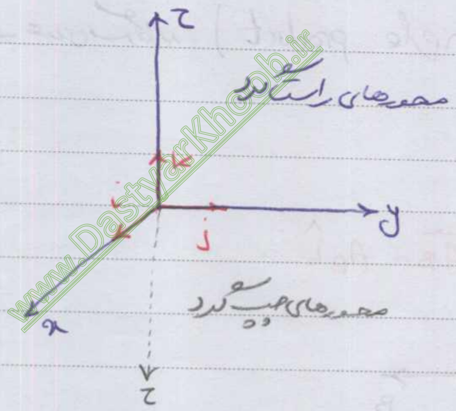
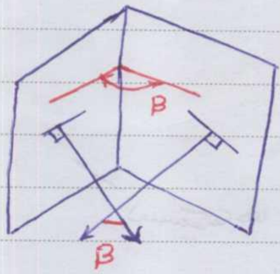
Subject:
Year. Month. Date. ( )


z
محورهای راستگرد
y
j
k
i
x
محورهای چپگرد
z

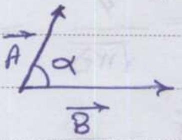
بردار سطح:
- مقدار: مساحت سطح
- امتداد: عمودی سطح
- جهت: به سمت خارج جسمی است که سطح به آن تعلق دارد

زاویه بین دو سطح



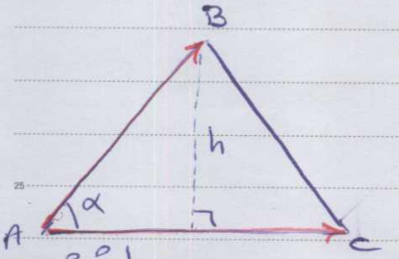
ضرب خارجی دو بردار:

$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}$



$$|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\alpha$$

امتداد: عمودی صفحه بردار ، جهت: طبق قانون دست راست در بالا به سمت داخل صفحه



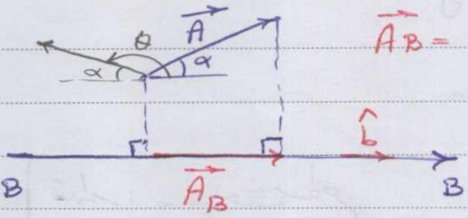
بردار سطح مثلث ABC: $\vec{a}_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\vec{AC}\times\vec{AB}$

$|\vec{a}| = \frac{1}{2}|\vec{AC}|\underbrace{|\vec{AB}|\sin\alpha}_{h}$ = همان مساحت مثلث

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ضرب عددی سه گانه (Scalar Triple product)

$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$



$\vec{A_B} = A_B\hat{b}$

$\vec{A} = A_x i + A_y j + A_z k$

$A_B = |\vec{A}|\cos\alpha$

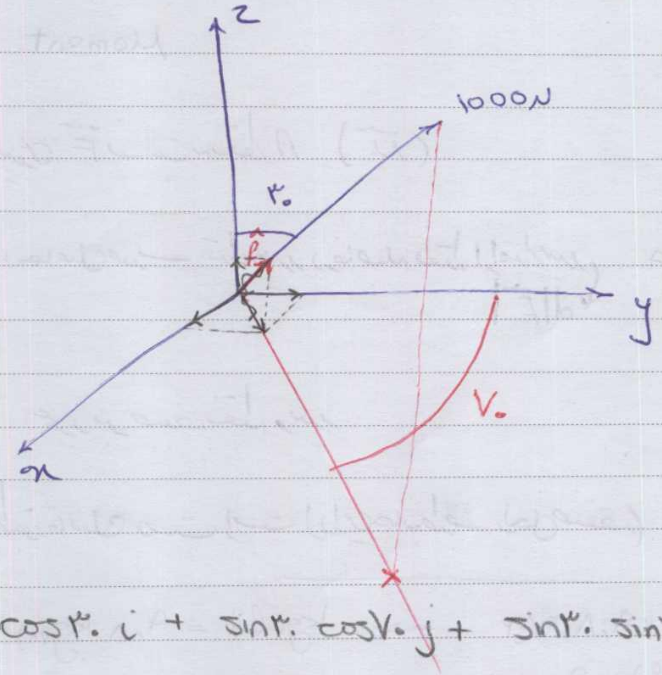
$\vec{A} = -۵i + ۶j + ۸k$ $\quad |\vec{A}| = \sqrt{۲۵+۳۶+۶۴}$

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{-۵}{\sqrt{۱۲۵}} = l\\ \cos\beta &= \frac{۶}{\sqrt{۱۲۵}} = m\\ \cos\gamma &= \frac{۸}{\sqrt{۱۲۵}} = n\end{aligned}\right\}$$ کسینوس های هادی

نقطه اثر $\vec{A}$ مشخص نیست

$l^۲ + m^۲ + n^۲ = ۱$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



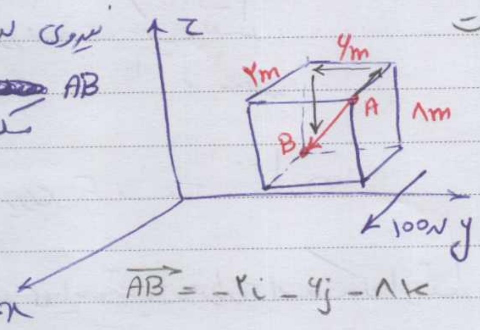
$$\hat{f} = \cos ۳۰\, i + \sin ۳۰ \cos ۷۰\, j + \sin ۳۰ \sin ۷۰\, k$$

$$\cos^۲ ۳۰ + \underbrace{\sin^۲ ۳۰ \cos^۲ ۷۰ + \sin^۲ ۳۰ \sin^۲ ۷۰}_{\sin^۲ ۳۰ (\underbrace{\cos^۲ ۷۰ + \sin^۲ ۷۰}_{۱})} = \cos^۲ ۳۰ + \sin^۲ ۳۰ = ۱$$

$\hat{f}$ یکه است.

$$\vec{F} = 1000 \times \hat{f}$$

نیروی ۱۰۰N به موازات قطر AB مکعب مستطیل می باشد



برای بدست آوردن $\vec{AB}$ از A به سمت B حرکت می کنیم

راه دیگر بدست آوردن $\vec{AB}$ انتقال مکعب مستطیل به مبدا و یافتن B−A یا −A است
(۰،۰،۰)

$$\vec{AB} = -۲i - ۴j - ۸k$$

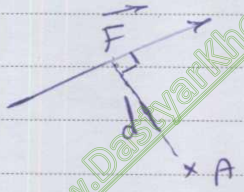
PAPCO

$$\hat{AB} = \frac{-۲i - ۴j - ۸k}{\sqrt{۴ + ۱۶ + ۶۴}}$$

$$\vec{F} = ۱۰۰\, \hat{f} \quad (\hat{AB} = \hat{f})$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

گشتاور Moment



گشتاور نیروی $\vec{F}$ نسبت به نقطه A ($\vec{M}$)

مقدار $\vec{M}$: حاصل ضرب مقدار نیرو در فاصله نقطه از امتداد نیرو ← $d|\vec{F}|$

امتداد $\vec{M}$: عمود بر صفحه نقطه و نیرو

جهت: طبق قانون دست راست است (در این جا به طرف داخل صفحه)

$$kg(f) = kg(m) \times ۹٫۸\ m/s^{۲} \Longrightarrow kg(f) = ۹٫۸\ kg(m)\ m/s^{۲}$$

$$\Longrightarrow kg(f) = ۹٫۸\ N$$

$$۹٫۸\ m/s^{۲} = ۳۲٫۲\ foot/sec^{۲}$$

$$\left.\begin{aligned} lb(f) &= lb(m) \times ۳۲٫۲\ foot/sec^{۲} \\ lb(f) &= slug \times foot/sec^{۲} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow 1\ slug = ۳۲٫۲\ lb(m)$$

گشتاور یک نیرو نسبت به یک نقطه:
" " " " محور:

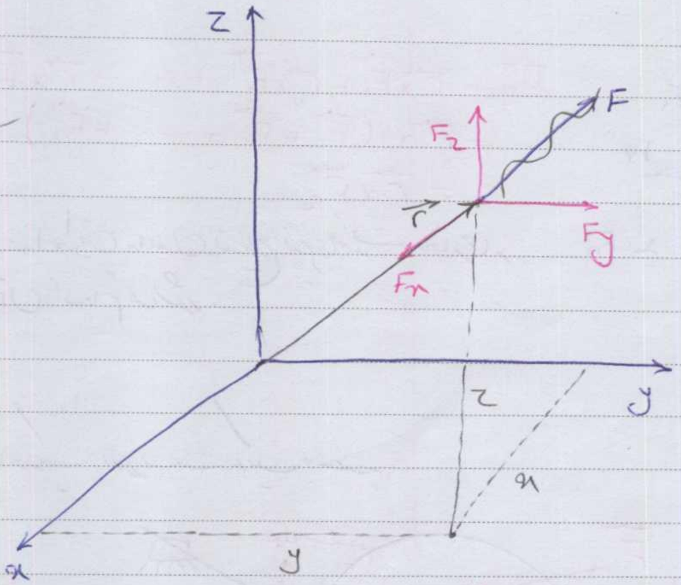
گشتاور نیروی F نسبت به نقطه O

$\vec{r}$: بردار مکانی یا موقعیت برداری است که از نقطه مورد نظر به یک نقطه از امتداد نیرو

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

وصل می‌شود.



$$\vec{r} = xi + yj + zk$$

$$\vec{F} = F_x i + F_y j + F_z k$$

$$\vec{M_O} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

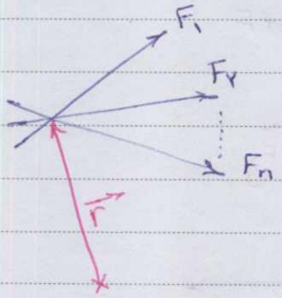
$$(yF_z - zF_y)i + (zF_x - xF_z)j + (xF_y - yF_x)k$$

قضیه وارینیون : (varignon's theory)

گشتاور تعدادی نیروی متقارب نسبت به یک نقطه برابر است با گشتاور برآیند آن ها در نقطه تقارب نسبت به آن نقطه، عکس این قضیه نیز صادق است.

PAPCO

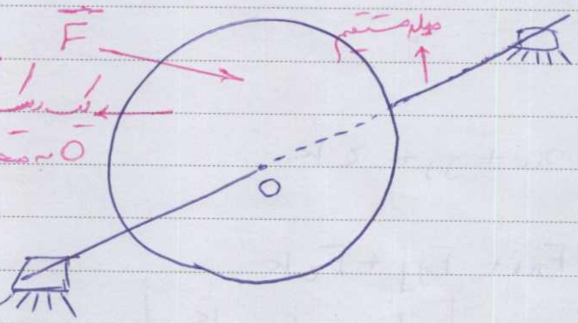
Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$\vec{M}_O = \vec{r}\times\vec{F}_1 + \vec{r}\times\vec{F}_2 + \cdots + \vec{r}\times\vec{F}_n$$
$$= \vec{r}\times(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n)$$
$$= \vec{r}\times\vec{F}_R$$

اثبات از طریق قانون توزیع پذیری ضرب خارجی و عکس آن انجام می‌شود.

گشتاور یک نیرو نسبت به یک محور



یک دیسک که عمود بر محور بوده و در O به محور متصل است.

یاتاقان (تکیه‌گاه‌هایی که اجازه چرخش می‌دهند)

مفهوم گشتاور یک نیرو نسبت به یک محور خاصیت گردشی است که نیرو حول محور به وجود می‌آورد

سؤال: در چه صورت (صورت هایی) مقدار نیرو هر چقدر هم که زیاد باشد، نمی‌تواند محور را بچرخاند؟ در چنین صورت (صورت هایی) می‌گوییم نیرو نسبت به محور گشتاور ندارد

یا گشتاور آن نسبت به محور صفر است

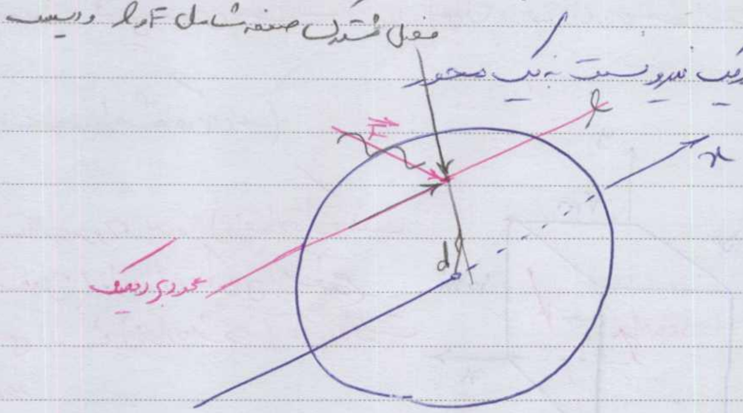
۱- نیرو با محور موازی باشد   ۲- نیرو عمود بر محور بوده و محور را قطع کند

۳- نیرو یک نقطه با محور تلاقی کند

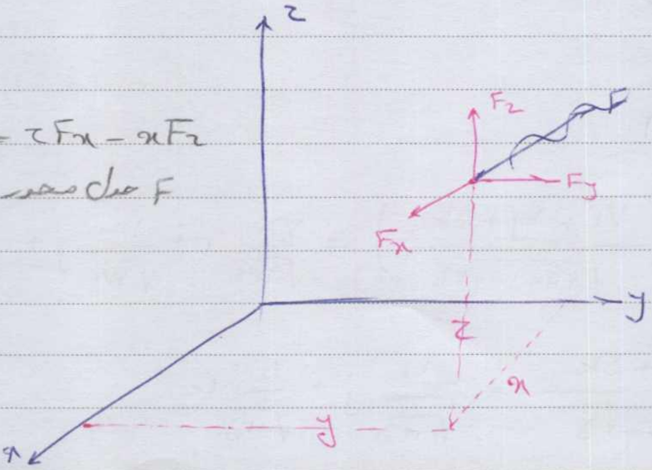
نیرو با محور هم صفحه باشد ⟵ ۱+۲+۳

لذا نیرو فقط وقتی که با محور متنافر باشد می‌تواند باعث چرخش (گشتاور) محور شود.

محاسبه گشتاور یک نیرو نسبت به یک محور


فصل مشترک صفحه شامل F و d و دیسک
F
x
d
عمود بر دیسک

$M_y = zF_x - xF_z$ گشتاور نیرو
F حول محور y ها

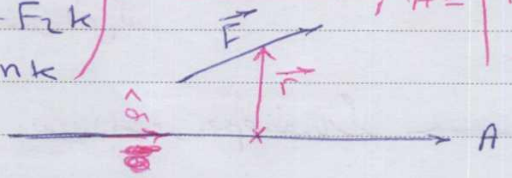

z
F
Fz
Fy
Fx
y
z
x
y
x

Subject:
Year. Month. Date. ( )

گشتاور یک نیرو نسبت به یک محور برابر است با مؤلفه‌ای از گشتاور نیرو نسبت به نقطه‌ای دلخواهی از محور می‌باشد که در امتداد محور قرار می‌گیرد

$$\vec{r} = xi + yj + zk$$
$$\vec{F} = F_x i + F_y j + F_z k$$
$$\hat{a} = li + mj + nk$$

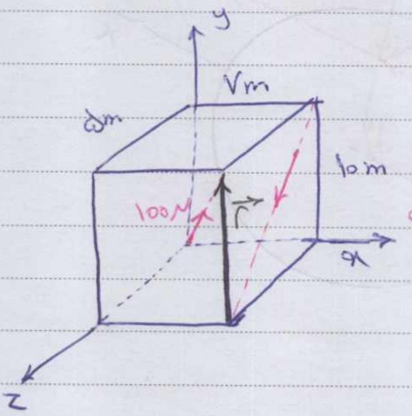
$$\longrightarrow M_A = \begin{vmatrix} x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \\ l & m & n \end{vmatrix}$$



$$M_A = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \hat{a}$$

گشتاور یک نیرو نسبت به یک محور کمیتی عددی محسوب می‌شود (چون در هر حال روی محور است و علامت آن جهت آن روی محور را مشخص می‌کند)

مثال/



گشتاور نیروی 100N را در امتداد قطر مکعب مستطیل) را حول قطری از سطح جانبی (که نشان داده شده) آن به دست آورید

$$\vec{r} = ۱۰j \ (m)$$

$$\vec{F} = 100 \cdot \left(\frac{۷i + ۱۰j + ۵k}{\sqrt{۴۹+۱۰۰+۲۵}}\right) = \frac{۷۰۰}{\sqrt{۱۷۴}} i + \frac{۱۰۰۰}{\sqrt{۱۷۴}} j + \frac{۵۰۰}{\sqrt{۱۷۴}} k \ (N)$$

$$\hat{a} = \frac{-۱۰j + ۵k}{\sqrt{۱۰۰+۲۵}} = -\frac{۱۰}{\sqrt{۱۲۵}} j + \frac{۵}{\sqrt{۱۲۵}} k$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 0 \\ \frac{700}{\sqrt{174}} & \frac{1000}{\sqrt{174}} & \frac{50}{\sqrt{174}} \\ 0 & \frac{-10}{\sqrt{125}} & \frac{5}{\sqrt{125}} \end{vmatrix} = 10 \times \left(\frac{-700 \times 5}{\sqrt{125 \times 174}} \right)$$

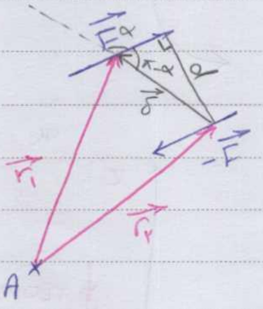
سیستم های نیرویی

اثر نیرو بر جسم ← ایجاد کشش، فشار و چرخش
- حرکت جسم ← دینامیک
- سکون جسم ← استاتیک

سیستم نیروی یک جسم: به کلیه نیروها (و زوج نیروها) ی وارد بر یک جسم، سیستم نیروی وارد بر آن جسم گویند

سیستم های نیروی معادل: سیستم هایی هستند که اثر کششی، فشاری و چرخشی یکسانی در جسم بوجود بیاورند.

زوج نیرو یا گشتاور (couple)



$$\vec{C} = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F})$$

$$\Rightarrow \vec{C} = \vec{r}_1 \times \vec{F} - \vec{r}_2 \times \vec{F}$$

$$\Rightarrow \vec{C} = \underbrace{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}_{\vec{\delta}} \times \vec{F}$$

$|\vec{C}| = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\alpha$

$\sin\alpha = \sin(\pi-\alpha)$

$|\vec{r}|\sin(\pi-\alpha) = d$

$|\vec{C}| = |\vec{F}|d$

امتداد $\vec{C}$ = عمود بر صفحه $\vec{r}$ و $\vec{F}$ (همان صفحه $\vec{F}$ و $-\vec{F}$)

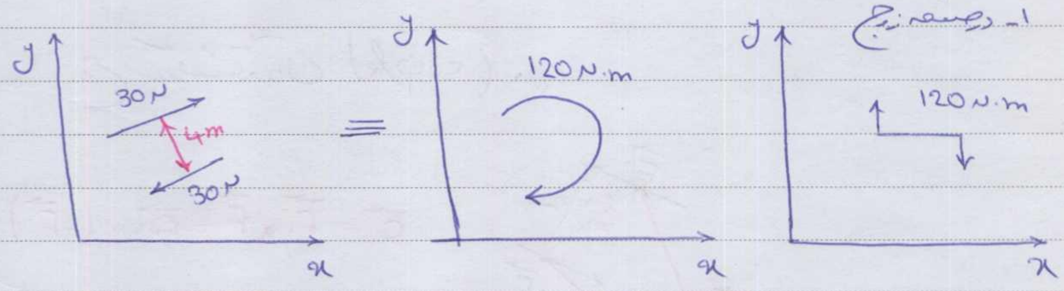
جهت $\vec{C}$ = طبق قانون دست راست (بهترین نقطه‌ی گشتاور زوج نیرو ← روی یکی از دو نیرو)

نتیجه: گشتاور زوج نیرو به نقطه گشتاورگیری بستگی ندارد ولذا بردار آزاد است. چرا؟

زوج نیرو چیزی جز گشتاور آن نیست و هر تغییری در اندازه نیروها و جهت آن‌ها و فاصله آن‌ها مادامی که اثر گشتاور تغییر نکند، حاصل با همان زوج اولیه یکسان است.

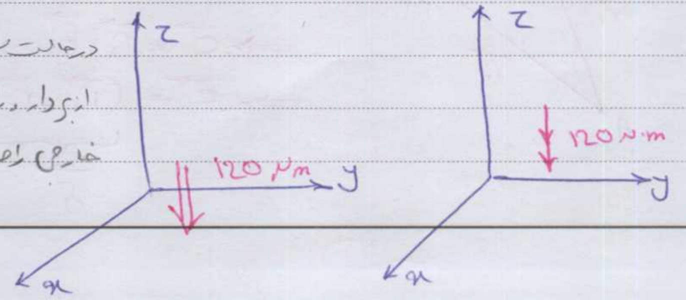
نمایش زوج نیرو یا گشتاور زوج نیرو یا گشتاور خالص

۱- در صفحه زوج



۲- بردار زوج

در حالت سه بعدی استفاده از بردار و رابطه ریاضی ضرب خارجی راحت‌تر است.



معادل‌اند تمام زوج‌های [illegible] می‌باشد $\vec{C} = 120\vec{k}$ (N.m)

PAPCO

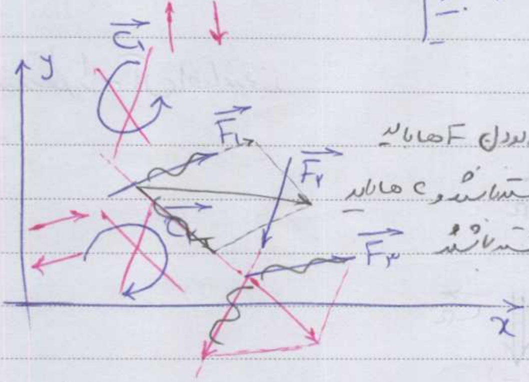
برای بررسی اثرات خارجی در اجسام صلب و در حال تعادل (بررسی استاتیکی) می‌توانیم تبدیلات زیر را در سیستم نیروها بوجود آوریم:

۱- می‌توانیم تعدادی نیروی متقارب را با جمع آن‌ها (برآیند نیروها) جایگزین کنیم و یا برعکس می‌توانیم یک نیرو را با تمام مؤلفه‌هایش جایگزین کنیم.

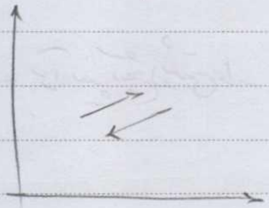
۲- می‌توانیم هر نیرو را به عنوان یک بردار لغزنده در امتداد خودش منتقل کنیم

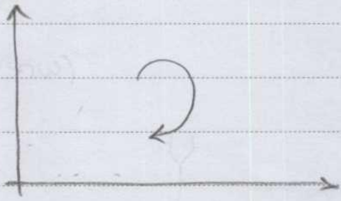
۳- می‌توانیم زوج نیرو را بردار آزاد در نظر بگیریم

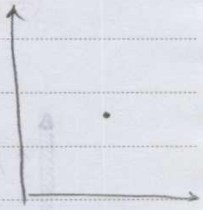
سیستم هم صفحه:

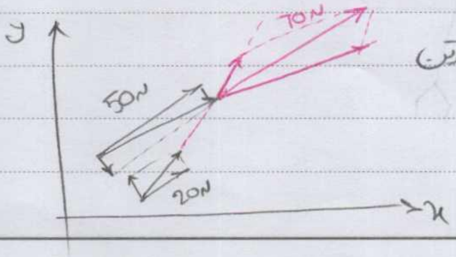


برای هم صفحه بودن F ها باید فقط i و j داشته باشند و C ها باید فقط k داشته باشند









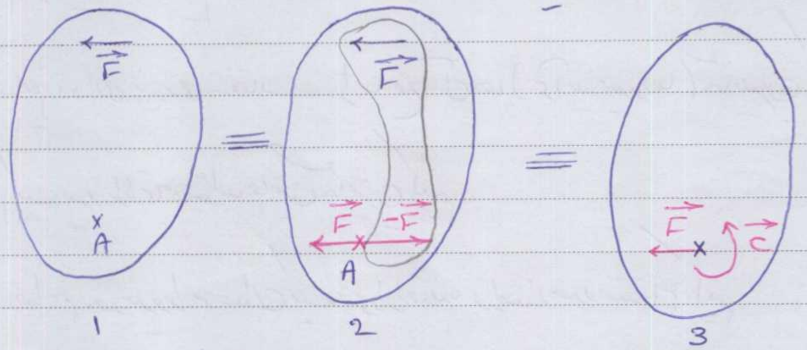
برآیند به نیروی 50 نیوتن ترکیب کرده است

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

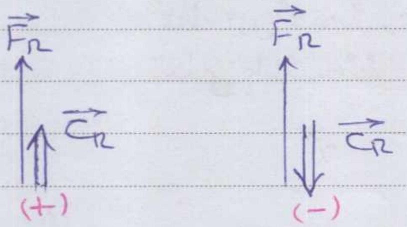
سیستم های نیروی معادل

انتقال نیرو به موازات امتداد اولیه

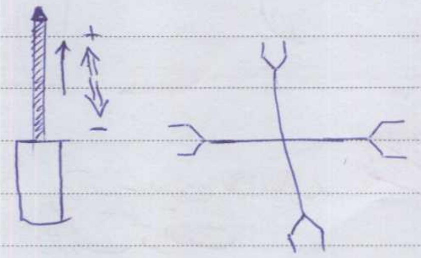

$\vec{F}$
A
$\vec{F}$
$\vec{F}$
$-\vec{F}$
A
$\vec{F}$
$\vec{C}$
1
2
3

هر نیرو را می‌توان به موازات خود به هر نقطه‌ای منتقل کرد به شرطی که گشتاور آن نسبت

به نقطه جدید را به آن اضافه کنیم


$\vec{F}_R$
$\vec{C}_R$
(+)
$\vec{F}_R$
$\vec{C}_R$
(−)

برآیند نهائی - برآیند پیچ گوشتی وار (wrench)

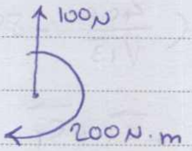


Subject:
Year. Month. Date. ( )

ساده‌ترین برآیند

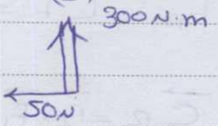
سه بعدی	یک نیرو و یک گشتاور موازی آن (wrench)
دو بعدی (صفحه)	یک نیرو
موازی	یک نیرو
متقارب	یک نیرو

(1)



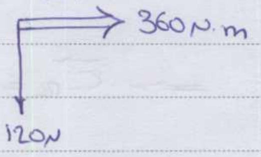
P
2m به سمت چپ منتقل شود

(2)



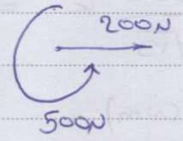
P
6m به داخل صفحه منتقل شود

(3)



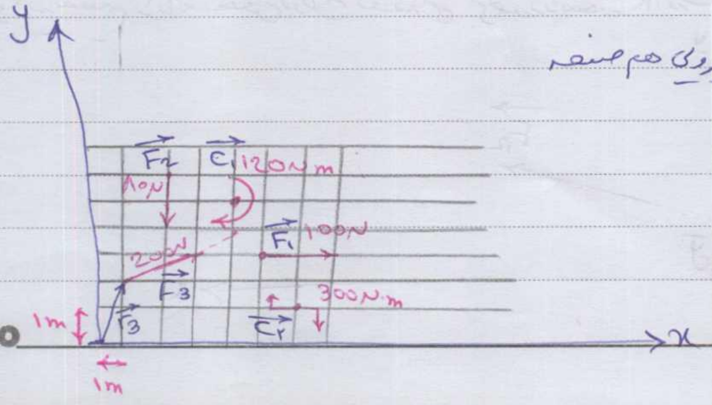
3m به سمت خارج (بطرف خودمان)

(4)



P
2.5m به پایین صفحه منتقل شود

مثال برای برآیند سیستم نیروی هم صفحه


y
x
$\vec{F_2}$
90N
$\vec{C_1}$ 120N.m
$\vec{F_1}$ 100N
200N
$\vec{F_3}$
300N.m
$\vec{C_2}$
1m
1m

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۱- برآیند سیستم نیروی نشان داده شده در شکل را نسبت به نقطه O بدست آورید

$\vec{F_1} = 100i\,(N)$

$\vec{F_2} = -80j\,(N)$

$$\vec{F_3} = 200 \times \frac{3}{\sqrt{13}}\,i + \frac{200 \times 2}{\sqrt{13}}\,j$$

$\vec{C_1} = -۱۲۰\,k\,(Nm)$

$\vec{C_۲} = -300k\,(N.m)$

$$\vec{F_R} = \sum \vec{F} = \left(100 + \frac{600}{\sqrt{۱۳}}\right)i + \left(\frac{400}{\sqrt{13}} - 80\right)j$$

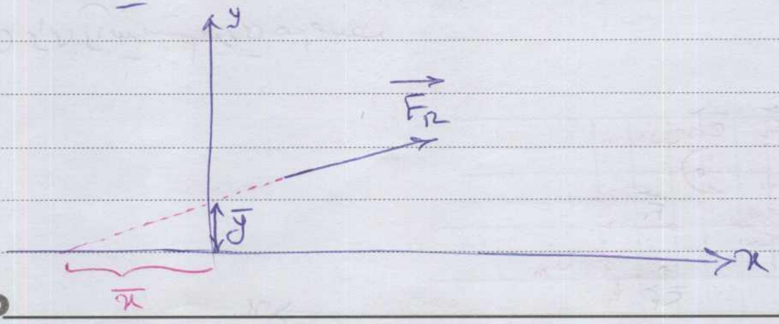
$$\vec{C_R} = \vec{r_1} \times \vec{F_1} + \vec{r_۲} \times \vec{F_۲} + \vec{r_۳} \times \vec{F_۳} + \vec{C_1} + \vec{C_۲}$$

$$\vec{C_R} = -300k - 160k + (i + 2j) \times \left(\frac{600}{\sqrt{13}}\,i + \frac{400}{\sqrt{13}}\,j\right) - 120k - 300k$$

$$= -880k + \frac{400}{\sqrt{۱۳}}\,k - \frac{1200}{\sqrt{13}}\,k = \left(-880 - \frac{800}{\sqrt{13}}\right)k$$

$$\Longrightarrow \vec{C_R} = \left(-880 - \frac{800}{\sqrt{13}}\right)k\,(Nm)$$

۲- برآیند سیستم را با مشخص کردن نقطه ی برخورد با محور x بدست آورید.



PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای آن که $\vec{F_R}$ بتواند کل سیستم نیروی باشد بایستی گشتاوری که حول هر نقطه ایجاد می کند برابر با گشتاور کل سیستم نیروی نسبت به همان نقطه باشد . در این مثال نقطه O را انتخاب می کنیم

$$\vec{x_i} \times \vec{F_R} = \vec{C_{R_O}} \Longrightarrow x\left(\frac{400}{\sqrt{13}} - 80\right)k = \left(-880 - \frac{800}{\sqrt{13}}\right)k$$

$$\Longrightarrow x = -\frac{880+\frac{800}{\sqrt{13}}}{\frac{400}{\sqrt{13}}-80}$$ فاصله محل برخورد با محور x

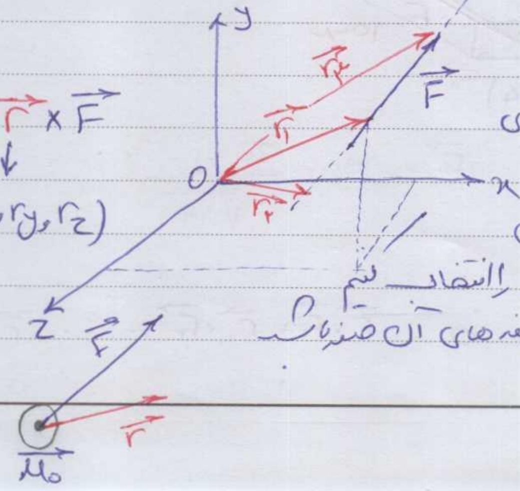
۳- تعیین محل برخورد با محور y ؟

$$yj \times \vec{F_R} = \vec{C_{R_O}} \qquad y\left(100+\frac{600}{\sqrt{13}}\right)k = \vec{C_{R_O}}$$

$$\longrightarrow y = \frac{880+\frac{800}{\sqrt{13}}}{100+\frac{600}{\sqrt{13}}}$$

دستگاه سه بعدی را باید طوری نام گذاری کنیم که دستگاه راستگرد باشد ($\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$)

$\vec{M_O} = \vec{r} \times \vec{F}$
$\downarrow$
(r_x و r_y و r_z)



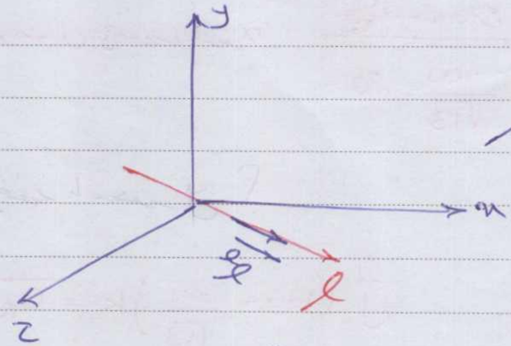
$\vec{r}$ می تواند هر کدام از $\vec{r_1}$ ، $\vec{r_2}$ یا $\vec{r_3}$ باشد (هر برداری که ابتدای آن روی O و انتهای آن روی امتداد $\vec{F}$ باشد) پس بهتر است بهترین بردار را انتخاب کنیم مثلاً برداری که یکی از مؤلفه های آن صفر باشد

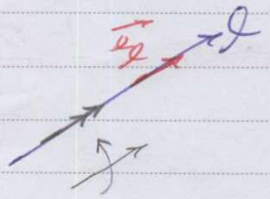
Subject:
Year. Month. Date. ( )

اگر l محوری دلخواه باشد که از نقطه O بگذرد آنگاه گشتاور حول محور l به صورت زیر بدست می آید.

$$|M_l| = \vec{M_o} \cdot \vec{e_l}$$

$$\vec{M_l} = (\vec{M_o} \cdot \vec{e_l})\,\vec{e_l}$$

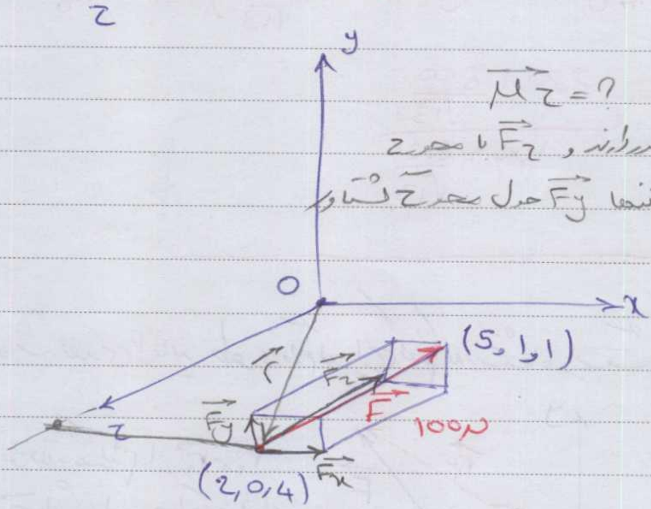




مثال)

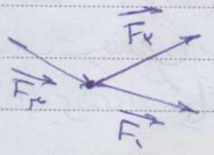
$\vec{M_z} = ?$

$\vec{F_x}$ ، محور z برخورد دارند و $\vec{F_z}$ با محور z موازی است ⟸ تنها $\vec{F_y}$ حول محور z گشتاور دارد


y
O
x
z
(5, 1, 1)
$\vec{r}$
$\vec{F_z}$
$\vec{F}$
100N
$\vec{F_y}$
$\vec{F_x}$
(2, 0, 4)

$$\Longrightarrow \vec{M_z} = (F_y \times ۲)\,\hat{k}$$

$\vec{r} = (۲, ۰, ۴)$ $\qquad$ $\vec{F} = 100 \times \dfrac{3i + j - 3k}{\sqrt{19}}$


$\vec{F_2}$
$\vec{F_3}$
$\vec{F_1}$

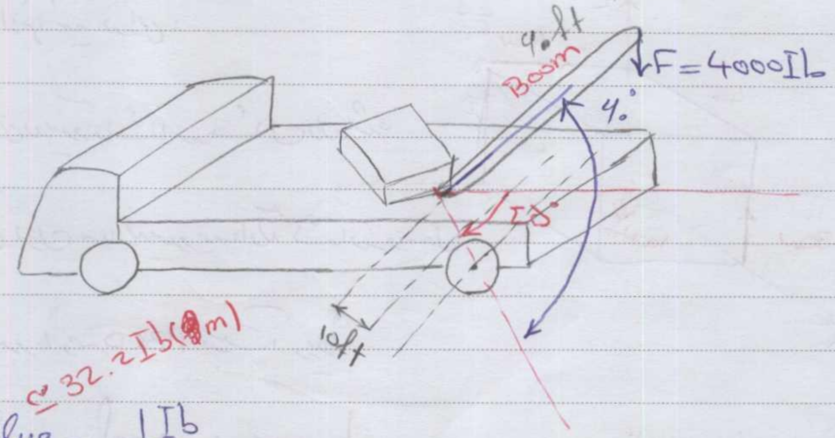
O $\quad \vec{r} \times \vec{F_1} + \vec{r} \times \vec{F_2} + \cdots = \vec{r} \times (\vec{F_1} + \vec{F_2} + \dots)$

PAPCO

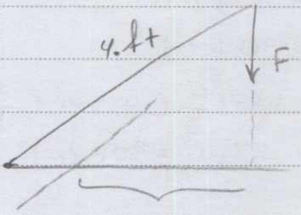
Subject:
Year. Month. Date. ( )

محمدرضا فاضلی ۸۱۱۰۸۷۸ ~~تو~~ در رانده شود

مثال)


۹۰ ft
Boom
F=4000 lb
۶۰°
۴ ft
10 ft
≃ 32.2 lb(m)

$$1\,\text{slug} = \frac{1\,\text{lb}}{1\,\text{ft}/\text{s}^۲}$$



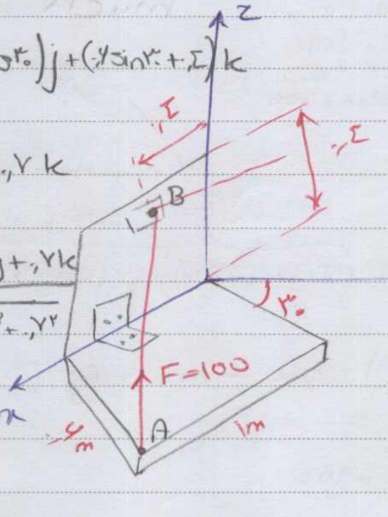
$$1\,\text{lb(m)} = \frac{1\,\text{lb}}{32.2\,\text{ft}/\text{s}^۲}$$

مثال)

$$\vec{AB} = -.۱۶i - (۰٫۶\cos ۳۰)j + (۰٫۶\sin ۳۰ + ۰٫۴)k$$

$$\Longrightarrow \vec{AB} = -۰٫۶i - ۰٫۵۲j + ۰٫۷k$$

$$\Longrightarrow \vec{e}_{AB} = \frac{-۰٫۶i - ۰٫۵۲j + ۰٫۷k}{\sqrt{۰٫۶^۲ + ۰٫۵۲^۲ + ۰٫۷^۲}}$$


z
۰٫۴
۰٫۴
B
۱
۳۰
j
F=100
x
۰٫۶ m
A
1m

$$\vec{F} = \vec{e}_{AB} \cdot F$$

$$\vec{r} = \vec{OB} = +۰٫۴i + ۰٫۴j$$

$$M_O = \vec{r} \times \vec{F} = F(\vec{r} \times \vec{e}_{AB}) = 100(۲٫۶۴i - ۲٫۶۴j + ۵k)$$

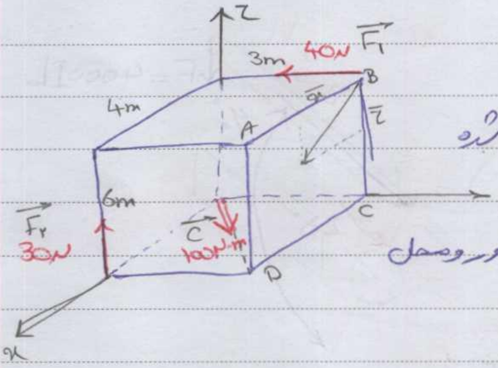
PAPCO

$$\Longrightarrow M_O = ۲۶۴i - ۲۶۴j + ۵۰۰k$$

Subject: در برآیند دورانی ، نیروی برآیند و گشتاور برآیند هم راستا هستند (فقط هم راستا، هم جهت نیستند)

Year. Month. Date. ( )

یک مثال از برآیند دورانی:



برآیند دورانی دو نیرو و گشتاور نشان داده شده

را مشخص کنید. مقدار نیرو، مقدار گشتاور و محل

برخورد نیرو با وجه ABCD بدست آورید.

$\vec{F_1} = -40j\ (N)$

$\vec{F_2} = 30k\ (N)$

$\vec{C} = 100 \times \frac{4}{5} i + 100 \times \frac{3}{5} j\ (Nm) = ۸۰i + ۶۰j\ (Nm)$

$\vec{F_R} = -40j + 30k\ (N)$

it was wierd

But its not anymore

I know I cause too much mess & destruction

$\vec{C_R} = C_R \hat{e}_R = C_R \hat{F}_R$

$\vec{C_R} = C_R \left(\frac{-40j + 50k}{\sqrt{1600+2500}} \right) = C_R(-۰٫۸i + ۰٫۶j)$

نقطه B را برای گشتاور گیری انتخاب می کنیم:

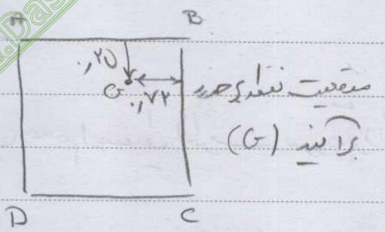
$$C_R(-۰٫۸j + ۰٫۶k) + \overbrace{(\bar{x}i + (-\bar{z}k)) \times (-40j+30k)}^{-40\bar{x}k - 30\bar{x}j - 40\bar{z}i}$$

$$= \underbrace{(4i - 3j) \times 30k}_{-120j - 90i} + ۸۰i + ۶۰j$$

$$\longrightarrow -40\bar{z}i + (-30\bar{x} - ۰٫۸C_R)j + (۰٫۶C_R - 40\bar{x})k$$
$$= -10i - 60j$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\Longrightarrow \begin{cases} -40\bar{z} = -10 \longrightarrow \bar{z} = 0.125\,m \\ 30\bar{x} + 0.8C_R = 60 \\ -40\bar{x} + 0.6C_R = 0 \longrightarrow C_R = \frac{400}{6}\bar{x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} \bar{x} = 0.72\,m \\ C_R = 48\,N \end{matrix}$$



$$\vec{C_R} = 48 \times (-0.8j + 0.6k) \Longrightarrow \vec{C_R} = -38.4j + 28.8k$$

Equilibrium تعادل

بررسی تعادل یک جسم:

۱- انتخاب جسم

۲- رسم شکل ساده‌ای از جسم و جدا کردن آن از محیط اطراف و نمایش کلیه نیروها (گشتاورهای) وارد بر آن - این شکل به نام free body diagram

۳- نوشتن معادلات تعادل (قانون اول نیوتن)

۴- حل معادلات تعادل و بدست آوردن جواب‌ها

۵- بررسی جواب‌ها و امکان‌پذیری آن‌ها و مناسب بودن آن‌ها

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۶- تحلیل در ابعاد جسم، بارگذاری، محل تکیه‌گاه‌ها و ... و حل مجدد مسئله تا رسیدن به جواب‌های قابل قبول و مناسب.

نمودارهای آزاد

در جدا کردن جسم از محیط اطراف نیروها و گشتاورهایی از محیط اطراف به جسم وارد می‌شوند که شامل: نیروی وزن، نیروهای خارجی وارد بر جسم و نیروی اتصالات و تکیه‌گاه‌ها می‌باشد.

معمولاً نیروی وزن و بارهای خارجی به راحتی قابل نمایش هستند ولی تکیه‌گاه‌ها و اتصالات را بایستی با نحوه کار آن‌ها آشنا باشیم تا بتوانیم نیروی آن‌ها را به درستی نشان دهیم.

با معرفی اتصالات و تکیه‌گاه‌های متداول این کار راحت‌تر انجام می‌شود. در عین حال روشی برای تعیین نیروها و گشتاورهای اتصالی که حالت استاندارد معرفی می‌شود. (باید با نحوه کار اتصال آشنا باشیم).

سیستم هم صفحه یا دو بعدی

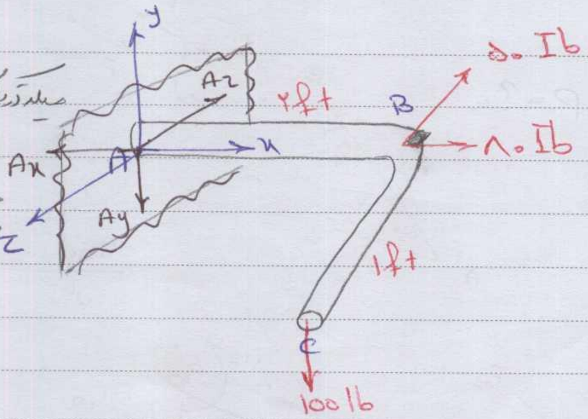
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Oel

تعادل :

میله در تکیه‌گاه متصل
هم تحمل می‌کند
چون مفصلی نیست
گشتاور دارا است .


y
x
z
A
A_z
A_x
A_y
۲ft
B
۵۰ Ib
۸۰ Ib
۱ft
C
100 lb

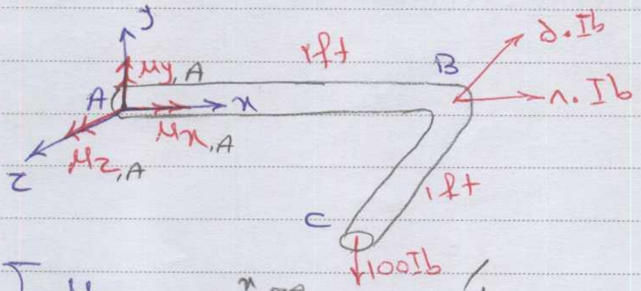
$$\begin{cases} \sum F_x = ۰ \\ \sum F_y = ۰ \\ \sum F_z = ۰ \end{cases}$$

جهت نادرست (در شکل)

z : $-A_z - ۵۰ = ۰ \Rightarrow A_z = \overset{\uparrow}{-}۵۰$ Ib

x : $۸۰ - A_x = ۰ \Rightarrow A_x = ۸۰$ Ib

y : $-A_y - ۱۰۰ = ۰ \Rightarrow A_y = -۱۰۰$ Ib


y
$M_{y,A}$
A
x
$M_{x,A}$
z
$M_{z,A}$
۲ft
B
۵۰ Ib
۸۰ Ib
۱ft
C
100Ib

$\sum M_x = ۰$ ⇒ ۵۰ Ib محور x را قطع می‌کنند، ۸۰ Ib موازی محور x ⇒ (no moment)

$\sum M_y = ۰$ حول محور x تنها نیروی ۱۰۰ Ib ممان ایجاد می‌کند

$\sum M_z = ۰$

$\Rightarrow M_{x,A} + (100 Ib)(1ft) = ۰$

$\Rightarrow M_{x,A} = -100$ Ib ft

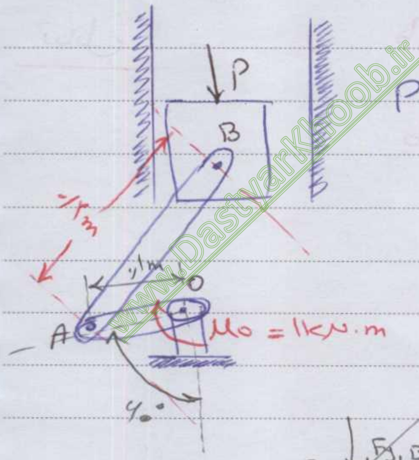
$\sum M_y = ۰ \Rightarrow M_{y,A} + ۵۰ (Ib)(۲ft) = ۰$

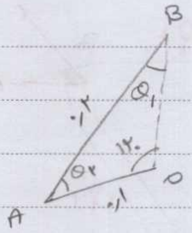
PAPCO

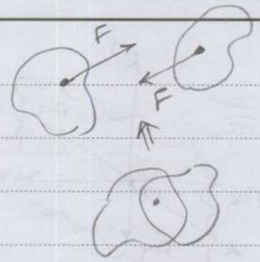
$\Rightarrow M_{y,A} = -100$ Ib ft

$\sum M_z = ۰ \Rightarrow ...$

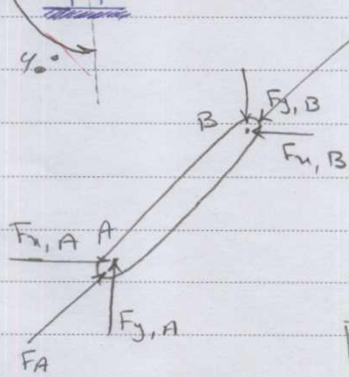
Subject:
Year. Month. Date. ( )

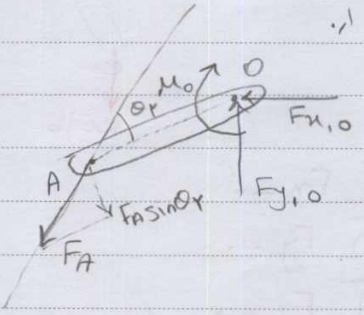

P
P=?
B
۰/۲m
۰/۱m
O
A
Mo = 1kN.m
۶۰°

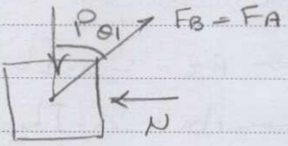

B
θ1
۰/۲
۱۲۰
θ۲
O
A
۰/۱



$$\frac{\sin\theta_1}{۰/۱}=\frac{\sin ۱۲۰}{۰/۲}$$


FB
Fy,B
B
Fx,B
Fx,A
A
Fy,A
FA


Mo
O
θ۲
Fx,O
A
FA sinθ۲
Fy,O
FA



۲/۱۴۴ _ ۲/۱۲۸ _ ۳/۱۵ _ ۳/۱۹ _

Subject:
Year. Month. Date. ( )

روش کلی برای تعیین مؤلفه‌های نیرو و گشتاور که توسط یک اتصال یا تکیه‌گاه تحمل می‌شود :

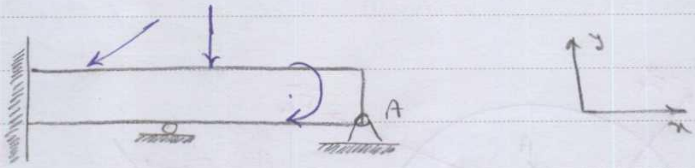
۱- جسم را فقط در ارتباط با اتصال فرض می‌کنیم.

۲- جسم را در جهات مختلف (z و y و x) حرکت می‌دهیم و در هر جهتی که اتصال مانع حرکت شد یک مؤلفه نیرو در نظر می‌گیریم.

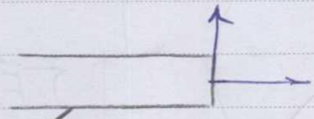
۳- جسم را حول محورهای مختلف (z و y و x) می‌چرخانیم و در هر جهتی که اتصال مانع چرخش شد یک مؤلفه گشتاور در نظر می‌گیریم.

۴- مؤلفه‌هایی از نیرو و گشتاور را که جسم و سیستم نیروی آن نمی‌تواند ایجاد کند حذف می‌کنیم.

تذکر: می‌توان برای سرعت بیشتر مراحل ۲ و ۳ توأم با مرحله ۴ انجام داد.



سیستم در صفحه دو بعدی



جسم در صفحه xy است بنابراین نیرویی در راستای z وجود ندارد در نتیجه اتصال A نیرویی در راستای z تحمل نمی‌کند همچنین گشتاوری نیز حول محور y تحمل نمی‌کند

معادلات تعادل: (Equations of equilibrium)

طبق قانون اول نیوتن اگر جمع نیروها (گشتاورهای) وارد بر جسم برابر صفر باشد و جسم در حال سکون باشد، ساکن باقی می ماند.

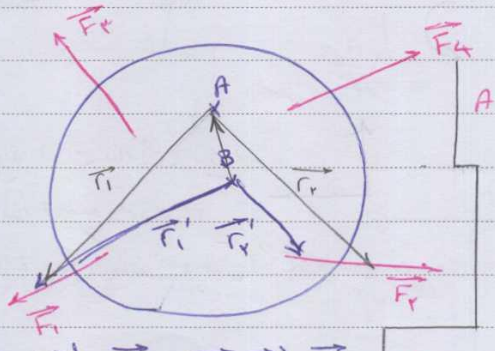
سؤال: گشتاور نسبت به یک یا چند نقطه؟

توضیح: جسم در حال تعادل تمام اعضایش در حال تعادل هستند

سؤال: اگر گشتاور را نسبت به یک نقطه برابر صفر قرار دهیم، نسبت به سایر نقاط نیز صفر خواهد شد؟

(نیروها را قبلاً برابر صفر قرار داده ایم)

می خواهیم بدانیم برای یک جسم در حال تعادل، چند معادله تعادل مستقل از هم می توانیم بنویسیم...



نسبت به A /

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$$

$$\sum \vec{\mu}_A = 0 \Rightarrow \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \dots = 0$$

نسبت به B /

$$\mu_B = (\vec{BA} + \vec{r}_1) \times \vec{F}_1 + (\vec{BA} \times \vec{r}_2) \times \vec{F}_2 + \dots = 0$$

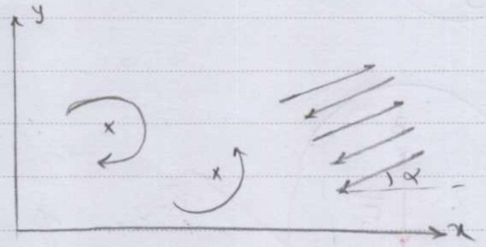
$$\Rightarrow \underbrace{\vec{BA} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots)}_{0} + \underbrace{\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \dots}_{0} = 0$$

" " " "

$$\sum \vec{\mu}_B = 0 \Rightarrow \vec{r}_1' \times \vec{F}_1 + r_2' \times \vec{F}_2 + \dots = 0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جسم و سیستم نیروی وارد بر آن	یک سری از معادلات تعادل مستقل	تعداد معادلات تعادل مستقل
کلی یا سه بعدی	$\sum F_x = 0 , \sum F_y = 0 , \sum F_z = 0$ $\sum M_x = 0 \; \sum M_y = 0 , \sum M_z = 0$	۶
هم صفحه یا دو بعدی	$\sum F_x = 0 , \sum F_y = 0 , \sum M_z = 0$	۳
موازی (با z)	$\sum F_z = 0 , \sum M_x = 0 , \sum M_y = 0$	۳
متقارب	$\sum F_x = 0 , \sum F_y = 0 , \sum F_z = 0$	۳
همراستا (با x)	$\sum F_x = 0$	۱
متقاطع با یک خط (محور)	$\sum F_x = 0 , \sum F_y = 0 , \sum F_z = 0$ $\sum M_x = 0 , \sum M_z = 0$	۵



۲ معادله تعادل مستقل $\begin{cases} \sum F_x = 0 \quad \text{یا} \quad \sum F_y = 0 \; * \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$

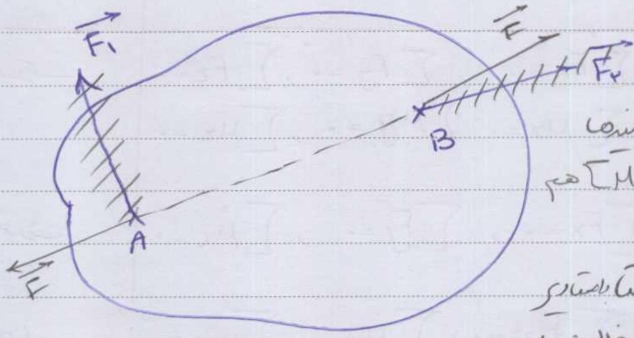
$$* \; \sum F_i \sin\theta = \sum F_y$$

PAPCO

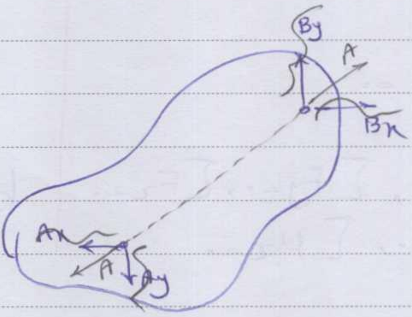
$$\underbrace{\left(\sum F_i \sin\theta\right)}_{\sum F_y} \times \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \sum F_i \cos\theta = \sum F_x$$

Subject :
Year . Month . Date . ( )

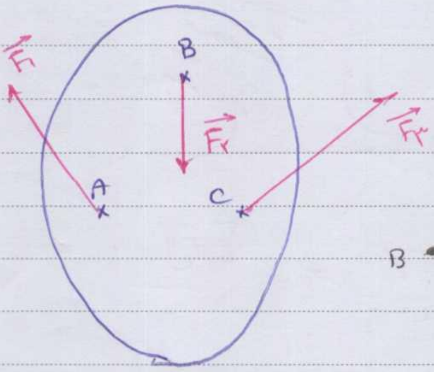
جسم دو نیرویی :

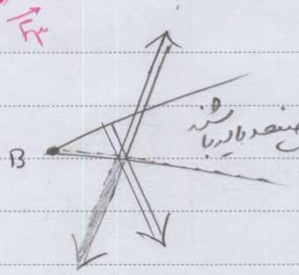

$\vec{F_1}$
$\vec{F}$
$\vec{F_2}$
B
A
$\vec{F}$

اگر متعادل باشند آنگاه برآیندها
آن‌ها هیچگاه صفر می‌شود. $\sum M$ هم
باید صفر شود.
⇓
دو نیرو هم صفحه و هم راستا با مقدار
یکسان (جهت‌های مخالف)


By
A
Bx
Ax
A
Ay

جسم سه نیرویی

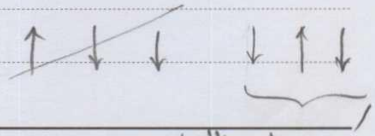

$\vec{F_1}$
B
$\vec{F_2}$
$\vec{F_3}$
A
C



B و F_1 و F_2 در یک صفحه باید باشند

هم صفحه و متقارب

هم صفحه و موازی ⟹



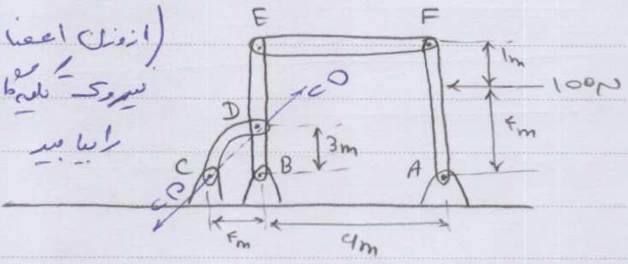
یک در میان بالا و پایین

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

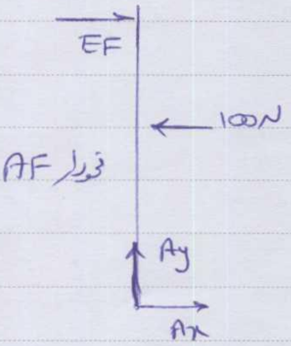
در نمودار آزاد : اول نیروی وزن ، نیروهای معین ، مجهول کنش
① ② ③

(از وزن اعضا می توان صرف نظر کرد)
نیروی تکیه گاه های A و B و C
را بیابید


E
F
D
C
B
A
CD
1m
100N
4m
3m
4m
4m

از نظر استاتیکی نامعین ⟹ چون سه معادله و ۶ مجهول داریم ⟹ اگر جسم صلب بود

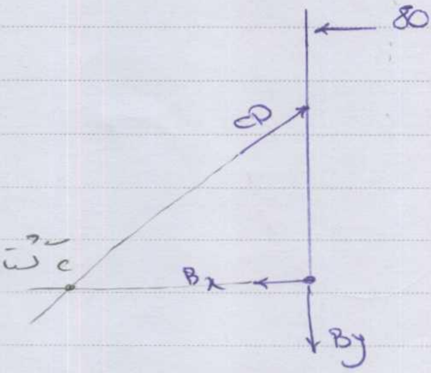
CD سیستم دو نیرویی (هیچ نیروی دیگری بر آن وارد نمی شود)
فقط در C و D بر آن نیرو وارد می کند.


EF
100N
نمودار AF
Ay
Ax

$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = 0$

$\sum M_A = 0 \Rightarrow 4\times100 - 5EF = 0 \Rightarrow EF = 80N$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow 80 - 100 + A_x = 0 \Rightarrow A_x = 20N$



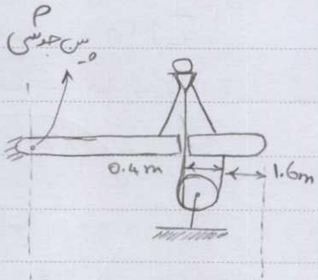
گشتاور حول C

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

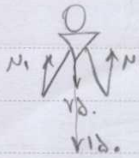
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )



برای آزمایش یک پین جوشی شخصی مطابق شکل روی کتان ایستاده و طنابی را که در دست دارد با نیروی N ۱۵۰ می‌کشد. وزن شخص N ۷۵۰ و وزن هر متر طول تیر N ۱۰۰ می‌باشد. گشتاور وارد بر پین جوشی را محاسبه کنید.

اگر شخص را از تیر جدا کنیم داریم ←

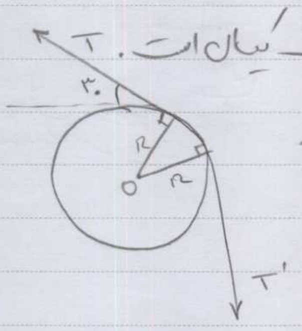


و چون فاصله پاهای شخص را نداریم، نمی‌توان N1 و N2 را حساب کرد

↓

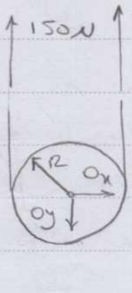
شخص را از تیر نباید جدا کرد.

طناب به هر شکلی به دور قرقره پیچیده شده باشد نیروی کشش دو طرف طناب یکسان است.



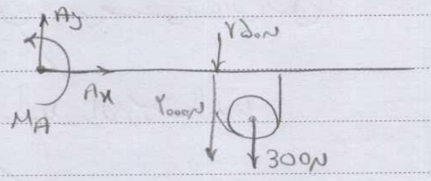
$\sum M_O = 0 \Rightarrow TR - T'R = 0 \Rightarrow T = T'$

جدا کردن قرقره ——



$\sum M_O = 0 \Rightarrow TR - 150(R) = 0$
$\Rightarrow T = 150N$
$\sum F_x = 0 \Rightarrow O_x = 0$
$\sum F_y = 0 \Rightarrow O_y = 300N$

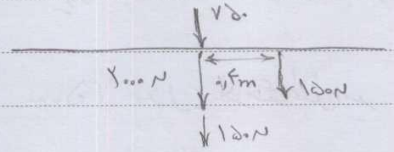
Subject:
Year. Month. Date. ( )


Ay
Ax
MA
۲۵۰N
۲۰۰۰N
300N

$\sum M_A = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow M_A = 2 \times 2750 + 2.2 \times 300$

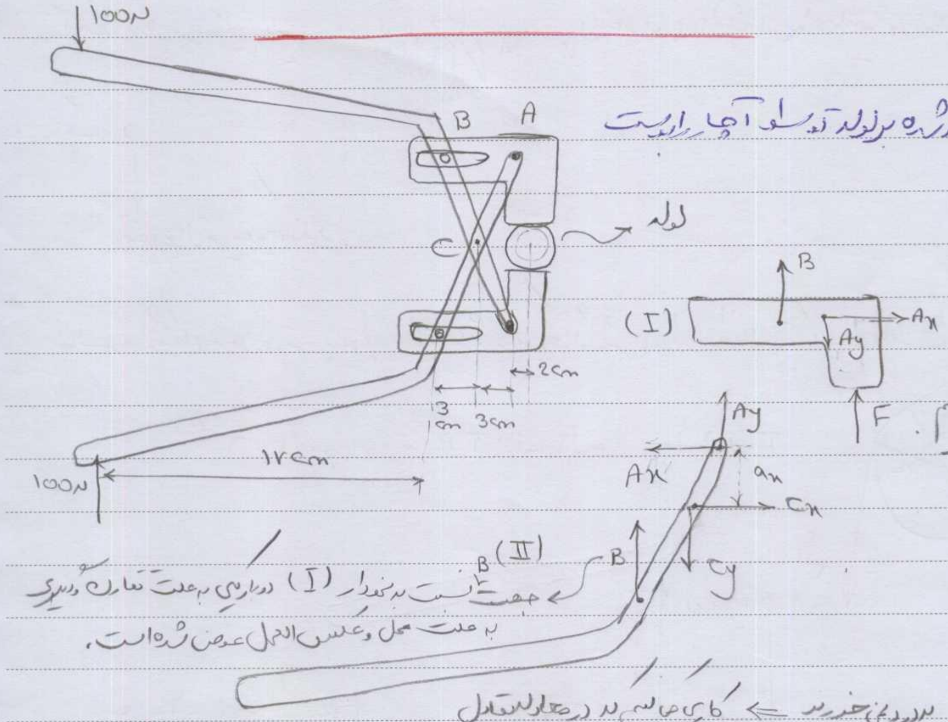
$\Rightarrow M_A = \ldots\ (N.m)$


۷۵۰
۲۰۰۰N
۰٫۴m
۱۵۰N
۱۵۰N

نمودار آزاد تیر با حضور شخص روی آن و یک بدون قرقره

$150 \times 2 + 150 \times 2.4 = 300 \times 2.2$

نیروی که وارد شده بر لوله توسط آچار را بدست آورید؟


100N
B
A
C
لوله
2cm
3cm
3cm
۱۲cm
100N
(I)
B
Ax
Ay
F
(II)
Ay
Ax
a_x
Cx
Cy
B

سه معادله و چهار مجهول
↓
یک معادله دیگر می‌خواهم.

جهت B نسبت به نمودار (I) وارونه به علت تعادل دیگری به علت عمل و عکس العمل عوض شده است.

Cx و Cy بدردمان نمی‌خورند ⇐ کاری می‌کنیم که در معادله تعادل ظاهر نشوند ← چون ما فقط یک معادله دیگر می‌خواهیم

$(II) \longrightarrow \sum M_C = 0 \Longrightarrow 3A_y + a_x A_x - 3B = 20 \times 100$

$(I) \longrightarrow \sum F_x = 0 \Longrightarrow A_x = 0$

$\sum M_A = 0 \Longrightarrow 2F = 3B$

$\sum F_y = 0 \Longrightarrow B + F = A_y$

PAPCO

با استفاده از معادلات (I) $\longrightarrow 3(F + \frac{2}{3}F) - \underbrace{3(\frac{5}{3}F - F)}_{2F} = 2000 \Longrightarrow F = \frac{2000}{3}\ N$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

کفایت قیدها

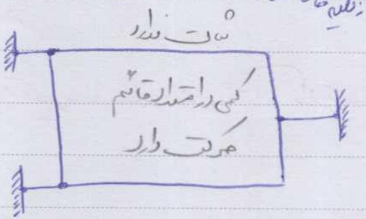
معین و نامعین استاتیکی

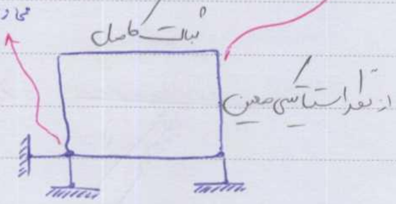
قاب و ماشین ها

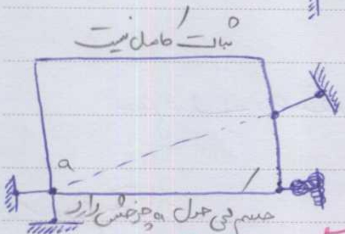
خرپا ها

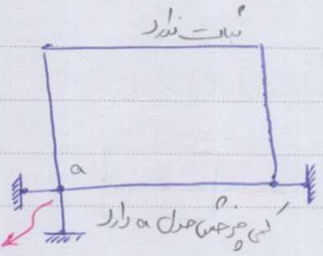
پایداری جسم صلب در صفحه تحت بارگذاری دو بعدی

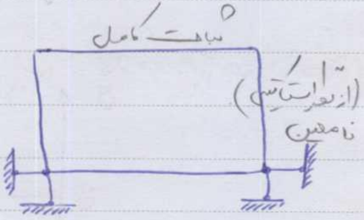
پایداری: آن کلیه حالات که در راستاها حرکت محدود می‌گیرد.


ثبات ندارد
کمی را امتداد قائم حرکت دارد


ثبات کامل
از نظر استاتیکی معین


ثبات کامل نیست
a
جسم حول a چرخش دارد


ثبات ندارد
a
کمی چرخش حول a دارد


ثبات کامل
(از نظر استاتیکی)
نامعین

حول a گشتاور نیروی تکیه‌گاه‌ها صفر است پس به خاطر mg حول a می‌چرخد

درجات آزادی یک جسم. (Degrees of freedom)

تعداد قابلیت های دورانی و حرکتی جسم با توجه به محدودیت هایش می باشد. یا به تعداد متغیرهای مستقل که برای تعیین موقعیت دقیق جسم و اجزایش لازم است بیان شود (با توجه به محدودیت هایش) گفته می شود.

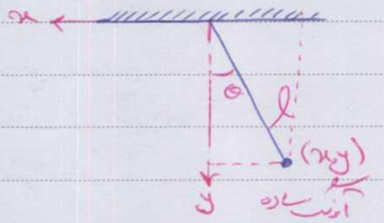
اگر به تعداد درجات آزادی برای جسم قید یک بعدی ایجاد کنیم ، متعادل می گردد و بیش از آن جسم را نامعین

P4PCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

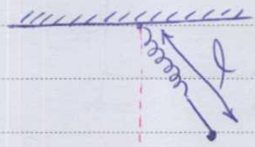
می‌کند.

اگر به وسیله متغیر مستقل θ موقعیت جسم را تعیین کنیم آنگاه جسم یک درجه آزادی دارد



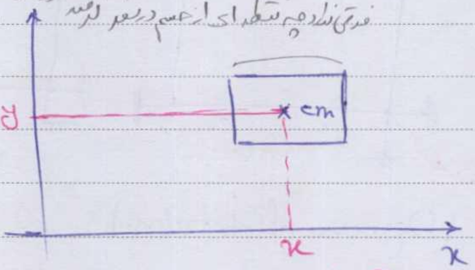
اگر موقعیت جسم را به وسیله x و y تعیین کنیم دو متغیر مستقل نداریم زیرا ($x^2+y^2=l^2$) در نتیجه باز هم یک متغیر مستقل داریم و جسم یک درجه آزادی دارد

l متغیر ← دو درجه آزادی دارد



صلب (مجموعه‌ای از ذرات که فاصله آنها از یکدیگر تغییری نکند)
فرض کنید هیچ نقطه‌ای از جسم دیگر تغییر نکند

جسم صلب در صفحه

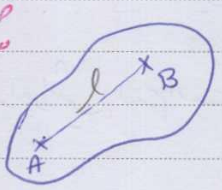


سه درجه آزادی:
۱) x
۲) y
۳) زاویه یکی از اضلاع با راستای + محور x (θ)

جسم صلب در فضا

شش درجه آزادی (x y z α β γ)

$$\underbrace{2}_{A,B}\times\overset{xyz}{\widehat{3}}-\underbrace{1}_{l\text{ ثابت}}+\underbrace{1}_{\theta}=6$$



معنی نیروهای داخلی و خارجی:

اگر جسم را بدون توجه به اجزای آن در نظر گرفته و تنها بتوانیم با معادلات تعادل استاتیکی والس

PAPCO

Subject: نامعین ⟵ درجه آزادی < # قیدهای بیرونی

Year. Month. Date. ( ) ناپایدار ⟵ درجه آزادی > # قیدهای بیرونی

همه تکیه‌گاه‌هایش را بدست آوریم از نظر خارجی معین می‌باشد. اگر با فرض داشتن واکنش تکیه‌گاه‌ها با استفاده از معادلات تعادل استاتیکی بتوانیم نیروی تمام اعضای جسم بدست آوریم، جسم از نظر داخلی معین است.

در بعضی موارد واکنش تکیه‌گاه‌ها به نیروی اعضای جسم ارتباط پیدا می‌کند (جسم بدون تکیه‌گاه دیگر صلب نیست) در این حالت اصطلاح معین و نامعین داخلی و خارجی به کار نمی‌رود و اگر با نوشتن معادلات تعادل برای جسم و اعضای آن بتوان واکنش تکیه‌گاه‌ها و نیروی اعضا را بدست آورد جسم معین است و در غیر این صورت نامعین است.

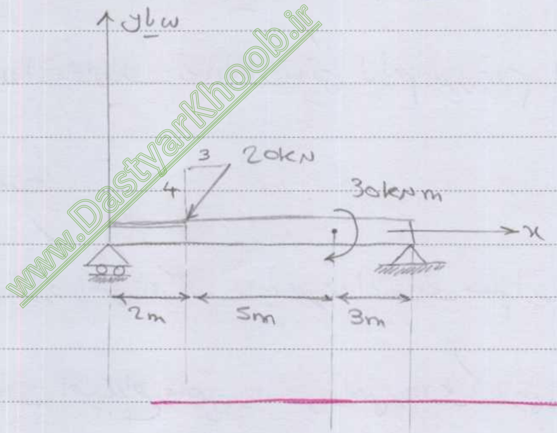
* تکیه‌گاه ساچمه و کروی سه درجه آزادی دارد (x, y, z)

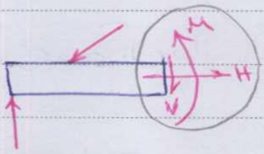
اگر در جسمی حداقل یک عضو سه نیرویی (یا بیشتر) وجود داشته باشد، اگر مجموعه ساکن باشد (هر اندازه زاویه اعضا ثابت باشد) قاب و اگر قابل حرکت باشد (زاویه اعضا نسبت به هم قابل تغییر باشد) ماشین نامیده می‌گردد

PAPCO

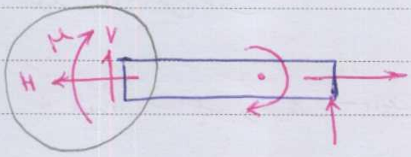
Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال) برای تیر رسم شده ، معادلات نیروی محوری ، نیروی برشی و لنگر خمشی را نوشته، نمودار آن ها را رسم نمایید


سیال
3
4
20kN
30kN.m
x
2m
5m
3m



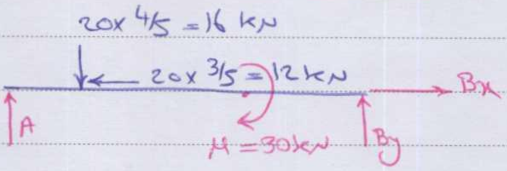
جهت های مثبت قراردادی برای مقاطع از چپ به راست



جهت های مثبت قراردادی برای مقاطع از راست به چپ

H: axial force نیروی محوری
V: shear force نیروی برشی
M: bending moment لنگر خمشی

حل:


$20\times 4/5=16$ kN
$20\times 3/5=12$ kN
A
M = 30kN
By
Bx

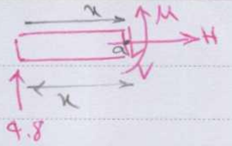
$\sum F_x=-12+B_x=0 \Longrightarrow B_x=12\text{ kN}$

$\sum M_A=0 \Longrightarrow 10B_y-30-2(16)=0 \Longrightarrow B_y=6.2\text{ kN}$

$\sum F_y=0 \Longrightarrow A-16+6.2=0 \Longrightarrow A=9.8\text{ kN}$

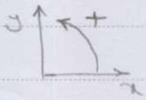
Subject:
Year. Month. Date. ( )

۰<x<۲



$\sum F_x = 0 \Longrightarrow H = 0$

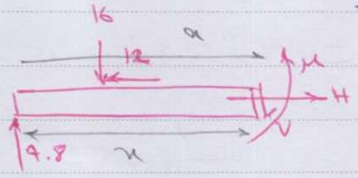
$\sum F_y = 0 \Longrightarrow 9.8 - V = 0 \Longrightarrow V = 9.8$



$\sum M_a = 0 \Longrightarrow M - 9.8x = 0$

$\Longrightarrow M = 9.8x \text{ kN.m}$

۲<x<۷

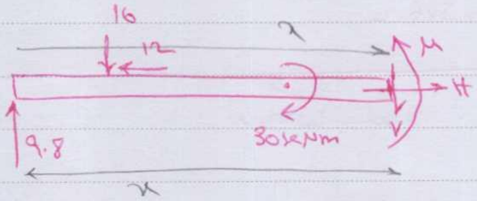

16
12
x
M
H
V
9.8
x

$H = +12 \text{ kN}$

$V = +9.8 - 16 = -6.2 \text{ kN}$

$M = 9.8x - 16(x-2) = -6.2x + 32 \text{ kNm}$

۷<x<۱۰


16
12
x
M
H
V
9.8
30 kNm
x

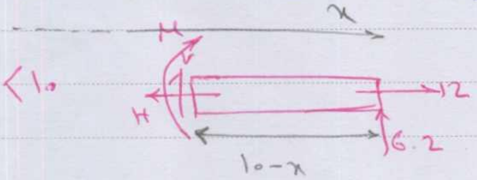
$H = +12 \text{ kN}$

$V = 9.8 - 16 = -6.2 \text{ kN}$

$M = 9.8x - 16(x-2) + 30 = -6.2x + 62 \text{ kNm}$

در بالا مقطع را چپ به راست در نظر گرفتیم حال اگر مقطع را راست به چپ در نظر بگیریم، داریم:

۷<x<۱۰


x
M
H
12
6.2
10-x

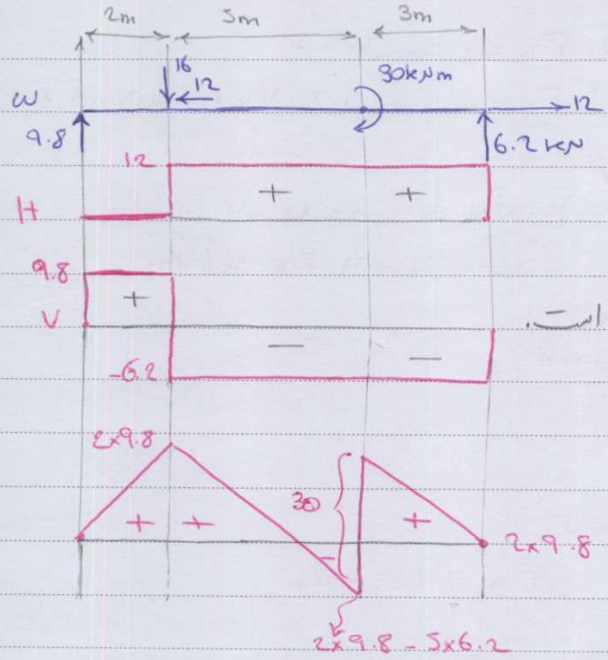
فاصله از انتهای تیر داد

$H = +12 \text{ kN}$

$V = -6.2 \text{ kN} \qquad M = +6.2(10-x) = 62 - 6.2x \text{ kNm}$

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )


2m
5m
3m
16
12
30kNm
12
w
9.8
6.2 kN
12
H
+
+
9.8
V
+
-6.2
—
—
2×9.8
30
+
+
+
—
2×9.8 - 5×6.2

$2\times9.8-5\times6.2+30-3.6.2=0$

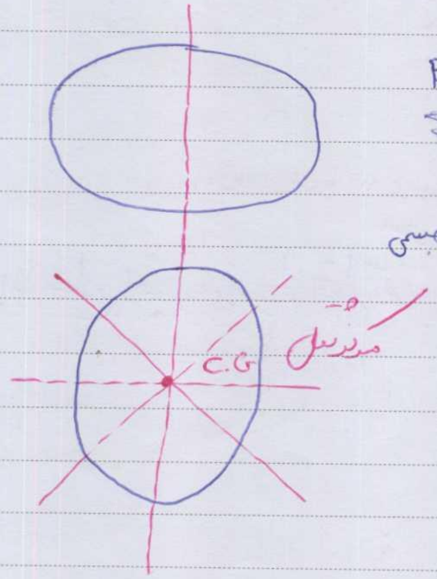
نمودار M برابر انتگرال (مساحت زیر نمودار) نمودار V است.

$$M=\int V$$

Distributed loads : بارهای گسترده

Body force نیروی جسمی = نیروی کالبدی
Surface force نیروی سطحی

نیروی حجمی هم دایم در واقعیت رخ نمی دهد: نیروی جسمی و نیروی سطحی در واقعیت رخ می دهند.



3/52 3/72 3/92 3/104 3/116

PAPCO

برآیند ← سه بعدی
تعادل خرپا و ماشین‌ها ← دو بعدی

Subject:
Year. Month. Date. ( )

میان‌ترم تا آخر خرپاها و بارهای گسترده ساعت ۶ بعد از ظهر سه‌شنبه ۸۹,۲,۱۴

دنباله بارهای گسترده

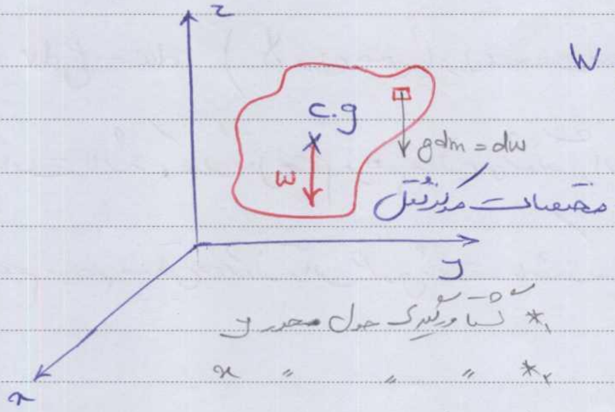
نیروهای جسمی یا کالبدی Body Forces

نیروهای سطحی Surface f.

نیروهای خطی

نیروهای نقطه‌ای

جاذبه ثقل مثالی از نیروهای جسمی است و برای اجسام کوچک (در مقابل شعاع زمین) یک سیستم نیروی موازی در حجم جسم تشکیل می‌دهد. برآیند آن ثقل جسم می‌باشد و راستای آن همواره از نقطه‌ای به نام مرکز ثقل (center of gravity) می‌گذرد. که رابطه آن به صورت زیر است:



$$W = \int dw = \int g\,dm$$

مختصات مرکز ثقل

$$x_c = \frac{\int x\,dm}{W} \quad *_1$$

$$y_c = \frac{\int y\,dm}{W} \quad *_2$$

$$z_c = \frac{\int z\,dm}{W} \quad *_3$$

*۱ شاقول‌گیری حول محور y

*۲ x ″ ″ ″

در حالت‌های *۱ و *۲ xy صفحه زمین است.

*۳ محورها را چرخانده تا xz ″ ″ باشد آنگاه شاقول حول محور x را می‌زنیم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نظیر این می‌توان مرکز جرم و حجم را به صورت زیر تعریف کرد:

$$M = \int dm$$

مختصات مرکز جرم

$$\begin{cases} x_{c.m} = \dfrac{\int x\,dm}{M} \\ y_{c.m} = \dfrac{\int y\,dm}{M} \\ z_{c.m} = \dfrac{\int z\,dm}{M} \end{cases}$$

$$V = \int dV$$

مختصات مرکز حجم

$$\begin{cases} x_{c.v} = \dfrac{\int x\,dV}{V} \\ y_{c.v} = \dfrac{\int y\,dV}{V} \\ z_{c.v} = \dfrac{\int z\,dV}{V} \end{cases}$$

با توجه به اینکه $dw = g\,dm$ ، $dm = \rho\,dV$ (ρ جرم حجمی یا جرم مخصوص جرم می‌باشد)

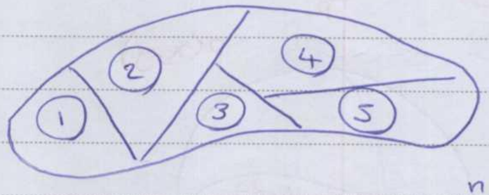
$dw = \rho g\,dV = \gamma\,dm$ (γ وزن حجمی یا وزن مخصوص جسم می‌باشد)، می‌توان نتیجه گرفت

که اگر g ثابت باشد، مرکز ثقل و جرم بر هم منطبق می‌شوند و اگر ρ ثابت باشد مرکز جرم

و مرکز حجم بر هم منطبق می‌شوند و اگر ρ و g ثابت باشند مراکز ثقل و جرم و حجم بر هم منطبق می‌شوند

Subject:
Year. Month. Date. ( )

اجسام مرکب



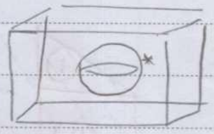
$$w_t = w_1 + w_2 + \dots + w_5 = \sum_{i=1}^{n} w_i$$

$$x_{ct} = \frac{w_1 x_{c1} + \dots + w_5 x_{c5}}{w_t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_{ci}}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

$$y_{ct} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i y_{ci}}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \qquad z_{ct} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i z_{ci}}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

به اجسامی اطلاق می شود که ترکیبی از جسم هایی هستند که وزن و مرکز ثقل هر کدام مشخص است.

برای یافتن مرکز جرم و مرکز ثقل کل در روابط انتگرالی فقط کافی است که انتگرال را به سیگما تبدیل کنیم



* وزن دو را ⊖ می گیریم

به همین ترتیب در مورد اجرام و اجسام مرکب.

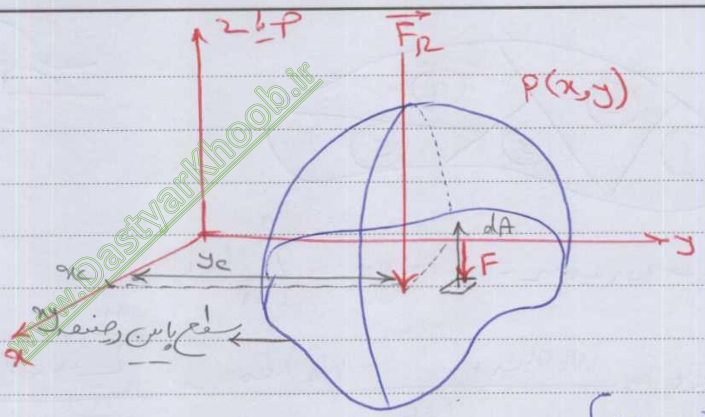
بارهای سطحی:

مساحت سطح
مرکز سطح

نیروی وارد بر سطح (فشار)

برآیند نیروی وارد بر سطح
مرکز اعمال برآیند که به مرکز فشار معروف است
center of pressure

Subject:
Year. Month. Date. ( )


z یا P
$\vec{F_R}$
p(x,y)
dA
y
F
y_c
x_c
x
سطح پایین در صفحه xy

$$\vec{F_R} = \int p(x,y)\,dA$$

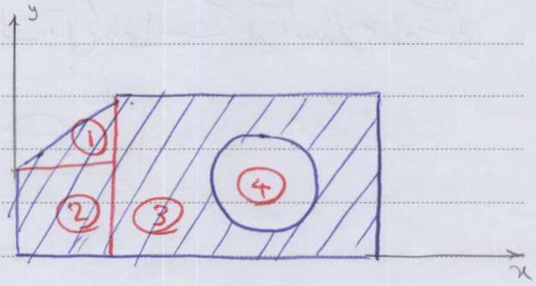
$$\begin{cases} x_c = \dfrac{\int p(x,y)\,x\,dA}{F_R} \\ y_c = \dfrac{\int p(x,y)\,y\,dA}{F_R} \end{cases}$$

مختصات مرکز فشار

$$x_{c.a} = \frac{\int x\,dA}{A}$$

$$y_{c.a} = \frac{\int y\,dA}{A}$$

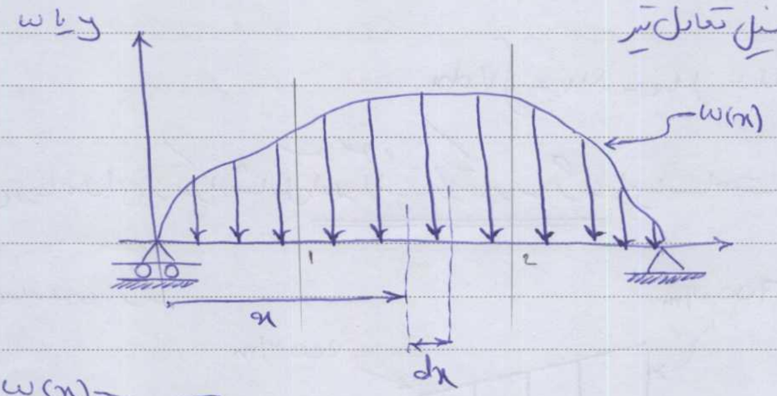
سطح	مساحت A_i	x_i	y_i	x_iA_i	y_iA_i
مثلث ①	A_1				
②	A_2				
③	A_3				
④	A_4 ⊖				

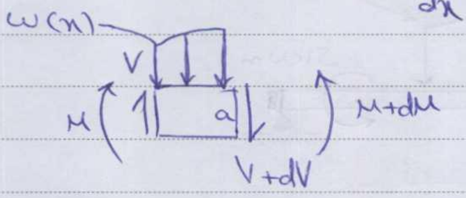


Subject:
Year. Month. Date. ( )

بارهای گسترده روی تیرها

روابط دیفرانسیل تعادل تیر





$$\sum F_y = 0 \qquad V - w(x)dx - (V + dV) = 0 \implies w(x) = -\frac{dV}{dx}$$

$$\int_1^2 dV = \int_1^2 -w(x)\,dx$$

$$\Delta V = V_2 - V_1 = -\int w(x)\,dx$$

تغییر نیروی برشی در فاصله‌ای از تیر که شامل نیروی متمرکز نباشد برابر با منفی مساحت زیر منحنی بارگذاری

$$\sum M_a = 0 \implies \cancel{M} + dM + \cancel{w(x)dx \cdot \frac{dx}{2}} \xrightarrow{} 0 \quad - V dx - \cancel{M} = 0$$

درحال فاصله ما باشد

$$\implies V = \frac{dM}{dx}$$

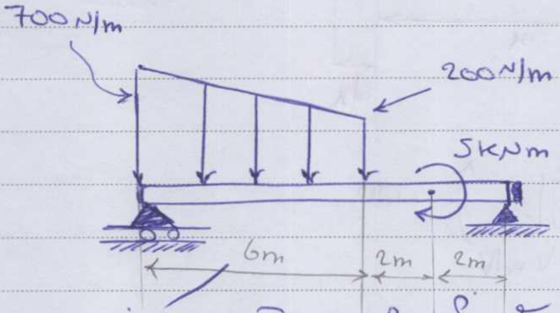
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\int_1^2 dM = \int_1^2 V dx$$

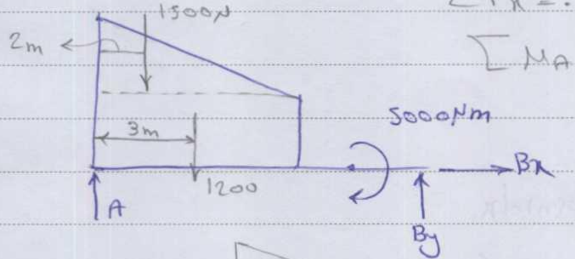
$$\Delta M = M_2 - M_1 = \int V dx$$

تغییر لنگر خمشی در فاصله ای از تیر که شامل لنگر (گشتاور) متمرکز نباشد برابر با مساحت زیر منحنی نیروی برشی در همان فاصله می باشد

مثال)


700 N/m
200 N/m
5KNm
6m
2m
2m

برای تیر مقابل معادلات نیروی برشی و لنگر خمشی را نوشته، نمودار آن ها را رسم کنید.


1500N
2m
3m
1200
5000Nm
Bx
A
By

$\sum F_x = 0 \Longrightarrow B_x = 0$

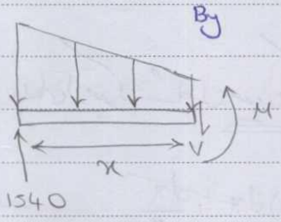
$\sum M_A = 0 \Longrightarrow 10B_y - 5000 - 3\times1200 - 2\times1500 = 0$

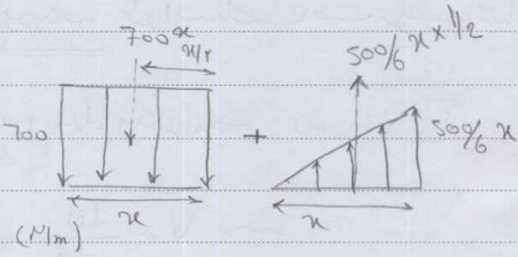
$\Longrightarrow B_y = 1160\,N$

$\sum F_y = 0 \Longrightarrow A - 1500 - 1200 + 1160 = 0$

$\Longrightarrow A = 1540\,N$

$0 < x < 4$




700x
x/2
700
+
500/6 x × 1/2
500/6 x
x
x

$$W(x) = \frac{-500x}{6} + 700 = \frac{-250x}{3} + 700 \ (N/m)$$

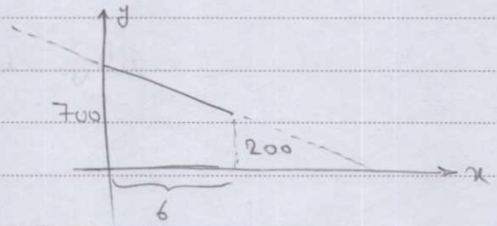
$$V = -\int w(x)dx + C_1 = +\frac{125}{3}x^2 - 700x + C_1 \quad \begin{cases} x = 0 \\ V = +1540 \end{cases} \Longrightarrow C_1 = 1540$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

میان ترم ساعت ۶ تا ۸ / ۶

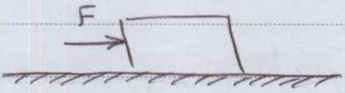
$$M = \int V dx + C_2 = +\frac{125}{9}x^3 - 350x^2 + 1540x + C_2 \quad (Nm)$$

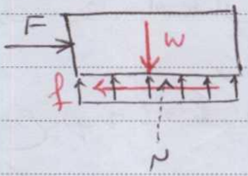
$$\begin{cases} x = 0 \\ M = 0 \end{cases} \Longrightarrow C_2 = 0$$

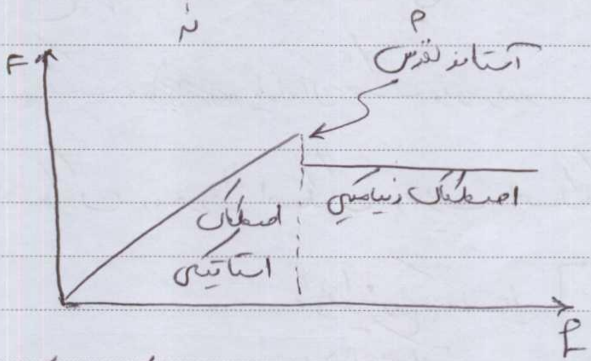


نیروی اصطکاک Friction Force

آزمایش کولمب:







نتایج بررسی و آزمایشات کولمب، معروف به قوانین اصطکاک خشک:

۱- نیروی لازم جهت به حرکت درآوردن یا در حال حرکت نگه داشتن جسم به مقدار سطح تماس بستگی دارد.

۲- نیروی لازم برای شروع به حرکت و همچنین حفظ حرکت لغزشی متناسب با نیروی

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

عمود بر سطح تماس است و مقدار آن در شرایط آستانه حرکت بیشتر از حین حرکت می باشد

و در سرعت های کم به مقدار سرعت بستگی ندارد.

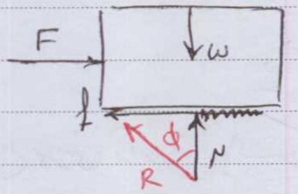
شرایط آزمایش کولمب:

۱- سطح تماس مشترک و یکنواخت

۲- سرعت نسبی در تمام نقاط تماس یکسان

شرایط فوق مربوط به اصطکاک در سطوح ساده می باشد. هر یک از شرایط ~~[illegible]~~ فرق کند به نام سطوح پیچیده یا اصطکاک در ماشین ها نامیده می گردد مانند: پیچ ها، تسمه های، کلاچ های خشک، ~~[illegible]~~ یاتاقان خشک، قرص ها، .....

زاویه اصطکاک، مخروط اصطکاک و ضریب اصطکاک



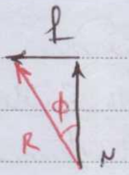
شرایط شروع به حرکت یا در حال حرکت

عکس العمل سطح اصطکاکی می تواند به یکی از دو صورت N-f یا R-φ نشان داده شود.

$$f \propto N \longrightarrow f = \underbrace{\mu}_{\mu_s \text{ یا } \mu_d \text{ یا } \mu_c \text{ یا } \mu_k} N$$

$\mu_s > \mu_d$

PAPCO



$R\cos\phi = N$

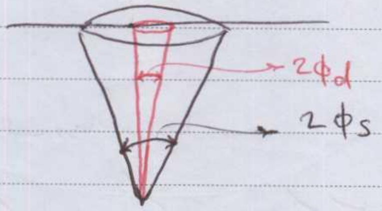
$R\sin\phi = f$

$\Rightarrow \tan\phi = \dfrac{f}{N} = \mu$

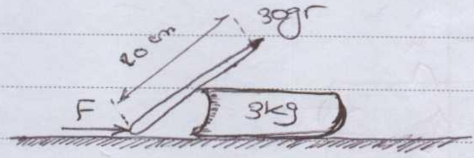
$\mu_s \rightarrow \phi_s \quad , \quad \mu_d \rightarrow \phi_d$

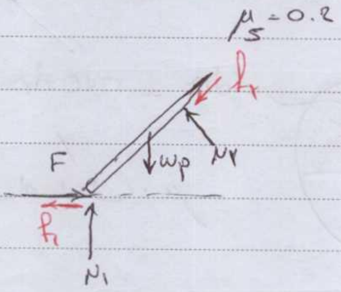
اگر F در تماس در جسم در سطح افقی چرخش کند حد یال های مخروطی را می سازد، که به نام مخروط اصطکاک نامیده می گردد و زاویه رأس آن 2ϕ می باشد.

در مخروط اصطکاکی داریم: استاتیکی و دینامیکی


$2\phi_d$
$2\phi_s$

e.g.)


30gr
20cm
F
3kg


$\mu_s = 0.2$
f_2
W_p
N_2
F
f_1
N_1

فرض:

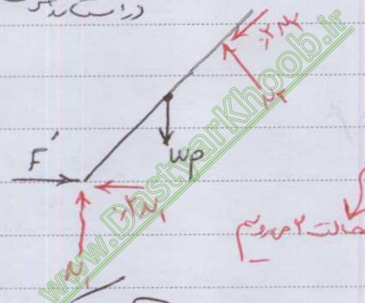
۱- مداد به طرف بالا و راست حرکت کند

۲- مداد به طرف پایین و چپ حرکت کند

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

۱/ در آستانه حرکت


F'
wp
N۱
N۲
۰/۲N۲

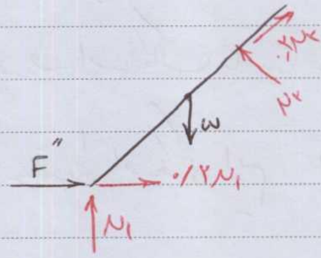
$F' = F$ ← مدار در آستانه حرکت به طرف بالا — done

* $F' > F$ ← مدار به طرف بالا حرکت می‌کند — not done yet

$F' < F$ ← مدار به طرف بالا حرکت می‌کند — done

به سراغ حالت ۲ می‌رویم

۲/ در آستانه حرکت


F''
w
۰/۲N۱
N۱
۰/۲N۲
N۲

~~$F'' = F$~~ با توجه به *

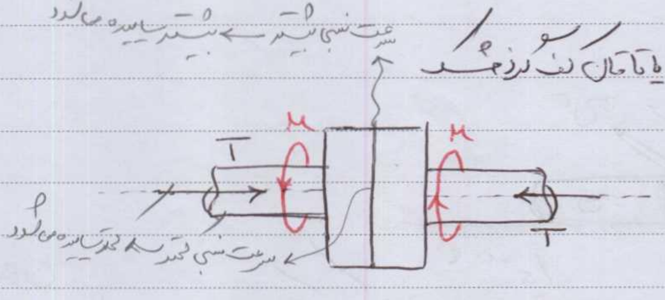
$F'' > F$ جسم به طرف پایین حرکت می‌کند

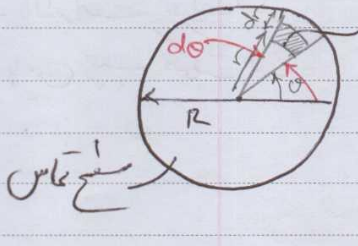
$F'' < F$
$F'' < 0$ } جسم به طرف پایین حرکت نمی‌کند

با توجه به * شکل باقی می‌ماند

اصطکاک در ماشین ها:

کلاچ دیسکی، ترمز دیسکی، یاتاقان کف گرد محور


سرعت نسبی بیشتر ← بیشتر سائیده می‌گردد
M
M
T
T
سرعت نسبی کمتر ← کمتر سائیده می‌گردد


dθ
θ
R
مسطح تماس

$dA = r\,d\theta\,dr$

ضریب اصطکاک: μ

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فرض ۱: فشار یکنواخت یا ثابت (کلاچ یا ترمز نو)

$$P = \text{ثابت} = \frac{T}{\pi R^2}$$

$$dN = PdA = Pr\,d\theta\,dr$$

$$T = \int dN = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} pr\,d\theta\,dr = P\frac{R^2}{2}\times 2\pi = \pi R^2 P$$

$$df = \mu dN = \mu Pr\,d\theta\,dr$$

$$dM = r\,df = \mu Pr^2\,d\theta\,dr$$

$$M = \int dM = \int \mu P r^2\,d\theta\,dr = \mu P\frac{R^3}{3}\,2\pi = \frac{2}{3}\mu P\pi R^3$$

$$\boxed{M = \frac{2}{3}\mu T R}$$

حداکثر گشتاور: $M = \frac{2}{3}\mu_s T R$ → در ترمزها $\mu = \mu_d$

فرض ۲: سایش یکنواخت ← ثابت $= Pr$ (کلاچ کارکرده)

$$dN = PdA = Pr\,d\theta\,dr$$

$$T = \int dN = Pr\int d\theta\,dr = Pr\times 2\pi R \Rightarrow Pr = \frac{T}{2\pi R} = \text{ثابت}$$

$$M = \int dM = \int \mu P r^2\,d\theta\,dr = \mu\times\frac{T}{2\pi R}\underbrace{\int r\,d\theta\,dr}_{2\pi\frac{R^2}{2}}$$

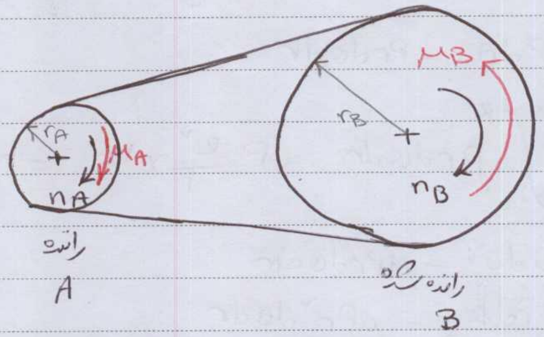
$$\Rightarrow \boxed{M = \frac{1}{2}\mu T R}$$

PAPCO

Subject:
Year.   Month.   Date.   ( )

اصطکاک در تسمه ها:

انتقال قدرت تسمه ای ، ترمز تسمه ای


r_A
M_A
n_A
r_B
M_B
n_B
راننده
A
رانده شده
B

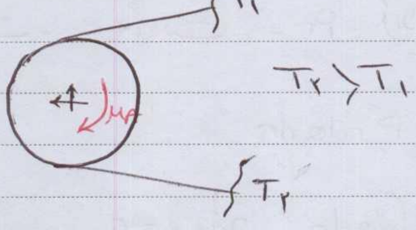
$$\cancel{\frac{n_B}{n_A} = \frac{r_A}{r_B}}$$

نسبت دورهای گردش سوم

$$\frac{n_B}{n_A} = \frac{r_A}{r_B}$$ سرعت در تمام قسمت های تسمه یکسان ← تسمه بدون لغزش

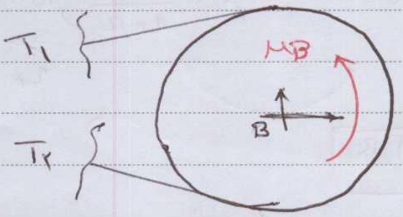
$$\frac{M_B}{M_A} = \frac{r_B}{r_A}$$

نسبت گشتاورها



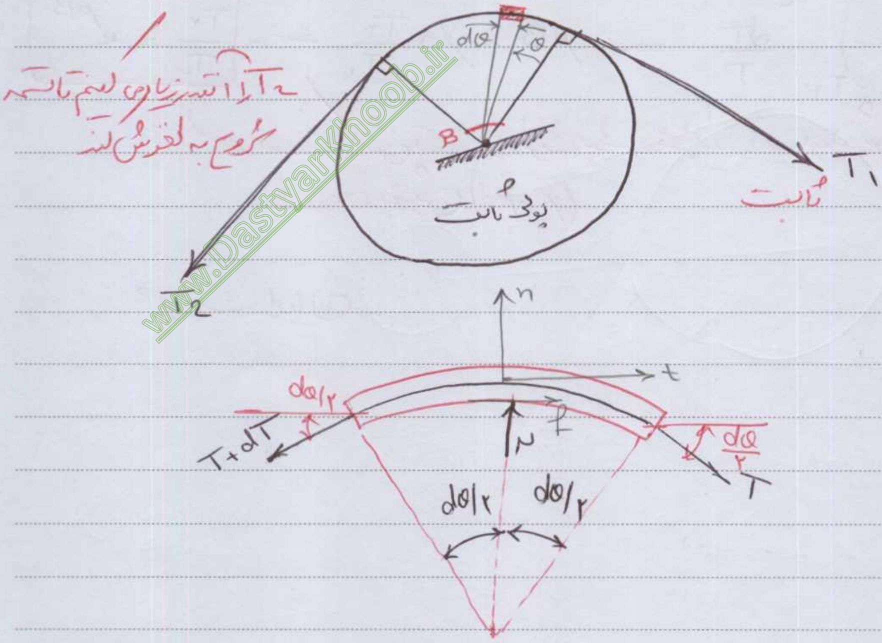
$T_2 > T_1$

$$\cancel{M_A} \quad -M_A + r_A T_2 - r_A T_1 \Rightarrow M_A = r_A(T_2 - T_1)$$



$$\boxed{\frac{M_A}{M_B} = \frac{r_A}{r_B}}$$

$$M_B + r_B T_1 - r_B T_2 = 0 \Rightarrow M_B = r_B(T_2 - T_1)$$


T_2 / T_1 تا حد زیادی کم کنیم تا تسمه شروع به لغزش کند
$d\theta$
θ
B
پولی ثابت
T_1
ثابت
T_2
n
t
$d\theta/2$
$T+dT$
N
f
$\frac{d\theta}{2}$
T
$d\theta/2$
$d\theta/2$

$$\sum F_t = 0 \Rightarrow -(T+dT)\cos\frac{d\theta}{2} + f + T\cos\frac{d\theta}{2}$$

$$\Rightarrow -dT\cos\frac{d\theta}{2} + f = 0 \rightarrow f = dT\cos\frac{d\theta}{2}$$

اگر تسمه را در آستانه لغزش یا در حال لغزش در نظر بگیریم رابطه‌ی $f = \mu N$ برقرار است

$$\sum F_n = 0 \Rightarrow N - (T+dT)\sin\frac{d\theta}{2} - T\sin\frac{d\theta}{2} = 0$$

$$\Rightarrow N - 2T\sin\frac{d\theta}{2} - \underbrace{dT\sin\frac{d\theta}{2}}_{\simeq dT\, d\theta/2 \simeq 0} = 0$$

(دو جزء دیفرانسیلی در هم ضرب شده اند)

$\cos d\theta/2 \simeq 1$ ⟵ $\frac{d\theta}{2}$ زاویه کوچکی است

$\sin d\theta/2 \simeq d\theta/2$

$$\Rightarrow N = T\,d\theta$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{dT}{T\,d\theta} \Rightarrow \mu\, d\theta = \frac{dT}{T}$$

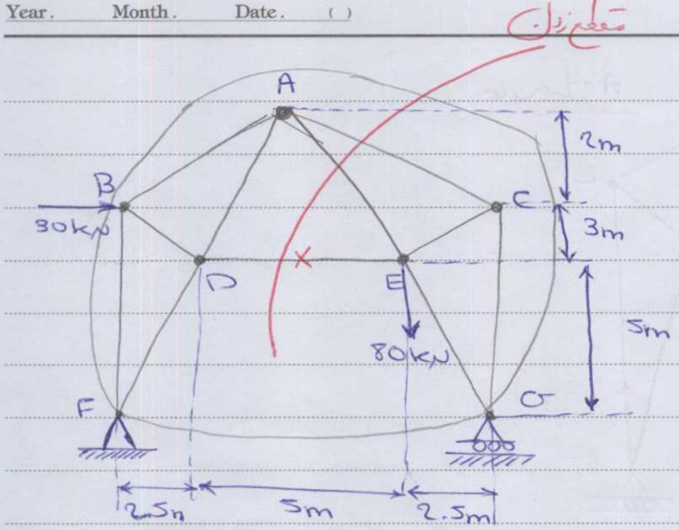
$\mu N = dT$

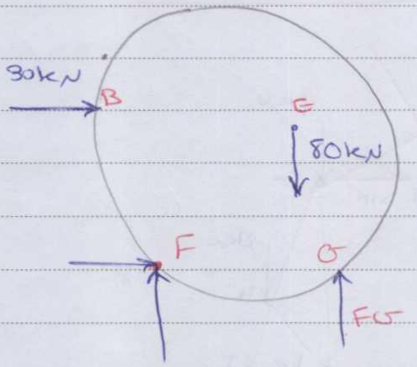
Subject:
Year. Month. Date. ( )

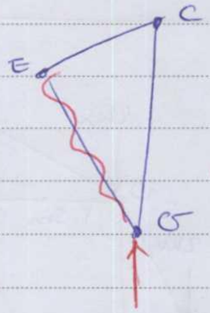
$$\int_0^{\beta} \mu \, d\theta = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} \Rightarrow \mu\beta = \ln \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \boxed{\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu\beta}}$$

نسبت کشش تسمه در دو طرف پولی در شرایط آستانه لغزش $(\mu = \mu_s)$
یا در حال لغزش $(\mu = \mu_d)$

β برحسب رادیان .


مقطع زدن
A
B
C
D
E
F
G
30kN
80kN
2m
3m
5m
2.5m
5m
2.5m


30kN
B
E
80kN
F
G
F_G



هیچ نیروی متعامد بر EG اعمال نمی‌شود

$\Longrightarrow EG = 0$

$\sum M_F = 0 \Longrightarrow F_G = \dots$

$F_{CG} = F_G$

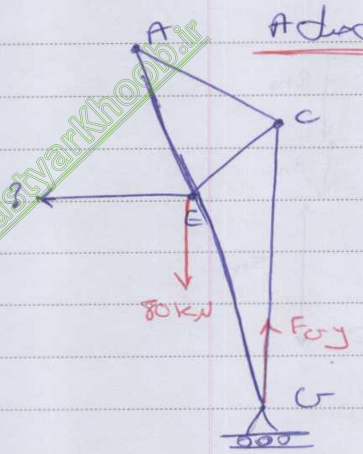
$C: \sum F_x = 0 \ , \sum F_y = 0 \Longrightarrow AC = \dots , EC = \dots$

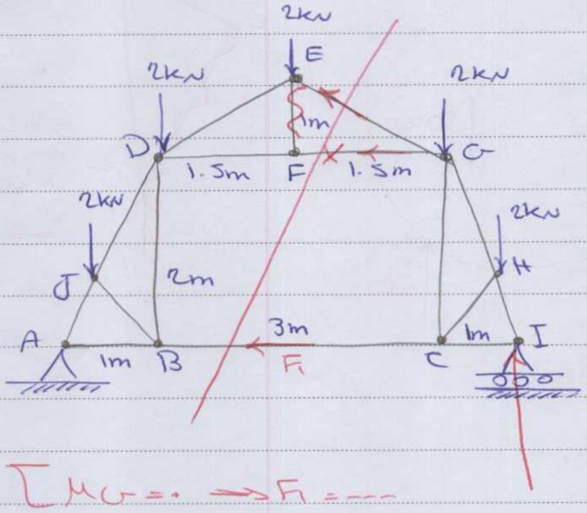
$E: \sum F_x = 0 \ , \sum F_y = 0 \Longrightarrow AE = \dots , DE = \dots$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

از مقطع زدن

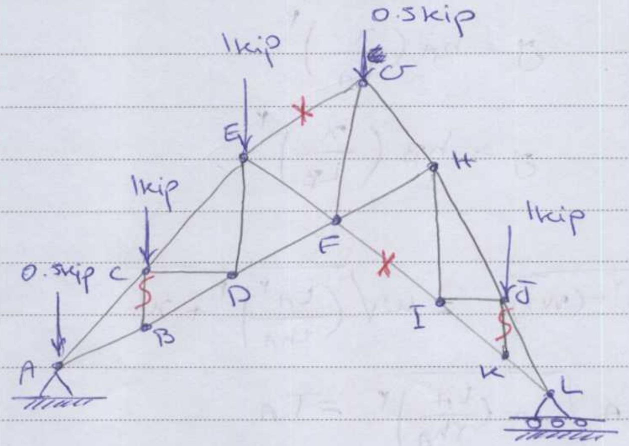
ممان حول A


A
C
E
?
80KN
F_{Gy}
G

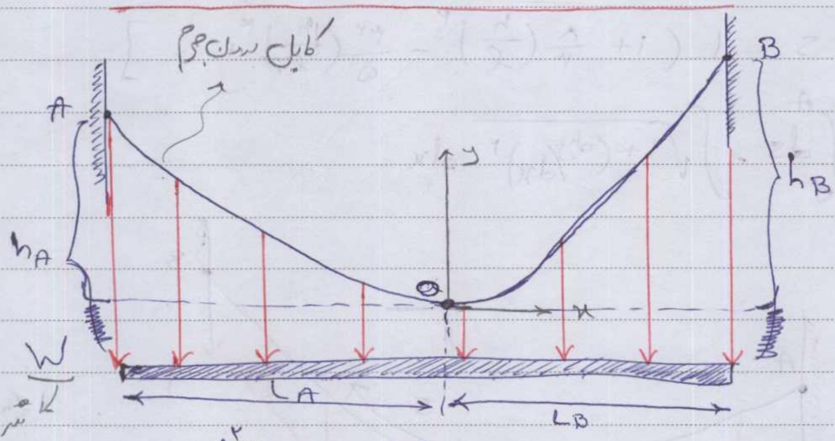

2KN
E
2KN
2KN
D
G
1m
1.5m
F
1.5m
2KN
2KN
J
2m
H
A
1m
B
3m
F_1
C
1m
I

$\sum M_G = 0 \Rightarrow F_1 = ---$

Subject:
Year.　Month.　Date.　( )


0.5kip
1kip
G
E
H
1kip
F
1kip
0.5kip
C
D
I
J
B
K
A
L

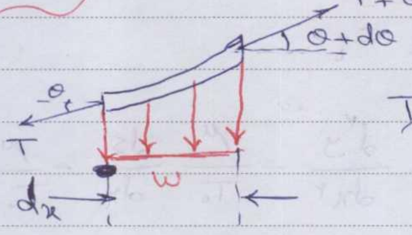
4/16　4/22　4/35　4/48


کابل بدون جرم
A
B
h_A
h_B
y
O
x
L_A
L_B
$\frac{W}{L}$

نیرو در واحد طول x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{\boxed{T_0}} \longrightarrow$$ کمترین کشش در نقطه O اتفاق می افتد

تعادل در راستای y


T + dT
θ + dθ
θ
T
w
dx

تعادل در راستای x

$$\cancel{T\cos\theta} = (T+dT)\underbrace{\cos(\theta+d\theta)}_{\cos\theta\cos d\theta \;-\sin\theta\sin d\theta}$$

$$= \cancel{T\cos\theta}\times 1 - T\sin\theta\, d\theta + dT\cos\theta$$

PAPCO

(تغییر T در راستای x) همه جا ثابت است $\Longrightarrow$ $T_0 \leftarrow\!\sim\!\sim$ * $d(\underbrace{T\cos\theta}_{T_0}) = 0$

Subject:
Year.   Month.   Date.   ( )

$$\Longrightarrow y = \frac{w x^2}{2T_0} \qquad y = h_A\left(\frac{x}{L_A}\right)^2$$

$$y = h_B\left(\frac{x}{L_B}\right)^2$$

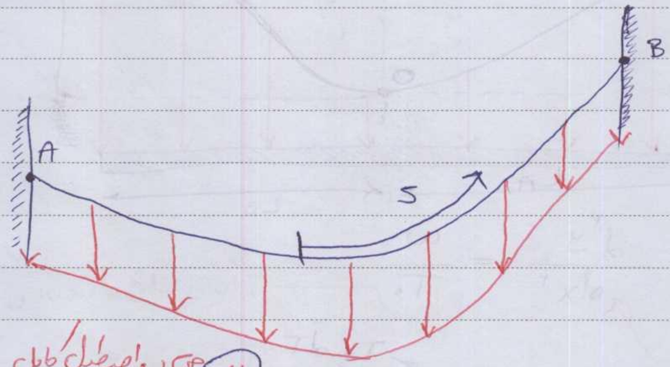
کابل در هر نقطه $T(x) = \sqrt{T_0^2 + (wx)^2} = w\sqrt{\left(\frac{L_A^2}{2h_A}\right)^2 + x^2}$

$$\xrightarrow{x = L_A} w L_A \sqrt{1 + \left(\frac{L_A}{2h_A}\right)^2} = T_A$$

$$\text{-----} \; T_B = w L_B \sqrt{1 + \left(\frac{L_B}{2h_B}\right)^2}$$

طول کابل $S = L\left(1 + \frac{8}{3}\left(\frac{h}{l}\right)^2 - \frac{32}{5}\left(\frac{h}{l}\right)^4 + \cdots\right]$

$$S = \int_0^A ds = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$



جرم در واحد طول کابل $\boxed{\mu} \rightarrow$ ثابت

$$w = \frac{d}{dx}(\mu s) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu}{T_0}\frac{ds}{dx} = \frac{\mu}{T_0}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\Longrightarrow \ln($$

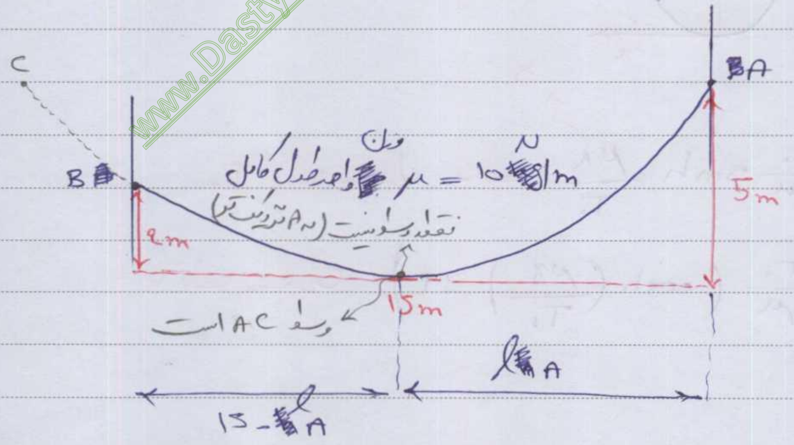
P4PCO

$$\Longrightarrow y = \frac{T_0}{\mu}\left(\cosh\left(\frac{\mu x}{T_0}\right) - 1\right)$$

$T_A = T_0 + \mu h_A \qquad T(y) = T_0 + \mu y$

$$s = \frac{T_0}{\mu} \sinh \frac{\mu x}{T_0}$$

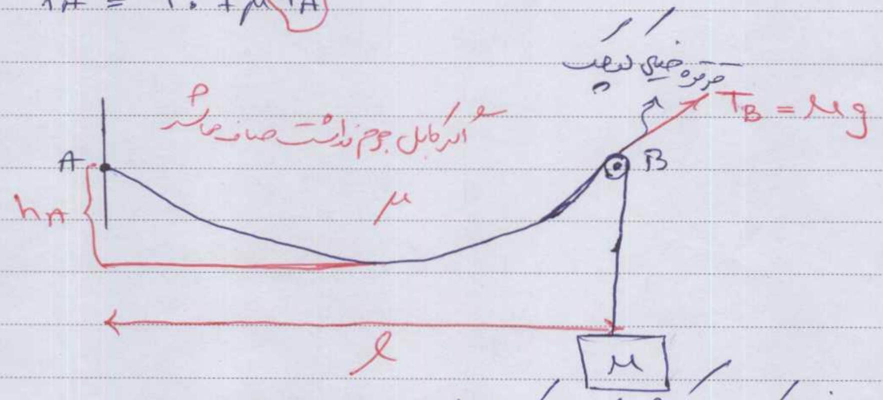
مثال)


C
B
A
وزن واحد طول کابل $\mu = 10\ N/m$
نقطه پایینیست (به A نزدیک تر)
9m
5m
15m
وسط AC است
l_A
$15 - l_A$

$$y = \frac{T_0}{\mu}\left(\cosh\left(\frac{\mu x}{T_0}\right) - 1\right) \Longrightarrow$$ دو معادله دو مجهول (l_A, T_0)

$T_A = T_0 + \mu \boxed{h_A}^{5}$

مثال)


قرقره خیلی کوچک
$T_B = Mg$
اگر کابل جرم نداشت صاف می‌شد
A
B
h_A
μ
l
M

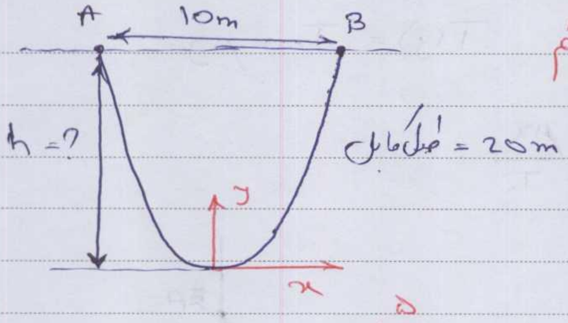
در هر ارتفاعی کشش کابل یکسان است $\Longleftarrow T_A = T_B$

دو معادله دو مجهول ← چون A, B هم ارتفاعند

اگر A, B غیر هم ارتفاعند ⇐ ۴ معادله ۴ مجهول

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نکته : دستگاه همیشه رسم



$$S = \frac{T_0}{\mu}\sinh\frac{\mu \overset{\text{۵}}{x}}{T_0} \Longrightarrow T_0 \text{ تنها مجهول}$$

$$\boxed{y}_{\downarrow h} = \frac{T_0}{\mu}\left(\cosh\left(\frac{\mu x}{T_0}\right) - 1\right) \quad h \text{ تنها مجهول}$$

۵-۱۰۷ / ۵-۱۱۵ / ۵-۱۱۴ / ۵-۱۵۵ / ۵-۱۲۸
۵-۱۵۰

PAPCO