به نام خالق یکتا

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده‌ی علوم ریاضی

نمونه‌ی آزمون‌های ریاضی عمومی ۲

آزمون پایان ترم درس ریاضی عمومی ۲ نیمسال دوم ۸۱—۸۰   مدت آزمون ۱۵۰ دقیقه

۱. تابع $f(x,y)=xe^y$ مفروض است.

الف) با استفاده از تعریف نشان دهید f در $(۰,۰)$ مشتق پذیر است.

ب) اکسترممهای f را روی ناحیه‌ی بسته و کراندار زیر به دست آورید:

$$\{(x,y)|۰\leq x\leq ۱-y^۲\}$$

۲. فرض کنید f تابعی مشتق پذیر است و z تابعی مشتق پذیر از x,y که در معادله‌ی $f(cx-az,cy-bz)=۰$ صدق می‌کند(a,b,c اعداد حقیقی ثابت هستند). ثابت کنید:

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$$

۳. فرض کنید T ناحیه‌ی محصور به استوانه‌های $x^۲+y^۲-۲y=۰$ ، $x^۲+y^۲-۴y=۰$ و مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ و صفحه‌ی xoy باشد. مطلوب است محاسبه‌ی

الف) حجم ناحیه‌ی T.

ب) $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ که S رویه‌ی بسته‌ی محصور کننده‌ی T است و $\mathbf{n}$ یکه‌ی نرمال قائم S رو به خارج است و $\mathbf{F}(x,y,z)=[x+\sin(yz)]\mathbf{i}+[y+e^{xz}]\mathbf{j}+[z+\sin(xy)]\mathbf{k}$.

۴. فرض کنید C منحنی حاصل از تلاقی سهمی‌گون $z=۱-x^۲-y^۲$ و صفحه‌ی $z+۲y=۱$ باشد که جهت حرکت روی آن از طرف مثبت محور z عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. مطلوب است محاسبه‌ی $\int_C \mathbf{F}\cdot dr$ با فرض

$$\mathbf{F}(x,y,z)=xz^۲\mathbf{i}+yz\mathbf{j}+x^۲\mathbf{k}$$

۵. مطلوب است محاسبه‌ی

الف) $\int\int_D v\ \cos(\frac{u}{v})\,dA$ که D ناحیه‌ی محدود به خطوط $v=u$ و $v=-u$ و $v=۱$ می باشد.

ب) $\int\int_S (۱-z)\ \cos(\frac{x-y}{x+y})\,d\sigma$ که S بخشی از صفحه‌ی $x+y+z=۱$ است که در یک هشتم اول فضا قرار دارد.

((موفّق باشید))

آزمون پایان ترم ریاضی عمومی دو   خرداد ۱۳۸۳   مدت آزمون ۱۵۰ دقیقه

---

۱ . فرض کنید $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تابع دومتغیره‌ی با تعریف زیر باشد

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{y} & y\neq 0 \\ 2x & y=0 \end{cases}$$

الف) برای بردار یکه‌ی $\vec{u}=a\,\vec{i}+b\,\vec{j}$ ، مشتق سویی $D_u\,f(0,0)$ را محاسبه کنید.
(توجه کنید که تابع f در $(0,0)$ مشتق پذیر نیست)

ب) تمام سوهای $\vec{u}=a\,\vec{i}+b\,\vec{j}$ را بیابید که در تساوی $D_u\,f(0,0)=1$ صدق می‌کنند.

۲ . فرض کنید $f\;:\;\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ تابع با تعریف $f\,(x,y)=x^3+y^3-3x^2$ باشد.

الف) اکسترمم‌های مطلق تابع f روی ناحیه‌ی $D=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\;:\;x^2+y^2\leq 1\,\}$ را بیابید.

ب) نشان دهید $\iint_D |f(x,y)|\;dA\leq 4\pi$.

۳ . فرض کنید T ناحیه‌ی محدود به داخل سهمیگون $z=x^2+y^2$ و خارج از مخروط $z=\sqrt{3\,(x^2+y^2)}$ باشد.

الف) ناحیه‌ی T را بر حسب مختصات استوانه‌ای و کروی مشخص کنید.

ب) حجم T را محاسبه کنید.

۴ . فرض کنید C منحنی رسم شده در شکل زیر باشد. مطلوب است

$$\int_C \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+4\,y^2}$$

۵ . فرض کنید S بخشی از سطح بیضیگون $4\,x^2+4\,y^2+z^2=5$ باشد که در ناحیه‌ی $z\geq 1$ قرار دارد و $\vec{n}$ قایم یکه‌ی بالایی بر سطح S باشد و $\vec{F}(x,y,z)=2x\,y\,z\;\vec{i}+(z-y^2z)\;\vec{j}+z^2\;\vec{k}$. مطلوب است

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\;d\sigma$$

تنها به یکی از دو سوال ۶ و′۶ پاسخ دهید !

۶ . فرض کنید D ناحیه‌ی محدود بین منحنی‌های $xy=\pi$ و $y=0$ و $x=1$ و $x=2$ باشد. مطلوب است

$$\iint_D x\;|\cos(xy)|\;dA$$

′۶ . فرض کنید $b>0$ و $0\leq c<d\leq a$ و A مساحت بخشی از سطح کره‌ی $x^2+y^2+z^2=a^2$ باشد که بین صفحات $z=c$ و $z=d$ قرار دارد و B مساحت بخشی از سطح استوانه‌ی $x^2+y^2=b^2$ باشد که بین این صفحات قرار دارد. نشان دهید $\dfrac{A}{B}=\dfrac{a}{b}$.

موفّق باشید.

۱ . فرض کنید C منحنی $y = \ln x$ باشد. مطلوب است

الف) تابع انحنای C و تعیین نقطه‌ای از C که دارای بیشترین انحناست.

ب) مرکز و شعاع انحنای C در نقطه $(۱, ۰)$.

۲ . فرض کنید S سطح دوار حاصل از دوران منحنی $x^۲ - z^۲ = ۱$ حول محور z ها باشد. مطلوب است

الف) معادله و نمودار سطح S .

ب) معادله‌ی خطوط واقع بر سطح S و مار بر نقطه‌ی $(۱, ۱, ۱)$.

۳ . فرض کنید $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ تابع دومتغیره‌ی با تعریف زیر باشد

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y| \ \sin x}{|x| + |y|} & (x,y) \neq (۰, ۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰, ۰) \end{cases}$$

الف) نشان دهید تابع f در $(۰, ۰)$ پیوسته است.

ب) تمام سوهای یکه‌ی $\vec{u} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$ را بیابید که در تساوی زیر صدق می‌کنند

$$D_u\, f(۰, ۰) = \nabla f(۰, ۰) \cdot \vec{u}$$

۴ . معادله‌ی خط مماس بر منحنی فصل مشترک سطوح $z = x^۲ + y^۲$ و $۲\,x^۲ + ۲\,y^۲ + z^۲ = ۸$ را در نقطه‌ی $(-۱, ۱, ۲)$ مشخص کنید.

۵ . فرض کنید $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و z به عنوان تابعی از متغیرهای مستقل x و y با معادله‌ی $x - y = f(z - x , z - y)$ داده شده باشد. نشان دهید

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = ۱$$

٦ . اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x,y) = x^۲ + y^۲ - ۲\,(x + y)$ را روی ناحیه زیر پیدا کنید

$$D = \{\ (x,y) \mid \ x^۲ + y^۲ \leq ۴,\ x \geq ۰,\ y \geq ۰\ \}$$

مدت آزمون ۱۴۰ دقیقه .... موفّق باشید.

۱) خم C به معادله‌ی $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t\,\vec{j} + \sqrt{1-2t^2}\,\vec{k}$ مفروض است.

الف) ثابت کنید انحنای خم C در تمام نقاط ثابت است.

ب) ثابت کنید خم C مسطح است. (۱۵ نمره)

---

۲) رویه‌ی S به معادله‌ی $z = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ روی $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le e^2\}$ را توصیف کرده و نمودار آن را رسم نمایید. (۱۰ نمره)

---

۳) تابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^5 - 3y^5}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

مفروض است.

الف) نشان دهید f در $(0,0)$ پیوسته است.

ب) مشتقات جزیی f را در $(0,0)$ محاسبه کنید.

ج) نشان دهید f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست. (۱۵ نمره)

---

۴) فرض کنید توابع حقیقی یک متغیره‌ی f و g دست کم دوبار مشتق‌پذیر باشند. اگر $u = u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$، نشان دهید $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. (۱۵ نمره)

---

۵) رویه‌ی S به معادله‌ی $z = xy - y + 1$ و خم C واقع بر S به معادله‌ی $x = t$ ، $y = 3 - t$ و $z = -t^2 + 4t - 2$ مفروضند.

الف) نشان دهید صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی S در هر نقطه‌ی دلخواه از خم C، بر صفحه‌ی π به معادله‌ی $x + y + 2z = 0$ عمود است.

ب) در چه نقطه یا نقاطی از رویه‌ی S صفحه‌ی مماس بر رویه با صفحه‌ی π موازی است؟ (۱۵ نمره)

موفق باشید

کلید آزمون میان ترم ریاضی عمومی II . فروردین ۱۳۸۵

۱) خم C به معادله‌ی $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t\,\vec{j} + \sqrt{1-2t^2}\,\vec{k}$ مفروض است.

الف) ثابت کنید انحنای خم C در تمام نقاط ثابت است.

ب) ثابت کنید خم C مسطح است.

پاسخ الف.

$$\vec{r'}(t) = \vec{i} + \vec{j} - \frac{2t}{\sqrt{1-2t^2}}\vec{k} \quad , \quad \vec{r''}(t) = -\frac{2}{(\sqrt{1-2t^2})^3}\vec{k}$$

$$\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -\frac{2t}{\sqrt{1-2t^2}} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{(\sqrt{1-2t^2})^3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{(\sqrt{1-2t^2})^3}\vec{i} + \frac{2}{(\sqrt{1-2t^2})^3}\vec{j}$$

$$||\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t)|| = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{1-2t^2})^3} \quad , \quad ||\vec{r'}(t)|| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2t^2}}$$

درنتیجه $\kappa = \dfrac{||\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t)||}{||\vec{r'}(t)||^3} = 1$.

پاسخ ب. باید ثابت کنیم بردار قائم دوم خم، یک بردار ثابت است.

روش اول.

$$B = \frac{\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t)}{||\vec{r'}(t) \times \vec{r''}(t)||} = \frac{(\sqrt{1-2t^2})^3}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{2}{(\sqrt{1-2t^2})^3}\vec{i} + \frac{2}{(\sqrt{1-2t^2})^3}\vec{j}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

روش دوم.

$$T = \frac{\vec{r'}(t)}{||\vec{r'}(t)||} = \frac{\sqrt{1-2t^2}}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{\sqrt{1-2t^2}}{\sqrt{2}}\vec{j} - \sqrt{2}\vec{k}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{-\sqrt{2}t}{\sqrt{1-2t^2}}\vec{i} + \frac{-\sqrt{2}t}{\sqrt{1-2t^2}}\vec{j} - \sqrt{2}\vec{k}$$

$$||\frac{dT}{dt}|| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2t^2}} \quad , \quad N = \frac{dT/dt}{||dT/dt||} = -t\vec{i} - t\vec{j} - \sqrt{1-2t^2}\vec{k}$$

و درنتیجه

$$B = T \times N = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\sqrt{1-2t^2}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{1-2t^2}}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2}t \\ -t & -t & -\sqrt{1-2t^2} \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

یعنی B یک بردار ثابت.

۲) رویه‌ی S به معادله‌ی $z = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ روی $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le e^2\}$ را توصیف کرده و نمودار آن را رسم نمایید.

پاسخ. با توجه به این که $z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\ln(\sqrt{x^2+y^2})$، معادله‌ی رویه را می توان به ازای $F(x,z)=z-\ln x$ یا $F(y,z)=z-\ln y$ به صورت $F(\sqrt{x^2+y^2},z)=0$ در نظر گرفت.

پس می‌توان گفت S رویه‌ای است دوار که از دوران خم $z=\ln x$ به ازای $1\leq x\leq e$ یا از دوران خم $z=\ln y$ به ازای $1\leq y\leq e$ حول محور z—ها به دست آمده است.

۳) تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^5-3y^5}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید f در $(0,0)$ پیوسته است.

ب) مشتقات جزیی f را در $(0,0)$ محاسبه کنید.

ج) نشان دهید f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست.

پاسخ الف. باید نشان دهیم

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0\ :\ \forall\,(x,y)\ (\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta\Rightarrow|\frac{2x^5-3y^5}{(x^2+y^2)^2}-0|<\varepsilon)$$

$$\begin{aligned}|\frac{2x^5-3y^5}{(x^2+y^2)^2}-0| &\leq 2|x|(\frac{x^2}{x^2+y^2})^2+3|y|(\frac{y^2}{x^2+y^2})^2\\ &\leq 2|x|+3|y|\\ &\leq 5\sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$

پس برای $\varepsilon>0$ کافی است قرار دهیم $\delta=\frac{1}{5}\varepsilon$. در این صورت داریم

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta=\frac{1}{5}\varepsilon\Rightarrow 5\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon\Rightarrow|\frac{2x^5-3y^5}{(x^2+y^2)^2}-0|<\varepsilon$$

پاسخ ب.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\frac{2h^5}{h^5}=2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim\frac{3h^5}{h^5}=3$$

پاسخ ج. فرض کنیم تابع f در نقطه‌ی $(0,0)$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت توابع α و β وجود دارند به قسمی که $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\alpha(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\beta(x,y)=0$ و

$$f(x,y)-f(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y+\alpha(x,y)x+\beta(x,y)y$$

(برای سادگی به جای Δx از x و به جای Δy از y استفاده شده است.) بنابر این باید داشته باشیم

$$\frac{2x^5-3y^5}{(x^2+y^2)^2}=2x+3y+\alpha(x,y)x+\beta(x,y)y\ \ ,\ \ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\alpha(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\beta(x,y)=0$$

به ویژه روی مسیر به معادله‌ی $x=t\ ,\ y=t$ داریم

$$\frac{2t^5-3t^5}{(t^2+t^2)^2}=2t+3t+\alpha(t,t)\,t+\beta(t,t)\,t$$

یا $-t = ۵t + \alpha(t,t)\ t + \beta(t,t)\ t$

که با تقسیم دو طرف بر $t \neq ۰$ این معادله هم ارز است با $-٦ = \alpha(t,t) + \beta(t,t)$

اما این غیر ممکن است زیرا از $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \alpha(x,y) = \lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \beta(x,y) = ۰$ نتیجه می‌شود $-٦ = \lim_{t\to ۰}(\alpha(t,t) + \beta(t,t)) = ۰$.

۴) فرض کنید توابع حقیقی یک متغیره‌ی f و g دست کم دوبار مشتق‌پذیر باشند. اگر $u = u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$، نشان دهید $\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} - ۲\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = ۰$.

پاسخ.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x+y) + xf'(x+y) + g'(x+y)$$

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} = ۲f'(x+y) + xf''(x+y) + yg''(x+y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xf'(x+y) + g(x+y) + yg'(x,y)$$

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} = ۲g'(x+y) + xf''(x+y) + yg''(x+y)$$

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y} = f'(x+y) + xf''(x+y) + g'(x+y) + yg''(x+y)$$

به این ترتیب

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} - ۲\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = ۰$$

۵) رویه‌ی S به معادله‌ی $z = xy - y + ۱$ و خم C واقع بر S به معادله‌ی $x = t$ ، $y = ۳ - t$ و $z = -t^۲ + ۴t - ۲$ مفروضند.

الف) نشان دهید صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی S در هر نقطه‌ی دلخواه از خم C، بر صفحه‌ی π به معادله‌ی $x + y + ۲z = ۰$ عمود است.

ب) در چه نقطه یا نقاطی از رویه‌ی S صفحه‌ی مماس بر رویه با صفحه‌ی π موازی است؟

پاسخ الف. معادله‌ی ضمنی رویه‌ی S عبارت است از $F(x,y,z) = z - xy + y - ۱ = ۰$. پس

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\,\vec{k} = -y\,\vec{i} + (۱-x)\,\vec{j} + \vec{k}$$

از سوی دیگر بردار نرمال صفحه‌ی π عبارت است از $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + ۲\vec{k}$. بنابر این در هر نقطه‌ی دلخواه از خم C به مختصات $x = t$ ، $y = ۳ - t$ و $z = -t^۲ + ۴t - ۲$ داریم $\vec{n} \cdot \nabla F = (\vec{i} + \vec{j} + ۲\vec{k}) \cdot (-(۳-t)\,\vec{i} + (۱-t)\,\vec{j} + \vec{k}) = (t-۳) + (۱-t) + ۲ = ۰$.

پاسخ ب.

روش اول. در نقاطی از رویه‌ی S صفحه‌ی مماس بر رویه با صفحه‌ی π موازی است که $\vec{n} || \nabla F$ یعنی

$\frac{۱}{۲} = \frac{۱ - x}{۱} = \frac{-y}{۱}$ پس $x = \frac{۱}{۲} = -y$. به این ترتیب $z = xy - y + ۱ = \frac{۵}{۴}$. بنابر این تنها جواب نقطه‌ی $(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۴})$ است.

روش دوم . در نقاطی از رویه‌ی S صفحه‌ی مماس بر رویه با صفحه‌ی π موازی است که $\vec{n} \times \nabla F = \vec{۰}$ یعنی $\vec{۰} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۱ & ۱ & ۲ \\ -y & ۱ - x & ۱ \end{vmatrix}$ یا $(۱ - ۲x)\vec{i} - (۱ + ۲y)\vec{j} + (۱ - x + y)\vec{k} = \vec{۰}$. پس $x = \frac{۱}{۲} = -y$. به این ترتیب $z = xy - y + ۱ = \frac{۵}{۴}$. بنابر این تنها جواب نقطه‌ی $(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۴})$ است.

۱. تابع $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^۲y}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ مفروض است. کلیه‌ی بردارهای یکه چون $u=a\,\mathbf{i}+b\,\mathbf{j}$ را مشخص کنید که برای آنها داشته باشیم $D_uf(۰,۰)=\nabla f(۰,۰)\cdot u$.

(۱۰ نمره)

---

۲. اکسترمم‌های مطلق و نسبی تابع $f(x,y)=۲+x^۲+y^۲$ را روی ناحیه‌ی بسته و کراندار $D=\{\ (x,y)\ :\ \frac{x^۲}{۴}+\frac{y^۲}{۹}\leq ۱\}$ به دست آورید.

(۱۵ نمره)

---

۳. فرض کنید D ناحیه‌ی محصور بین خطوط $x+y=۱$ ، $x+y=۲$ ، $x=۰$ و $y=۰$ است. مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال

$$\iint_D \frac{(x-y)^۲}{(x+y)^۳}\,dA$$

(۱۵ نمره)

---

۴. فرض کنید D ناحیه‌ی درون مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ محصور توسط کره‌ی $x^۲+y^۲+(z-a)^۲=a^۲$ است ($a>۰$ ثابت). مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال زیر (۱۵ نمره)

$$\iiint_D\left(\frac{۱}{x^۲+y^۲+z^۲}-۳\right)dV$$

(بقیه‌ی پرسش‌ها، پشت برگه می‌باشند)

۵. فرض کنید $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ توابعی با مشتقات مرتبه‌ی دوم پیوسته هستند و $f(۰) = ۱$.
مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال

$$\int_C \left(۲xf(y) + y^۲ g'(x)\right) dx \; + \; \left(x^۲ f'(y) + ۲yg(x)\right) dy$$

که در آن C نیم‌دایره‌ی بالایی از دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲x$ پیموده شده از نقطه‌ی $A = (۰, ۰)$ به نقطه‌ی $B = (۲, ۰)$ است.

(۲۰ نمره)

---

۶. فرض کنید S بخشی از سهمی‌گون $z = x^۲ + y^۲$ زیر صفحه‌ی $z = ۲$ است. برای

$$F(x, y, z) = (۸x + \sin(y^۲ z))\ \mathbf{i} + (۲y - e^{xz})\ \mathbf{j} - ۶z\ \mathbf{k}$$

مطلوب است محاسبه‌ی $\iint_S F \cdot n \, d\sigma$ ، که در آن n قائم یکه‌ی رو به سمت خارج S است.

(۲۰ نمره)

---

۷. فرض کنید π صفحه‌ای با بردار نرمال یکه‌ی $n = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$ و γ مسیر بسته‌ی ساده‌ای در π است. برای میدان $F(x, y, z) = (bz - cy)\ \mathbf{i} + (cx - az)\ \mathbf{j} + (ay - bx)\ \mathbf{k}$ نشان دهید که مقدار $\frac{۱}{۲}\int_\gamma F \cdot dr$ برابر است با مساحت ناحیه‌ای از صفحه‌ی π که توسط منحنی γ محصور شده است.

(۱۵ نمره)

موفق باشید

پاسخ پرسش ۱.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$$

بنابراین $\nabla f(0,0)=(0,0)$ و در نتیجه $\nabla f(0,0)\cdot u=0$. (۳ نمره)

از طرف دیگر

$$D_u f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3a^2b}{t^2(a^2+b^2)}-0}{t}=\frac{a^2b}{a^2+b^2}=a^2b \qquad \text{(۴ نمره)}$$

بنابراین $D_u f(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot u=0$ اگر و تنها اگر $a^2b=0$ (یعنی $a=0$ یا $b=0$).
به این ترتیب جهت‌های خواسته شده عبارتند از $\mathbf{i}$، $-\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، $-\mathbf{j}$. (۳ نمره)

پاسخ پرسش ۲. برای تابع $f(x,y)=2+x^2+y^2$ داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}=2y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$$

بنابر این

$$\nabla f=0 \Rightarrow x=y=0$$

پس $P_0=(0,0)$ تنها نقطه‌ی بحرانی f است.
از سوی دیگر

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)=2 \ , \ B=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)=2 \quad , \quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(P_0)=0$$

پس $\Delta(P_0)=AC-B^2=4>0$. بنابر این f در P_0 یک مینیمم نسبی دارد. (۵ نمره)

روی مرز ناحیه‌ی D از روش تکثیرکنندگان لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

$$H(x,y,\lambda)=2+x^2+y^2-\lambda(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1)$$

دستگاه زیر به دست می‌آید.

$$1)\quad H_x=2x-\lambda\frac{x}{2}=0$$

$$۲)\quad H_y = ۲y - ۲\lambda\frac{y}{۹} = ۰$$

$$۳)\quad H_\lambda = \frac{x^۲}{۴} + \frac{y^۲}{۹} - ۱ = ۰$$

(۴ نمره)

از معادله‌ی اول $x = ۰$ یا $\lambda = ۴$ و از معادله‌ی دوم $y = ۰$ یا $\lambda = ۹$ به دست می‌آید. به ازای $x = ۰$ از معادله‌ی سوم $y = \pm ۳$ و به ازای $y = ۰$ از معادله‌ی سوم $x = \pm ۲$ به دست می‌آید.

بنابر این جواب‌های دستگاه عبارت است از

$$x = ۰\ ,\ y = ۳\ ,\ \lambda = ۹\ \Rightarrow\ P_۱ = (۰, ۳)$$

$$x = ۰\ ,\ y = -۳\ ,\ \lambda = ۹\ \Rightarrow\ P_۲ = (۰, -۳)$$

$$x = ۲\ ,\ y = ۰\ ,\ \lambda = ۴\ \Rightarrow\ P_۳ = (۲, ۰)$$

$$x = -۲\ ,\ y = ۰\ ,\ \lambda = ۴\ \Rightarrow\ P_۴ = (-۲, ۰)$$

(۴ نمره)

از $f(P_۱) = f(P_۲) = ۱۱$ ، $f(P_۳) = f(P_۴) = ٦$ و $f(P_۰) = ۲$ نتیجه می‌شود $P_۱$ و $P_۲$ ماکزیمم مطلق و $P_۰$ مینیمم مطلق f روی D هستند. (۲ نمره)

پاسخ پرسش ۳. با انتخاب $x + y = u$ و $x - y = v$ خواهیم داشت

$$y = \frac{۱}{۲}(u - v) \quad , \quad x = \frac{۱}{۲}(u + v)$$

بنابراین

$$\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = \left|\begin{vmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \end{vmatrix}\right| = \frac{۱}{۲}$$

(٦ نمره)

مرزهای ناحیه‌ی جدید D^* حاصل از تغییر مختصات (x, y) به (u, v) عبارت است از

$$x = ۰ \Rightarrow u + v = ۰ \Rightarrow v = -u \quad , \quad y = ۰ \Rightarrow u - v = ۰ \Rightarrow v = u$$

و نیز

$$۱ \le x + y \le ۲ \Rightarrow ۱ \le u \le ۲$$

به این ترتیب

$$D^* = \{(u, v)\ :\ ۱ \le u \le ۲\ \ ,\ \ -u \le v \le u\}$$

(۴ نمره)

$$\iint_D \frac{(x-y)^۲}{(x+y)^۳} dA = \frac{۱}{۲}\int_۱^۲ \int_{-u}^{u} \frac{v^۲}{u^۳} dv\, du$$ (۵ نمره)

$$= \frac{۱}{۲}\int_۱^۲ \frac{v^۳}{۳u^۳}\Big|_{v=-u}^{v=u} du$$

$$= \frac{۱}{۳}\int_۱^۲ du$$

$$= \frac{۱}{۳}$$

پاسخ پرسش ۴. از تعریف ناحیه‌ی D دیده می‌شود که استفاده از مختصات کروی مناسب‌تر است. از حل دستگاه

$$\begin{cases} x^۲+y^۲+(z-a)^۲=a^۲ \\ z=\sqrt{x^۲+y^۲} \end{cases}$$

نتیجه می‌شود $z=a$ ، یعنی مخروط و کره یکدیگر را در دایره‌ی $x^۲+y^۲=a^۲$ و $z=a$ قطع می کنند. در ناحیه‌ی D ، تغییرات ϕ به صورت $۰\le\phi\le\frac{\pi}{۴}$ و تغییرات θ به صورت $۰\le\theta\le۲\pi$ می‌باشد. در ضمن معادله‌ی $x^۲+y^۲+(z-a)^۲=a^۲$ در مختصات کروی به صورت $\rho=۲a\cos\phi$ است. پس، در مختصات کروی ناحیه‌ی D عبارت است از

$$D^*=\{(\rho,\phi,\theta) \;:\; ۰\le\theta\le۲\pi,\ ۰\le\phi\le\frac{\pi}{۴},\ ۰\le\rho\le۲a\cos\phi\}$$ (۸نمره)

در نتیجه

$$\iiint_D \left(\frac{۱}{x^۲+y^۲+z^۲}-۳\right)dV = \iiint_{D^*}\left(\frac{۱}{\rho^۲}-۳\right)\rho^۲\sin\phi\, dV$$

$$=\int_۰^{۲\pi}\left[\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\left[\int_۰^{۲a\cos\phi}(۱-۳\rho^۲)d\rho\right]d\phi\right]d\theta = \int_۰^{۲\pi}\left[\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\left(\rho-\rho^۳\Big|_۰^{۲a\cos\phi}\right)\sin\phi\, d\phi\right]d\theta$$

$$=\int_۰^{۲\pi}\left[\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\left(۲a\cos\phi-۸\,a^۳\cos^۳\phi\right)\sin\phi\, d\phi\right]d\theta = \int_۰^{۲\pi}\left(-a\cos^۲\phi+۲a^۳\cos^۴\phi\Big|_۰^{\frac{\pi}{۴}}\right)d\theta$$

$$=\int_۰^{۲\pi}\left[-a\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲+۲a^۳\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۴-(-a+۲a^۳)\right]d\theta = \int_۰^{۲\pi}\left(\frac{a}{۲}-\frac{۳a^۳}{۲}\right)d\theta$$

$$= \left(\frac{a}{2} - \frac{3a^3}{2}\right)(2\pi) = \pi(a - 3a^3)$$ (۷ نمره)

$$\boxed{\iiint_D \left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2} - 3\right) dV = \pi a(1 - 3a^2)}$$

پاسخ پرسش ۵.

روش اول) قرار می‌دهیم

$$P(x,y) = 2xf(y) + y^2g'(x) \quad , \quad Q(x,y) = x^2f'(y) + 2yg(x)$$

چون f و g توابعی مشتق پذیرند داریم

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xf'(y) + 2yg'(x) \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2xf'(y) + 2yg'(x)$$

بنابر این میدان F یک میدان گرادیان است و در نتیجه انتگرال $\int_C F \cdot dr$ مستقل از مسیر است.

(۵ نمره)

برای محاسبه‌ی انتگرال می‌توان یکی از دو روش زیر را به کار برد.

الف) تابع دو متغیره U را چنان پیدا می کنیم که $\nabla U(x,y) = F(x,y)$ و انتگرال خطی را به صورت زیر محاسبه می کنیم.

$$\int_C \left(2xf(y) + y^2g'(x)\right) dx + \left(x^2f'(y) + 2yg(x)\right) dy = U(B) - U(A)$$

در این حالت داریم

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xf(y) + y^2g'(x) \quad \Rightarrow \quad U(x,y) = x^2f(y) + y^2g(x) + h(y)$$

که در آن h یک تابع یک متغیره با مشتق پیوسته است. از سوی دیگر

$$x^2f'(y) + 2yg(x) + h'(y) = \frac{\partial U}{\partial y} = x^2f'(y) + 2yg(x) \quad \Rightarrow \quad h'(y) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad h(y) \equiv c$$

که در آن c یک عدد ثابت است. پس $U(x,y) = x^2f(y) + y^2g(x) + c$ و در نتیجه

$$\int_C F\cdot dr \ = U(B)-U(A) = U(۲,\circ)-U(\circ,\circ) = ۴f(\circ)+\circ+c-(\circ+\circ+c) = ۴f(\circ) = ۴$$

(۱۵ نمره)

تذکر: روش دیگر برای محاسبه‌ی U به صورت زیر می‌باشد

$$U(x,y) = \int_\circ^x P(t,\circ)\ dt + \int_\circ^y Q(x,t)\ dt$$

داریم $P(t,\circ) = ۲tf(\circ) = ۲t$ و $Q(x,t) = x^۲f'(t) + ۲tg(x)$. بنابر این

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int_\circ^x P(t,\circ)\ dt + \int_\circ^y Q(x,t)\ dt \\ &= \int_\circ^x ۲t\ dt + \int_\circ^y [x^۲f'(t) + ۲tg(x)]\ dt \\ &= [t^۲]_{t=\circ}^{t=x} + [x^۲f(t) + t^۲g(x)]_{t=\circ}^{t=y} \\ &= x^۲ + (x^۲f(y) + x^۲g(x) - x^۲f(\circ)) = x^۲f(y) + y^۲g(x) + c \end{aligned}$$

ب) چون مقدار انتگرال خطی مستقل از مسیر است به جای مسیر C می توان از مسیر C' ، پاره خط واصل بین نقطه‌ی A و B استفاده نمود. معادلات پارامتری C' را می‌توان برای $\circ \le t \le ۲$ به صورت زیر در نظر گرفت.

$$C' : \begin{cases} x = t \\ y = \circ \end{cases}$$

بنابر این

$$\begin{aligned} \int_C F\cdot dr &= \int_\circ^۲ \Big[(۲tf(\circ) + \circ) + (t^۲f'(\circ) + \circ)(\circ)\Big]\,dt \\ &= f(\circ)\int_\circ^۲ ۲t\ dt = ۴ \end{aligned}$$

(۱۵ نمره)

روش دوم) فرض کنیم C' قسمتی از محور x ها از نقطه‌ی B به نقطه‌ی A است. با استفاده از قضیه‌ی گرین

$$\int_C P\ dx + Q\ dy + \int_{C'} P\ dx + Q\ dy = \int_{C\cup C'} P\ dx + Q\ dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\ dA = \circ$$

زیرا $\frac{\partial P}{\partial y} = ۲yg'(x) + ۲xf'(y) = \frac{\partial Q}{\partial x}$. (۱۰ نمره)

به این ترتیب

$$\int_C P\ dx + Q\ dy = -\int_{C'} P\ dx + Q\ dy = \int_{-C'} P\ dx + Q\ dy$$

با توجه به اینکه مسیر $-C'$ دارای معادلات پارامتری $x = t$ و $y = ۰$ به ازای $۰ \leq t \leq ۲$ است خواهیم داشت

$$\int_C P\ dx + Q\ dy = \int_{-C'} P\ dx + Q\ dy = \int_۰^۲ ۲tf(۰)\ dt = ۴$$ (۱۰ نمره)

پاسخ پرسش ٦. فرض کنیم S' قسمتی از صفحه‌ی $z = ۲$ درون S است. از این که مولفه‌های تابع F مشتقات جزئی پیوسته دارند ، با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس برای سطح بسته و قطعه قطعه هموار $S \cup S'$ که ناحیه‌ی T را در فضا محصور می‌کند ، داریم

$$\begin{aligned} T &= \{(x,y,z)\ :\ ۰ \leq x^۲ + y^۲ \leq ۲\ ,\ x^۲ + y^۲ \leq z \leq ۲\} \\ &= \{(r,\theta,z)\ :\ ۰ \leq r \leq \sqrt{۲}\ ,\ ۰ \leq \theta \leq ۲\pi\ ,\ r^۲ \leq z \leq ۲\} \end{aligned}$$

$$\text{div } F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = ۸ + ۲ - ٦ = ۴$$ (۵ نمره)

$$\begin{aligned} \iint_{S\cup S'} F\cdot n\ d\sigma &= \iiint_T \text{div } F\ dV = \iiint_T ۴\ dV \\ &= ۴\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\sqrt{۲}}\int_{r^۲}^{۲} r\ dz\ dr\ d\theta \\ &= ۸\pi\int_۰^{\sqrt{۲}} (۲r - r^۳)\ dr \\ &= ۸\pi \end{aligned}$$ (۱۰ نمره)

به این ترتیب

$$\iint_S F\cdot n\ d\sigma = ۸\pi - \iint_{S'} F\cdot n\ d\sigma$$

از سوی دیگر برای سطح S' داریم $n = \mathbf{k}$ و S' نمودار تابع $z = f(x,y) = ۲$ است. در نتیجه

$$\iint_{S'} F \cdot n \, d\sigma = \iint_{S'} -۶z \, d\sigma = -۱۲ \iint_{S'} d\sigma = -۱۲\sigma$$

که در آن σ عبارت است از مساحت سطح S' و برابر $\pi(\sqrt{۲})^۲ = ۲\pi$ است. بنابراین

$$\iint_{S} F \cdot n \, d\sigma = ۸\pi + ۲۴\pi = ۳۲\pi$$

(۵ نمره)

پاسخ پرسش ۷. فرض کنیم S قسمتی از صفحه‌ی π باشد که به وسیله‌ی خم ساده و بسته‌ی γ محصور شده است. از این که مولفه‌های تابع $F(x,y,z) = (bz - cy)\ \mathbf{i} + (cx - az)\ \mathbf{j} + (ay - bx)\ \mathbf{k}$ مشتقات جزئی پیوسته دارند ، با استفاده از قضیه‌ی استوکس برای سطح هموار S با مرز γ و برای n ، بردار یکه‌ی نرمال صفحه‌ی π داریم

$$\operatorname{curl} F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ bz - cy & cx - az & ay - bx \end{vmatrix} = (۲a)\ \mathbf{i} + (۲b)\ \mathbf{j} + (۲c)\ \mathbf{k} = ۲n$$

(۷ نمره)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \cdot dr &= \iint_S \operatorname{curl} F \cdot n \, d\sigma \\ &= \iint_S (۲n) \cdot n \, d\sigma \\ &= ۲ \iint_S d\sigma \end{aligned}$$

بنابر این (۸ نمره)

$$\iint_S d\sigma = \frac{۱}{۲} \int_{\gamma} F \cdot dr$$

بخش تشریحی آزمون میان ترم ریاضی عمومی II فروردین ماه ۱۳۸۷

۱ـ خم C به معادله‌ی برداری $\mathbf{r}(t)=e^t\mathbf{i}+(e^t\sin t)\mathbf{j}+(e^t\cos t)\mathbf{k}$ مفروض است.

الف) بردارهای $\mathbf{T}$، $\mathbf{N}$ و $\mathbf{B}$ را در نقطه‌ی $C \ni (۱,۰,۱)$ به دست آورید.

ب) مرکز انحنا را در نقطه‌ی $C \ni (۱,۰,۱)$ به دست آورید.

ب) معادلات پارامتری خم حاصل از تصویر C را بر صفحه‌ی $x-y+۲z=۶$ تحت بردار $V=(-۱,۱,۰)$ به دست آورید.

(۱۰ نمره)

۲ـ تابع $f(x,y)=\begin{cases}(x-y)\cos(\frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}) & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید که f در $(۰,۰)$ پیوسته است.

ب) $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)$ را به دست آورید.

ج) مشتق سویی f در $(۰,۰)$ و در سوی بردار یکه‌ی $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ را تعیین نمایید.

د) آیا f در $(۰,۰)$ مشتق پذیر است؟ چرا؟

(۱۰ نمره)

آزمون پایان ترم ریاضی عمومی ۲ (بخش تشریحی) خرداد ۱۳۸۸ مدت ۱۱۰ دقیقه

۱) فرض کنید $f(x,y) = e^{-(x^۲+y^۲)}$.

(الف) معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر نمودار $z = f(x,y)$ را در نقطه‌ی $P = \left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{۱}{e}\right)$ بیابید.(۵ نمره)

(ب) اکسترممهای $f(x,y)$ را روی ناحیه‌ی $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid (x-۱)^۲ + y^۲ \leq ۴\}$ به دست آورید.(۲۰ نمره)

---

۲) الف) مطلوب است محاسبه‌ی

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \left[\int_۰^{\frac{۱}{\sin\theta+\cos\theta}} r\ dr\right] d\theta.$$ (۵ نمره)

ب) گیریم S قسمتی از سطح نیم کره‌ی $z = \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}$ است که زیر صفحه‌ی $z = \sqrt{۳}$ قرار دارد. در این صورت مساحت S را به کمک انتگرال سطح پیدا کنید.(۱۰ نمره)

---

۳) الف) مطلوب است محاسبه‌ی

$$\int_C (۲xy + \cos ۲y)dx + (x^۲ - ۲x\sin ۲y + x)dy,$$

که در آن C خط شکسته‌ی حاصل از سه پاره خطی است که به ترتیب از $A = (۱,۰)$ به $B = (۰,۱)$ سپس به $C = (-۱,۰)$ و سر انجام به $D = (۰,-۱)$ پیموده شده است.(۱۰ نمره)

ب) خم C از تلاقی استوانه‌ی به معادله‌ی $x^۲ + (y-۱)^۲ = ۱$ و سهمی‌گون به معادله‌ی $z = ۴ - x^۲ - y^۲$ به دست آمده و در جهت مثبت طی شده است. برای تابع برداری $\mathbf{F}(x,y,z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k}$ مطلوب است محاسبه‌ی $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.(۱۰ نمره)

---

۴) الف) مطلوب است محاسبه‌ی

$$\int\int\int_T (x^۲ + y^۲ + z^۲) dV$$

که در آن T ناحیه‌ی درون و روی مخروط به معادله‌ی $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و محدود به نیم‌کره‌هایی به معادلات $z = \sqrt{۱ - x^۲ - y^۲}$ و $z = \sqrt{۴ - x^۲ - y^۲}$ است.(۱۰ نمره)

ب) اگر S سطح خارجی ناحیه‌ی T در بخش الف) باشد، مطلوب است محاسبه‌ی $\int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \; d\sigma$ که در آن $\mathbf{F}(x, y, z) = x(y^۲ + ۳)\mathbf{i} + y(z^۲ - ۱)\mathbf{j} + z(x^۲ - ۱)\mathbf{k}$.(۱۰ نمره)

موفق باشید

بخش تشریحی آزمون میان ترم ریاضی عمومی II. فروردین ۱۳۸۹ مدت آزمون ۵۰ دقیقه

پرسش اول (۲۰ نمره)– خم C با معادلهٔ برداری

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + \sin t - t)\ \mathbf{i} + (\cos t + \sin t + t)\ \mathbf{j} + (2\cos t - \sin t)\ \mathbf{k}$$

را در نظر بگیرید.

الف) انحنای خم C را در نقطهٔ $P_0 = (1, 1, 2)$ بیابید.

ب) معادلهٔ صفحهٔ بوسان را در نقطهٔ P_0 به‌دست آورید.

ج) معادلات پارامتری تصویر قائم خم C را بر صفحهٔ به معادلهٔ $x = y$ مشخص نمایید.

پرسش دوم (۲۰ نمره)– فرض کنید

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 & \text{اگر} \quad x^2 + y^2 \geq 1 \\ 1 - x^2 - y^2 & \text{اگر} \quad x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$

الف) به کمک تعریف $(\varepsilon - \delta)$ ثابت کنید که f در $(0, 0)$ پیوسته است.

ب) در مورد وجود $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)$ (با ذکر دلیل) چه می‌توان گفت؟

ج) نمودار $z = f(x, y)$ را توصیف کنید و یک شکل تقریبی برای آن رسم کنید.

موفق باشید

۱) الف: فرض کنید تابع $f:D\to\mathbb{R}$ بر $D\subseteq\mathbb{R}^۲$ و توابع $u=u(x,y)$ و $v=v(x,y)$ بر $\mathbb{R}^۲$ دارای مشتقات جزئی پیوسته باشند به قسمی که برای هر $(x,y)\in\mathbb{R}^۲$ داشته باشیم $(u,v)\in D$. برای تابع $g(x,y)=f(u,v)$ نشان دهید $\nabla g=f_u\nabla u+f_v\nabla v$.

(۱۳ نمره)

ب: با فرض $f(u,v)=e^{۲u+v}$، $u=\sin(x+y)$ و $v=\cos(x-y)$ مقادیر a و b را به قسمی تعیین کنید که بردار $\mathbf{w}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ یک بردار یکه باشد و داشته باشیم $D_{\mathbf{w}}\,g(۰,۰)=۰$.

(۱۲ نمره)

---

۲) الف: با استفاده از تعریف مشتق‌پذیری ثابت کنید که تابع $f(x,y)=x^۲-y^۲$ در $(۱,-۱)$ مشتق‌پذیر است.

(۱۲ نمره)

ب: مطلوب است تعیین اکسترممهای مطلق تابع f بر ناحیهٔ بسته و کراندار $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ \mid x^۲+y^۲-۲x-۳\leq ۰\}$.

(۱۳ نمره)

---

۳) الف: انتگرال $\iint_D ۴y(x-y^۲)\sin(x^۲-y^۴)dA$ را حساب کنید که در آن D ناحیهٔ بین سهمی‌های $x-y^۲=۰,\ x-y^۲=۱,\ x+y^۲=۲,\ x+y^۲=۳$ واقع در ربع اول صفحه است.

(۱۲ نمره)

ب: مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $\iiint_T \left(\frac{۱}{x^۲+y^۲+z^۲}-۲z\right)dV$ که در آن T ناحیهٔ مشترک درون کرهٔ $x^۲+y^۲+(z-۲)^۲=۴$ و خارج کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ است.

(۱۳ نمره)

بقیه‌ی پرسش‌ها را در پشت برگه مشاهده نمایید.

۴) الف: هرگاه D ناحیهٔ محصور به خم ساده و بستهٔ γ باشد که در جهت مثبت پیموده شده است، نشان دهید A_D مساحت ناحیهٔ D عبارت است از $A_D = \frac{۱}{۲}\int_\gamma -ydx + xdy$.
(۱۰ نمره)

ب: برای میدان برداری $F(x,y) = \Big(-y + e^{-\sin(x^۲)}\Big)\mathbf{i} + \Big(x + \cosh(y^۲ - y^۳ + ۱)\Big)\mathbf{j}$ و خم γ به معادلهٔ $x^{\frac{۲}{۳}} + y^{\frac{۲}{۳}} = ۱$ که در جهت مثبت پیموده شده است مطلوب است $\int_\gamma F \cdot d\mathbf{r}$.
(۱۵ نمره)

---

۵) فرض کنید $F(x,y,z) = (x+y)\mathbf{i} + (y + ۲z)\mathbf{j} + (۲z + ۳x)\mathbf{k}$ و S سطح کل کرهٔ به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ باشد. همچنین فرض کنید γ خم ساده و بستهٔ حاصل از تلاقی کره و صفحهٔ $z = ۱$ باشد که در جهت مثبت پیموده شده و $\mathbf{n}$ بردار یکهٔ نرمال رو به خارج کره باشد.

الف: مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $\int_\gamma F \cdot d\mathbf{r}$.
(۱۲ نمره)

ب: مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $\iint_S F \cdot \mathbf{n}\, \mathbf{d}\sigma$.