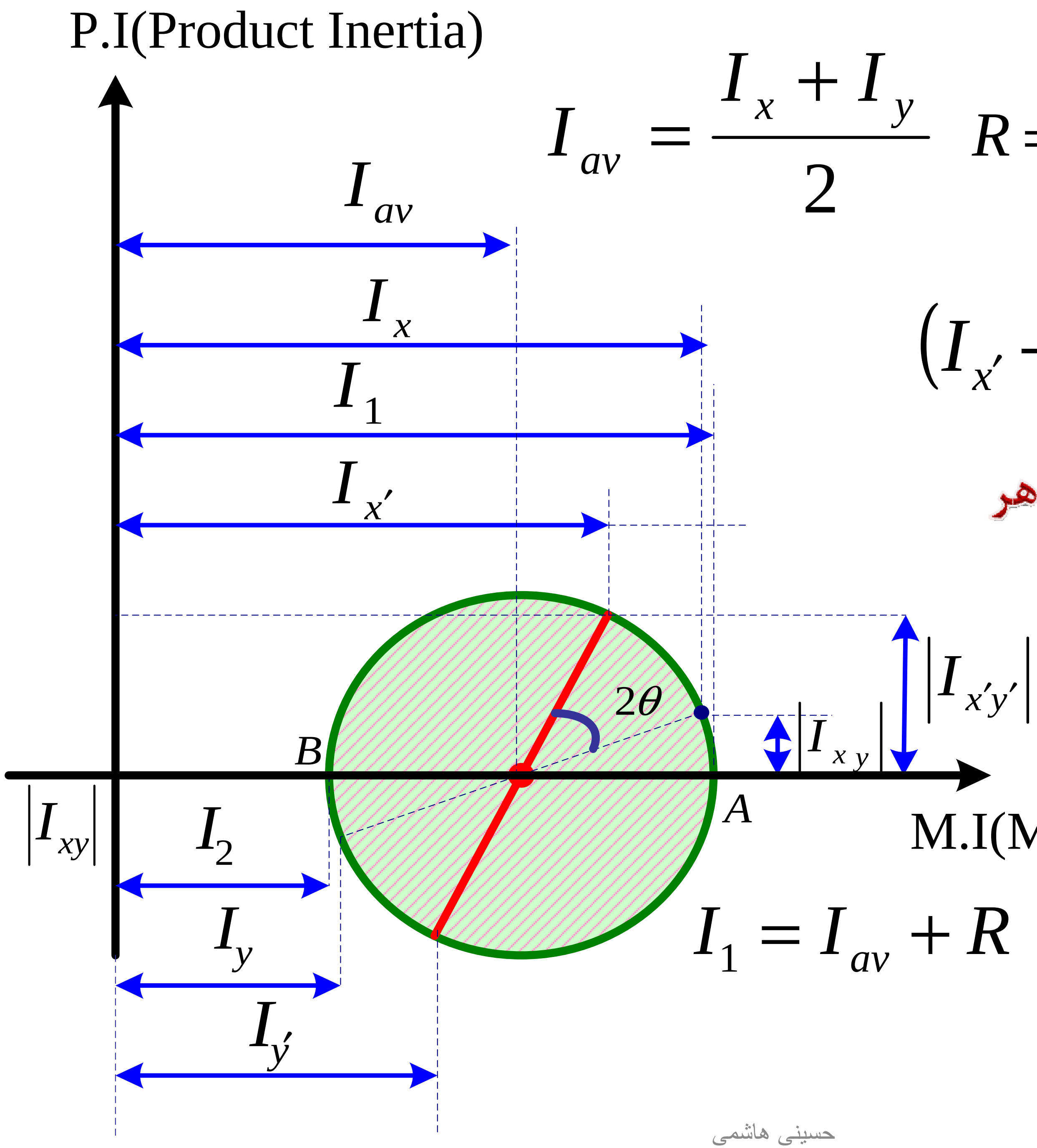
مجموع ممان اینرسی ها در دستگاه قدیم
برابر است با مجموع ممان اینرسی ها در
دستگاه جدید

$$\boxed{I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta}$$

$$\boxed{I_{x'y'} = I_{xy}\cos 2\theta + \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta}$$

$$\begin{cases} I_{x'} - \dfrac{I_x + I_y}{2} = \dfrac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta \\ I_{x'y'} = \dfrac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta \end{cases}$$

$$\left(I_{x'} - \frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 + I_{x'y'}^2 = \left[\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2\right]$$



$$I_{av} = \frac{I_x + I_y}{2} \qquad R = \left[\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(I_{x'} - I_{av}\right)^2 + I_{x'y'}^2 = R^2$$

معادله دایره موهر

(Mohr)

$$I_1 = I_{av} + R \qquad I_2 = I_{av} - R$$

اگر $I_{xy}>0$ باشد مقدار I_x در بـالای محـور افقـی و مقـدار I_y در پایین محور افقی نمایش داده می شود.

اگر $I_{xy}<0$ باشد مقدار I_x در پایین محور افقی و مقدار I_y در بـالای محور افقی نمایش داده می شود.

مثال: برای سطح نشان داده شده در شکل مطلوب است:

۱- گشتاورهای اینرسی حول محورهای x و y .

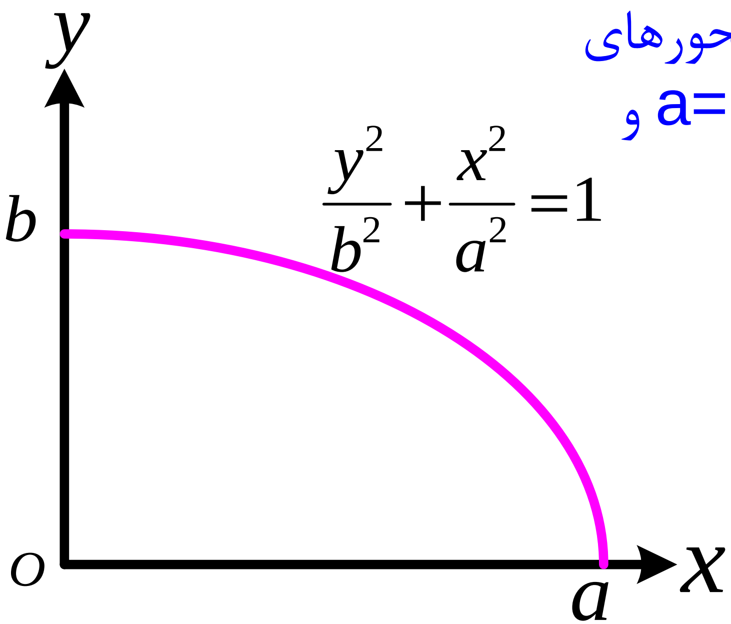
۲- حاصل ضرب های اینرسی نسبت به محورهای x و y .

۳- ممان اینرسی قطبی و شعاع های ژیراسیون حول محورهای x و y و نقطه O.

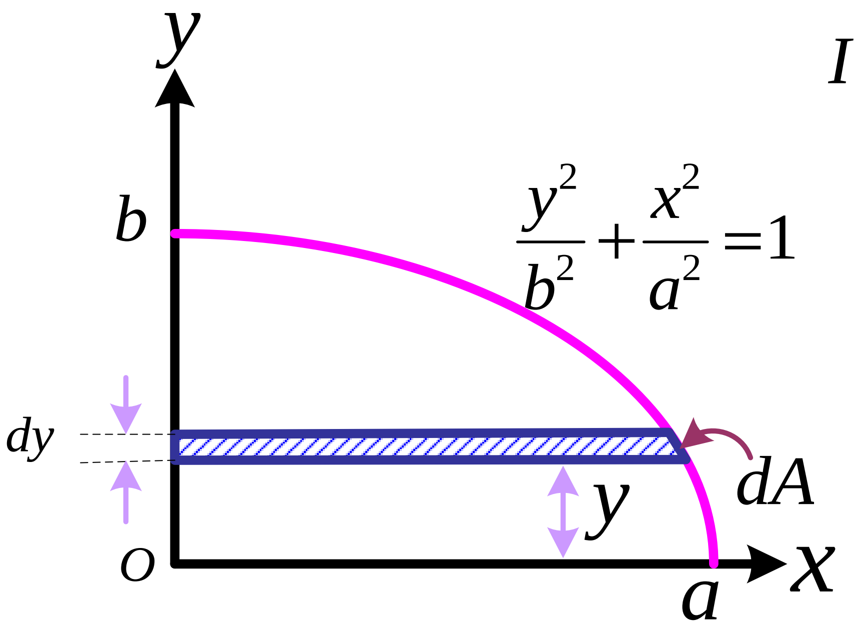
۴- گشتاورهای اینرسی حول محورهای ماربر مرکز سطح که به موازات محورهای x و y می باشند.

۵- حاصل ضرب اینرسی نسبت به محورهای ماربر مرکز بر سطح.

۶- تعیین گشتاورهای اینرسی نسبت به محورهای ماربرمرکز سطح. (در صورتیکه a=20mm و b=10mm باشد)



$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1$$



$$I_x=\int y^2 dA$$

$$dA=xdy=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\ dy$$

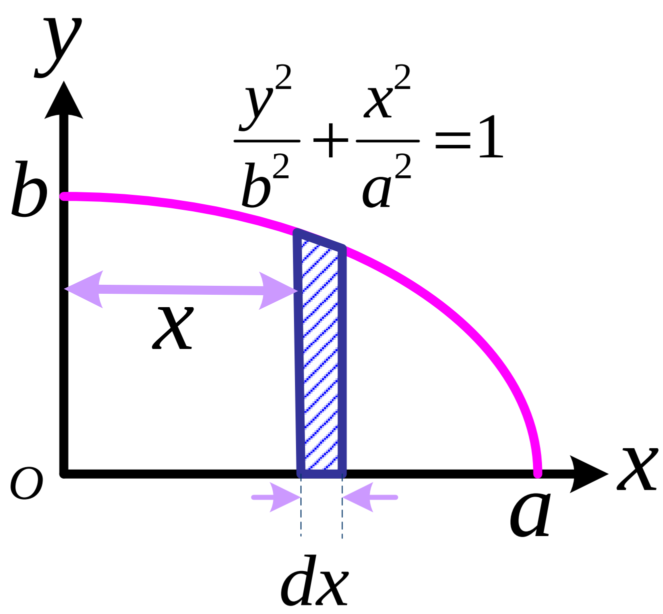
$$I_x=a\int_0^b y^2\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}dy$$

$$\frac{y}{b}=\sin\alpha\rightarrow\frac{dy}{b}=\cos\alpha d\alpha$$

$$I_x=ab^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\alpha\cos^2\alpha d\alpha=ab^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha d\alpha$$

$$=\frac{ab^3}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos4\alpha)\,d\alpha=\frac{ab^3}{8}\left[\alpha-\frac{1}{4}\sin4\alpha\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi ab^3}{16}$$

$$\boxed{I_x=\frac{\pi ab^3}{16}}$$



$$I_y=\int x^2 dA$$

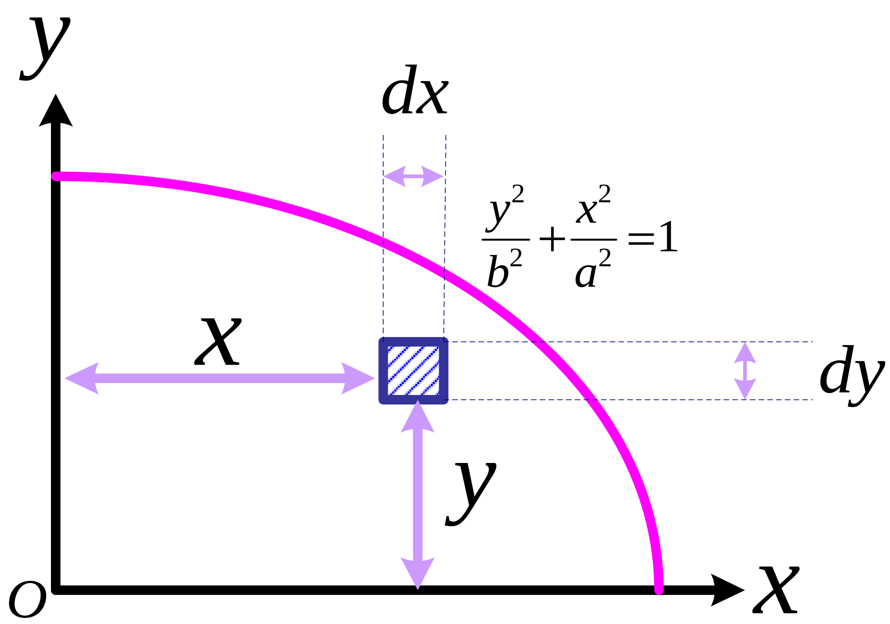
$$dA=y\,dx=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$$

$$I_y=b\int_0^a x^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$$

$$\frac{x}{a}=\sin\alpha \Rightarrow \frac{dx}{a}=\cos\alpha\, d\alpha$$

$$I_y=ba^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\alpha\cos^2\alpha\, d\alpha=\frac{ba^3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\alpha\, d\alpha=\frac{\pi ba^3}{16}$$

$$\boxed{I_y=\frac{\pi ba^3}{16}}$$



$$I_{xy} = \int xy\,dA$$

$$dA = dx\,dy$$

$$I_{xy} = \int\int xy\,dx\,dy = \int_0^a x\,dx \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} y\,dy$$

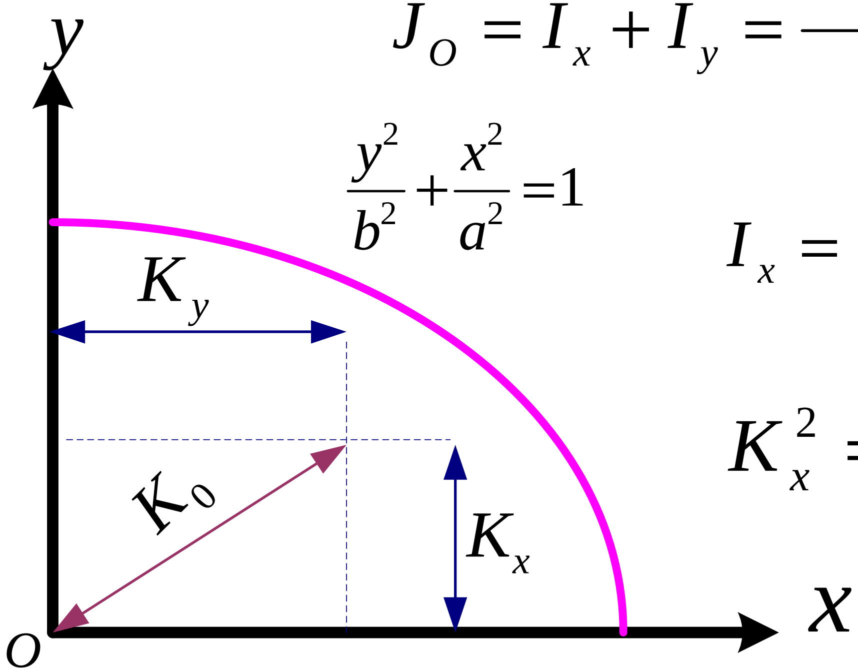
$$\frac{1}{2}\int_0^a x\,dx\left[y^2\right]_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{b^2}{2}\int_0^a x\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx$$

$$= \frac{b^2}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\frac{x^4}{a^2}\right]_0^a = \frac{a^2b^2}{8}$$

$$\boxed{I_{xy} = \frac{a^2b^2}{8}}$$

$$J_O = I_x + I_y = \frac{\pi ab\left(a^2+b^2\right)}{16}$$

$$\boxed{J_O = \frac{\pi ab\left(a^2+b^2\right)}{16}}$$



$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1$$

$$I_x = AK_x^2 \qquad A = \frac{\pi ab}{4} \Rightarrow \frac{\pi ab}{4}K_x^2 = \frac{\pi ab^3}{16}$$

$$K_x^2 = \frac{b^2}{4} \Rightarrow \boxed{K_x = \frac{b}{2}}$$

شعاع ژیراسیون حول x

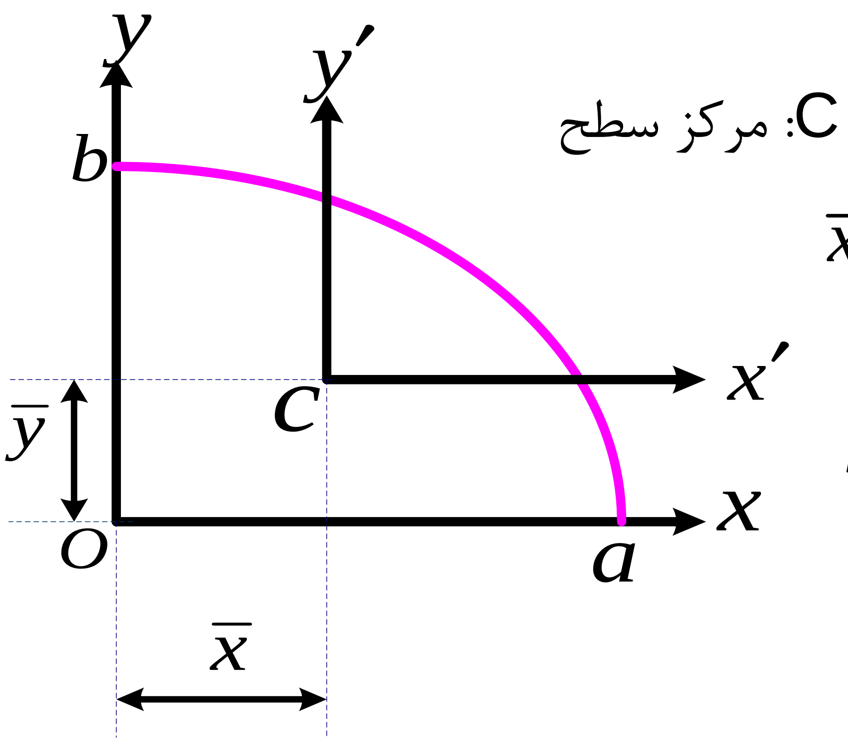
$$I_y = AK^2_y \qquad \frac{\pi ab}{4}K_y^2 = \frac{\pi ba^3}{16} \qquad \boxed{K_y = \frac{a}{2}}$$

شعاع ژیراسیون حول y

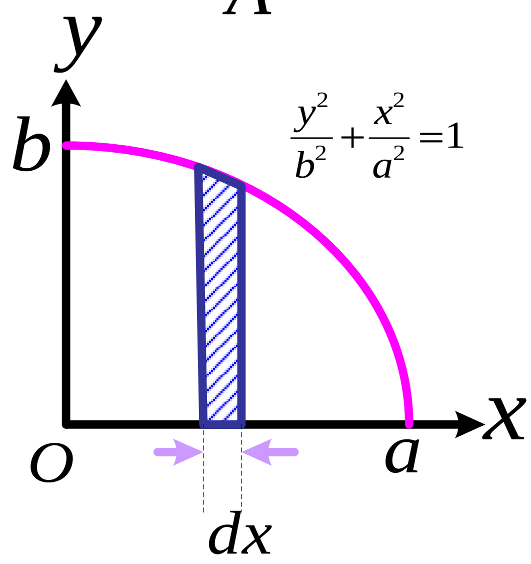
$$AK_O^2 = J_O$$

$$\frac{\pi ab}{4}k_O^2 = \frac{\pi ab\left(a^2+b^2\right)}{16} \qquad \boxed{K_O = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

شعاع ژیراسیون قطبی



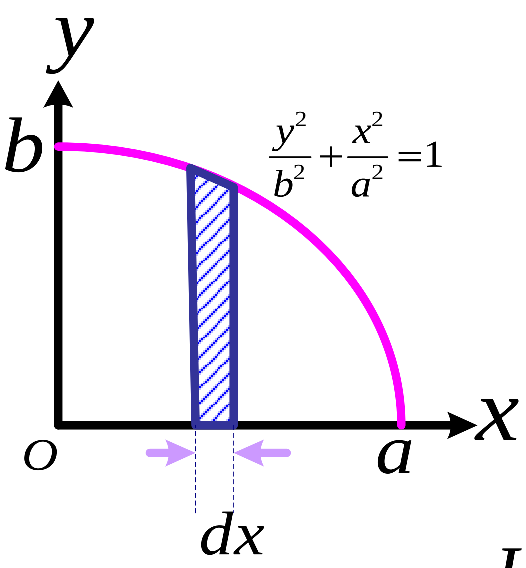
$$\bar{x} = \frac{\int \bar{x}_{el}\, dA}{A} \quad , \qquad \bar{y} = \frac{\int \bar{y}_{el}\, dA}{A}$$



$$dA = y\,dx$$

$$\int \bar{y}_{el}\, dA = \frac{1}{2}\int y^2 dx = \frac{b^2}{2}\int_0^a \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{ab^2}{3}$$

$$\bar{y} = \frac{ab^2/3}{ab\pi/4} = \frac{4b}{3\pi}$$

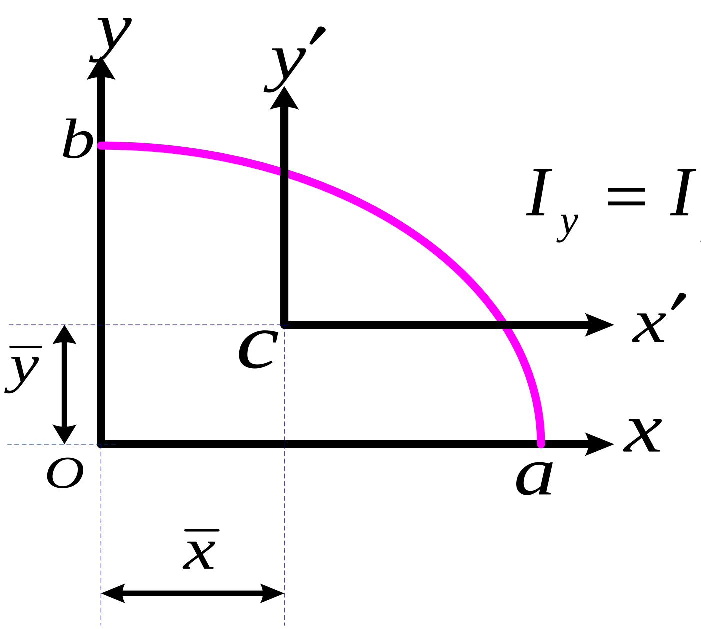


$$\int \bar{x}_{el}\,dA=\int xy\,dx=b\int_0^a x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx=\frac{ba^2}{3}$$

$$\bar{x}=\frac{4a}{3\pi}\qquad \bar{y}=\frac{4b}{3\pi}$$

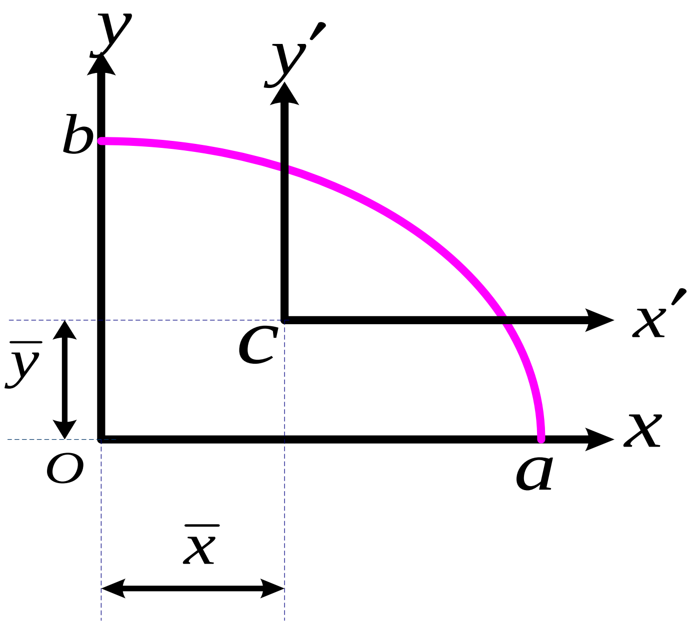
$$I_x=I_{x'}+A\bar{y}^2\Rightarrow\frac{\pi ab^3}{16}=I_{x'}+\frac{\pi ab}{4}\left(\frac{16b^2}{9\pi^2}\right)$$

$$\boxed{I_{x'}=\left(\frac{1}{16}-\frac{4}{9\pi^2}\right)\pi ab^3}$$



$$I_y=I_{y'}+A\bar{x}^2\Rightarrow\frac{\pi ba^3}{16}=I_{y'}+\frac{\pi ab}{4}\left(\frac{16a^2}{9\pi^2}\right)$$

$$\boxed{I_{y'}=\left(\frac{1}{16}-\frac{4}{9\pi^2}\right)\pi ba^3}$$



$$I_{xy} = I_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A$$

$$\bar{x} = \frac{4a}{3\pi} \qquad \bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$$

$$\frac{a^2b^2}{8} = I_{x'y'} + \frac{16ab}{9\pi^2} \times \frac{\pi ab}{4}$$

$$\boxed{I_{x'y'} = \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi}\right)a^2b^2}$$

$$I_{x'} = \left(\frac{1}{16} - \frac{4}{9\pi^2}\right)\pi ab^3$$

$$I_{y'} = \left(\frac{1}{16} - \frac{4}{9\pi^2}\right)\pi ba^3$$

$$I_{x'y'} = \left(\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi}\right)a^2b^2$$

$$a = 20mm \qquad b = 10mm$$

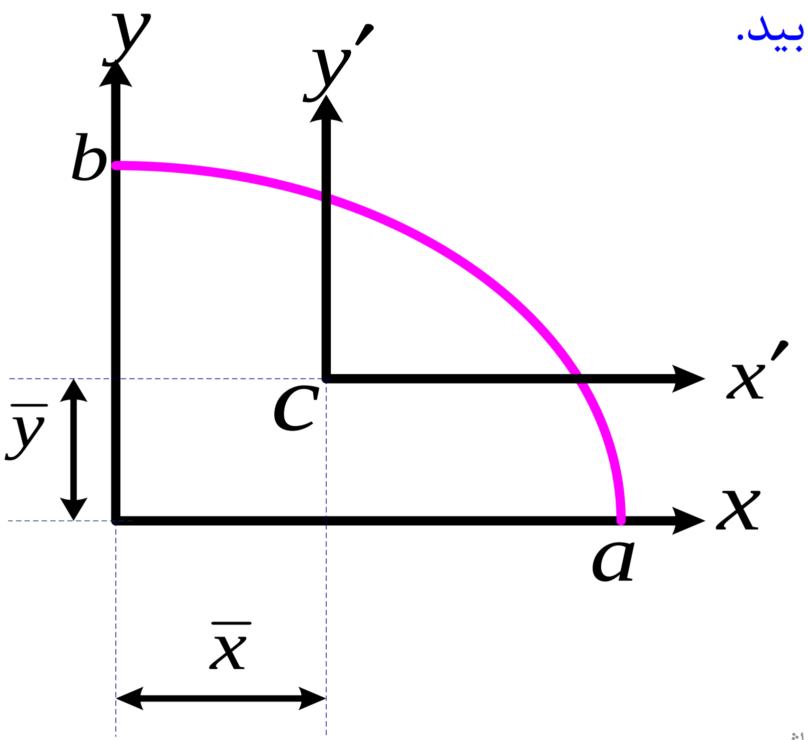
$$I_{x'} = 1097.6mm^4 \qquad I_{y'} = 4390.4mm^4 \qquad I_{x'y'} = -658.8\ mm^4$$

مثال: برای ربع بیضی مثال قبل مطلوبست :

1) رسم دایره موهر و نمایش $I_{x'}, I_{y'}, I_{x'y'}$ برروی آن.

2) گشتاورهای اصلی اینرسی و راستاهای اصلی آن ها.

3) چنانچه دستگاه مختصات UV از دوران دستگاه مختصات $x'y'$ به اندازه θ حاصل گردد زاویه θ را به طریقی تعیین کنید که $I_{UV} = 0$ باشد وسپس I_V, I_U را بیابید.

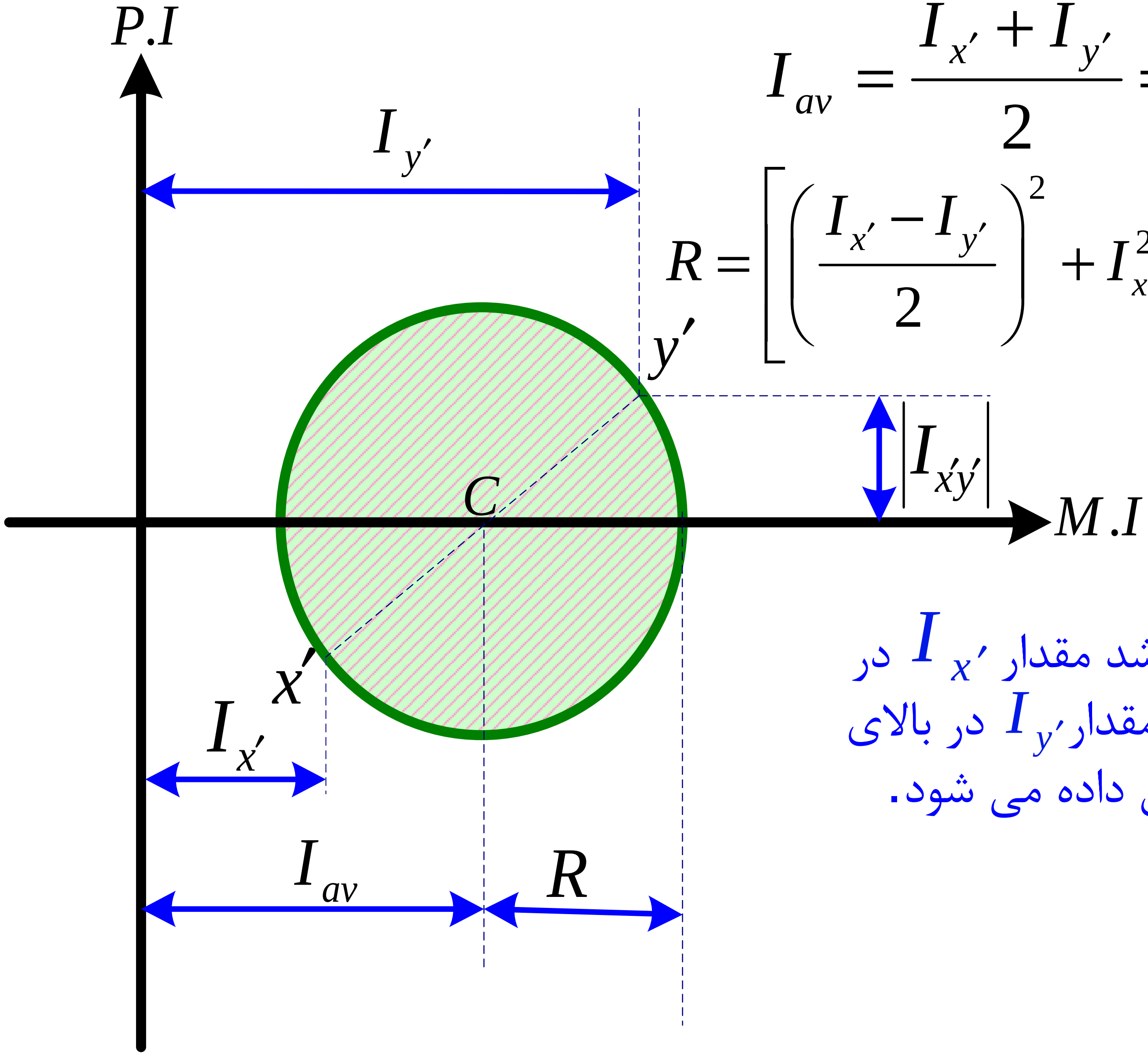


$$\begin{cases} I_{x'} = 1097.6mm^4 \\ I_{y'} = 4390.4mm^4 \\ I_{x'y'} = -658.8mm^4 \end{cases}$$

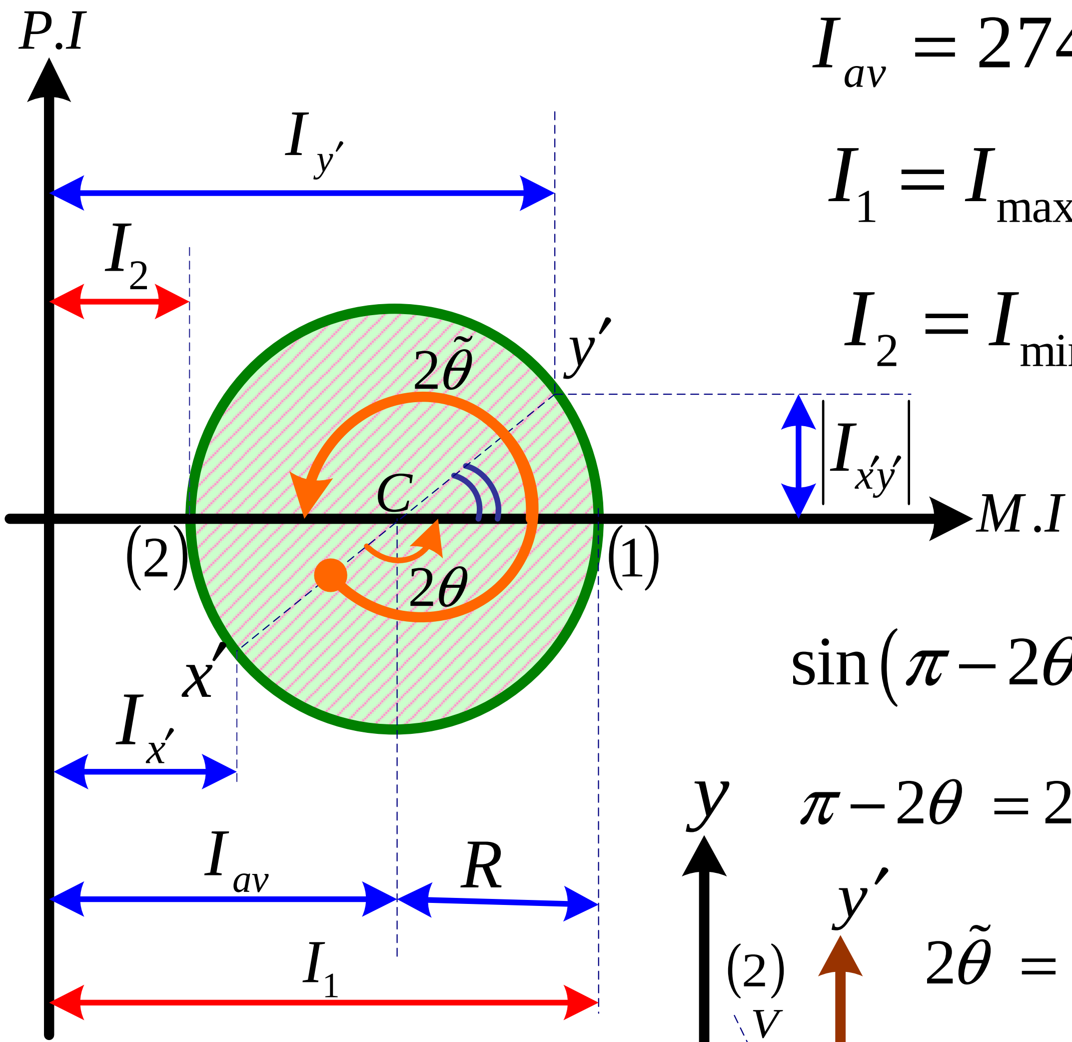
$$I_{x'} = 1097.6 mm^4 \quad I_{y'} = 4390.4 mm^4 \quad I_{x'y'} = -658.8 mm^4$$

$$I_{av} = \frac{I_{x'} + I_{y'}}{2} = 2744 mm^4$$

$$R = \left[\left(\frac{I_{x'} - I_{y'}}{2}\right)^2 + I_{x'y'}^2\right]^{\frac{1}{2}} = 1773.32 mm$$



اگر $I_{x'y'} < 0$ باشد مقدار $I_{x'}$ در پایین محور افقی و مقدار $I_{y'}$ در بالای محور افقی نمایش داده می شود.



$$I_{av} = 2744 mm^4 \qquad R = 1773.32 mm$$

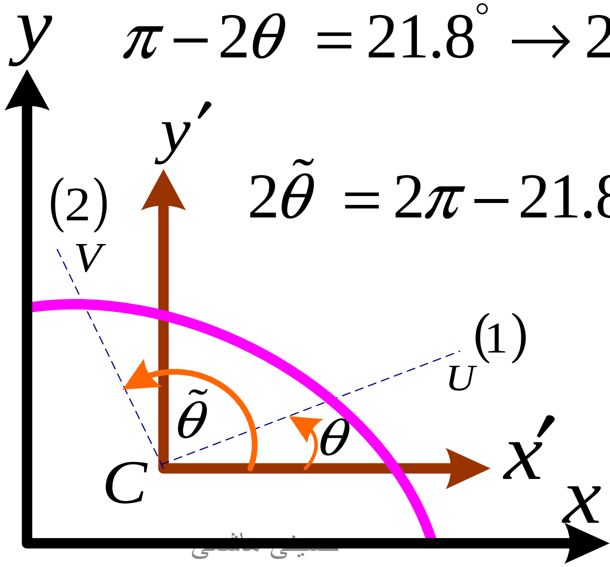
$$I_1 = I_{\max} = R + I_{av} = 4517.32 \ mm^4$$

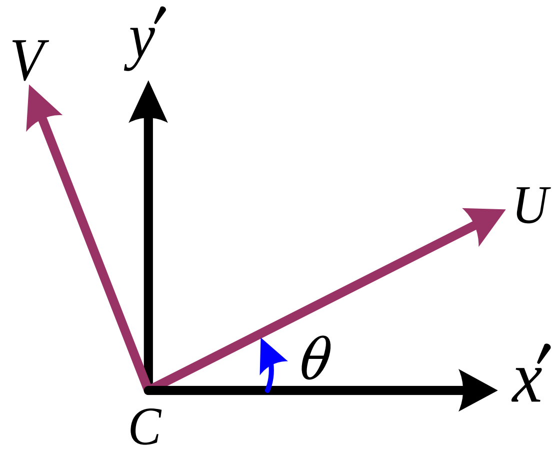
$$I_2 = I_{\min} = I_{av} - R = 970.68 \ mm^4$$

$$\sin(\pi - 2\theta) = \frac{|I_{x'y'}|}{R} = 0.3715 = \sin 21.8$$

$$\pi - 2\theta = 21.8^\circ \rightarrow 2\theta = 158.2 \rightarrow \theta = 79.1^\circ$$

$$2\tilde{\theta} = 2\pi - 21.8^\circ = 338.2^\circ \rightarrow \tilde{\theta} = 169.1^\circ$$





$$I_U = \frac{I_{x'} + I_{y'}}{2} + \frac{I_{x'} - I_{y'}}{2}\cos 2\theta - I_{x'y'}\sin 2\theta$$

$$I_V = \frac{I_{x'} + I_{y'}}{2} - \frac{I_{x'} - I_{y'}}{2}\cos 2\theta - I_{x'y'}\sin 2\theta$$

$$I_{UV} = \frac{I_{x'} - I_{y'}}{2}\sin 2\theta + I_{x'y'}\cos 2\theta$$

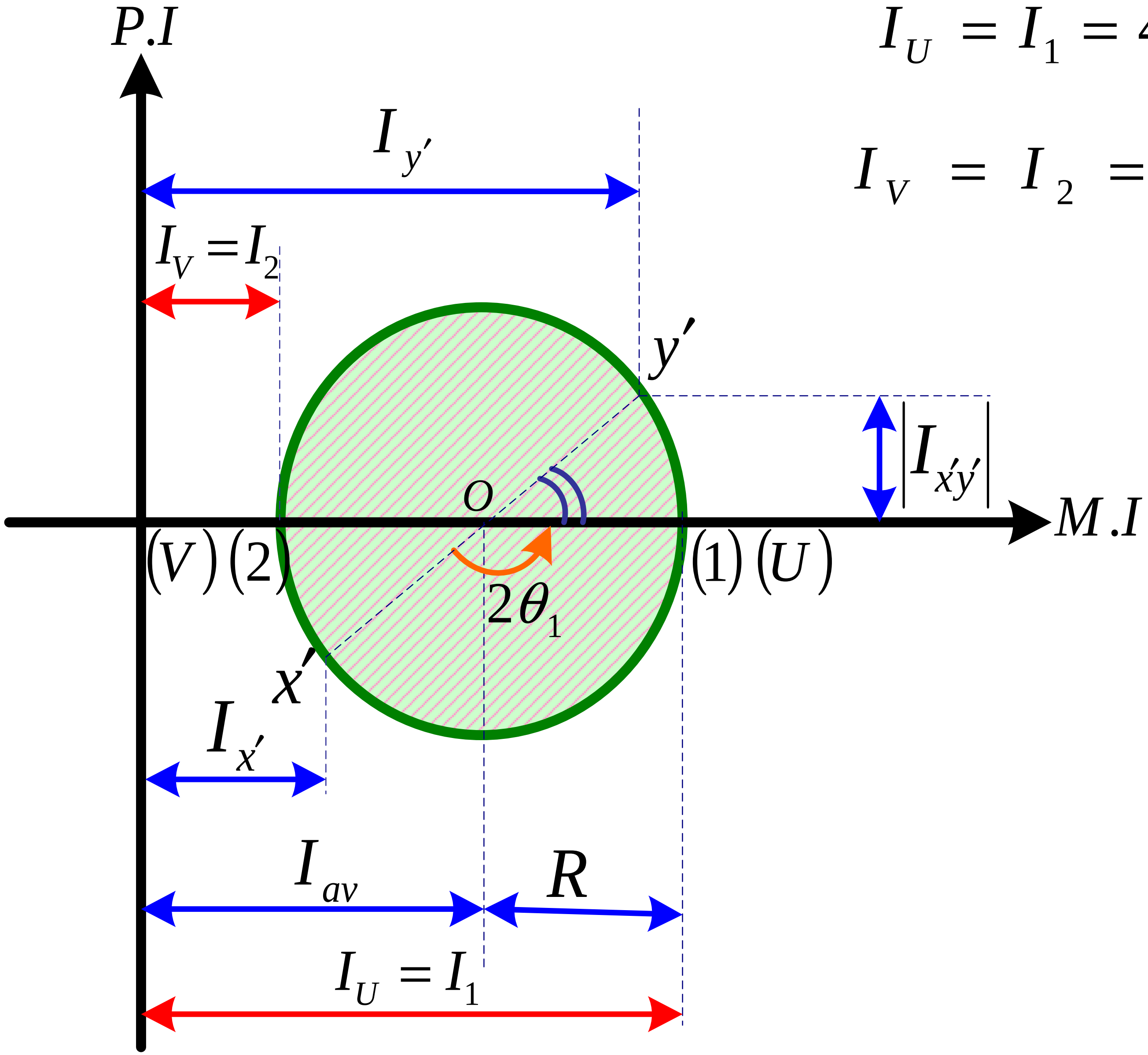
$$I_{UV} = 0 \qquad \tan 2\theta = \frac{-2I_{x'y'}}{I_{x'} - I_{y'}} = -0.4 = \tan 158.2^\circ \Rightarrow 2\theta = 158.2^\circ$$

$$2\theta = 158.2^\circ \Rightarrow \theta = 79.1^\circ$$

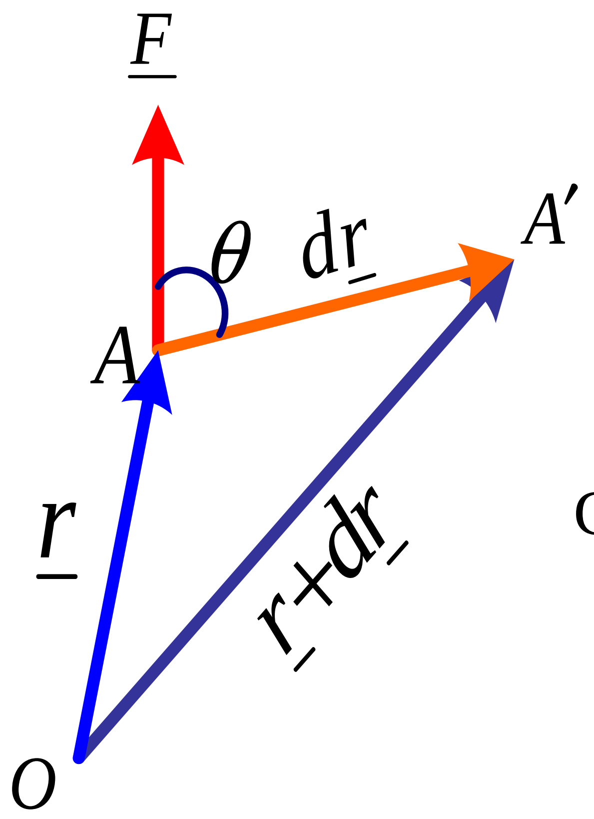
$$I_U = I_1 = 4517.32\, mm^4 \qquad I_V = I_2 = 970.68\ mm^4$$

$$I_U = I_1 = 4517.32\, mm^4$$

$$I_V = I_2 = 970.68\, mm^4$$



۱۰–کار مجازی وپایداری



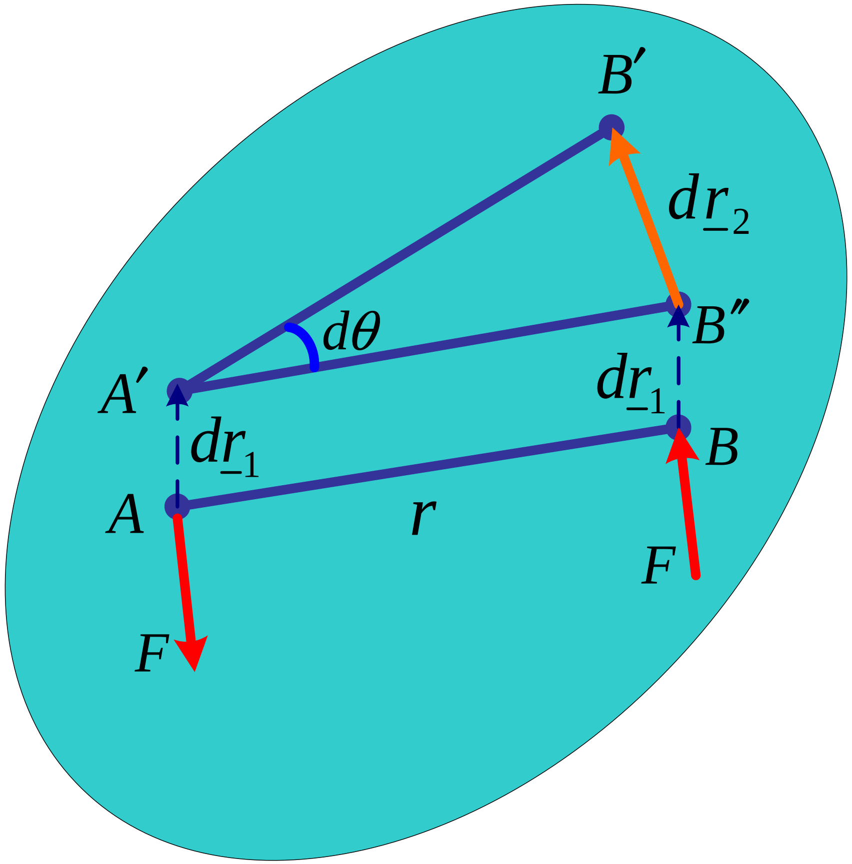
کار یک نیرو

اسکالر $dU = \underline{F}.d\underline{r} = F dr \cos\theta$

ژول MKS واحد کار $= N.m = Joule$

ارگ CGS واحد کار $= dyne.cm = Erge$

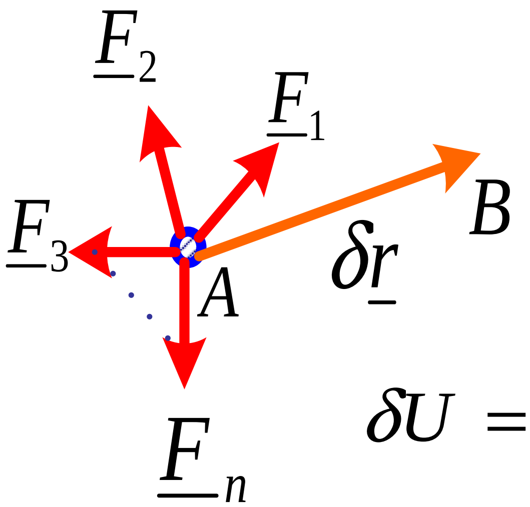
کار یک کوپل نیرو



$$dr_2 = rd\theta$$

$$dU = \underline{F}.d\underline{r}_2 = Frd\theta = Md\theta$$

کار مجازی



جا به جایی مجازی: $\delta \underline{r}$

جا به جایی واقعی: $d\,\underline{r}$

$$\delta U = \underline{F}_1 . \delta \underline{r} + \underline{F}_2 . \delta \underline{r} + \underline{F}_3 . \delta \underline{r} + \ldots + \underline{F}_n . \delta \underline{r}$$

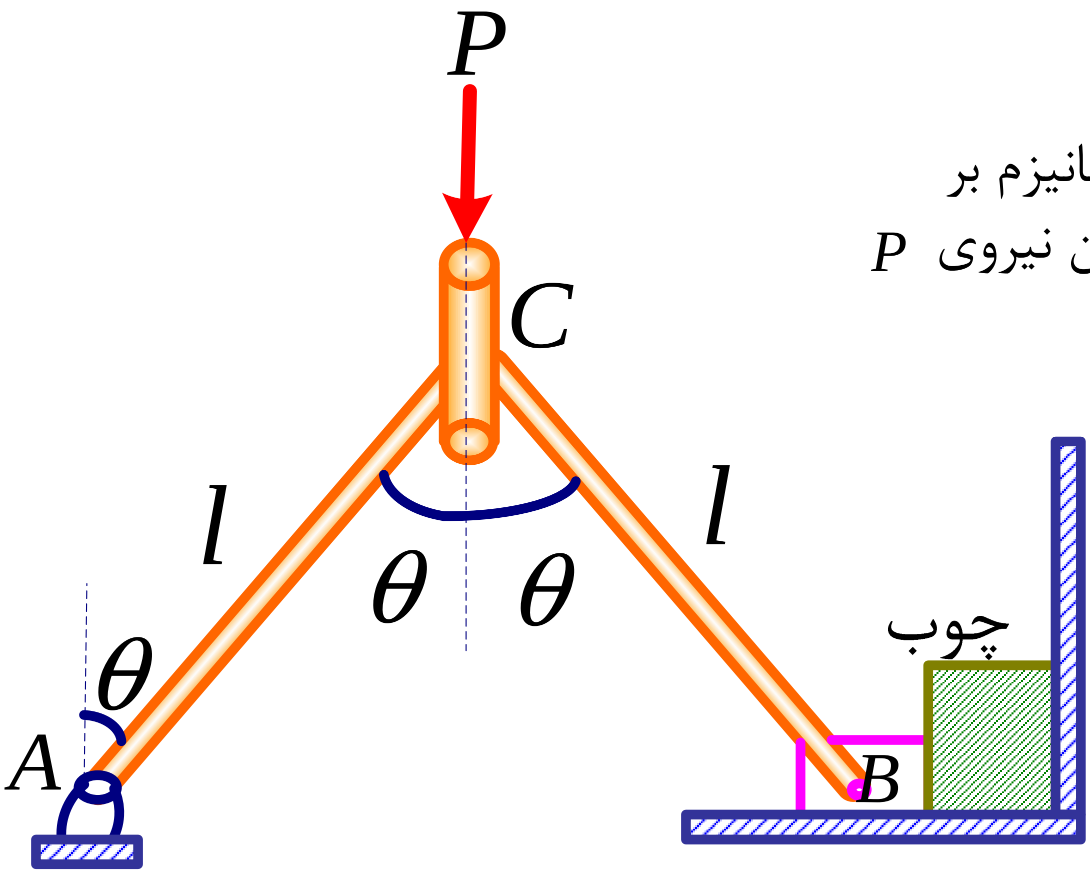
$$\delta U = \left(\underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 + \ldots + \underline{F}_n \right) . \delta \underline{r}$$

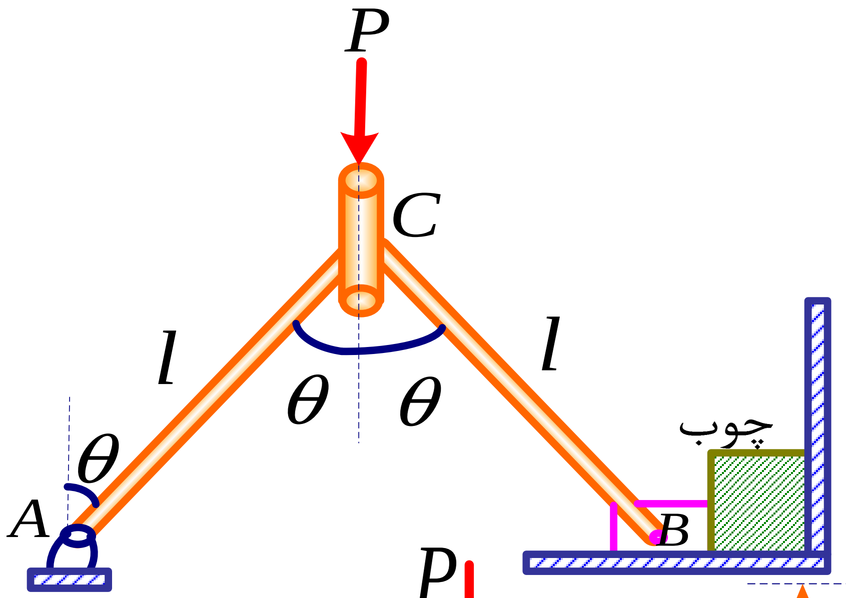
$$\delta U = \underline{R} . \delta \underline{r}$$

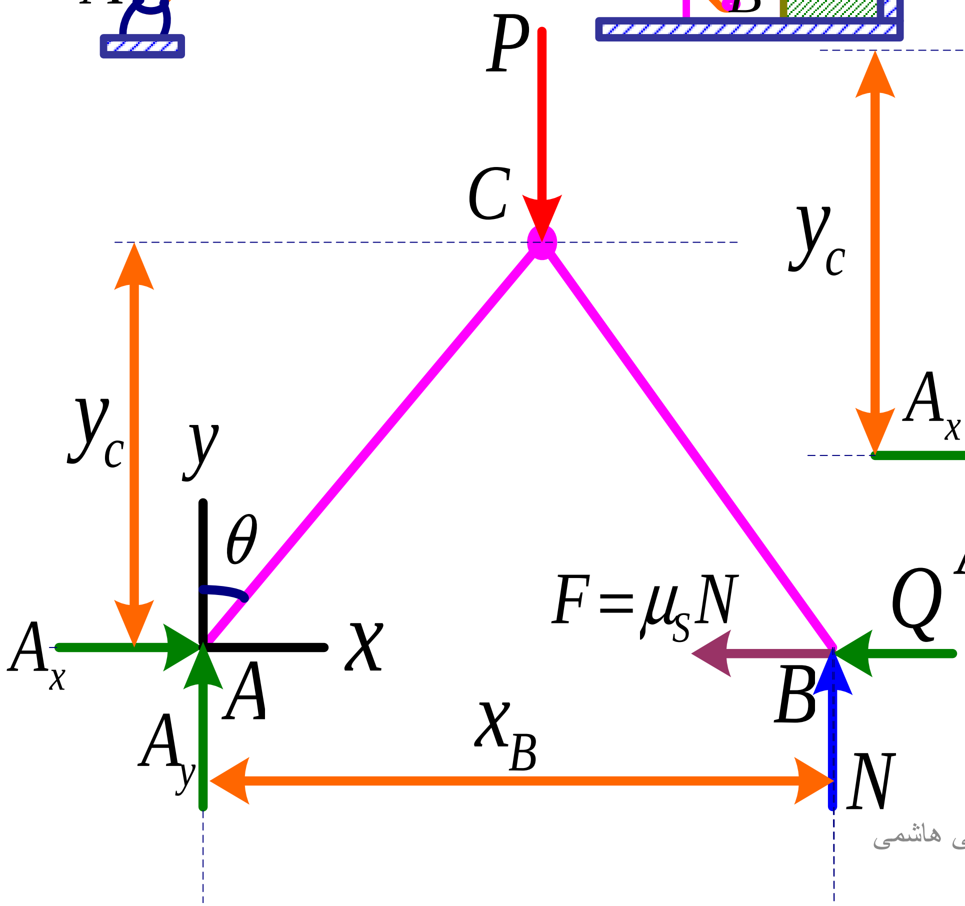
اگر سیستم تحت تأثیر نیروهای اعمالی در حالت تعادل باشد یعنی $\underline{R} = 0$
در این صورت کار برآیند نیروها برای هر جا بجایی مجازی برابر صفر می باشد

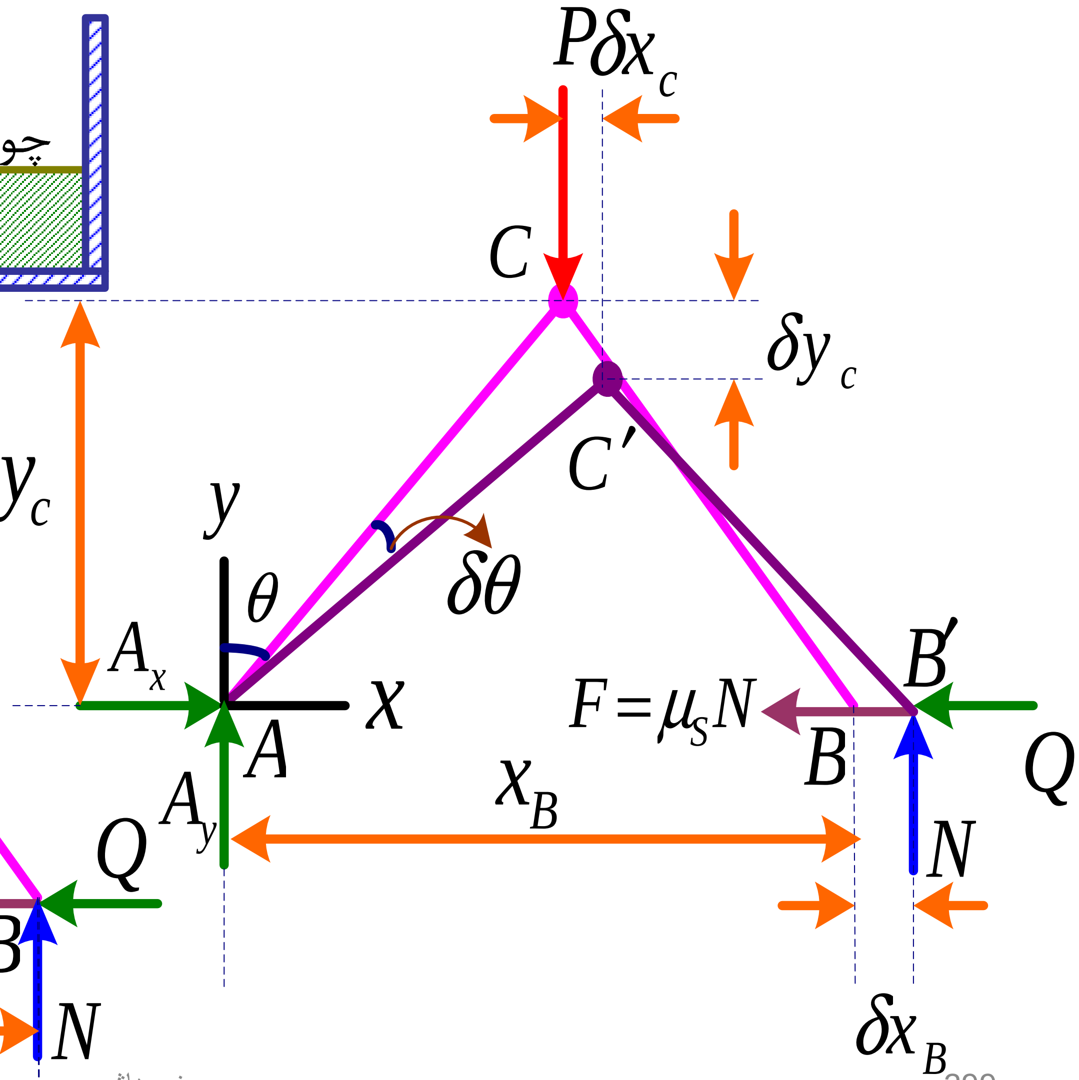
اصل کار مجازی $\underline{R} = 0 \rightarrow \delta U = \underline{R} . \delta \underline{r} = 0$

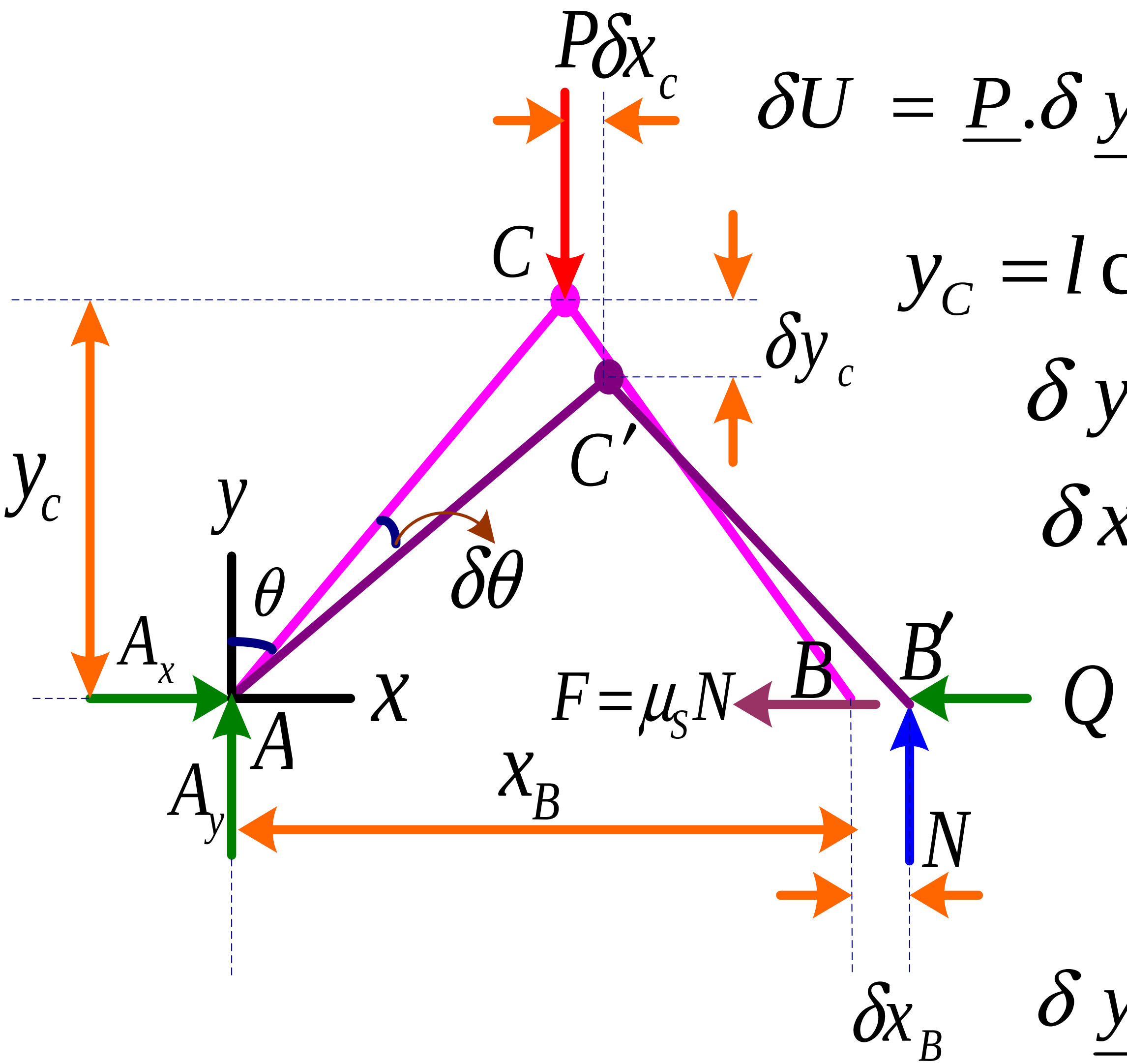
تعیین نیروی وارده از طرف مکانیزم بر
قطعه چوب با فرض معلوم بودن نیروی P




P
C
l
l
θ
θ
θ
A
B
چوب


P
C
y_c
y
θ
A_x
A
x
A_y
$F=\mu_s N$
Q
B
x_B
N


$P\delta x_c$
C
δy_c
C′
y_c
y
δθ
θ
A_x
A
x
A_y
$F=\mu_s N$
B′
B
Q
x_B
N
δx_B



$$\delta U = \underline{P}.\delta \underline{y}_C + \underline{F}.\delta \underline{x}_B + \underline{Q}.\delta \underline{x}_B$$

$$y_C = l\cos\theta \qquad x_B = 2l\sin\theta$$

$$\delta y_C = -l\sin\theta\delta\theta$$

$$\delta x_B = 2l\cos\theta\delta\theta$$

$$\underline{P} = -P\underline{j}$$

$$\underline{Q} = -Q\underline{i}$$

$$\underline{F} = -\mu_S N\underline{i}$$

$$\delta \underline{y}_C = -l\sin\theta\delta\theta\,\underline{j}$$

$$\delta \underline{x}_B = 2l\cos\theta\delta\theta\,\underline{i}$$

$$\delta U = Pl\sin\theta\delta\theta - \mu_S N\left(2l\cos\theta\right)\delta\theta - Q\left(2l\cos\theta\right)\delta\theta$$

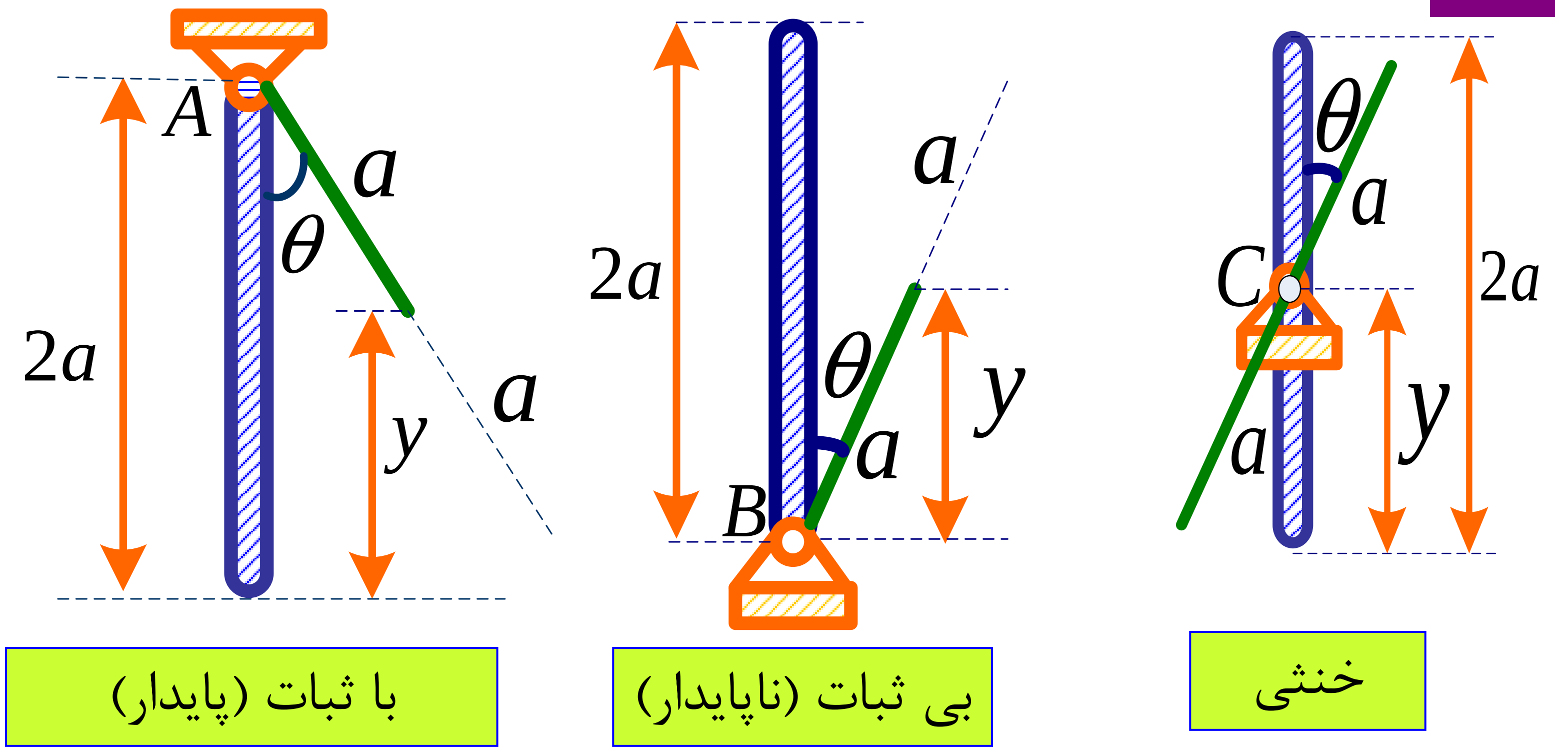
$$\delta U = l\delta\theta\left(P\sin\theta - 2\mu_S N\cos\theta - 2Q\cos\theta\right)$$

$$\delta U = 0$$

$$P\sin\theta - 2\mu_S N\cos\theta - 2Q\cos\theta = 0$$

$$Q = \frac{P}{2}\tan\theta - \mu_S N$$

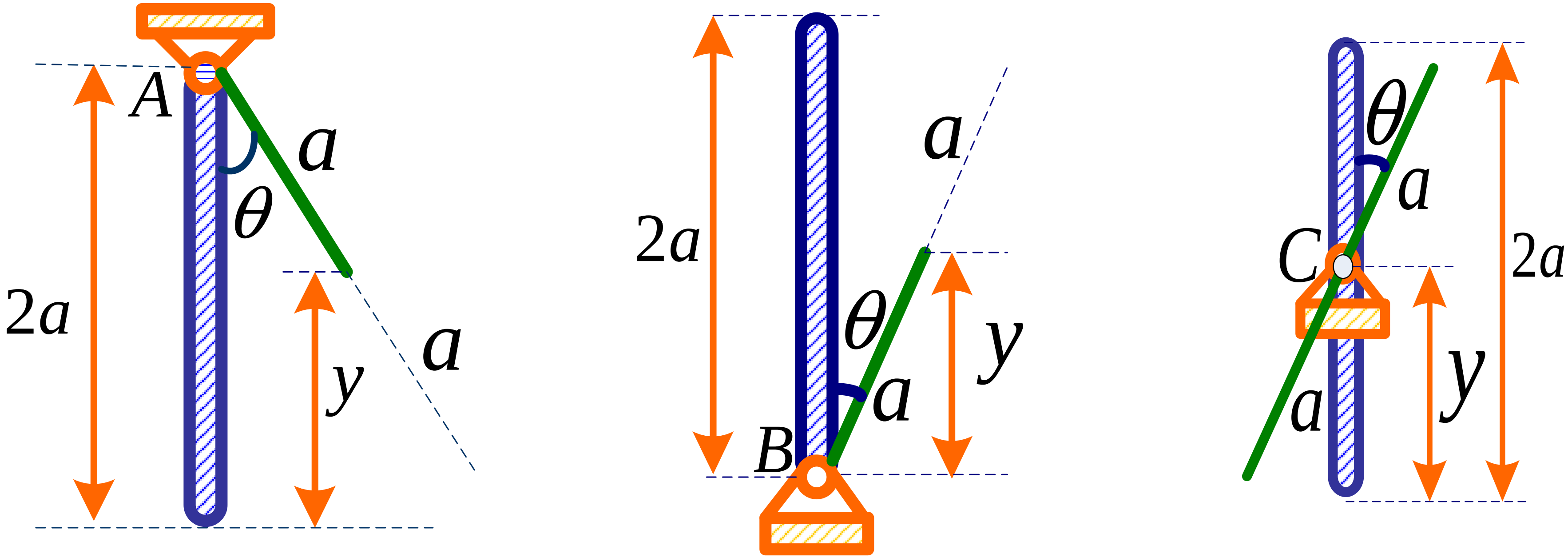
پایداری



بعد از رها شدن از موقعیت منحرف شده θ دوباره به وضعیت اولیه یعنی تعادل باز می گردد.

بعد از رها شدن از موقعیت θ به هیچ وجه به وضعیت اولیه باز نمی گردد.

در هر وضعیت θ که قرار بگیرد در همان موقعیت باقی خواهد ماند.



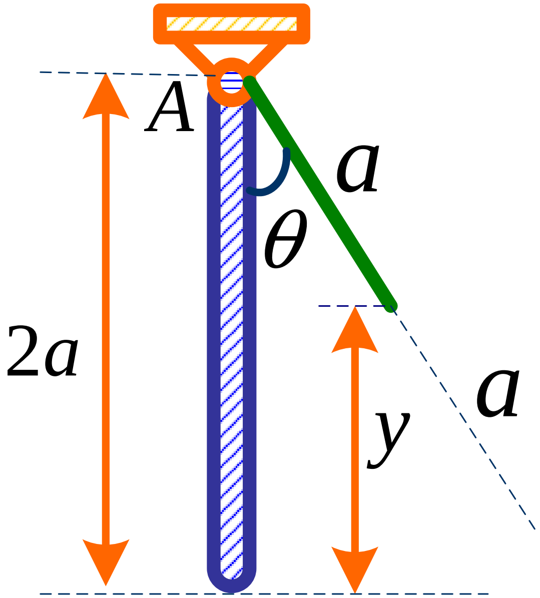
w وزن میله ها

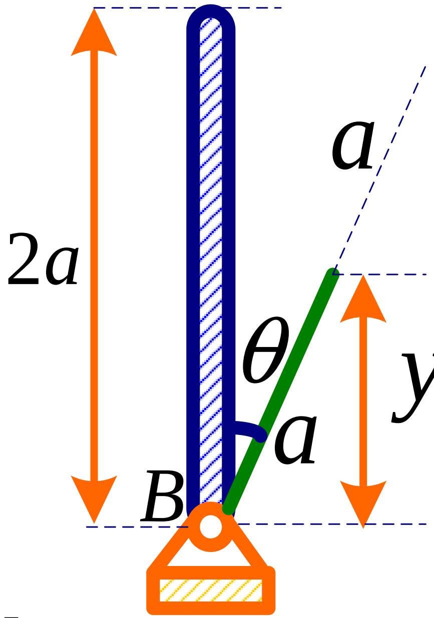
$V = wy$ تابع انرژی پتانسیل

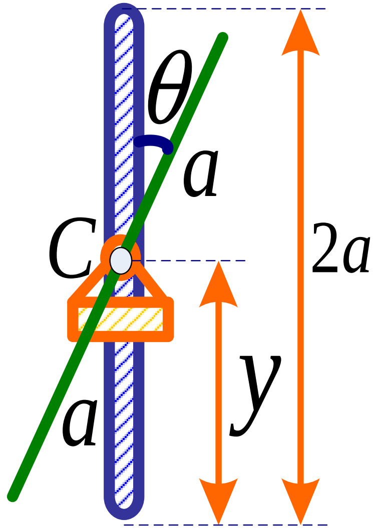
$$y = 2a - a\cos\theta \Rightarrow V = wa\left(2 - \cos\theta\right)$$

$$y = a\cos\theta \Rightarrow V = wa\cos\theta$$

$$y = a \Rightarrow V = wa$$







$$V = wa\left(2-\cos\theta\right) \qquad \frac{d^2V}{d\theta^2} = wa\cos\theta \qquad \frac{d^2V}{d\theta^2} > 0$$

در موقعیت تعادل $(\theta=0)$ دارای کمترین انرژی پتانسیل

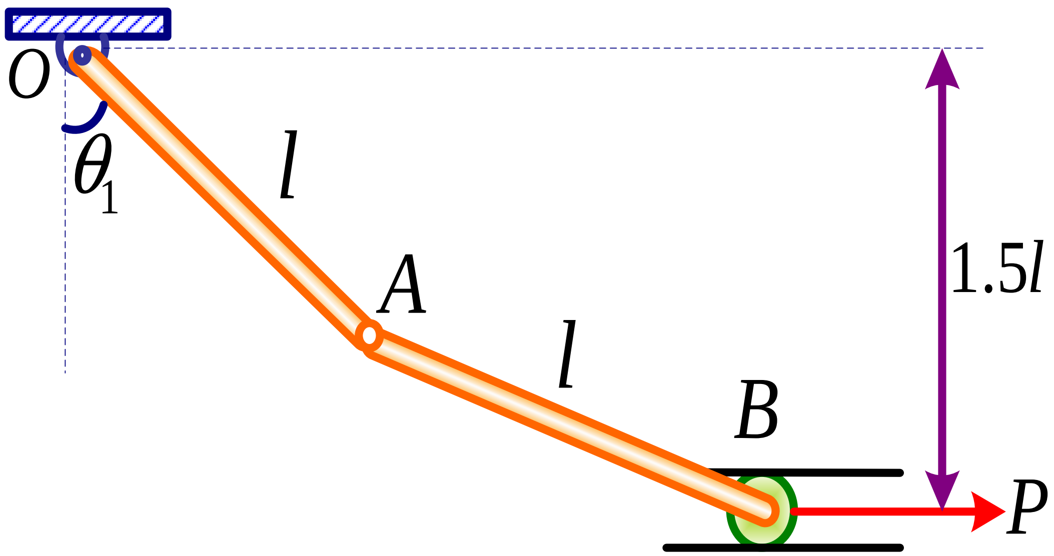
$$V = wa\cos\theta \qquad \frac{d^2V}{d\theta^2} = -wa\cos\theta \qquad \frac{d^2V}{d\theta^2} < 0$$

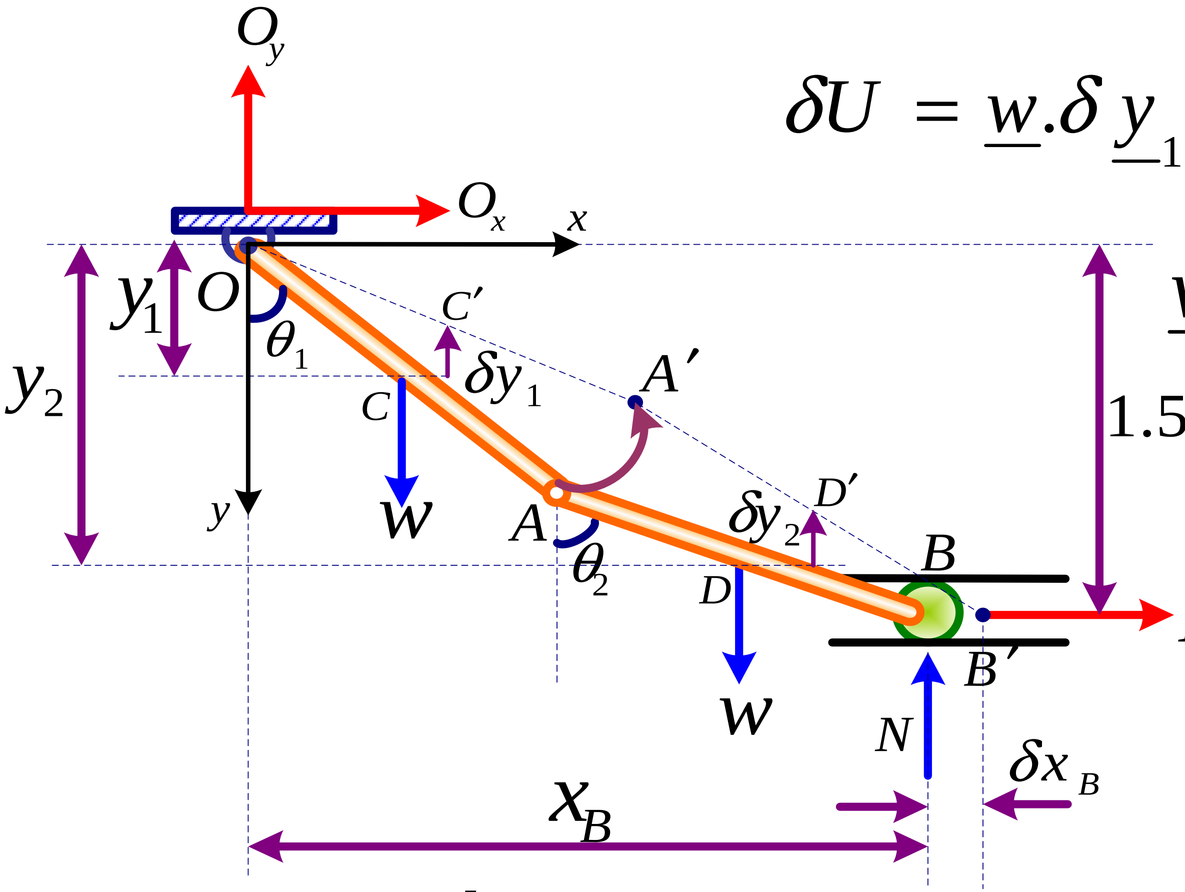
در موقعیت تعادل $(\theta=0)$ دارای بیشترین انرژی پتانسیل

$$V = wa \qquad \frac{d^2V}{d\theta^2} = 0$$

در هر موقعیت θ انرژی پتانسیل ثابت است.

مثال: مکانیزم نشان داده شده در شکل شامل دو میله همگن هر یک به طول l و وزن w می باشد. غلتک B در یک شیار افقی که به فاصله 1.5l زیر پین O قرار دارد حرکت می کند .با استفاده از اصل کار مجازی نیروی p که دستگاه را برای $\theta_1 = 30^\circ$ در تعادل نگهد ارد تعیین کنید. (از اصطکاک صرفنظر کنید)





$$\delta U = \underline{w}.\delta\underline{y}_1 + \underline{w}.\delta\underline{y}_2 + \underline{P}.\delta\underline{x}_B$$

$$\underline{w} = w\,\underline{j} \qquad \underline{P} = P\underline{i}$$

$$y_1 = \frac{l}{2}\cos\theta_1$$

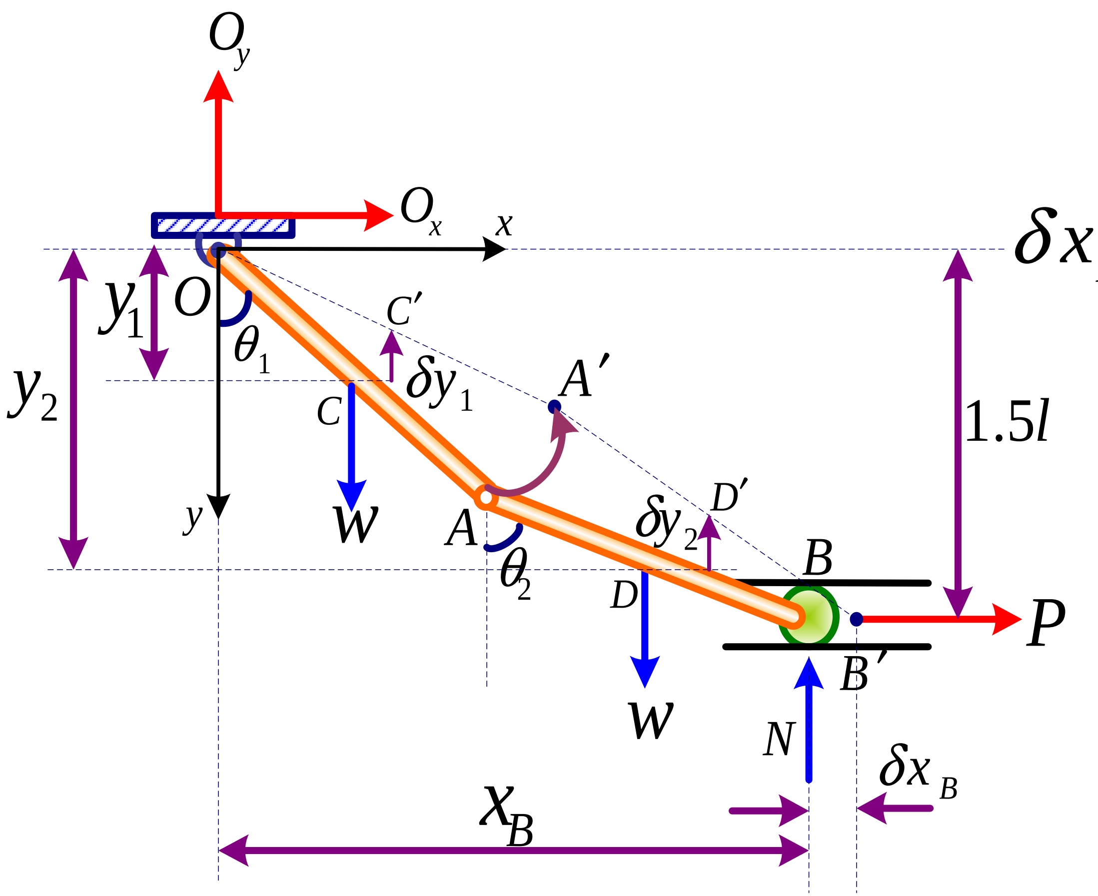
$$\delta y_1 = -\frac{l}{2}\sin\theta_1\delta\theta_1$$

$$\delta\underline{y}_1 = -\frac{l}{2}\sin\theta_1\delta\theta_1\,\underline{j}$$

$$y_2 = l\cos\theta_1 + \frac{l}{2}\cos\theta_2 \qquad l\cos\theta_1 + l\cos\theta_2 = 1.5l$$

$$\cos\theta_2 = 1.5 - \cos\theta_1 \qquad y_2 = \frac{l}{2}\cos\theta_1 + 0.75l$$

$$\delta\underline{y}_2 = -\frac{l}{2}\sin\theta_1\delta\theta_1\,\underline{j}$$



$$x_B = l\sin\theta_1 + l\sin\theta_2$$

$$\delta x_B = l\cos\theta_1\delta\theta_1 + l\cos\theta_2\delta\theta_2$$

$$\cos\theta_2 = 1.5 - \cos\theta_1$$

$$-\sin\theta_2\delta\theta_2 = \sin\theta_1\delta\theta_1$$

$$\delta\theta_2 = \frac{-\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\delta\theta_1$$

$$\delta x_B = l\cos\theta_1\delta\theta_1 + l\cos\theta_2\left(\frac{-\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\right)\delta\theta_1$$

$$\delta \underline{x}_B = l\left(\cos\theta_1 - \sin\theta_1\cot\theta_2\right)\delta\theta_1\underline{i}$$

$$\delta U = \underline{w}.\delta \underline{y}_1 + \underline{w}.\delta \underline{y}_2 + \underline{P}.\delta \underline{x}_B \qquad \underline{w} = w\underline{j} \qquad \underline{P} = P\underline{i}$$

$$\delta \underline{y}_1 = -\frac{l}{2}\sin\theta_1 \delta\theta_1 \underline{j} \qquad \delta \underline{y}_2 = -\frac{l}{2}\sin\theta_1 \delta\theta_1 \underline{j}$$

$$\delta \underline{x}_B = l\left(\cos\theta_1 - \sin\theta_1 \cot\theta_2\right)\delta\theta_1 \underline{i}$$

$$\delta U = -w\frac{l}{2}\sin\theta_1\delta\theta_1 - w\frac{l}{2}\sin\theta_1\delta\theta_1 + pl\left(\cos\theta_1 - \sin\theta_1\cot\theta_2\right)\delta\theta_1$$

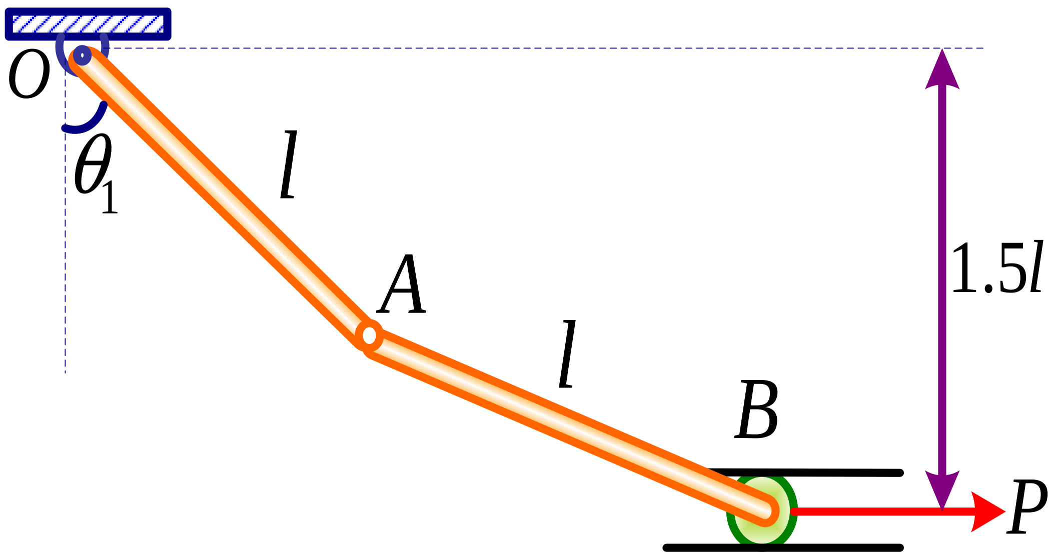
$$\delta U = \left(-wl\sin\theta_1 + pl\cos\theta_1 - pl\sin\theta_1\cot\theta_2\right)\delta\theta_1$$

$$\delta U = 0 \qquad \boxed{P = \frac{w\sin\theta_1}{\cos\theta_1 - \sin\theta_1\cot\theta_2}}$$

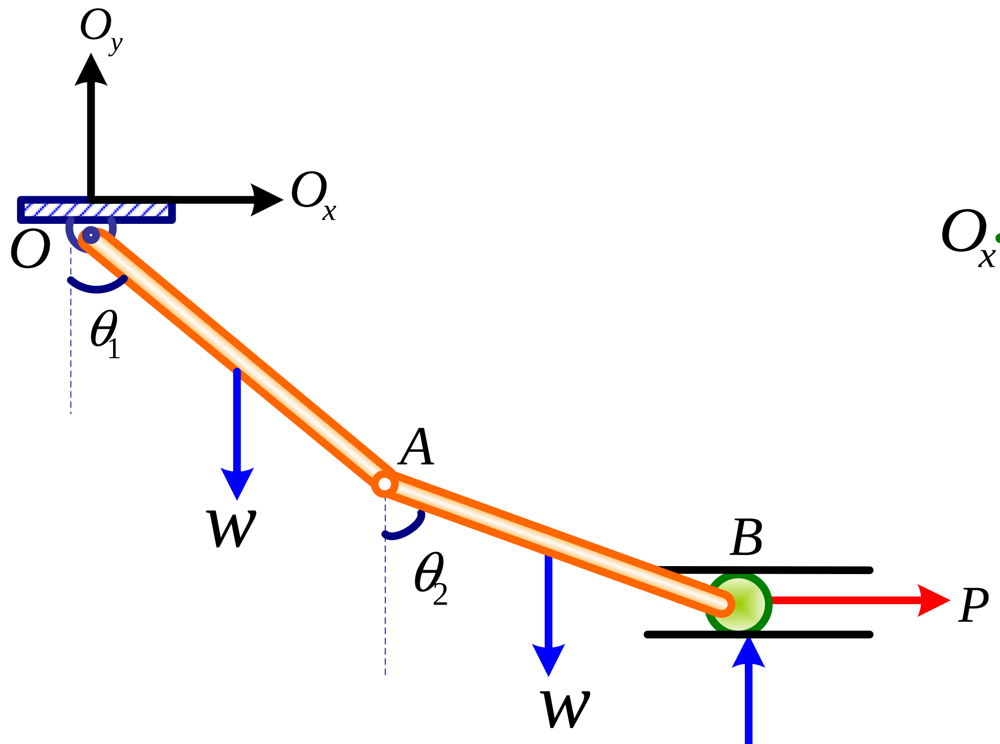
$$\theta_1 = 30^\circ \rightarrow \cos\theta_1 + \cos\theta_2 = 1.5 \Rightarrow \cos\theta_2 = 50.65$$

$$\theta_2 = 50.65^\circ \Rightarrow P = 1.097w$$

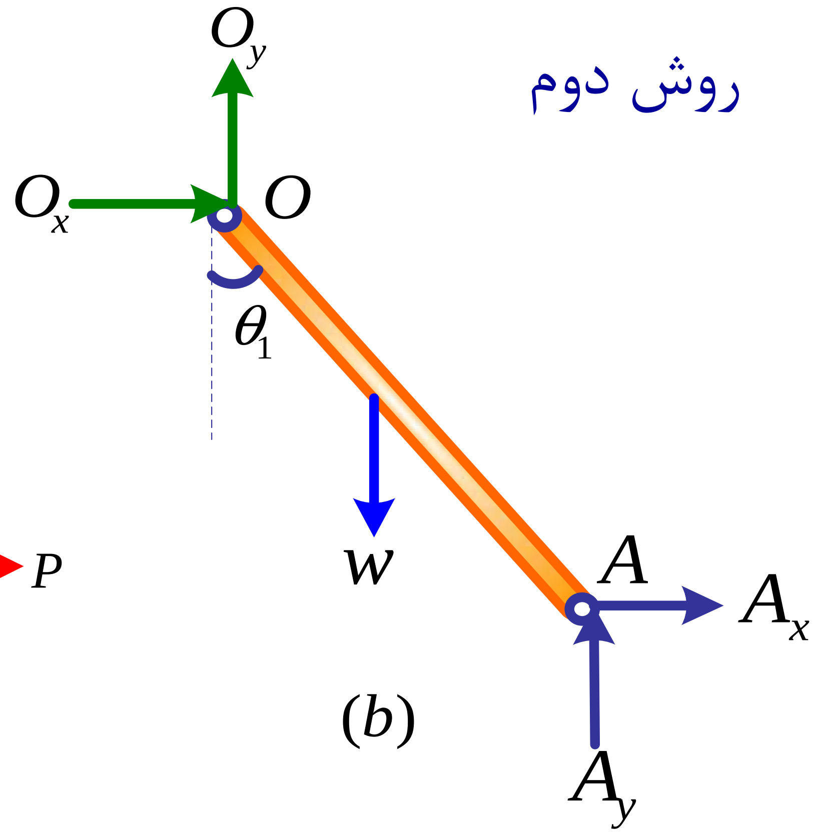
مثال: مکانیزم نشان داده شده در شکل شامل دو میله همگن هر یک به طول l و وزن W می باشد. غلتک B در یک شیار افقی که به فاصله 1.5l زیر پین O قرار دارد حرکت می کند .با استفاده از تحلیل قاب ها نیروی P که دستگاه را برای $\theta_1 = 30^{\circ}$ در تعادل نگهد ارد تعیین کنید. (از اصطکاک صرفنظر کنید)



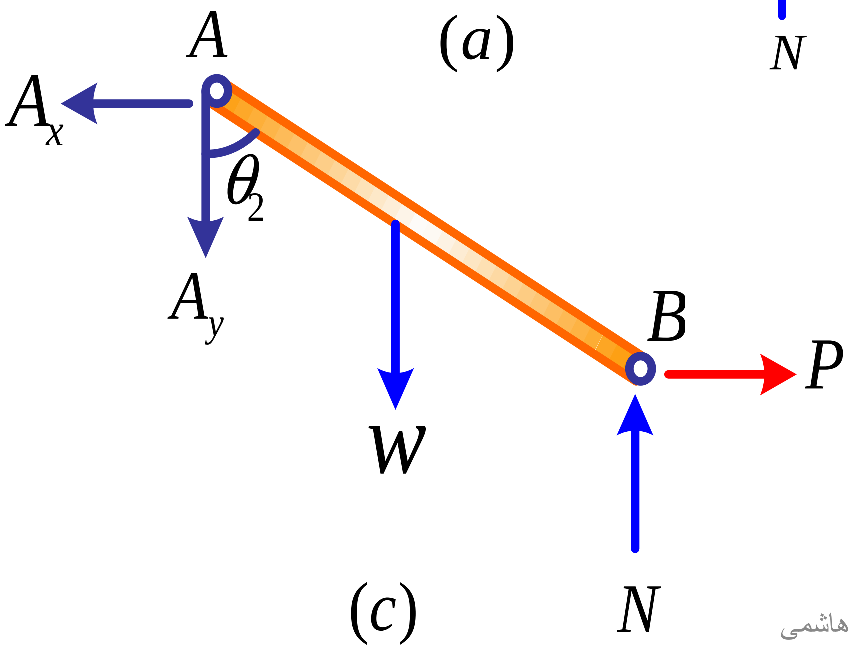
روش دوم


O_y
O_x
O
θ_1
W
A
θ_2
W
B
P
N

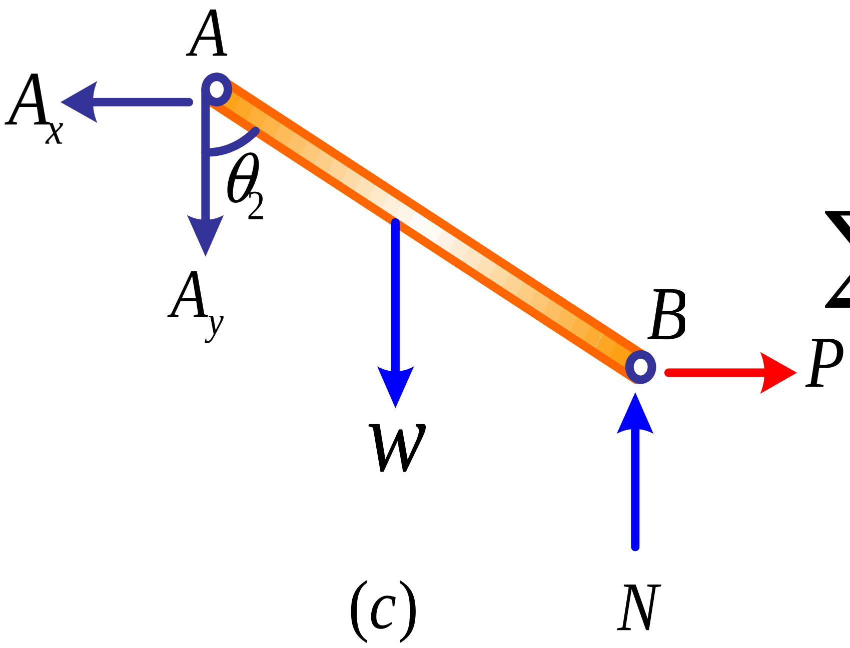
(a)


O_y
O_x
O
θ_1
W
A
A_x
A_y

(b)


A
A_x
θ_2
A_y
W
B
P
N

(c)



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P - A_x = 0 \Rightarrow A_x = P$$

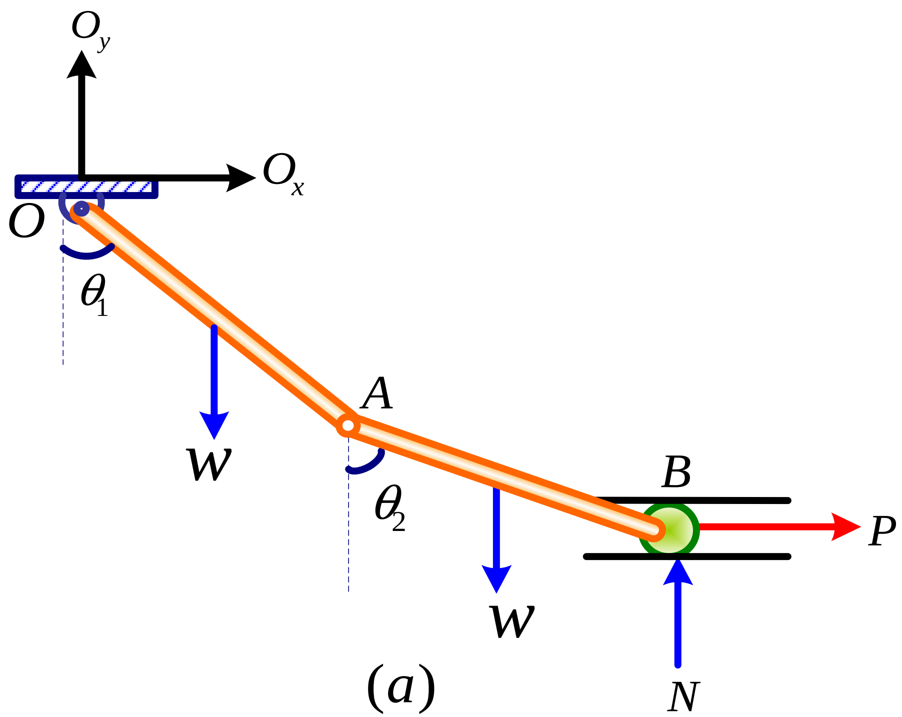
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + w - N = 0$$

$$A_y = N - w$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow Nl\sin\theta_2 + Pl\cos\theta_2 - w\frac{l}{2}\sin\theta_2 = 0$$

$$N = \frac{w\sin\theta_2 - 2P\cos\theta_2}{2\sin\theta_2} = \frac{w}{2} - 2\cot\theta_2$$

$$A_y = N - w = -\left(\frac{w}{2} + P\cot\theta_2\right)$$



(a)

$$N = \frac{w}{2} - 2\cot\theta_2$$

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow \frac{l}{2} w \sin\theta_1 + w\left(l\sin\theta_1 + \frac{l}{2}\sin\theta_2 \right)$$

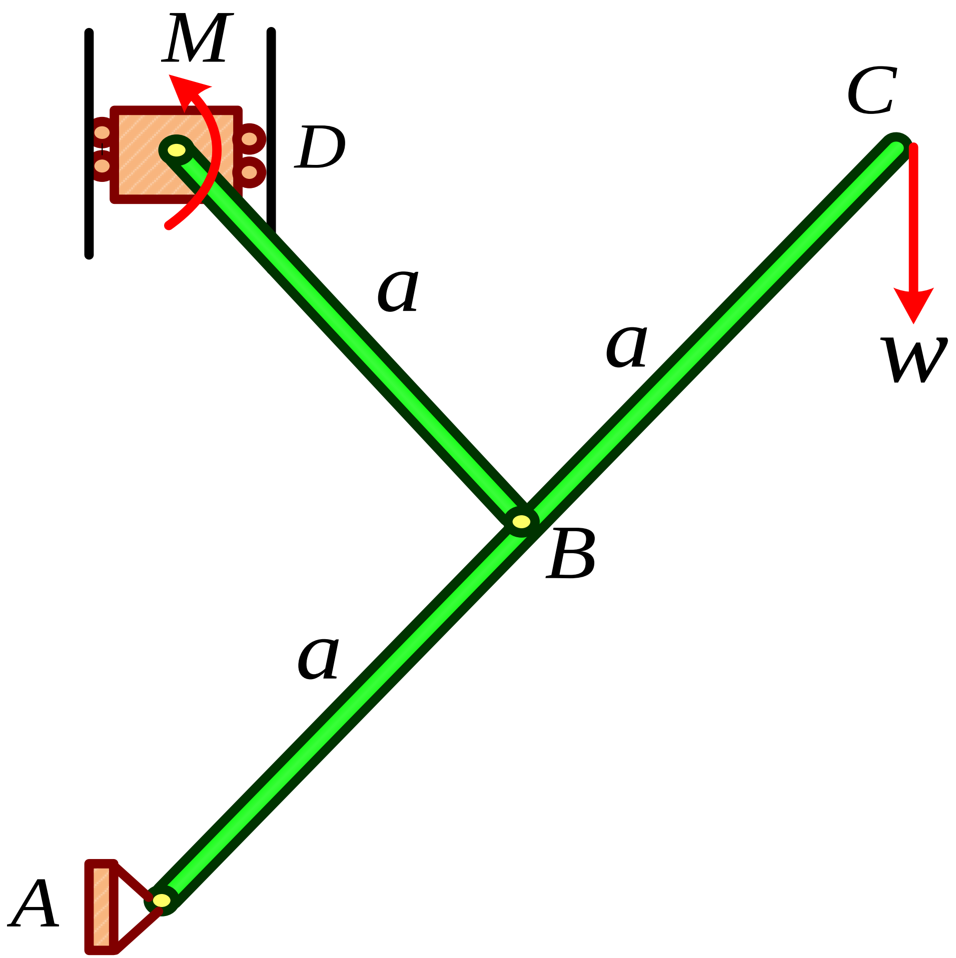
$$-P\left(l\cos\theta_1 + l\cos\theta_2\right) - Nl\left(\sin\theta_1 + \sin\theta_2\right) = 0$$

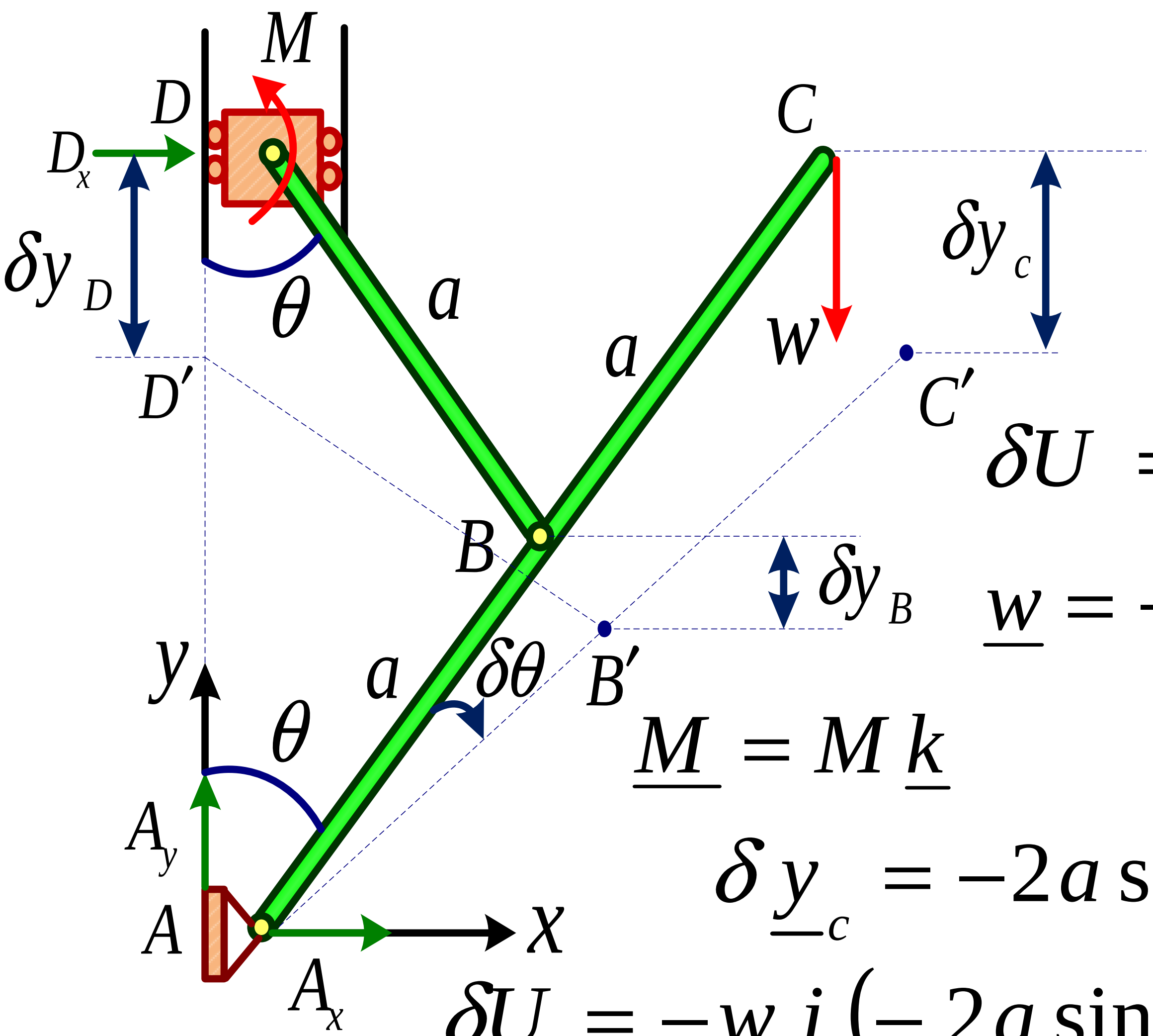
$$P = \frac{w\sin\theta_1}{\cos\theta_1 - \sin\theta_1 \cot\theta_2}$$

$$\theta_1 = 30^\circ \rightarrow \theta_2 = 50.65^\circ \Rightarrow p = 1.097w$$

مثال: برای مکانیزم مقابل گشتاور M را طوری تعیین کنید که سیستم در حالت تعادل باشد. از وزن میله ها صرف نظر کنید.

(مسئله را با استفاده از روش کار مجازی ونیز معمولی حل کنید.)





$$\delta U = \underline{w}.\delta \underline{y}_c + \underline{M}.\delta \underline{\theta}$$

$$\underline{w} = -w\,\underline{j} \qquad \delta\underline{\theta} = \delta\theta \underline{k}$$

$$\underline{M} = M\,\underline{k} \qquad y_c = 2a\cos\theta$$

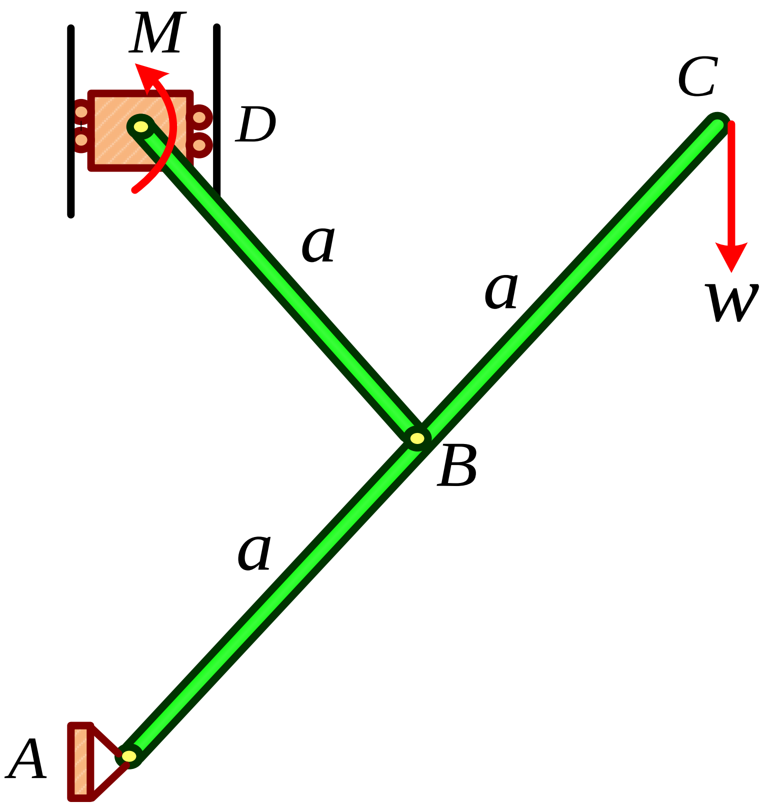
$$\delta \underline{y}_c = -2a\sin\theta\delta\theta\,\underline{j}$$

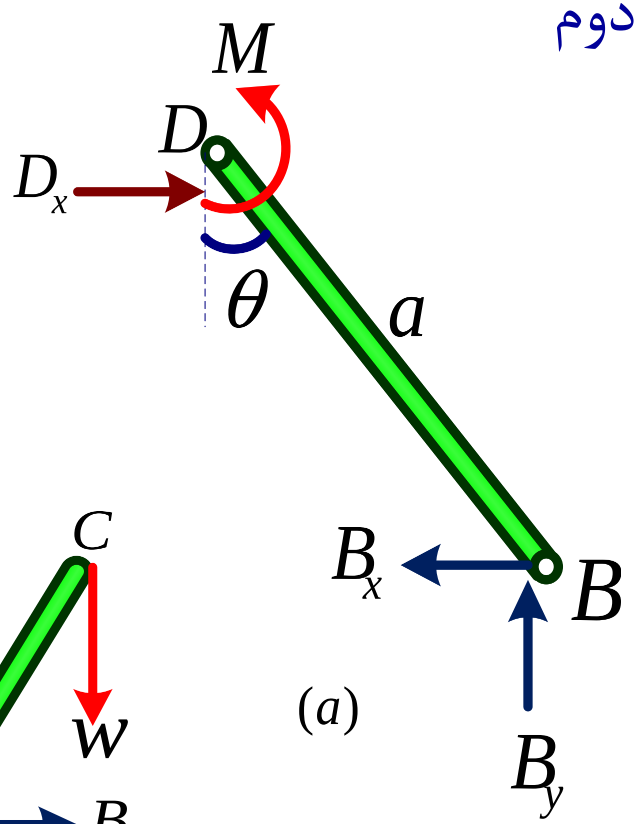
$$\delta U = -w\,\underline{j}.\left(-2a\sin\theta\delta\theta\right)\underline{j} + M\,\underline{k}.\delta\theta\,\underline{k}$$

$$\delta U = 2aw\sin\theta\delta\theta + M\,\delta\theta \rightarrow \delta U = 0$$

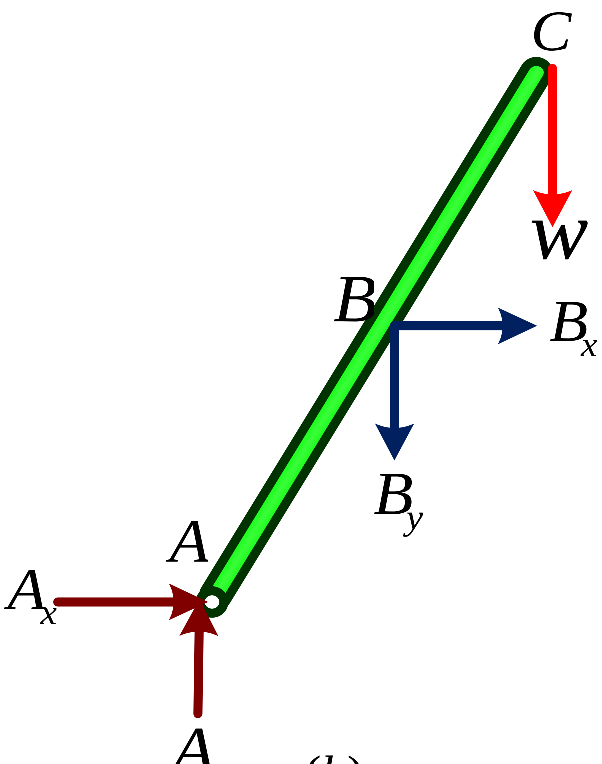
$$\Rightarrow M = -2aw\sin\theta$$

روش دوم

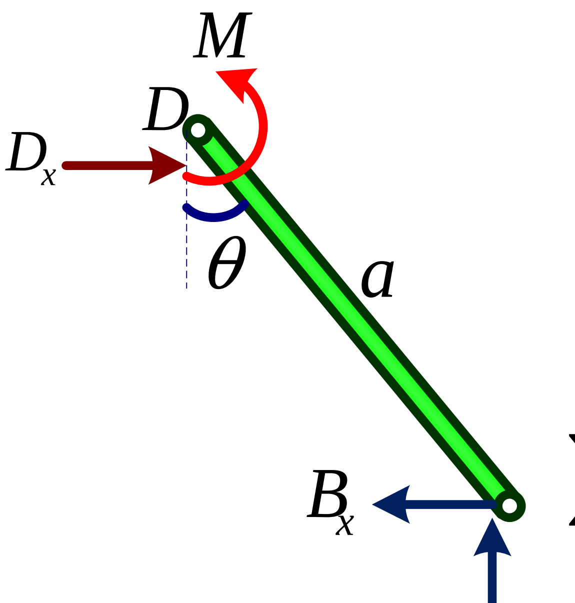




(a)



(b)

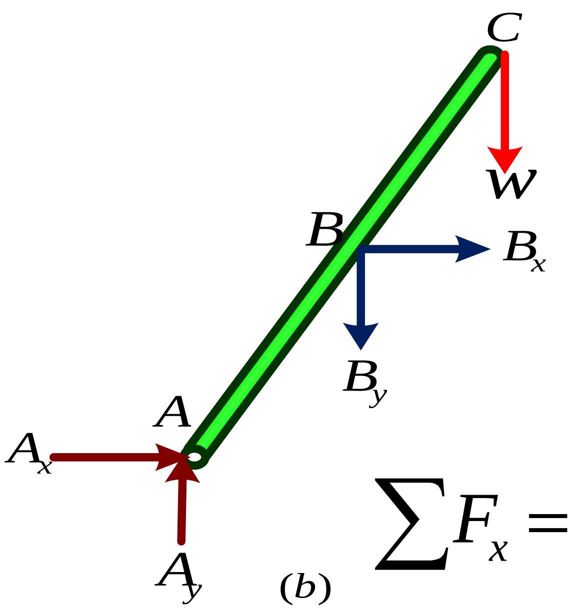


(a)

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y = 0$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow D_x - B_x = 0 \Rightarrow B_x = D_x$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow B_x a\cos\theta - M = 0 \Rightarrow M = B_x a\cos\theta$$



(b)

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow w2a\sin\theta + B_x a\cos\theta = 0$$

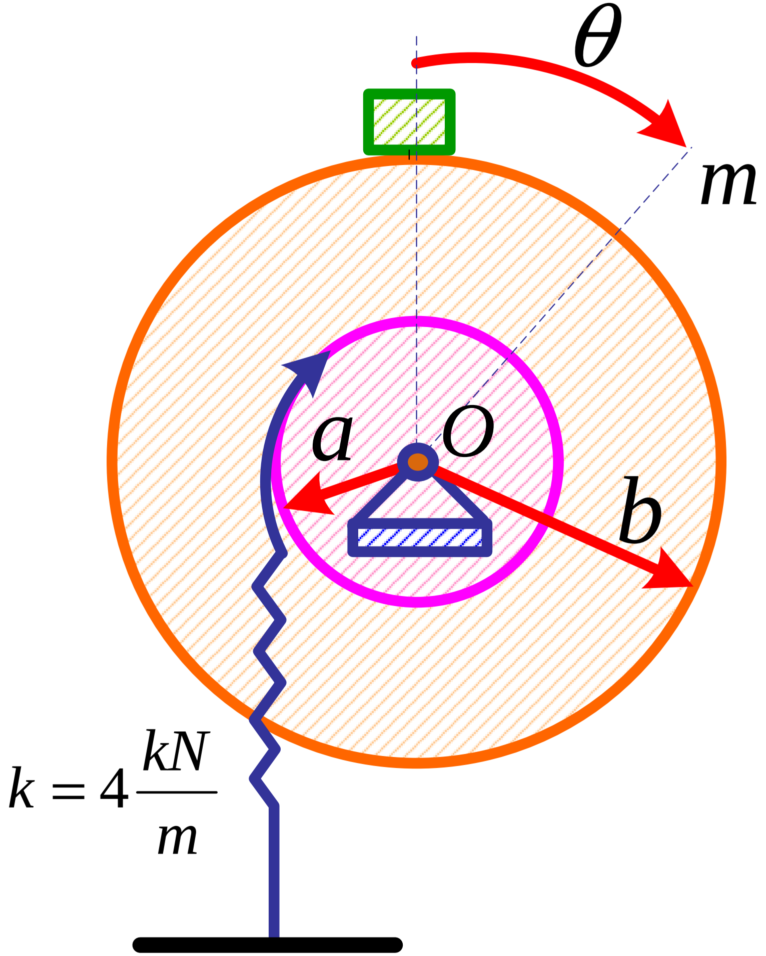
$$B_x = -2w\tan\theta \qquad D_x = -2w\tan\theta$$

$$M = -2aw\sin\theta$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - B_y - w = 0 \Rightarrow A_y = w$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x + B_x = 0 \Rightarrow A_x = -B_x \qquad A_x = 2w\tan\theta$$

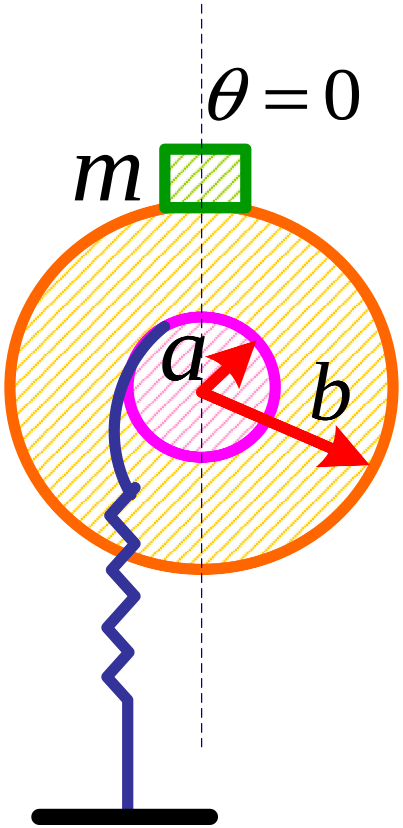
مثال: قطعه ای به جرم 10kg بر روی محیط دیسکی به شعاع 300 mm نصب شده است. به هنگامی که $\theta=0$ است فنر آزاد است. وضعیت یا وضعیت های تعادل آن را تعیین کرده و در هر حالت نشان دهید تعادل چگونه است؟

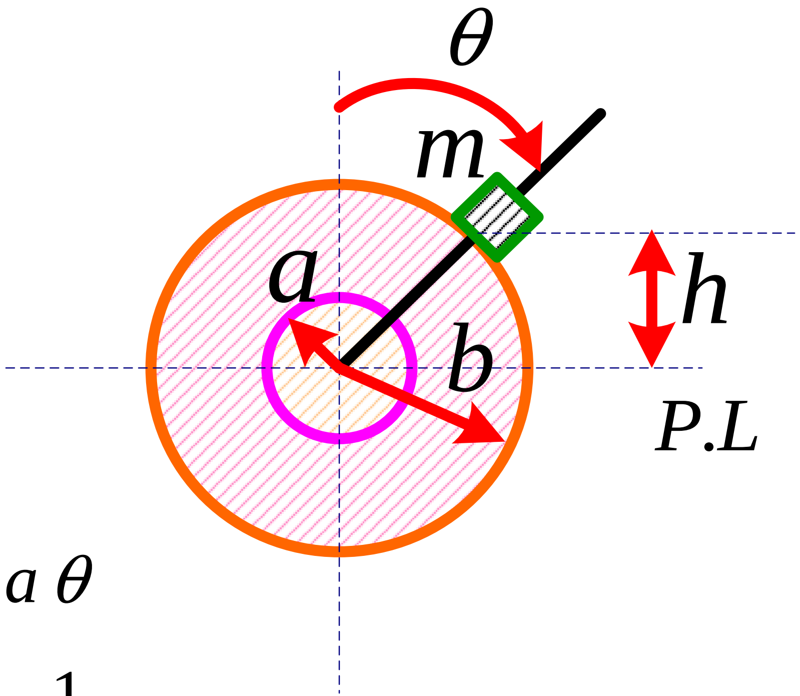


$b=300mm$

$a=80mm$

$m=10kg$





$$S = a\,\theta$$

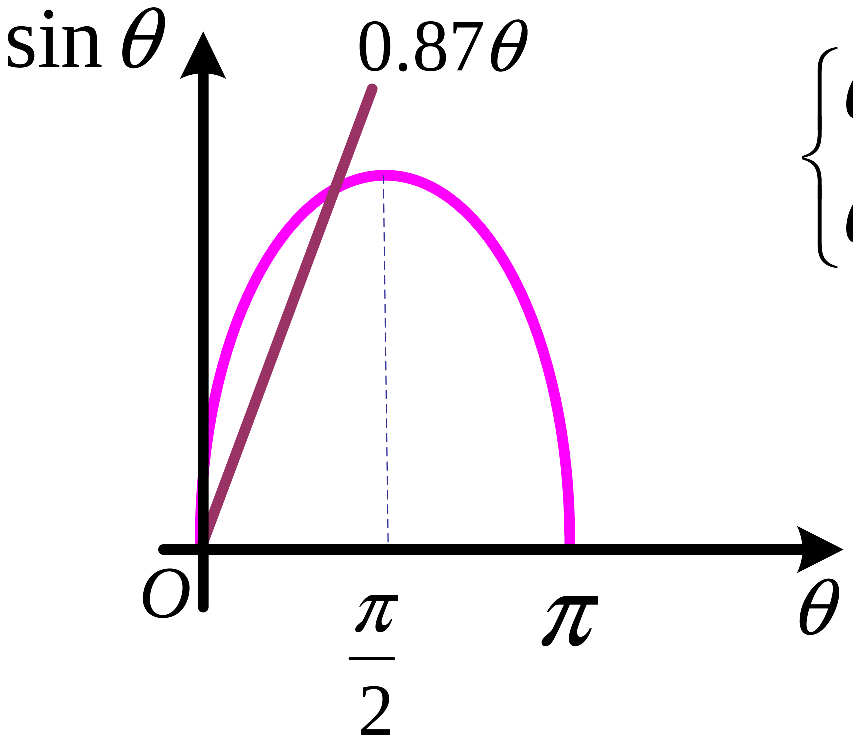
$$V_S = \frac{1}{2}ks^2 = \frac{1}{2}Ka^2\theta^2 \qquad V_g = mgh = mgb\cos\theta$$

$$V = V_S + V_g = \frac{1}{2}Ka^2\theta^2 + mgb\cos\theta \qquad \frac{dV}{d\theta} = ka^2\theta - mgb\sin\theta$$

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \Rightarrow ka^2\theta = mgb\sin\theta \qquad \sin\theta = \frac{ka^2}{mgb}\theta$$

$$\sin\theta = \frac{4000(0.08)^2}{10\times9.81\times0.3}\theta \Rightarrow \qquad \sin\theta = 0.87\theta$$

$$\sin\theta = 0.87\theta$$



$$\begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = 51.7° \end{cases}$$

Check :

$$\sin 51.7^\circ = 0.784 \quad 51.7^\circ = 0.902 rad \quad 0.87(0.902) = 0.784$$

$$\frac{dV}{d\theta} = ka^2\theta - mgb\sin\theta \qquad \frac{d^2V}{d\theta^2} = ka^2 - mgb\cos\theta$$

$$\theta = 0 \rightarrow \frac{d^2V}{d\theta^2} = ka^2 - mgb = -3.8 < 0$$ تعادل ناپایدار است.

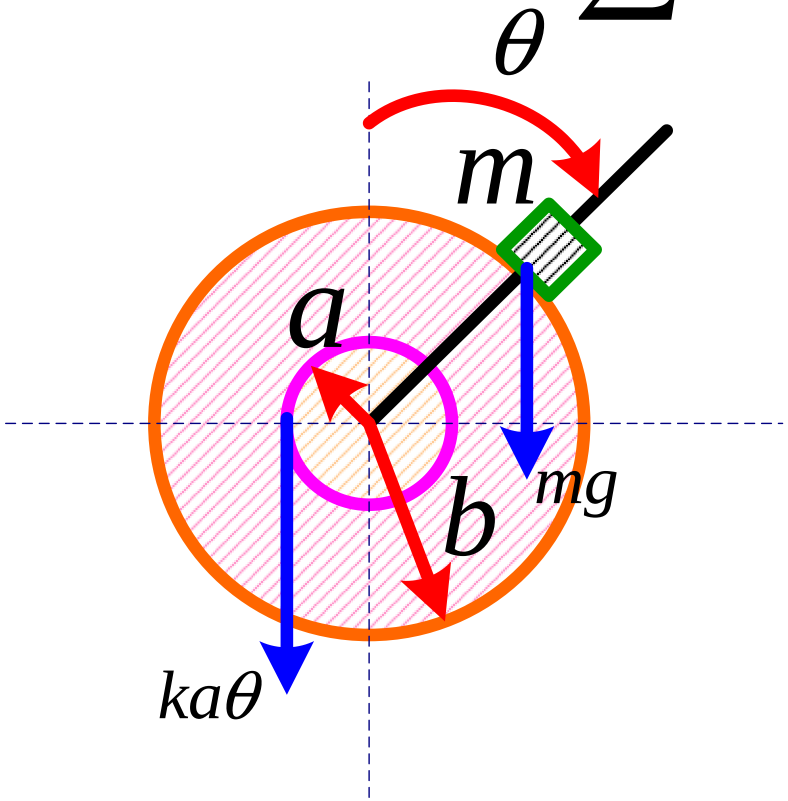
$$\theta = 51.7^\circ \rightarrow \frac{d^2v}{d\theta^2} = 7.36 > 0$$ تعادل پایدار است.

بررسی:

$$\sum M = 0 \Rightarrow mgb\sin\theta - aka\theta = 0$$

$$\sin\theta = \frac{ka^2}{mgb}\theta$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow mgb\sin\theta - aka\theta = 0$$



θ	$mgb\sin\theta$	$ka^2\theta$
0	0	0
10	5.11	4.47
20	10.06	8.93
30	14.71	13.40
40	18.92	17.87
50	22.54	22.34
60	25.48	26.81
70	27.65	31.27

مراجع

1- Engineering Mechanics: Statics, SI Version, 6th Edition
by J. L. Meriam, L. G. Kraige
January 2008, Wiley

2- Engineering Mechanics, Statics, 2nd Edition
by William F. Riley, Leroy D. Sturges
January 1996, Wiley