



جزوہ

اجزاء محدود

FINITE ELEMENT

استاد:

دکتر علی اکبر گل افشانی

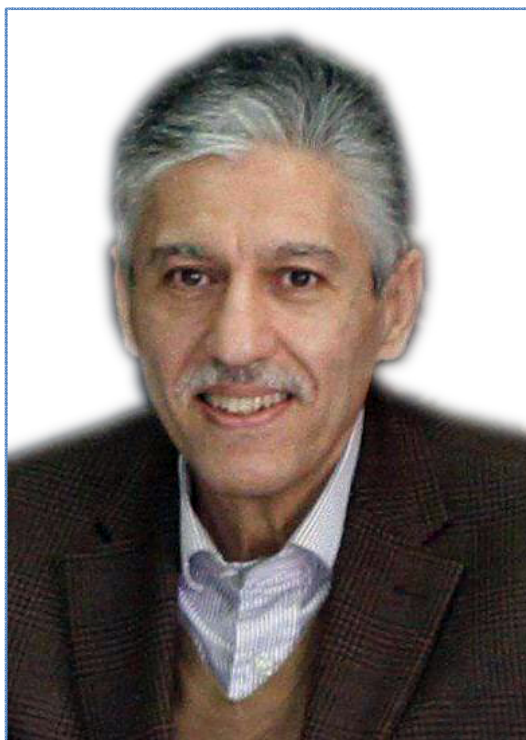
«مدرس دانشگاه صنعتی شریف»

توسط:

محمد رضا مینوپور

TELEGRAM CHANNEL:

@ENGBOOK



حُسن جزء کردن اشکال گوناگون
متحد الشكل بودن آنهاست

ما تا کُل هستیم همدیگر را متفاوت می بینیم و هنگامی که
جزء شدیم با یکدیگر اشتراک پیدا می کنیم

به یاد استاد دکتر گل افشانی

مدرس : دکتر علی اکبر گل افشانی

منابع درس اجزاء محدود

- 1) The Finite Element Method - Volume 1: Basic Formulation and Linear Problems.
Reference برای کتاب برای - Volume 2: Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non - linearity, O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, McGraw Hill, 1991.
- 2) The Finite Element Method - Linear Static and dynamic Finite Element Analysis, Thomas J.R. Hughes Prentice - Hall, 1987.
- 3) Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Third Edition, Cook & Malkus & Plesha, Wiley, 1989.
- 4) A First Course in Finite Element Analysis, Y.C. Pao, Allyn and Bacon, 1986.
- 5) An Introduction to Finite Element Method using Basic Programs, D.K. Brown, Surrey University Press, Second Edition, 1991.
- 6) Introduction to Finite Elements in Engineering, Chandrupatla and Belegundu, Prentice Hall, 1991.
- 7) Structural Engineering Analysis By Finite Elements, R.J. Melosh, prentice Hall, 1990.
- 8) The Finite Element Method and Its Applications, Masatake Mori, MacMilln, 1986.
- 9) Finite Elements & Approximation, Zienkiewicz & Morgan, Jhon Wiley & Sons, 1983.
- 10) An Introduction to the Finite Element Method J.N. Reddy, Mc Graw - Hill, 1985.
- 11) Numerical Methods in Finite Element Analysis, Bathe & Wilson, Prentice - Hall, 1976.

کتابی از ۱۹۸۳ به بعد که به خوبی است

12) Finite Element Analysis Fundamentals, 1975, R. Gallagher.

کتاب آسان برای دانشجویان مهندسی
ایروضا و تحلیل عددی

13) Introduction to Finite Element Analysis Theory and Application, H. Martin & G. Carey.

14) A Practical Introduction to Finite Element Analysis, Y.K. Cheung & M F. Yeo, Pitman International, 1980.

15) Elementary Finite Element Method, Desai, Prentice Hall, 1979.

خریداری است ←

16) Introduction to the Finite Element Method, A-Numerical Method for Engineering Analysis, 1972, Desai & Abel, Van Nostrand Reinhold Comapny.

17) Programming the Finite Element Method, With Application to Geomechanics, I.M. Smith, Jhon Wiley & Sons, 1982.

18) An Analysis of the Finite Element Method, Strang & Fix, Prentice Hall, 1973.

سختی کتب ریاضی ←

19) The Finite Element Method in Partial Differential Equations, Mitchell & Andrew, John Wiley & Sons, 1977.

کتاب ریاضی

۲۰- اجزاء محدود برای تحلیل سازه‌ای - تألیف ویلیام ویور و پاول جانسون ترجمه شاپور طاحونی - انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر.

۲۱- تحلیل اجزاء محدود (روش‌های کاربردی) تألیف: بی. ک. چونگ و م. ف. یو ترجمه دکتر علی کاوه و مهندس بهنام امینی - انتشارات دانشگاه علم و صنعت.

۲۲- روش المان‌های محدود (یک مقدمه اساسی) ترجمه: دکتر علی کاوه

مولفین کی- سی- راکبی، اچ- ار- ایونس، دی- دبلیو- گریفس، دی- ا- ندرکوت

Gager

۱۴، ۱۲، ۱۴

«استاد علی اکبر گل افشانی»

finite element

numerical method based

Zinkowisk

پدیده نورد

فرقی ما

هم ما

آزمایش 30/ نمود

مزانة فقط آزمون اول نخواهند شد بیاید.

Finite element

$\Delta = \text{finite}$ $\Delta_x = dx$ singular

finite محدودی دارد نه خیلی بزرگ نه کوچک

discrete

continuous

دستی به داده اربع می دهیم پیوسته می نورد

STRUCTURES از مجموعی از اجزاء element جهت باربری خاصه منگ شکر است

در عدد تری مای چیزها پیوسته بود مستقیم تغییر طول و غیره. در موضعی بود برای مردم از دلها استفاده می کنند



معنای مثال:

برای محیط دایره بین محیط در مثلث محاطی است و هر چه اجزاء شکره تر دقت اجزاء بالاتر به جای یک محیط پیوسته

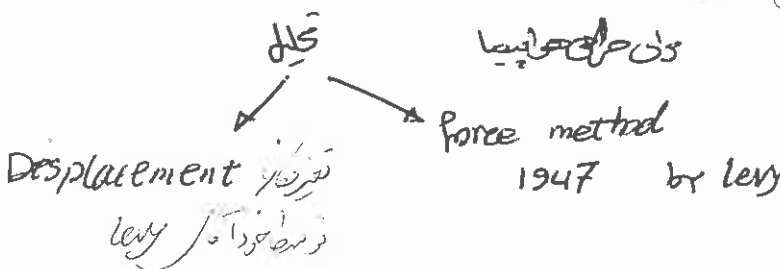
$\pi = 3.1415926$: 480 بعد از میلاد

$\pi = 3.1415926$: 480 بعد از میلاد

چینی

$\pi = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots)$

این بحث در حالی هوایما و بیرون در حین ایستاد هواپیماهای اولیم ۹۵٪ زمان خود را در رده های پایین لول میب ایتم آن و لوز به هواپیما انگلیس هر زمانه در جنگ نام نرود صلی و دقیق و کلمه کردن شده بود در دهه ۱۹۴۰ و نورجبت اختراع شد که تیر آن سرعت look up و تان سه برابر سرعت تیر است



سپان عقبه عمومی حرکت شکر تیر به فرود
Condition برای هر بانندی
احتیاج به برنامه سبر برداشت

کدام تئوری و پیر finite

المان یک بعدی (Frame) (شش ضلعی - تری ...)

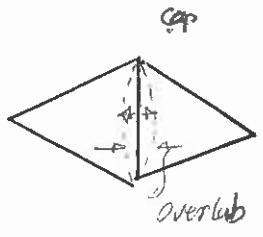
وقتی finite پیر آید به تئوری یک بعدی به دو بعدی رفت

جمع دو بعدی تا آن تاریخ به اجزای قسمتی شده است (خوب یا)

کوچکترین المان دو بعدی مثلث Δ Simplex همانطور که برای تری ...



آزادی انتخاب در هر دم برای این تئوری انتخاب کنیم اگر من رفتار در در تمام رفتار در سخت



اینجا اشکال وجود ندارد با assembly ترها و اعمال نبرد به هم عدد شده gap و باروری هم بیاید overlap

پس اینجا همان بحث پوسته در تئوری یک بعدی با دو بعدی است برآورده می شود اینجا هم است

حس جزء کردن اشکال گوناگون متعدد در این است اما تا کلیم هندسی و معادلات می بینیم و هنگامی که جزء شده تا یکدیگر اثرات می بینیم

Finite element for stiffness matrix

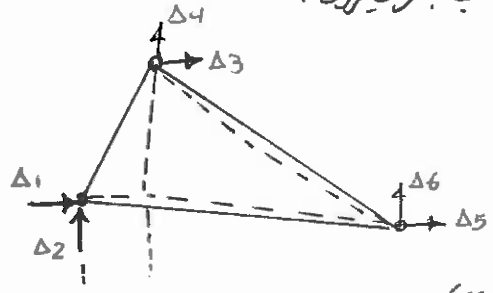
تیسر دهم ۲۱، ۱۲، ۲۶

$$V_{W_I} = V W_E$$

internal

virtual work (INTERNAL & EXTERNAL)

تغییر مکان سازگار نه تغییر مکان (ضابطه برابری)



همه آزادی = تغییر نظری شکل

Degree of Freedom = D.O.F

در هر نقطه ای تغییر مکان دارد حرکات بقیه هستند

Δ = تغییر مکانی خارجی (مشاهده در آزادی)

P = نیروهای خارجی مشاهده (Δ)

اگر نیروهای $P_1 \dots P_6$ و اعمال شده در آن تئوری داخلی آن باشد

ϵ = تنش داخلی

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{cases} = E \quad \text{و استرا}$$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{cases} \quad \text{بر حسب } x \text{ و } y \text{ در هر نقطه متفاوت خواهد بود}$$

virtual مجازی

$$V_{WE} = \underline{\Delta}^T P$$

$$V_{WI} = \int_{\Omega} \underline{\bar{E}}^T \underline{E} d\Omega$$

خارجی بارها و درونی بارها (ماده و بارها) در این حجم است
 [دانشجویان domain = بارها و بارها]

$$\underline{E} = \underline{E}^+ \underline{E} \quad \text{ماتریس} \rightarrow \quad \epsilon_{11} = E \epsilon_{11}$$

نسبت حقیقی کرنش حقیقی plain stress یا strain

$$V_{WI} = \int_{\Omega} \underline{\bar{E}}^T \underline{E} \underline{E} d\Omega$$

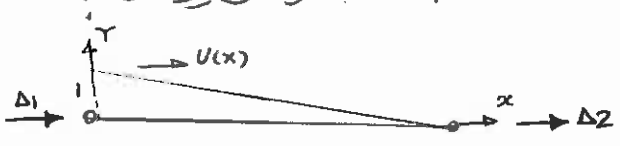
اگر رابطه \underline{E} داخلی و تغییر مکان خارجی را بدست بیاوریم چون نسبت تابعی از x و y ماتریس B هم تابعی از x و y

$$\underline{E} = \underline{B} \underline{\Delta} \quad (\text{ماتریس})$$

$$\underline{\bar{E}} = \underline{B} \underline{\bar{\Delta}}$$

موضوع \underline{B} گفته می شود: تغییر مکان نسبت در راستای x

هر چند که ممکن است در یک حجم ۲ بعدی تابعی از x و y باشد اما هر حال تغییر مکان نسبت x



$$y \leftarrow v$$

$$x \leftarrow w$$

$$E_{11}(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x}$$

$$u(x) = \underbrace{\left(1 - \frac{x}{L}\right)}_{N_1(x)} \Delta_1 \quad \Rightarrow \quad E_{11} = \frac{\partial N_1(x)}{\partial x} \Delta_1$$

B (operator) این خاصیت را دارد که اگر تغییر مکان خارجی را بدست بیاوریم کرنش داخلی را بدست می آوریم.

$$V_{WI} = \int_{\Omega} \underline{\bar{\Delta}}^T \underline{B}^T \underline{E} \underline{B} \underline{\Delta} d\Omega$$

$\underline{\bar{\Delta}}$ و $\underline{\Delta}$ ها تابعی از x و y نیستند از اشتراک بیرون روند

$$V_{WI} = \underline{\bar{\Delta}}^T P = \underline{\bar{\Delta}}^T \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{E} \underline{B} d\Omega \underline{\Delta}$$

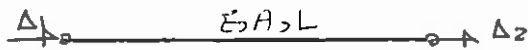
P ماتریس $n \times 1$ و $\underline{\bar{\Delta}}$ $1 \times n$ و حاصل ضربشان اسکالر اما نمی توان همین را از دست داد
 و چون برای تمام مقادیر $\underline{\Delta}$ صادق است می توان از دو طرف حذف
 (یعنی بگذاریم $\underline{\Delta}$ ضرب کنیم هر دو طرف یکدیگر)

$$P = \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{E} \underline{B} d\Omega \underline{\Delta}$$

گاهی کتابها برعکس این رابطه هستند و ما از کارهای بیرون بدست می آوریم

$$\underline{K} = \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{E} \underline{B} d\Omega$$

چون K رابطه بین نیروی خارجی و تغییر مکان خارجی است



$$\underline{K} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

حال اثبات این سختی از این روش

$$\underline{E} = E$$

حال B چیزی است که رابطه بین ϵ و تغییر مکان خارجی

$$\epsilon_{11}(x) = \langle \underline{B} \rangle \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = \left\langle \frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} \right\rangle$$

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u(x)}{\partial x}$$

$$u(x) = N_1(x) \Delta_1 + N_2(x) \Delta_2$$

$$\text{exact} \rightarrow = \langle N_1(x) \quad N_2(x) \rangle \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix}$$

هرچون مستقل می‌لرند $\Delta_1 = 1$ و دیگری را صفر داره $\Delta_2 = 0$ پس $N_1(x)$ و $N_2(x)$ تابعی از x هستند

پس E و A ثابت باشه N_1 تابعی و (تغییر خطی) است

$$\begin{cases} N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \\ N_2(x) = \frac{x}{L} \end{cases}$$

و لفا $N_2(x)$ برعکس

$$\epsilon_{11}(x) = \frac{\partial u}{\partial x} = \left\langle \frac{\partial N_1}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2}{\partial x} \right\rangle \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{B} = \frac{1}{L} \langle -1 \quad 1 \rangle$$

خوشبختانه B تابعی از x نیامد

چون تابع N خطی بود یعنی کمترین دروازه‌ها هم ثابت است تغییر نکرده

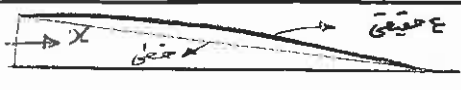
در این domain ما حجم پیدا است

$$\underline{K} = \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{E} \underline{B} d\Omega$$

$$= \int_0^L \int_A \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} E \langle -1 \quad 1 \rangle dA dx$$

$$= \frac{E}{L^2} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \underbrace{\int_0^L \int_A dA dx}_{AL} \Rightarrow \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \sim & \sim \\ \sim & \sim \end{bmatrix}$$

روی سطح ثابت



سطحاً گردش داخل همان ثابت نخواهد بود
 نبرد در طول همان ثابت تنش متغیر پس
 گردش متغیر در جاییه سطح گردش بیژ

$$A(x) = A_0 \left(1 - \frac{x}{2L}\right)$$

چون نبرد ثابت هوش نبرد خطی است اما اینجا روش displacement بیدر شکر

حل اگر $V(x)$ همان تپی تقریب زینم خطی به دست می آوریم حجم قسمتی تپی باقی بجز

$$G_v = \frac{E}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \int_0^L \int_A dA dx \Rightarrow \int_0^L A_0 \left(1 - \frac{x}{2L}\right) dx = \frac{3}{4} A_0 L$$

انگار با سطح متوسط

$$K = \frac{3}{4} K \text{ تپی}$$

که تقریبی است و جواب exact آن از تحلیل نوردی به دست می آید

چون نبرد در طول ثابت Δ تقریباً به دست آید

$$K = 0.721348 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{EA}{L}$$

- ۱- تقریب 75% خطی هم برین 4٪ برین بعدت مارله جده برای کم کردن تقریب بکاری رود سه راه حل که یکی مشکله.
- ۲- تعداد اجزا افزایش بیاید
- ۳- بجای توابعی خطی تغییر کوی از توابع درجه بالاتر استفاده
- ۴- از پیوستگی توابع استفاده مشوره.

ما تریس واقعی همیشه هرز پاستن خواهد بود $0.75 < 0.721$ چگونه میزان حدما در واقعی پاستن روش سطحی اعداد بالاتر یعنی سازه خمیترین شکرات نی دهد در اولی نبرد حجم تقریب سختی حالت.

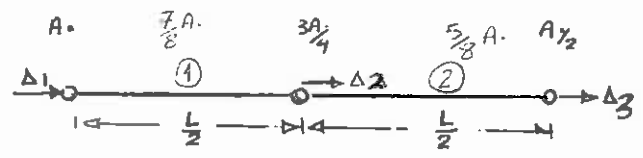
پس بلخرف امین هستیم؟ پس از لحاظ تغییر کوی در صحت امین نسیم تغییر کوی کوی
 اما در مورد نبرد ها حتی توابعی در صحت نسیم زیرا کوی کوی کم حرف دیگر زیاد

افزایش دقت

- ۱- افزایش تعداد اجزاء
- ۲- استفاده از رتبه بالاتر (higher order) element
- ۳- افزایش پیوستگی (higher continuity condition)

یادآوری:

Δ_1 و Δ_2 و Δ_3 متوالی باشند اما نیروها اینطور نیستند بین دو میانه سنجی صغیر است. و نیروها به هم وابسته می باشند در حالتی که Δ_1 برابر Δ_2 باشد.



راه حل: افزایش الماریا

از همان راه سنجی می شود سطح مقطع معادل هر قسمت

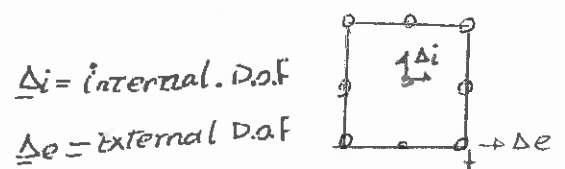
$$K^{\text{O}} = EA_0 \left(\frac{7}{8}\right) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} = \frac{7}{4} \frac{EA_0}{L} \dots \frac{A_0 + 3A_0/4}{2}$$

یادآوری: در الماریا بعد از افزایش الماریا سنجی افزایش می یابد و در طول با هم کردن زیاد در حد خطرناک می شود اما در الماریا دقتی به نسبت طول سنجی دارد اگر طول به هم رساند با هم سنجی فرق نمی کند پس در الماریا دقتی به نسبت طول سنجی داریم که در حد دقت کم می شود.

$$K_2 = \frac{EA_0 \left(\frac{5}{8}\right)}{L/2} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} = \frac{5}{4} EA_0 \dots$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \frac{EA_0}{4L} \begin{bmatrix} 7 & -7 & 0 \\ -7 & 12 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

هدف استاتیکی یعنی نماندگی در آزادی وجود ندارد بلکه اثرش را روی بقیه الماریا می گذارد



خواهیم internal را حذف استاتیکی کنیم

$$\begin{bmatrix} P_e \\ P_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ee} & k_{ei} \\ k_{ie} & k_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_e \\ \Delta_i \end{bmatrix}$$

$$k_{ie} \Delta_e + k_{ii} \Delta_i = 0$$

$$\Delta_i = -k_{ii}^{-1} k_{ie} \Delta_e$$

ارواح نیست صغیر باشد و خلاصه

یعنی تغییر الماریا داخلی را یک تغییر الماریا خارجی در الماریا می بیند

$$P_e = k_{ee} \Delta_e + k_{ei} \Delta_i = k_{ee} \Delta_e + (k_{ei} (-k_{ii}^{-1} k_{ie})) \Delta_e = (k_{ee} - k_{ei} k_{ii}^{-1} k_{ie}) \Delta_e$$

✓

$$\begin{bmatrix} P_e \\ \leftarrow P_i \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 7 & 0 & -7 \\ 0 & 5 & -5 \\ -7 & -5 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_e \\ \Delta_i \end{bmatrix} \quad k_{ee} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad k_{ei} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \end{bmatrix} \quad k_{ie} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -7 & -5 \end{bmatrix} \\ k_{ii} = \frac{1}{4} [12] \quad k_{ii} \left[\frac{1}{12} \right] \times 4$$

$$\frac{1}{4} (k_{ee} - k_{ei} * k_{ii}^{-1} * k_{ie}) = \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \end{bmatrix} \left[\frac{1}{12} \right] \begin{bmatrix} -7 & -5 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 49 & 35 \\ 35 & 25 \end{bmatrix} \right) \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{35 EA}{48 L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = .7291\bar{6} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

تقریب ۱.۰۸۳٪ می شود. یعنی ۱/۴ می شود. تقریب قبلی ما
 $\Delta_i = -k_{ii}^{-1} k_{ie} \Delta_e = \left[-\frac{1}{12} \right] \begin{bmatrix} -7 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = .58\bar{3}$

راه حل دوم: استفاده از سیم بالا.



$$N_1(x) = \frac{(x - \frac{L}{2})(x - L)}{L^2/2}$$

در این حالت $\Delta_1 = 1$ و $\Delta_2 = 0$ و $\Delta_3 = 0$ باشد.



$$N_2(x) = \frac{x(x-L)}{L^2/4}$$

$$V(x) = N_1(x) \Delta_1 + N_2(x) \Delta_2 + N_3(x) \Delta_3$$



$$N_3(x) = \frac{x(x-L/2)}{L^2/2}$$

$$U(x) = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rangle \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{Bmatrix}$$

$$E = B \Delta \quad E = \frac{\partial U}{\partial x} \quad B = \frac{\partial}{\partial x} \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rangle$$

و اینارمقی ثابت سیم

دستی Higher order حجم زاری از عملیات وارد می شود. هر از یکی از محبوس هم در دست مختلف این است که تعداد این افزایش یا بر یا order افزایش یا بر. من حجم عملیات افزایش باید در سطح یک همان افزایش می باید و تعداد استفاده زیاد.

تا حل سیم بدی افزایش امکانا بوده اما در کمینه سیم بر order بالا کار خواهد کرد.

$$B = \left\langle -\frac{3}{L} + \frac{4x}{L^2}, \quad \frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}, \quad -\frac{1}{L} + \frac{4x}{L^2} \right\rangle$$

$$K = \int_0^L A_0 \left(1 - \frac{x}{2L}\right) \frac{E}{L^2} \begin{bmatrix} -3 + 4x/L \\ 4 - 8x/L \\ -1 + 4x/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 + 4x/L & 4 - 8x/L & -1 + 4x/L \end{bmatrix} dx$$

$$= \begin{bmatrix} 2.0833 & -2.33 & .25 \\ -2.333 & 4 & -1.666 \\ .25 & -1.666 & 1.4166 \end{bmatrix} \rightarrow \text{مشترک} \begin{bmatrix} 2.083 & -2.5 & -2.33 \\ -2.5 & 1.416 & -1.66 \\ -2.33 & -1.66 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \text{6 اشکال مختلف نه 9}$$

$$K = .7222\bar{2} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{دقت } 0.12\% \quad \begin{bmatrix} 2.0833 & .25 \\ .25 & 1.4166 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2.33 \\ -1.666 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.33 & -1.66 \end{bmatrix}$$

برای محاسبه آردن این فریب از 3 عدد استفاده می شود در حالتی درستی (B11 و B22 و B12 فقط احتیاج ج.)

$$\Delta_i = \frac{1}{4} [-2.333 \quad -1.666] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = .58\bar{3}$$



ثابت ϵ constant strain یعنی δ ثابت زود از انتگرال بیرون می آید

پس چون خبری نیست . اما الان بدین معنی شده

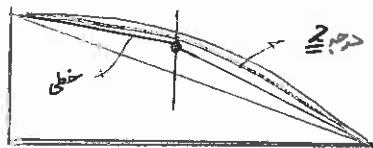


finite در باندری condition جواب exact می دهد اما در domain تقریب میزند

تغییر شکل اصلی اثر نواجر جری

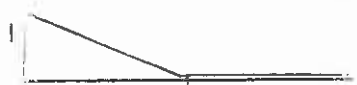


ملا Bandy element در صورت عکس این در داخل exact



تزدیکتری مشون

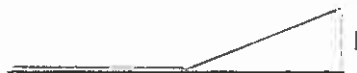
کمی شود درجه 2 را با درجه 2 گزین اما می شود درجه 2 برای درجه 2 گزین



$N_1(x) =$



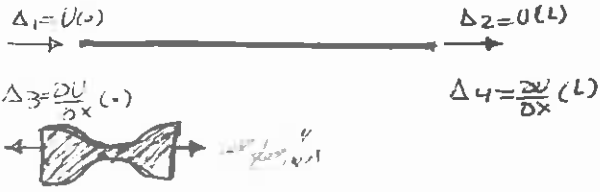
$N_2(x) =$



$N_3(x) =$

تئور ESTRESS در گره‌های معیاری برابر است پس کرنش و بار در آن نقطه پس تغییر مکان برابر در آنجا برابر یعنی نه تنها تغییر مکان را برابر است با سندان (A2 در مثال قبلی) کافی است در آزادی دیگر (کوشش فقط) هم در آنجا ایجا رکینیم

(مثل همین در محاله و سندان گره‌ها)



ماتریس 4x4 می‌شود با Stupelomzad و ماتریس 2x2 نیز می‌توانیم

$$N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$$

$$N_2(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}$$

$$N_3(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

$$N_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

$$N' = \begin{bmatrix} -\frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3} \\ \frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3} \\ 1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \\ -\frac{2x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} .9 & -.9 & .05 & .1 \\ & .9 & -.05 & -.1 \\ .05 & -.05 & .166 & -.025 \\ .1 & -.1 & -.025 & .0833 \end{bmatrix}$$

$$k_{ii}^{-1} = \frac{1}{.16375/18} \begin{bmatrix} .025/3 & .025 \\ & .025 & .35/3 \end{bmatrix}$$

$$k_{ie} = \begin{bmatrix} .05 & -.05 \\ .1 & -.1 \end{bmatrix}$$

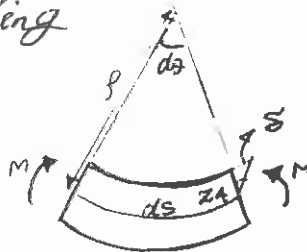
$$\Delta_1 = -d \begin{bmatrix} 1 \\ .1 \end{bmatrix} \begin{matrix} .7328 \\ -1.418 \end{matrix}$$

$$k_{ii}^{-1} k_{ie} = \begin{bmatrix} 2/300 & -2/300 \\ \frac{.16375}{18} & \frac{.03875}{3} \end{bmatrix} = d = \begin{bmatrix} .73282442748 & -.73282442748 \\ 1.41984732823 & -1.41984732823 \end{bmatrix}$$

$$k_{ei} k_{ii}^{-1} k_{ie} = \begin{bmatrix} .05 & .1 \\ -.05 & -.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sim \\ \sim \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .178625954 \\ \sim \\ \sim \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} .9 & -.9 \\ & .9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sim \\ \sim \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .721374046 & \sim \\ \sim & \sim \end{bmatrix} = \text{حرفه‌ای هم برابر} \quad \frac{3.6772}{1000} \%$$

Beam element pure bending



$$d\theta = \frac{ds}{\rho} = \frac{\delta}{Z}$$

$$\rightarrow \frac{\delta}{ds} = \frac{Z}{\rho}$$

$$\epsilon_x^{(x,z)} = \frac{\delta}{ds}$$

$$\frac{1}{\rho} = \kappa = \frac{d^2 w / dx^2}{(1 + (dw/dx)^2)^{3/2}}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$\frac{dw}{dx} \ll 1 \Rightarrow \theta$ تقریباً صاف
 در این تقریب تغییرات کوچک

لغاباً در تغییرات بزرگ κ *nonlinear* و در این صورت در طول عناصر خطی است

$$\sigma_x(x,z) = E \epsilon_x(x,z)$$

$$\epsilon_x(x,z) = z \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$w(x) = \langle N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x) \rangle \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^4 N_i(x) \Delta_i$$



$$K = \frac{2EI}{L} \begin{vmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & & \\ 3 & 3 & 6 & \\ -3 & -3 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$K = \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{E} \underline{B} d\Omega$$

مانند اجزای چوبی میسر یعنی M داریم
 در سازه ها ما توزیع تنش در M داریم و تغییرات
 برای M و تابش مورد طراحی است

نکته اصلی این است که در روش اجزای محدود
 روشی که در آن تنش و کرنش در هر یک از اجزای
 عضو به صورت متوسط در نظر گرفته می شود

تمام اجزای کار در این روش مانند سازه ها و تحلیل اجزای
 اما اگر در این روش در هر نقطه مقدار *allowable* مقدار
 بر حسب طراحی نداریم.
 آیین نامه دکان دستگاه است. مخصوصاً از نظر

الان به بحث *Finite* و اجزای محدود
 در هر یک از اجزای محدود و اجزای محدود
 و *Global* است

اما در این روش *Global* شده است
 معنای این است که تنش و کرنش در هر یک از اجزای
 فردی که در آن روش وجود
 اما ممکن است که در هر یک از اجزای محدود

— ما خود را خود را در هر یک از اجزای محدود
 و در هر یک از اجزای محدود

$$B = Z \langle N_{1,xx} \quad N_{2,xx} \quad N_{3,xx} \quad N_{4,xx} \rangle$$

$$\underline{E} = E_{1 \times 1} \text{ (دفعه تریجی)}$$

$$\int_{4 \times 1}^T E_{1 \times 1} B_{1 \times 4}$$

$$\int_A^L \int_A Z^2 \begin{bmatrix} N_{1,xx} \\ \vdots \end{bmatrix} E \langle N_{1,xx} \dots \rangle dA$$

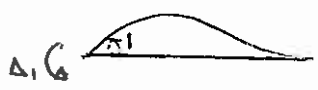
N_1 فقط با جی از x چو ل از z صرف نظر
پس A بیرون آید

$$\int_A^L \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} E \langle N \dots \rangle \left(\int_A Z^2 dA \right) dx$$

پس I هم چیزی واقعی نبود
چون سطح را یک نقطه گرفتیم به I احتیاج

$$K = \int_A^L \begin{bmatrix} N_{1,xx} \\ \vdots \end{bmatrix} E I(x) \langle N_{1,xx} \dots \rangle$$

دقیقاً اگر این بدیم و قیمت صفر باشد (یعنی خاطر تغییرات را در نظر نماند)



4 تا Boundary condition داریم
پس صافاً درجه 3 می توانیم بزنیم 4 درجه هم می توانیم بزنیم

Hermitian Shape Function

$$N_1(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$



$$N_2(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$



همان کم دیت می آید

$$N_3(x) = 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3}$$



$$N_4(x) = \frac{3x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3}$$



یعنی Shape function دقیق بود



فاکتور EI ثابت نباشد یعنی نیست

$$I(x) = I_0 \left(1 - \left(\frac{x}{L}\right)^3\right)^3$$

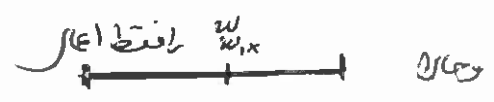
Miegher order وسطی سه گانه با 6 درجه آزادی

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2 w}{dx^2}$$

M در هر نقطه برابر است با مشتق دوم w به x

مشتق دوم از درجه 3 یعنی شش جمله خطی صغیری کند با چو درجه آزادی

اما اگر w یک درجه بود
پس در آن w_{xx} چو صفر بود



یعنی است w_{xx} هم صفر بود در آن یک درجه

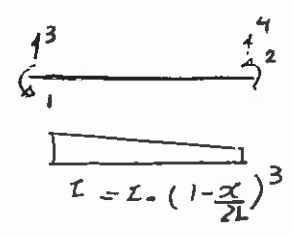
$$k_1 = \int_0^L \frac{x^2}{I} dx$$

$$k_2 = \int_0^L \frac{(L-x)^2}{I} dx$$

$$k_3 = \int_0^L x \frac{(L-x)}{I} dx$$

$$k_4 = \dots$$

$$K = \frac{EI^2}{k_1 k_2 - k_3^2}$$



از روش سختی

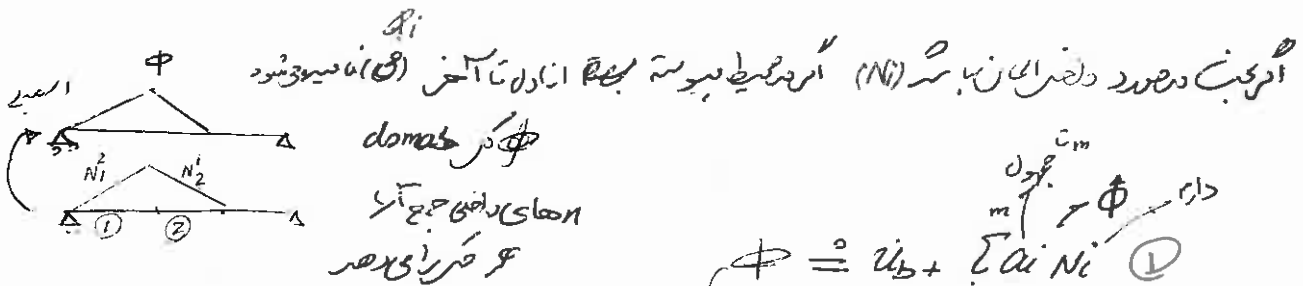
$$K_{use} = K \begin{bmatrix} k_1 & k_3 & (k_1+k_3)/L & -(k_1+k_3)/L \\ k_3 & k_2 & (k_2+k_3)/L & -(k_2+k_3)/L \\ (k_1+k_2+2k_3)/L & -(k_1+k_2+2k_3)/L & & \\ & & (k_1+2k_2+2k_3)/L & \end{bmatrix}$$



$$M_{AB} = K [k_1 \Delta A + k_3 \Delta B + (k_1+k_3)/L \Delta A - (k_1+k_3)/L \Delta B]$$

weighted Residual + مانده

$$\begin{cases} L(\phi) + P = 0 & \text{in } \Omega \text{ domain} \rightarrow \text{خود جسم} \\ m(\phi) + r = 0 & \text{on } \Gamma \text{ Boundary} \rightarrow \text{اترها} \end{cases}$$



اگر یک دهم در اختیار نباشد (Ni) اگر شرط بیوسه باشد از اول تا آخر (i) نامیده می شود
 فضای داخلی جمع آنها
 فرم فرای بردار
 m جملون ایم برای هر آن فرای بردار
 m تا متوسط آن

(با بی نهایت) $\hat{\phi} \approx \phi$ $m \rightarrow \infty$ شرط ۱

$$\begin{cases} m(u_b) + r = 0 & \text{on boundary} \\ m(N_i) = 0 \end{cases}$$

با بی نهایت جمع فرای بردار
 در interpolator ها ما در N_i ها صفر باشد
 در تعیین و کنار ما exact داشته باشیم

$$R = L(u_b + \sum_{i=1}^m a_i N_i) + P = L(u_b) + \sum_{i=1}^m a_i L(N_i) + P$$

operator عمل کننده در فضای
 domain

این کار این است که این صفر می شود به ازای هر تابعی غیر از تابع معین می شود

weighted کویر مانده است که خطی در این ها در domain و مانده اما این خطی هم نیست

$$\int_{\Omega} w_j R dz = 0$$

اگر ج را ضرایب درونی متفاوت $j=1, 2, \dots, m$
 انتخاب m مقادیر بردار می آید

$$\int_{\Omega} w_j L(u_b) dz + \sum_{i=1}^m a_i \int_{\Omega} w_j L(N_i) dz + \int_{\Omega} w_j P dz = 0$$

$$P_j \triangleq - \int_{\Omega} w_j P dz - \int_{\Omega} w_j L(u_b) dz$$

شرط مرزی
 تعریف $K_{ji} \triangleq \int_{\Omega} w_j L(N_i) dz$

$$\frac{K}{m \times n} \frac{a}{1 \times m} = \frac{P}{1 \times m}$$

اگر این a را از هر این در دست حساب کنیم
 بگذاریم در 1 تابع اصلی خودش را تقریب می آید

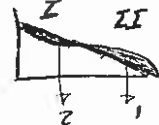
خطی است m چند تا w_j خطی را انتخاب

Boundary } exact satisfy

اما در domain خط داریم منحنی بالا و پایین بردن در آن ها exact

در صورتی که خطها در جهت \mathbb{R} و \mathbb{C} با هم متفاوتند یعنی انتگرال خطی در domain صفر

اما اگر بگوئیم هم جای خط برای ما اینها را بیاورد یک لایه را فریب 2 یک لایه را فریب 1

حالا  یعنی در این سطح که در \mathbb{C} پاشن آمده نصف انتگرالی که (\mathbb{C}) دارد


برای من اختلاف در جهات (مراکز از \oplus و \ominus) Min کنیم

در boundary صفر $m(\phi) + r = 0$

$m(u_b) + \sum a_i m(N_i) + r = 0$

convolution $\begin{cases} m(u_b) + r = 0 \text{ on } \Gamma \\ m(N_i) = 0 \forall i \text{ on } \Gamma^i \end{cases}$
اینها a_i بین

همان بندی exactly satisfy با اینها

آنگاه $(x) = 1-x$ 

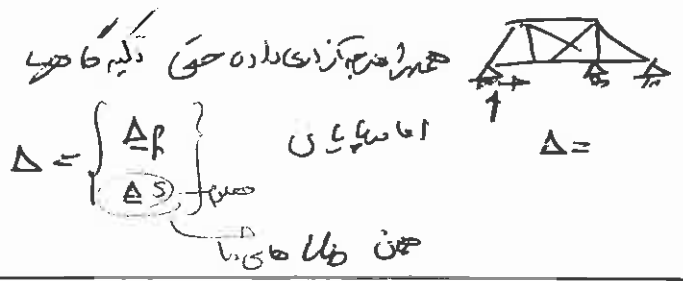
در با نوری ها صفر می شود

در هنگام از Boundary می توان یک این یکی تعریف و می بینیم که \mathbb{C} ظاهر می نشاند باشد پس این تعریفی که در هر دو همان یک بودیم

پس در این روش منحنی \mathbb{C} است که دیگر کار به شرایط من می نماند

بعبارت دیگر \mathbb{C} ها چوری انتخابی چون در \mathbb{C} آزادی ما نخواهد بود

Δ چون Δ_1 باشد

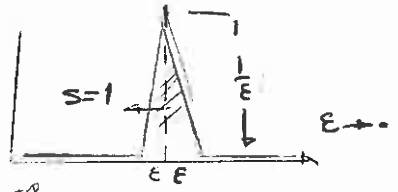


در تحلیل ماتریسی

Point Collocation
نقطه (P.C.)

Linkwise Kp آخر کتاب Linkwish

$$w_j = \delta(x-x_j) \begin{cases} 0 & x \neq x_j \\ \infty & x = x_j \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_j) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \delta(x-x_j) dx = R(x_j)$$

یعنی اهمیت نقاط مشخص بی‌نهایت است

$\int w_j R dx = 0 \rightarrow R(x_j) = 0$ نقطه صفر

همه اگر m بی‌نهایت تضمین شده exact و من بی‌نهایت ← همگرا

به شرطی که کافی ای این صفری شود $\int w_j R dx$ پس $R=0$ باشد

بزرگترین نقطه R صفر باشد مثلا R_j $\int \delta(x-x_j) R(x) = R(x_j) \neq 0$

تناقض بی‌نهایت

بازای جابجی w_j با R لاف و فزونی شده محدودی کنیم

صورتی که τ صفر توان چیزی است \rightarrow degenerate

اما این Point Collocation در نقاط خاصی صفر کنیم \rightarrow $R(x) = 0$ در آن نقطه \rightarrow exact \rightarrow $R(x)$ صفر \rightarrow τ صفر \rightarrow $R(x)$ صفر

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - u = 0$$

$$u(0) = 0 \quad u(1) = 1$$

$$u = u_b + \sum_{i=1}^m a_i N_i$$

$$R = \frac{d^2}{dx^2} (u_b + \sum_{i=1}^m a_i N_i) - u_b - \sum_{i=1}^m a_i N_i$$

$$L(\phi) + P = 0 \quad = \quad \left(\frac{d^2}{dx^2} - 1 \right) \phi$$

\rightarrow R نایب است

آرایجا + α هم داریم
 $\alpha = P$
 $R(x) = P$

$$m(\phi) + P = 0 \quad \text{or } P$$

$$u(0) = 0 \rightarrow P = 0 \quad x = 0 \rightarrow u_b(0) = 0 \quad N_i(0) = 0$$

$$u(1) = 1 \rightarrow P = -1 \quad x = 1 \rightarrow u_b(1) = 1 \quad N_i(1) = 0$$

لافتحه باير Bandwidth

اول m انتخاب حال m=2
 بر 2 نقطه در وسط بازه ص و وی $x=1/3$ و $x=2/3$
 یعنی $U = U_0 + a_1 N_1 + a_2 N_2$
 بر 2 تا جدول بر 2 تا تابعی کلاسیک



تابعی از توابع مثلثاتی استکان نمی کنیم چون اشتراک کمی بر خروجی لافتحه در دست مثلثاتی

$N_i(x) = \sin i\pi x$ $i=1$ $i=2$

$L(N_i) = (-i^2\pi^2) \sin i\pi x - \sin i\pi x = -1(1+i^2\pi^2) \sin i\pi x$

$w(1) = \delta(x - 1/3)$ $w(2) = \delta(x - 2/3)$

$K_{11} = \int_0^1 \delta(x - 1/3) [-(1+\pi^2) \sin \pi x] dx = -(1+\pi^2) \sin \pi/3$
 $K_{21} = \int_0^1 \delta(x - 2/3) [-(1+\pi^2) \sin \pi x] dx = -(1+\pi^2) \sin 2\pi/3$
 $K_{12} = \int_0^1 \delta(x - 1/3) [-1(1+4\pi^2) \sin 2\pi x] dx = -(1+4\pi^2) \sin 2\pi/3$
 $K_{22} = \int_0^1 \delta(x - 2/3) [-1(1+4\pi^2) \sin 2\pi x] dx = -(1+4\pi^2) \sin 4\pi/3$

دیده شود که همکار نیست چون $\int w_i \pi^2$ یعنی بر تقارن نزدیک به کار می کنیم همکار نشود

$L(w_b) = \dots$
 $P_1 = - \int_0^1 \delta(x - 1/3) (-x) dx = 1/3$
 $P_2 = - \int_0^1 \delta(x - 2/3) (-x) dx = 2/3$

$\begin{cases} K_{11} a_1 + K_{12} a_2 = P_1 \\ K_{21} a_1 + K_{22} a_2 = P_2 \end{cases}$
 $a_1 = -0.05312$
 $a_2 = 4.75438$
 ضرایب $a_1 \leftarrow a_n$ می توانی بر اینند از توابع higher order می توانی کرد

$Ux = \frac{e}{e^{2-1}} (e^x - e^{-x})$

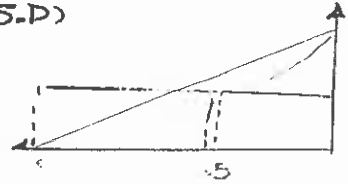
امادین نقاط exact نیست معادله دفرانسیل صفری من Residual موجود تابعی در 3

همه‌چیزی برای نقاط بی‌نهایت exact نزدیک زیر اگر در نقاط بی‌نهایت Residual صفر باشد به دفعی نزدیک.

$w_1 = 1 \quad \frac{1}{2} < x < 1$
 $w_2 = 1 \quad \frac{1}{2} < x < 1$
 $w_1 = 0 \quad \frac{1}{2} < x$
 $w_2 = 0 \quad x < \frac{1}{2}$

Subdomain

(S-D) چننف



$K_{11} = \int_{0.5}^1 1 \times L(N_1) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \sqrt{2})$

$K_{12} = \int_{0.5}^1 1 \times L(N_2) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + 4\sqrt{2})$

$K_{21} = \int_{0.5}^1 1 \times L(N_1) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \sqrt{2})$

$K_{22} = \int_{0.5}^1 1 \times L(N_2) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + 4\sqrt{2}) - (1 + 4\sqrt{2}) \sin(2\pi x)$

$F_1 = \int_{0.5}^1 x dx = .125$

$F_2 = \int_{0.5}^1 x dx = .375$

$L(N) = -(1 + \sqrt{2}) \sin(\pi x)$

$a_1 = -.0723$
 $a_2 = +.0097$

Galerkin

تایید سافت‌سپرن

تابع‌های زیر همان زمان گریم

$w_1 = N_1 = \sin(\pi x)$

$K_{11} = -\frac{1}{2} (1 + \sqrt{2})$

$w_2 = N_2 = \sin(2\pi x)$

$K_{12} = K_{21} = 0$

$K_{22} = -\frac{1}{2} (1 + 4\sqrt{2})$

$F_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$F_2 = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$

عزیم
سفت‌سپرن

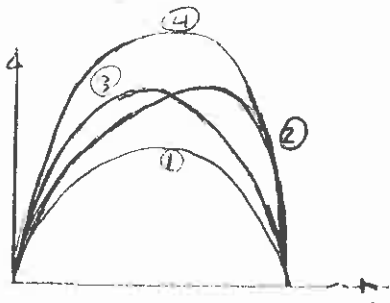
	Exact	P.C	S.D	G.
$U(1/3)$.2889	.2914	-2792	.2894
$U(1/3)$.6102	.6165	.5957	.6091

$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$

چگونه معادلات زیر را از روش گریم حساب کنیم

Virtual displace یعنی همان تغییراتی را بخواه

- 1- Point
- 2- Exact
- 3- Galerkin
- 4- sub domain



$m(\phi) + N = 0$

$m(\phi) + n = 0$
 $\{ n = 0 \}$
 $\{ n = -1 \}$

$U|_0 = 0$
 $U|_1 = 0$

$m(\phi)$ شرایط مرزی داده شده و n مقدار آن (استفاده در شرایط مرزی)

$x=0 \rightarrow \phi=0$
 $x=1 \rightarrow \phi=1$

$U|_0 = 0 \rightarrow n=0 \rightarrow m(\phi) = 0 \rightarrow \phi=0$
 $U|_1 = 0 \rightarrow n=0 \rightarrow m(\phi) = \phi + \phi \rightarrow \phi=1$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \phi + 1 = 0$$

$$\phi(0) = 0$$

مثال بعدی

$$\frac{d\phi(1)}{dx} + \phi(1) = 0$$

درمانه سینوس (گرنش + تعریف من صرا)

$$\left. \begin{aligned} x=0 \rightarrow r=0 \\ x=1 \rightarrow r=0 \end{aligned} \right\} \rightarrow ub=0$$

$$\begin{cases} N_1(0) = 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial x}(1) + N_1(1) = 0 \end{cases}$$

همه یک مقدار داریم

گالریکین
کدریس
و u همان تقریب نری میگیریم

$$N_1(x) = a + bx + cx^2$$

$$N_2(x) = b + 2cx$$

$$N_1(0) = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$N_2(1) + N_1(1) = 0$$

$$b + 2c + b + c = 0$$

$$2b + 3c = 0$$

انتخاب با ماست

$$N_1(x) = -3x + 2x^2$$

$$b = -3 \quad c = 2$$

با یک N سیر بکار میبریم

اگر بزرگ ضریب a کو میگیر

$$L = \left(\frac{d^2}{dx^2} + 1 \right) \quad P = 1$$

$$L(N_1) = 4 - 3x + 2x^2$$

$$K_u = \int_0^1 N_1 L(N_1) dx = -38/15$$

$$-33354(2x^2 - 3x) + .0013875(4x^2 - 3x)$$

$$F_1 = -\int_0^1 N_1 P_1 dx - \int_0^1 N_1 L(u_0) dx = 5/6$$

$$a_1 = \frac{5/6}{-38/15} = -.3289$$

$$\phi(x) = \frac{-25}{76} (-3x + 2x^2)$$

$$\phi(x) = \frac{1 + \sin 1 - \cos 1}{\sin 1 + \cos 1} \sin x + \cos x - 1$$

$$= .9417 \sin x + \cos x - 1$$

$$\phi(.5) = .328947$$

$$\phi(.5) = .3291$$

$$y'' + y = 0 \quad x^2 + 1 = 0 \rightarrow e^{-ix}, e^{ix}$$

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

$$y'' + y = -1 = e^0 \Rightarrow y_h = \frac{-e^0}{P(u)} = -1 \quad P = D^2 + 1$$

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - 1$$

$$f_0(x) = C_2 \cos x = 1 \Rightarrow C_2 = 1$$

$$f'(1) = -f_0(1) \Rightarrow C_1 \cos 1 - \sin 1 = -(C_1 \sin 1 + \cos 1 - 1)$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{1 - \cos 1 + \sin 1}{\sin 1 + \cos 1}$$

Basic Relationships of Elasticity

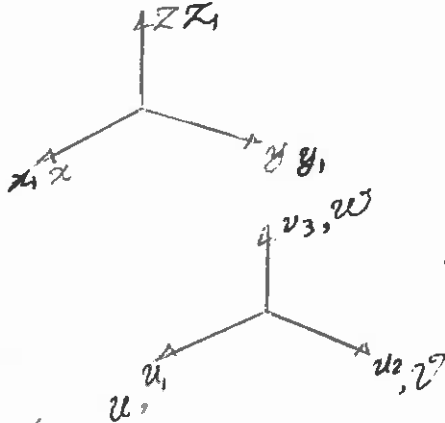
نظریه دو بُعدی (پلان استیسیته)

در سه بُعدی اول از تارهای دایره‌ای فیزیکی فرض ← چارچوب تلفیق این دو
 (هم از weight دایره فرضی فرض پس حضور در تئوری الاستیسیته نیز بر مبنای معادلات تعریف می‌شود)

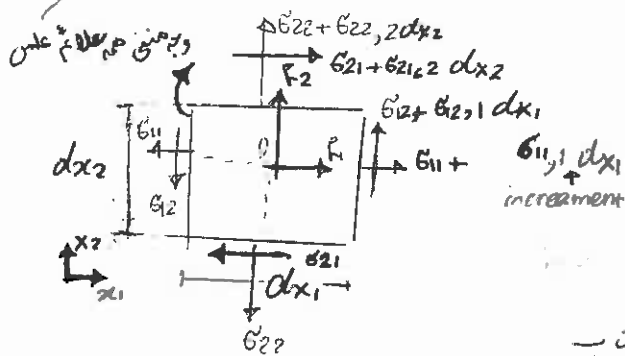
هدف تئوری الاستیسیته معادله از تغییر مکان بر حسب بارهای وارده می‌تواند آردیم در کسر بجز ساده $\frac{d\delta l}{dx} = \frac{M}{EI}$

1 Differential Equations of Equilibrium

همان دو مختصات اصلی (از 3) می‌دهد



فعلی سیستم معادله کرده Polar Shell سیستم
 برای می‌تواند - ابعادی از بر حسب کردن کارکن
 تعمیم ابعادی



$\epsilon_{ij} = \frac{\Delta}{l}$
 تغییر طول و عرض

K و ϵ_{ij} تغییرات در راستای K

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{21,2} + F_1 = \rho \ddot{u}_1 & \leftarrow \sum F_x = m \ddot{u}_1 \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + F_2 = \rho \ddot{u}_2 & \leftarrow \sum F_y = m \ddot{u}_2 \end{cases}$$

برای ضمیمه $t=1$
 کرنش کقیم $\frac{\partial dx_1 dx_2 t}{dx_1 dx_2 t}$

تعیین
 راستای σ

$\sigma_{ij,j} + F_j = \rho \ddot{u}_i$

سبعی

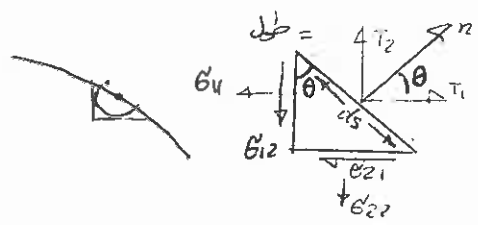
$\sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{32,3} + F_2 = \rho \ddot{u}_2$

و مجموع دیگرهای ای

$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

موسسه ماس - این معادله دلتا بود حال در Bandage

Boundary Condition



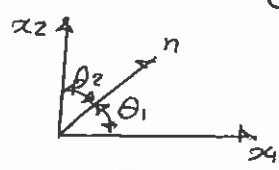
n و σ در سطح

در سطح و در سطح
سطح

$T_1, T_2 = \text{Surface Traction Force}$

چون جهت کلی در سطح است

$n_1 = \cos\theta, n_2 = \sin\theta$

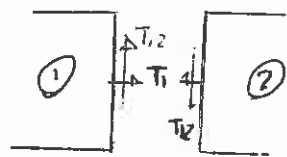
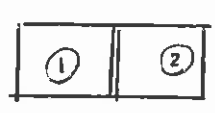


$x_1 = \cos\theta_1$
 $x_2 = \cos\theta_2$

$T_i ds = \sigma_{11}(n_1 ds) + \sigma_{21}(n_2 ds)$

$$\begin{cases} T_1 = n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{21} \\ T_2 = n_1 \sigma_{12} + n_2 \sigma_{22} \end{cases}$$

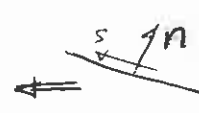
$T_j = \sigma_{ij} n_i$



$T_{1(1)} = T_{1(2)} \Rightarrow \sigma_{11} = \sigma_{11}$
 $T_{12(1)} = T_{12(2)} \Rightarrow \sigma_{12} = \sigma_{12}$

یافته می:

$\sigma_{nn} = \sigma_{nn}$
 $\sigma_{ns} = \sigma_{ns}$
 $\sigma_{ss} \neq \sigma_{ss}$



هیچ افزایش نداشتند σ_{22}

در این دو حالت σ_{22} در این دو حالت
بسیار متفاوت است

Mixed Boundary

در اینجا هم $\text{Displacements Traction}$ در این حالت

در این حالت

توضیح

u_1	u_2
σ	σ

σ	σ
T_1	T_2

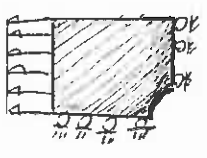
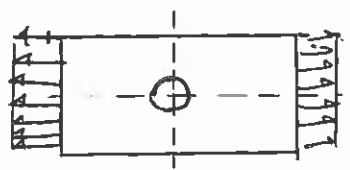
u_1	σ
σ	T_2

σ	u_2
T_1	σ

در این حالت

Symmetry & skew symmetry

از آنجمله هندسه از بارها و خود سازه تقارن



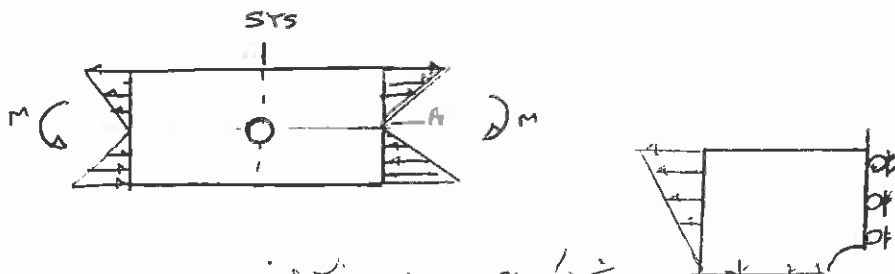
حالا وقتی کبش بارها را کبش مستقیم و معکوس

اگر برین تقارن 4 برابر حجم جلا است 4 برابر

هویت کبش مساوی کبش تقارن!

نمی توانیم هیچ در این چون دیگری نداشت!

بالا و پایین مجاز



قطعه را فرض کنیم در حالت برابری است

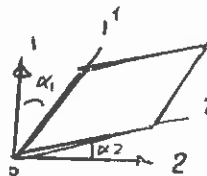
Strain Displacement Relationships

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{j,i} + u_{i,j}) \quad i, j = 1 \rightarrow 3$$

۶ معادله می دهد

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = u_{1,1} & \text{در مسافت طولی} \\ \epsilon_{22} = u_{2,2} \end{cases} \quad \epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1})$$

$$\delta_{12} = 2\epsilon_{12}$$



$$\delta_{12} = \alpha_1 + \alpha_2$$

مستقیم $\alpha_1 = \alpha_2$ یعنی $\gamma_{12} = \frac{1}{2} (u_{1,2} - u_{2,1})$ مادی صغیر در نظریه کلاسیک

یعنی center line 45° از در مرکز بر لب هر دو طرف می گذرد

مادامه معادله تغییر مکان مکانی لا در δ_{12} پس از روابط استاتیکی عبور در نظر گرفته می شود
 از دید displacement اتوماسیک خودش بر مبنای تنش
 با از دید Assumed که نیروها معلوم تنش \rightarrow کرنشها در دست در صورت یک بر یک
 Compatibility برقرار است برای معادله دارند

برای مشتق بعدی

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) &= \frac{2 \partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} &= \frac{2 \partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \end{aligned}$$

اما وقتی کرنش displacement اجتناب از معادله بالا داریم

Compatibility ۶.۶ یعنی

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

operator بک

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

۶ تا معادله ۳ مجهول

6) STRESS-STRAIN Relationship

Constitutive Relation

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31} \rangle$$

$$\langle \epsilon \rangle = \langle \epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad \epsilon_{33} \quad 2\epsilon_{12} \quad 2\epsilon_{23} \quad 2\epsilon_{31} \rangle$$

$$\sigma_{6 \times 1} = E_{6 \times 6} \epsilon_{6 \times 1}$$

اما قانون بقی تعارین را تعیین می کنند \Rightarrow 36 آرایی

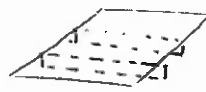
$$\frac{36}{2} + 3 = 21$$

برای از طریق آن فایزهای مختلف 21 پارامتر به دست آید

اما اجسام خواص از خوردشان می دهند همانند اجسام orthotropic احصای هستند که خواص روی 3 محور ثابت می ماند

در امتداد هر محور ثابت و $\rightarrow 21$ orthotropic \rightarrow not varies along each axis

همانند الیاف خوب و یا درختی  در صورت خود مختف

و یا معنای تم در جهت stiffen  برای جهت کمتر ضوابط تا این

در جهت دیگر stiffen

بسیار جهت هم همانند برای مائین در صورت مختلف عودتا رفتار در شان می دهند

و حتی فولد مناب فولاد را یک نیروی مضاعف در جهت قوی می کنند

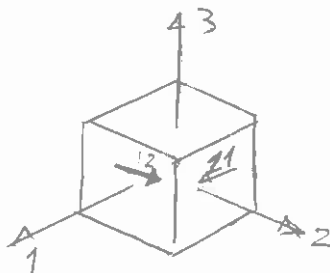
تا حق نخواهند در هر طرف سخت کننده و عمل وقت نیز پانچ کردن را انجام دهند

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = \frac{1}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_{33} \\ \epsilon_{22} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{1}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{32}}{E_3} \sigma_{33} \\ \epsilon_{33} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_{22} + \frac{1}{E_3} \sigma_{33} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G_{12}} \\ \delta_{23} = \frac{\sigma_{23}}{G_{23}} \\ \delta_{31} = \frac{\sigma_{31}}{G_{31}} \end{cases}$$

نسبت پواسون

$$\begin{cases} E_3 \nu_{13} = E_1 \nu_{31} \\ E_2 \nu_{32} = E_3 \nu_{23} \\ E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12} \end{cases}$$



نسبت پواسون

$$\begin{cases} E \nu_{13} \\ \gamma \nu_{13} \\ G \nu_{13} \end{cases}$$

ISOTROPIC

$$E, \nu \quad \lambda, \mu$$

Direct Delta

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \delta_{ij} \Delta T$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$\lambda, \mu \leftarrow$ Lamé constants

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

بین دیرزی حجم - افزایش حرارت و تاثیر روی λ و μ را باید در نظر داشت

اختلاف درجه حرارت 60- و 24

دکته damping الاستیسیته بارگذاری که آیا E افزایش اکثر سرب بلیشم E زیاد
پیر سرب بارگذاری مجدد در ASTM گفته است کشید مستقیم

حالات پوز و معادله بنیادی هراس Perceval - اثر فاکشن

	حجم	معادلات	displacement
ν_s	$\frac{3}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\nu = \frac{1}{6} \epsilon_{ij} = \frac{1}{6} (\nu_{11} + \nu_{22} + \nu_{33})$
E_s	6	6	$E = 6 \mu, \lambda$
G_s	$\frac{6}{3}$	$\frac{3}{15}$	معادله $\epsilon_{ij} + \epsilon_{ji} = \epsilon_{ij}$
ع	15	15	

$$\sigma_{ij} + \sigma_{ji} = \sigma_{ij} \quad (1)$$

$$\sigma_{ij,i} + f_j = \rho \ddot{u}_j \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda u_{k,k} + \frac{2\mu}{2} (u_{ij} + u_{ji}) \left(\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji}) \right)$$

$$\sigma_{ij,i} = \delta_{ij} \lambda u_{k,k,i} + \mu (u_{i,j,i} + u_{j,i,i})$$

$$\delta_{ij} \lambda u_{k,k,i} = \lambda u_{k,k,j}$$

$$u_{j,i,i} = u_{i,i,j}$$

$$\lambda u_{k,k,j} + \mu (u_{i,i,j} + u_{j,i,i}) + f_j = \rho \ddot{u}_j$$

$$u_{k,k,j} = u_{i,i,j}$$

$(\lambda + \mu) u_{i,i,j} + \mu u_{j,i,i} + f_j = \rho \ddot{u}_j$
 $j = 1, 2, 3$

$\lambda \delta_{ij,i}$ | domain |

15 سوال 15 محاوره‌ای و ϵ و σ حالتی
 فرم Navier solution ← displacement

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] \\ \epsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \epsilon_1 \\ E \epsilon_2 \\ E \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ 0 & 1-\nu^2 & -\nu-\nu^2 \\ 0 & -\nu-\nu^2 & 1-\nu^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} + \nu \epsilon_{11} \\ \epsilon_{33} + \nu \epsilon_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} + \nu \epsilon_{11} \\ \epsilon_{33} + \nu \epsilon_{11} + \frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_{22} + \nu \epsilon_{11}) \end{bmatrix}$$

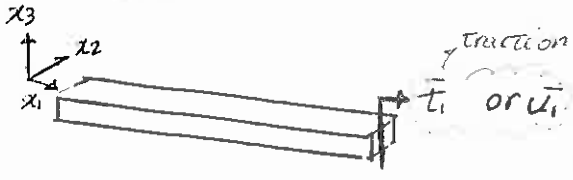
$$\Rightarrow \left(\frac{(1-\nu^2)(1-\nu) - \nu^2(1+\nu)}{(1-\nu)} \right) \sigma_{33} = \epsilon_{33} + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_{11} + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_{22}$$

$$\Rightarrow \sigma_{33} = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_{33} + \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_{11} + \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_{22}$$

$$\sigma_{33} = \lambda (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + 2\mu \epsilon_{33}$$

$$\sigma_{13} = \frac{2\mu}{\text{فقط}} \epsilon_{13}$$

Ritz - Galerkin



برای مثال از این سبک معکوس شروع
یعنی در حد درگیر کوچک

تغییرات نامزد
طول یا تغییرات

- 1) $u_1 = \hat{u}_1(x_1, t)$ بقیه ϵ ها را فرض کنیم
- 2) $\epsilon_{11} = u_{1,1}(x_1, t)$ $\epsilon'_{11} = \text{all others}$

$\alpha = \alpha_1$ تغییرات نامزد $\frac{E}{1-2\nu}$ با σ_{11} ها معزین

3) $\sigma_{11} = \lambda \epsilon_{11} + 2\mu \epsilon_{11} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \Delta t$
 $\sigma_{22} = \sigma_{33} = \lambda \epsilon_{11} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \Delta t$

4) $\frac{\sigma_{11,1} + f_1}{\text{معادله در معزین}} = \rho \ddot{u}_1$ $f_2, f_3 = 0$ فرض

$\sigma_{11,1} + f_1 - \rho \ddot{u}_1 = 0$

معادله در معزین

$0 < x_1 < L$ valid in domain

اگر σ_{11} و f_1 برابر تغییرات تنش

$\int_{\Omega} w_1(x_1) (\sigma_{11,1} + f_1 - \rho \ddot{u}_1) dx_1 = 0 \quad (I)$

اگر w_1 در حالت معادله باشد اگر w_1 تغییرات نامزد

انتقال است کار با نامزد w_1 \leftarrow تغییرات نامزد مجازی w_1 \leftarrow تغییرات نامزد

w_1 \leftarrow weightal \leftarrow تغییرات نامزد

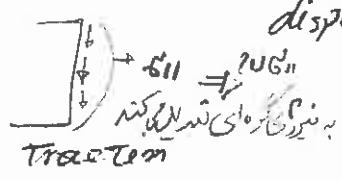
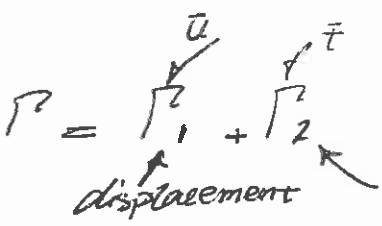
به ازای هر تابع w_1 اگر w_1 تغییرات نامزد w_1 \leftarrow تغییرات نامزد w_1 \leftarrow تغییرات نامزد

یعنی اگر w_1 در حد درگیر w_1 \leftarrow تغییرات نامزد تابع در یک مکان w_1 \leftarrow تغییرات نامزد w_1 \leftarrow تغییرات نامزد

(I) $\rightarrow \int_{\Omega} w_1 \sigma_{11,1} dx_1 = w_1 \sigma_{11} \Big|_{\Gamma_2} - \int_{\Omega} w_{1,1} \sigma_{11} dx_1$

\leftarrow استرل جز خود دو طرفی

$\int_{\Omega} (2\mu w_{1,1} \epsilon_{11} + w_1 \rho \ddot{u}_1 - w_1 f_1) dx_1 - w_1 \sigma_{11} \Big|_{\Gamma_2} = 0$ حل



displacement \leftarrow Traction \leftarrow $w_1 \sigma_{11} \Big|_{\Gamma_2}$

\leftarrow تغییرات نامزد

assume $w_1 \Big|_{\Gamma_1} = 0$ فرض

$w_1 \sigma_{11} \Big|_{\Gamma_2}$

نیز w_1 خارجی بر سیستم w_1 \leftarrow w_1 \leftarrow w_1

Galerkin form

$$G(u_1, w_1) = \int_{\Gamma} (w_{1,1} \epsilon_{11}(u_1) + w_1 \ddot{u}_1 - w_1 f_1) d\Gamma - w_1 \bar{\epsilon}_{11} \Big|_{\Gamma_2}$$

$$\epsilon_{11}(u) = (\lambda + 2\mu) \overbrace{\epsilon_{11}(u)}^{u_{1,1}} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \Delta t$$

$$G(u_1, w_1) = \int_{\Gamma} \{ w_{1,1} [(\lambda + 2\mu) u_{1,1} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \Delta t] + w_1 \ddot{u}_1 - w_1 f_1 \} d\Gamma - \bar{\epsilon}_{11} w_1 \Big|_{\Gamma_2} = 0$$

و حاله که w هر درجه آزادی مرتبه یک را کرد
سنتی را از آنجایی که w از زاویه باقی میماند
با w با هم مرتبه یک است

Galerkin همان تا بجزی برای w است تا بعد برای w است

در این معادله w چون حالت هر یک مجهول باشد معادله قابل حل

$$u_1(x, t) = \underbrace{u_b(x, t)}_{\text{boundary}} + \sum_{i=1}^N \underbrace{\phi_i(x)}_{\text{domain}} a_i(t) \quad \star$$

هر وقت برای u در $domain$ صفت می کنیم تابع w استخوانی می کنیم
نه برای u در $domain$ استخوانی N استخوانی w استخوانی w استخوانی

همیشه می توانیم با حضور $discrete$ که
متغیر x و t را مستقل کردیم ϕ_i بین استخوانی u در $domain$ استخوانی w استخوانی
از هر عدد برداریم $mode\ shape$ حالت w در $domain$ استخوانی w استخوانی w استخوانی

★ generalized coordinate system

متغیرهای تعریف شده

هر چه تابع محدودیت کمتر داشته باشند پیرامون w استخوانی w استخوانی w استخوانی
یک $order$ از سنسور تابع w کم کرد w استخوانی w استخوانی w استخوانی w استخوانی
 $virtual\ displacement$ w استخوانی w استخوانی w استخوانی w استخوانی
خواهم

$$G(u_1, w_1) = \int_{\Omega} \left\{ w_{1,1} \left[(\lambda + 2\mu) u_{1,1} - (3\lambda + 2\mu) \alpha \Delta t \right] + w_1 \left(\psi_{1,1} - w_{1,1} \right) \right\} dx_1 - \bar{\sigma}_{11} w_1 \Big|_{\Gamma_2} = 0$$

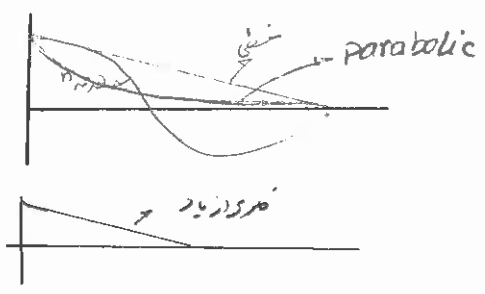
$$u_1(x, t) = u_b(x, t) + \sum_{i=1}^N \phi_i(x) a_i(t)$$

Satisfy boundary condition
T, B.C. satisfy

$a_i / \tau_i = 0$
N → interpolation function
این در داخل این کاری کنند

$$u(0) = 1 \quad u(L) = 0$$

$u(\cdot) = g(t) \rightarrow$ می توانستیم در اینجا یکی مناسب تکیه کنیم



$$|u_1(x, t) - u_b(x, t) - \sum_{i=1}^n \phi_i(x) a_i(t)| \leq \epsilon \quad \forall x, t$$

باید a_i طوری انتخاب بشود که تفاضل صاف باشد

$$w_1(x) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x) A_i$$

تقریباً می توانیم در اینجا بنویسیم

$$\begin{cases} u_1(x, t) = u_b + \langle \phi \rangle \{a\} \\ w_1(x) = \langle \psi \rangle \{A\} \end{cases}$$

$$\psi_i / \tau_i = 0$$

$$\begin{cases} u_{1,1} = u_{b,1} + \langle \phi_{,1} \rangle \{a\} \\ w_{1,1} = \langle \psi_{,1} \rangle \{A\} \end{cases}$$

تایم در آن متن ندارد

$$G = \int_{\Omega} \left\{ \underbrace{\{A\} \{ \psi_{,1} \}}_{w_{b1}} \left[(\lambda + 2\mu) (u_{b,1} + \langle \phi_{,1} \rangle \{a(t)\}) - (3\lambda + 2\mu) \alpha \Delta t \right] + \langle A \rangle \{ \psi \} P [u_b + \langle \phi \rangle \{a\}] - \langle A \rangle \{ \psi \} \right\} dx - \langle A \rangle \{ \psi \} \bar{\sigma}_{11} \Big|_{\Gamma_2} = 0$$

در اینجا می بینیم

$$K \triangleq \int_{\Omega} \{ \psi_{,1} \} (\lambda + 2\mu) \langle \phi_{,1} \rangle d\Omega \quad \rightarrow \quad \frac{k}{K} = \sum_{e=1}^K \frac{k_e}{K}$$

(N x N) matrix

$$\underline{M} \triangleq \int_{\Omega} \{\psi\} P \langle \phi \rangle d\Omega$$

$$\{f_a\} \triangleq \int_{\Omega} \left[\{\psi\} F_1 + \{\psi_2\} (3\lambda + 2\mu) \alpha \Delta T \right] d\Omega + \{\psi\} \bar{G}_1 \Big|_{\Gamma_2}$$

applied virtual displacement

$$\{f_b\} \triangleq \int_{\Omega} \left[\{\psi_2\} (\lambda + 2\mu) \epsilon_{b,1} + \{\psi\} f_{ü_b} \right] d\Omega$$

boundary internal forces

$$G = \langle A \rangle \left[\underline{K} \{a\} + \underline{M} \{\ddot{a}\} - \{f_a\} + \{f_b\} \right] = 0$$

generalize coordinate system
 مگر برای کلیه توابع ψ باید صفر باشد یعنی برای هر $\langle A \rangle$ باید از انتگرالی من صفر باشد
 بر شرط لازم و کافی آنکه داخل کره صفر باشد

$$\Rightarrow \underline{K} \{a\} + \underline{M} \{\ddot{a}\} = \{f_a\} = \{f_b\}$$

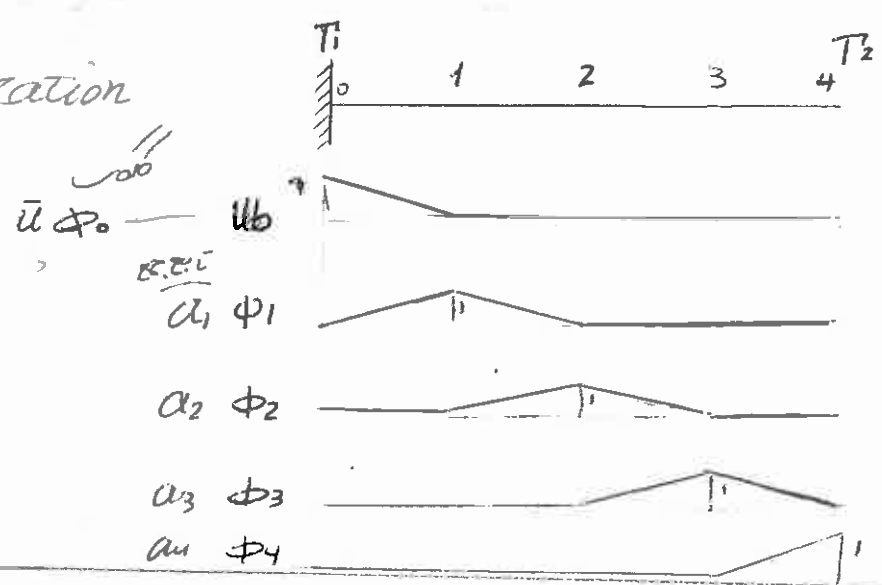
$$K \underline{v} + c \dot{v} + M \ddot{v} = P(t) \leftarrow \text{هندسه دینامیک}$$

رلز $f(t) - m\ddot{v}$
 {f_b} هم نسبت دینامیکی bondry هم اعمال کنشی کلیه ها می باشد {فیزیکی اعمال است اما خود دینامیکی}

ها هم مانند strain است فرادین و استاتیکی است ضرب {psi} virtual displacement
 همانند هنگامی که در تغییر زاویه خودش هم جانورده با جرم ضرب

این نیرو در تصرفان A ضرب می شود

DAS criticism



$$\phi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = x_i \\ 0 & \text{if } x_j \neq x_i \end{cases}$$

$$u_i(x_i) = a_i \phi_i(x_i) = a_i$$

هو نه ځای ته a_i داره (معدله حجت)

discrete به ځای ته هر کله اشرف دغه اشرف اشرف اشرف و که از این فعلی باز صادق (دست) منتر با این تضمین کنیم، پیوستگی حافظ می شود.

پیوسته $\xrightarrow{\text{discrete}}$ جزء اثرات $\xrightarrow{\text{assemble}}$ با این تضمین شود

RITZE Galerkin

با تیری فقط صفر صاف داریم
بردهای کوچکی می شود

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - u = -1 \quad u(0) = 0 \quad u(1) = 1$$

اختلاف تابع واقعی و تقریبی



پس تابع دومی با بردار واقعی که بیشتر دقت به بیرون است پس بهتر است اصلاً خوردن باشد

$$\int_0^1 w \left(\frac{d^2 u}{dx^2} - u \right) dx = 0 \quad \int_0^1 w u_{,11} dx = u_{,1} w_{,1} \Big|_0^1 - \int_0^1 u_{,11} w_{,1} dx$$

صفر تیری که از این داریم

$$\int_0^1 w u_{,11} dx = \int_0^1 w_{,1} u_{,1} dx$$

چون u در $u_{,1}$ و $u_{,1}$ در u مشخصه $u_{,1}$ بر مبنای صفر

$$\int_0^1 w_{,1} u_{,1} dx = w_{,1} u_{,1} \Big|_0^1 - \int_0^1 w_{,11} u_{,1} dx = \int_0^1 w_{,11} u_{,1} dx$$

تست تابع ϕ

$$\Rightarrow \int_0^1 w_{,1} u_{,1} dx + \int_0^1 w u dx = 0$$

$$\begin{cases} u = u_b + \langle \phi \rangle \{a\} \\ u_{,1} = u_{b,1} + \langle \phi_{,1} \rangle \{a\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w = \langle A \rangle \{ \phi \} \\ w_{,1} = \langle A_{,1} \rangle \{ \phi_{,1} \} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \langle A \rangle \left\{ \int_0^1 \{ \phi_{,1} \} u_{b,1} dx + \int_0^1 \{ \phi_{,1} \} \langle \phi_{,1} \rangle dx \{a\} + \int_0^1 \{ \phi \} u_b dx + \int_0^1 \{ \phi \} \langle \phi \rangle dx \{a\} \right\} = 0$$

$\triangleleft u_{,1}$

$\triangleleft u_b$

$$K_{aa} = \int_0^1 \{ \phi \} \langle \phi \rangle dx + \int_0^1 \{ \phi_{,1} \} \langle \phi_{,1} \rangle dx$$

پس تابع ϕ با این روش تست می شود نه دوبار پس بهتر است جواب

$$K_{ab} = \int_0^1 \{ \phi \} u_b dx + \int_0^1 \{ \phi_{,1} \} u_{b,1} dx$$

پس از آن که در این روش یکبار می شود

$$K_{aa} = -f_b$$

فوق با تیری داریم +

تایم $P_{\text{applied load}}$

$$\begin{cases} \phi_1 = \sin \pi x \\ \phi_2 = \sin 2\pi x \end{cases} \quad \begin{cases} \phi_{1,1} = \pi \cos \pi x \\ \phi_{2,1} = 2\pi \cos 2\pi x \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_{11} = \frac{1}{2}(1+\pi^2) & K_{21} = 0 \\ K_{12} = 0 & K_{22} = \frac{1}{2}(1+4\pi^2) \end{cases}$$

$$u_b = x \quad u_{b,1} = 1$$

$$F_{b1} = - \left(\int_0^1 x \sin \pi x dx + \int_0^1 \pi \cos \pi x dx \right) = -\frac{1}{\pi}$$

$$F_{b2} = +\frac{1}{2\pi}$$

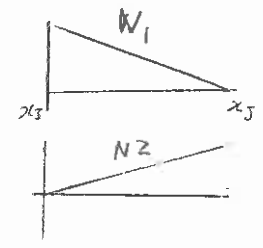
$$\begin{aligned} a_1 &= -0.05857 \\ a_2 &= 0.00786 \end{aligned}$$

اینجا فقط یکبار جمع بودیم ϕ مقیاس گیری
 باره و حتی می توانیم ϕ و ϕ
 از روش Ritz مقیاس
 یعنی همان order که استفاده کردیم

مجموعی $\underline{K} = \sum K^e$ $G(u_1, v_1) = \sum_e G^e(u_1, v_1)$

$$N_1 = \frac{x_j - x}{x_j - x_i} \quad , \quad N_2 = \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

$$= \frac{x_j - x}{h} \quad = \frac{x - x_i}{h}$$



global \rightarrow element

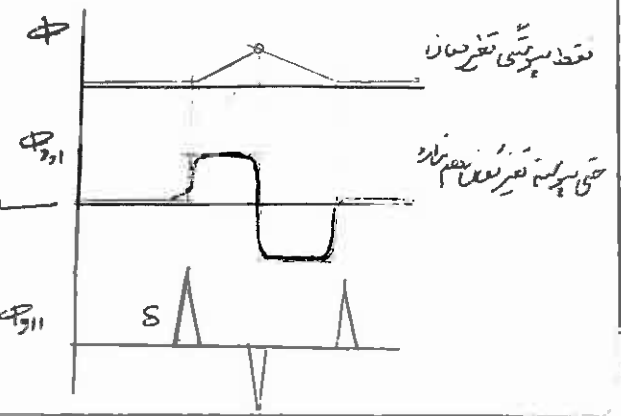
و حالا وقتی دو لایه را کنار هم می گذاریم تا درجه پیوستگی را ثابت کنیم
 (مستقیم اول - مستقیم دوم)

همه چیز انجام تا عنصر discretize در انجام درجه

$$\int_{x_0}^{x_1} \dots dx = \sum_{e=1}^n \int_{x_{e-1}}^{x_e} \dots dx$$

برای پیوستگی بین عناصر Ritz با استاندارد اولی چه پیوستگی ما و فضا تا درجه اول داشته باشیم

مستقیم هم هم پیوستگی را داریم



اما می توان از این استفاده کرد و درجه اول را مستقیم کنیم
 یعنی اگر بتوانیم طوری پیوستگی را تعیین کنیم تا این که مشتق دوم ϕ'' مستقیم باشد
 یعنی تا جایی که مشتق مستقیم ثابت برود

۱- درجه تابع Interpolation با پیرامونی بودن تابع محوری انتخاب متوجه شدن
(n) ام تابع ثابت باشد (n درجه) و کمترین صحت در فرم (R-G) (Ritz Galerkin)

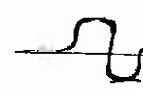
معنی برای درجه 4 - درجه 3
همین موضوع برای انتخاب تابع شکل Multiplication صحت است

۲- تابع با پیرامونی بودن (n-1) C باشد اگر n باشد
شرط پیوستگی (Continuity)

تابع C یعنی هم خردش هم مشتق اولش هم برده

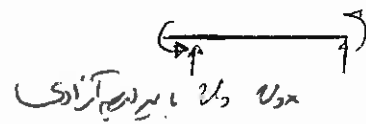
C تابعی است که خود تابع آتش n ام تابع پیوستگی است

صحت n ام بصورت Piece wise (پاره پاره) پیوستگی دارد
چون ما این را در استرین می بینیم



مثلاً این خراب است - فقط در سر پیوسته نه مشتق آن در نقطه سر پیوسته آزادی

جای در این درجه 4 صحت است - C با پیوستگی



معنی صفاً با پیوستگی داریم (با پیوستگی) کنیم

۳- معادلات تابع در یک واحد و در چند واحد است
شرط معادله

بعضی جاها بحث از پیوستگی نزدیک به هم می شود
این سه شرط تضمین می شود با افزایش n از هم جدا واقعی و شش

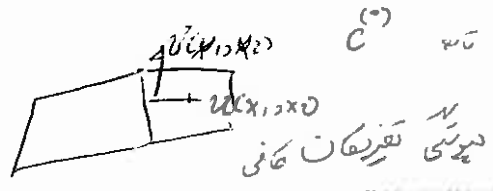
① شرط کامل بودن (Completeness Condition) یعنی صحت اصلاح خط

② پیوستگی (Continuity)

③ Rigid mode یعنی آخر - Rigid

Rigid ✓ Deform
تغییر مکان

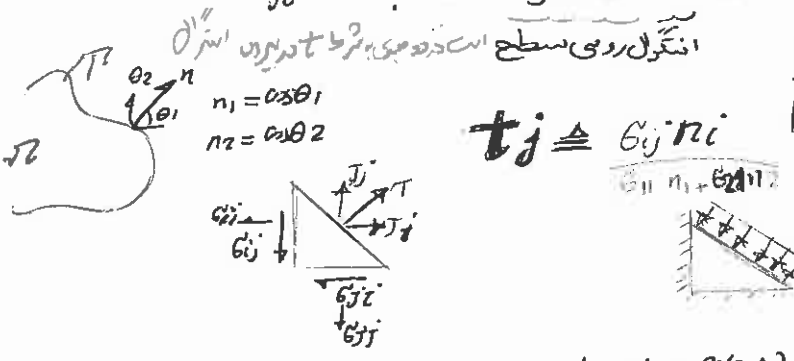
اما اصل تعاریف نگاه ما به (شماره های پایین تعاریف در این)



همین order اولی بالعدد
تضمین رگرسیو شود
Ritz فنون order 1-2

two Dimensional

$$G(u, v) = \int_{\Omega} (w_{11} \epsilon_{ij} + w_{12} \epsilon_{ij} - w_{21} f_j) dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma} w_{21} (G_{ij} n_i) ds = - \int_{\Gamma} \bar{f}_j dx_1 dx_2$$



$$t_j \triangleq G_{ij} n_i$$

$$\textcircled{I} w_{11} \epsilon_{ij} = w_{11} \epsilon_{11} + w_{12} \epsilon_{12} + w_{21} \epsilon_{12} + w_{22} \epsilon_{22}$$

$$\langle w_{11}, w_{22}, (w_{12} + w_{21}) \rangle \begin{cases} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{cases}$$

global

$$\begin{cases} u_i(x_1, x_2, t) = u_{bi}(x_1, x_2, t) + \sum_{c=1}^N \phi_c(x_1, x_2) a_{ic}(t) \\ w_j(x_1, x_2) = \sum_{a=1}^N A_{ja} \phi_a(x_1, x_2) \end{cases}$$

A_{ja} : A - matrix of points
 در سطح عضو
 انتقال در سطح
 shape function
 مقدار آن در هر نقطه

Element

$$\begin{cases} u_i(x_1, x_2, t) = \sum_{c=1}^n N_c(x_1, x_2) a_{ic}(t) \\ w_j(x_1, x_2) = \sum_{a=1}^n N_a(x_1, x_2) A_{ja} \end{cases}$$

مستقیم و عکس

$$\begin{cases} w_{1j} = u_{b1j} + \sum_{c=1}^n \phi_{c1j} a_{ic} \\ w_{2j} = \sum_{a=1}^n A_{ja} \phi_{a2j} \end{cases}$$

$$\phi_a = \begin{bmatrix} N_a & \cdot \\ \cdot & N_a \end{bmatrix}$$

$$\langle w_{11}, w_{22}, w_{12} + w_{21} \rangle = \sum_a \langle A_{1a}, A_{2a} \rangle \begin{bmatrix} \phi_{a11} & \phi_{a22} \\ \phi_{a12} & \phi_{a21} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_a \langle A_{1a}, A_{2a} \rangle \underline{B}_a^T$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} - \delta_{ij} (3\lambda + 2\mu) \alpha \Delta T$$

چون افزایش دما برش ایجاد می کند در حواله ایجاد در تمام جهات

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} \quad \{\sigma\} = [E] \{\epsilon\} - \{D\alpha\} \Delta T$$

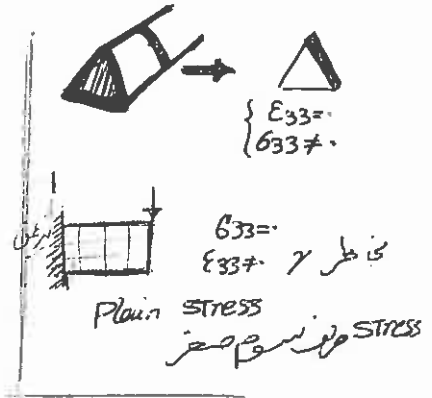
For plain strain

$$\epsilon_{33} = 0$$

$$D\alpha = \frac{E\alpha}{1-\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$E = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$



For plain stress

$$D\alpha = \frac{E\alpha}{1-\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

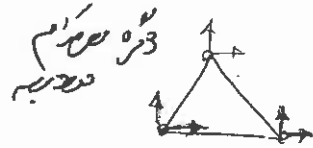
$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\{D\alpha\} = \frac{E\alpha}{1-\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Plain stress & strain

در Finite Element تغییر کنیم

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{Bmatrix}$$



$$\underline{\epsilon} = \sum_{c=1}^N \begin{bmatrix} \phi_{c,1} & 0 \\ 0 & \phi_{c,2} \\ \phi_{c,2} & \phi_{c,1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{1c} \\ a_{2c} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_{b,1} \\ u_{b,2} \\ u_{b,2} + u_{b,1} \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\epsilon} = \sum_c \underline{B}_c \begin{Bmatrix} a_{1c} \\ a_{2c} \end{Bmatrix} + \underline{\epsilon}_b$$

$$\{\sigma\} = [E] \{\epsilon\} - \{D\alpha\} \Delta T$$

$$\langle u_{b,1} \quad u_{b,2} \quad u_{b,2} + u_{b,1} \rangle \{\sigma\} = \sum_a \sum_c \langle A_{1a} \quad A_{2a} \rangle \underline{B}_a^T \underline{E} \underline{B}_c \begin{Bmatrix} a_{1c} \\ a_{2c} \end{Bmatrix}$$

$$+ \sum_a \langle A_{1a} \quad A_{2a} \rangle \underline{B}_a^T \underline{E} \underline{\epsilon}_b$$

$$- \sum_a \langle A_{1a} \quad A_{2a} \rangle \underline{B}_a^T \{D\alpha\} \Delta T$$

۲۴

II) $f_{w_j} \ddot{u}_j = f \langle w_1, w_2 \rangle \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix}$

$u_i = u_{bi} + \sum_c \alpha_c a_{ci}$

$\ddot{u}_i = \ddot{u}_{bi} + \sum_c \alpha_c \ddot{a}_{ci}$

$\int_{\Omega} [\rho \cdot \ddot{u}] = \rho \Gamma$

III) $\Rightarrow = \sum_a \sum_c \langle A_{1a} A_{2a} \rangle \Phi_a \int \Phi_c \begin{Bmatrix} \ddot{a}_{c1} \\ \ddot{a}_{c2} \end{Bmatrix} + \sum_a \langle A_{1a} A_{2a} \rangle \Phi_a \int \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{b1} \\ \ddot{u}_{b2} \end{Bmatrix}$

$\ddot{u}_i = \ddot{u}_{bi} + \sum_c \alpha_c \ddot{a}_{ci}$

IV)

m_{ij} نیروی درونی $\Rightarrow n_{ij} = 0$
 وقتی که در یک جرم



m_{12} میزنیم

مثبت در یک جهت و منفی در جهت دیگر
 هم مثبت در یک جهت و هم منفی در جهت دیگر

جرم در یک جهت همان جهت قائم
 را مرتفعتر



مثلاً بلکن

در نقطه تولید کوپرنی گشته

همان تغییر مکان واحد \rightarrow m_{ij} معادله دارد

III) $= \sum_a \sum_c \langle A_{1a} A_{2a} \rangle \Phi_a \int \Phi_c \begin{Bmatrix} \ddot{a}_{c1} \\ \ddot{a}_{c2} \end{Bmatrix} +$

ماتریس $I_{2 \times 2}$

$\sum_a \sum_c \langle A_{1a} A_{2a} \rangle \Phi_a \int \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{b1} \\ \ddot{u}_{b2} \end{Bmatrix}$

IV) $w_j \ddot{f}_j = \langle w_1, w_2 \rangle \begin{Bmatrix} \ddot{f}_1 \\ \ddot{f}_2 \end{Bmatrix} =$

III) $= \sum_a \langle A_{1a} A_{2a} \rangle \Phi_a \begin{Bmatrix} \ddot{f}_1 \\ \ddot{f}_2 \end{Bmatrix}$

V) $w_j \ddot{t}_j = \sum_a \langle A_{1a} A_{2a} \rangle \Phi_a \begin{Bmatrix} \ddot{t}_1 \\ \ddot{t}_2 \end{Bmatrix}$

2×2
 $\underline{K}_{ac} \triangleq \int_{\Omega} \underline{B}_a^T E \underline{B}_c d\Omega$
 ↑
 استند محاسبه

$\underline{M}_{ac} \triangleq \int_{\Omega} \phi_a \int \phi_c I d\Omega$

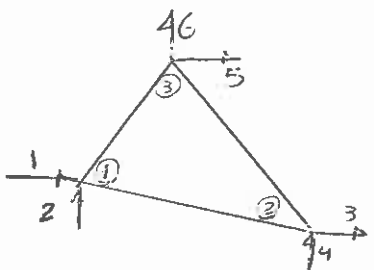
$\{f_a\}_a \triangleq \int_{\Omega} [\phi_a \{f\} + \underline{B}_a^T \{Dx\}^T DT] d\Omega + \int_{\Gamma} \phi_a \{T\} d\Gamma$
 applied نیروی داخلی نیروی خارجی

$\{b_a\}_a \triangleq \int_{\Omega} [\underline{B}_a^T E \underline{E}_b + \phi_a \int P \{u_b\}] d\Omega$
 boundary فرس و تکثیر ماسه متن تکثیر ماسه

$G = \sum_a \langle A_{1a} \ A_{2a} \rangle \left(\sum_c \underline{K}_{ac} \{a_c\} + \{b_a\} - \{f_a\} \right)$

$\underline{K}_{ac} = \int_{\Omega} \underline{B}_a^T E \underline{B}_c d\Omega$ $B_c = \begin{bmatrix} N_{c1} & 0 \\ 0 & N_{c2} \\ N_{c2} & N_{c1} \end{bmatrix}$
 $a = 1, 2$ $c = 1, 2$

$K_{11} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & N_{12} \\ 0 & N_{12} & N_{11} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} N_{11} & 0 \\ 0 & N_{12} \\ N_{12} & N_{11} \end{bmatrix} d\Omega$
 $= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$



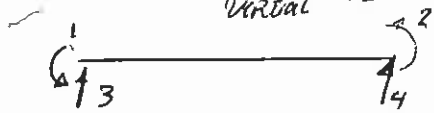
$K_{13} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & N_{12} \\ 0 & N_{12} & N_{11} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} N_{31} & 0 \\ 0 & N_{32} \\ N_{32} & N_{31} \end{bmatrix} d\Omega$
 (تکرار در اینجا)

$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ \sim & K_{22} & K_{23} \\ \sim & \sim & K_{33} \end{bmatrix}$

$\underline{K}_{ac} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} N_{a1} & 0 \\ 0 & N_{a2} \\ N_{a2} & N_{a1} \end{bmatrix}^T E \begin{bmatrix} N_{c1} & 0 \\ 0 & N_{c2} \\ N_{c2} & N_{c1} \end{bmatrix} d\Omega$

حل مسئله از طریق این روش

$$M_{ac} = \int_{\text{Virtual}} \frac{N_a}{N_c} I dx$$

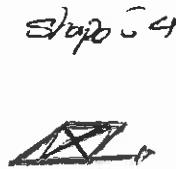
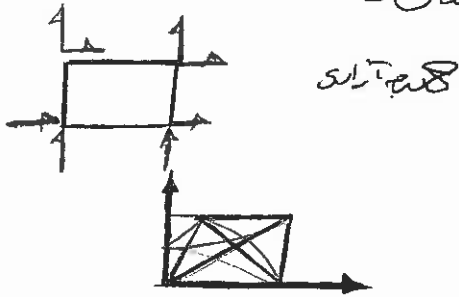


constance matrix

$$M_{beam} = m_{13} = \int_0^L N_1 P(x) N_3 dx$$

ماتریس 4x4 جرم

این Shapefunction درستی و این 2 Shapefunction

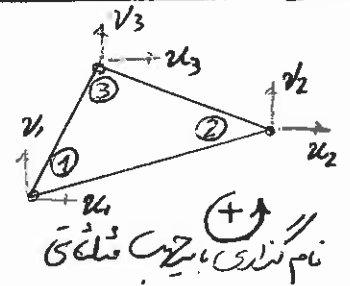
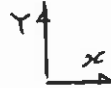


B (3x6) ماتریس

Triangular Element

(Simplex)

$$K = \int_{\Omega} B^T E B dx$$



$E = B \Delta$ ← تعریف B

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{bmatrix} \quad \bar{E} = \begin{bmatrix} G_{11} \\ G_{22} \\ G_{12} \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & E_1 E_2 & \cdot \\ E_1 E_2 & E_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & E_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} E_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \leftarrow \text{Plane Stress} \\ E_2 = \nu \end{cases}$$

$$E_{33} = \frac{E_1(1-E_2)}{2}$$

$$\begin{cases} E_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \leftarrow \text{Plane Stress} \\ E_2 = \frac{\nu}{1-\nu} \end{cases}$$

$$E_{(x,y)} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}$$

فرض کنیم که اینها به هم وابسته هستند
 $u(x,y)$
 $v(x,y)$

۱- تقریباً در این حالت استفاده می‌شود؛ تقریباً در حالت این حالت

$$u(x,y) = N_1(x,y) u_1 + N_2(x,y) u_2 + N_3(x,y) u_3 = \sum_{i=1}^3 N_i u_i$$

$$v(x,y) = N_1(x,y) v_1 + N_2(x,y) v_2 + N_3(x,y) v_3 = \sum_{i=1}^3 N_i v_i$$

۲- هم‌رنگ در این حالت

۳- این در Shapefunctionها (ماتریس) است؛ این جسم هم‌رنگ به هم وابسته است

اماد واقع اینطور نیست اگر نخواهم با 6 تا ارتباط دهیم Higher order و شیوه دیگری نیست
 در عبارات آناری نداریم که در سایر و تقریباً بخاطر پواسن داریم
 اوسن من - ساده سازی در یک هم تعداد $shape$ ها کم

$N_i \rightarrow x, y$

$N_i(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y$

و اما چنانچه بخواهیم خود خود را هم در نظر بگیریم

$$E = \begin{Bmatrix} \sum N_{i,x} u_i \\ \sum N_{i,y} v_i \\ \sum (N_{i,y} u_i + N_{i,x} v_i) \end{Bmatrix}_{3 \times 1}, \quad \underline{\Delta} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}_{6 \times 1}$$

$$B = \begin{Bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} \end{Bmatrix}_{3 \times 6}$$

$K = \int_{\Omega} B^T E B \, d\Omega \rightarrow K_{ac} = \int B_a^T E B_c$

K_{13} یعنی کای بیسین فقط در نقطه 3 ارتباط برقرار می کند
 در سایر موارد صفر است پس K_{12}

$$B_c = \begin{Bmatrix} N_{c,x} & 0 \\ 0 & N_{c,y} \\ N_{c,y} & N_{c,x} \end{Bmatrix}_{3 \times 2}$$

این نوعی از $shape$ ها است که در هر دو جهت x و y تغییر می کند
 اگر 9 ترادای هم باشد تقریباً بیسین است 3×3

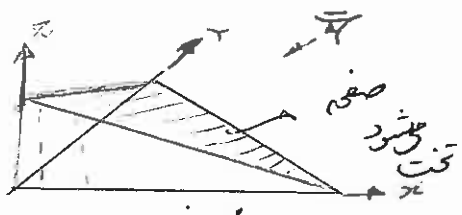
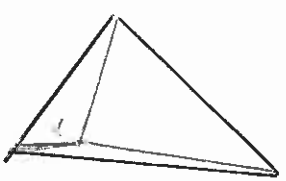
$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ & K_{22} & K_{23} \\ & & K_{33} \end{bmatrix}$$

$B_a^T E B_c$

$$K_{aa} = \begin{bmatrix} N_{ax}^2 E_{11} + N_{ay}^2 E_{33} & (N_{ay} N_{ax}) (E_{12} + E_{33}) \\ (N_{ay} N_{ax}) (E_{12} + E_{33}) & N_{ay}^2 E_{11} + N_{ax}^2 E_{33} \end{bmatrix}$$

$$K_{ab} = \begin{bmatrix} N_{ax} N_{bx} E_{11} + N_{ay} N_{by} E_{33} & N_{ax} N_{by} E_{12} + N_{ay} N_{bx} E_{33} \\ N_{ax} N_{by} E_{12} + N_{ay} N_{bx} E_{33} & N_{ay} N_{by} E_{11} + N_{ax} N_{bx} E_{33} \end{bmatrix}$$

بزرگن Shape ها بدون اتنی چارون
 قطع روابط x و y و نقطه z ترازید
 E با هم ترازید برآرکنند



برای دسیه ترازیدن روابط (x, y, z) در فضای 3D

شدت x و y و z

دسیه x و y و z

در فضای این دسیه (x, y, z) در فضای 3D

$$N_1(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y$$

$$N_1(x_1, y_1) = 1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 y_1$$

$$N_1(x_2, y_2) = 0 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 y_2$$

$$N_1(x_3, y_3) = 0 = a_0 + a_1 x_3 + a_2 y_3$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

در هر نقطه 1 به نقطه 2 نزدیکتر دسیه میان بالا نزدیکتر

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - y_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow N_1$$

$$2A = x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - y_1 x_2 - y_2 x_3 - y_3 x_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow N_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow N_3$$

$$u(x, y) = N_i u_i = \langle N_1 \ N_2 \ N_3 \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$= A_0 + A_1 x + A_2 y$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \Phi^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \Phi^{-1} \Delta$$

Φ^{-1} همان معکوس Φ

$$u = \langle 1 \ x \ y \rangle \Phi^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \langle N_1 \ N_2 \ N_3 \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

بزرگن اول ضرایب a_2, a_1, a_0 در N_1 و غیره

ماتریس سختی نسبت خواهراند.

$$K = \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{E} \underline{B} \, d\Omega$$

از آنجایی که مقدار ثابت است از داخل انتگرال بیرون می‌آید و انتگرال $\int_{\Omega} d\Omega$ حجم المان می‌باشد.

که برای ضوابط ثابت نسبت عبورت از A و برابر خواهم داشت:

$$K = \frac{t}{4A}$$

$E_1 b_1^2 + E_{12} c_1^2$					
$E_1 E_2 b_1 c_1 + E_{12} b_1 c_1$	$E_1 c_1^2 + E_{12} b_1^2$				
$E_1 b_1 b_2 + E_{12} c_1 c_2$	$E_1 E_2 b_2 c_1 + E_{12} b_1 c_2$	$E_1 b_2^2 + E_{12} c_2^2$			
$E_1 E_2 b_1 c_2 + E_{12} b_2 c_1$	$E_1 c_1 c_2 + E_{12} b_1 b_2$	$E_1 E_2 b_2 c_2 + E_{12} b_2 c_2$	$E_1 c_2^2 + E_{12} b_2^2$		
$E_1 b_1 b_3 + E_{12} c_1 c_3$	$E_1 E_2 b_3 c_1 + E_{12} b_1 c_3$	$E_1 b_2 b_3 + E_{12} c_2 c_3$	$E_1 E_2 b_3 c_2 + E_{12} b_2 c_3$	$E_1 b_3^2 + E_{12} c_3^2$	
$E_1 E_2 b_1 c_3 + E_{12} b_3 c_1$	$E_1 c_1 c_3 + E_{12} b_1 b_3$	$E_1 E_2 b_2 c_3 + E_{12} b_3 c_2$	$E_1 c_2 c_3 + E_{12} b_2 b_3$	$E_1 E_2 b_3 c_3 + E_{12} b_3 c_3$	$E_1 c_3^2 + E_{12} b_3^2$

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad i=1,2,3$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2A}$$

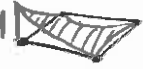
$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{c_i}{2A}$$

$$\underline{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

$t = \text{thickness constant}$

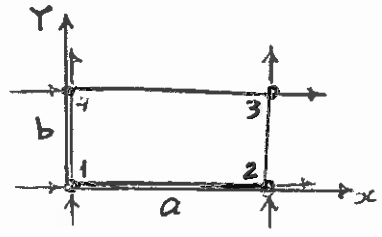
$$K = \frac{t}{4A} \begin{bmatrix} E_1 b_1^2 + E_2 c_1^2 & & \\ E_1 E_2 b_1 c_1 + E_2 b_1 c_1 & E_1 c_1^2 + E_2 b_1^2 & \\ & & \end{bmatrix}$$

بارون $\begin{cases} E_1 \\ E_2 \end{cases}$ و $\begin{cases} x_3, x_2, x_1 \\ y_3, y_2, y_1 \end{cases}$ کلاسیکی است

لازمی مرتبی *higher order* و شود  اما الزاماً نباید و کی در حالت است *compatibility*
 کتری حالت کمتر و شود. اما در *sap* برعکس چون پس زنی فرولین الزامی است
 همان مثلث ما را خروج خاصی پارامتری با رأس مسوم و در m نزدیک به می گوید که خطایش بیشتر از چار مندی است

لکان مستطیلی

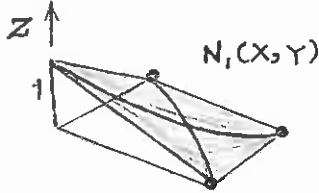
نسبتاً برای لکان اطراف کشیده را می توانیم که در مربع مختصات
 هم بوسیله ماتریس انتقال Transfer می کنیم
 که انتقال دگرزی آن راحت است.



$$K_{AC} = \int_{\Omega} B_0^T E B_0 d\Omega$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} N_{0,x} & 0 & N_{0,y} \\ 0 & N_{0,y} & N_{0,x} \end{bmatrix} \quad a_{0,c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ماتریس انتقالی 8x8



$$u(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy = \langle 1 \ x \ y \ xy \rangle \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \langle N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \rangle \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\delta} = \underline{\Phi} \underline{a} \rightarrow \underline{a} = \underline{\Phi}^{-1} \underline{\delta}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & a & b & ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \langle 1 \ x \ y \ xy \rangle \underline{\Phi}^{-1} \underline{\delta}$$

شرط Φ^{-1} دو مین صفر نباشد

اگر 3 و 4 در هم ادغام شوند هر چند Φ معکوس دارد اما در نزدیکی 3 و 4 به سمت 1 یا صحنی می ریزیم (ناپایداری)

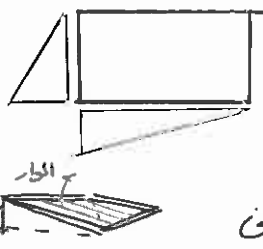
$$N_1(x,y) = (1 - \frac{x}{a})(1 - \frac{y}{b})$$

$$N_2(x,y) = \frac{x}{a}(1 - \frac{y}{b})$$

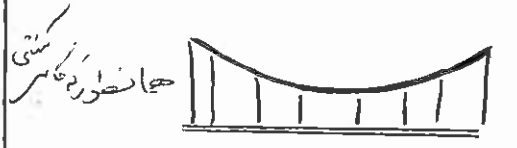
$$N_3(x,y) = \frac{x}{a} \frac{y}{b}$$

$$N_4(x,y) = (1 - \frac{x}{a}) \frac{y}{b}$$

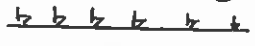
خطی هر چه از شیب و خطی تغییر کند
 وهم صحنی برعکس



این سطح مورد علاقه Architect ها
 برای تقلیدی حایپر بولیک بتون
 باز لحاظ سازهای حوائث قابل تست را به محوری تبدیل می کند



برعکس سقف بتون



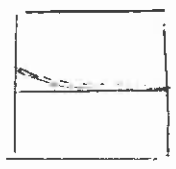
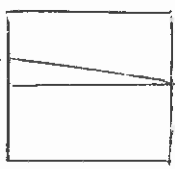
همه را به نسبت تبدیل

شکل یک continuous piecewise

یعنی لبه های توان پذیرش! نه دیسکته نباید اما در داخل میسکته باشد

$$u_A^1 = u_B^1 \quad u_A^2 = u_B^2 \quad C \text{ پیوستگی روی آن وجود دارد از نوع } C^0$$

پیوستگی روی لبه وجود دارد چون تقریباً اولد و آخرم داریم
 صحبت از تادی هم شده و چون تقریباً خطی لبه از هم جدا می شوند



اگر صحنی نبود پیوستگی نیست

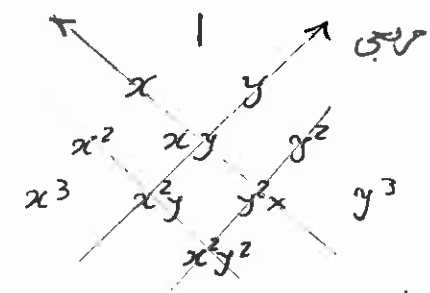
البته فرقی داریم پیوستگی نیست

اشتباق C^0 هم
 روی گره وهم روی لبه انجام شد

solid
 پیوستگی صحنه را هم باید
 ارضای شود

بالا ترین رتبه مستقیم کرنش ما ثابت شود ^(مستقیم) مستقیم شود هر انحنای چون فنکشن از x یا y داریم حرکت باید از رتبه x و y

درجه 1 مستقیم x, y
درجه 2 مستقیم x^2, xy, y^2
درجه 3 مستقیم x^3, x^2y, xy^2, y^3



مستقیم درجه 3 مستقیم باشد

constant strain (stress)

$KS = P$

تغییر کرنش صلب همانند خرابی در طول آن نیز در درجه 1 اما تغییر کرنش دارد

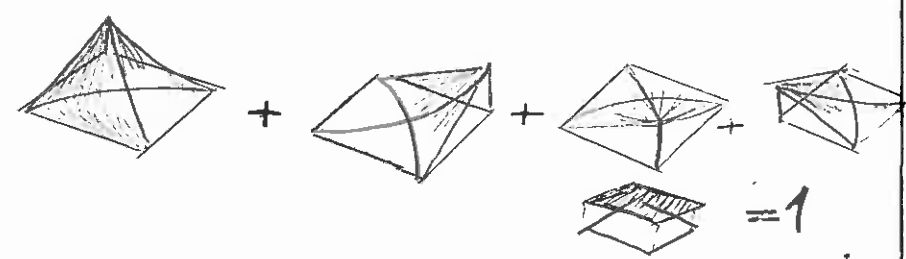
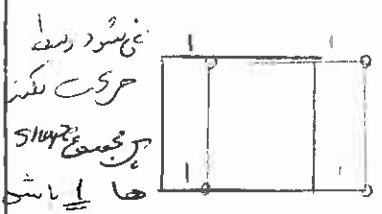
معنی آن صحت $P=0$ است یعنی اگر تغییر صلب δP است

یعنی $K = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ که در تعیین صلب استفاده باشد

حرکتی اگر حرکت صلب افقی نیز می باشد یعنی مجموع N_i باید یک باشد

یعنی اگر مجموع حرکت صلب همی 1 و 2 و 3 و 4 به اندازه Δ تغییر مکان $\Delta u_i = \Delta$ پس $\sum u_i = \Delta$ ها را Δ

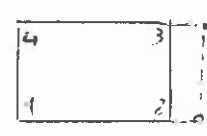
$\sum N_i u_i = \Delta \sum N_i = \Delta \Rightarrow \sum N_i = 1$



درجه 1 $discretize$ خطی شود

همچنین constant strain که همانند $(\frac{1}{2})$ در خطی

$u(x, y) = \sum N_i u_i$
 $u, x = \sum N_i, x u_i$



$u_1 = u_4 = 0$
 $u_3 = u_2 = 1$

$N_{2,x} \times 1 + N_{3,x} \times 1$

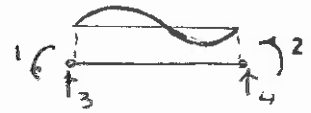
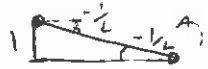
$= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{a} (1 - \frac{y}{b}) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} \right] = \frac{1}{a} (1 - \frac{y}{b}) + \frac{1}{a} \frac{y}{b} = \frac{1}{a}$

ابتدا $u, x = c \rightarrow u = cx + d$

$\begin{cases} u_1 = u_4 = d \\ u_2 = u_3 = ca + d \end{cases}$

حالا تغییر مکان نود هاد اجزای است پس مستقیم آن باید c شود

اما در مورد تیر نمی شود واضح است



(Rigid است) چرخش بدون پدیده انحراف

اما گوییم $\frac{1}{L} = \frac{1}{L} + \frac{2}{L} = \frac{3}{L}$
 $1 = 493$

دوتا Rigid دارد

انتقال موازی ←

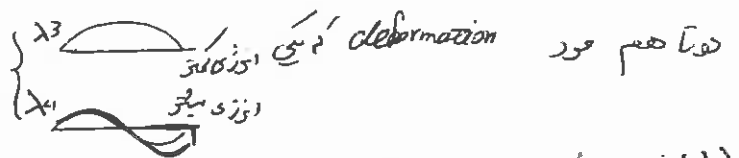
$$K = \frac{2EI}{L} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3/2 & -3/2 \\ 1 & 2 & 3/2 & -3/2 \\ 3/2 & 3/2 & 6/2 & -6/2 \\ -3/2 & -3/2 & -6/2 & 6/2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 0$
 $\lambda_2 = 0$

$K \delta = P$

بردار δ

شکرها مثل با λ و λ یکی چرخشی دومی



اما زنی ذخیره شده را نشان می دهد $\lambda = 0$ یعنی حرکت صاف

چون خود ماتریس K در میان صفر دارد

واضح است که $\lambda = 0$ یعنی از قطر چیزی کم نشود

همان A بوده و در میان صفر است

همچنین با $\lambda = 1$ نام بردن 1 از مقدار 2 قطر

شون 1 و 2 برابر شده در میان صفر می شود

تبدیلی متعامد (یکه هم‌جهت)

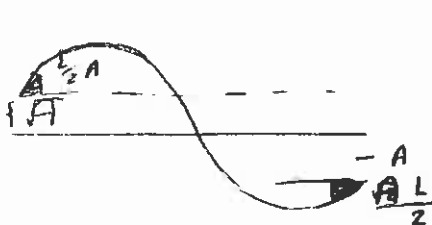
$$T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{L^2}{2+L^2} & \sqrt{\frac{2}{L^2+4}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{L}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$T^{-1} = T'$ طبق تعریف $T^{-1} K T' = \lambda I$

برای هر بردار متوی T را به P نشان دهیم
 $P' K P = \lambda I$ → منظرین P
 و اگر P تغییر پذیری در صورت آزادی باشد $K P$ برای F نرسد $F = 0$

$P F = 0$ از روی مشتق → لامها مقادیر اینها مستطابا برداری برده

لامها $\lambda = \frac{2EI}{L} (0 \quad 0 \quad (\frac{12}{L^2} + 3) \quad 1) = (0 \quad 0 \quad \frac{2EI}{L} (\frac{12}{L^2} + 3), \frac{2EI}{L})$



$\sqrt{\frac{2}{L^2+4}} = A$

→ $\frac{2}{L} \sqrt{\frac{2}{L^2+4}} (\frac{4+L^2}{2L^2}) X^3 - 3 \sqrt{\frac{2}{L^2+4}} (\frac{4+L^2}{2L^2}) X^2 + \frac{L}{2} \sqrt{\frac{2}{L^2+4}} X + \sqrt{\frac{2}{L^2+4}} = Y$

$\int_0^L \frac{M}{2EI} = \frac{2EI}{L} (\frac{12}{L^2} + 3)$ $\begin{cases} Y'' = \frac{6Ax^2}{L} - 6Ax \\ A = \sqrt{\frac{2}{L^2+4}} (\frac{4+L^2}{2L^2}) \end{cases}$

$M = -EI \frac{d^2 y}{dx^2}$

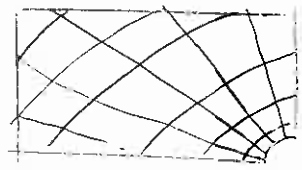
$\int \frac{M^2}{2EI} = \int \frac{E^2 Y'^2}{2} \rightarrow EI \int \frac{Y''^2}{2} = \frac{1}{2} \int_0^L 144 \frac{A^2}{L^2} X^2 - 144 AX + 36 A^2 = \frac{1}{2} (144 A^2 \frac{L}{3} - 144 A \frac{L^2}{2}) = -\frac{24AL}{2}$

FR

$$K_{11} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \frac{b}{a} E_{11} + \frac{1}{3} \frac{a}{b} E_{33} & \frac{1}{4} (E_{12} + E_{33}) \\ \frac{1}{4} (E_{12} + E_{33}) & \frac{1}{3} \frac{b}{a} E_{33} + \frac{1}{3} \frac{a}{b} E_{11} \end{bmatrix}$$

بدون بعد
به نسبت a به b ثابتی دارد

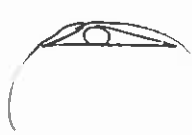
یعنی اثر همان بصری که حرکت بزرگها به ثابت مگر نسبتی زمان نمی کند



تغییرات کوچک
در همان تیر



در این حالت



هر چه $\frac{R}{r}$ ثابت تر باشد

هر چه نسبت به r نزدیکتر



و همچنین همان

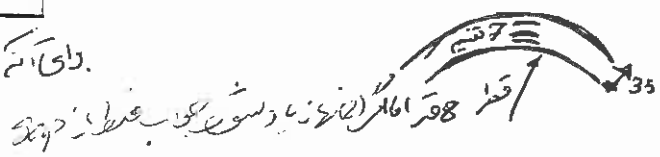
دقت بیشتر پس نسبت به زیاد شدن $\frac{R}{r}$ و اعوجاج فنیه استوار شود

نسبت طول عرض مستطی 3 هر کدر 4 فنیه هم داریم

و این را بگیرد در حالت همانند سرعت بر عکس می کند



درای آنکه زیاد شود



و همچنین توتن

و در تعبیری به نسبت بعد سوم است و کعب $\frac{10 \times 10 \times 10}{1000}$ با $\frac{10 \times 10 \times 10}{1000}$ افزایش باریک
افزایش سطحی

بلکه در دقتی $\frac{1}{2}$ زیاد شود سطحی کم می شود

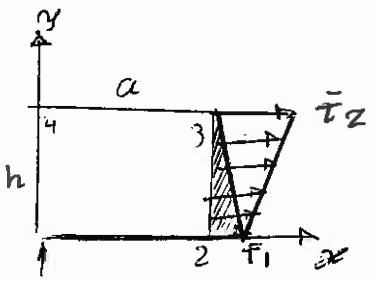


در این تیر فقط نیروهای درونی ها داریم



بارگرفته از روشی که در جزئی است $Fixed$ است

$$M_{AB}^F \times 1 - \int_0^L N(x) p(x) dx = 0$$



$$\bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}_1 (1 - \frac{y}{b}) + \bar{\sigma}_2 \frac{y}{b}$$

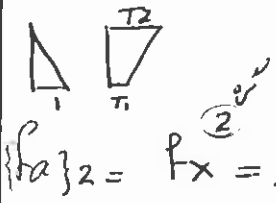
$$\bar{\sigma} = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \end{Bmatrix}$$

$$\{f_a\}_a = \int_{\Gamma_{e2}} n_a \{ \bar{t} \} d\Gamma$$

$$\{f_a\} = \int$$

$$\left\{ \begin{matrix} P_x \\ P_y \end{matrix} \right\}_1 = \int N_1 \{ \bar{t} \} d\Gamma = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\{f_a\}_2 = \int N_2 \{ \bar{t} \} d\Gamma = \int_0^b (1 - \frac{x}{b}) \bar{t} d\Gamma$$

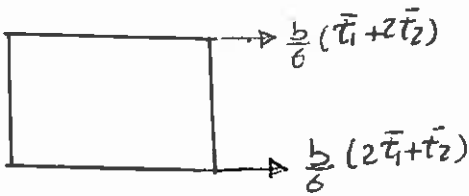


$$\{f_a\}_2 = P_x = \int_0^b (1 - \frac{x}{b}) [\bar{t}_1 (1 - \frac{x}{b}) + \bar{t}_2 (\frac{x}{b})] dy$$

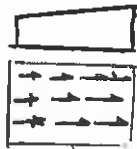
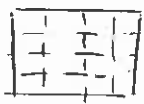
$$f_x^2 = \frac{1}{6} (2\bar{t}_1 + \bar{t}_2) \implies \{f_a\}_2 = \left\{ \begin{matrix} \frac{b}{6} (2\bar{t}_1 + \bar{t}_2) \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\{f_a\}_3 = \left\{ \begin{matrix} \frac{b}{6} (2\bar{t}_2 + \bar{t}_1) \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\{f_a\}_4 = 0$$



این یک fixed end است



حالا در نظر بگیریم که این یک جسم است که تحت نیروی درجه دوم قرار می‌گیرد

استر در سطح

$$F_{i(x,y)} = F_1 N_1(x,y) + F_2 N_2(x,y) + F_3 N_3 + F_4 N_4$$

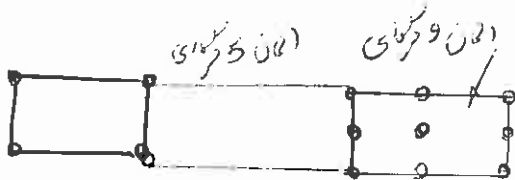
$$F_i(x,y) = \sum F_j^i N_j$$

اگر خطی باشد تغییرات (با فرض ثابت بودن) در سطح اختلاف درجه اول خواهد بود

$$\Delta T(x,y) = \sum \Delta T_i N_i(x,y)$$

تغییرات درجه اول در سطح خطی انجام می‌دهد

یعنی در سطح خطی تغییرات درجه اول و دوم



این (1) برای استر است

مجموعاً در هر دو

در هر دو



اما این استر نباید اتفاق افتد

Mesh بندی کلاسیک

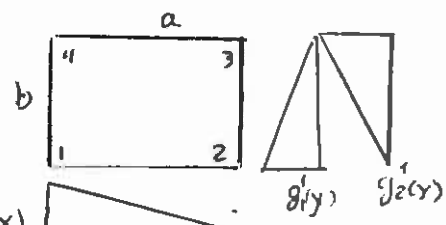
درگاه و استر در هر دو

درگاه 1 و 2

این عناصر چهارگانه برای تقاطع‌های



بای استفاده ترک



$$f_1(x) = 1 - \frac{x}{a} \quad g_1(y) = 1 - \frac{y}{b}$$

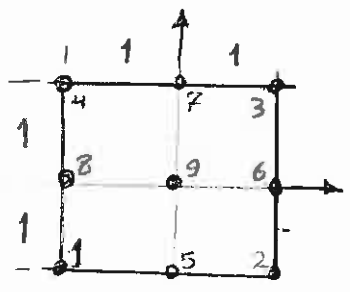
$$f_2(x) = \frac{x}{a} \quad g_2(y) = \frac{y}{b}$$

$$N_1(x,y) = f_1(x)g_1(y)$$

$$N_2(x,y) = f_2(x)g_1(y)$$

$$N_3(x,y) = f_2(x)g_2(y)$$

$$N_4(x,y) = f_1(x)g_2(y)$$



$$N_1(x,y) = f_1(x)g_1(y)$$

$$N_2(x,y) = f_3(x)g_1(y)$$

$$N_3(x,y) = f_3(x)g_3(y)$$

$$N_4(x,y) = f_1(x)g_3(y)$$

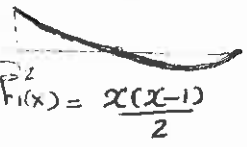
$$N_5(x,y) = f_2(x)g_1(y)$$

$$N_6(x,y) = f_3(x)g_2(y)$$

$$N_7(x,y) = f_2(x)g_3(y)$$

$$N_8(x,y) = f_1(x)g_2(y)$$

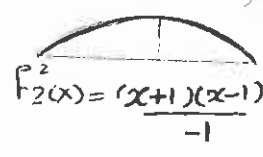
$$N_9(x,y) = f_2(x)g_2(y)$$



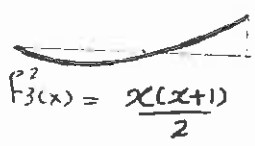
$$f_1(x) = \frac{x(x-1)}{2}$$

مستقیم

$$g_1(y) = \frac{y(y-1)}{2}$$



$$f_2(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{-1} = 1-x^2 \quad g_2(y) = 1-y^2$$



$$f_3(x) = \frac{x(x+1)}{2}$$

$$g_3(y) = \frac{y(y+1)}{2}$$

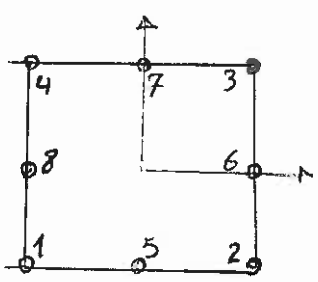
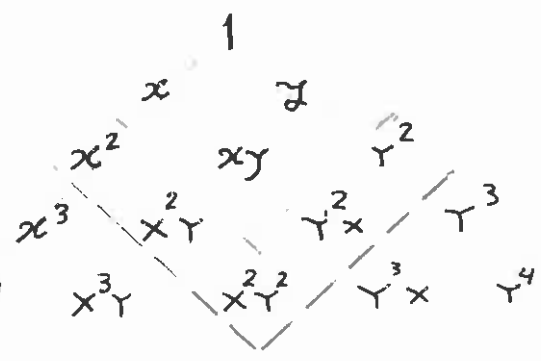
مجموع N ها برابر 1 استن و السب راضع است

$$f_1 + f_2 + f_3 = 1$$

$$g_1 + g_2 + g_3 = 1$$

$$\sum_{i=1}^n N_i = f_1(g_1 + g_2 + g_3) + f_2(g_1 + g_2 + g_3) + f_3(g_1 + g_2 + g_3)$$

$$= (f_1 + f_2 + f_3)(g_1 + g_2 + g_3) = 1$$



اما همان بسیار مفید است که در این مورد Static Condens

Bubble مجاری



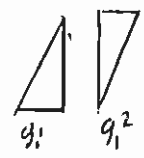
درستی و

باعث می شود مجموع N ها 1 شوند و این مورد

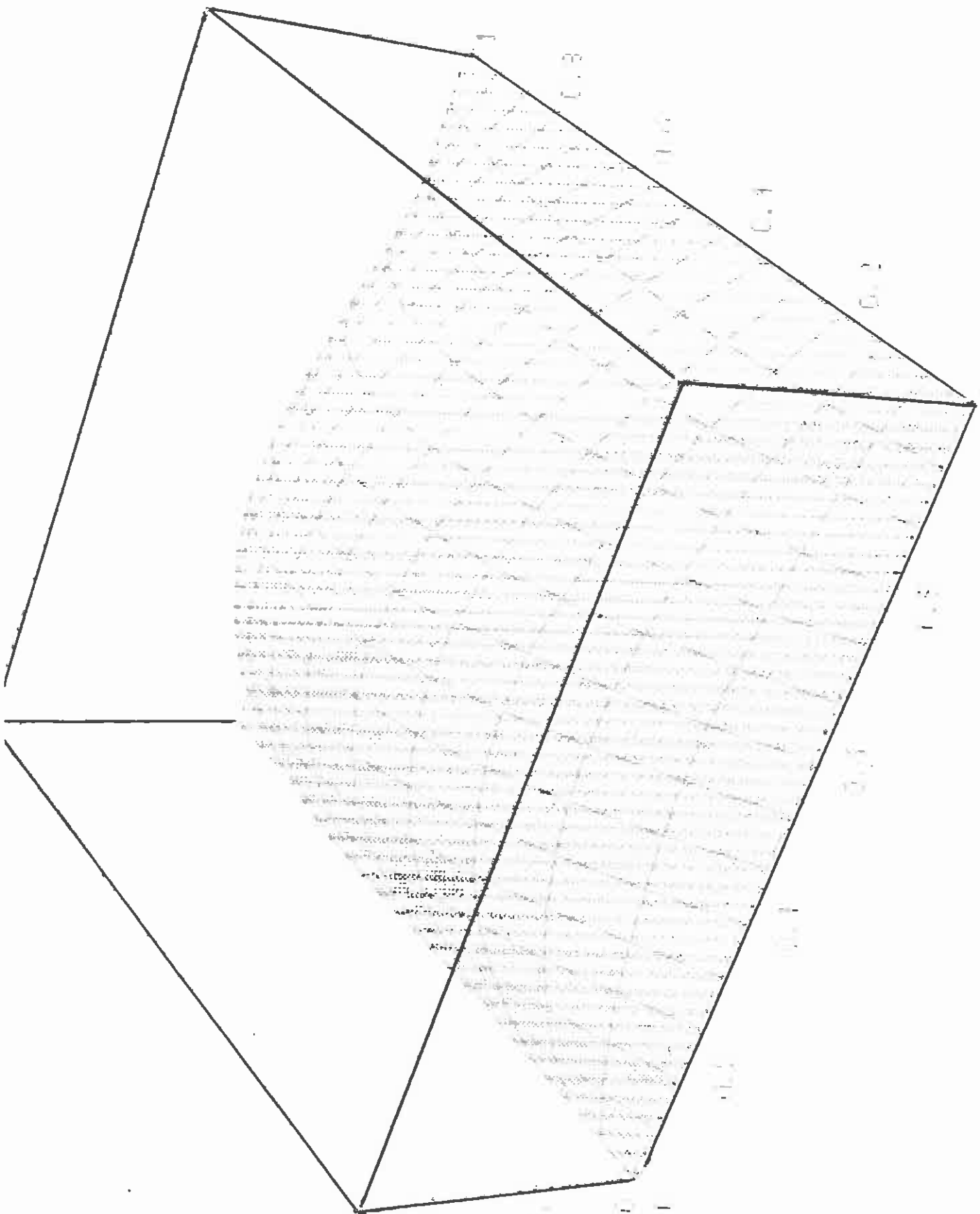
راحت حرکت صلب تمام کرده ها به اندازه 1/2 گره 1/2 سر حاشی

$$f_1(x) = 1 - \frac{x}{2}$$

$$f_2(x) = \frac{x+1+x}{2}$$

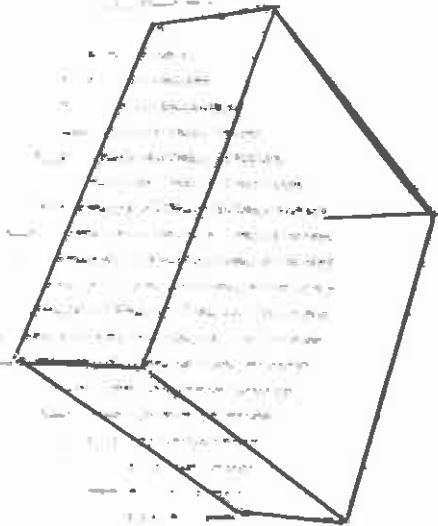
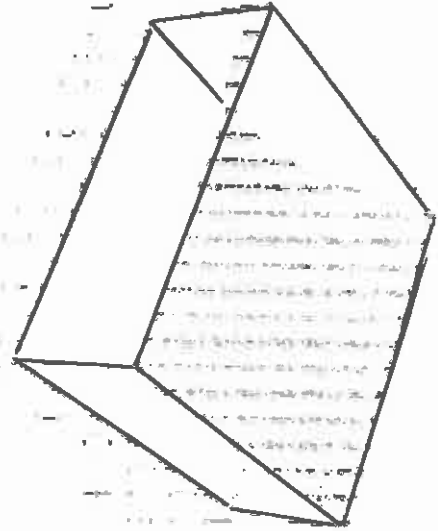
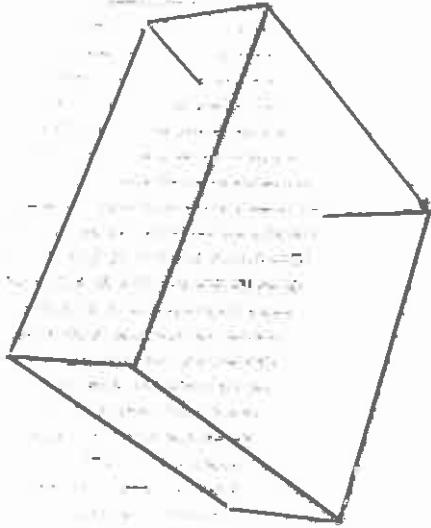


محرمانه سبده حذف استاتی و به بعدی کار کنید با آن



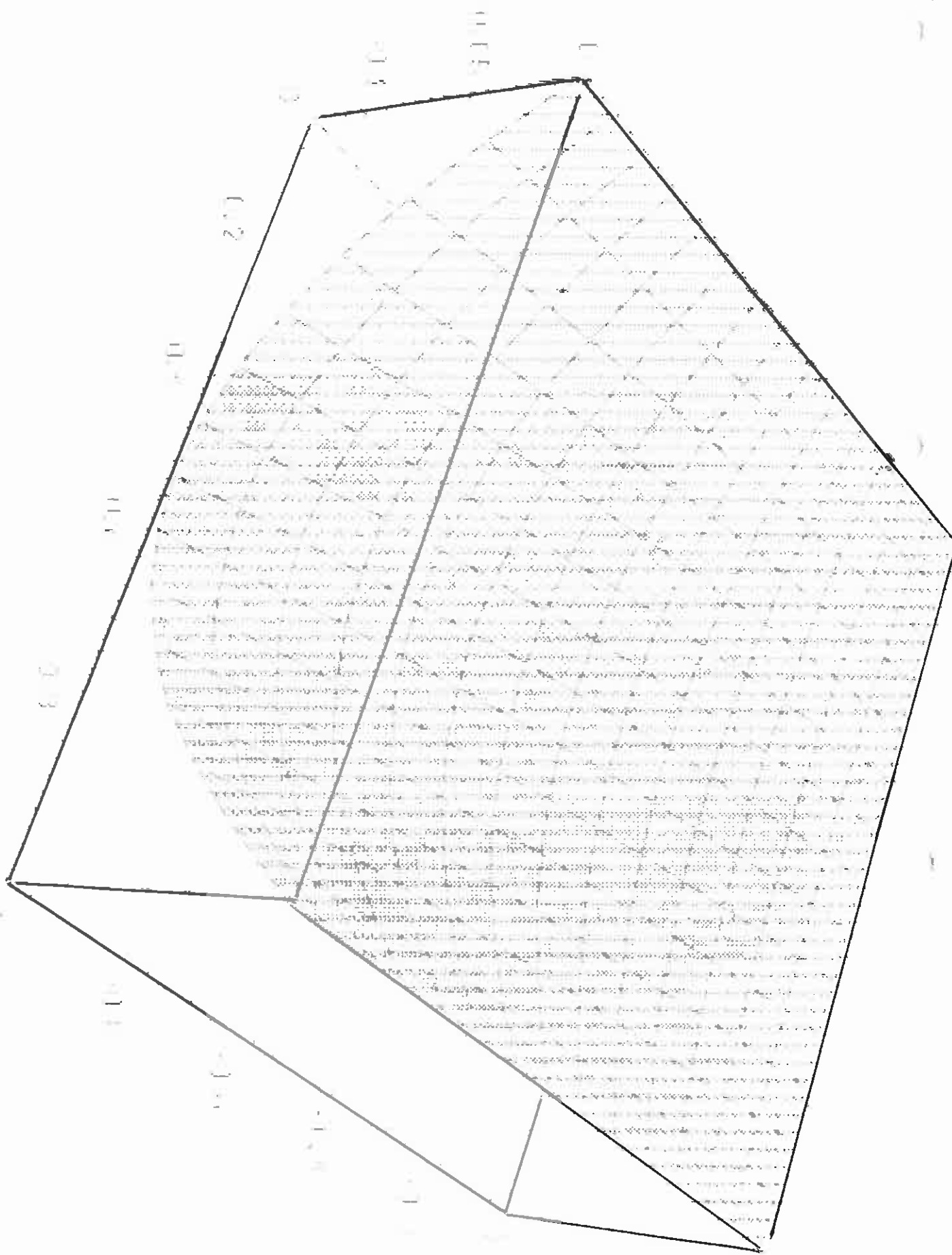
۴۷-۱

نگاره‌های N1

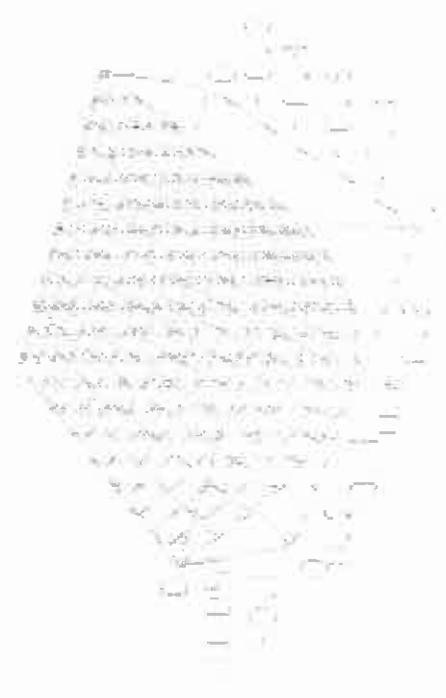
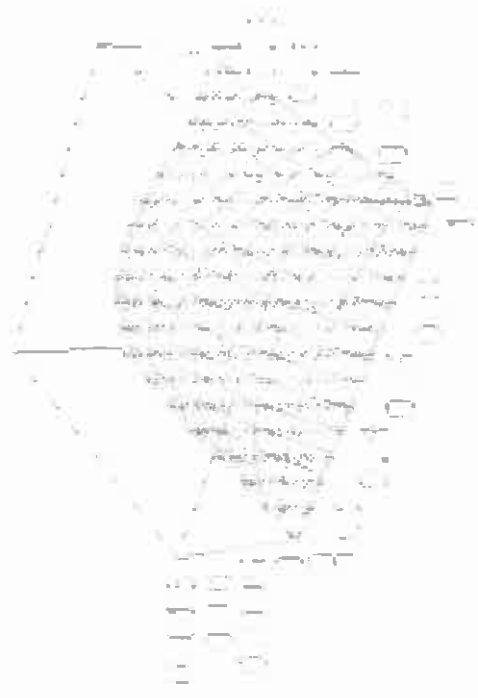


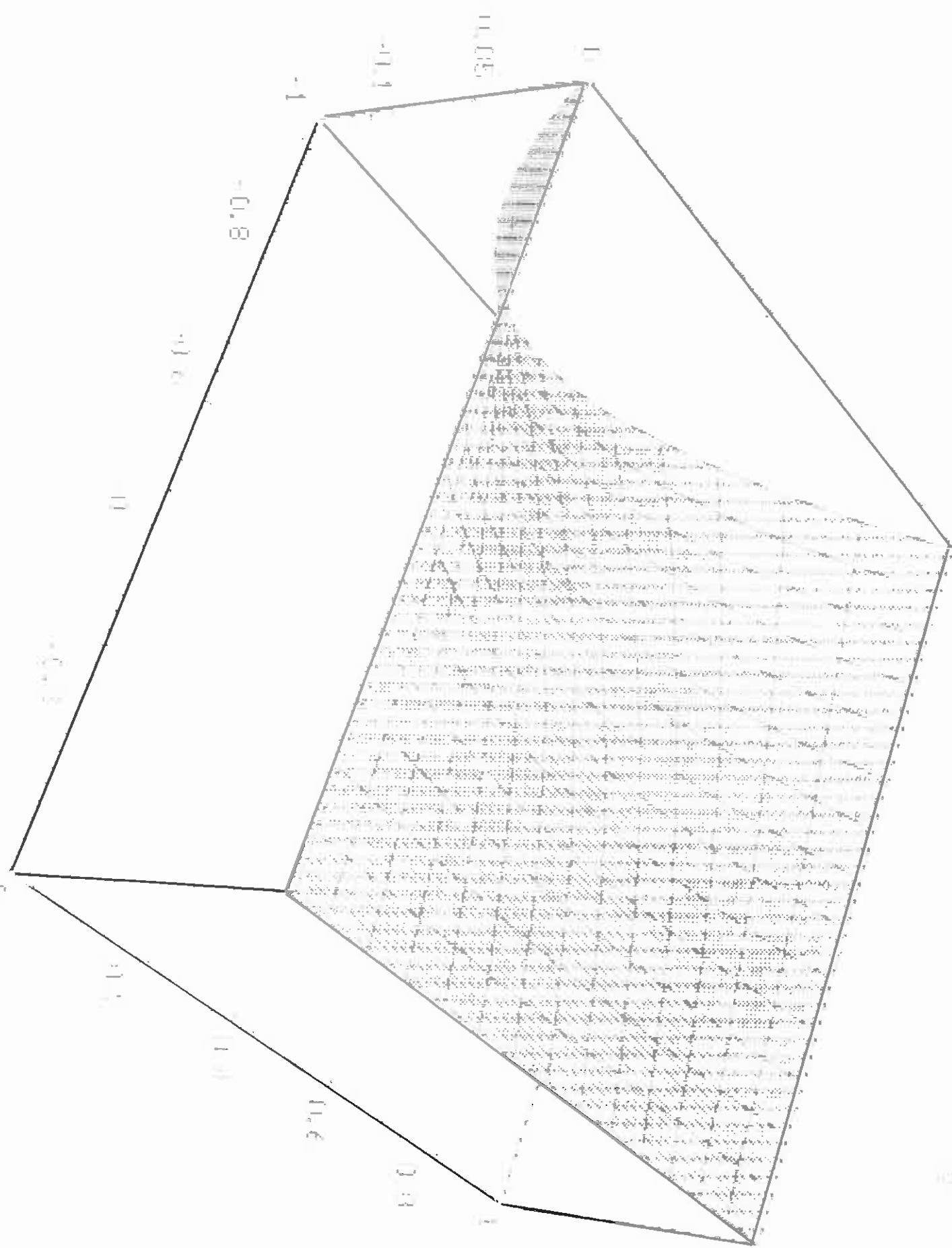
۹۷-۲

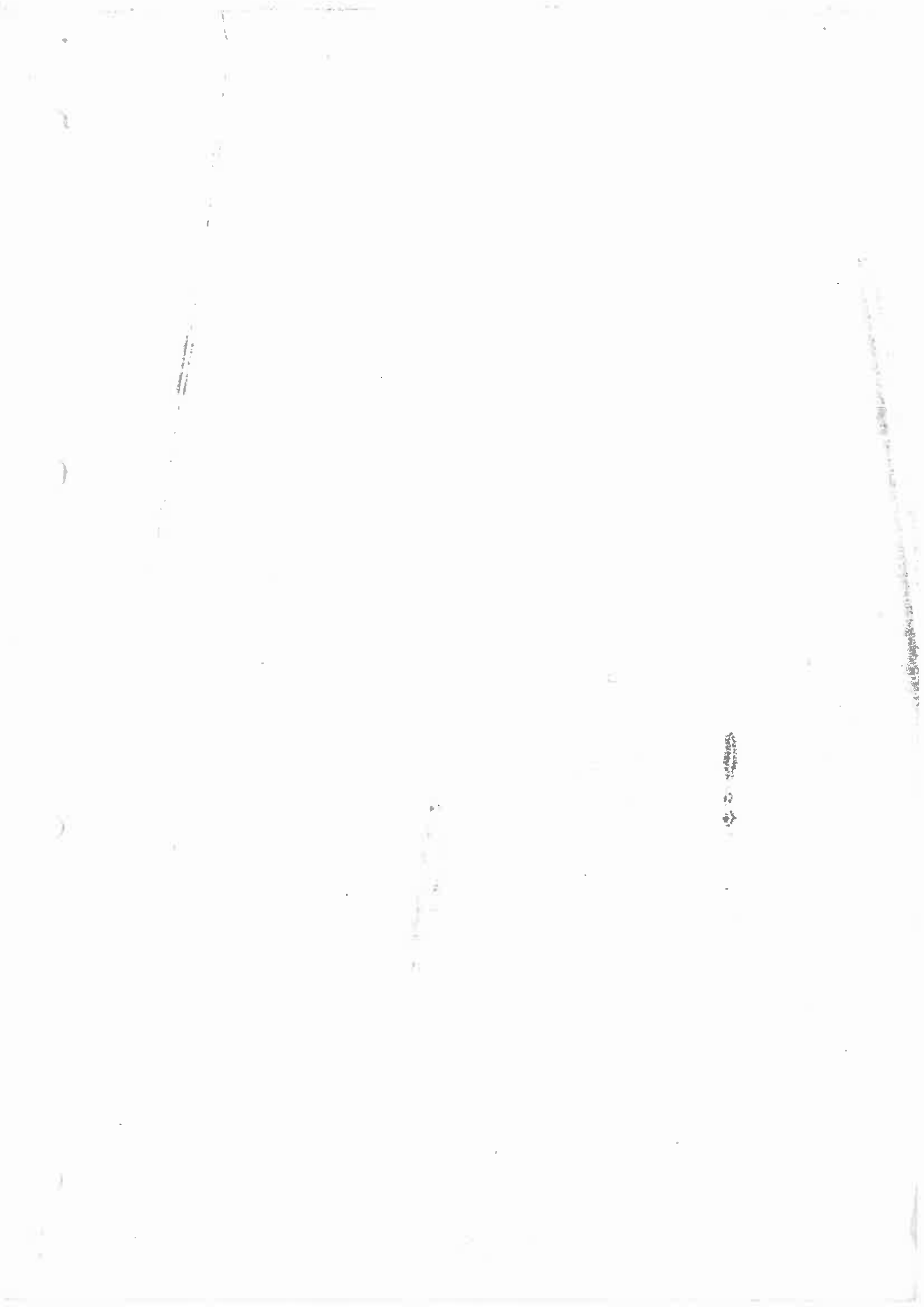
(N) 0.99



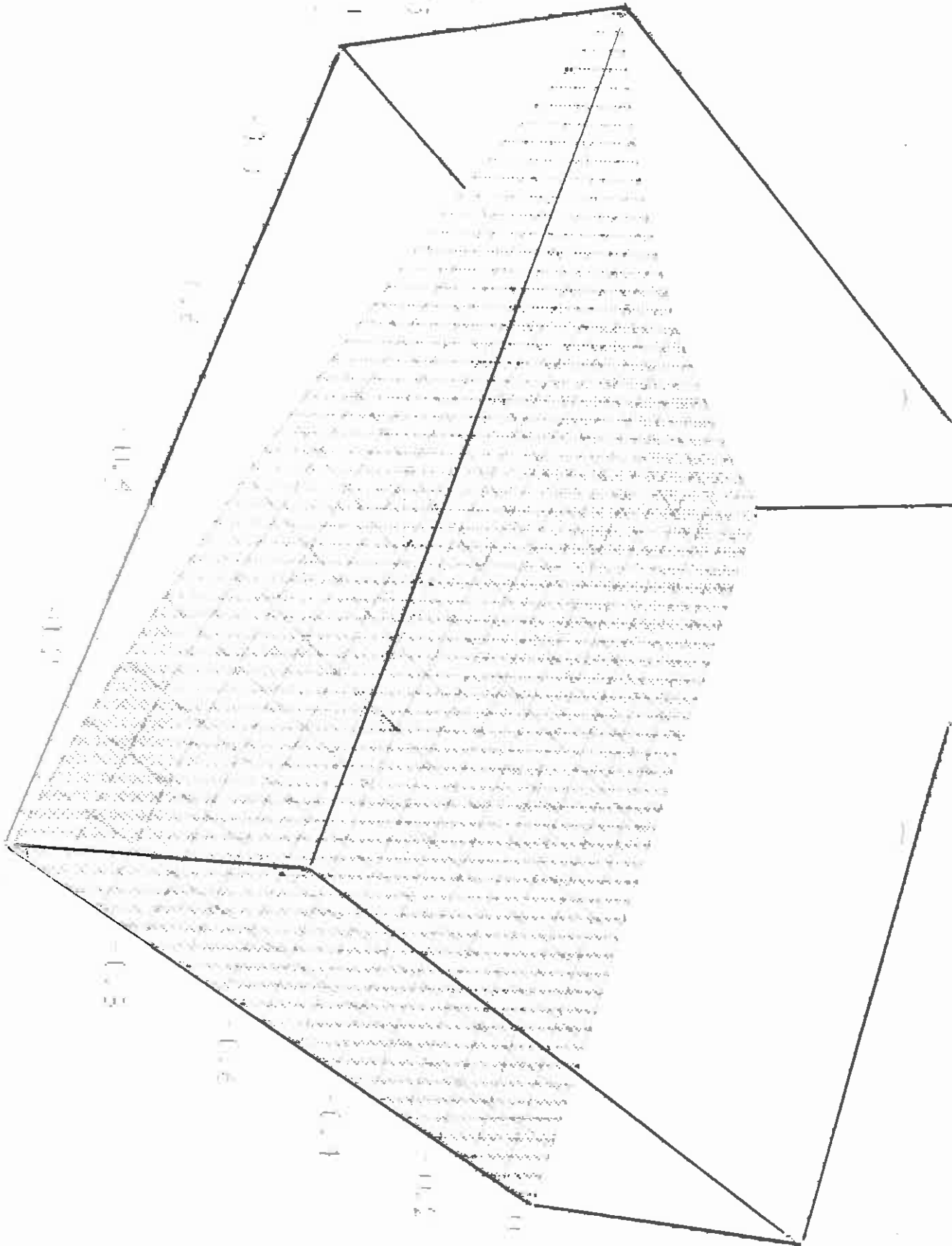
FV-10








N₁ ۵۰




EV-05

	4-node	5-node	6-node	7-node	8-node	9-node
$N_1 =$	$r_1^1 g_1^1$	$-\frac{1}{2} r_2^2 g_1^1$	0	0	$-\frac{1}{2} r_1^1 g_2^2$	$+\frac{1}{4} r_2^2 g_2^2$
$N_2 =$	$r_2^1 g_1^1$	$-\frac{1}{2} r_2^2 g_1^1$	$-\frac{1}{2} r_2^1 g_2^2$	0	0	$+\frac{1}{4} r_2^2 g_2^2$
$N_3 =$	$r_2^1 g_2^1$	0	$-\frac{1}{2} r_2^1 g_2^2$	$-\frac{1}{2} r_2^2 g_2^1$	0	$+\frac{1}{4} r_2^2 g_2^2$
$N_4 =$	$r_1^1 g_2^1$	0	0	$-\frac{1}{2} r_2^2 g_2^1$	$-\frac{1}{2} r_1^1 g_2^2$	$+\frac{1}{4} r_2^2 g_2^2$
$N_5 =$	0	$+ r_2^2 g_1^1$	0	0	0	$-\frac{1}{2} r_2^2 g_2^2$
$N_6 =$	0	0	$+ r_2^1 g_2^2$	0	0	$-\frac{1}{2} r_2^2 g_2^1$
$N_7 =$	0	0	0	$\rightarrow + r_2^2 g_2^1$	0	$-\frac{1}{2} r_2^2 g_2^2$
$N_8 =$	0	0	0	0	$+ r_1^1 g_2^2$	$-\frac{1}{2} r_2^2 g_2^2$
$N_9 =$	0	0	0	0	0	$+ r_2^2 g_2^2$
	1	0	0	0	0	0

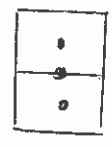
خبره 9
بر 4 کم

دگرهای مستطانی است N_1 دگره کنونی است 5 است 


شکل مجموع شایه دگرهای مستطانی است 

اذا النسب جبراً شرط این در هم \rightarrow در با هم تعلق دارند $\frac{1}{4}$ منطقی تغییر کند چون مستطانی

در همین تابع ما جبراً $\frac{1}{4}$ فقط به 2 و 1 بستگی دارد هر چه $Shape$ مستطانی است



دنباله با هم تعلق و کج دگر بستگی دارد هر چه با هم تعلق دارند به هم تعلق دارند

در اینجا 5 گره استفاده از 6 پارامتر استفاده  چون شرط ما 5 پارامتر استفاده کردنی است

شرط ما $compatibility$ است

یعنی هر چه تغییر مکان روی لبه فقط بستگی به تغییر آن گره ای لبه

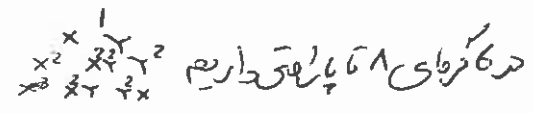
$$u(x, y) = \sum_{i=1}^5 N_i x_i$$

$$u(x, y) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + 0 u_3 + 0 u_4 + N_5 u_5$$

$y = -1$ مستطانی $\Rightarrow g_2^1 = 0$
تغییر مکان در لبه پایین

تا اگر این بود در تغییر مکان گره ای دگر تغییر مکان این گره بستگی داشت

امکان وجود Gap در این گره وجود داشت پس حتماً همان از 7 پارامتر به 5 پارامتر کاهش داد

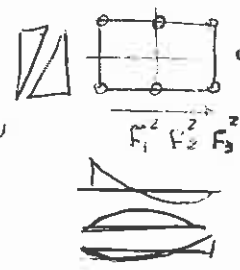


پس چون اگر گره ای استفاده کرده $Panel$ برای آن گره ای از رابط مقدار $\frac{1}{4}$ را بر N_i کم تا از رابط $\frac{1}{4}$ کم

$$\Rightarrow N_1 = r_1^2 g_1^2 - \frac{1}{4} r_2^2 g_2^2$$

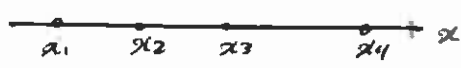
نیت
 مقصود است که در این
 روش اصولی از صورت خطی
 به صورت مربعی تبدیل
 کنیم

$$\begin{cases} N_1 = F_1^2 g_1 \\ N_5 = F_2^2 g_1 \end{cases}$$



همچنین به عنوان مثال y_1, y_2

$$L_i(x) = \begin{cases} L_i(x_i) = 1 \\ L_i(x_j) = 0 \quad j \neq i \end{cases}$$



order $(n-1)$

$$L_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

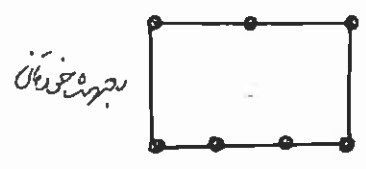
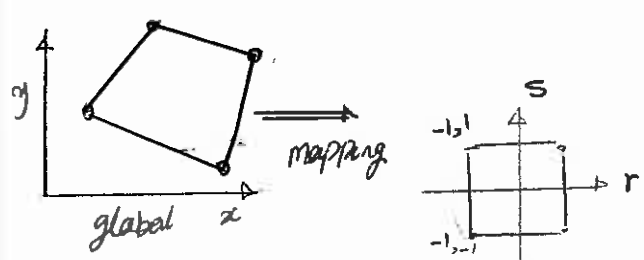
چون با این روش

$$= \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x-x_j) \right) / \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x_i-x_j) \right)$$

توابع لاگرانژ

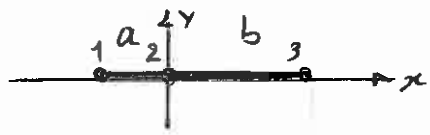
$$\sum_{i=1}^n L_i^{(n-1)} = 1$$

اگر در یک راستا درجه $n-1$ و از زمانی در هر درجه 1 باشد استفاده

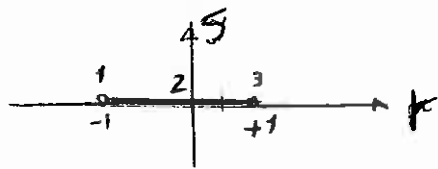


بهرینه خوردن

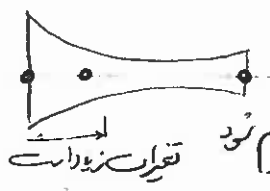
مقاصد انتقال گریس:



کسر اولی و بعدی
 که در میان می آید که در فضای دو بعدی است



در خصوصیت هر یک از این مقادیر تغییر
 دهیم -



تغییر در تابع است
 تغییر در فضا است

در اولی: $N_1(x) = \frac{x(x-b)}{a(a+b)}$

$$N_1(r) = \frac{-r(1-r)}{2}$$



$$N_2(x) = \frac{(x+a)(x-b)}{-ab}$$

$$N_2(r) = 1-r^2$$

$$N_3(x) = \frac{(x+a)x}{b(a+b)}$$

$$N_3(r) = \frac{r(r+1)}{2}$$

می خواهیم برانیم هر نقطه در global mapping بر این mapping

$$\int_{\mathcal{R}} B^T E \delta \quad x \rightarrow y \Rightarrow \int_{\mathcal{R}} B^T E \delta$$

$$x = \sum N_i(r) x_i$$

نقطه x در این shape است

چون $r = -1$ و $N_1 = 1$ می شود

$$x = x_1$$

$$x = N_1(r)x_1 + N_2(r)x_2 + N_3(r)x_3$$

x یک تابع (R-Function)

این رابطه برای هر یک از x_1, x_2, x_3 به هم وصل می شود mapping بر این است

مثال: $x = \frac{b}{2} \rightarrow N_1(-a) + N_3(b)$

$$r = \frac{1}{2} \rightarrow N_1 = \frac{-1}{8} \text{ و } N_3 = \frac{3}{8} \Rightarrow x = \frac{3}{8}b + \frac{1}{8}a$$

این رابطه بر این است اما توقع ما در اینجا

در وسط انتقل دهیم $\frac{3}{8}a + \frac{1}{8}a = \frac{1}{2}a$ چون $\frac{3}{8}a + \frac{1}{8}a = \frac{1}{2}a$

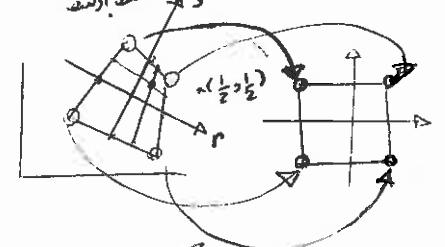
چون سمت چپ در سمت a در map سمت بزرگتر است هر چقدر در 2 map سمت a در سمت b تاثیر دارد پس از هر طرف برابر تاثیر بر جای

$$\begin{cases} x = N_i(r,s) x_i \\ y = N_i(r,s) y_i \end{cases}$$

در اینجا

به کار می رود این عمل صحیح است پس a و b هر یک در کنار ما تقاضای زیاد

همچنین در صورتی که در سمت a و b هر یک در کنار ما تقاضای زیاد singular و near singular می شود

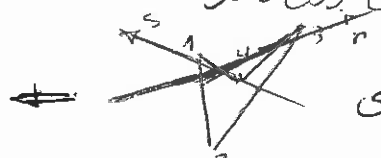
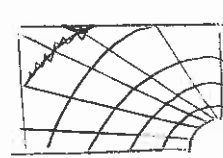


همچنین در صورتی که در سمت a و b هر یک در کنار ما تقاضای زیاد

در سمت افزایش پیدا می کند

و در نهایت در mesh ها و حجم متعاد و مرجع باشند (حالت خاصی)

کدام چیزی که در principal stress روی از حالت



انتقال هر یک از اینها به هم وصل می شود و حتی نمی توانیم

$$\int_{-a}^b (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) dx$$

$\sum_{i=1}^n N_i(x_i)$

محاسبه انتگرال
 $x = \sum_{i=1}^n N_i(x_i) x_i$
 $x = \sum_{i=1}^n N_i(x_i) x_i$
 در این خصوصیات، خصوصاً از آن جهت که
 حساب رگرسیو، در این صورت



$$dx = \sum_{i=1}^n \frac{dN_i}{dr} dr x_i = \left(\sum_{i=1}^n \frac{dN_i}{dr} x_i \right) dr \star$$

حالات این استوار است 1 تا 1 جواب داشته
 ؛ شد و گویا داشته باشد همان Singularity ها است.
 ۲ در یک بعدی ۳ در دو بعدی ۴ در سه بعدی
 اگر فضای از صفر تا 1 باشد
 (تا ما 1 تا 1 و در آن)

نقطه برای محاسبه اینها در نظر
 اما N ها یکی است

$$\int_{\Omega} dx = \int_{\Omega_e} dx_e \Rightarrow \int_{\Omega_e} dx_e = \int_{\Omega} dx$$

مثلاً

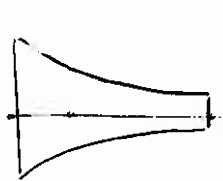
$$N_1(\xi) = \frac{(1-\xi)^2(1+\xi)}{2}$$

بلابریک کرده و بعداً مستخرج از آن و شویکم
 جنبه ترابوی بعداً کادر می کشی.

لین بر transformer انرژی اکتیو شده در محدوده خاصی بود

چند ویژگی در mapp: هر چه فضای و Order در درجه آن محور mapp، متقارن است
 منتهی حد 2 در وسط از دست داده و خطی تفکر کند
 شد 2، چون جابجایی در پایش منتقل نمی شود.

Isoparametric: از همان shape یکی نوشته شد بعضی در 2 هم mapp
 Subparametric: دایره از درجه پایین تر استفاده
 Superparametric: در بالاتر و حسب موقعیت وقت افزایش می دهد



در صورت exact از این طرفی exact
 اما N خود exact نیست حدتیش درش محدود؟ و Sub
 که N همان N خودش و غیره. }
 یا (در ضلع نزدیک) یا (در مرکز) جعبه در

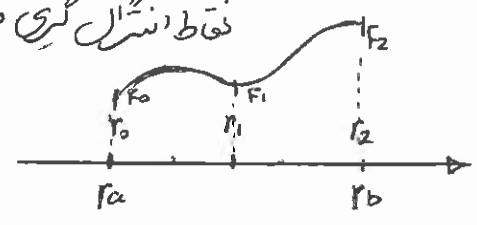
کسانی در سلسله distance اتفاق افتاد
 map خودی تقویت دارد هر چه از آن اکتیو شد، تقویت از بین می رود
 در این صورت تقویت با حال خود shape و هم map + distortion

52 | Numerical Integration

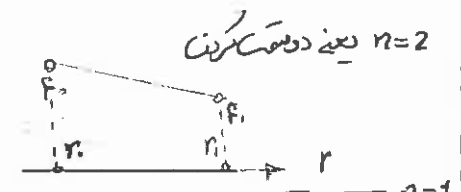
Newton-cotes ← نقاط انشغال گیری در الفاصله است

$$\begin{cases} \int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{i=0}^n C_i^n f_i + R_n \\ f_i = f(x_i) \end{cases} \quad \text{و } x_i = a + \left(\frac{b-a}{n}\right) i$$

$i = 0, n$



C: ضرایب
Residual: R
تابع اصلاح برای ریسیدو



$$n=2 \rightarrow \int_a^b f(x) dx = (b-a) \left(\frac{1}{2} f_0 + \frac{4}{6} f_1 + \frac{1}{6} f_2 \right) + R_2$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \left(\frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{2} f_1 \right) + R_1$$

$$n=1 \rightarrow \int_a^b f(x) dx = (b-a) (C_0^1 f_0 + C_1^1 f_1) + R_1$$

انشغال: Trapezoidal, Newton-cotes, C

$f(x) = C$: ثابت

پیرامون (C)

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)C = (b-a) (C_0^1 f_0 + C_1^1 f_1)$$

$$(b-a)C (C_0^1 + C_1^1) \implies \boxed{C_0^1 + C_1^1 = 1} \quad (1)$$

$f(x) = x$

$$\int_a^b f(x) dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = (b-a) \frac{b+a}{2} = (b-a) (C_0^1 a + C_1^1 b)$$

$$C_0^1 = C_1^1 = \frac{1}{2} \implies \boxed{a C_0^1 + b C_1^1 = \frac{b+a}{2}} \quad (2)$$

چون تابع ثابت و خطی جواب exact می تابد exact: $ax^2 + c$

همچنین از آنجایی که در map با (1 و -1) کار داریم می تابد با

$$n=1 \rightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx = 2 (C_0^1 f_0 + C_1^1 f_1) + R_1$$

$$n=2 \rightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx = 2 (C_0^2 f_0 + C_1^2 f_1 + C_2^2 f_2) + R_2$$

$f(x) = c \implies C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 = 1$

$f(x) = x \implies C_0^2(-1) + C_1^2(0) + C_2^2(1) = 0 \implies C_0^2 = C_2^2$

$$\frac{4}{6} = \boxed{C_1^2 = \frac{2}{3}}$$

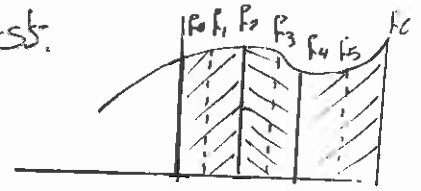
$f(x) = x^2 \implies 2(C_0^2(-1)^2 + C_1^2(0)^2 + C_2^2(1)^2) = \frac{2}{3}$

$C_0^2 + C_2^2 = \frac{1}{3} \implies \boxed{C_0^2 = C_2^2 = \frac{1}{6}}$

$n=2 \rightarrow (b-a) \left(\frac{1}{6} f_0 + \frac{4}{6} f_1 + \frac{1}{6} f_2 \right)$

همسوی

Compound Simpson
به ترتیب تقریباً منقسم



اگر تقریباً در یک بار

$\frac{h}{6} [f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + f_5]$
روشنی صاف و مستقیم

$R_1 = 10^{-1} (b-a)^3 f''(\xi)$ $a \leq \xi \leq b$
 $10^{-1} \cdot h^3 \cdot f''(\xi)$

اگر h نصف شود \rightarrow خطا با توان 3 کاهش

$R_2 = 10^{-3} (b-a)^5 f^{(4)}(\xi)$
exact \leftarrow تا درجه 3

تابعی زوج تا درجه 3 هم بالاتر R از مرتبه 3 هم بالاتر است

یعنی با نصف کردن h تا درجه 3 \rightarrow exact

$R=3 \rightarrow$ تا درجه 4 $f^{(4)}$

$R=4 \rightarrow$ تا درجه 6 $f^{(6)}$ exact \leftarrow تا درجه 5

حاصل می شود و مستوی با استفاده از $R=5$ exact

$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n f(x_i) w_i + R_n$

اینجا جایی خود n r_2 r_3 محلول است
اما نقاط همی الفاصله از هم نیستند

$\int_{-1}^1 f(x) dx = f(x_1) w_1 + f(x_2) w_2 + f(x_3) w_3 + R_3$

امداد finite: توان هر سادگی احتیاج ندارد

Gauss-Quadrature

فقط در درجه سادگی در فضای یک یا دو بعدی کاربرد دارد
و یا در درجه سادگی در هر 1/1 تا 1/2 تا درجه سادگی

با استفاده از n نقطه $R=2n-1$ exact
با استفاده از 3 نقطه $R=3$ exact

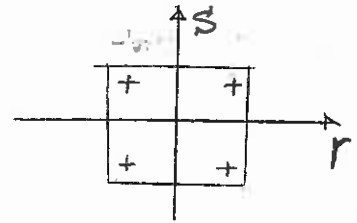
$n=2 \rightarrow \int_{-1}^1 f(x) dx = f(x_1) w_1 + f(x_2) w_2 + R_2$

$f(x)=1 \Rightarrow \begin{cases} 2 = w_1 + w_2 & \textcircled{1} \text{ و } \textcircled{7} \rightarrow \boxed{w_1=1 \text{ و } w_2=1} \textcircled{8} \\ 0 = w_1 r_1 + w_2 r_2 & \textcircled{2} \rightarrow w_1 r_1 = -w_2 r_2 \textcircled{5} \text{ و } \textcircled{6} \rightarrow w_1 = w_2 \textcircled{7} \\ \frac{2}{3} = w_1 r_1^2 + w_2 r_2^2 & \textcircled{3} \text{ و } \textcircled{8} \rightarrow (r_1^2 = r_2^2 = \frac{1}{3}) \rightarrow (r_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, r_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}) \\ 0 = w_1 r_1^3 + w_2 r_2^3 & \textcircled{4} \text{ و } \textcircled{5} \rightarrow 0 = w_1 r_1 (r_1^2 - r_2^2) \rightarrow r_1^2 = r_2^2 \end{cases}$

$r_1 \neq r_2$ $(r_1 = -r_2)$ مقارن $\textcircled{8}$

$$\int_{-1}^1 f(r) dr = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}) + R_2$$

نقطه‌های



$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(r,s) dr ds$$

میان دو نقطه هم‌اندازه

$$\rightarrow \int_{-1}^1 (\sum_{m=1}^M f(r_m, s) w_m) ds + R_m$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M f(r_m, s_n) w_m w_n + R_{MN}$$

$$m, n=2 \rightarrow f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) + f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

در دو نقطه هم‌اندازه 3 دقیق‌تر exact

هر چقدر تعداد نقاط بیشتر باشد N, M برای جوابی دقیق‌تر



نقطه‌های در 2 است پس دقیق‌تر

Natural (local) coordinate system

global \rightarrow natural (local)

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2$$

مکان: ۱- طول اعضا مستقل از مختصات محلی خواهد بود

۲- Staff برای کلیه اعضا یکسان می‌باشد

۳- عدد انترال‌گیری از (+ و -) خواهد بود

$$K_{ac} = \int_a^b \int_a^b \underline{B}_a^T(x,y) \underline{E} \underline{B}_c(x,y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{B}_a^T(r,s) \underline{E} \underline{B}_c(r,s) dr ds$$

\underline{B}_a , function of (x,y)

$$\underline{B}_a^T(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1(x,y)}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2(x,y)}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_1(x,y)}{\partial y} & \frac{\partial N_2(x,y)}{\partial x} \end{bmatrix}$$

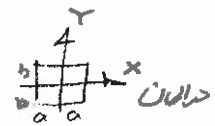
Jacobi
ژکوبی

$$\underline{A}_1(x,y) = \underline{F}_1(r,s)$$

$$x = \sum N_i(r,s) x_i = r a$$

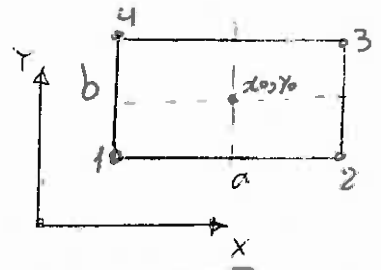
$$y = \sum N_i(r,s) y_i = s b$$

$$\begin{cases} x = r a \\ y = s b \end{cases}$$



تغییر مختصات (محلی به جهانی)
در x و y از r و s

$N_1(x,y)$ و $N_2(x,y)$ و ...
 این‌ها برای هر دو جهت r و s هستند
 $N_{1,x}$ و $N_{1,y}$ و $N(x,y)$ و $N(x,s)$



لهای هر دو جهت با هم برابر است و در هر دو جهت تغییر می‌کند

چون کنیم از Shape ها در دو جهت با هم برابر شویم

$$\begin{cases} \frac{\partial N^{(x,y)}}{\partial x} = \frac{\partial N^{(x,s)}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial N^{(x,s)}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial N^{(x,y)}}{\partial y} = \frac{\partial N^{(x,s)}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial N^{(x,s)}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} \end{cases}$$

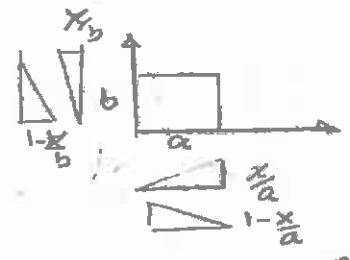
نسبت لای r و s با جهت x و y دارد و از $\frac{\partial N}{\partial x}$ و $\frac{\partial N}{\partial y}$ در جهت r و s آید
 و چون تغییرها در جهت r و s آید

مثلاً $x = \sum N_i(x,s) x_i$

$N(x,s) = N(x,y)$ $x = ar$ $y = br$
 یا r, x و r, y نسبت لای

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial r} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial N(x,y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial s} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial N(x,y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$



$$\begin{aligned} N_1 &= \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) & N_2 &= \left(\frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ N_3 &= \left(\frac{x}{a}\right) \left(\frac{y}{b}\right) & N_4 &= \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(\frac{y}{b}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} N_{2,r} \\ N_{2,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{2,r} & y_{2,r} \\ x_{2,s} & y_{2,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{2,x} \\ N_{2,y} \end{bmatrix}$$

ماتریس جاکوبی
 Jacobian matrix

$$\begin{bmatrix} N_{2,x} \\ N_{2,y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} N_{2,r} \\ N_{2,s} \end{bmatrix}$$

$$N_{2,r} = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} 2ax - a^2 \\ 2ay - ab \end{bmatrix}$$

$$N_{2,x} = \frac{1}{a} N_{2,r}$$

$$N_{2,y} = \frac{1}{b} N_{2,s}$$

$x = r(1-s)a + rs a = ra \Rightarrow x_{2,r} = a \quad x_{2,s} = 0$
 $y = rs b + (1-r)sb = sb \Rightarrow y_{2,r} = 0 \quad y_{2,s} = b$

$$x_{2,r} = \sum N_{i,r} x_i \quad x_{2,s} = \sum N_{i,s} x_i$$

$$y_{2,r} = \sum N_{i,r} y_i \quad y_{2,s} = \sum N_{i,s} y_i$$

خوب است که در دو جهت r و s بصورت یکسان تغییر کند

که در Finite بصورت یکسان تغییر کند چون واحد درجه است

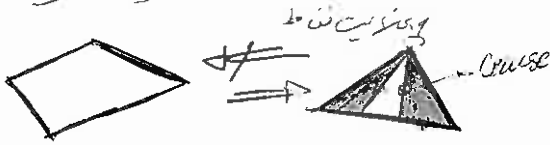
از Shape (r,s) هر کدام در r و s در r^2 و s^2 و غیره است یعنی مشتق از r و s ...

مگر آنکه Gauss points اش را در نقاط عددی داریم

پس فقط Gauss points را در نقاط عددی می‌گذاریم و در تمام اجزای شکل تغییر می‌کند

ولایتی از اضم بر روی تپه $dxdy$ و در آنجا $dxdy$ یعنی دو میدان آرایه گسسته
 فقط $dxdy$

کتابخانه $dxdy$ با برعکس دلتا باشد به موقع معکوس دارد و تپه $dxdy$ است



اف $dxdy$ نیست

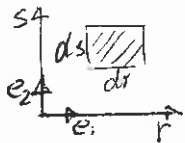
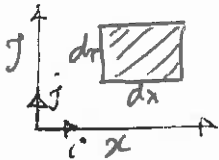
همین خاصیت هر سطحی است

دو این خاصیت $dxdy$ و $dxdy$ در هر نقطه $Gauss$ دلتا می باشد و آنرا این نقاط خارج از $dxdy$

اما در واقع با $dxdy$ فرق دارد چون در $dxdy$ است و چون $dxdy$ متفاوت است پس این $dxdy$ را می توانیم $dxdy$ بنویسیم

اثبات $Jacobi$

$$\iint_R dxdy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} |J| dndds$$



$$d\vec{x} \times d\vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & 0 & 0 \\ 0 & dy & 0 \end{vmatrix} = dxdy \vec{k} \quad \star$$

$$d\vec{x} = \frac{\partial x}{\partial r} dr \vec{e}_1 + \frac{\partial x}{\partial s} ds \vec{e}_2$$

$$d\vec{y} = \frac{\partial y}{\partial r} dr \vec{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial s} ds \vec{e}_2$$

$$d\vec{x} \times d\vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{k}_3 \\ \frac{\partial x}{\partial r} dr & \frac{\partial x}{\partial s} ds & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial r} dr & \frac{\partial y}{\partial s} ds & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial r} \right)}_{\text{Jacobi}} dndds \vec{k} \quad \star$$

$$\begin{vmatrix} x_{,r} & x_{,s} \\ y_{,r} & y_{,s} \end{vmatrix}$$

نوع المان	دوره اولی	دوره دوم (2x2)	ممانعت دوره	Gauss
4-node	1	2	3	2x2
9-node	2	4	5	3x3
16 node	3	6	7	4x4

اگر $det = |A|$ باشد

Jacobi از Gauss دست نرورد
QUADRO

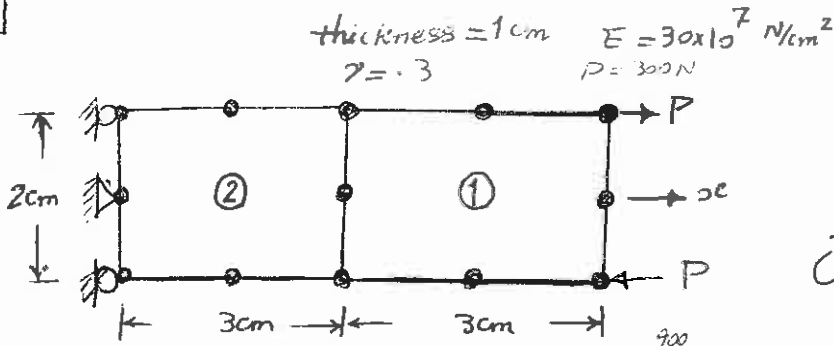
چین با map ها، تقریب داریم

تشریح خواص $\underline{G} = \underline{E} \underline{E} = \underline{E} \underline{B} \underline{\Delta}$

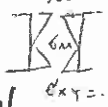
در سوله: یوستیجیر فقط هندسه است
در ستری و هر دو در دنیا تا داخل بر این است



کارخانه M در ستری



نسبت جی تیر عمیق است
 و تیرهای عمودی در حد 10 درصد
 توزیع برش سرری شکل است
 اما در تیر عمیق توزیع برش در تیرهای عمیق
 سرری نیست



$\sigma_{xy} = 0$

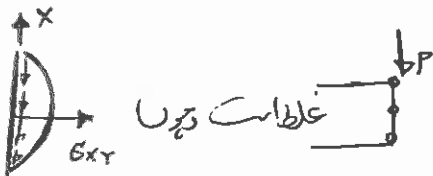
توزیع σ_{xx} در دو طرف تیر

اما در این المان استثنا هست چون همش ثابت

و σ_{xx} داریم سرری در طرفین

علل الفکاهه وضع ما این است که σ_{xx} بین دو المان
 یویکجه نمانده باشد چون ما تقریباً نزدیک
 تیر داریم نو وقتی آنرا σ_{xx}

3- این هم در کم نقاط خاص کنیم خوب باشد اگر در این المان هم یک برش داریم حالت



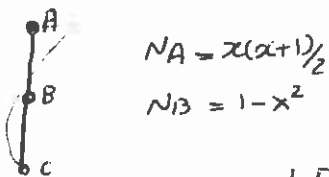
constant stress نیست، stress بصورت خطی تغییر می کند

نقشه چون تغییرات سرری شکل است

ما به بصورت $\sigma_{xy} = \sigma_{max}(1-x^2)$ در نظر

$P = \int_{-1}^1 \sigma_{max}(1-x^2) dx = \frac{4}{3} \sigma_{max}$

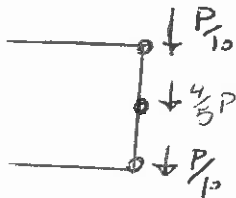
$\Rightarrow \frac{3}{4} P = \sigma_{max}$



$N_A = x(x+1)/2$
 $N_B = 1-x^2$

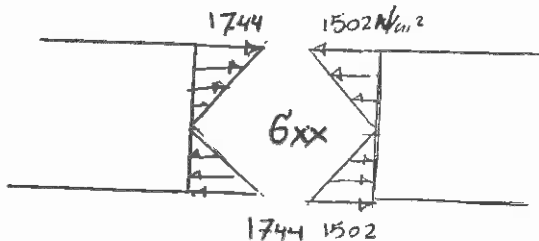
$P_A = \int_{-1}^1 N_A \sigma_y dx = \int_{-1}^1 \frac{3}{4} P (1-x^2) x(x+1) dx = \frac{1}{10} P$

$P_B = \int_{-1}^1 N_B \sigma_y dx = \int_{-1}^1 \frac{3}{4} P (1-x^2)(1-x^2) dx = \frac{8}{10} P$



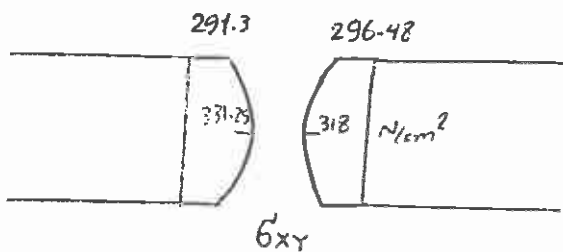
تبدیل با تقریبی به بار گره ای

در حالت finite فوطی برای همین حالت نامرئی کند



حالتی با σ_{xx} توزیع صورت

حالت تیرهای



جود برش خوبی برای برش نیست

برش داریم

کریک مستطول میانی دریا همان ریاضی کردیم است.
 اما توضیح ما این است که در نقاط Gauss quadrature و در نقاط کریک مستطول Gauss (که یک کره ایم)



نقاط دریا در نقاط Gauss کریک مستطول این است از Integrand با بریم Coefficient ها

یعنی ما از لیم ها استفاده نمی کنیم هر چه نقاط را اضافه می کنیم بهترین حالت است که در این حالت استفاده می کنیم

حالت رقیق مورد نیاز است شکل گیری

$$K_{ae} = \int_{\Omega} B^T E B_c d\Omega$$

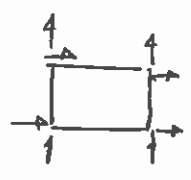
حالت این است Constant Strain Stress

در فضای ثابت در فضای ثابت در فضای ثابت در فضای ثابت

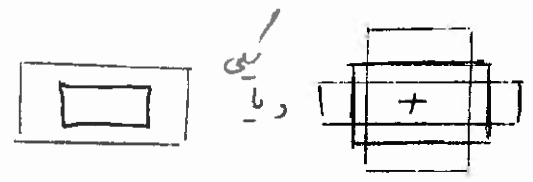
معنی با بر رقیق اگر از این است $\int |\mathbf{J}| d\Omega ds = \text{حالت}$

اگر چه برای این شکل اگر در ثابت در فضای ثابت

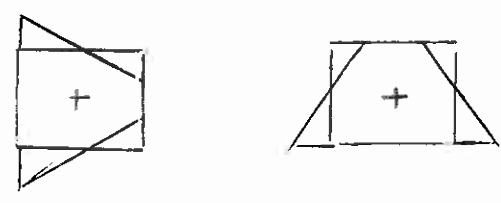
انحنا صفر Rigid Mode deformation



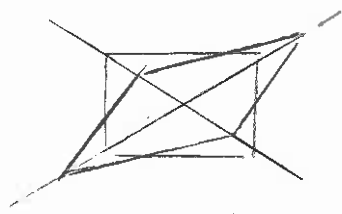
لایح چه برای این است



Axial deformation



Bending



Shear

Combination of deformation

$(6 \times 6 \times 6 \times 2)$

حالت ارتداد reduction انحراف استقامت

دگر بنده بلیریم در 2 - axial خود deform خود خود 6×6 , 6×6 \rightarrow

در bending دگرزی $\left\{ \begin{matrix} \epsilon_{xx} = \\ \epsilon_{yy} = \end{matrix} \right.$ ارتزی لغزیدگی Reduction انحراف

سوم سقو خمشی عاقر سس صفر و چون خمش طریم ناپایداری شود چون ارتزی (bending mode) حذف می شود

یعنی اگر رتبه انحراف را با این بیادیم هیچ ارتزی در خود خمشی تغییرات ندارد و در تمام شود

طریم دگرزی همان که برابر است با استقامت خمیدار

در finite سقو همان بیستوار exact است یعنی بالا به پایین می ریزم

وی در دگرزی از پایین تر می رسد

یعنی اگر می شود سستی این رکاش برهیم بولاب و اکتی نزدیکتر می شویم

یعنی reduce که گاهی سس این معنی نشانی می دهد

در همان مثال اول در خمش خالص اگر reduce می کردیم تغییر مکان بی نهایت

اما اگر قسمت دوم در خود خمش ناهمبندی بود احتمال دگرزی برای خود دارد

درجا برای که تعداد درجات آزادی کم است دردهای ارتزی کم است و حذف می شود مقدار زیادی گاهی می دهد

لغاد تعداد درجات آزادی زیاد higher order حذف یکی زیاد تغییر نمی کند

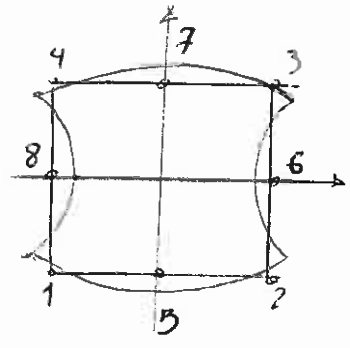
- ۱ - higher order
- ۲ - برابری در آن خود احتیاج نداریم

در دگرزی حذف

دگرزی $\left\{ \begin{matrix} \text{افزایش است} \\ \text{آسانی می باشد} \end{matrix} \right.$

در دگرزی $\rightarrow 2 \times 2$ اما آن مودی که ارتزی در آن دگرزی می شود
 جزو zero mode نباشد $\rightarrow 2 \times 2$ یعنی بیرون می خند با شیم

تاریخ: در همان ۹ ژوئیه ۱۹۷۸ 2×2 بولاب برتر شده این تکراری



لبن ۸ گره ای ۱۶ درجه آزادی
 rigid و ۱۳ تا خود deform

$$-u_1 = u_2 = u_3 = -u_4 = v_1 = v_2 = -v_3 = -v_4 = z$$

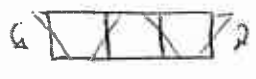
$$-v_5 = -u_6 = v_7 = u_8 = 0$$

$$u_5 = v_6 = u_7 = v_8 = 0$$

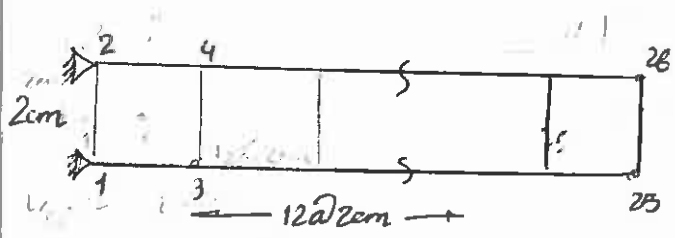
egen vector zero mode energy 2x2

بازم شرط بودن این مورد در اینجا

چفت به هم سوار نمی شود اگر چفت شود زیاد ارتعاش نمی کنند چون زیاد ستاده نمی کنند



روی خود صفتی بودی



$$\begin{cases} l/D = 12 \\ E = 2 \times 10^7 \text{ N/cm}^2 \\ T = 0.5 \text{ cm} \end{cases} \quad \eta = 0.3$$

$$S_{25} = S_{26}$$

بزرگترین (ولفقتی نیست بزرگترین نیست)

هم عملیات زیاد فرق نمی کنند

0.01382	cm	بزرگترین
0.009361		۲-۴ گره ای ۲x۲
48.13	cm	۲-۴ گره ای ۱x۱
0.01389		۳-۳ گره ای ۳x۳
0.01393		۲-۲ گره ای ۲x۲

reduction بکینم higher order تا اما

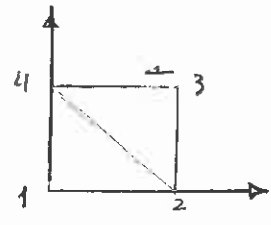
تیز فرق نمی کنند

بزرگه Cap اختیاری در order نداریم اما بنام می گیریم این حق را استکان کنند

مردم (Pcfib) ماترین کنند اما در مورد شردر شردر نیست
 که آسودنی تحقیقاتی

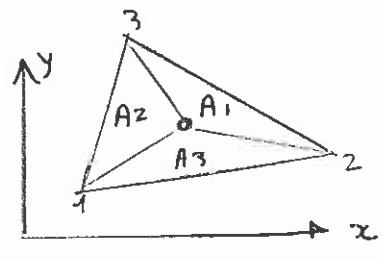
Triangular Element

$N_1^3 = N_1^4$
 $N_2^3 = N_2^4$
 $N_3^3 = N_3^4 + N_4^4$



Area coordinate system

$A = A_1 + A_2 + A_3$



$L_1 = \frac{A_1}{A}$, $L_2 = \frac{A_2}{A}$, $L_3 = \frac{A_3}{A}$

$L_1 + L_2 + L_3 = 1$

این سیستم مختصات همانند آن است که در بار آن مشاهده می شود

کدام نقاطی خط (1-3) را می قطع کند

نقطه 1 $L_1=1$, $L_2=L_3=0$

در جایی نقاط مشخص می شود

خطی موازی 2 و 3 داریم L_1 آن ثابت است هر دو آن هم در تقاطع نقطه مشخص می شود

$$\begin{cases} N_1 = L_1 \\ N_2 = L_2 \\ N_3 = L_3 \end{cases}$$

این همانند رابطه بار آردی با سیستم مختصات است

$$\begin{cases} x = \sum L_i x_i \\ y = \sum L_i y_i \end{cases}$$

$1 = \sum L_i$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}$$

$L_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y)$

$$\begin{cases} a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = y_2 - y_3 \\ b_2 = y_3 - y_1 \\ b_3 = y_1 - y_2 \end{cases}$$

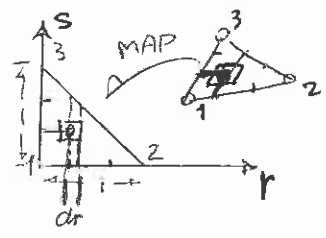
$$\begin{cases} c_1 = x_3 - x_2 \\ c_2 = x_1 - x_3 \\ c_3 = x_2 - x_1 \end{cases}$$

هر چند سیستم مختصات موازی است

مختصات با تغییر فرم دارد

$$\int_{\Omega} B^T E B \, d\Omega$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-r} f(r,s) \, ds \, dr$$



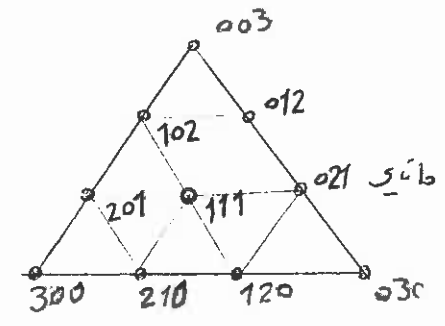
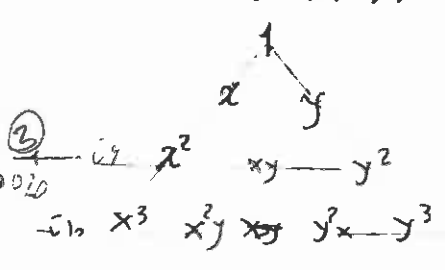
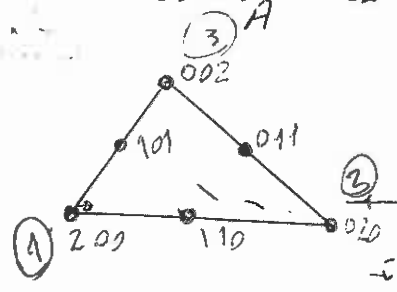
$$\begin{cases} N_1 = 1 - r - s = L_1 \\ N_2 = r = L_2 \\ N_3 = s = L_3 \end{cases}$$

نشان در سیستم مختصات طبیعی

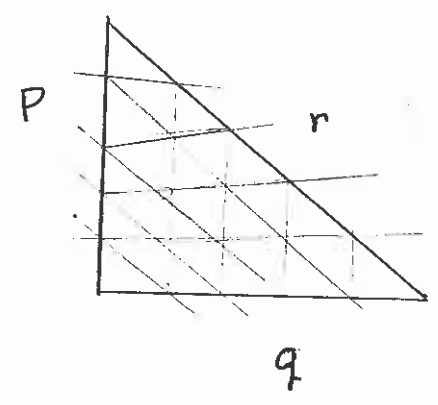
$$I(L_1, L_2, L_3) = \int_A L_1^b L_2^c L_3^d dA = \frac{2A(b_1)(c_1)(d_1)}{(b+c+d+2)!}$$

نظایر A است که با این روش می‌توان به دست آورد و در صورتی که در میان با اشکال جزو اجزای استقامت باشد پس می‌تواند استوار باشد

$$I(L_1, L_2) = \int_A L_1^e L_2^f dA = \frac{2A(e_1)(f_1)}{(e+f+2)!}$$



$$N_{pq,r}(L_1, L_2, L_3) = N_p(L_1) N_q(L_2) N_r(L_3)$$



$$N_i(L_j) = \begin{cases} \prod_{j=1}^i \frac{(m_{L_j} - j + 1)}{j} & i > 0 \\ 1 & i = 0 \end{cases}$$

$i = p, q, r$

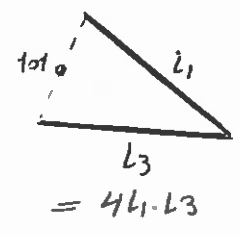
$$N_{200} = \left\{ N_2(L_1) N_0(L_2) N_0(L_3) \right\} = \frac{(2L_1 - 1 + 1)}{1} \frac{(2L_1 - 2 + 1)}{2} = \frac{2L_1(2L_1 - 1)}{2} = L_1(2L_1 - 1)$$

- $N_{200} = L_1(2L_1 - 1)$
- $N_{002} = L_3(2L_3 - 1)$
- $N_{020} = L_2(2L_2 - 1)$
- $N_{110} = 4L_1L_2$
- $N_{011} = 4L_2L_3$
- $N_{101} = 4L_3L_1$

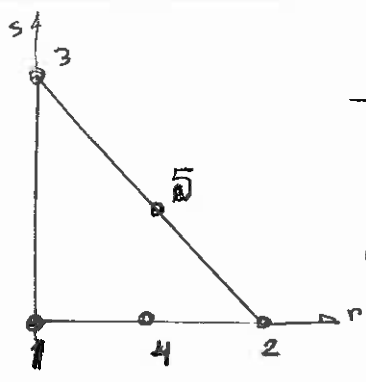
نشان

$$101 = L_1 \cdot L_3$$

$$\frac{1}{2} \times L_2$$



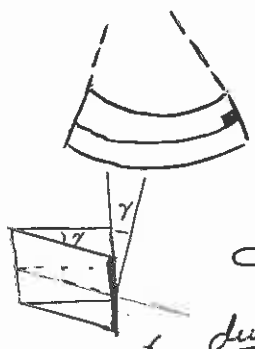
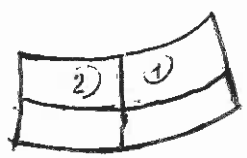
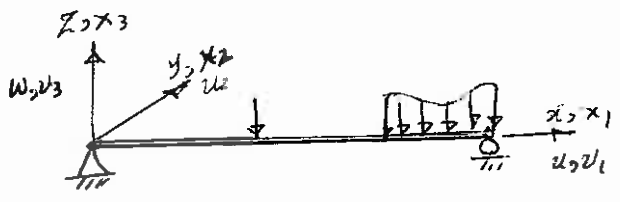
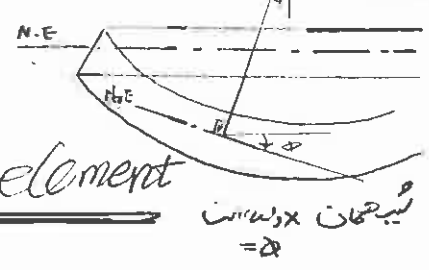
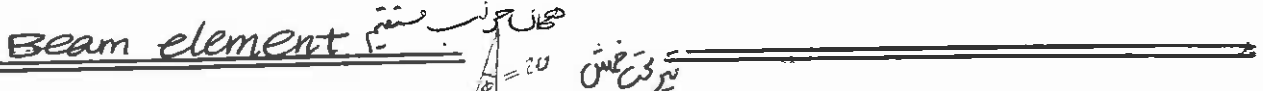
64



شماره ای	شماره ای	داده ای	شماره ای
$L_1 = N_1^3 = 1-r-s$	$-2L_1L_2$		$-2s(1-r-s)$
$L_2 = N_2^3 = r$	$-2L_1L_2$	$-2rs$	
$L_3 = N_3^3 = s$	0	$-2rs$	$-2s(1-r-s)$
$N_4 =$	$4r(1-r-s)$		
$N_5 =$	$4L_2L_1$	$4rs$	
$N_6 =$			$4s(1-r-s)$

در انتزاع گوی هر جا $L_1 = (1-r-s)$ $L_2 = r$ $L_3 = s$ و انتزاع گوی بجز $exact$ فاکتور دهیم و می شود ارتباط Galger دانی

$N_{26} = 2r(r - \frac{1}{2})$

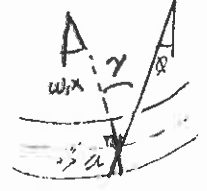


plane section remain plane
 صفحه عمودی همواره تخت می ماند

$w(1) = w(2)$
 در صورتی که $w(1) = w(2)$ و $\phi(1) = \phi(2)$

$\phi = 0 \rightarrow \phi = -w'x$

$t = \frac{dw}{dx} = \frac{V}{GA}$

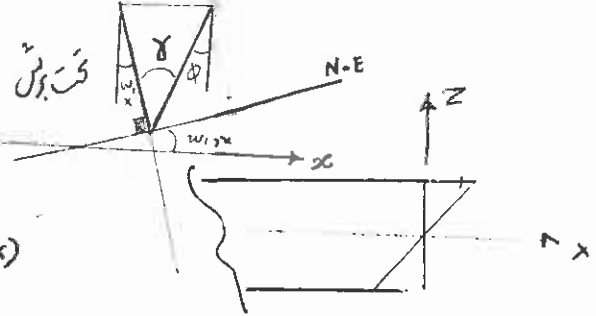


$w(1) = w(2)$
 $\phi(1) = \phi(2)$

Beam with shear

Displacement field

$$\begin{cases} u_1 = u(x) + z\phi(x) \\ u_3 = w(x) \end{cases}$$



Strain $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + v_{j,i})$

$\epsilon_{11} = u_{1,1} = u_{,x} + z \phi_{,x}$
 $\epsilon_{13} = \frac{1}{2} (u_{1,3} + v_{3,1}) = \frac{1}{2} (\phi_{,x} + w_{,x})$

$\epsilon_{12} = 0, \epsilon_{33} = 0, \epsilon_{22} = 0$

$\epsilon = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ 2\epsilon_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} + z \phi_{,x} \\ \phi_{,x} + w_{,x} \end{Bmatrix} = \star$

$\epsilon = \sum_a \begin{bmatrix} N_{a,x} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & N_{a,x} & N_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \phi \end{Bmatrix} + \sum_a z \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{a,x} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \phi \end{Bmatrix}$

Handwritten notes: $\star = \begin{Bmatrix} \mu_a \\ w_a \\ \phi_a \end{Bmatrix}$, B_{1a} , B_{2a} , $N_{a,x}$, N_a

برای حذف از تنش درست کردیم

$\epsilon = \sum_a B_{1a} \delta^a + \sum_a z B_{2a} \delta^a$

$\sigma_{ij} = \sigma_{ij} \lambda \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij}$

$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu) \epsilon_{11}$

$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ نیو

$\lambda + 2\mu = \frac{E(1-\nu)}{(1-\nu-2\nu^2)} \stackrel{\text{تقریباً}}{=} E$

$\nu = 0.3 \rightarrow \nu^2 = 0.09$

$\sigma_{13} = 2\mu \epsilon_{13} = \mu (2\epsilon_{13})$

$\Rightarrow \sigma_{11} = E \epsilon_{11}$

$\underline{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ یعنی $\underline{\sigma} = \underline{E} \underline{\epsilon}$

$K_{ac} = \int_{\Omega} (B_{1a}^T + z B_{2a}^T) \underline{E} (B_{1c} + z B_{2c}) d\Omega$

$= \int_{\Omega} B_{1a}^T \underline{E} B_{1c} + \int_{\Omega} z^2 B_{2a}^T \underline{E} B_{2c} d\Omega + \int_{\Omega} z B_{1a}^T \underline{E} B_{2c} d\Omega + \int_{\Omega} z B_{2a}^T \underline{E} B_{1c} d\Omega$

$$K_{ac} = K_{ac}^S + K_{ac}^B$$

shear bending

$$K_{ac}^S = \int_0^L \frac{\mu}{A'} \left[\frac{N_{ax}}{N_0} \right] \langle N_{ax}, N_c \rangle dx$$

$$B_{2a}^T E B_{2c} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ N_{ax} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & \mu k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & N_{ax} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{ac}^B = \int_0^L E I \begin{bmatrix} 0 \\ N_{ax} \end{bmatrix} \langle 0, N_{ax} \rangle dx$$

$$K_{ac} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

دگر star و B وابسته نیست

درمان تیر (3/2) [24] وابسته بود تغییر شکل جهت لبها θ و استخوان و در (3/2) استخوان

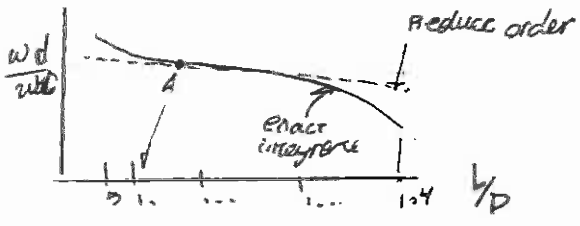
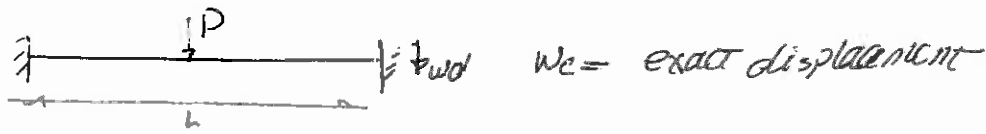
تغییر شکل لبها شود $\theta = 0$ با استفاده از اصل تغییر شکل برابر $\theta = 0$ استخوان

درمان تیر $I = \frac{h^3}{12}$ $A = 1 \cdot h$ $A' = \mu A = \frac{5}{6} h$ $\begin{cases} \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \nu = .25 \quad G = \mu = .4E \end{cases}$

$$\begin{cases} N_1 \left(\frac{2}{3} \right) = -\frac{1}{9} \\ N_2 \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{2}{9} \\ N_3 \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{8}{9} \end{cases}$$

$$\langle F \rangle = \langle -\frac{1}{9} \quad 0 \quad \frac{2}{9} \quad 0 \quad \frac{8}{9} \quad 0 \rangle (-P)$$

با استفاده از اصل تغییر شکل



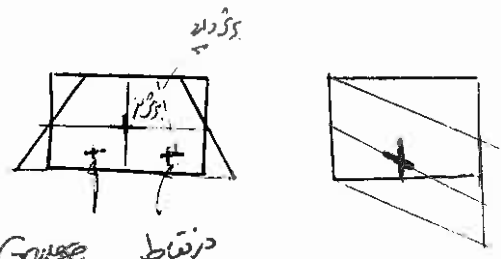
روش $\int_0^L \mu k A \left[\begin{matrix} N_{max} \\ N_A \end{matrix} \right] \langle N_{max} \times N_C \rangle dx$

روش $\int_0^L EI \left[\begin{matrix} \cdot \\ N_{max} \end{matrix} \right] k \cdot \langle N_{max} \rangle dx$

$\alpha = \frac{\mu k A}{EI} \rightarrow \infty$ در

(همچون نیروی کشش در سیم برون میسر می شود) در حالتی که نسبت سیم به نیروی کشش است
 (چون خمش در معنی کاهش دارد) Shear locking قفسه روش

دو عنصر برای تیر عمیق بجای اینکه بیش از حد شود سیم برش در این میزان کاهش می یابد
 در هر جهت این تیر سرسختی بزرگ Range کاهش می یابد هستند



دقیق pure bending در صورتی که
 که pure که کمتر باشد
 برآوردی shear خف قفسه از بین می رود

در نقاط Gauss در بار
 (Gauss در بار) (Gauss در بار) (Gauss در بار)
 (Gauss در بار) (Gauss در بار) (Gauss در بار)

در گجت تیر که با زمان ۴ درجه ای (۵) C لغا (Reduce order) و در معنی shear از بین می رود
 در روش تیر
 به جای استفاده از کامل کردن معنی از آن که برای (۵) C در Reduce استخوان

قفسه برآورد فقط Gauss استخوان

$n=2$
 $w=2$

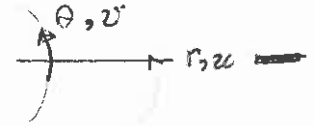
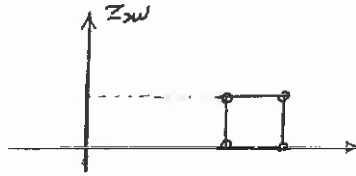
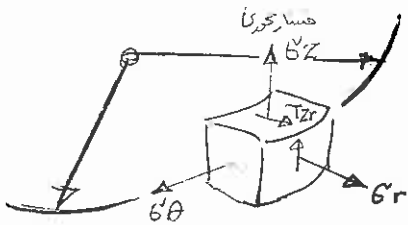
پس از این جهت قاعده اوله همان سه بعدی می شود و ما تقریباً آن
 این (همان) هست که بشود دو بعدی مثل کرد

Axi Symmetry Element

rod tower

ما با این روش نیز باید Axi sym باشد و اگر نه مسئله

solid of revolution



→ Axi $v=0$ است

$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \tau_{zr} \end{Bmatrix} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu & 0 \\ 0 & 1 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \tau_{zr} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} T \\ T \\ T \\ 0 \end{pmatrix}$$

چون که استر (در) هم در 4 استر

$\nu = \frac{\nu}{1-\nu} \Rightarrow g = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$

$\underline{\epsilon} = \underline{B} \underline{\Delta} \leftarrow \underline{\epsilon} = [\underline{D}] \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} \leftarrow \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \sum N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \end{Bmatrix}$



$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \vdots \end{Bmatrix}$

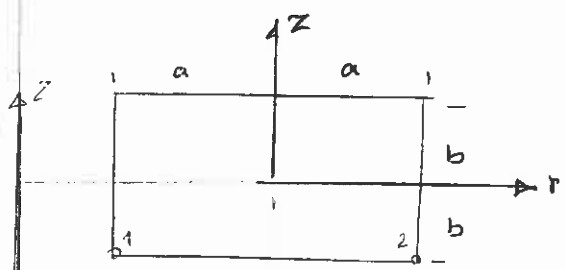
$\begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \tau_{zr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,r} \\ u_{,\theta} \\ w_{,z} \\ w_{,r} + u_{,z} \end{bmatrix} = \sum_i \begin{bmatrix} N_{i,r} & 0 \\ N_{i,\theta} & 0 \\ 0 & N_{i,z} \\ N_{i,z} & N_{i,r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \end{Bmatrix}$

$\epsilon_\theta = \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r}$ (مگر بولون)

در صورتی که Strain داریم چون با تقریب صاف باشد

$B_a = \begin{bmatrix} N_{a,r} & 0 \\ N_{a,\theta} & 0 \\ 0 & N_{a,z} \\ N_{a,z} & N_{a,r} \end{bmatrix}$

Shapes \leftarrow جابجایی



$$N_1 = \frac{(x-a)(y-b)}{4ab}$$

$$N_1 \Rightarrow \frac{(r-r_m-a)(z-b)}{4ab}$$

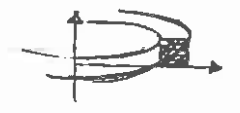
$$x = r - r_m$$

$$\begin{cases} x = r - r_m \\ y = z \end{cases}$$

این تنش در شوی متناظر منجر به E²

در B، در صورتی که و تعریف صبر در shapes در نظر در z

$$K_{ac} = \int_{\Omega} B_a^T E B_c d\Omega = \iint_A \int_{-\pi}^{\pi} B_a^T E B_c dA r dr dz$$



$$dA = r dr dz \quad (dx = dr, \quad dy = dz)$$

$$= dx dz$$

$$B_a = \begin{bmatrix} N_{a,x} & 0 \\ N_{a,r} & 0 \\ 0 & N_{a,z} \\ N_{a,y} & N_{a,z} \end{bmatrix}$$

plane
مستوی

برای آن shapes در نظر

Jacobi همانست

$$\int_{-\pi}^{\pi} r \int_A B_a^T E B_c dA dr dz$$

Fourier series

ماتریس 8x3

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin n\theta$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta \sin n\theta d\theta = \begin{cases} \pi & m \neq n \neq 0 \\ 0 & m = n \neq 0 \\ \pi & m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 n\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2n\theta}{2} = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta = \begin{cases} \pi & m = n = 0 \\ 2\pi & m = n \neq 0 \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

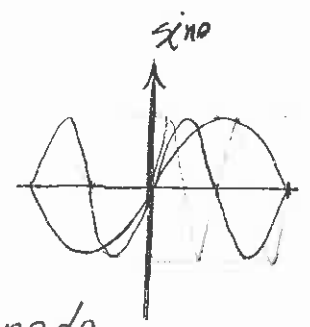
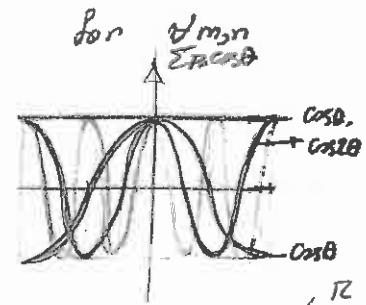
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta \cos n\theta d\theta = 0$$

for $\forall m, n \in \mathbb{Z}$

$$P_0 = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \phi d\theta}{2\pi}$$

$$P_n = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \phi \cos n\theta d\theta}{\pi}$$

$$Q_n = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \phi \sin n\theta d\theta}{\pi}$$



$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin n\theta$$

$$P_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi d\theta \quad \text{Average}$$

$$P_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi \cos n\theta d\theta$$

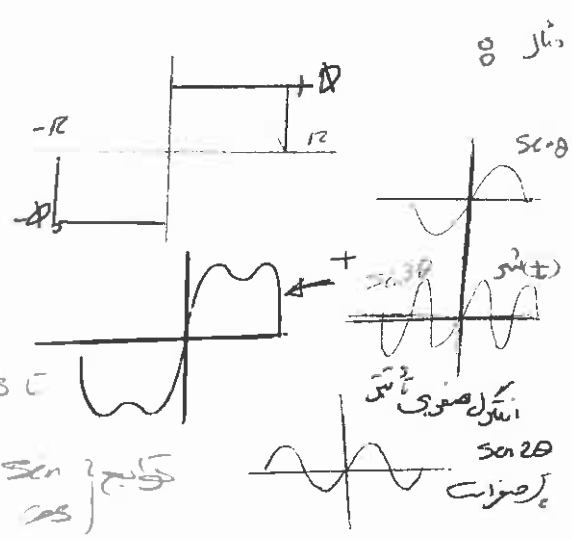
$$Q_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi \sin n\theta d\theta$$

$$P_0 = 0 \quad P_n = 0 \quad \begin{cases} Q_n = 0 & \text{for } n: \text{even} \\ Q_n = \frac{4\Phi_0}{n\pi} & n: \text{odd} \end{cases}$$

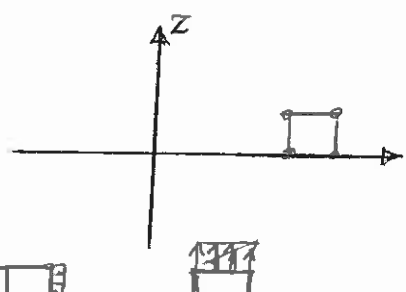
$$Q_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -\Phi_0 \sin n\theta + \int_0^{\pi} \Phi_0 \sin n\theta \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[+\Phi_0 \left[\frac{\cos n\theta}{n} \right]_{-\pi}^0 + \Phi_0 \left[\frac{\cos n\theta}{n} \right]_{\pi}^0 \right]$$

$$= \frac{\Phi_0}{\pi} \left[\frac{1}{n} - \left[\frac{-1}{n} \right] \right] = \frac{2\Phi_0}{n\pi} \quad \text{for } n: \text{odd}$$

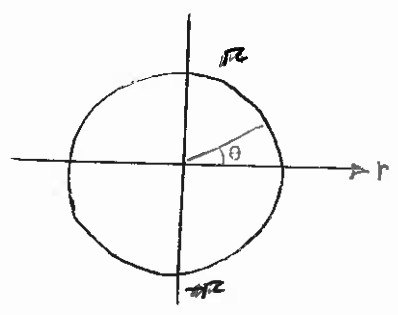
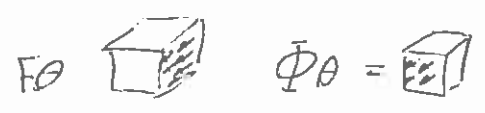


تقسیم کنیم
 توانی و توانی
 توانی و توانی



F_r radial body force
 F_z z-direction body force
 T temperature

Φ_r Φ_z
 Traction force on boundary



اگر برداری $\langle F_r, F_z, \Phi_r, \Phi_z, T \rangle$ متعارف باشد این هم در بی نظیر فقط دارای است

$$\Phi = \sum \langle F_{rn}, F_{zn}, \Phi_{rn}, \Phi_{zn}, T_n \rangle \sin n\theta$$

$$\langle F_\theta, \theta \rangle = \sum \langle F_{\theta n}, \theta_n \rangle \sin n\theta$$



$$\begin{cases}
 u = \sum u_n \cos n\theta + \sum \bar{u}_n \sin n\theta \\
 v = \sum v_n \sin n\theta + \sum \bar{v}_n \cos n\theta \\
 w = \sum w_n \cos n\theta + \sum \bar{w}_n \sin n\theta
 \end{cases}$$

این بارگذاری تابع از Z هستند تابع θ هستند

$\left\{ \begin{array}{l} \text{bared parameter function } r, z \\ \text{for } n \in \mathbb{Z} \text{ not } \theta \end{array} \right.$
 عبارت متناهی است

$$\underline{E} = \underline{D} \underline{u} \quad \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix}$$

$$\underline{E} = \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \delta_{zr} \\ \epsilon_{r\theta} \\ \delta_{\theta z} \end{Bmatrix}$$

قبلاً ϵ $\epsilon_{\theta z}$ $\epsilon_{z\theta}$ $\epsilon_{r\theta}$ $\epsilon_{\theta r}$ ϵ_{zr} ϵ_{rz} $\epsilon_{\theta z}$ $\epsilon_{z\theta}$ $\epsilon_{r\theta}$ $\epsilon_{\theta r}$ ϵ_{zr} ϵ_{rz}

در اینجا $\epsilon_{\theta z}$ $\epsilon_{z\theta}$ $\epsilon_{r\theta}$ $\epsilon_{\theta r}$ ϵ_{zr} ϵ_{rz}

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \delta_{zr} \\ \epsilon_{r\theta} \\ \delta_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

$$\langle \epsilon_{r\theta} \quad \epsilon_{\theta r} \quad \epsilon_{zr} \quad T_{zr} \rangle = \sum_n \langle \bar{\epsilon}_{r\theta} \quad \bar{\epsilon}_{\theta r} \quad T_{zr} \rangle \cos n\theta$$

$$\langle T_{r\theta} \quad T_{\theta z} \rangle = \sum_n \langle T_{r\theta} \quad T_{\theta z} \rangle \sin n\theta$$

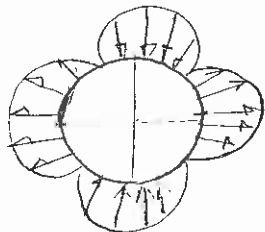
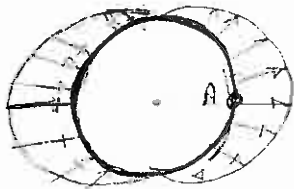
$$\begin{cases}
 \phi_1 \cos n\theta = 0 \\
 \phi_2 \cos n\theta = 0 \\
 \phi_3 \sin n\theta = 0
 \end{cases}$$

در اینجا تابع از Z است؛ مقدار استوار است و
 و مقدار r و θ متغیر است؛ از این هم $\epsilon_{\theta z}$ $\epsilon_{z\theta}$ $\epsilon_{r\theta}$ $\epsilon_{\theta r}$ ϵ_{zr} ϵ_{rz}

$$\begin{cases}
 \phi_1 = 0 \\
 \phi_2 = 0 \\
 \phi_3 = 0
 \end{cases} \quad \underline{k}_n \underline{S}_n - R_n = 0$$

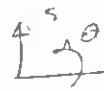
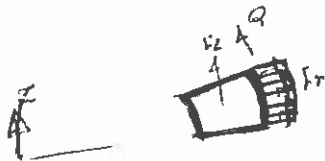
$$\begin{aligned}
 K &= \int B^T E B dr \\
 &= \int_{\theta=0}^{\pi} \left(\int_A \dots \dots da \right) d\theta
 \end{aligned}$$

این فرمول در اینجا استفاده شده است
 اگر هم به روش دیگر این فرمول را بنویسیم



ثبت. θ صفر تقارن مستقیم

تغییر θ در جهت θ



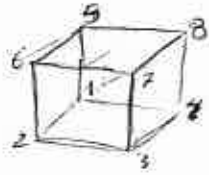
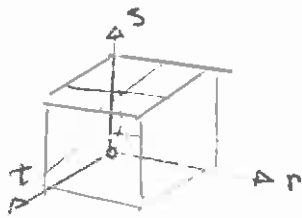
$$x = \sum_n [\bar{u}_n \cos n\theta + \bar{v}_n \sin n\theta]$$

$$y = \sum_n [\bar{v}_n \cos n\theta - \bar{u}_n \sin n\theta]$$

$$w = \sum [\bar{w}_n \cos n\theta - \bar{v}_n \sin n\theta]$$

$\bar{u}_n, \bar{v}_n, \bar{w}_n$ as function of r, θ, z

Solid element



$$\begin{cases} (n) f_1' = \frac{1-n}{2} \\ (n) f_2' = \frac{1+n}{2} \\ g_1'(s) = \frac{1-s}{2} \\ g_2'(s) = \frac{1+s}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} h_1'(t) = \frac{1-t}{2} \\ h_2'(t) = \frac{1+t}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} N_1(r,s,t) &= f_1'(n) g_1'(s) h_1'(t) \\ N_2(r,s,t) &= f_1'(n) g_1'(s) h_2'(t) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{ss} \\ \epsilon_{tt} \\ \epsilon_{st} \\ \epsilon_{tr} \\ \epsilon_{rs} \end{bmatrix} = \bar{\epsilon}$$

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{ss} \\ \epsilon_{tt} \\ 2\epsilon_{st} \\ 2\epsilon_{tr} \\ 2\epsilon_{rs} \end{bmatrix}$$

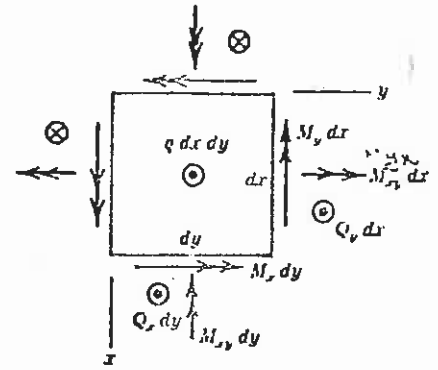
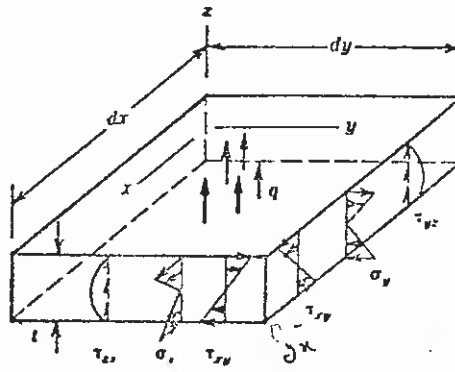
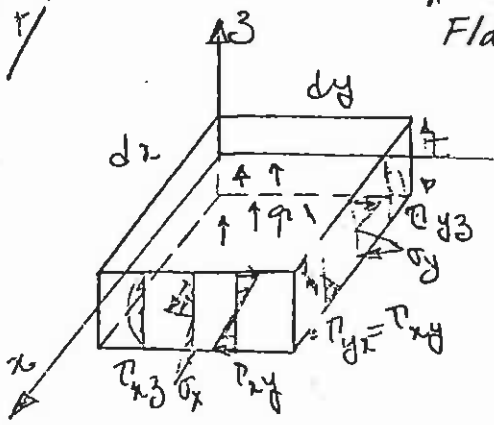
$$\begin{bmatrix} N_{,r} & 0 & 0 \\ 0 & N_{,s} & 0 \\ 0 & 0 & N_{,t} \\ 0 & N_{,t} & N_{,s} \\ N_{,t} & 0 & N_{,r} \\ N_{,s} & N_{,r} & 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$ displacement

B ↗

$$K_{ac} = \int_{\Omega} B_a^T E B_c d\Omega \quad \text{هر کدوم 3x3}$$

Flat Plate Bending *



Assumption: 1) $\sigma_z = 0$

2) $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 @ z = 0$

in plane or membrane stress = 0

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz$$

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz$$

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz$$

$$Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz$$

twist

$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz \leftarrow \text{per length}$$

$$Q_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz \leftarrow \text{per length}$$

Maximum stress

$$\sigma_x = \frac{M_x z}{t^3/12}$$

$$\sigma_{x, \max} = \frac{6 M_x z}{t^2} @ z = \pm t/2$$

$$\sigma_y = \frac{M_y z}{t^3/12}$$

$$\sigma_{y, \max} = \frac{6 M_y z}{t^2} @ z = \pm t/2$$

$$\tau_{xy} = \frac{M_{xy} z}{t^3/12}$$

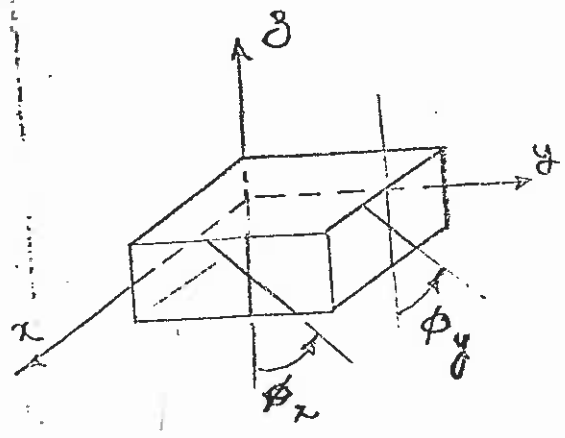
$$\tau_{xy, \max} = \frac{6 M_{xy} z}{t^2} @ z = \pm t/2$$

$$\tau_{yz} = \frac{1.5 Q_y}{t} @ z = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{1.5 Q_x}{t} @ z = 0$$

Concepts & Applications of Finite Element Analysis, Third Edition
Cook, Malkus, Plesha — John Wiley & Sons, 1989

2/



Displacement Field

$$u(x,y) = z \phi_y(x,y)$$

$$v(x,y) = -z \phi_x(x,y)$$

$$w(x,y) = w(x,y)$$

STRAINS

$$\epsilon_x = u_{,x} = z \phi_{y,x}$$

$$\epsilon_y = v_{,y} = -z \phi_{x,y}$$

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} = u_{,y} + v_{,x} = z \phi_{y,y} - z \phi_{x,x}$$

$$\underline{\epsilon}_1 \triangleq \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \phi_{y,x} \\ -\phi_{x,y} \\ \phi_{y,y} - \phi_{x,x} \end{Bmatrix} \quad \text{Bending}$$

$$\gamma_{yz} = 2\epsilon_{yz} = w_{,y} + v_{,z} = w_{,y} - \phi_x$$

$$\gamma_{zx} = 2\epsilon_{zx} = w_{,x} + u_{,z} = w_{,x} + \phi_y$$

$$\underline{\epsilon}_2 \triangleq \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{,y} - \phi_x \\ w_{,x} + \phi_y \end{Bmatrix} \quad \text{shear}$$

STRESS-STRAIN

Bending Stress

plane stress $\sigma_z = 0$ بازو: $\sigma_z = 0$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E'_x & E'' & 0 \\ E'' & E'_y & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_x \Delta T \\ \alpha_y \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix}$$

for orthotropic E_{II} $\underline{\epsilon}_1$ initial strain ϵ_0 due to temp. change

For Isotropic $\rightarrow E'_x = E'_y = \frac{E''}{\nu} = \frac{E}{1-\nu^2}$ $\& G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$$\underline{\sigma}_I = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} (\underline{\epsilon}_I - \underline{\epsilon}_0) \quad \text{plane stress}$$

E_{II} VV

3/ shear stress

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{\underline{\epsilon}}_2 \quad \underline{\underline{\sigma}}_2 = \underline{\underline{E}}_{22} \underline{\underline{\epsilon}}_2$$

Combined stress

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{E}}_{11} & 0 \\ 0 & \underline{\underline{E}}_{22} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \underline{\underline{\epsilon}}_1 \\ \underline{\underline{\epsilon}}_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \underline{\underline{\epsilon}}_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \rightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{E}} (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}_0)$$

NO COUPLING

STRAIN-DISPLACEMENT MATRIX [B]

$$\underline{\underline{\epsilon}}_1 = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} \phi_{y,x} \\ -\phi_{x,y} \\ \phi_{y,y} - \phi_{x,x} \end{bmatrix} = \beta \sum_a \underbrace{B_{1a}}_{\substack{\uparrow \\ \text{no. of nodes}}} \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ w \end{Bmatrix}^a = \beta \sum_a \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & N_{a,x} & 0 \\ -N_{a,y} & 0 & 0 \\ -N_{a,x} & N_{a,y} & 0 \end{bmatrix}}_{B_{1a}} \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ w \end{Bmatrix}^a = \beta \sum_a B_{1a} \Delta^a$$

nodal displ

$$\underline{\underline{\epsilon}}_2 = \begin{Bmatrix} 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{,y} - \phi_{x,x} \\ w_{,x} + \phi_{y,y} \end{Bmatrix} = \sum_a \underbrace{\begin{bmatrix} -N_a & 0 & N_{a,y} \\ 0 & N_a & N_{a,x} \end{bmatrix}}_{B_{2a}} \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ w \end{Bmatrix}^a = \sum_a B_{2a} \Delta^a$$

$$\begin{Bmatrix} \underline{\underline{\epsilon}}_1 \\ \underline{\underline{\epsilon}}_2 \end{Bmatrix} = \sum_a \begin{bmatrix} B_{1a} \\ B_{2a} \end{bmatrix} \Delta^a = \sum_a \underline{\underline{B}}_a \Delta^a$$

ELEMENT STIFFNESS

$$K_{ac} = \int_{\Omega} B_a^T E B_c d\Omega = \int_A \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \beta B_{1a} & B_{2a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{E}}_{11} & 0 \\ 0 & \underline{\underline{E}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta B_{1c} \\ B_{2c} \end{bmatrix} dz dA =$$

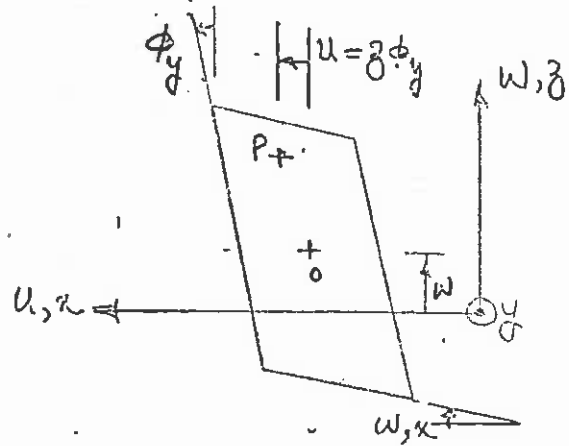
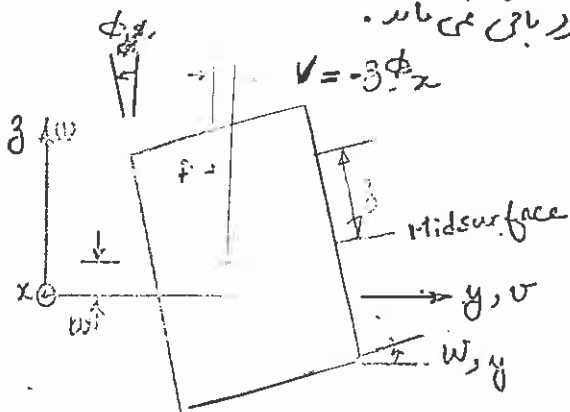
$$K_{ac} = \int_A \int_{-t/2}^{t/2} (\beta^2 B_{1a}^T E_{11} B_{1c} + B_{2a}^T E_{22} B_{2c}) dz dA \quad \text{NOTE 1) } \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz = \frac{t^3}{12} \leftarrow \text{for beam I}$$

$$K_{ac} = \int_A \frac{t^3}{12} B_{1a}^T E_{11} B_{1c} dA + \int_A K \beta B_{2a}^T E_{22} B_{2c} dA \quad \text{NOTE 2) } K = \text{form factor for } \omega$$

parabolic distribution of τ_{yz}, τ_{zx} along dz $K = 5/6$

4/ Mindlin Theory (Thick Plate) - with shear

در این تئوری فرض می‌شود که $\tau_{yz} \neq 0$ و $\tau_{zx} \neq 0$ (صفری باشند) بنابراین تغییر مکانی برشی وجود دارد و همین دلیل خط عمود بر صفحه میانی بعد از تغییر مکان عمود باقی نمی‌ماند.



$$\gamma_{yz} = w_{,y} - \phi_x$$

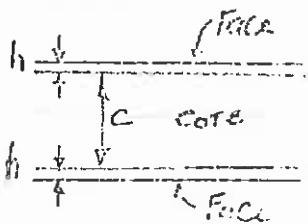
for $\gamma_{yz} = 0 \rightarrow \phi_x = w_{,y}$

$$\gamma_{zx} = w_{,x} + \phi_y$$

for $\gamma_{zx} = 0 \rightarrow \phi_y = -w_{,x}$

این تئوری برای ورق نازک (Thin Plate) بکار برده می‌شود. همچنین تئوری برای ورق Sandwich plate بکار برده خواهد شد و در هر صورت ماتریس سختی از دو قسمت Bending + Shear مطابق آنچه

$$I = \frac{(c+h)^2}{2} \cdot h \times 2 = \frac{h(c+h)^2}{2} \quad \int dA^2 = h^2 c^2$$



$$I = h(c+h)^2$$

این ورق ساندویچی Sandwich Plate

$$K_{bc} = \int_A \frac{E h (c+h)^2}{2(1-\nu^2)} B_{1a}^T E_{11} B_{1c} dA + \int_A \frac{E (c+h)^2}{2c(1+\nu)} B_{2a}^T E_{22} B_{2c} dA$$

where $E, \nu =$ FACE Plate ; $G =$ Shear Modulus of core

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

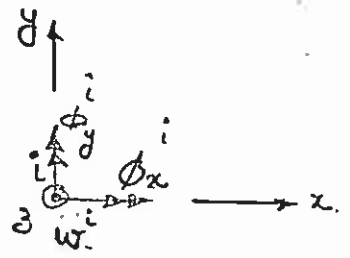
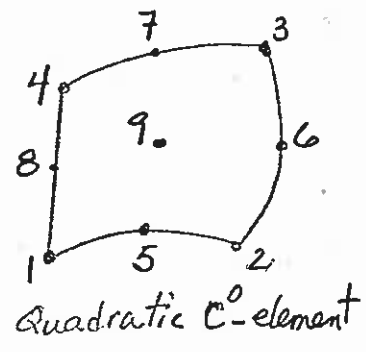
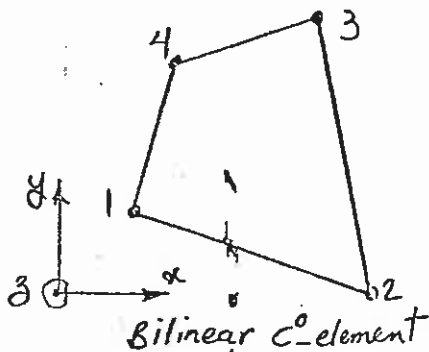
$$E_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در واقع بخش متوسط membrane و جزء کرنش می‌گردد
در بخش متوسط تحت core کرنش می‌گردد.

برای ورق نازک Isotropic Thick Plate

$$K_{bc} = \frac{E(1+\nu)}{12(1-\nu^2)} \int_A B_{1a}^T E_{11} B_{1c} dA + \frac{5Et}{12(1+\nu)} \int_A B_{2a}^T E_{22} B_{2c} dA$$

E_{22} و E_{11} (همچنین ν) است که برای ورق نازک است.



امان از نوع C^0 می باشد چون ارتباط ϕ_x با w_x و ϕ_y با w_y از طریق $shear strain$ می باشد برای هر گره i درجه آزادی مطابق شکل انتخاب می شود و تغییر مکانها مستقل از هم فرض می شود

$$w(x,y) = \sum_a N_a(x,y) w^a \quad \phi_x(x,y) = \sum_a N_a(x,y) \phi_x^a \quad \phi_y(x,y) = \sum_a N_a(x,y) \phi_y^a$$

Bilinear Element


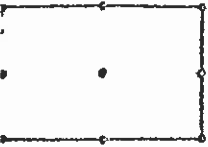


چهار تابع شکل N_1 تا N_4 عیناً مثل $plane element$ مورد استفاده قرار میگیرد. این ساده ترین نوع لان درق می باشد و با توجه به اینکه هر گره ۳ درجه آزادی دارد این لان جمعاً ۱۲ درجه آزادی دارد. اشکال: همانگونه که فرمول K_{ae} ملاحظه میگردید سهم بخش با نسبت دارد و سهم بیش t برای تیرعالمین (نسبت $\frac{t}{e}$ بالا) سهم بخش سریعاً بطرف صفر میل میکند و سهم بیش تا این تیره میگردید این عمل را $shear lock$ گویند برای کاهش اثر بیش از اشتراک تیری درجه با این تیره استفاده می شود. معمولاً نسبت $Bending$ با درجه 2×2 و برای قسمت $shear$ با درجه 1×1 اشتراک گرفته می شود.

اگر هر دو قسمت با اشتراک تیری درجه 1×1 اشتراک تیری شود یک بکانیم $zero energy mode$ مطابق شکل اتفاق نیافتد که امکان دارد سازه و آنالیز را نابود کند.

Quadratic Element

این لان دارای ۹ تابع شکل $plane element$ دارد که در مجموع ۲۷ درجه آزادی خواهد داشت این لان با اشتراک تیری 3×3 در قسمت بخش و اشتراک تیری 2×2 در قسمت بیش رفتار بسیار خوبی از خود نشان میدهد. برای $\frac{t}{e}$ بسیار بالا اشکال و اگرانی نسبت مشکلات عددی وجود دارد که نسبت به دردت محاسبات در کامپیوتر می باشد.

TABLE 11.3-1. DATA FOR SELECTED MINDLIN PLATE ELEMENTS.

Element Type	Type	Integration Rule		Shear Constraints	Number of Mechanisms
		$[k_b]$	$[k_s]$		
 Bilinear: 4 nodes, 12 d.o.f.	Reduced	1×1	1×1	2	4
	Selective	2×2	1×1	2	2
	Full	2×2	2×2	4	0
 Quadratic: 9 nodes, 27 d.o.f.	Reduced	2×2	2×2	8	4
	Selective	3×3	2×2	8	1
	Full	3×3	3×3	18	0
 Serendipity: 8 nodes, 24 d.o.f.	Reduced	2×2	2×2	8	1
	Selective	3×3	2×2	8	0
	Full	3×3	3×3	18	0
 Heterosis: 9 nodes, 26 d.o.f.	Selective	3×3	2×2	8	0

(Ref. 11.8. D.o.f. at the center node are θ_x and θ_y only.)

Handwritten notes in Persian:

ماده $\lambda = 0$

توانایی

اما اگرچه با لای

که نیز هم می شود

همین مورد کاربرد

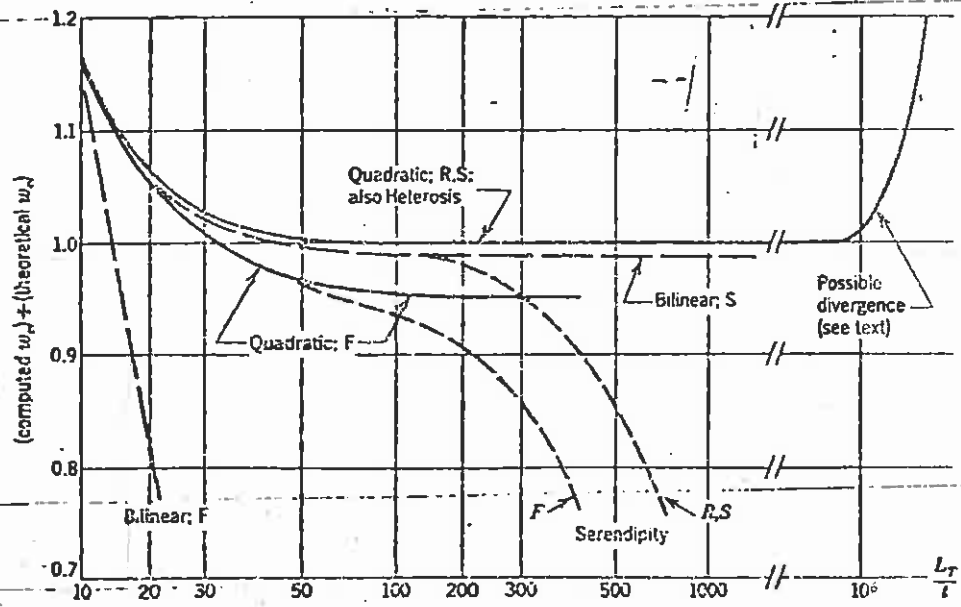


Figure 11.3-2. Center deflection of a uniformly loaded clamped square plate of side length L_T and thickness t . An 8 by 8 mesh is used in all cases. Thin plates correspond to large L_T/t . Transverse shear deformation becomes significant for small L_T/t . Integration rules, from Table 11.3-1, are reduced (R), selective (S), and full (F) [11.9].

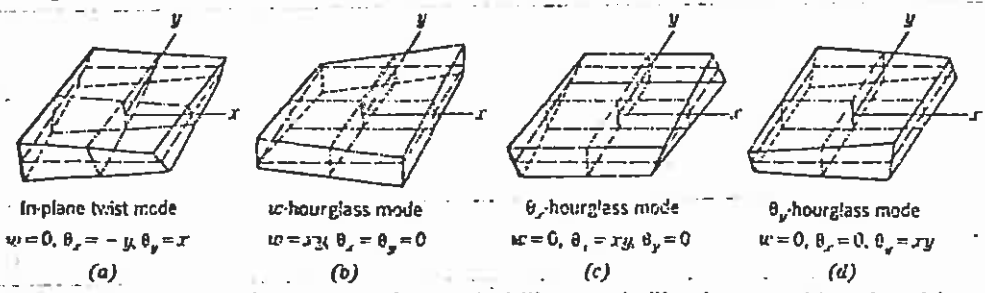


Figure 11.3-4. Mechanisms of the four-node bilinear Mindlin element with reduced integration (one point for all terms) [11.4].

7/

Kirchhoff Theory (Thin Plate) - NO shear

در این تئوری فرض بر این است که خط عمود بر سطح میانه عمود بر سطح باقی میماند پس برش ϕ_{y3} و ϕ_{x3} صفر خواهد بود

$\phi_{y3} = 0 \rightarrow \phi_x = w_{,y}$

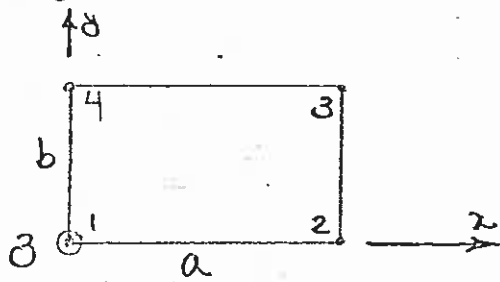
$\phi_{x3} = 0 \rightarrow \phi_y = -w_{,x}$

Thin Plate

با توجه به صفر بودن برش قسمت دوم K_{ac} (سهام برش) صفر شده و نقطه است فشر با خواهد ماند از این فرض برای برش نازک

این لامات از نوع w خواهد بود چون درجه آزادی جوشی (نیب) مستقیم اول تغییرات است و علاوه بر پیوستگی تابع

w مستقیم آن نیز پیوسته خواهد بود $w_{,x}$ و $w_{,y}$

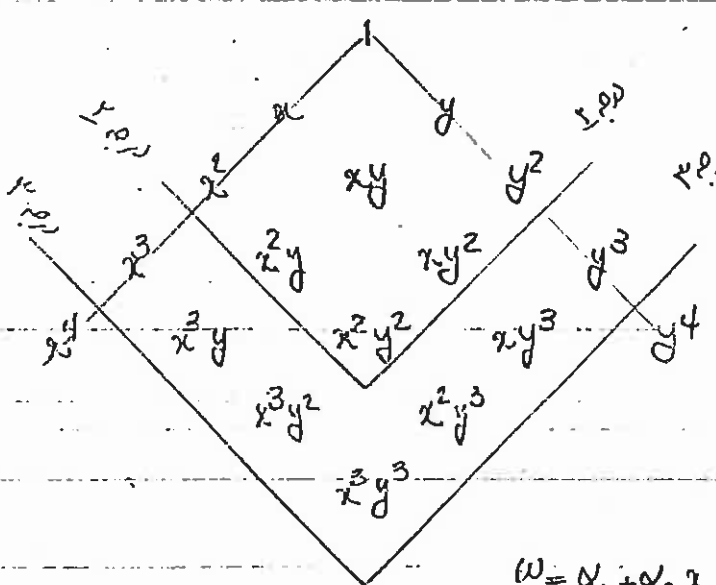


$\phi_y = -w_{,x}$
 $w_{,y} = \phi_x$

بای لامان ۱۲ گره ای فوق ۱۲ درجه آزادی وجود دارد بنابراین

$w(x,y) = \sum_{a=1}^{12} N_a(x,y) \Delta_a$

در اینجا به ۱۲ تابع شکلی احتیاج است که نیاز به ۱۲ متغیر خواهد بود



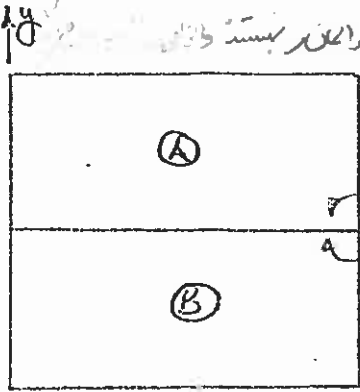
با توجه به اینکه المان مستطین است برای اینکه تغییر مکان روی صولب از درجه ۳ کامل باشد نیاز به انتخاب ۱۴ متغیر می باشد که در این صورت ضروری است المان دارای ۱۶ درجه آزادی باشد. با صرف چهار متغیر $x^2y^2, x^3y^2, x^2y^3, xy^3$ به ۱۴ متغیر به شرح زیر می رسیم

$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3y + \alpha_{12} xy^3$

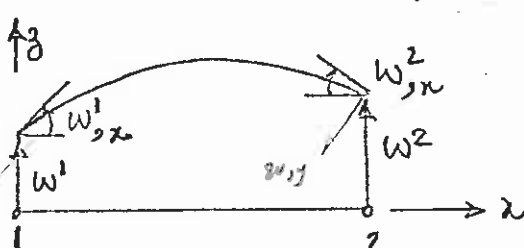
اشکال: شکل این المان $incompatibility$ در $slope$ و $displacement$ بین دو المان می باشد

دایره حجمی و تغییرات Condensation

8/



$y=0$
 Twist
 Twist
 Twist
 $w(x,0) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_4 x^2 + \alpha_7 x^3$
 تغییرات
 مست
 (دولت)



Condensation 12×12 16×16 16×16
 Unique displacement variation
 روی برون

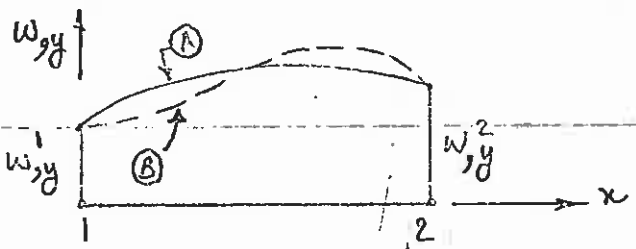
با اعمال w^1, w^2, w^1_x, w^2_x بین دو لایه تابع $w(x,y)$ پارامتری (پارامتری) $w(x,y)$
 دو لایه یک فرامورد. همچنین پیوستگی برای تابع درجه 2. w^1 بین دو لایه موجودی آید.

کنترل پیوستگی (w, w_x)

$w(x,y) = \alpha_3 + \alpha_5 x + \alpha_8 x^2 + \alpha_{11} x^3$

شرط $w^1 = w^2$ و $w^1_x = w^2_x$
 بین دو لایه $w^1 = w^2$
 در $w^1_x = w^2_x$
 در $w^1_x = w^2_x$

یک لایه بین دو لایه تعریف کرد و همین دلیل w^1
 روی لایه دو لایه پیوستگی ندارد و w^1
 در $w^1_x = w^2_x$



برای ایجاد پیوستگی $w^1 = w^2$ ضرورت دارد که
 دارای 4 درجه آزادی باشد.
 درجه آزادی w^1, w^2, w^1_x, w^2_x برای هر یک و در اینجا درجه آزادی w^1, w^2, w^1_x, w^2_x

میدان تابع $w(x,y) = \sum_{i=1}^{12} \alpha_i f_i(x,y)$
 بردار α
 بردار Δ

$w(x,y) = \langle 1 \ x \ y \ \dots \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix} \quad \Delta^a = \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ w \end{Bmatrix}^a \quad \Delta = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix}$

$\Delta = A \alpha \implies \alpha = A^{-1} \Delta \implies w(x,y) = \langle 1 \ x \ y \ \dots \rangle A^{-1} \Delta$

$w(x,y) = \langle N_i \rangle \Delta^i = \sum_{i=1}^{12} N_i \Delta^i$

9/ element stiffness

توجه کنید shear strain $\epsilon_2 = 0$ بنابراین فقط ϵ_1 در نظر داریم

$$\underline{\epsilon}_1 = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \underline{B} \begin{Bmatrix} \phi_{0,x} \\ -\phi_{0,y} \\ \phi_{0,y} - \phi_{0,x} \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \phi_x = w_{,y} \\ \phi_y = -w_{,x} \end{cases}$$

$$\underline{\epsilon}_1 = \underline{B} \begin{Bmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{Bmatrix} = -\underline{B} \underline{C} \underline{\alpha} = -\underline{B} \underline{C} \underline{\alpha}$$

$$\begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix}$$

- α_1
- α_2
- α_3
- α_4
- α_5
- α_6
- α_7
- α_8
- α_9
- α_{10}
- α_{11}
- α_{12}

$$\underline{\epsilon}_1 = -\underline{B} \underline{C} \underline{\alpha} = -\underline{B} \underline{C} \underline{A}^{-1} \underline{\Delta} = \underline{B} \underline{\Delta} \rightarrow \underline{B} = \underline{C} \underline{A}^{-1}$$

$$\underline{K} = \int_0^a \int_0^b \int_{-t/2}^{t/2} \underline{B}^T \underline{E} \underline{B} dz dy dx = \frac{t^3}{12} \int_0^a \int_0^b \underline{A}^{-T} \underline{C}^T \underline{E} \underline{C} \underline{A}^{-1} dy dx$$

$$\underline{K} = \frac{t^3}{12} \underline{A}^{-T} \int_0^a \int_0^b \underline{C}^T \underline{E} \underline{C} dy dx \underline{A}^{-1}$$

برای بیای عمیق فون رانجیم در دو ریزو مائیس کتی 12 x 12 فون برای یک وقت فستیل شکل بدست آورده

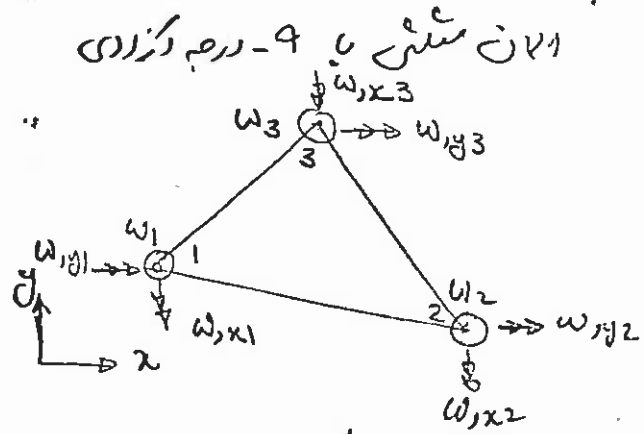
An Introduction to the Finite Element Method using Basic Programs

از آن هم

by D.K. Brown (Surrey University Press)

10/ Triangular Element - Kirchhoff Theory

x linear
 x^2, xy, y^2 Quadratic
 x^3, x^2y, xy^2, y^3 Cubic



بلاکسل درجه ۳ دارای ۹ درجه آزادی است و کلاً ۹ درجه آزادی دارد

$$w = [1, x, y, x^2, y^2, x^2, xy^2, y^3] [a]$$

که در این صورت twist ثابت حذف می شود.

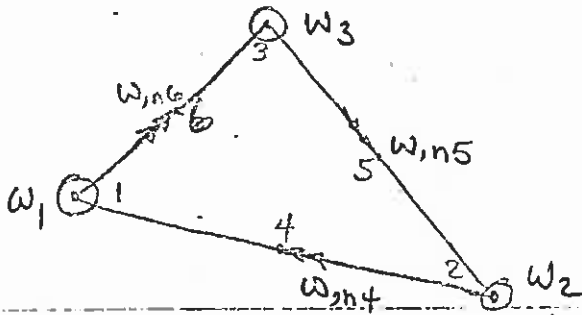
$$w = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y + xy^2, y^3] [a]$$

پیشینه دار (مقاومت)

که در این صورت ۱۱ درجه آزادی برای geometric isotropic نیست و یکی بعضی از S.F. بابت singularity است

و این دلیل لا لاری شکلین ضعیف است.

همچنین پیشینه ری ۱۱ درجه آزادی شکلین متناهی خواهد بود



NODAL LOAD external

$$\{F_n\}^9 = \int_{\Omega} N_a q_e d\Omega + \int_{\Omega} N_{a,x} \bar{M}_x d\Omega + \int_{\Omega} N_{a,y} \bar{M}_y d\Omega + \int_{\Omega} B_a^T D_L K_{od} d\Omega$$

بارهای داخلی در سطح

بارهای خمشی

در صورتی که $q_e = 0$

در داخل domain



بارهای سطحی

کنترل و بارهای سطحی

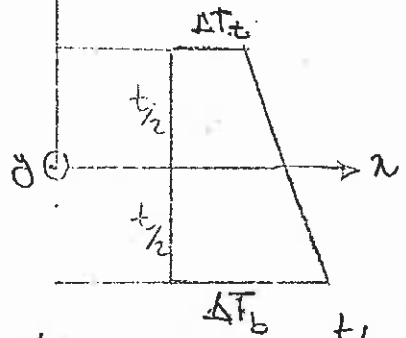
Internal Forces for C'-element

$$\sigma_1 = E_{11} (\epsilon_1 - \epsilon_0)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_1 dz = \int_{-t/2}^{t/2} z E_{11} (\epsilon_1 - \epsilon_0) dz = \int_{-t/2}^{t/2} z E_{11} \left(-z \begin{bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_x \Delta T \\ \alpha_y \Delta T \\ 0 \end{bmatrix} \right) dz$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = -E_{11} \begin{bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{bmatrix} \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz - E_{11} \int_{-t/2}^{t/2} z \Delta T(z) dz \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

در متن اصلی تغییر نشانی است. در اینجا Bending و Torsion



For linear Temperature change $\Delta T(z) = \frac{\Delta T_b - \Delta T_t}{t} z$

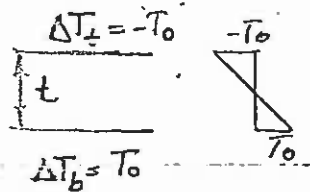
$$\Delta T \triangleq \Delta T_b - \Delta T_t = (T_b - T_0) - (T_t - T_0) = T_b - T_t$$

$$\Delta T \triangleq T_b - T_t \quad \Delta T(z) = -\frac{\Delta T}{t} z$$

$$\int_{-t/2}^{t/2} z \Delta T(z) dz = \int_{-t/2}^{t/2} z \left(-\frac{\Delta T}{t} z \right) dz = -\frac{\Delta T}{t} \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz = -\frac{\Delta T}{t} \times \frac{t^3}{12}$$

$$\underline{M} = -\frac{t^3}{12} E_{11} (\underline{K} - \underline{K}_0) \quad \underline{K} = \begin{bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{bmatrix} = \underline{C} \underline{\Delta} \quad \underline{K}_0 = \frac{\Delta T}{t} \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Delta T = T_b - T_t$$

Example



$$\Delta T = T_0 - (-T_0) = 2T_0$$

$$\underline{K}_0 = \frac{2T_0}{t} \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

معادله ذوق نشان میدهد M_x و $w_{,yy}$ و $w_{,xx}$ در یک خط راستند. $w_{,yy} = \text{constant}$ است. $M_{xy} = M_{yx} = 0$ و $M_y \neq 0$ است. $w_{,xx} = w_{,yy} = 0$ است. $M_x = 0$ است و در اینجا $w_{,xx} \neq 0$ است (در شکل ب).
 در شکل c حالت pure twist نشان داده است.

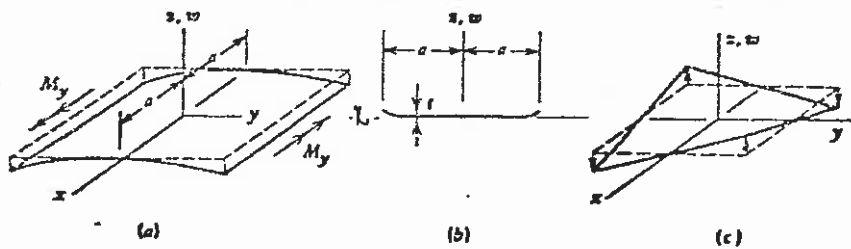


Figure 11.1-4. (a) Bending to a cylindrical surface by moments M_y on the edges $y = \text{constant}$. (b) Cross section cut by the xz plane. (c) The $w = xy$ state of pure twist: $w_{,xx} = w_{,yy} = 0$, $w_{,xy} > 0$.

NODAL LOADS

For Kirchhoff Theory
Uniform Load

with 12-shape functions

$$W = \sum_{a=1}^{12} N_a \cdot \Delta^a$$

$$\{F_a\} = \int_A N_a q(x,y) dA$$

$q(x,y) =$ Distributed uniform load in q direction

توزیع یکنواخت بار در جهت q $w = \sum_{a=1}^{12} N_a \Delta^a$ که در آن w در تغییر مکان شرکت کرده بنابراین دارای مؤلفه های نیرو و همان تناظر بارهاست که از w می آید و w خواهد بود.

for MINDLIN Theory only $w = \sum_{a=1}^{12} N_a \Delta^a$ چون تغییر مکان شامل درجه و فقط Δ^a می باشد

تغییر مکان w تنها به w دارد بنابراین بارگذاری گسترده در جهت q تنها w را تغییر می دهد و بارگذاری عمود بر آن تنها Δ^a و Δ^b را تغییر می دهد و در جهت q بارگذاری عمود بر آن w را تغییر می دهد و در جهت q بارگذاری عمود بر آن w را تغییر می دهد.

Prescribed Boundary Moments

یعنی بزرگه در وسط و خواصم از آنجا با بارگذاری

$\bar{M}_x =$ Prescribed moment about y along y -axis

در آنجا w در جهت q متغیر است

$\bar{M}_y =$ " " " " " x along x -axis

تئوری Mindlin که اگر بارگذاری عمود بر نقطه نرمی

$\bar{M}_{xy} =$ pure twist " " " y along x -axis

محوری تغییر و Bending قابل بررسی می کنند که محاسب

$$\int_{\Gamma} N_{dx} \bar{M}_x dx$$

$$\int_{\Gamma} N_{dy} \bar{M}_y dy$$

$$\int_{\Gamma} N_{dxy} \bar{M}_{xy} dxy$$

محاسبه می شود

Initial curvature

$$\{F_a\} = \int_A \beta^T E K_0 dA = \int_A \beta^T E_{11} K_0 dA$$

همان که در وسط تغییر بارگذاری که در آنجا w در جهت q متغیر است و بارگذاری عمود بر آن w را تغییر می دهد و در جهت q بارگذاری عمود بر آن w را تغییر می دهد.

COOK

10

CHAPTER

SOLIDS OF REVOLUTION

Analysis methods for axially symmetric bodies are described. Loads may be with or without axial symmetry. Loads without axial symmetry are treated by superposition, using Fourier series.

10.1 INTRODUCTION

A solid of revolution is generated by revolving a plane figure about an axis, and is most easily described in cylindrical coordinates r , θ , and z (Fig. 10.1-1). The geometry is axially symmetric, and if material properties and loads are also axially symmetric, the problem is mathematically two-dimensional. That is, if geometry, support conditions, loads $\{R\}$, and material property matrix $[E]$ are all independent of θ , and if the material either is isotropic or has θ as a principal material direction, then static displacements and stresses are independent of θ : circumferential displacement v is zero, material points have only u (radial) and w (axial) displacement components, and the nonzero stresses are those shown in Fig. 10.1-1a. The analysis procedure for static problems having axial symmetry is very similar to the procedure used for static problems of plane stress or plane strain. (In a vibration or buckling problem, symmetric and unsymmetric modes should be expected, even if geometry, support conditions, and elastic properties are all axially symmetric. A vibration or buckling analysis that assumes θ independence would miss all modes that are not axially symmetric.)

If the solid is axially symmetric but the loading is not, displacements and stresses are three-dimensional rather than axially symmetric. A Fourier series method can then be used. The given loading is expressed as the sum of several component loadings, and an analysis is done for each load component. According to the principle of superposition, the original problem is solved by adding the solutions of the component problems. Each component analysis remains mathematically two-dimensional. Thus the original three-dimensional problem is exchanged for a series of two-dimensional problems. The exchange is usually worthwhile because three-dimensional problems are expensive to set up and run.

A finite element model of a solid of revolution has nodal circles rather than nodal points (Fig. 10.1-1). So does a shell of revolution, which is an effective model if the body is thin-walled (Section 12.4). If a body of revolution (having nodal circles) must be attached to a solid body (having nodal points), there is some difficulty in making the connection.

Finite element analysis for axially symmetric solids was first published in 1965 [10.1]. Computer programs are readily available [10.2]. Indeed, minor additions



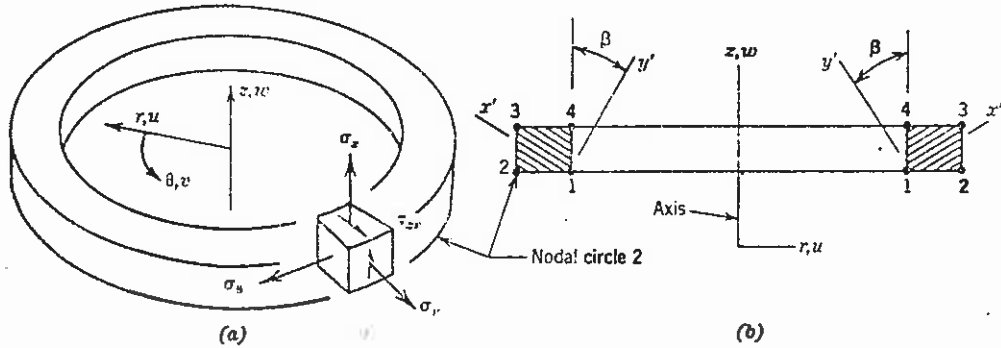


Figure 10.1-1. An axially symmetric finite element of rectangular cross section. (a) Isometric view, showing stresses produced by axially symmetric loading. (b) Cross section containing the z axis. Hatching suggests an orthotropic material whose principal directions are x' , y' , and θ .

to a program for plane problems makes the program capable of analyzing solids of revolution as well.

10.2 ELASTICITY RELATIONS FOR AXIAL SYMMETRY

If the analysis problem is axially symmetric, then (see Fig. 10.1-1)

$$v = 0 \text{ and } \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = 0 \quad (10.2-1)$$

Equations 10.2-1 prevail if geometry, support conditions, and loading are all axially symmetric, θ is a principal material direction, and β in Fig. 10.1-1b is independent of θ . Thus the material may be isotropic. Or, if orthotropic, principal material axes x' and y' must not change direction with θ , and the third principal material axis must not form a helix. Accordingly, the most general stress-strain relation allowed has the form

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{zr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} \\ & E_{22} & E_{23} & E_{24} \\ & & E_{33} & E_{34} \\ \text{symm.} & & & E_{44} \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{zr} \end{Bmatrix} - \{\epsilon_0\} \right) \quad (10.2-2)$$

in which $\{\epsilon_0\}$ represents initial strains, and the trivial relations $\tau_{r\theta} = 0$ and $\tau_{\theta z} = 0$ are simply not written. If, in addition to θ , r and z are also principal material directions ($\beta = 0$ in Fig. 10.1-1), then $E_{14} = E_{24} = E_{34} = 0$. For the special case of isotropy and thermal loading, Eq. 10.2-2 becomes

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{zr} \end{Bmatrix} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu & 0 \\ & 1 & \nu & 0 \\ & & 1 & 0 \\ \text{symm.} & & & g \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{zr} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha T \\ \alpha T \\ \alpha T \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \quad (10.2-3a)$$

in which

$$f = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad \text{and} \quad g = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \quad (10.2-3b)$$

and α = coefficient of thermal expansion and T = temperature relative to a reference temperature at which the body is free of stress. Thus $E_{44} = G$, the shear modulus.

The strain-displacement relations are

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= u_{,r} & \epsilon_\theta &= \frac{2\pi(r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r} \\ \epsilon_z &= w_{,z} & \gamma_{zr} &= u_{,z} + w_{,r} \end{aligned} \quad (10.2-4)$$

In matrix format, Eqs. 10.2-4 are

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{zr} \end{Bmatrix} = [d] \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}, \quad \text{where } [d] = \begin{bmatrix} \partial/\partial r & 0 \\ 1/r & 0 \\ 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial z & \partial/\partial r \end{bmatrix} \quad (10.2-5)$$

Or, in alternative format, the same relations are

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{zr} \end{Bmatrix} = [H] \begin{Bmatrix} u_{,r} \\ u_{,z} \\ w_{,r} \\ w_{,z} \\ u \end{Bmatrix}, \quad \text{where } [H] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/r \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.2-6)$$

10.3 FINITE ELEMENTS FOR AXIAL SYMMETRY

One may follow the standard formulation procedure, which is contained in Eqs. 4.1-5 and 4.1-6. Consider, for example, an eight-d.o.f. element of rectangular cross section, shown in Fig. 10.3-1. Its displacement field $\{u\} = [N]\{d\}$ is

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_4 \end{Bmatrix} \quad (10.3-1)$$

where shape functions N_1 through N_4 are stated in Eq. 3.12-10, except that z replaces y and $r - r_m$ replaces x , where r_m is the mean radius $(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)/4$. Thus

$$N_i = \frac{[a \pm (r - r_m)](b \pm z)}{4ab} \quad (10.3-2)$$

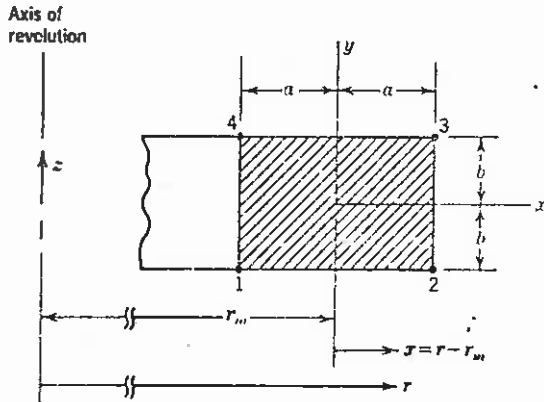


Figure 10.3-1. Geometry of an element of rectangular cross section.

in which $z = 0$ at the element center. The element stiffness matrix is

$$[k]_{8 \times 8} = \int_A \int_{-\pi}^{\pi} [B]^T [E] [B] r d\theta dA \quad (10.3-3)$$

where A = cross-sectional area of the element and $dA = dr dz$. From Eqs. 10.2-5 and 10.3-1, $[B] = [\partial][N]$. However, since $\partial/\partial r = \partial/\partial x$ and $r = r_m + x$, we can also write

$$[B] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 1/(r_m + x) & 0 \\ 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial z & \partial/\partial x \end{bmatrix} [N], \quad \text{where } N_i = \frac{(a \pm x)(b \pm z)}{4ab} \quad (10.3-4)$$

and where $x = 0$ at $r = r_m$, the element center.

Equation 10.3-4 yields the same $[B]$ as does $[B] = [\partial][N]$ with the N_i given by Eq. 10.3-2. Equation 10.3-4 shows that, as compared with a plane problem, the *only change* in $[B]$ is the added row that computes $\epsilon_\theta = u/r$ (compare Eqs. 10.3-4 and 4.2-14). Moreover, $[k]$ is the same size; for example, it is 8-by-8 for the foregoing four-node bilinear element, whether the problem is plane or axially symmetric.

If the element is isoparametric, shape functions N_i are functions of ξ and η , and we must use the usual coordinate transformation to relate derivatives,

$$\begin{bmatrix} u_{,r} \\ u_{,z} \\ w_{,r} \\ w_{,z} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma \\ 3 \times 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ u \end{bmatrix}, \quad \text{where } [\Gamma] = \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & J^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.3-5)$$

Jacobian matrix $[J]$ is unchanged: it is still 2 by 2 and is as described in Section 6.3. The ξ and η derivatives in Eq. 10.3-5 are related to nodal d.o.f. by the equation

$$[u_{,\xi} \ u_{,\eta} \ w_{,\xi} \ w_{,\eta} \ u]^T = \begin{bmatrix} Q \\ 5 \times 8 \end{bmatrix} [u_1 \ w_1 \ u_2 \ \dots \ w_4]^T \quad (10.3-6)$$

91

The first four rows of $[Q]$ appear in Eq. 6.3-19. The fifth row is $[N_1 \ 0 \ N_2 \ 0 \ N_3 \ 0 \ N_4 \ 0]$. Shape functions N_i of a four-node isoparametric element are given by Eqs. 6.3-2. From Eqs. 10.2-6, 10.3-5, and 10.3-6, $[B] = [H][\Gamma][Q]$. The element stiffness matrix of an isoparametric element is

$$[k] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-\pi}^{\pi} [B]^T [E] [B] r \, d\theta \, J \, d\xi \, d\eta \quad (10.3-7)$$

where

$$r = \sum N_i r_i \quad \text{or} \quad r = r_m + \sum N_i x_i \quad (10.3-8)$$

In numerical integration, either of Eqs. 10.3-8 may be used to determine r at quadrature points.

Element nodal loads $\{r_e\}$ —for example, from heating or from centrifugal force—are calculated in straightforward fashion from Eq. 4.1-6. Here $dV = r \, d\theta \, dA$ or $dV = r \, d\theta \, J \, d\xi \, d\eta$, and $dS = r \, d\theta \, d\ell$, where $d\ell$ is an increment of meridional length.

A uniform line load q (units N/m) on a nodal circle of radius r_i produces the nodal load $2\pi r_i q$. The net static force is also $2\pi r_i q$ if q acts axially, but is zero if q acts radially. Nevertheless, radial load q produces deformations and stresses.

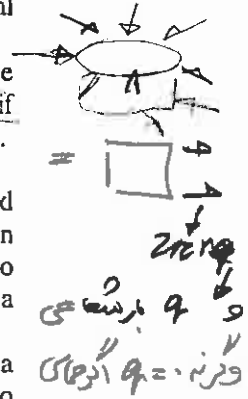
Remarks. The preceding formulation produces 2π as a multiplier of every K_{ij} and every R_i in the structural equations $[K]\{D\} = \{R\}$. This superfluous multiplier can be avoided by letting integrals for $[k]$ and $\{r_e\}$ have theta limits of from zero to one radian. With this approach, externally applied loads must also pertain to a one-radian segment.

Some coefficients in the integrands of Eqs. 10.3-3 and 10.3-7 have $1/r$ as a multiplier. With Gauss quadrature these terms remain finite because there are no Gauss points at $r = 0$. If $[k]$ is formed explicitly, we can produce "core" elements by using a displacement field for which $u = 0$ for $r = 0$ and evaluating indeterminate forms $0/0$ that appear in the formulation by the L'Hôpital rule. If numerical integration is used instead, for acceptable accuracy core elements may require more integration points in the radial direction than are used for elements distant from the axis of revolution.

During stress computation, the indeterminate form $\epsilon_\theta = u/r = 0/0$ arises for points on the z axis. We can avoid this trouble by calculating ϵ_θ slightly away from the axis or by extrapolating strains at Gauss points to the axis. Another option is to exploit the theoretical requirement that $\epsilon_r = \epsilon_\theta$ at $r = 0$. Thus, for stress computation at $r = 0$, we merely replace the ϵ_θ row of $[B]$ by the ϵ_r row.

Because of axial symmetry, z -direction translation is the only possible rigid-body motion. It can be restrained by prescribing w on a single nodal circle. The radial displacement $u = 0$ should be prescribed at all nodes that lie on the z axis.

Valid elements for solids of revolution must pass a weak patch test (see Section 4.6). Consider, for example, elements Q6 and QM6 (Section 8.3). These elements develop a spurious radial bulge because internal d.o.f. are activated. The bulge creates spurious shear strain γ_{rz} , except at $\xi = \eta = 0$. Nevertheless, the element is valid because the bulge tends to vanish as element cross-sectional dimensions become small in comparison with the mean radius of the element. In general use,



stresses predicted by the QM6 element may be more reliable if γ_{xy} is evaluated only at $\xi = \eta = 0$.

10.4 FOURIER SERIES

The response of an axially symmetric body to asymmetric loads can be analyzed by superposing component analyses, each of which represents the response attributable to one component of the total load. The method relies on Fourier series, which is summarized as follows without reference to bodies of revolution.

Fourier series represent functions that are periodic. A Fourier series for a dependent variable $\phi = \phi(\theta)$ can be written

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin n\theta \quad (10.4-1)$$

where n is an integer. The period of ϕ is 2π , for example, from $\theta = -\pi$ to $\theta = \pi$.

سود
ج. 2) Sine terms are called *odd* or *antisymmetric*, as $\phi(\theta) = -\phi(-\theta)$. Cosine terms are called *even* or *symmetric*, as $\phi(\theta) = \phi(-\theta)$. Coefficients p_n and q_n are functions of n but not of θ . The following integrals, where m and n are integers, are useful:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta \sin n\theta \, d\theta = \begin{cases} \pi & \text{for } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{for } m \neq n \text{ and for } m = n = 0 \end{cases} \quad (10.4-2a)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta \, d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{for } m = n = 0 \\ \pi & \text{for } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{for } m \neq n \end{cases} \quad (10.4-2b)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin m\theta \cos n\theta \, d\theta = 0 \quad \text{for all } m \text{ and } n \quad (10.4-2c)$$

Imagine that a certain periodic function $\phi = \phi(\theta)$ is known, but not expressed as a Fourier series. An equivalent Fourier series representation of ϕ requires that p_n and q_n in Eq. 10.4-1 be determined. To do so, we integrate the function, then multiply it by the single term $\cos n\theta$ and integrate, then multiply it by the single term $\sin n\theta$ and integrate. Equation 10.4-1 is similarly integrated, making use of Eqs. 10.4-2. Thus equations that determine p_0 , p_n , and q_n are

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi \, d\theta = 2\pi p_0 \quad \int_{-\pi}^{\pi} \phi \cos n\theta \, d\theta = \pi p_n \quad \int_{-\pi}^{\pi} \phi \sin n\theta \, d\theta = \pi q_n \quad (10.4-3)$$

Integrals in Eq. 10.4-3 may be evaluated analytically, numerically, or even graphically.

Example. The square wave in Fig. 10.4-1 is to be represented by a Fourier series. Here $\theta = \pi x/L$, and $\phi = \phi_0$ can be regarded as a uniformly distributed load of intensity ϕ_0 on a span of length L . In Eqs. 10.4-3 we use $\phi = -\phi_0$ for $-L < x < 0$ and $\phi = +\phi_0$

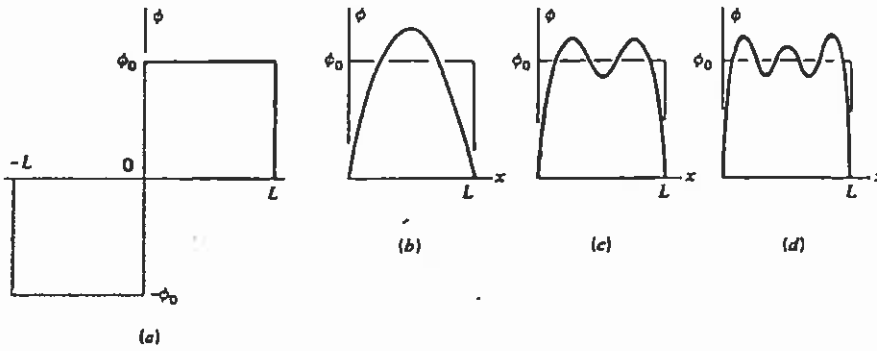


Figure 10.4-1. (a) Square wave and its representation by truncated Fourier series, using terms (b) $n = 1$, (c) $n = 1$ and 3, and (d) $n = 1, 3$, and 5.

for $0 < x < L$. Results of the respective integrations in Eq. 10.4-3 are 0, 0, and 0 (n even) or $4\phi_0/n$ (n odd). Hence, $p_0 = 0$, $p_n = 0$, and $q_n = 0$ (n even). For n odd,

$$q_n = \frac{4\phi_0}{n\pi} \quad \text{and} \quad \phi = \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4\phi_0}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (10.4-4)$$

As suggested by Fig. 10.4-1, the square wave can be modeled arbitrarily closely by using enough series terms.



Example. Concentrated loads P produce an interesting result. In the coordinates of Fig. 10.4-1a, consider a load P downward at $x = -L/2$ and a load P upward at $x = +L/2$. Here $\theta = \pi x/L$, and P can be regarded as a concentrated center load on a beam that extends from $x = 0$ to $x = L$. Equations 10.4-3 yield $p_0 = 0$, $p_n = 0$, and

$$q_n = \frac{2P}{L} \sin \frac{n\pi}{2} \quad \phi = \sum_{n=1,2,3,\dots} \left(\frac{2P}{L} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (10.4-5)$$

This series for ϕ does not converge. However, when used to load the aforementioned beam, convergent results are obtained for displacement and stress.

A Simple Application in Stress Analysis. The beam problem depicted in Fig. 10.4-2 illustrates features of series analysis that also appear in series analysis of solids (and shells) of revolution. For a beam, the equilibrium and moment-curvature relations are

$$V_{,x} = \phi \quad M_{,x} = V \quad EIw_{,xx} = M \quad (10.4-6)$$

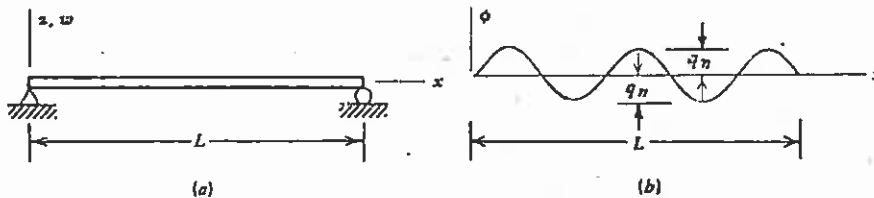


Figure 10.4-2. (a) Simply supported beam. (b) The sine wave loading $\phi = q_n \sin(n\pi x/L)$, where q_n is the amplitude of ϕ . The case $n = 5$ is depicted.

$$q_n = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \phi \sin n\tau \, d\tau}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 n\tau \, d\tau} = \frac{2P}{L} \sin \frac{n\pi}{2} \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \phi \sin n\tau \, d\tau = \frac{2P}{L} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi \sin n\tau \, d\tau = \left[-\frac{\phi \cos n\tau}{n} - \frac{\int \phi' \cos n\tau \, d\tau}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 2P \phi$$

9K

where V is transverse shear force, M is bending moment, and ϕ is distributed load. When combined, Eqs. 10.4-6 yield, for constant bending stiffness EI ,

$$EIw_{xxxx} = \phi \quad (10.4-7)$$

Consider the loading of Fig. 10.4-2b, which corresponds to one term of the second summation in the Fourier series of Eq. 10.4-1:

$$\phi = q_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (10.4-8)$$

Here q_n does not depend on x . Assume that the displacement is the admissible function

$$w = w_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (10.4-9)$$

where w_n does not depend on x . We substitute w and ϕ into Eq. 10.4-7 and obtain

$$\left[EI \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 w_n - q_n \right] \sin \frac{n\pi x}{L} = 0 \quad (10.4-10)$$

This can be true for all x only if the bracketed expression vanishes. Hence

$$w_n = \frac{q_n}{EI} \left(\frac{L}{n\pi} \right)^4 \quad (10.4-11)$$

Substitution of Eq. 10.4-11 into Eq. 10.4-9 defines the correct and unique solution for w , since it satisfies all requirements of equilibrium, compatibility, and boundary conditions (Section 1.6). Note that a sine wave of loading produces corresponding sine waves of deflection and bending moment, regardless of n . That is, the various harmonics are uncoupled—the n th wave does not interact with the m th wave.

Now that w_n is known, Eq. 10.4-9 defines w for any x and for any n . If two or more sine wave loadings act simultaneously, each associated with a different n , the net deflection and the net bending moment are determined by superposition; that is,

$$w = \sum_n q_n \frac{L^4}{EI n^4 \pi^4} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{and} \quad M = - \sum_n q_n \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (10.4-12)$$

where $M = EIw_{xx}$. A particular loading requires a particular q_n . For example, to analyze the effect of a uniformly distributed loading of intensity ϕ_0 , we substitute $q_n = 4\phi_0/n\pi$ from Eq. 10.4-4 into Eqs. 10.4-12. For a concentrated load at mid-span, we substitute q_n from Eq. 10.4-5.

What we have done is find the response of the beam to a single load component from a single equation (Eq. 10.4-11) that says nothing about how w varies with x . We pay for this simplicity by having to solve the equation several times, once for each Fourier component of loading.

In dealing with bodies of revolution, we replace Eq. 10.4-11 by a set of simultaneous algebraic equations, which must be solved for each Fourier component of loading.

10.5 LOADS WITHOUT AXIAL SYMMETRY: INTRODUCTION

In solids (and shells) of revolution under loads without axial symmetry, we can arrange to compute structural response to each Fourier harmonic of loading from a set of comparatively simple equations that makes no reference to how deformations vary with circumferential coordinate θ . This set of equations must be solved several times, once for each harmonic of loading. Response attributable to the given loading is found by superposing the separate analyses and, in general, displays deformations that vary with θ as well as with r and z . The superposition method is much less expensive than a single three-dimensional analysis if only a few Fourier harmonics are needed to represent the load. As examples, wind loading requires few harmonics but a concentrated force requires many.

With θ a principal material direction, the most general stress-strain relation $\{\sigma\} = [E]\{\epsilon\}$ has the form

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{zr} \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta z} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & 0 & 0 \\ & E_{22} & E_{23} & E_{24} & 0 & 0 \\ & & E_{33} & E_{34} & 0 & 0 \\ & & & E_{44} & 0 & 0 \\ \text{symmetric} & & & & E_{55} & E_{56} \\ & & & & & E_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{zr} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{\theta z} \end{pmatrix} \quad (10.5-1)$$

If r and z are also principal material directions, or if the material is isotropic, then $E_{14} = E_{24} = E_{34} = E_{56} = 0$. If the material is isotropic, one uses Eq. 10.2-3 and the values $E_{44} = E_{55} = E_{66} = G$, where G is the shear modulus, $G = 0.5 E/(1 + \nu)$.

Let loading of the body be expressed as Fourier series: for example, the radially directed body force is $F_r = \sum \bar{F}_{rn} \cos n\theta$, where \bar{F}_{rn} is an amplitude, like p_n in Eq. 10.4-1. Thus

$$[F_r \ F_z \ \Phi_r \ \Phi_z \ T] = \sum_n [\bar{F}_{rn} \ \bar{F}_{zn} \ \bar{\Phi}_{rn} \ \bar{\Phi}_{zn} \ \bar{T}_n] \cos n\theta \quad (10.5-2a)$$

$$[F_\theta \ \Phi_\theta] = \sum_n [\bar{F}_{\theta n} \ \bar{\Phi}_{\theta n}] \sin n\theta \quad (10.5-2b)$$

where T is temperature, and the F 's and Φ 's are, respectively, body forces per unit volume and surface tractions in the r , θ , and z directions. Equations 10.5-2 represent a state of symmetry with respect to the plane $\theta = 0$ (antisymmetric Fourier terms are considered subsequently).

We will show that when loads are described by Eqs. 10.5-2, displacements are described by

$$\text{Radial displacement} = u = \sum_n \bar{u}_n \cos n\theta \quad (10.5-3a)$$

$$\text{Circumferential displacement} = v = \sum_n \bar{v}_n \sin n\theta \quad (10.5-3b)$$

$$\text{Axial displacement} = w = \sum_n \bar{w}_n \cos n\theta \quad (10.5-3c)$$

All three displacements are needed because the physical problem is three-dimensional. In Eqs. 10.5-2 and 10.5-3, n is an integer, and all barred quantities are functions of r , z , and n but not of θ . Thus the barred terms are amplitudes.

The strain-displacement relations in cylindrical coordinates are $\{\epsilon\} = \{\partial\}\{u\}$; that is,

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{zr} \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial r & 0 & 0 \\ 1/r & \partial/(r \partial \theta) & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial r \\ \partial/(r \partial \theta) & (\partial/\partial r - 1/r) & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/(r \partial \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (10.5-4)$$

These relations are independent of material properties and of whether or not u , v , and w are described by series.

Consider now a typical single harmonic of displacement, say the n th. If we substitute Eqs. 10.5-3 into Eq. 10.5-4 and the resulting strains into Eq. 10.5-1, we find that stresses of the n th harmonic have the form

$$[\sigma_{rn} \quad \sigma_{\theta n} \quad \sigma_{zn} \quad \tau_{zrn}] = [\bar{\sigma}_{rn} \quad \bar{\sigma}_{\theta n} \quad \bar{\sigma}_{zn} \quad \bar{\tau}_{zrn}] \cos n\theta \quad (10.5-5a)$$

$$[\tau_{r\theta n} \quad \tau_{\theta zn}] = [\bar{\tau}_{r\theta n} \quad \bar{\tau}_{\theta zn}] \sin n\theta \quad (10.5-5b)$$

where the barred quantities are functions of r , z , and n but not of θ . If Eqs. 10.5-2 and 10.5-5 are substituted into the three differential equations of equilibrium, Eqs. 1.6-4, we find that these three equations assume the forms

$$Q_1 \cos n\theta = 0 \quad Q_2 \cos n\theta = 0 \quad Q_3 \sin n\theta = 0 \quad (10.5-6)$$

where the Q_i are functions of r , z , and n but not of θ . Equations 10.5-6 are analogous to Eq. 10.4-10. Equations 10.5-6 must prevail for all θ , so $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$. As will be seen in Section 10.6, in a finite element context the equations $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 0$ produce the equilibrium equations of the n th harmonic

$$[K]_n \{D\}_n - \{R\}_n = \{0\} \quad (10.5-7)$$

Equations 10.5-7 are analogous to Eq. 10.4-11. Their solution yields the nodal d.o.f. $\{D\}_n = [\bar{u}_{1n} \quad \bar{v}_{1n} \quad \bar{w}_{1n} \quad \bar{u}_{2n} \dots]^T$, which are displacement amplitudes of the nodal circles in the n th harmonic. Matrix $[K]_n$ depends on n . The load coefficients in $\{R\}_n$ correspond to the q_n of Eq. 10.4-1.

We see that n circumferential waves of loading are associated with n circumferential waves of stress and of displacement. *The Fourier harmonics are not coupled.* Different numerical values of n present different problems that do not interact. Thus the need for a division into finite elements in the circumferential direction is replaced by the need to superpose separate solutions for a structure divided into finite elements in only its cross section. A single mesh is used for all the separate solutions. In most practical problems only a few load harmonics need be analyzed. A computer program can automatically cycle through a user-specified number of harmonics and superpose the separate solutions.

Remarks. The preceding discussion invokes only loads and displacements that have $\theta = 0$ as a plane of symmetry. In general, antisymmetric terms are also present. Thus Eqs. 10.5-2 are augmented to read

$$[F_r \quad F_z \quad \Phi_r \quad \Phi_z \quad T] = \sum_n [\bar{L}_{cn}] \cos n\theta + \sum_n [\bar{L}_{sn}] \sin n\theta \quad (10.5-8a)$$

$$[F_\theta \quad \Phi_\theta] = \sum_n [\bar{L}_{sn}] \sin n\theta + \sum_n [\bar{L}_{cn}] \cos n\theta \quad (10.5-8b)$$

where $[\bar{L}_{cn}]$ and $[\bar{L}_{sn}]$ represent the symmetric load amplitudes, already present in Eqs. 10.5-2, and $[\bar{L}_{sn}]$ and $[\bar{L}_{cn}]$ represent additional antisymmetric load amplitudes. Similarly, the symmetric displacement field, Eqs. 10.5-3, is augmented by antisymmetric terms and becomes

$$u = \sum_n \bar{u}_n \cos n\theta + \sum_n \bar{u}_n \sin n\theta \quad (10.5-9a)$$

$$v = \sum_n \bar{v}_n \sin n\theta - \sum_n \bar{v}_n \cos n\theta \quad (10.5-9b)$$

$$w = \sum_n \bar{w}_n \cos n\theta + \sum_n \bar{w}_n \sin n\theta \quad (10.5-9c)$$

The motivation for the arbitrarily chosen negative sign in the v series is explained in the subsection that follows Eq. 10.6-9.

Axially symmetric problems are represented by the $n = 0$ terms of the single-barred series. For $n = 1, 2, 3, \dots$, loads and displacements of the single-barred series represent symmetry about the plane $\theta = 0$. For $n = 0, 2, 4, 6, \dots$, loads and deformations have both $\theta = 0$ and $\theta = \pi/2$ as planes of symmetry. Example symmetric loads appear in Fig. 10.5-1c.

Antisymmetric problems (e.g., Fig. 10.5-1f) are represented by the double-barred series. Pure torque is represented by the $n = 0$ terms of the double-barred series. Thus, for example, we can study the twist of shafts of variable diameter. In the torsion problem u and w are everywhere zero, so a finite element solution based on a stress function is also possible [10.3].

When $n = 0$, for any node i , nodal d.o.f. \bar{v}_{ni} , \bar{u}_{ni} , and \bar{w}_{ni} have no stiffness associated with them, so these d.o.f. must be suppressed to avoid a singular stiffness matrix.

The simplest displacement boundary condition is zero displacement on a nodal circle. This requires that displacement amplitudes on the circle be zero in every harmonic. If loads are symmetric about both the $\theta = 0$ and $\theta = \pi/2$ planes, then u and v are zero at $r = 0$ in all harmonics. Nonzero and asymmetric displacement conditions can be represented as Fourier series and the separate amplitude coefficients used as prescribed displacements in the separate analyses.

Additional constraints on the Fourier displacement amplitudes can be deduced from the condition that strains remain finite at $r = 0$ [10.4]. If these constraints are not imposed, numerical integration makes some stiffness coefficients significantly larger than others. This circumstance is not likely to be troublesome in static analysis, but it may require a very small time step if explicit integration is applied to transient problems.

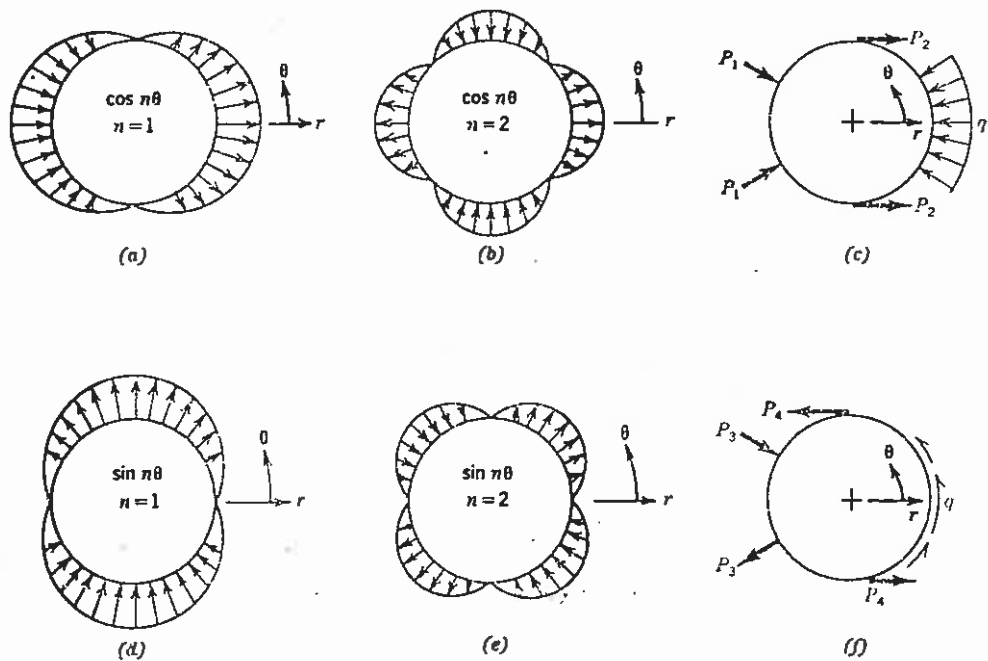


Figure 10.5-1. (a,b) Example cosine terms. (c) Possible symmetric loads in an $r\theta$ plane. (d,e) Example sine terms. (f) Possible antisymmetric loads in an $r\theta$ plane.

10.6 LOADS WITHOUT AXIAL SYMMETRY: ELEMENT MATRICES

Within an element, one can interpolate amplitudes \bar{u}_n , \bar{v}_n , and \bar{w}_n of Eqs. 10.5-3 from nodal amplitudes \bar{u}_{in} , \bar{v}_{in} , and \bar{w}_{in} . Consider, for example, the four-node element in Fig. 10.1-1b. Displacement amplitudes $\{\bar{u}\}_n$ in harmonic n are $\{\bar{u}\}_n = [\bar{N}]\{\bar{d}\}_n$, in which nodal displacement amplitudes $\{\bar{d}\}_n$ pertain to the n th harmonic and are independent of θ . Written out, this relation is

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_n \\ \bar{v}_n \\ \bar{w}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & \dots \end{bmatrix} \{\bar{d}\}_n \quad (10.6-1a)$$

in which element nodal displacement amplitudes are

$$\{\bar{d}\}_n = [\bar{w}_{1n} \ \bar{v}_{1n} \ \bar{w}_{1n} \ \bar{u}_{2n} \ \bar{v}_{2n} \ \bar{w}_{2n} \ \dots]^T \quad (10.6-1b)$$

For a rectangular four-node element, shape functions N_i are as stated in Eq. 10.3-2 (or in Eq. 10.3-4). For an isoparametric four-node element, shape functions N_i are as stated in Eqs. 6.3-2. An element with more nodes will display more partitions in Eq. 10.6-1a and more nodal amplitudes in Eq. 10.6-1b. The same shape functions N_i can be used for all harmonics.

The same interpolation is used for the double-barred series in Eqs. 10.5-9: thus, in Eqs. 10.6-1, single-barred quantities become double-barred quantities. In what follows we discuss the single-barred series. The double-barred series is treated similarly.

Summation of the various Fourier harmonics yields displacements in an element is stated by Eqs. 10.5-3. This same displacement field can be written in matrix format by attaching $\cos n\theta$ to rows 1 and 3 in Eq. 10.6-1a and $\sin n\theta$ to row 2, then summing the various harmonics. Thus

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_n \begin{Bmatrix} \bar{u}_n \cos n\theta \\ \bar{v}_n \sin n\theta \\ \bar{w}_n \cos n\theta \end{Bmatrix} = \sum_n \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 \cos n\theta & 0 & 0 & \dots \\ 0 & N_1 \sin n\theta & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N_1 \cos n\theta & \dots \end{bmatrix}}_{[N]_n} \{\bar{d}\}_n \quad (10.6-2)$$

or, with the summation written out,

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \underbrace{[N_{n=0} \quad N_{n=1} \quad N_{n=2} \quad \dots]}_{[N]} \{\bar{d}\} \quad (10.6-3a)$$

in which $\{\bar{d}\}$ lists amplitudes from all harmonics, that is,

$$\{\bar{d}\} = [\{\bar{d}\}_{n=0} \quad \{\bar{d}\}_{n=1} \quad \{\bar{d}\}_{n=2} \quad \dots]^T \quad (10.6-3b)$$

Note that $[N]_n$ depends on n only because of the $\cos n\theta$ and $\sin n\theta$ terms. By applying the operator matrix $[\partial]$ in Eq. 10.5-4, one obtains the strain-displacement relation:

$$\{\epsilon\} = [\partial] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \underbrace{[\partial][N_{n=0} \quad N_{n=1} \quad N_{n=2} \quad \dots]}_{[B] = [B_{n=0} \quad B_{n=1} \quad \dots]} \{\bar{d}\} \quad (10.6-4)$$

For example, one determines that the contribution of the n th harmonic to strains, $\{\epsilon\}_n = [B]_n \{d\}_n$, is

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{zr\theta} \\ \gamma_{r\theta z} \\ \gamma_{\theta zr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,r} \cos n\theta & 0 & 0 & \dots \\ \frac{N_1}{r} \cos n\theta & \frac{nN_1}{r} \cos n\theta & 0 & \dots \\ 0 & 0 & N_{1,z} \cos n\theta & \dots \\ N_{1,z} \cos n\theta & 0 & N_{1,r} \cos n\theta & \dots \\ -\frac{nN_1}{r} \sin n\theta & \left(N_{1,r} - \frac{N_1}{r}\right) \sin n\theta & 0 & \dots \\ 0 & N_{1,z} \sin n\theta & -\frac{nN_1}{r} \sin n\theta & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{1n} \\ \bar{v}_{1n} \\ \bar{w}_{1n} \\ \bar{u}_{2n} \\ \bar{v}_{2n} \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

100

where the partitioning corresponds to that used in Eq. 10.6-1a. If the element is isoparametric, the usual transformation of derivatives must be included (see e.g. Eq. 6.3-7):

$$N_{i,r} = \Gamma_{11}N_{i,\xi} + \Gamma_{12}N_{i,\eta} \quad \text{and} \quad N_{i,z} = \Gamma_{21}N_{i,\xi} + \Gamma_{22}N_{i,\eta} \quad (10.6-6)$$

Shape functions N_i depend on r and z . Therefore, we see from Eq. 10.6-5 that $[B]$ is a function of r , z , n , and θ . The element stiffness matrix is given by Eq. 10.3-3 or Eq. 10.3-7. Let there be J nodes per element and M harmonics included in the summation. Then the integrand matrix $[B]^T[E][B]$ is a full matrix of size $3JM$ by $3JM$. It is composed of an M by M array of $3J$ by $3J$ submatrices. The off-diagonal submatrices contain $\sin m\theta \sin n\theta$ or $\cos m\theta \cos n\theta$ in every term, where m and n are different integers. According to Eqs. 10.4-2, these terms integrate to zero. We are left with only M on-diagonal submatrices, each $3J$ by $3J$ and containing $\sin^2 n\theta$ or $\cos^2 n\theta$ in every term. After integration according to Eqs. 10.4-2, the common factor π (or 2π for $n = 0$) appears in every term. Integration with respect to r and z (or ξ and η) is done as though the problem were axially symmetric. After integration is complete, terms in each $3J$ by $3J$ submatrix have the form $A + Bn^2$ or the form Cn , where A , B , and C depend on material properties and element geometry but are independent of n and θ . Accordingly, the various expressions here symbolized by A , B , and C need be generated only once, regardless of the number of harmonics used. Element equations, and structural equations after assembly of elements, have the respective forms

$$\begin{bmatrix} k_0 & & & \\ & k_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{d}_0 \\ \bar{d}_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{r}_0 \\ \bar{r}_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} K_0 & & & \\ & K_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{D}_0 \\ \bar{D}_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_0 \\ \bar{R}_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (10.6-7)$$

where each $[k]_n$ is of size $3J$ by $3J$, and subscripts 0, 1, and so on indicate the number of the Fourier harmonic. *The M separate harmonics are not coupled.* In practice, matrices are not built for all harmonics at once (as Eqs. 10.6-7 seem to imply). Instead, as suggested by Eq. 10.5-7, separate harmonics of loading are analyzed serially, with results stored for subsequent superposition.

Element loads (Eq. 4.1-6) include contributions such as

$$\{r\} = \int_{V_e} [N]^T \{F\} dV + \int_{V_e} [B]^T [E] \{\epsilon_0\} dV \quad (10.6-8)$$

where $[N]$ and $[B]$ are given by Eqs. 10.6-3a and 10.6-4. Body forces $\{F\}$ are, from Eq. 10.5-8,

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_{r0} + \bar{F}_{r1} \cos \theta + \bar{F}_{r2} \cos 2\theta + \cdots \\ 0 + \bar{F}_{\theta 1} \sin \theta + \bar{F}_{\theta 2} \sin 2\theta + \cdots \\ \bar{F}_{z0} + \bar{F}_{z1} \cos \theta + \bar{F}_{z2} \cos 2\theta + \cdots \end{Bmatrix} \quad (10.6-9)$$

10.101

Initial strains $\{\epsilon_0\}$ are written similarly. Integration of Eq. 10.6-8 according to Eqs. 10.4-2 shows that $\{\bar{r}\}_0$ in Eq. 10.6-7 contains only the zero-harmonic (axially symmetric) load terms, $\{\bar{r}\}_1$ contains only the first-harmonic load terms, and so on. Thus again we see the uncoupling of harmonics.

In the pure torsion harmonic $n = 0$, nodal d.o.f. \bar{u}_{ni} and \bar{w}_{ni} have no stiffness associated with them. In the axially symmetric harmonic $n = 0$, nodal d.o.f. \bar{v}_{ni} have no stiffness associated with them. These d.o.f. must be suppressed in Eqs. 10.6-7.

Stresses in an element are computed in the usual way, that is, by the equation $\{\sigma\} = [E]([B]\{d\} - \{\epsilon_0\})$, in which $[B]$ is as stated in Eq. 10.6-4. Thus stresses from the various harmonics are superposed.

Antisymmetric Harmonics. When the double-barred terms in Eqs. 10.5-8 and 10.5-9 are used, the preceding arguments are almost unchanged. One finds that $\sin n\theta$ and $\cos n\theta$ are interchanged in Eqs. 10.6-2, 10.6-5, and 10.6-9. In addition, algebraic signs change in the last two rows of $[B]_n$ in Eq. 10.6-5. However, one finds that stiffness matrices $[k]_0$, $[k]_1$, and so on, in Eq. 10.6-7 are *identical* to those obtained in the symmetric case. This convenience is the motivation for the arbitrarily chosen negative sign in Eqs. 10.5-9: if the sign were positive instead, the $[k]_i$ for a given i would differ between symmetric and antisymmetric cases.

More General Elastic Properties. If θ is not a principal material direction, $[E]$ in Eq. 10.5-1 becomes a full matrix, and each stress in Eq. 10.5-5 depends on both $\sin n\theta$ and $\cos n\theta$. Symmetric and antisymmetric terms are now coupled in each harmonic, but different harmonics are uncoupled. Thus Eqs. 10.6-7 are still valid, but each $[k]_n$ is now $6J$ by $6J$ in size. Details of these arguments appear in [10.5].

The problem is more difficult if elastic properties depend on θ . One physical cause of this circumstance is the combination of temperature-dependent moduli and a θ -dependent temperature field. A Fourier series attack can again be used, but all harmonics are coupled [10.6,10.7].

10.7 RELATED PROBLEMS

The Fourier series treatment described in Sections 10.5 and 10.6 is also known as the *semianalytical method* and the *separation of variables method*. When used for plates, it is called the *finite strip method*.

Besides its application to plates and to solids and shells of revolution, the Fourier series method can be applied to prismatic solids [10.8,10.9]. Then the name *finite prism method* may be used. The solid, and its elements, are prismatic (Fig. 10.7-1). The displacement field is again Eq. 10.5-9, except that $\pi y/L$ replaces θ . If only the single-barred series are used, deformation and loading are symmetric about the xz plane, with $v = 0$ at $y = 0$ and at $y = \pm L$. As usual, arbitrary loads and displacements are treated by determining their Fourier coefficients and making a separate analysis for each, then superposing results. Problems such as that of Fig. 10.7-1 may require 9 to 19 Fourier coefficients.

In a physical sense, what has been done in Fig. 10.7-1 is to take a toroidal solid that extends from $-\pi$ to π and straighten it out to form a prismatic solid that extends from $-L$ to L . The straightening can be "faked" by moving the z axis

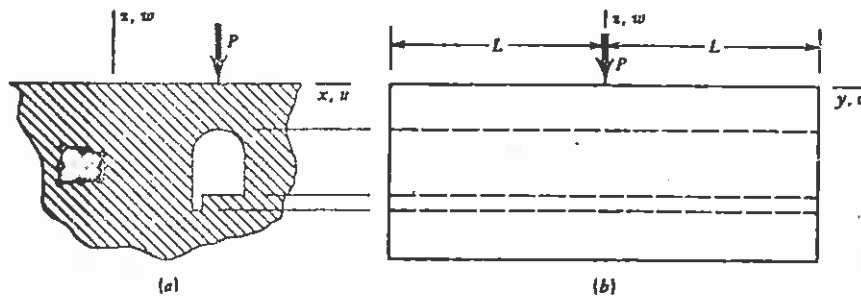


Figure 10.7-1. A point load P over a long tunnel. A suitably large portion of the surrounding earth or rock is modeled by finite elements, one of which is shown and shaded. (a) Front view. (b) Right-side view.

in Fig. 10.7-1a far to the left and making it an axis of revolution. Then the almost-prismatic solid can be analyzed by a computer program for solids of revolution.

The problem of a curved beam bent by a moment M_0 is axially symmetric in geometry and material properties. But it is not obvious that an axisymmetric analysis can deal with a moment loading. Reference 10.10 describes how. The trick is to use a thermal load to simulate the strains produced by M_0 : Note that if the curved beam is a thin-walled pipe elbow, its cross section becomes oval in response to M_0 and therefore is more flexible than a pipe whose cross section remains circular. Pipe elbow elements that include this effect have been developed [10.11].

Some geometries are "almost" axially symmetric, for example, the geometry or material properties have modest departures from θ independence, or an axially symmetric body is attached to a body that has no symmetry. Aspects of such problems are discussed in [10.7,10.12,10.13].

PROBLEMS

Section 10.2

- 10.1 If a problem is to be mathematically two-dimensional, θ independence is required of all dependent variables. Explain by example why this requires that θ be a principal direction of an orthotropic material. *Suggestion:* Consider axial load on a cylinder.

Section 10.3

- 10.2 Imagine that Fig. 6.12-1 depicts displacements and deformations of the square cross section of an axially symmetric four-node element. The axis of revolution is to the left of each cross section. For parts (a) and (b), identify each of the eight modes: that is, is it a rigid-body mode, a zero-energy deformation mode, or a straining mode?
- (a) Let $[k]$ be generated by one-point Gauss quadrature.
- (b) Let $[k]$ be generated by four-point Gauss quadrature.
- 10.3 Arguments are presented in Section 6.11 regarding the number of Gauss points needed for correct volume calculation and correct convergence of computed results. Reference there is to plane elements. How should these

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

افزایش دقت (Finite element)

به وسیله رتبه‌های بالاتر
در کاخ با سطح مقطع متغیر

استاد درس:

دکتر علی‌اکبر گزالی

توسط:

مهندس مینو پور

اسفند ۱۳۷۴

سپهر - A

این بررسی بجز راضی در مورد امکان شکل 1 می باشد، در تمام روش های بررسی و تیرا فانس
 سطحی امکان را به توجه به نقاط درجه آزادی میانی و (Slope function) مربوط به دست آورده،
 آنگاه با فرآیند سازی استاتیکی، با اعمال 1 واحد تغییر مکان درجه آزادی 1: Δ_1
 Δ_2 : تغییر مکانی درجه آزادی داخلی به دست می آید، که معادله ای از رتبه مستطری باشد را
 بر آن نقاط به دست می آوریم. در پایان این معادلات با یکدیگر مقایسه شده
 که برای نمایش بهتر مقدار exact در آن کم شده، و به عبارت بهتر مقدار اختلاف تا
 مقدار واقعی برای رتبه ای مختلف رسم می شود.

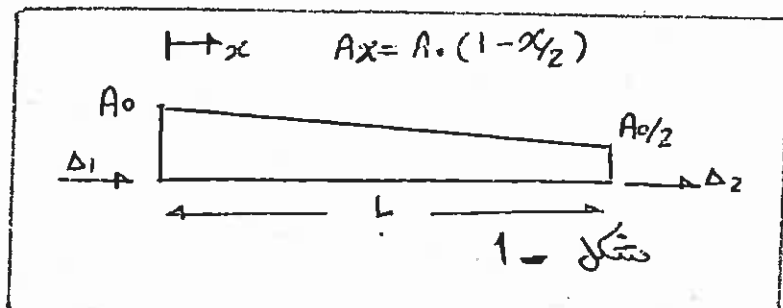
در این بررسی نشان داده می شود که معادلات به دست آمده درجه 3 که از 3 راه حل پیوستگی،

در نقاط داخلی (0.5 و 0.75) و در نقاط داخلی ($\frac{2}{3}$ و $\frac{1}{3}$) که با استفاده از نرم افزار Mathematica

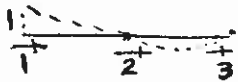
و بطور کسری exact محاسبه اند یک مقدار را می دهد

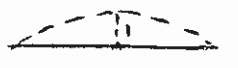
همچنین معادلات درجه 4 با سه نقطه میانی ($\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{2}$) و ($\frac{7}{8}$ و $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{8}$) نیز


جواب می شوند



A: نسبت درجه بار و چگونگی میانی وسط:

 $\rightarrow N_1(x) = [(x - L/2)(x - L)] / L^2/2$

 $\rightarrow N_2(x) = [x(x - L)] / -L^2/4$ ← Shape function

 $\rightarrow N_3(x) = [x(x - L/2)] / L^2/2$

$$K = \int_0^L A \cdot (1 - x/2L) E/L^2 \begin{bmatrix} N_1'(x) \\ N_2'(x) \\ N_3'(x) \end{bmatrix} \langle N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \rangle$$

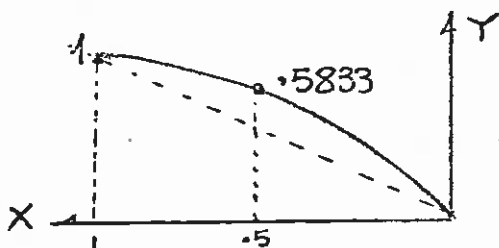
$$k = \begin{array}{c|cc|c} \textcircled{1} & 2.08\bar{3} & .25 & -2.3\bar{3} \\ \textcircled{3} & .25 & 4.4\bar{1}\bar{6} & -1.6\bar{6} \\ \textcircled{2} & -2.3\bar{3} & -1.6\bar{6} & 4 \end{array} = \begin{array}{c|c} kee & kei \\ \hline kie & kii \end{array}$$

$\Delta_i = \frac{1}{4} [-2.333 \quad -1.66] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = .5833 \leftarrow [!] = \Delta e$ متناظر با Δe

$(kee - kei \quad kie \quad kii) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = .72222 \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

که عدد مذکور بطور خلاصه در درجه ستم به نام ضریب kee مایس نامیده شده است.

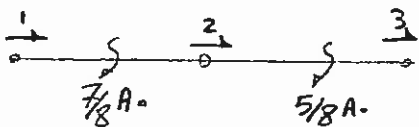
با استفاده از خصوصیات نشان داده شده در شکل 2 معادله 1 را داریم:



معادله (1): $y = -x^2/3 + 4x/3$

شکل 2:

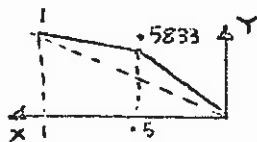
B:



اگر با اضافه کردن نقطه میانی خواهد خطی تصور کنیم، که در فاصله هر دو گره سطح مقطع متوسط عنوان سعی استفاده می شود؛ داریم:

$$\begin{array}{c|cc|c} P_1 & 7 & 0 & -7 \\ P_3 & 0 & 5 & -5 \\ P_2 & -7 & -5 & 12 \end{array} \begin{array}{c} \Delta e \\ \hline \Delta_i \end{array}$$

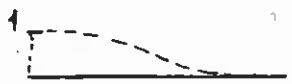
$\Rightarrow \Delta_i = [-\frac{1}{12}] [-7 \quad -5] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = .5833$



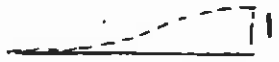
که معادلات در خط شکسته عبارت است: $\begin{cases} y = 2.166x & 0 \leq x \leq .5 \\ y = .833x + .166 & .5 \leq x \leq 1 \end{cases}$

A-2

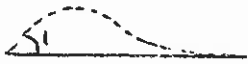
C: معادله در سوم دیوستی



$$N_1(x) = 1 - 3x^2/L^2 + 2x^3/L^3 \Rightarrow N'_1 = 6x^2 - 6x$$



$$N_2(x) = 3x^2/L^2 - 2x^3/L^3 \Rightarrow N'_2 = -6x^2 + 6x$$



$$N_3(x) = x - 2x^2/L + x^3/L^2 \Rightarrow N'_3 = 3x^2 - 4x + 1$$



$$N_4(x) = -x^2/L + x^3/L^2 \Rightarrow N'_4 = 3x^2 - 2x$$

$$K = \int_0^L A \cdot (1 - x/2) \dots$$

$$K = \begin{vmatrix} .9 & -.9 & .05 & .1 \\ & .9 & -.05 & -.1 \\ & & .35/3 & .025 \\ & & & .25/3 \end{vmatrix}$$

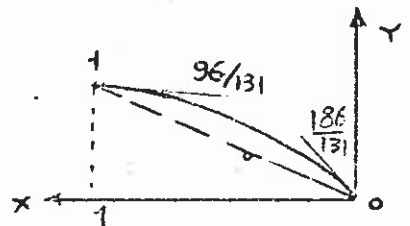
$$\Rightarrow \Delta_i = \begin{vmatrix} -96/31 \\ -186/131 \end{vmatrix}$$

تغییر در مختصات
x

که برای سهولت در دستاوردن معادله ای داریم

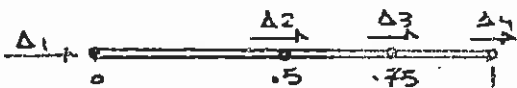
$$189/262 =: kee = (kee - kPi kii^{-1} kie)$$

$$Y = \frac{1}{131} (20x^3 - 75x^2 + 186x)$$



$$\begin{cases} Y = ax^3 + bx^2 + cx \\ Y = 3ax^2 + 2bx + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = a + b + c \\ 186/131 = 0 + 0 + c \\ 96/131 = 3a + 2b + c \end{cases}$$

D:



معادله در سوم با نقاطی 0.5 و 0.75

$$N_1 = [(x-0.5)(x-0.75)(x-1)] / (-3/8) \Rightarrow N'_1 = -8x^2 + 12x - 13/3$$

$$N_2 = [x(x-0.75)(x-1)] / 1/16 \Rightarrow N'_2 = 48x^2 - 56x + 12$$

$$N_3 = [x(x-0.5)(x-1)] / (-3/64) \Rightarrow N'_3 = -64x^2 + 64x - 32/3$$

$$N_4 = [x(x-0.5)(x-0.75)] / 1/8 \Rightarrow N'_4 = 24x^2 - 20x + 3$$

$$\frac{EA}{L} \int_0^1 (1-x/2) \left[\frac{N_1'}{N_2'} \right] \langle N_i' \dots \rangle$$

A-3

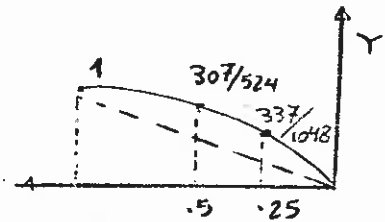
$$K = \begin{vmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{4} & \textcircled{2} & \textcircled{3} \\ 91/36 & -13/180 & -209/45 & 128/45 \\ & 197/60 & 47/15 & -256/45 \\ \hline & & 236/15 & -128/9 \\ & & & 256/15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{ee} & k_{ei} \\ k_{ie} & k_{ii} \end{vmatrix}$$

ضرب k_{ee} = $189/262$
پس از فشرده سازی

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} 307/524 \\ 337/1048 \end{vmatrix}$$

$x = .5$
 $x = .75$

$$Y = \frac{1}{131} (20x^3 - 75x^2 + 186x)$$

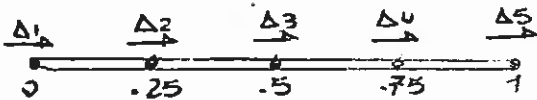


$$\Delta_i = \begin{vmatrix} \frac{2608}{3537} \\ \frac{1469}{3537} \end{vmatrix}$$

همچنین اگر نقاط $1/3$ و $2/3$ نیز انتخاب می‌گردد با سیر کردن Δ_i مربوط به آن

می‌شود که با حل آن همان معادله بالا بدست می‌آید.

:E



معادله درجه 4 با سه درجه میانی در برابر مساوی:

که جهت اختصار فقط ماتریس بردار آورده نشد اما روش

$$\begin{vmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{5} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} \\ \frac{3799}{756} & \frac{347}{1260} & -\frac{440}{63} & \frac{949}{315} & -\frac{1256}{945} \\ & \frac{2111}{756} & -\frac{136}{135} & \frac{115}{63} & -\frac{136}{35} \\ \hline & & \frac{3008}{189} & -\frac{3268}{315} & \frac{1472}{315} \\ & & & \frac{124}{7} & -\frac{448}{45} \\ & & & & \frac{1984}{189} \end{vmatrix}$$

A-(4)

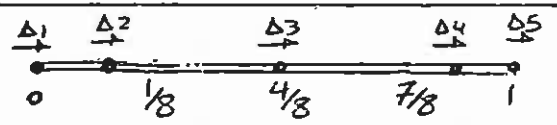
Keel ضرب = $321/445$

$$\Delta i = \begin{array}{r} 18393 \\ 22784 \\ \hline 833 \\ 1424 \\ \hline 7337 \\ 22784 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ .75^4 & .75^3 & .75^2 & .75 & b \\ .5^4 & .5^3 & .5^2 & .5 & c \\ .25^4 & .25^3 & .25^2 & .25 & d \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 18393/22784 \\ 833/1424 \\ 7337/22784 \end{array}$$

$$Y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$$

$$Y = \frac{(-7x^4 + 28x^3 - 60x^2 + 128x)}{89}$$

F



مصارف در 4 نقطه میان $7/8 > 4/8 > 1/8$

K =

①	②	③	④	⑤
$\frac{13077}{1372}$	$\frac{-17152}{1715}$	$\frac{221}{735}$	$\frac{512}{1029}$	$\frac{-2253}{6860}$
	$\frac{364544}{27783}$	$\frac{-768}{245}$	$\frac{-53248}{138915}$	$\frac{2048}{5145}$
		$\frac{2908}{567}$	$\frac{-53504}{19815}$	$\frac{59}{147}$
			$\frac{77824}{9261}$	$\frac{-9984}{1715}$
				$\frac{7341}{1372}$

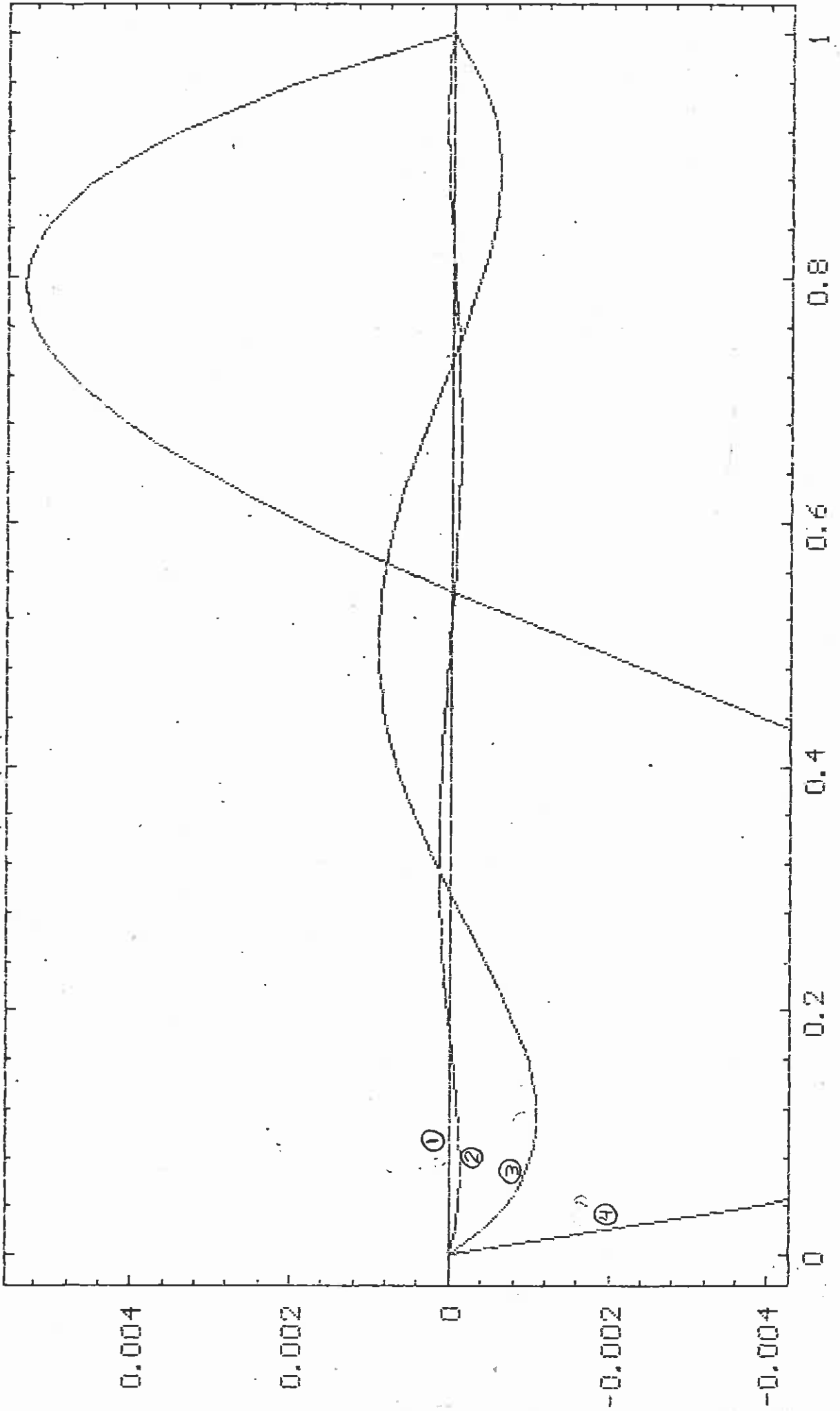
Keel ضرب = $321/445$

$$\Delta i = \begin{array}{r} 330617 \\ 364544 \\ \hline 833 \\ 1424 \\ \hline 61913 \\ 364544 \end{array}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{(-7x^4 + 28x^3 - 60x^2 + 128x)}{89}$$

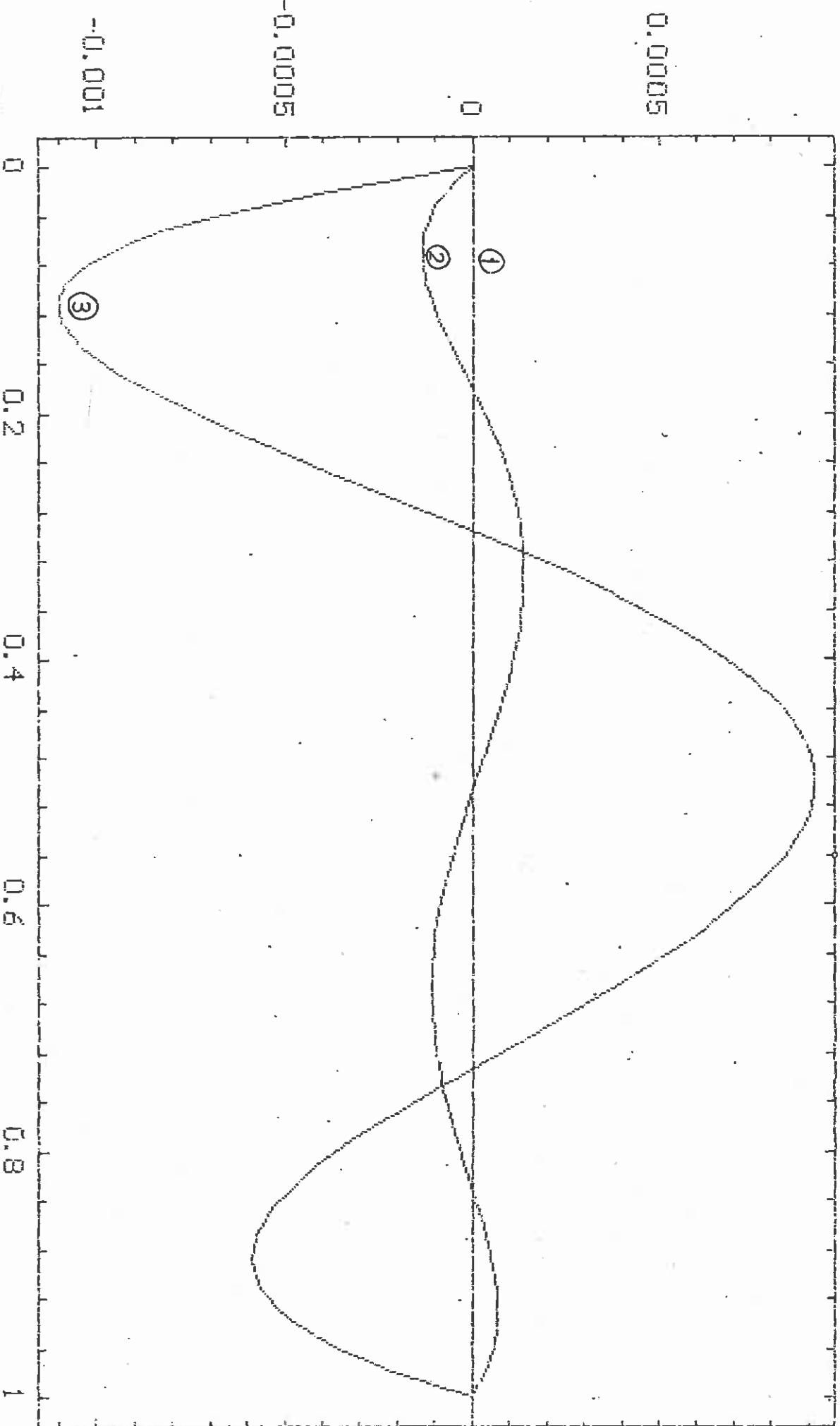
$$Y = \frac{\ln(1+x)}{\ln 2}$$

همان معادله قبلی براساس $\ln 2$ است
 همچنین معادله حقیقی exact از روش نرود است



① EXACT, ②, ③, ④ 2, 3, 4-term APPROXIMATION

① ③ ②
EXACT, 3-TERM, 4-TERM APPROXIMATION



چندین مبحث از مباحث لژاندر و کاربرد آنها در انتگرال گیری گوسی

Legendre Polynomials & Gauss Quadrature

استاد دین (اجزای مورد): آقای دکتر علی اکبر رحمانی

تاریخ: آرش ناوری

پوست شماره - B

فهرست مطالب :

- ۱- پیچیدگی‌های مکانی ترانژر
- ۲- مسائل استقرام لیوویل
۱-۱- خاصه توابع ویژه
- ۳- مسائل پیچیدگی‌های مکانی ترانژر
- ۴- انتگرال کبری گوسی
- ۵- پیوسته‌ها
- ۶- مراجع

1- Legendre polynomials

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر به معادله لژاندر معروف است.

$$[(1-x^2)y'(x)]' + \lambda y(x) = 0 \quad -1 < x < 1$$

$$(1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0$$

در بازه $(-1, 1)$ همه نقاط معادله می باشند و نقطه غیر عادی وجود ندارد. پس می توان جواب معادله فوق را بصورت یک سری توانی بیان کرد.

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

با جایگذاری می توان نشان داد که

$$a_{j+2} = \frac{j(j+1) - \lambda}{(j+1)(j+2)} a_j$$

بنابراین دو جواب مستقل از نظر این معادله عبارتند از:

$$y_1 = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} x^{2k}$$

$$y_2 = a_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$$

که در آن روابط a_0 و a_1 با شرایط ریزه می باشند که با استفاده از شرایط مرزی تعیین می شوند. در معادله لژاندر فرض کنیم $\lambda = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ داریم

$$a_{j+2} = \frac{j(j+1) - n(n+1)}{(j+2)(j+1)} a_j \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$a_{n+4} = a_{n+2} = \dots = 0$$

یعنی $a_{n+2} = 0$ پس

$$y_1 = a_0 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

بنابراین درجه n زوج است

$$y_2 = a_1 x + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$$

و درجه n فرد است

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

در میانه جمله ای های فوق فرض می شود

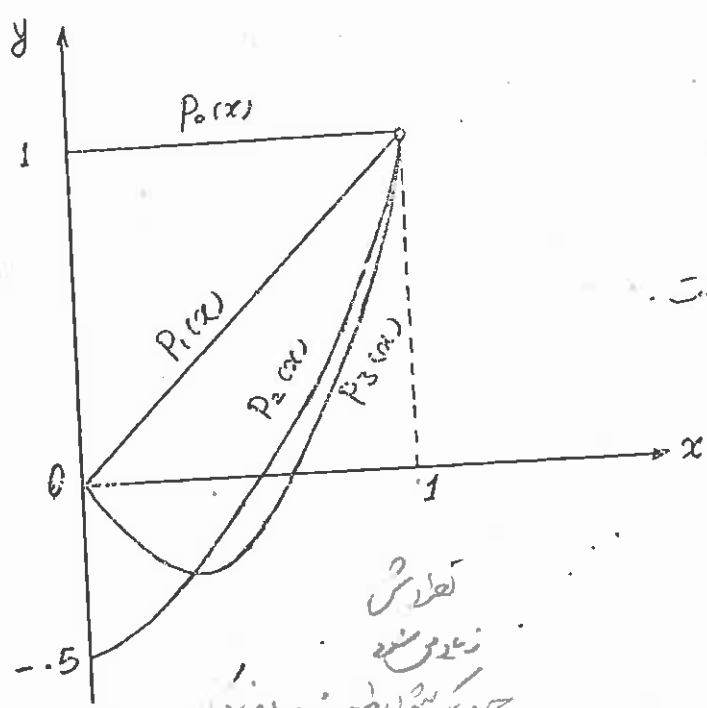
با این فرض می توان نشان داد که

$$a_{n-2k} = \frac{1}{2^n} \frac{(-1)^k k!}{(n-2k)! (n-k)!}$$

بنابراین

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k! (n-2k)! (n-k)!} x^{n-2k} \quad (n=0,1,2,\dots)$$

$$\begin{cases} m = \frac{n}{2} & ; \text{ n زوج} \\ m = \frac{n-1}{2} & ; \text{ n فرد} \end{cases}$$



تقریب
زیرین
چون سری فیبری از ضرایب
دان میسر می آید

$P_n(x)$ را چند جمله ای مرتبه n از زیرین نامند.

تعیین 1: $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$

تعیین 2: $P_n(1) = 1$

در شکل مقابل چند تابعی را از زیرین نشان داده شده است.

$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$

$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

۲- مسائل استوخم لیوویل^s
مسائل استوخم لیوویل منظم
میان

$$[(1-x^2)X'(x)]' + [q(x) + \lambda p(x)]X(x) = 0, \quad a < x < b \quad (1)$$

که در آن p, q, r متغیر از λ هستند و از نظر تقریبی فرض می شود r, q, p در بازه a, x, b توابع پیوسته ای می باشند و $r(x) > 0, p(x) > 0$. همچنین شرایط زیر را ارضای کنند.

تقریب از زیرین

$$\begin{aligned} \text{Transfer} \quad & a_1 X(a) + a_2 X'(a) = 0 \\ & b_1 X(b) + b_2 X'(b) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

میانهای a_1, a_2, b_1, b_2 متغیر از λ می باشند. a_1, a_2, b_1, b_2 با هم متنوع نیستند.

مقداری از λ که به ازای آن مسأله (12) - (11) جواب غیر بدیهی (غیر صفر) داشته باشد یک مقدار ویژه⁽¹⁾ نامیده می شود و جواب غیر صفر بدیهی متناظر آن یک تابع ویژه⁽²⁾ نامیده می شود. مجموعه همه مقادیر ویژه یک مسأله استوار لیوویل، اسپکتروم⁽³⁾ مسأله نامیده می شود.

تفسیر: یک مسأله استوار لیوویل بی نهایت مقدار ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ دارد. همه مقادیر ویژه تقصیر هستند و همچنین به ازای هر یک از آنها جواب λ وجود دارد.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$$

1-2. تعداد توابع ویژه
 تعریف: مجموعه $\{\psi_n(x)\}, n=1,2,3,\dots$ روی بازه $a < x < b$ نسبت به تابع وزنی $P(x)$ (که یونیت است) متعامد بر قطعه و مثبت است. تعداد هستند هرگاه

$$\int_a^b P(x) \psi_m(x) \psi_n(x) dx = 0 \quad (m \neq n)$$

نسبت $P(x)$ در بازه a مثبت است استوار (4)

تفسیر: اگر λ_m, λ_n دو مقدار ویژه متفاوت مسأله استوار - لیوویل باشند. توابع ویژه متناظر آنها یعنی $\psi_m(x)$ و $\psi_n(x)$ روی بازه $a < x < b$ نسبت به تابع $P(x)$ متعامد باشند.

3. تعداد لاینز جمله ای های لراندر
 معادله ریاضی لراندر یک مشکل خاص مسأله استوار - لیوویل است که $r(x) = 1 - x^2, q(x) = 0, P(x) = 1$
 معادله لراندر در بازه $-1 < x < 1$ بدون شرایط مرزی یک مسأله استوار - لیوویل تعیین است. (4)

تفسیر: مقادیر ویژه و توابع ویژه متناظر آنها در یک معادله لراندر در بازه $-1 < x < 1$ عبارتند از:
 $\lambda_n = n(n+1)$ و $\psi_n = P_n(x), n=0,1,2,\dots$
 که در آن $P_n(x)$ چند جمله ای لراندر مرتبه n است.
 نتیجه: چند جمله ای های لراندر در بازه $-1 < x < 1$ نسبت به تابع $P(x)=1$ متعامد هستند.

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0 \quad (m \neq n)$$

- 1- eigenvalue
- 2- eigenfunction
- 3- spectrum
- 4- singular Sturm-Liouville problem

قضیه 1: پلند جمله ای گراندر مرتبه n ، $P_n(x)$ بر هر پلند جمله ای از درجه $n-1$ یا کمتر متعامد است. یعنی

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0$$

قضیه 2: پلند جمله ای گراندر مرتبه n ، $P_n(x)$ نرته صحیح دارد که همه آنها ریشه $-1 < x < 1$ واقع شده اند.

۲- اشتراک گیری گوسی

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$$

نقطه n نقطه n نقطه x_1, x_2, \dots, x_n و n وزن w_1, w_2, \dots, w_n وجود دارد پس از مجموع $2n$ مجهول داریم. بنابراین می توان این معادله را بگونه ای تعیین کرد که اشتراک گیری از یک پلند جمله ای مرتبه $n-1$ دقیق باشد. فرض کنیم $f(x)$ یک پلند جمله ای مرتبه $n-1$ یا کمتر باشد. در این صورت می توان $f(x)$ را به شکل زیر نوشت:

$$f(x) = C(x) P_n(x) + r(x)$$

در این رابطه $C(x)$ ، $r(x)$ پلند جمله ای های از مرتبه $n-1$ یا کمتر هستند.

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 C(x) P_n(x) dx + \int_{-1}^1 r(x) dx = \int_{-1}^1 r(x) dx$$

چون $P_n(x)$ بر هر پلند جمله ای از مرتبه $n-1$ یا کمتر متعامد است.

اگر $r(x)$ یک از ریشه های $P_n(x) = 0$ باشد می توان نوشت

$$f(x_i) = r(x_i)$$

$r(x)$ یک پلند جمله ای مرتبه $n-1$ یا کمتر است پس می توان آن را با استفاده از پلند جمله ای های درون یابی گراندر بیان کرد.

$$r(x) = \sum_{i=1}^n \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) r(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) f(x_i)$$

بنابراین می توان نوشت :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n f(x_i) \int_{-1}^1 \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right) dx$$

$$W_i = \int_{-1}^1 \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right) dx$$

بن

در جدول زیر برای چند حالت خاص نقاط گوسی و وزن ها نشان داده اند.

n	$\pm x_i$	W_i
2	0.577350269	1.00000000
3	0	0.88888889
	0.774596669	0.55555556
4	0.339981043	0.652145155
	0.861136312	0.347854845
5	0	0.568888889
	0.538469310	0.478628670
	0.906179846	0.236926885
6	0.238619186	0.467913935
	0.661209387	0.360761573
	0.932469514	0.171324492
8	0.183434642	0.362683783
	0.525532410	0.313706646
	0.796666478	0.222381034
	0.960289857	0.101228536
10	0.148874339	0.295524225
	0.433395394	0.269266719
	0.679409568	0.219086363
	0.865063367	0.149451349
	0.973906528	0.066671344

۵- بیوست ها

بیوست 1: تقسیم پلیر جمله ای ها

رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = C(x)P_n(x) + r(x)$$

در آن رابطه $f(x)$ یک چند جمله ای درجه $2n-1$ و $P_n(x)$ یک چند جمله ای مرتبه n می باشد. در اینجا P_n و $f(x)$ همگام هستند. پس از انجام عمل تقسیم C در f بدست می آیند.

$$\begin{array}{r} f(x) \\ \vdots \\ \hline r(x) \end{array} \left| \begin{array}{r} P_n(x) \\ \hline C(x) \end{array} \right.$$

در آن عمل تقسیم مرتبه $C(x)$ برابر است با تفاضل مرتبه $P_n(x)$ و $f(x)$.

پس مرتبه $r(x)$ کمتر از مرتبه $P_n(x)$ است.

مثال: $n=2$

$$P_2(x) = 3x^2 - 1, f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 1$$

$$\begin{array}{r} 3x^3 - 6x^2 + 1 \\ \underline{3x^3 - x} \\ -6x^2 + x + 1 \\ \underline{-6x^2 + 2} \\ x - 1 \end{array} \left| \begin{array}{r} 3x^2 - 1 \\ \hline x - 2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow 3x^3 - 6x^2 + 1 = (x-2)(3x^2 - 1) + (x-1)$$

پیوست 2: اثبات قضیه 1, 2

مجموعه $\{P_n(x)\}$ یک مجموعه متعامد است پس می توان نوشت

$$n \neq 0 \Rightarrow \int_{-1}^1 P_n(x) P_0(x) dx = 0$$

$$P_0(x) = 1 \Rightarrow \int_{-1}^1 P_n(x) dx = 0$$

قضیه 1:

برای $P_m(x)$ یک چندجمله ای مرتبه m است که یا فقط شامل توانهای زوج است و یا فقط شامل توانهای فرد است. برای m های زوج

$$P_n(x) = a_0 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$\Rightarrow x^n = \frac{1}{a_n} P_n(x) - \frac{a_{n-2}}{a_n} x^{n-2} - \dots - \frac{a_0}{a_n}$$

$$x^n = C^n P_n(x) + C_{n-2} x^{n-2} + C_{n-4} x^{n-4} + \dots + C_0$$

برای m های فرد

$$P_n(x) = a_1 x + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$$

$$\Rightarrow x^n = \frac{1}{a_n} P_n(x) - \frac{a_{n-2}}{a_n} x^{n-2} - \dots - \frac{a_1}{a_n} x$$

$$x^n = C^n P_n(x) + C_{n-2} x^{n-2} + C_{n-4} x^{n-4} + \dots$$

بنابراین برای هر n

$$x^n = \psi_n P_n(x) + \psi_{n-2} P_{n-2}(x) + \dots$$

چند جمله ای $P_m(x)$ که مرتبه آن کمتر از n است، از نظر x^n نریزید.

$$P_m(x) = \lambda_m x^m + \lambda_{m-1} x^{m-1} + \dots + \lambda_1 x + \lambda_0, \quad m < n$$

$$\Rightarrow P_m(x) = \theta_m P_m(x) + \theta_{m-1} P_{m-1}(x) + \dots + \theta_1 P_1(x) + \theta_0$$

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \theta_m \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx + \dots + \theta_0 \int_{-1}^1 P_n(x) dx = 0$$

قضیه ۲:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) dx = 0$$

با توجه به اینکه

بنابراین $P_n(x)$ در بازه $(-1, 1)$ حداقل یکبار تغییر علامت می دهد. فرض کنید $P_n(x)$ در k نقطه تغییر علامت می دهد.

$$P_n(x_i) = 0, \quad i=1, 2, \dots, k$$

چنین یک چند جمله ای مرتبه n حداقل n ریشه دارد پس $k \geq n$ (که $k=1, 2, \dots$)
فرض کنید $n=k$. چند جمله ای زیر را در نظر بگیرید

$$P(x) = (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_k)$$

$P(x)$ یک چند جمله ای مرتبه k است و $n=k$ پس

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P(x) dx = 0$$

پس x_1, x_2, \dots, x_k ریشه های $P_n(x)$ هستند پس

$$P_n(x) = Q(x)(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_k)$$

در این رابطه $Q(x)$ برای هر x در بازه $(-1, 1)$ مخالف صفر است. فرض کنید علامت مثبت باشد.

$$Q(x) > 0, \quad \forall x \in (-1, 1)$$

بنابراین

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P(x) dx = \int_{-1}^1 Q(x) (x-x_1)^2 (x-x_2)^2 \dots (x-x_k)^2 dx$$

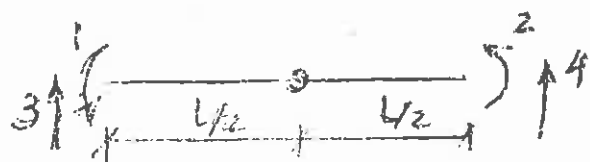
$$= \int_{-1}^{x_1} Q(x) \prod_{i=1}^k (x-x_i)^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} Q(x) \prod_{i=1}^k (x-x_i)^2 dx + \dots + \int_{x_k}^1 Q(x) \prod_{i=1}^k (x-x_i)^2 dx > 0$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 P_n(x) P(x) dx > 0$$

این تناقض نشان می دهد که $n=k$ است.

بنابراین هر چند جمله ای از مرتبه n در بازه $(-1, 1)$ n ریشه حقیقی دارد.

1. Brown. J.W, Churchill. R, "Fourier Series and Boundary Value Problems", McGraw-Hill, Fifth edition, 1993.
2. Tyn Myint-U, "Partial Differential Equations of Mathematical Physics", North Holland, second edition, 1982.
3. Reddy. J.N, "An Introduction to The Finite Element Method", McGraw-Hill, second edition, 1993.
4. Nakamura. S, "Applied Numerical Methods with Software", Prentice-Hall, 1991.



در هر دو با هم مثل در وسط داده شده است.

انت ماتریس سختی 4×4 این تیر را محاسبه کنید

بیا ببینیم $\frac{EI}{L^3} = \frac{d^3 u}{dx^3}$ از طرفی در $x = \frac{L}{2}$ لان برای همسری با ندر. با اعمال این شرط توابع شکل تیر را خواهیم داشت.

$N_1: -x^4/3 + 3x^3/2 - 3x^2/L + x$

$N_2: x^4/3 - x^3/2$

$N_3: 1 - 3x^2/L^2 + 2x^3/L^3$

$N_4: 3x^2/L^2 - 2x^3/L^3$

با استفاده از روش اجزاء نمودار ماتریس سختی 4×4 تیر را محاسبه کنید

ج) در ماتریس بدست آمده در سمت راستی انت و ب را با یکدیگر مقابله کنید و در مورد تفاوت این دو توضیح دهید

د) برای انتخافات پذیرتر کردن شکل درجات آزادی یا مراتب پیوستگی را بالا می بریم. در وجه آزادی

تیر نیز اضافه می کنیم. ماتریس 6×6 بدست آمده را فشرده سازی استاتیکی می کنیم تا

4×4 بدست آید جواب را با حالت ب مقابله می کنیم

مراتب پیوستگی

$$\left(\begin{array}{c|c} N_1 & \frac{dN_1}{dx} \\ \hline N_2 & \frac{d^2 N_2}{dx^2} \end{array} \right)_{x=0} \left| \begin{array}{c} N_3 \\ N_4 \end{array} \right|_{x=L}$$



$N_1 = 4x^6 - 15x^5 + 20x^4 - 10x^3$

$N_2 = -4x^6 + 9x^5 - 5x^4$

$N_3 = -6x^5 + 15x^4 - 10x^3 + 1$

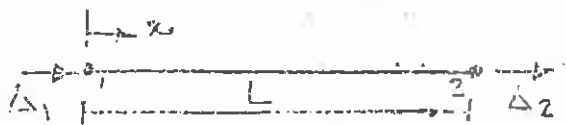
$N_4 = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$

$N_5 = \frac{2}{3}x^6 - 2.5x^5 + 3.5x^4 - \frac{13}{6}x^3 + 0.5x^2$

$N_6 = \frac{2}{3}x^6 - \frac{3}{2}x^5 + x^4 - \frac{x^3}{6}$

2: ...
 3: ...
 4: ...
 5: ...
 6: ...

نیوست شماره 5
 مسائل تعیین



در صورتی که طول سیمانی با مقطع متغیر $A(x) = A_0 e^{(1-x/L)}$ باشد
 در صورتی که طول سیمانی با مقطع متغیر $A(x) = A_0 e^{(1-x/L)}$ باشد
 در صورتی که طول سیمانی با مقطع متغیر $A(x) = A_0 e^{(1-x/L)}$ باشد

فرض کنیم که سیمانی با مقطع متغیر $A(x) = A_0 e^{(1-x/L)}$ باشد

در صورتی که طول سیمانی با مقطع متغیر $A(x) = A_0 e^{(1-x/L)}$ باشد

در صورتی که طول سیمانی با مقطع متغیر $A(x) = A_0 e^{(1-x/L)}$ باشد

در صورتی که طول سیمانی با مقطع متغیر $A(x) = A_0 e^{(1-x/L)}$ باشد

در صورتی که طول سیمانی با مقطع متغیر $A(x) = A_0 e^{(1-x/L)}$ باشد

در صورتی که طول سیمانی با مقطع متغیر $A(x) = A_0 e^{(1-x/L)}$ باشد

در صورتی که طول سیمانی با مقطع متغیر $A(x) = A_0 e^{(1-x/L)}$ باشد



$$I_0 = \frac{t h_0^3}{12} \quad \text{با فرض } h(x) = h_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right)$$

در صورتی که طول سیمانی با مقطع متغیر $A(x) = A_0 e^{(1-x/L)}$ باشد

در صورتی که طول سیمانی با مقطع متغیر $A(x) = A_0 e^{(1-x/L)}$ باشد

در صورتی که طول سیمانی با مقطع متغیر $A(x) = A_0 e^{(1-x/L)}$ باشد

$$N_1(x) = x - 2 \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{2L^2}$$

$$N_2(x) = \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{2L^2}$$

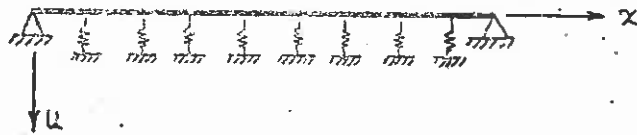
$$N_3(x) = 1 - \frac{x}{L} - \frac{x^2}{2L^2}$$

$$N_4(x) = \frac{x}{L} - \frac{x^2}{2L^2}$$

در صورتی که طول سیمانی با مقطع متغیر $A(x) = A_0 e^{(1-x/L)}$ باشد

مسئله اول - معادله دیفرانسیل تغییر مکان قائم یک تیر بر پی ارتجاعی به سختی K عبارت است از:

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} + ku = P$$



EI ضریب سختی خمشی ثابت و k مقدار بار بر واحد طول می باشد. تیر از ای طول L را در برده و در سر آن مشتملی می باشد. در این حالت شرایط سر بردی عبارتست از:

$$U(0) = u(1) = \frac{d^2 u}{dx^2}(0) = \frac{d^2 u}{dx^2}(1) = 0 \quad \frac{M}{EI} = \frac{du^2}{dx^2}$$

معادله دیفرانسیل فوق را تحت شرایط $\frac{P}{EI} = \frac{k}{EI} = 1$ از روش Ritz-Galerkin حل نمایید.

توابع $\phi_1(x) = \sin \pi x$ و $\phi_2(x) = \sin 3\pi x$ بعنوان تابع درون یابی مورد استفاده قرار گیرند. جوابها را در نقاط $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{6}$ و x با حل دقیق مقایسه نمایید.
 مسئله دوم - با استفاده از توابع درون یابی (interpolation) داده شده در زیر، ضرایب ماتریس سختی خمشی K_b و هندسی K_g تیر را از روش Ritz-Galerkin محاسبه نمایید. ماتریس سختی کل عبارتست از: $K = K_b - K_g$ که هر کدام ماتریسی به ابعاد 2×2 می باشند. تیر تحت تاثیر نیروی فشاری P می باشد. معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر عبارتست از:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + P \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad \phi_1(x) = -x + 2 \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2}$$

$$\phi_2(x) = \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2}$$

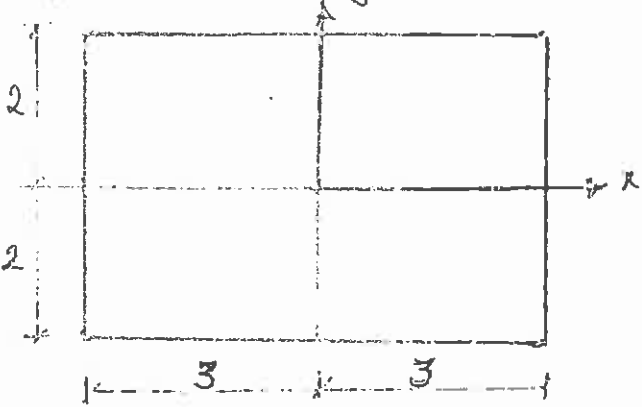
$$\phi_3(x) = 1 - 3 \frac{x^2}{L^2} + 2 \frac{x^3}{L^3}$$

$$\phi_4(x) = 3 \frac{x^2}{L^2} - 2 \frac{x^3}{L^3}$$



مسئله سوم - معادله دیفرانسیل $\frac{12-u}{dx^2} + u + x^2 = 0$ را برای $0 < x < 1$ و $u(0)=0, u(1)=1$ و $u'(0)=0$ و $u'(1)=0$ حل کنید.
 الف - حل روش Galerkin
 ب - حل روش point-collocation
 ج - حل روش least square
 د - حل روش least square
 استخاره رید

۱) برای بخش الاستیک یک میلر همگن Prismatic bar در شکل مقابل معادله ریفرانس بار زیر صادق است.



$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta$$

G = elastic shear modulus

θ = angle of twist each section

ϕ = stress function

جهت سهولت در امر محاسبات $G\theta = 1$ فرض می‌گردد. شرایط مرزی می‌گویند $\phi = 0$ در لام لبه $x = \pm 3$ و $y = \pm 2$. مقدار بخش در هر مقطع از فرمول زیر بدست می‌آید

$$T = 2 \iint \phi \, dx \, dy$$

با استفاده از روش Galerkin مقدار بخش T را محاسبه کنید.

راه‌های: ا) توجه به اینکه مقطع نسبت به محور x در y متوازن است می‌توان از توابع مثلثاتی

$$N_1(x, y) = C_1 \frac{\pi x}{6} + C_2 \frac{\pi y}{4}$$

نیز که دارای متوازن است استفاده نمود

$$N_2(x, y) = C_3 \frac{3\pi x}{6} + C_4 \frac{\pi y}{4}$$

بررسی است مثله ما توابع توانی قابل استراحت است

که در صورت لایل می‌توانید استفاده کنید

$$N_3(x, y) = C_5 \frac{\pi x}{6} + C_6 \frac{3\pi y}{4}$$

۲) معادله ریفرانس $\frac{N}{EI} \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^4 y}{dx^4} = 0$ در مورد استوار است. ستون دو سر گیردار

او بروداره شده است. این معادله ریفرانس را به روش Galerkin حل کنید

و مقدار حداقل N برای لانس را محاسبه کنید.



$$N \geq 1 - C_1 \frac{2\pi^2 EI}{L^2}, \quad u_6 = 0$$

از چند جمله‌ای استفاده کنید

۳. معادله دیفرانسیل $\frac{d^2u}{dx^2} - u = 0$ با شرایط مرزی $u(0) = 0$ و $u(1) = 1$ دارد شد است.

تابع T را به صورت روبرو تعریف می‌کنیم. $T = \int_{\Omega} R^2 dx$ هدف آن است که مقدار T را حداقل کنیم. متغیر R در رابطه T می‌باشند پس برای دستیابی به n معادله n گزین خطی روابط روبرو در نظر می‌گیریم

$$\frac{\partial T}{\partial a_i} = \int R \frac{\partial R}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

در این روش توابع وزنی $\frac{\partial R}{\partial a_i}$ می‌باشند.

این روش روش حداقل مربعات می‌باشد. معادله دیفرانسیل فوق را به این روش حل می‌کنند.

$$u_D = x$$

$$N_1 \text{ و } \sin 2\pi x$$

$$N_2 \text{ و } \sin 4\pi x$$

ب) توابع N_1 و N_2 چند جمله‌ای می‌باشند.

اگر $L(\Phi) = 1$ یعنی فقط خود تابع u در $R = (\Phi - \Phi)$ Least Square = Galerkin 3.

مسئله اول- میله *axisymmetric* مسئله اول تمرین سری دوم را مجدداً در نظر بگیرید. اینبار تابع تغییر شکل را از نوع درجه دوم انتخاب نمایید. تغییر مکانهای $U_1 = \bar{U}_1$ و $U_3 = \bar{U}_3$ برمیله اعمال میگردند.

الف - ماتریس سختی میله را محاسبه نمایید. مقادیر F_1 و F_3 را برحسب تغییر مکانهای \bar{U}_1 و \bar{U}_3 بدست آورید.

ب - در طی جدولی مقادیر F_1 و F_3 را برحسب \bar{U}_1 و \bar{U}_3 براساس سه روش زیر مقایسه نمایید.

- ۱- روش حل واقعی (Exact solution)
- ۲- روش حل تقریبی با تقسیم میله به دو عضو با تغییر مکانهای خطی (حل قسمت ب مسئله اول از سری دوم)
- ۳- روش حل تقریبی با تغییر مکان درجه دوم (حل قسمت اول)

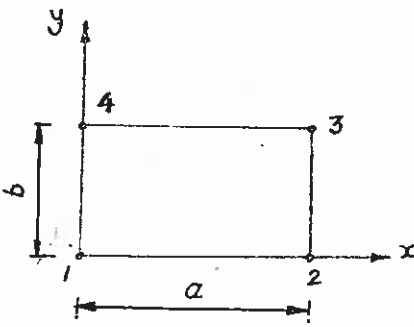
ج- برای سه روش فوق تغییر مکان $U(x)$ به ازای \bar{U}_1 و \bar{U}_3 و برحسب طول میله x را رسم نمایید.

د- برای سه روش فوق تغییرات تنش $E(x)$ به ازای \bar{U}_1 و \bar{U}_3 و برحسب طول میله x را رسم نمایید.

ه- هرگاه میله تحت تأثیر تغییرات درجه حرارت بمقدار $\Delta T(x) = C[1 - (\frac{x}{L})^2]$ قرار گیرد، تغییر مکان میله به ازای α در طول میله x را رسم نمایید.

مسئله دوم- برای مستطیل نشان داده شده در شکل که دارای λ درجه آزادی میباشد تابع تغییر شکل $U(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$ فرض شده است. مراتب زیر را با استفاده از *Plane Stress* *Shape function* های بدست آمده در کلاس برای حالت محاسبه نمایید. ضخامت عضو t فرض میگردد.

الف - مقدار تنش را برحسب تغییر مکان گزها محاسبه نمایید.

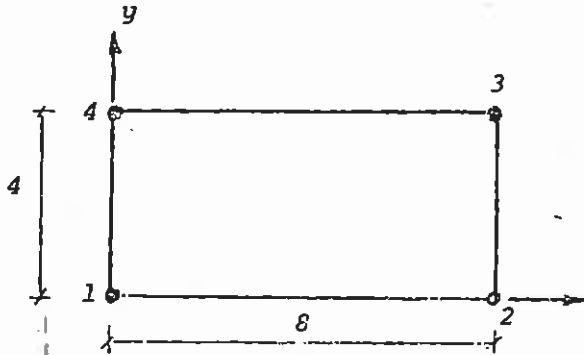


$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ \vdots \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix} - \{D\alpha\} \Delta T$$

ماتریس $[C]$ یک ماتریس (3×8) و برحسب $\xi = \frac{x}{a}$ ، $\eta = \frac{y}{b}$ ، ν و E میباشد.

ب - ماتریس سختی عضو (8×8) را برحسب $\beta = \frac{a}{b}$ ، $\beta^{-1} = \frac{b}{a}$ ، ν و E محاسبه نمایید.

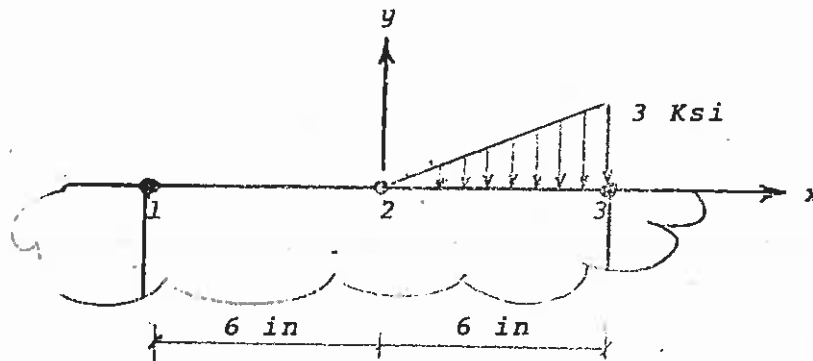
۱- تغییر مکان گره های يك المان از مجموعه المان های يك آنالیز Plane stress در زیر داده شده است. هرگاه ضخامت المان ثابت و برابر با واحد و مقادیر $E = 10^4$, $\nu = 0.25$ باشد، تنش را در نقطه A به مختصات (2,1) را محاسبه نمایید. نتیجه را روی شکل نشان دهید.



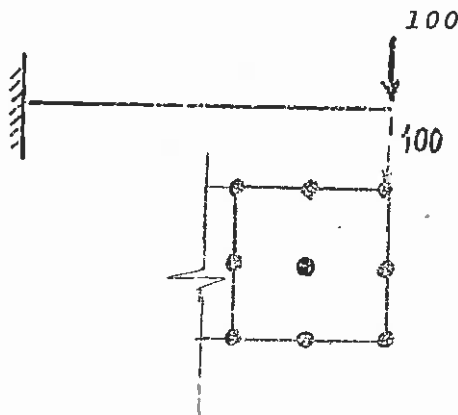
$$\langle u \rangle = \langle 0, 1, 2, 0 \rangle$$

$$\langle v \rangle = \langle 0, 0, 1, 0 \rangle$$

۲- بار مثلثی نشان داده شده بزرگ قسمت از المان ۹ گره ای درجه دو اعمال می شود. نیروی متمرکز معادل را در گره ها محاسبه نمایید. نتیجه را روی شکل نشان داده روابط استاتیکی را نیز کنترل نمایید.

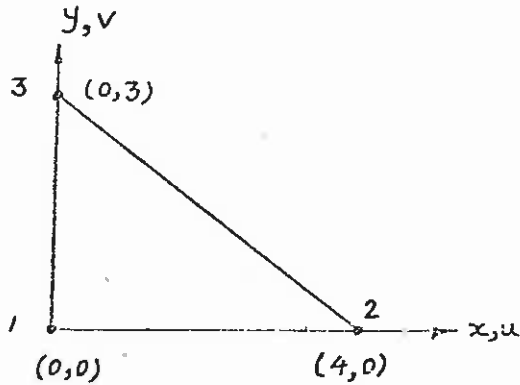


۳- تیر طره ای زیر تحت تأثیر بار 100 در سر آن قرار گرفته است. این تیر را بوسیله المان ۹ گره ای مدل می کنیم. بارگذاری به روی اولین گره این المان را مشخص کنید.



C-V

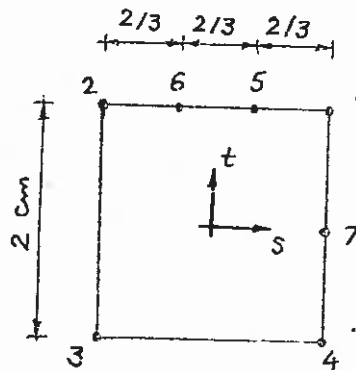
مسئله اول- عضو مثلثی شکل ۳ گره ای زیر تحت شرایط *Plane strain* قرار گرفته است. برای این عضو $E=250$ ، $\nu=0.25$ و $\alpha=0.01$ در نظر گرفته شود .



- ۱- توابع شکلی N_1, N_2, N_3 (shape functions) را با استفاده از روش معکوس کردن بیابید .
- ۲- سختی عضو را با توجه به مختصات داده شده محاسبه نمایید .
- ۳- برای $\Delta T=5$ نیروی در گره ها را محاسبه نمایید . (Nodal load vector)
- ۴- چنانچه فشار عمود بر سطح ۲ بر لبه ۲-۳ وارد شود بردار بار وارد بر گره ها را محاسبه نمایید .

۵- تغییر مکان $U^1 = 0.03$ و $v^1 = -0.01$ بر گره یک اعمال میشود بردار بار وارد بر گره ها را تعیین نمایید .

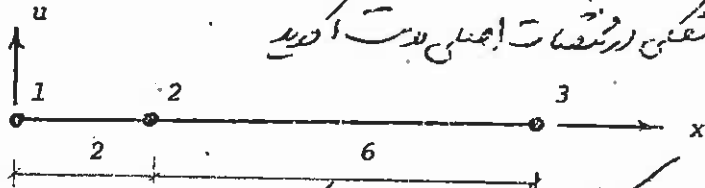
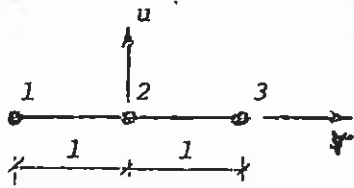
مسئله دوم- توابع شکلی (Shape functions) عضو دوبعدی زیر را بدست آورید .



۱- یک المان Iso parametric یک بعدی مطابق شکل مورد استفاده قرار گرفته است. تغییرات مکانهای u محاسبه شده در گرهای ۱ و ۲ و ۳ بترتیب عبارتند از ۰ و ۶ و ۱۰ (پنج، چهار و صفر).

مقدار $\frac{du}{dx}$ را در گرهای یک و دو محاسبه نمایید. الف - مقدار کرنش را با استفاده از توابع

شکلی در مختصات ایمنی است آورید



ب - مقدار کرنش را با استفاده از توابع شکلی در مختصات طبیعی است آورید

۲- رابطه انتگرال گیری عددی Simpson را برای انتگرال $I = \int_{-1}^1 G(\xi) d\xi$ برای نقاط نمونه گیری $\xi_0 = -1, \xi_1 = 0, \xi_2 = 1$ بنویسید.

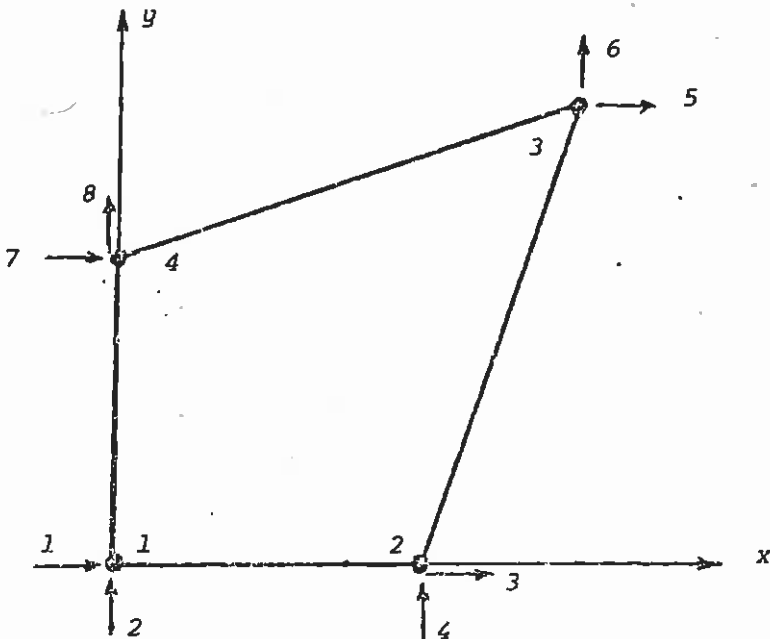
الف - چنانچه تابع $G(\xi) = \xi^3$ باشد مقدار واقعی انتگرال را با جواب بدست آمده از روش تقریبی Simpson با هم مقایسه کنید.

ب - آیا رابطه Simpson انتگرال توابع درجه ۳ را بطور تقریبی محاسبه می نماید.

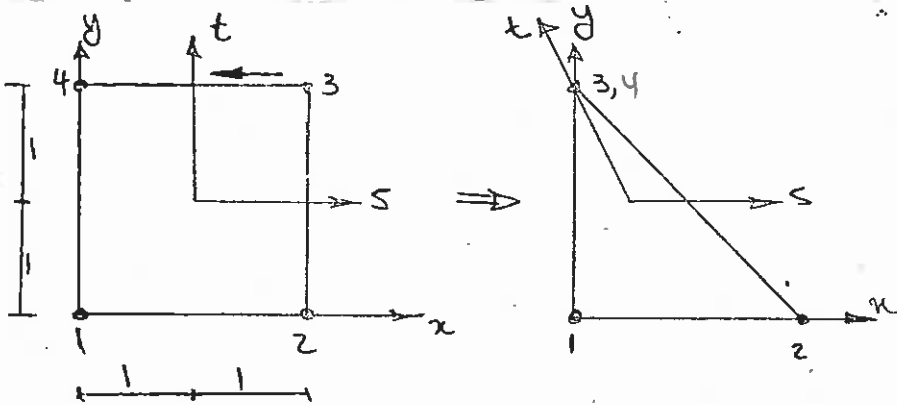
۳- ضریب سختی ماتریس K_{12} را برای المان نشان داده شده در شکل زیر بدست آورید. مقادیر $E = 10,000$ و $\nu = 0.25$ می باشد، ضخامت المان برابر ۰.۵ t فرض کنید. از حالت Plane Stress استفاده نمایید. مختصات گره ها عبارتند از:

- 1 (0, 0) 2 (4, 0) 3 (6, 6) 4 (0, 4)

جهت انتگرال گیری می توانید از فرمول $\sigma - \theta$ استفاده نمایید.



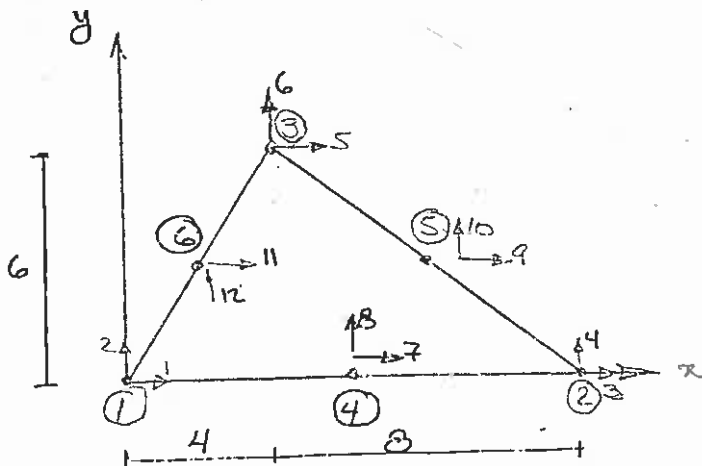
مسئله اول با ادغام گره های ۳ و ۴ از المان 4-node quadrilateral ، المان مثلثی بدست میآید . با استفاده از توابع شکلی برای المان { گره ای توابع شکلی المان مثلثی رابدهست آورید . اپراتور ژاکوبی (Jacobian Operator) المان مثلثی را محاسبه نموده در مورد singularity آن بحث نمائید . با محاسبه ماتریس Strain-displacement $\{ \epsilon \} = [B] \{ U \}$ نشان دهید المان مثلثی دارای توزیع ثابت strain میباشد . در مورد singularity این ماتریس بحث نمائید .



مسئله دوم shapefunction رابری المان مثلثی بالا از طریق مختصات طبیعی بطور مستقیم بدست آورید . جوابها را با هم مقایسه و بحث نمائید .

مسئله سوم ضرایب سختی $K(1 و 1)$ و $K(6 و 7)$ و $K(9 و 11)$ را برای المان مثلثی درجه دو از شکل زیر محاسبه نمائید جوابها را از دو روش زیر بدست آورید . الف - استفاده از توابع شکلی در سیستم مختصات طبیعی .

ب - استفاده از توابع شکلی در سیستم مختصات سطحی Area coordinate system جوابها را برای حالت Planestress و محاسبه E و ν و t (ضخامت) پیدا نمائید .

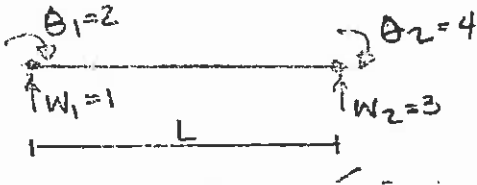


مسئله اول یا استفاده از *Hermitian Interpolation* ماتریس سختی $[K]$ را برای

تیر نشان داده شده به ضلعت واحد را بدست آورید. جواب بر حسب E ، I_0 و L بیان شود.

الف - فرض نمائید مقطع تیر ثابت باشد و

$$I = I_0 \text{ باشد.}$$



ب - فرض نمائید که میان اینرسی در

طرف چپ برابر با $1.5 I_0$ و در

طرف سمت راست $\frac{I_0}{2}$ باشد.

ضخامت تیر ثابت بسود و عمق آن

بطور خطی تغییر میکند.

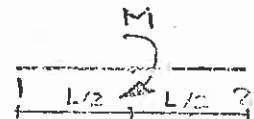
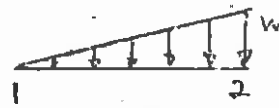
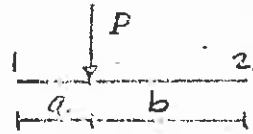
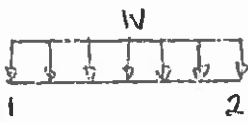
مسئله دوم: با استفاده از *Hermitian Interpolation* بردار نیروهای معادل گره‌ها

را بدست آورید. جوابها را با لنگرهای گیرداری ستایسه و بحث نمائید. همچنین بردار

نیرو را برای تیریکه قسمت تحتانی آن تحت تاثیر درجه $-T_0$ و قسمت فوقانی تحت درجه

$+T_0$ قرار گرفته بدست آورید. آیا جواب دقیق است؟ α ضریب انبساط حرارتی

فرض گردد.

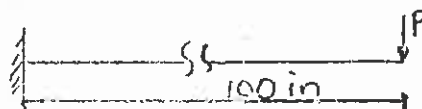
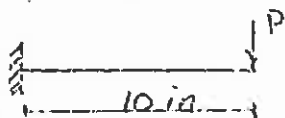


مسئله سوم: با استفاده از المان ۳ گره ای C^0 برای تیر مثالهای زیر را حل نمائید. تغییر مسکن

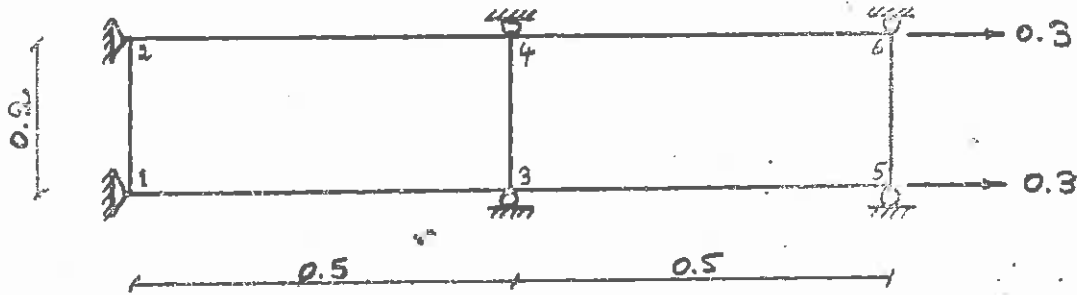
سر تیر را بر حسب P برای هر دو حالت محاسبه نمائید. جوابها را با حل مستقیم مقایسه نمائید.

$m-p-w$ خدش ویرشی هر کدام از تیرها را با طور مجزا محاسبه نمائید. ضخامت و عمق تیر

$$\text{برابر با } 1 \text{ in. فرض شود. } E = 30,000 \text{ Ksi, } \nu = .25$$



۱- صفحه زیر تحت تاثیر نیروهای نشان داده شده قرار گرفته است. با استفاده از المانهای ۴ گرهی و در حالت *Plane strain* تنش و کرنش را در مرکز هر المان بدست آورید. ضخامت صفحه واحد و مقادیر $E=125$ و $\nu=0.25$ میباشد.



PLANE STRAIN LINEAR ELASTIC ELEMENT

MODULUS .12500E+03
 POISSON RATIO .25000
 DENSITY .00000E+00
 GAUSS PTS/DIR 2
 STRESS PTS 1
 WEIGHT DENSITY .00000E+00
 THICKNESS 1.000

NODAL DISPLACEMENTS

TIME .00000E+00

NODE	1	COORD	2	COORD	1	DISPL	2	DISPL
1	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	
2	.0000	.2000	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00		
3	.5000	.0000	.1000E-01	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00		
4	.5000	.2000	.1000E-01	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00		
5	1.0000	.0000	.2000E-01	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00		
6	1.0000	.2000	.2000E-01	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00		

۲- یک سیلندر استوانه ای ضخیم تحت تاثیر فشار داخلی $P = 100$ با نیروی محوری صفر قرار دارد. شعاع داخلی $a = 200$ و شعاع خارجی $b = 300$ میباشد. مقادیر $E = 100,000$ و $\nu = 0.25$ فرض شود. حل طبق کتاب *Mechanics of Materials* نوشته E.P. Popov عبارتست از:

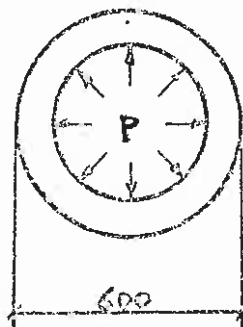
$$\sigma_r(x) = \frac{a^2 P}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad \text{تنش شعاعی}$$

$$\sigma_\theta(x) = \frac{a^2 P}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \quad \text{تنش مماسی}$$

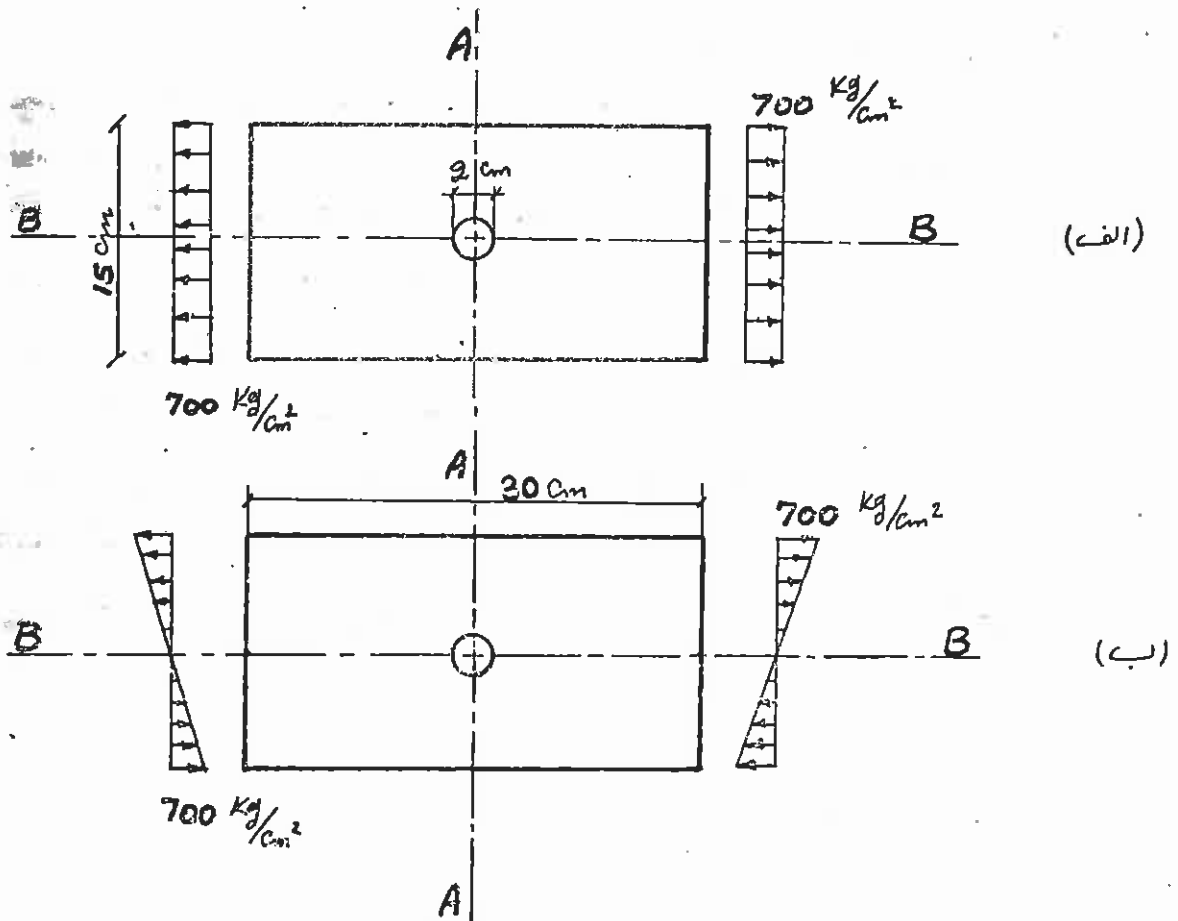
بر روی یک نمودار که محور x آن شعاع در فاصله 200 تا 300 و محور y آن تنشهای شعاعی و مماسی را نشان میدهد تنشهای واقعی را رسم نمایید. تنشهای بدست آمده در هر یک از حالات زیر را نیز بر روی همان نمودار رسم نمایید.

- الف - المان مثلثی و حداکثر ۱۰ گره با علامت Δ
- ب - المان ۴ گره ای و حداکثر ۱۰ گره با علامت \square
- ج - المان مثلثی و حداکثر ۲۲ گره با علامت \triangle
- د - المان ۴ گره ای و حداکثر ۲۲ گره با علامت \square
- ه - المان ۸ گره ای و حداکثر ۲۲ گره با علامت \otimes

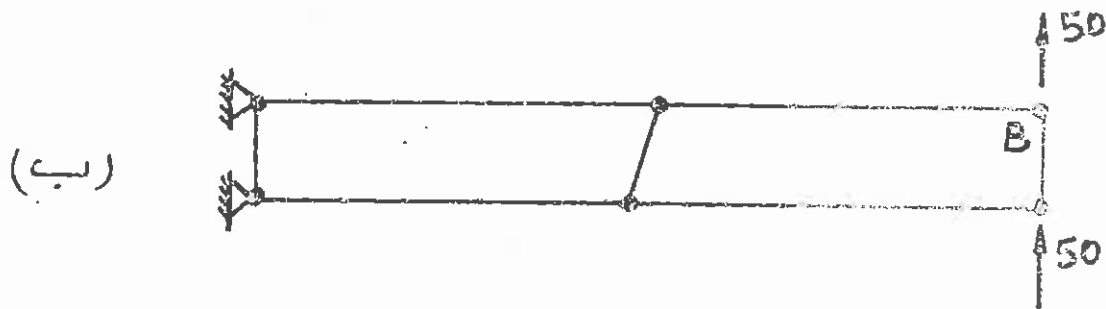
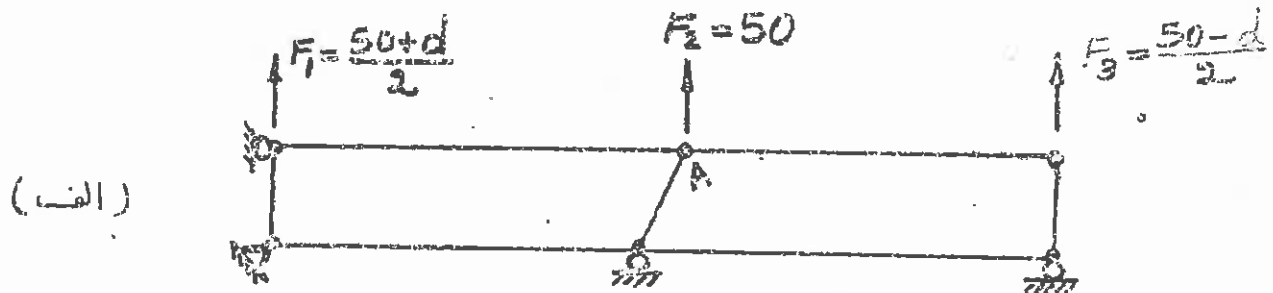
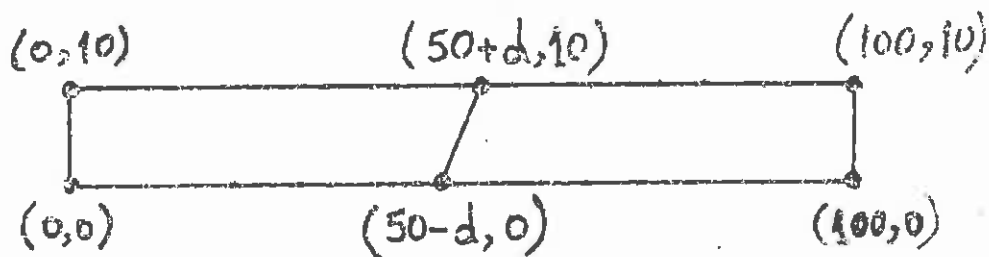
برای هر حالت فوق شکل المان بندی را رسم کنید.



۳- صفحه سوراخدار شکل زیر تحت اثر دو نوع بارگذاری قرار گرفته است. با استفاده از برنامه FEAP تنش‌های ناشی از دوبارگذاری فوق را در مقاطع A-A و B-B بدست آورده و ترسیم نمایید. مقادیر $E=2.1 \times 10^6 \text{ Kg/Cm}^2$ و $\nu=0.3$ و $t=1 \text{ cm}$ میباشد. نتیجه را با حل دقیق مقایسه نموده و برای هر دو حالت شکل المان بندی را رسم نمایید.



۴- مدل نشان داده شده در شکل زیر که از دو المان تشکیل یافته است، می بایست برای دو نوع بارگذاری تحلیلی گردد. با استفاده از المانهای ۴ گرهه‌سی و در حالت *Plane stress* تغییر مکانها را در نقاط *A* و *B* بدست آورده و آنها را بر روی نموداری که محور افقی آن مقادیر مختلف $d = 0, 1, 5, 10, 25$ و محور قائم آن تغییر مکانهای فوق را نشان میدهد رسم نمایید. مقدار $E = 10^7$ و $\nu = 0.3$ فرض شود. در مورد دقت نتایج بدست آمده به بحث نمائید.



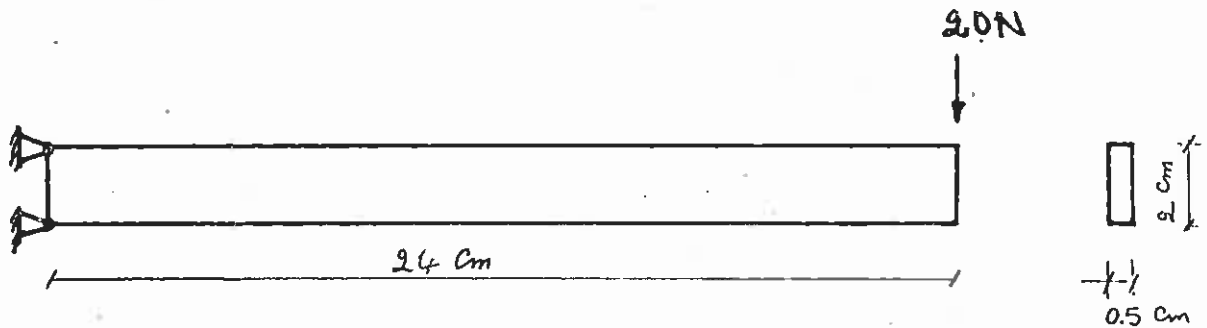
۵- تیرکنسول با ابعاد و مشخصات نشان داده شده در زیر مفروض است. با استفاده از برنامه FEAP در حالت‌های مختلف زیر خیز انتهای تیر را بدست آورید:

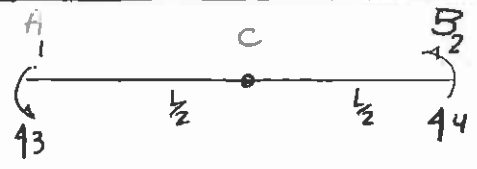
- الف- با استفاده از ۱۲ المان ۴ گرهی و انتگرال گیری $Q-D$ درجه ۲ و همچنین درجه ۱
- ب- " " ۴۸ " " ۴ " " ۲ " " ۱
- ج- " " ۱۲ " " ۹ " " ۳ " " ۲

جواب‌ها را با حل دقیق مقایسه و بحث نمایید.

کدامیک از روش‌های فوق جواب دقیق‌تری نسبت به بقیه میدهد و چرا؟

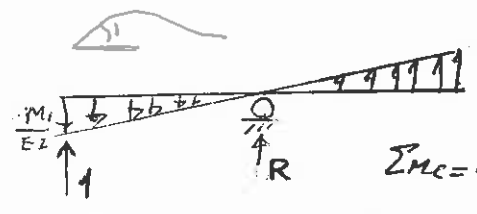
مقادیر $E=2 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$ و $\nu=0.3$ فرض شود.





(۳)

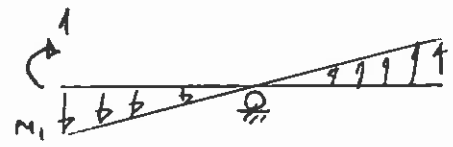
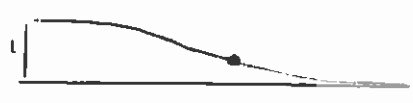
الف) ماکس و مینموم جزئی



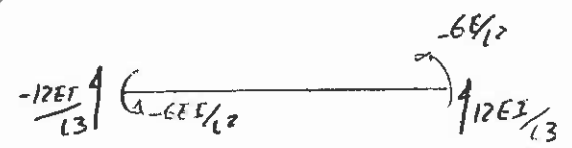
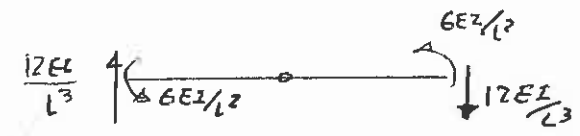
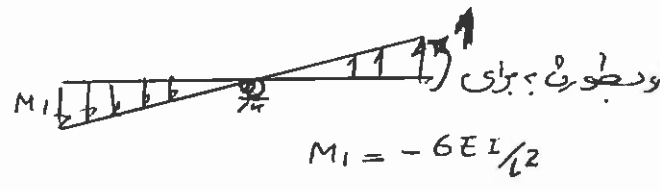
$$\sum M_C = 0 \Rightarrow 2 \left(\frac{M_1}{EI} \frac{L}{2} \times \frac{L}{2} \times \frac{2}{3} \right) = 1 \times \frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow M_1 = \frac{3EI}{L}$$

$$M_C = 0 \Rightarrow V_A = \frac{6EI}{L^2}$$



$$\Rightarrow 2 \left(\frac{M_1}{EI} \frac{L}{2} \times \frac{L}{2} \times \frac{2}{3} \right) = 1 \Rightarrow M_1 = \frac{6EI}{L^2}$$



	①	②	③	④
①	3	3	6/L	-6/L
②	3	3	6/L	-6/L
③	6/L	6/L	12/L^2	-12/L^2
④	-6/L	-6/L	-12/L^2	12/L^2

کدرتها برای
10/10

بهر نظر از ضرب با

Shape function

$$N_1 = -x^4/L^3 + 3x^3/L^2 - 3x^2/L + x \Rightarrow N_{2,1} = -12x^2 + 18x - 6$$

$$N_2 = x^4/L^3 - x^3/L^2 \Rightarrow N_{2,2} = 12x^2 - 6x$$

$$N_3 = 1 - 3x^2/L^2 + 2x^3/L^3 \Rightarrow N_{3,2} = -6 + 12x$$

$$N_4 = 3x^2/L^2 - 2x^3/L^3 \Rightarrow N_{4,2} = 6 - 12x$$

$$\int_0^1 \{N_{22}\} EI \langle N_{22} \rangle$$

با منظر از ما دوامه صورتاً یک من

$$K = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4.8 & 1.2 & 6 & -6 \\ 1.2 & 4.8 & 6 & -6 \\ 6 & 6 & 12 & -12 \\ -6 & -6 & -12 & 12 \end{bmatrix} \frac{10}{10}$$

جوابش: نتوانست این کار را با مقدار exact از خودی در دایره (دو)

$\int_{J=1}^2$
 $\int_{I=1}^2$

می باشد که نشان آن است که ابعاد آنکه فقط $\frac{dy^2}{dx^2}$ در وسط بار صفر
رابطه کافی برای حل بعضی در وسط بار و همچنین $order$ توابع شکل ما اکتفای
پوستگی خود تقاضای شده را نمی کند



$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{M}{EI} \rightarrow \left(\frac{L}{2} = 0\right)$$

فقط پیرا کرن توابع شکل

برای مثال در هر پیرا کرن تابع شکل N_2 آرد می شود N_2 ? ★

$$\begin{cases} N_2(0) = 0 \text{ (I)}, & N_2(L) = 0 \text{ (IV)} \\ N_2'(0) = 0 \text{ (II)}, & N_2'(L) = 1 \text{ (V)} \\ N_{2,22}(0) = 0 \text{ (III)}, & N_{2,22}(L) = 0 \text{ (VI)} \end{cases} \quad N_2 \text{ در } \left(\frac{L}{2}\right) = 0 \text{ (VII)}$$

$$N = ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + Ex^2 + Fx + G$$

$$\begin{cases} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{cases} \Rightarrow G, F, E = 0$$

$$N_2 = 6ax^5 + 5bx^4 + 4cx^3 + 3dx^2 + 2Ex + F$$

$$N_{2,2} = 30ax^4 + 20bx^3 + 12cx^2 + 6dx + 2E$$

$$\text{(VII)} \quad N_{2,2}\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{15}{8}a + \frac{5}{2}b + 3c + 3d + 2E = 0$$

$V(x)$

$$\begin{aligned} (IV) \Rightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 30 & 20 & 12 & 6 \\ 15/8 & 5/2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ (V) \Rightarrow & \\ (VI) \Rightarrow & \\ (VII) \Rightarrow & \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & -10 & -18 & -4 & 0 \\ 0 & 5/8 & 9/8 & 9/8 & 0 \end{array} \right]$$

تعمیر
 $\Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=9 \\ c=-5 \end{cases}$

l=1 صورت پانزوی

$$\Rightarrow N_2 = 4x^6 + 9x^5 - 5x^4$$

☆

$$\begin{cases} N_1 = 4x^6 - 15x^5 + 20x^4 - 10x^3 \\ N_2 = -4x^6 + 9x^5 - 5x^4 \\ N_3 = -6x^5 + 15x^4 - 10x^3 + 1 \\ N_4 = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 \\ N_5 = \frac{2}{3}x^6 - 2.5x^5 + 3.5x^4 - \frac{13}{6}x^3 + .5x^2 \\ N_6 = \frac{2}{3}x^6 - 1.5x^5 + x^4 - x^3/6 \end{cases}$$

نحوه نوشتن به نفعی N ها را در نظر:

$$\begin{cases} N_{1,2} = 120x^4 - 300x^3 + 240x^2 - 60x \\ N_{2,2} = -120x^4 + 180x^3 - 60x^2 \\ N_{3,2} = -120x^3 + 180x^2 - 60x \\ N_{4,2} = 120x^3 - 180x^2 + 60x \\ N_{5,2} = 20x^4 - 50x^3 + 42x^2 - 13x + 1 \\ N_{6,2} = 20x^4 - 30x^3 + 12x^2 - x \end{cases}$$

$$K = \int_0^1 \{N_{i,2}\} EI \langle N_{i,2} \rangle$$

$$K = \frac{EI}{L}$$

5.7143	2.8571	8.5714	-8.5714	0.238095	-0.19048
	5.7143	8.5714	-8.5714	0.19048	-0.238095
		17.1429	-17.1429	0.42857	-0.42857
			17.1429	-0.42857	0.42857
				0.053968	-0.01746
					0.053968

$$K = \begin{bmatrix} k_{ee} & k_{ei} \\ k_{ie} & k_{ii} \end{bmatrix}$$

دستور انباری $k_{ee}' = (k_{ee} - k_{ei} k_{ii}^{-1} k_{ie})$

$$k_{ii}^{-1} = \begin{bmatrix} 20.695684 & 6.6995 \\ 6.6995 & 20.695684 \end{bmatrix}$$

$$k_{ii}^{-1} k_{ie} = \begin{bmatrix} 3.652166 & 2.34793 & 6 & -6 \\ -2.34793 & -3.65216 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

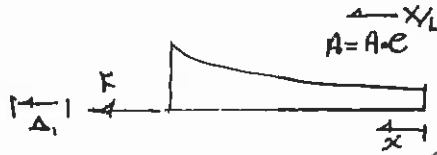
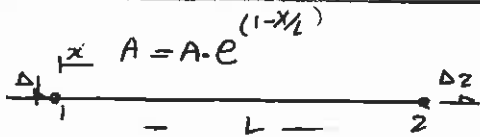
$$k_{ei} k_{ii}^{-1} k_{ie} = \begin{bmatrix} 1.31679617 & 1.2546 & 2.57145 & -2.57145 \\ & 1.3167 & 2.571458 & -2.57145 \\ & & 5.14284 & -5.14284 \\ & & & 5.14284 \end{bmatrix}$$

8
10

$$k_{ee} - k_{ei} k_{ii}^{-1} k_{ie} = \begin{bmatrix} 4.39750 & 1.607543 & 6 & -6 \\ & 4.39750 & 6 & -6 \\ & & 12 & -12 \\ & & & 12 \end{bmatrix}$$

جواب در مابقی صفحات است

وعدله:



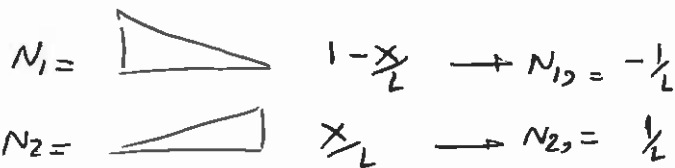
المنطقه

$$\Delta_1 = \int_0^L \frac{F_1 dx}{AE}$$

$$\Delta_1 = 1 = \frac{F}{A_0 E} \int_0^L \frac{dx}{e^{x/L}} = \frac{F}{A_0 E} [L e^{-x/L}]_0^L = \frac{FL}{A_0 E} (1 - e^{-1}) = 1$$

$$\Rightarrow F = \frac{AE}{L(1 - e^{-1})}$$

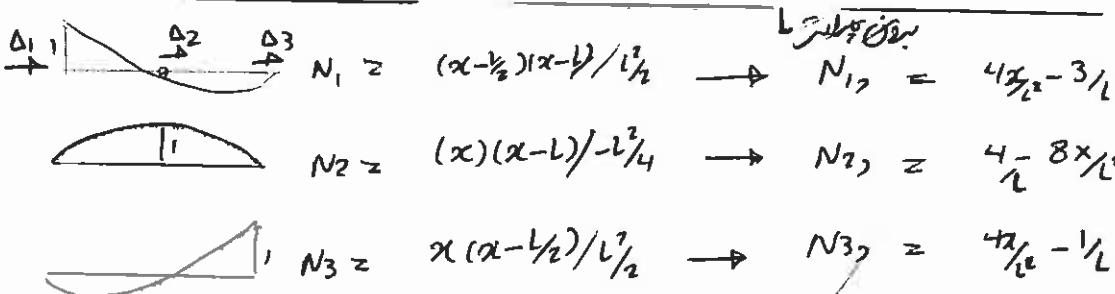
$$\Rightarrow K = \left(\frac{1}{1 - e^{-1}} \right) \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1.581976707 \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \frac{10}{10}$$



نوابج شکله خطی

$$K = \int_0^L A_0 e^{(1-x/L)} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} dx = \frac{A_0 E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{(e-1)}{1.718281828}$$

با 8.6%



بقوه محوری

$$\int A_0 (e^{(1-x/L)}) \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \langle N_1 \ N_2 \ N_3 \rangle = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 5.2108 & .64735 & -5.8581 \\ & 2.957 & -3.6044 \\ & & 9.46255 \end{bmatrix}$$

$$K_{ii}^{-1} = \frac{1}{9.46255} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} (K_{ee} - K_{ei} \ K_{ie}^{-1} \ K_{ie})$$

10/10

$$\begin{bmatrix} 5.2108 & .6437 \\ & 2.957 \end{bmatrix} = \frac{1}{9.46255} \begin{bmatrix} -5.8581 \\ -3.6044 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.8581 & -3.6044 \end{bmatrix}$$

$$= 1.5841522 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{AE}{L}$$

با 137% خطا

$$\frac{\Delta 1}{\Delta 3 \rightarrow \partial u_1} \quad \frac{\Delta 2}{\Delta 4 \rightarrow \partial u_2}$$

$$\begin{aligned}
 N_1 &= 1 - 3x^2/l^2 + 2x^3/l^3 \rightarrow N_{1,2} = -6x/l^2 + 6x^2/l^3 \\
 N_2 &= 3x^2/l^2 - 2x^3/l^3 \rightarrow N_{2,2} = 6x/l^2 - 6x^2/l^3 \\
 N_3 &= x - 2x^2/l + x^3/l^2 \rightarrow N_{3,2} = 1 - 4x/l + 3x^2/l^2 \\
 N_4 &= -x^2/l + x^3/l^2 \rightarrow N_{4,2} = -2x/l + 3x^2/l^2
 \end{aligned}$$

$$k = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 2.01404 & -2.01404 & .077948 & .24578 \\ & 2.01404 & -.077948 & -.24578 \\ & & .29272 & -.59926 \\ & & & .17884 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 k_{ii}^{-1} &= \begin{bmatrix} 3.66784175 & 1.22902641 \\ & 6.0034144 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} .077948 & -.07794 \\ .24578 & -.24578 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} .587599 & -.587599 \\ 1.56950 & -1.56950 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} .077948 & .24578 \\ -.077948 & -.24578 \end{bmatrix} = k_{ei} \times \begin{bmatrix} .431081507 & -.4310815 \\ -.4310815 & .4310815 \end{bmatrix}$$

$$(k_{ee} - k_{ei} k_{ii}^{-1} k_{ie}) \begin{bmatrix} \Delta e \\ \Delta e \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1.58295849}{10}$$

0.062%



$$h(x) = h_0 \left(1 + \frac{x}{2L}\right)$$

$$I_{(x)} = \frac{t h^3}{12}$$

$$I = I_0 \left(1 + \frac{x}{2L}\right)^3$$

$$K_1 = \int_0^L \frac{x^2}{I(x)} dx = \int_0^L \frac{x^2}{I_0 \left(1 + \frac{x}{2L}\right)^3} dx = .13261 \frac{L^3}{I_0}$$

ویر

$$K_2 = \int_0^L \frac{(L-x)^2}{I(x)} dx = \int_0^L \frac{(1-x)^2}{I_0 \left(1 + \frac{x}{2L}\right)^3} dx = .24372 \frac{L^3}{I_0}$$

$$K = \frac{EI^2}{K_1 K_2 - K_3^2} = 41.17037665 \times \frac{E}{L^4}$$

$$K_3 = \int_0^L \frac{x(L-x)}{I(x)} dx = \dots = .0896125 \frac{L^3}{I_0}$$

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & K_3 & (K_1 + K_3)/L & -(K_1 + K_3)/L \\ K_3 & K_2 & K_2 + K_3/L & -(K_2 + K_3)/L \\ & & K_1 + K_2 + 2K_3/L^2 & -(K_1 + K_2 + 2K_3)/L^2 \\ & & & (K_1 + K_2 + 2K_3)/L^2 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 5.4596036 & 3.68938 & 9.1488 & -9.1488 \\ & 10.0340442 & 13.72342 & -13.72342 \\ & & 22.87 & -22.87 \\ & & & 22.87 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = x - 2x^3/L + x^3/2L^2 \rightarrow N_{1,1} = 6x/L^2 - 4$$

$$N_2 = -x^2/L + x^3/L^2 \rightarrow N_{2,1} = 6x/L^2 - 2$$

$$N_3 = 1 - 3x^2/L^2 + 2x^3/L^3 \rightarrow N_{3,1} = 12x/L^3 - 6/L^2$$

$$N_4 = 3x^2/L^2 - 2x^3/L^3 \rightarrow N_{4,1} = 6/L^2 - 12x/L^3$$

$$\int_0^L EI \cdot \left(1 + \frac{x}{2L}\right)^3 \{N_{2,1}\} \langle N_{3,1} \rangle dx$$

$$K = \begin{bmatrix} 5.95 & 4.25 & 10.2 & -10.2 \\ & 10.675 & 14.925 & -14.925 \\ & & 25.125 & -25.125 \\ & & & 25.125 \end{bmatrix}$$

توانع مشطه
8/10

- ج

$$K_4 = \int_0^L \frac{mx}{I} dx = .0194 wl^4 / I$$

$$K_5 = \int_0^L \frac{m(L-x)}{I} dx = .0251 wl^4 / I$$

$$M_{ab}^F = \frac{K_1 K_5 - K_3 K_4}{K_1 K_2 - K_3^2} = .0644 wl^2$$

✓
✓_{ab}, ✓_{ba}?

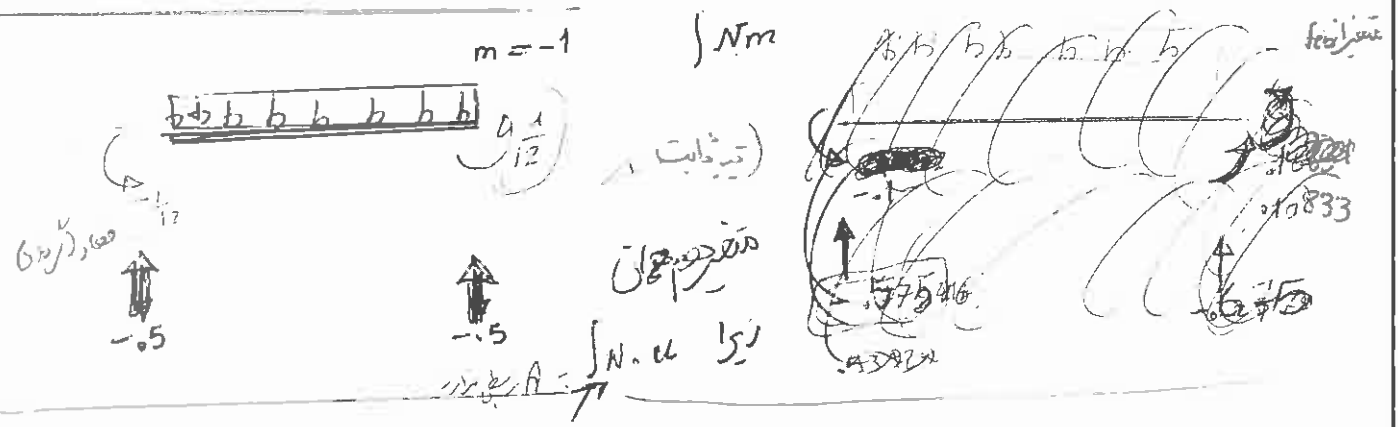
$$M_{ba}^F = \frac{K_3 K_5 - K_2 K_4}{K_1 K_2 - K_3^2} = -.1051 wl^2$$

$$M_{Fab} = \int_0^L (1+.5x)^3 (x - 2x^2 + x^3) dx = .14702 wl^2$$

$$M_{Fba}^F = \int_0^L (1+.5x)^3 (x^3 - x^2) dx = -.18631 wl^2$$

$$V_{ab} = \frac{M_{Fab} - M_{Fba}^F}{L} - \int_0^L m_x dx$$

$$V_{ba} = \frac{M_{Fba}^F - M_{Fab}}{L} - \int_0^L m_x dx$$



$$K_1 = .13281$$

$$K_2 = .24372$$

$$K_3 = .0896125$$

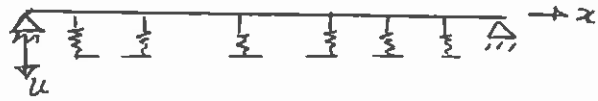
$$K_4 = .17037704$$

$$K_5 = -.722$$

$$K_6 = -.333$$

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} + ku = P \Rightarrow \frac{d^4 u}{dx^4} + u = 1 \quad \text{مشکل اول:}$$

$$\frac{P}{EI} = \frac{k}{EI} = 1$$



$$u(0) = u(1) = \frac{d^2 u}{dx^2}(0) = \frac{d^2 u}{dx^2}(1) = 0$$

RITZ

$$\phi_1(x) = \sin \pi x$$

$$\phi_2 = \sin 3\pi x$$

$$(x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$$

$$u = u_b + \langle \phi \rangle \{a\}$$

$$u_b = 0$$

$$\int_0^1 w \left(\frac{d^4 u}{dx^4} + u - 1 \right) dx = 0$$

$$\int_0^1 w u_{,iiii} dx = \left[w u_{,iii} \right]_0^1 - \int_0^1 w_{,i} u_{,iii} dx = - \left(w_{,i} u_{,iii} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 w_{,ii} u_{,ii} dx = \int_0^1 w_{,ii} u_{,ii} dx$$

BANDRY

$$\Rightarrow \int_0^1 w_{,ii} u_{,ii} dx + \int_0^1 w u dx = \int_0^1 w dx$$

$$\begin{cases} u = \langle \phi \rangle \{a\} \\ w = \langle A \rangle \{ \phi \} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{,ii} = \langle \phi_{,ii} \rangle \{a\} \\ w_{,ii} = \langle A_{,ii} \rangle \{ \phi_{,ii} \} \end{cases}$$

$$\langle A \rangle \left(\sum_i a_i \int_0^1 \{ \phi_{,ii} \} \langle \phi_{,ii} \rangle + \int_0^1 \{ \phi \} \langle \phi \rangle \right) = \langle A \rangle \int_0^1 \{ \phi \}$$

$$\phi = \begin{cases} \sin \pi x \\ \sin 3\pi x \end{cases}$$

$$\phi_{,ii} = -\pi^2 \begin{cases} \sin \pi x \\ 9 \sin 3\pi x \end{cases}$$

$$K_{11} = \int_0^1 \pi^4 \sin^2 \pi x + \int_0^1 3 \sin^2 \pi x = \left(\frac{\pi^4 + 1}{2} \right)$$

$$K_{12} = \int_0^1 9\pi^4 \sin \pi x \sin 3\pi x + \int_0^1 \sin \pi x \sin 3\pi x = 0$$

$$K_{22} = \int_0^1 81\pi^4 \sin^2 3\pi x + \int_0^1 \sin^2 3\pi x = \left(\frac{81\pi^4 + 1}{2} \right) \frac{10}{10}$$

$$f_1 = \int_0^1 \sin \pi x = \frac{2}{\pi}$$

$$a_1 = 0.1293823$$

$$f_2 = \int_0^1 \sin 3\pi x = \frac{2}{3\pi}$$

$$a_2 = 5.378353147 \times 10^{-5}$$

$$u = 0.1293823 \sin(\pi x) + 5.378353147 \times 10^{-5} \sin(3\pi x)$$

$$v^4 + u = 1, \quad Y_p = e^{\lambda x} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \lambda^4 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{i} \rightarrow (\lambda = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}) \leftarrow \text{این دو ریشه بیس}$$

$$\lambda = \pm (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)$$

$$Y_p = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} (c_1 \cos(\frac{x}{\sqrt{2}}) + c_2 \sin(\frac{x}{\sqrt{2}})) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} (c_3 \cos(\frac{x}{\sqrt{2}}) + c_4 \sin(\frac{x}{\sqrt{2}}))$$

هنی چون $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ منفی می شود

$$Y_h = \frac{e^0 = 1}{D^4 + 1} = \frac{e^0}{P_0(\cdot)} = \frac{e^0}{1} = 1 \Rightarrow Y_h = 1$$

$$u = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} (c_1 \cos(\frac{x}{\sqrt{2}}) + c_2 \sin(\frac{x}{\sqrt{2}})) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} (c_3 \cos(\frac{x}{\sqrt{2}}) + c_4 \sin(\frac{x}{\sqrt{2}})) + 1$$

$$u' = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} (c_1 (\cos \frac{x}{\sqrt{2}} - \sin \frac{x}{\sqrt{2}}) + c_2 (\sin \frac{x}{\sqrt{2}} + \cos \frac{x}{\sqrt{2}})) + \frac{e^{-x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} (c_3 (-\sin \frac{x}{\sqrt{2}} - \cos \frac{x}{\sqrt{2}}) + c_4 (\cos \frac{x}{\sqrt{2}} - \sin \frac{x}{\sqrt{2}}))$$

$$u'' = \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{2} (2c_1 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} + 2c_2 \cos \frac{x}{\sqrt{2}}) + \frac{e^{-x/\sqrt{2}}}{2} (2c_3 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} - 2c_4 \cos \frac{x}{\sqrt{2}})$$

$$Y(\cdot) = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \frac{\sqrt{1}{2}}{e} & -\frac{\sqrt{1}{2}}{e} & -\frac{\sqrt{1}{2}}{e} \\ \frac{\sqrt{1}{2}}{e} & \frac{\sqrt{1}{2}}{e} & -\frac{\sqrt{1}{2}}{e} & -\frac{\sqrt{1}{2}}{e} \end{bmatrix} \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{matrix} = \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow c_1 = -.310097657$$

$$\Rightarrow c_2 = -.160734665$$

$$\Rightarrow c_3 = -.689902342$$

$$\Rightarrow c_4 = -.160734665$$

خطای متوسط: 0.027%

X =	1/6	1/3	1/2
FITZ Galarkin	.006522898	.011204835	.012884446
exact	.00652437364	.011201844	.012888016

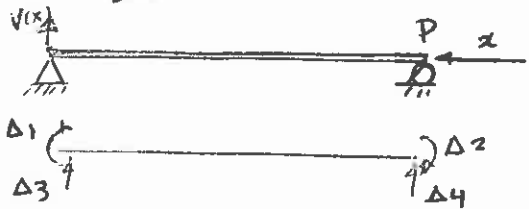
Y(x)

(2) 2

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + P \frac{d^2 v}{dx^2} = 0$$

$$K = K_b - K_g$$

POSS
POSS



$$\phi_1 = -x + 2x^2/L - x^3/L^2$$

$$\phi_2 = x^2/L - x^3/L^2$$

$$\phi_3 = 1 - 3x^2/L^2 + 2x^3/L^3$$

$$\phi_4 = 3x^2/L^2 - 2x^3/L^3$$

$$\int w (EI \frac{d^4 v}{dx^4} + P \frac{d^2 v}{dx^2}) = 0 \quad \text{or } w, w, \dots \rightarrow \text{Specify Bandy}$$

$$\int w EI \frac{d^4 v}{dx^4} = \left[w EI v''' \right]_0^L - \int_0^L w' EI v''' = - \left(w' EI v''' \Big|_0^L - \int_0^L w'' EI v'' \right) = \int_0^L w'' EI v''$$

$$\int w P \frac{d^2 v}{dx^2} = \left[w P v' \right]_0^L - \int_0^L w' P v' = - \int_0^L w' P v'$$

$$\Rightarrow \int w (EI \frac{d^4 v}{dx^4} + P \frac{d^2 v}{dx^2}) = \int_0^L w'' EI v'' - \int_0^L w' P v' = 0$$

$$\begin{cases} w = \langle A \rangle \{ \phi \} \\ w'' = \langle A \rangle \{ \phi'' \} \end{cases} \quad \begin{cases} v = u b + \langle \phi \rangle \{ a \} \\ v'' = u'' b + \langle \phi'' \rangle \{ a \} \end{cases}$$

$$K_b = EI \int_0^L w'' v'' = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6/L & -6/L \\ 2 & 4 & 6/L & -6/L \\ 6/L & 6/L & 12/L^2 & -12/L^2 \\ -6/L & -6/L & -12/L^2 & 12/L^2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} / \\ 10 \\ 10 \end{matrix}$$

$$K_g = P \int_0^L w' v' = \frac{P}{30L} \begin{bmatrix} 4L^2 & & & \\ -L^2 & 4L^2 & & \\ 3L & 3L & 36 & \\ -3L & -3L & -36 & 36 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} / \\ 10 \\ 10 \end{matrix}$$

$$\psi_1' = 1 - 4x/L + 3x^2/L^2$$

$$\psi_2' = -2x/L + 3x^2/L^2$$

$$\psi_3' = -6x/L^2 + 6x^2/L^3$$

$$\psi_4' = 6x/L^2 - 6x^2/L^3$$

v'(x)

$$u(-1) = 0 \quad u(1) = 1 \quad u_b = x \quad -1 < x < 1$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x^2 = 0$$

مسألة

$$u = \sum_{i=1}^n c_i N_i$$

الف) Galerkin

$$u_b = x \Rightarrow u_b(1) = 1 \quad u_b'(1) = 1$$

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= x^2 - 2x \\ N_2 &= 2x^3 - 3x^2 \\ N_3 &= 3x^4 - 4x^3 \end{aligned} \right\} \text{static boundary}$$

$$L = (D^2 + 1), \quad P = +x^2$$

$$\int_{-1}^1 w_i u(N_i) = - \int_{-1}^1 w_i x^2 \Rightarrow \int_{-1}^1 w_i \begin{bmatrix} x^2 - 2x + 2 \\ 2x^3 - 3x^2 + 12x - 6 \\ 3x^4 - 4x^3 + 36x^2 - 24x \end{bmatrix} = - \int_{-1}^1 w_i x^2 - \int_{-1}^1 w_i x$$

$$K_{11} = \int (x^2 - 2x)(x^2 - 2x + 2) = -0.8$$

$$K_{12} = -17/30$$

$$K_{13} = -46/105$$

$$K_{21} = \int (2x^3 - 3x^2)(x^2 - 2x + 2) = -17/30$$

$$K_{22} = -29/35$$

$$K_{23} = -123/140$$

$$K_{31} = \int (3x^4 - 4x^3)(x^2 - 2x + 2) = -46/105$$

$$K_{32} = -123/140$$

$$K_{33} = -38/35$$

$$L(x) = x$$

$$F_1 = - \int (x + x^2)(x^2 - 2x) = 43/60$$

$$F_2 = - \int (x + x^2)(2x^3 - 3x^2) = 37/60$$

$$F_3 = - \int (x + x^2)(3x^4 - 4x^3) = 113/210$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -0.71769223 \\ \alpha_2 = -0.246314612 \\ \alpha_3 = -6.698546907 \times 10^{-3} \end{cases}$$

$$-1.0431558$$

$$-0.79665486$$

$$1.163513775$$

$$\frac{10}{10} \quad Y = x + \alpha_1(x^2 - 2x) + \alpha_2(2x^3 - 3x^2) + \alpha_3(3x^4 - 4x^3)$$

ب) point collocation

$$(1/4 \quad 2/4 \quad 3/4) \rightarrow$$

$$K_{11} = 25/16$$

$$K_{12} = 1/25$$

$$K_{13} = 17/16$$

$$F_1 = -5/16$$

$$K_{12} = -3.15625$$

$$K_{22} = -0.5$$

$$K_{23} = 2.15625$$

$$F_2 = -3/4$$

$$K_{13} = -3.30078$$

$$K_{32} = -3.3125$$

$$K_{33} = 1.51171875$$

$$F_3 = -21/16$$

$$\alpha_1 = -0.147$$

$$\alpha_2 = 0.3444$$

$$\alpha_3 = -0.48313$$

$$\frac{10}{10}$$

(2/3)

exact

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x^2 = 0$$

Basics - in page

$$u'' + u = -x^2 \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \lambda = i \Rightarrow Y_p = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$\Rightarrow Y_h = Ax^2 + Bx + C, \quad Y'' = 2A$$

$$Ax^2 + Bx + C + 2A = -x^2 \quad A = -1 \quad C = -2 \quad B = 0 \Rightarrow Y_p = 2 - x^2$$

$$\begin{cases} Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2 - x^2 \\ Y(0) = 0 \Rightarrow C_1 + 2 = 0 \Rightarrow C_1 = -2 \\ Y'(1) = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{3 - 2 \sin 1}{\cos 1} \end{cases} \Rightarrow Y = \left(\frac{3 - 2 \sin 1}{\cos 1} \right) \sin x - 2 \cos x + 2 - x^2$$

subdomain

$$w_1 = 1 \quad \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \quad w_2 = \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} = 1 \quad w_3 = \frac{2}{3} \leq x \leq 1$$

$$\begin{aligned} K_{11} &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 1 \cdot (x^2 - 2x + 2) = .567901 & K_{12} &= .419753 & K_{13} &= .345679 \\ K_{21} &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 1 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 12x - 6) = -1.364198 & K_{22} &= -.1666 & K_{23} &= 1.030864 \\ K_{31} &= \int_{\frac{2}{3}}^1 1 \cdot (3x^4 - 4x^3 + 36x^2 - 24x) = -.89877 & K_{32} &= -.99753 & K_{33} &= 1.4963 \end{aligned}$$

$$F_1 = -.057901 \quad F_2 = -.253086 \quad F_3 = -.512346$$

$$\alpha_1 = .043552 \quad \alpha_2 = .129557 \quad \alpha_3 = -.282198$$

W/O

least square

$$\begin{aligned} w_1 &= x^2 - 2x + 2 = L_{N1} \\ w_2 &= 2x^3 - 3x^2 + 12x - 6 = L_{N2} \\ w_3 &= 3x^4 - 4x^3 + 36x^2 - 24x = L_{N3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{11} &= \int w_1(L_{N1}) = 1.8667 & K_{22} &= 9.9714 & F_1 &= -.95 \\ K_{21} &= \int w_2(L_{N1}) = -1.5667 & K_{23} &= 9.9214 & F_2 &= -1.38333 \\ K_{31} &= \int w_3(L_{N1}) = -1.2381 & K_{33} &= 16.743 & F_3 &= -1.6619 \\ \alpha_1 &= -.725779 & \alpha_2 &= -.205364 & \alpha_3 &= -.029388 \end{aligned}$$

$x =$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
exact	.796555	1.163498	1.491139
Galerkin	.79665	1.1635197	1.491040
Print-coll	.37938	.58907	.828514
Subdomain	.3552	.5560	.7766
least square	.779163	1.137450	1.459118

~~1.163~~

31

۷۴/۱۲/۸۸

39/50

بسمه تعالی

۷۴۲۹۰۰۴

سری

رجوعه شهر

محمد رضا میرپور

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - u = 0$$

$$x^2 - 1 = 0 \quad \lambda = \pm 1 \Rightarrow c_1 e^{-x} + c_2 e^{+x}$$

۳

$$u(-1) = (-1) \quad u(1) = 1$$

$$\rightarrow Y = \frac{1}{(e \cdot e^{-1})} (e^x - e^{-x}) \leftarrow \text{exact} \quad \frac{3}{10}$$

$$\text{الف) } N_1 = \sin \pi x \\ N_2 = \sin 2\pi x$$

$$L(N_1) = -\pi^2 \sin \pi x - \sin \pi x = -(\pi^2 + 1) \sin \pi x \\ L(N_2) = (-4\pi^2 - 1) \sin 2\pi x = -(4\pi^2 + 1) \sin 2\pi x$$

$$2eb = x$$

$$\begin{cases} w_1 = \sin \pi x \\ w_2 = \sin 2\pi x \end{cases} \begin{matrix} \leftarrow L(N_1) \\ \leftarrow L(N_2) \end{matrix}$$

مصفی از فرم $(\pi^2 + 1)$
از هر دو طرف $(4\pi^2 + 1)x$
 $Ka = E$

$$\begin{cases} K_{11} = -(\frac{\pi^2 + 1}{2}) \\ K_{12} = 0 \end{cases} \begin{cases} K_{21} = 0 \\ K_{22} = -\frac{(4\pi^2 + 1)}{2} \end{cases} \begin{cases} F_1 = -1/\pi \\ F_2 = -1/2\pi \end{cases} \begin{cases} a_1 = .058568 \\ a_2 = .00786389 \end{cases}$$

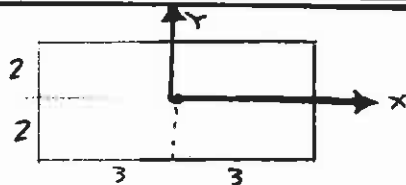
$$\rightarrow \begin{matrix} N_1 = x^2 - x \\ N_2 = x^3 - x^2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} L(N_1) = x - x^2 + 2 \\ L(N_2) = x^2 - x^3 - 2 + 6x \end{matrix} \quad \begin{matrix} = w_1 \\ = w_2 \end{matrix} \quad \frac{6}{10}$$

$$\begin{cases} K_{11} = 4.7 \\ K_{12} = 2.35 \end{cases} \begin{cases} K_{21} = 2.35 \\ K_{22} = 4.2762 \end{cases} \begin{cases} F_1 = 1.0833 \\ F_2 = 1.05 \end{cases} \begin{cases} a_1 = .14853 \\ a_2 = .1635150 \end{cases}$$

$$Y = x + a_1(x^2 - x) + a_2(x^3 - x^2) \quad ?$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2$$

$$\phi = 0 \\ x = \pm 3 \\ x = \pm 2$$



1

$$I = 2 \iint \phi \, dy \, dx$$

$$\begin{matrix} N_1 = \cos \pi x/6 \cos \pi y/4 \rightarrow L N_1 = -(\frac{\pi^2}{6}) (\cos \pi x/6 \cos \pi y/4) \rightarrow (\frac{\pi^2}{4})^2 N_1 \\ N_2 = \cos 3\pi x/6 \cos \pi y/4 \rightarrow L N_2 = -(\frac{3\pi}{6})^2 N_2 - (\frac{\pi}{4})^2 N_1 \\ N_3 = \cos \pi x/6 \cos 3\pi y/4 \rightarrow L N_3 = -(\frac{\pi}{6})^2 N_2 - (3\frac{\pi}{4})^2 N_1 \end{matrix}$$

$$K_{km} = \int_{-3}^3 \int_{-2}^2 \left(\frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \right) N_k \, dy \, dx \quad h = \int_{-3}^3 \int_{-2}^2 2 N_1 \, dy \, dx$$

$$a_1 = \frac{4608}{13\pi^4}$$

$$a_2 = \frac{-4608}{135\pi^4}$$

$$a_3 = \frac{-4608}{255\pi^4}$$

لذا اینجا هم از کس نظری است جواب

$$\Rightarrow I = 2 \iint (a_1 N_1 + a_2 N_2 + a_3 N_3) \, dy \, dx$$

$$= 74.265$$

(weighted Residual) 55 نسواں جواب بر گرفته از صفی



$$\frac{N}{EI} \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dy^4}{dx^4} = 0$$

معادله دیفرانسیل (۲)

$$N; 1 - \frac{\cos 2\pi x}{L}$$

$$2b = 0$$

Galerkin

روش

از این جمله‌ها استفاده شود

گیرد

$$20 = (1 - \frac{\cos 2\pi x}{L}) = N$$

$$2b = 0$$

$$N(0) = 0$$

$$N(L) = 0$$

$$N'(0) = 0$$

$$N'(L) = 0$$

$$L(w) = \frac{N}{EI} \frac{4\pi^2}{L^2} \cos \frac{2\pi x}{L} - \frac{16\pi^4}{L^4} \cos \frac{2\pi x}{L} = (\frac{4\pi^2 N}{EI L^2} - \frac{16\pi^4}{L^4}) \cos 2\pi x$$

$$\int w_j R dx = 0 \quad K_{11} = \int (1 - \frac{\cos 2\pi x}{L}) \times (\frac{4\pi^2 N}{EI L^2} - \frac{16\pi^4}{L^4}) \cos 2\pi x$$

$$K_{11} = \frac{1}{2} (\frac{4\pi^2 N}{EI L^2} - \frac{16\pi^4}{L^4})$$

$$P_1 = 0$$

$$a_1 K_{11} = P_1 = 0$$

شرط نام‌پذیری

وقتی بارهای تمام مقادیر a_i برقرار است K_{11} برای صفر باشد

$$\frac{4\pi^2 N}{EI L^2} - \frac{16\pi^4}{L^4} = 0$$

$$N = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

برای مقدار واقعی $\frac{10}{10}$ کوشش

$$N = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + E$$

$$N' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

$$N(0) = 0 \quad E = 0$$

$$N'(0) = 0 \quad d = 0$$

$$N(L) = 0 \Rightarrow al^4 + bl^3 + cl^2 + dl = 0$$

$$N'(L) = 0 \quad 4al^3 + 3bl^2 + 2cl = 0$$

$$\begin{cases} al^2 + bl = -c \\ 4al^2 + 3bl = -2c \end{cases}$$

$$b = 4a \Rightarrow$$

$$c = -\frac{l^2}{2}$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$N = -\frac{x^4}{2} + Lx^3 - \frac{l^2 x^2}{2} = w$$

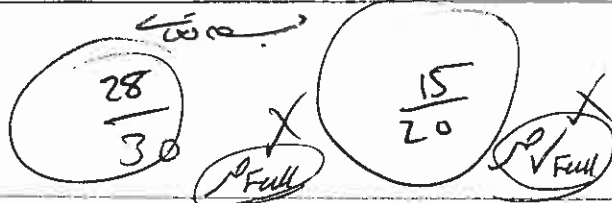
$$L(w) = \frac{N}{EI} (-6x^2 + 6Lx - l^2) - 12$$

$\frac{10}{10}$

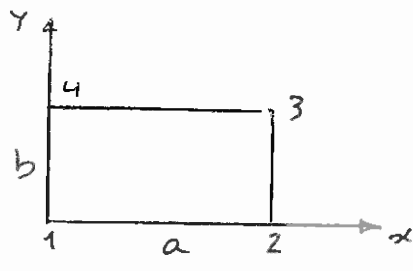
$$K_{11} = 0 \Rightarrow N = \frac{42 EI}{L^2}$$

$$\frac{N L^2}{EI} - 4.76 \times 10^{-3} + 0.2 = 0$$

محل حل
۱۳۹۴-۴



محل حل



$$N_1 = (1 - \frac{x}{a})(1 - \frac{y}{b})$$

$$N_2 = \frac{x}{a}(1 - \frac{y}{b})$$

$$N_3 = \frac{x}{a}(\frac{y}{b})$$

$$N_4 = (1 - \frac{x}{a})\frac{y}{b}$$

Plane stress

$$\sigma = E \epsilon = E B \Delta \quad \Rightarrow \quad C = E B$$

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 \\ e_{12} & e_{11} & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{a}(1 - \frac{y}{b}) & 0 & \frac{1}{a}(1 - \frac{y}{b}) & 0 & \frac{y}{a \cdot b} & 0 & \frac{-y}{a \cdot b} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b}(1 - \frac{x}{a}) & 0 & -\frac{x}{a \cdot b} & 0 & \frac{x}{a \cdot b} & 0 & \frac{(1-x/a)}{b} \\ -\frac{(1-x/a)}{b} & \frac{(1-y/b)}{a} & -\frac{x}{a \cdot b} & \frac{(1-y/b)}{a} & \frac{x}{a \cdot b} & \frac{y}{a \cdot b} & \frac{(1-x/a)}{b} & -\frac{y}{a \cdot b} \end{bmatrix}$$

$$C = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{-(1-y/b)}{a}, & \frac{-\nu(1-x/a)}{b}, & \frac{(1-y/b)}{a}, & \frac{-\nu x}{a \cdot b}, & \frac{y}{a \cdot b}, & \frac{\nu x}{a \cdot b}, & \frac{-y}{a \cdot b}, & \frac{\nu(1-x/a)}{b} \\ \frac{-\nu(1-y/b)}{a}, & \frac{(1-x/a)}{b}, & \frac{\nu(1-y/b)}{a}, & \frac{-x}{a \cdot b}, & \frac{\nu y}{a \cdot b}, & \frac{x}{a \cdot b}, & \frac{-\nu y}{a \cdot b}, & \frac{(1-x/a)}{b} \\ \frac{-(1-\nu)(1-x/a)}{2}, & \frac{(1-\nu)(1-y/b)}{2}, & \frac{(1-\nu)(x-x/a)}{2}, & \frac{(1-\nu)(1-y/b)}{2}, & \frac{(1-\nu)x}{2 a \cdot b}, & \frac{(1-\nu)y}{2 a \cdot b}, & \frac{(1-\nu)(1-x/a)}{2}, & \frac{(1-\nu)(1-y/b)}{2} \end{bmatrix}$$

۱۰/۱۰

~~(محل حل)~~

output of Mathematica

* Integrate[...]

(Faint Mathematica output text, including various mathematical expressions and code snippets)

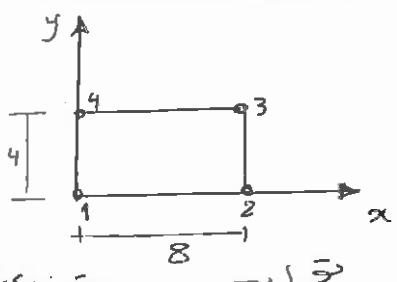
Differential

$$ee = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & 0 \\ e_{12} & e_{11} & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

F/CP

تعمیراتی مسودہ

۷۱۴۳۶.۴



$d = \langle 0, 1, 2, 0 \rangle$

$v = \langle 0, 0, 1, 0 \rangle$

$C = E \epsilon \quad , \quad \epsilon = B \Delta$

$E = 10^4$

$\nu = .25$

$A : (2, 1)$

Plane stress

(1)

توابع درختی برسی

$C : a=8 \quad b=4 \quad \nu=.25$
 $y=1 \quad x=2$

توجه: تغییرات در 2 درجه انفعال اولد احتیاجی را می نویسیم.

$$B = \begin{bmatrix} \nu & \nu & \frac{3}{32} & 0 & \frac{1}{32} & 0 & \nu & \nu \\ \nu & \nu & 0 & -\frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{16} & \nu & \nu \\ \nu & \nu & -\frac{1}{16} & \frac{3}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \nu & \nu \end{bmatrix}$$

$$E = \frac{10^4}{1-.25^2} \begin{bmatrix} 1 & .25 & . \\ .25 & 1 & . \\ . & . & \frac{3}{8} \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} \frac{16}{15} & \frac{4}{15} & 0 \\ \frac{4}{15} & \frac{16}{15} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{E} \end{bmatrix}$$

$$EB = 10^4 \begin{bmatrix} \nu & \nu & \frac{1}{10} & -\frac{1}{60} & \frac{1}{30} & \frac{1}{60} & \nu & \nu \\ \nu & \nu & \frac{1}{40} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{20} & \frac{1}{15} & \nu & \nu \\ \nu & \nu & -\frac{1}{40} & \frac{3}{80} & \frac{1}{40} & \frac{1}{80} & \nu & \nu \end{bmatrix}$$

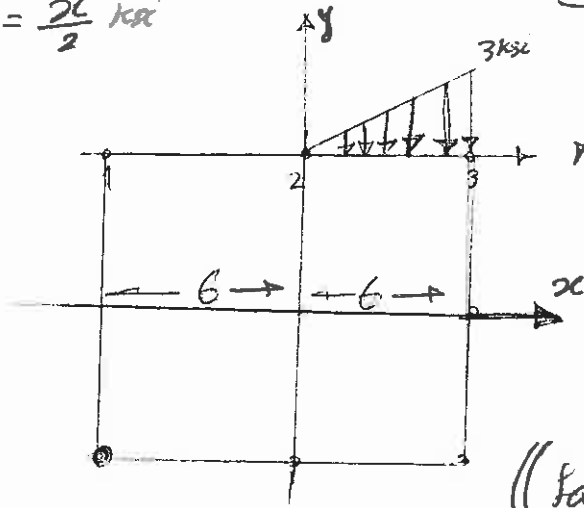
$EB = C \times \left\langle \begin{matrix} 10^4 \\ 0 \\ \uparrow \\ u \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ \uparrow \\ v \end{matrix}, \begin{matrix} 2u \\ 1, 0, 2, 1, 0, 0 \end{matrix} \right\rangle$ ماتریس سونی

$$= \frac{4}{10} \begin{bmatrix} \frac{1}{10} + \frac{2}{30} + \frac{1}{60} \\ \frac{1}{40} + \frac{2}{20} + \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{40} + \frac{2}{40} + \frac{1}{80} \end{bmatrix} = 10^4 \begin{bmatrix} \frac{11}{60} \\ \frac{13}{120} \\ \frac{7}{80} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5500}{3} \\ 3250/3 \\ 375 \end{bmatrix}$$

مقدار / 1

۴/۱۴

$f = \frac{26}{2} kx$



طبق صورتین دریاها $N_1 = (x-6)(y+6)xy / 144 \times 36 = 5184$

$N_1 = (x-6)(y+6)xy / 144 \times 36 = 5184$

$N_2 = (x-6)(x+6)(y+6)y / -36 \times 12 \times 6 = 2592$

$N_3 = (x+6)(y+6)xy / 36 \times 144 = 5184$

$(\int_a^b na \cdot f, f = \frac{x}{2})$

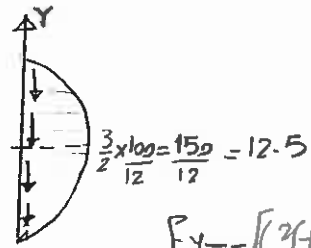
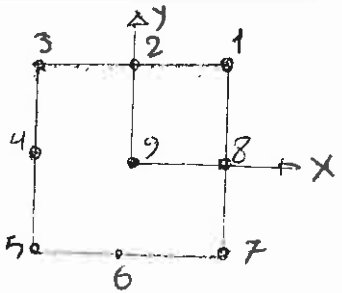
مثال عنوان $F_1 = \int_{y=6}^6 \frac{(x-6)(y+6)xy}{5184} \cdot \frac{x}{2} dx$

$F_1 = \int_{y=6}^6 \frac{x^2(x-6)}{144} dx = \frac{1}{144} \int_0^6 (x^3 - 6x^2) dx = -\frac{3}{4}$

$F_2 = \int_{y=6}^6 \frac{x}{2} \frac{(x^2-36)}{-36} dx = -\frac{1}{72} \int_0^6 (x^3 - 36x) dx = \frac{9}{2}$

$F_3 = \int_{y=6}^6 \frac{x^2}{2} \frac{(x+6)}{72} dx = \frac{1}{144} \int_0^6 (x^3 + 6x^2) dx = \frac{21}{4}$

و $9 = \frac{3 \times 6}{2}$ مقدار مثالی بر چسباتی بر قرار است



سوال 3 طبق توزیع نیروی بر

$F_y = -\left[\frac{(y+6)(y-6)}{36} \times 12.5 \right] = -\left[\frac{12.5}{36} (36 - y^2) \right]$
 $= \frac{12.5}{36} (y^2 - 36) = F_y$

1 $N_1 = (x+6)(y+6)xy / 5184$

$\int_{y=6}^6 \frac{y(y+6)}{72} \times \frac{12.5}{36} (y^2 - 36) dy = -10$

$N_8 = (y+6)(y-6)(x+6)x / 2592$

$\int_{y=6}^6 \frac{(y^2-36)}{-36} \times \frac{12.5}{36} (y^2-36) = -80$

در هر طرف 70 نشان داده است
 در هر طرف 10 است
 جمع هر دو سمتی آن 100 - 100

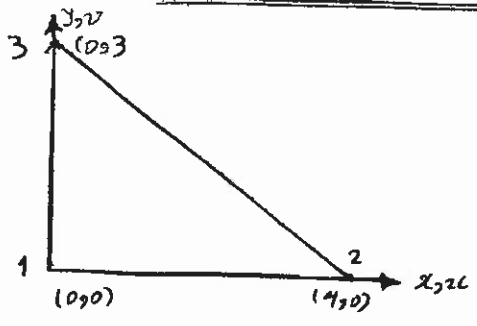
(6/1)

۷۱۴۴۶۰۴
معماری

59/60

« بسمله »
< سرشم >

تعمیرات



$\alpha = .1, \gamma = .25, E = 250$

Plane stress

۱- قیاس دیکر با استتاره از صکی کین:

$N(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y$

$$M = \begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \\ \hline 1 & 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 4 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & 3 & a_2 \end{array}$$

$$M^{-1} = \text{INVERT}(M) \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ \hline -1/4 & 1/4 & 0 & \\ -1/3 & 0 & 1/3 & \end{array}$$

$$\text{Transpose}(M^{-1}) \Rightarrow \begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & -1/4 & -1/3 & 1 & N_1 & 1 - 1/4x - 1/3y \\ 0 & 1/4 & 0 & x & N_2 & 1/4x \\ 0 & 0 & 1/3 & y & N_3 & 1/3y \end{array}$$

۲- دیکر عضو با قیاس به منقاص کین

$$B = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ -1/3 & -1/4 & 0 & 1/4 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{E} = \frac{E(1-\gamma)}{(1+\gamma)(1-2\gamma)} \begin{bmatrix} 1 & \gamma/1-\gamma & 0 \\ \gamma/1-\gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\gamma}{2(1-\gamma)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 & 100 & 0 \\ 100 & 300 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

(6) 2

$$EB = \begin{bmatrix} -75 & -100/3 & 75 & 0 & 0 & 100/3 \\ -25 & -100 & 25 & 0 & 0 & 100 \\ -100/3 & -25 & 0 & 25 & 100/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{matrix} B^T E B \\ = 6 (B^T E B) \end{matrix} \begin{matrix} 6 \times \\ 6 \times \end{matrix} \begin{bmatrix} 1075/36 & & & & & \\ & 50/3 & 475/12 & & & \\ & -75/4 & -100/12 & 75/4 & & \\ & -25/3 & -25/4 & 0 & 25/4 & \\ & -100/9 & -25/3 & 0 & 25/3 & 100/9 \\ & -25/3 & -100/3 & 25/3 & 0 & 0 & 100/3 \end{bmatrix}$$

۳- برای $\Delta t = 5$ و $\alpha = 0.05$ نیروهای تیرگی ؟

$$D = \sum_{ij} \delta_{ij} (3\lambda + 2\mu)$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 611 \\ 622 \\ 612 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} 3\lambda + 2\mu & & \\ & 3\lambda + 2\mu & \\ & & 0 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \frac{1}{1-2\nu} & & \\ & \frac{1}{1-2\nu} & \\ & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 500 \\ 0 \end{bmatrix}$$

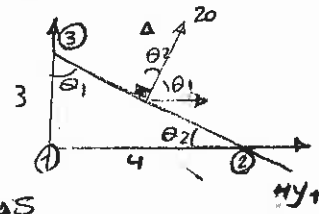
$$F_a = \int B^T (DX) \Delta t = 0.05 \times 6 (B^T D)$$

$$F_a = 0.3 \left\langle -500/4 \quad -500/3 \quad 500/4 \quad 0 \quad 0 \quad 500/3 \right\rangle$$

10 | 10

(6)3

4- چنانچه فاصله عمود بر سطح 20 بر لب 2-3 و ارتفاع آن 10 باشد

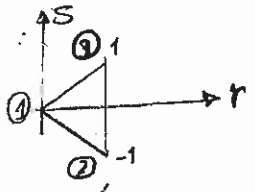
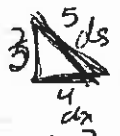


$n_1 = \cos \theta_1 = 3/5$
 $n_2 = \cos \theta_2 = 4/5$

$F = \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \end{bmatrix}$

$F_a = \int \rho \, da \, \{ \bar{r} \} \, ds$

$N_2 = \frac{x}{5}$
 $N_3 = \frac{1-s}{2}$



$\int_0^4 \frac{x}{4} \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \end{bmatrix} ds$

$\bar{x} = 4 \frac{(1-s)}{2} = 2(1-s)$
 $y = 3 \frac{(1+s)}{2}$

$\frac{dx}{ds} = -2$
 $\frac{dy}{ds} = 3/2$

$dr = \sqrt{(\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2}$
 $= \sqrt{4 + 9/4} = 5/2$

$\Rightarrow F_2 = \int_{-1}^1 \frac{(1-s)}{2} \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \end{bmatrix} \times \frac{5}{2} ds = 5 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \times [s - \frac{s^2}{2}]_{-1}^1 = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow F_3 = \int_{-1}^1 \frac{1+s}{2} \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \end{bmatrix} \times \frac{5}{2} ds = 5 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \times 2 = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix}$

راه دوم در پائین

5- تقریباً $u' = -0.01$ و $v' = 0.03$ برآورد آن را در هر دو جهت

$F = K \Delta$

$\Delta = \langle 0.03, -0.01, 0, 0, 0, 0 \rangle$

$\Rightarrow F = \langle \frac{35}{8}, \frac{5}{8}, -\frac{23}{8}, -\frac{9}{8}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \rangle$

$\frac{35}{8} - \frac{23}{8} - \frac{3}{2} = 0$
 $\frac{5}{8} - \frac{9}{8} + \frac{1}{2} = 0$

حیرت انگیز است

م (فرض)
 حل شده از راه دوم

$x = \sum n_i x_i = l_1 x_1 + l_2 x_2 + (1-l_1-l_2) x_3$
 $y = \sum n_i y_i = l_1 y_1 + l_2 y_2 + (1-l_1-l_2) y_3$

$T = \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \end{bmatrix}$ بردار ثابت

$dr^2 = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(dl_2(x_2-x_3))^2 + (dl_2(y_2-y_3))^2} = 5 dl_2$

دری $l_1 = 0$

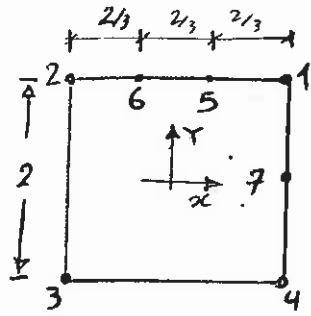
$\Rightarrow F_2 = \int_0^1 l_2 \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \end{bmatrix} 5 dl_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \end{bmatrix} \times \frac{5}{2} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow F_3 = \int_0^1 (1-l_2) \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \end{bmatrix} 5 dl_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \end{bmatrix} \times \frac{5}{2} = \begin{bmatrix} 30 \\ 40 \end{bmatrix}$

9/137

(6) 4

شکل دوم - تابع شکلی (shape functions) عنصر مربعی زیر این شرایط

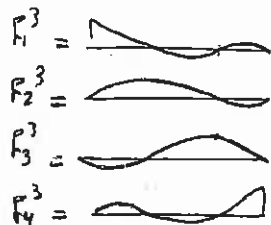


$$f_1^1 = \frac{(1-x)}{2}$$

$$f_2^1 = \frac{(1+x)}{2}$$

$$g_1^1 = \frac{(1-y)}{2}$$

$$g_2^1 = \frac{(1+y)}{2}$$



$$f_1^3 = \frac{9}{16}(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})(x-1)$$

$$f_2^3 = \frac{27}{16}(x+1)(x-\frac{1}{3})(x-1)$$

$$f_3^3 = \frac{-27}{6}(x+1)(x+\frac{1}{3})(x-1)$$

$$f_4^3 = \frac{9}{16}(x+1)(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{3})$$

$$g_1^2 = \frac{y(y-1)}{2}$$

$$g_2^2 = 1-y^2$$

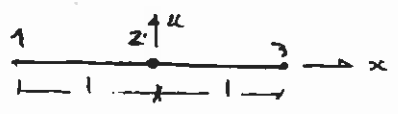
$$g_3^2 = \frac{y(y+1)}{2}$$

Shapes	4-node	5-node	6-node	7-node
N ₁ =	$f_2^1 g_2^1$	$\frac{2}{3} f_3^3 g_2^1$	$-\frac{1}{3} f_2^3 g_2^1$	$-\frac{1}{2} N_7$
N ₂ =	$f_1^1 g_2^1$	$-\frac{1}{3} f_3^3 g_2^1$	$-\frac{2}{3} f_2^3 g_2^1$	0
N ₃ =	$f_1^1 g_1^1$	0	0	0
N ₄ =	$f_2^1 g_1^1$	0	0	$-\frac{1}{2} N_7$
N ₅ =	0	$f_3^3 g_2^1$	0	0
N ₆ =	0	0	$f_2^3 g_2^1$	0
N ₇ =	0	0	0	$f_2^1 g_2^2$
SUM	1	0	0	0

جمع (مجموع) توابع شکلی برابر یک است

9/10

انتگرال کے لئے 2 و 3 برابر 5 و 4، 0 مقدار $\frac{du}{dx}$ درجہ 1 اور 2 لے سکتے ہیں



(تقریب اصل) الف

$$\begin{cases} N_1 = (x-2)(x-8)/16 & \rightarrow N_{1,x} = (2x-10)/16 \\ N_2 = 5x(8-x)/12 & \rightarrow N_{2,x} = (8-2x)/12 \\ N_3 = x(x-2)/48 & \rightarrow N_{3,x} = (2x-2)/48 \end{cases}$$

$u = \sum N_i u_i$

$$u = \frac{5}{16}(x-2)(x-8) + \frac{1}{3}x(8-x)$$

$$= \frac{5}{16}(x^2 - 10x + 16) + \frac{1}{3}(8x - x^2)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{5}{16}(2x-10) + \frac{1}{3}(8-2x)$$

10/10

$$\frac{du}{dx}(1) = \frac{5}{16}(-10) + \frac{1}{3}(8) = -11/24 = -.458$$

$$\frac{du}{dx}(2) = \frac{5}{16}x(6) + \frac{1}{3}x4 = -13/24 = -.542$$

→ (Mapping)

$$N_1(r) = (r-1)r/2 = (r^2-r)/2 \Rightarrow N_{1,r} = (2r-1)/2$$

$$N_2(r) = 1-r^2 \Rightarrow N_{2,r} = -2r$$

$$N_3(r) = r(r+1)/2 = r^2+r/2 \Rightarrow N_{3,r} = (2r+1)/2$$

$$x = 2(1-r^2) + 4r(r+1) = 2r^2 + 4r + 2$$

$$x_{,r} = 4r + 4$$

$$[N_{3,r}] = [x_{,r}][N_{3,x}]$$

$$N_{3,x} = [N_{3,r}]/[x_{,r}] = (N_{3,r})/4(r+1)$$

$$u = \sum N_{3,x} \cdot u = \frac{\sum (N_{3,r})}{4(r+1)} u$$

$$\frac{1}{4(r+1)} \left(\frac{(2r-1)}{2} \times 5 \right) + (-2r \times 4)$$

$$u_{(r=1)} = \infty$$

$$u_{(r=0)} = .625$$

$\xi = -1 \quad \xi = 0 \quad \xi = 1$ و برای انتظا نمونه گیری $I = \int_{-1}^1 G(\xi) d\xi$ Simpson $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$

$\int_a^b f(r) dr = (b-a) \sum c_i^2 f_i$ $G = \xi^3$ بزیب و گرا

$f(r) = c \Rightarrow 2c = 2(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2)c \Rightarrow c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 = 1$

$f(r) = r \Rightarrow 0 = 2(c_0^2(-1) + c_1^2(0) + c_2^2(1)) \Rightarrow -c_0^2 + c_2^2 = 0$

$f(r) = r^2 \Rightarrow \frac{2}{3} = 2(c_0^2(-1)^2 + c_1^2(0)^2 + c_2^2(1)^2) \Rightarrow c_0^2 + c_2^2 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow c_0^2 = c_2^2 = \frac{1}{6} \quad c_1^2 = \frac{2}{3}$

(الف)

$G = (\xi)^3 \Rightarrow I = 2 \left(\frac{1}{6} \times (-1)^3 + \frac{4}{6} \times (0) + \frac{1}{6} \times 1^3 \right) = 0$
 $= \int_{-1}^1 \xi^3 d\xi = \left[\frac{\xi^4}{4} \right]_{-1}^1 = 0$

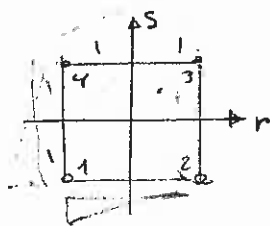
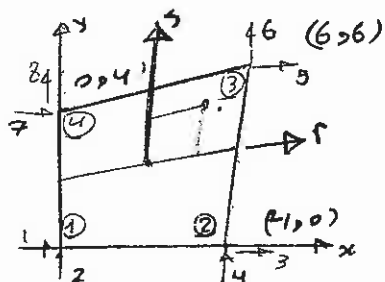
(ب)

کدام یک از این عبارات صحیح است؟
 1. $\frac{10}{10}$ با 2 exact است زیرا 2 تابع درجه 3 است و 2 اعتبار دارد.

$\frac{10}{10}$

$r = 0.5$ و $s = 0.25$ و $G = 10000$

2- ضرب K_2 با K_2
 Plane stress case



$N_1 = \frac{(1-r)}{2} \frac{(1-s)}{2}$
 $N_2 = \frac{(1+r)}{2} \frac{(1-s)}{2}$
 $N_3 = \frac{(1+r)}{2} \frac{(1+s)}{2}$
 $N_4 = \frac{(1-r)}{2} \frac{(1+s)}{2}$

$x = \sum N_i x_i = \frac{4}{4}(1+r-s-rs) + \frac{3}{2}(1+r+s+rs) = \frac{5}{2}(1+r) + \frac{1}{2}s(1+r) = \frac{(1+r)(s+5)}{2}$

$y = \sum N_i y_i = \frac{3}{2}(1+r+s+rs) + \frac{4}{4}(1-r+s-rs) = \frac{5}{2}(1+s) + \frac{1}{2}r(1+s) = \frac{(1+s)(r+5)}{2}$

$J = \begin{bmatrix} x_{,r} & y_{,r} \\ x_{,s} & y_{,s} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} s+5 & 1+s \\ 1+r & r+5 \end{bmatrix}$

$|J| = \frac{1}{4} [5r+25 + sr+5s - 1-r-s-rs] = 2r+2s+12 = 2(1+r+s)$

$J^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} r+5 & -(1+s) \\ -(1+r) & s+5 \end{bmatrix}$

7) 3

$$\begin{bmatrix} N_{2,x} \\ N_{2,y} \end{bmatrix} = \vec{J}^{-1} \begin{bmatrix} N_{2,r} \\ N_{2,s} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} N_{2,x} = 51 \vec{J}^{-1} [(r+5)N_{2,r} - (1+5)N_{2,s}] \\ N_{2,y} = 51 \vec{J}^{-1} [-(1+r)N_{2,r} + (5+5)N_{2,s}] \end{matrix}$$

درجتهای از 51 آتی فاکتور گرفته می شود

$$\begin{matrix} N_1 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s) & \Rightarrow & N_{1,r} = -\frac{1}{4}(1-s) & N_{1,s} = \frac{1}{4}(1-r) \\ N_2 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s) & \Rightarrow & N_{2,r} = \frac{1}{4}(1-s) & N_{2,s} = -\frac{1}{4}(1+r) \\ N_3 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s) & \Rightarrow & N_{3,r} = \frac{1}{4}(1+s) & N_{3,s} = \frac{1}{4}(1+r) \\ N_4 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s) & \Rightarrow & N_{4,r} = -\frac{1}{4}(1+s) & N_{4,s} = \frac{1}{4}(1-r) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} N_{1,x} &= \frac{-1(r+5)(1-s)}{4} + \frac{(1+5)(1-r)}{4} = \frac{-(r-rs+5-5s) + (1+5-r-rs)}{4} \\ &= \frac{1}{4}(-r+rs-5+5s+1+5-r-rs) = \frac{1}{4}(2r-4+6s) \\ &= 0.5(3s-r-2) = A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{1,y} &= \frac{1}{4}(1-s)(1+r) - \frac{1}{4}(5+5)(1-r) = \frac{1}{4}(1+r-s+rs - 5-5+5r+5r) = \frac{1}{4}(6r-2s-4) \\ &= 0.5(3r-s-2) = B \end{aligned}$$

$$K_{11} = \int \begin{bmatrix} N_{1,1} & 0 & N_{1,2} \\ 0 & N_{1,2} & N_{1,1} \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} N_{1,1} & 0 \\ 0 & N_{1,2} \\ N_{1,2} & N_{1,1} \end{bmatrix} d\Omega$$

$$E = 10000 \begin{bmatrix} \frac{16}{15} & \frac{4}{15} & 0 \\ \frac{4}{15} & \frac{16}{15} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{15} \end{bmatrix} = \frac{2000}{15} \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[K_{11}] = (0.5)^2 \cdot \left(\frac{20000}{15}\right) \times (0.5) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \\ B & A \end{bmatrix} \times \frac{1}{2(6+r+s)} dr ds$$

$$= 83.33 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 8A^2+3B^2 & 5AB \\ 5AB & 8B^2+3A^2 \end{bmatrix} \frac{1}{(6+r+s)} dr ds$$

$\frac{8}{10}$

$$K_{12} = 8333 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{5AB}{(6+r+s)} dr ds = 416.6 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{AB}{6+r+s} dr ds$$

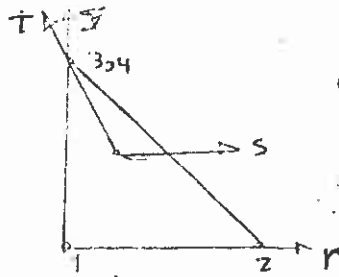
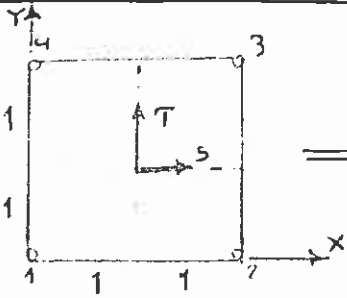
→ : Gauss (2x2)

$$416.6 (.024967 - .0555 + .51349 - .0555) = 178.062$$

.4273

2x2 Gauss

$\sqrt{(r,s)}$



1	0	0
2	2	0
3	0	2

شکل ۱

A

$$N_1 = (x-2)(y-2)/4$$

$$N_1 = \frac{1}{4} (4 - 2r - 2s) = 1 - r/2 - s/2$$

$$N_2 = (x)(2-y)/4$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (2r) = r/2$$

$$N_3 = xy/4$$

$$N_4 = N_3 = \frac{1}{4} (2s) = s/2$$

$$N_4 = y(2-x)/4$$

$$x = \sum N_i r_i = 2(r/2) + 2(s/2) = r + s \Rightarrow x_{2r} = 1 \text{ و } x_{2s} = 1$$

$$y = \sum N_i r_i = 2(s/2) + 2(r/2) = r + s \Rightarrow y_{2r} = 1 \text{ و } y_{2s} = 1$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{2r} & x_{2s} \\ y_{2r} & y_{2s} \end{bmatrix}$$

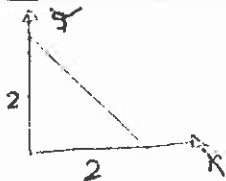
$$|J| = 0$$

$$B = \begin{bmatrix} N_{2,r} & 0 \\ 0 & N_{2,s} \\ N_{3,r} & N_{3,s} \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon = B \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -u_1 + u_2 \\ -v_1 + v_2 \\ -(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{توزیع ثابت است}$$

چون فقط ۳ درجه آزادی داریم پس در هر دو نقطه فقط دو درجه آزادی است و در هر دو نقطه فقط دو درجه آزادی است.

شکل 10-2 از مختصات طبیعی



$N_1 = 1$
 $N_2 = 2$
 $N_3 = 3$

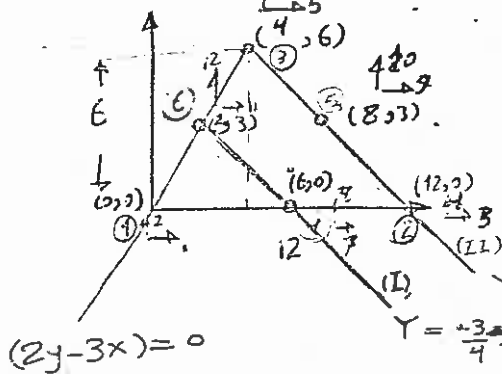
$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

مختصات گلوبال و مختصات طبیعی در آنجا هم در نظر

شکل 10-3 ضرایب انتقال K_{11} و $K(6,7)$ و $K(9,11)$ برای این مثلث

این مثلثات طبیعی - ب - مختصات طبیعی : $Plane stress$ حالت E و ν



(این مثلث از نظر گلوبال 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12)

$$Y = -\frac{3}{4}x + 9 \rightarrow (4y + 3x - 36) = 0$$

$$Y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{2} \rightarrow (4y + 3x - 18) = 0$$

$$N_1 = (4y + 3x - 36)(4y + 3x - 18) / 648$$

$$N_{1,x} = \frac{1}{648} (3(4y + 3x - 18) + 3(4y + 3x - 36)) = \frac{18x + 24y - 162}{648} = (3x + 4y - 27) / 108$$

$$N_{1,y} = \frac{1}{648} (4(4y + 3x - 18) + 4(4y + 3x - 36)) = \frac{(32y + 24x - 216)}{648} = (3x + 4y - 27) / 54$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{11} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix}$$

$$K_{11} = \int_{\Omega} B_{11}^T E B_{11} d\Omega = t \int_0^6 \int_{2y/3}^{12-4y/3} (***) dx dy$$

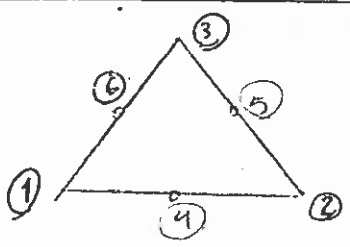
$$\Rightarrow (***) = E_{11} N_{1,x}^2 + E_{33} N_{1,y}^2$$

$$K_{11} = \frac{E_{11} t}{108^2} \int_0^6 \int_{2y/3}^{12-4y/3} (3x+4y-27)^2 dx dy + \frac{E_{33} t}{31^2} \int_0^6 \int_{2y/3}^{12-4y/3} (4y+3x-27)^2 dx dy$$

$$K_{11} = \tau \left(\frac{E_{11}}{t} + \frac{4}{9} E_{33} \right)$$

E_{11} for plane stress : $\frac{E}{1-\nu^2}$
 $E_{33} \quad \nu \quad \nu \quad \nu$: $\frac{E}{2(1+\nu)}$

حل 2



$$N_1 = L_1(2L_1 - 1)$$

$$N_2 = L_2(2L_2 - 1)$$

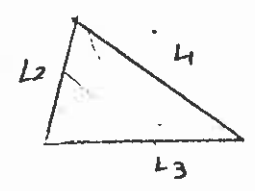
$$N_3 = L_3(2L_3 - 1)$$

$$N_4 = 4L_1L_2$$

$$N_5 = 4L_2L_3$$

$$N_6 = 4L_1L_3$$

مختصات سطحی برای K_{11}



$$x = \sum N_i x_i = 12L_2(2L_2 - 1) + 4L_3(2L_3 - 1) + 24L_1L_2 + 32L_2L_3 + 8L_1L_3$$

$$y = \sum N_i y_i = 6L_3(2L_3 - 1) + 12L_2L_3 + 12L_1L_3$$

بر حسب L_1 مرتب و با $L_1 \rightarrow 1 - L_2 - L_3$

$$x = 12L_2(2L_2 - 1) + 4L_3(2L_3 - 1) + 24(1 - L_2 - L_3)L_2 + 32L_2L_3 + 8(1 - L_2 - L_3)L_3$$

$$y = 6L_3(2L_3 - 1) + 12L_2L_3 + 12(1 - L_2 - L_3)L_3$$

$$\rightarrow x_{,1} = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} x_{,2} L_2 &= 24 \times 2L_2 - 12 + 24 - 48L_2 - 24L_3 + 32L_3 - 8L_3 = 12 \\ x_{,3} &= 12L_3 - 4 - 2L_2 - 2 + 24L_2 + 24 - 24L_2 - 8L_3 = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\rightarrow y_{,1} = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} y_{,2} L_2 &= 12L_3 - 12L_3 = 0 \\ y_{,3} &= 24L_3 - 6 + 12L_2 + 12 - 12L_2 - 24L_3 = 6 \end{aligned} \right.$$

$$J = \begin{bmatrix} x_{2L2} & y_{2L2} \\ x_{2L3} & y_{2L3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{J} = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} u_{2L2} \\ u_{2L3} \end{bmatrix} = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 + 4L_2 + 4L_3 \\ -3 + 4L_2 + 4L_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 6(4L_2 + 4L_3 - 3) \\ 8(4L_2 + 4L_3 - 3) \end{bmatrix}$$

$N_1 = (1 - L_2 - L_3)(1 - 2L_2 - 2L_3)$
 $N_{1,L2} = -(1 - 2L_2 - 2L_3) - 2(1 - L_2 - L_3) = -3 + 4L_2 + 4L_3$
 $N_{1,L3} = -(1 - 2L_2 - 2L_3) - 2(1 - L_2 - L_3) = -3 + 4L_2 + 4L_3$

$$K_{ii} = \int_{\Omega} B^T E B = \int_{\Omega} (E_{11}(u_x)^2 + E_{33}(u_y)^2) d\Omega$$

$$= \frac{E_{11}}{72 \times 72} \int 36 (16L_2^2 + 16L_3^2 + 9 + 32L_2L_3 - 24L_2 - 24L_3) d\Omega = \frac{E_{33}}{36 \times 36} \int 64 d\Omega$$

$\int 16L_2^2 + 16L_3^2 + 9 + 32L_2L_3 - 24L_2 - 24L_3 d\Omega$ $A = 36$ $A = 18 | A^*$

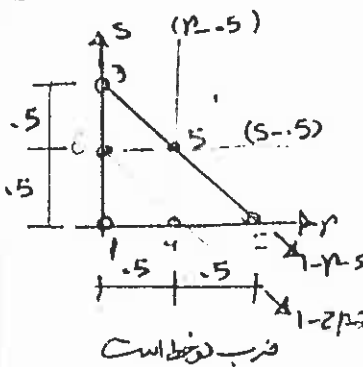
$$= 2A \left(\frac{16 \cdot 2!}{(4)!} + \frac{16 \cdot 2!}{4!} + \frac{9}{2!} + 32 \frac{1!1!}{(4)!} - 24 \frac{1!}{3!} - 24 \frac{1!}{3!} \right)$$

$$= 2A \left(\frac{16}{12} \times 2 + \frac{9}{2!} + \frac{4}{3} - 4 - 4 \right) = A$$

$$K_{ii} = \left(\frac{E_{11}}{3} + \frac{4E_{33}}{9} \right)$$

حلاز طریق محسبات طبیعی در اینجا

حل 3- نسبت طری (3x3)



node shape	3	4,5	
$N_1 =$	$1-r-s$	$-\frac{1}{2}N_4 - \frac{1}{2}N_5$	$= (1-r-s)(1-2r-2s)$
$N_4 =$		$(1-r-s)r \times 4$	
$N_6 =$		$(1-r-s)s \times 4$	

$$\begin{cases} N_1 = (1-r-s)(1-2r-2s) \\ N_2 = 2r(r-0.5) \\ N_3 = -2s(s-0.5) \end{cases} \quad \begin{cases} N_4 = 4r(1-r-s) \\ N_5 = 4rs \\ N_6 = 4s(1-r-s) \end{cases}$$

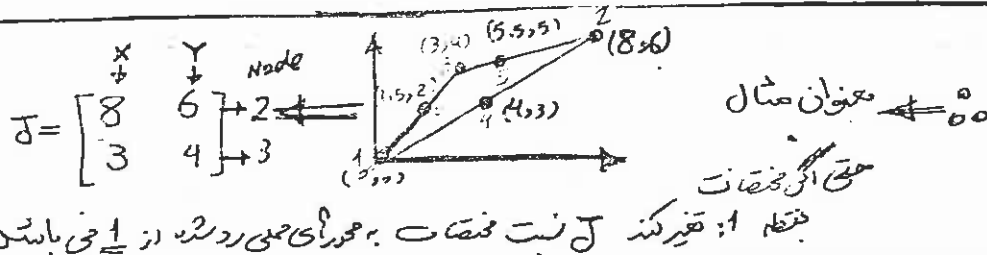
$$\begin{cases} x = 24r(r-0.5) + 8s(s-0.5) + 24r(1-r-s) + 32rs + 8s(1-r-s) \\ y = 12s(s-0.5) + 12rs + 12s(1-r-s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{,r} = 24(r-0.5) + 24r + 24(1-r-s) - 24r + 32s - 8s = 12 \\ x_{,s} = 16s - 4 - 24r + 32r - 16s + 8 - 8r = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{,r} = 12s - 2s = 0 \\ y_{,s} = 24s - 6 + 12r - 24s - 12r + 12 = 6 \end{cases}$$

$$D = \begin{bmatrix} x_{,r} & y_{,r} \\ x_{,s} & y_{,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

حفاظت بار در سه جهت است یعنی می باشد خارج از قوس



نقطه 1: تغییر کند نسبت مختصات بر محورهای اصلی در جهت از 1 می باشد

$$\begin{bmatrix} N_{10,y} \\ N_{11,y} \end{bmatrix} = D^{-1} \begin{bmatrix} N_{10,r} \\ N_{10,s} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} N_{10,x} \\ N_{10,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4r+4s-3 \\ 4r+4s-3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_{10,x} \\ N_{10,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 6(4r+4s-3) \\ 8(4r+4s-3) \end{bmatrix}$$

$$K_{11} = t \int_{\Gamma} (N_{10,x}^2 E_{11} + N_{10,y}^2 E_{33}) dx dy \quad |D| = 72$$

$$K_{11} = \frac{t \cdot 72}{72 \times 72} \left[\int_0^1 \int_0^{1-s} (4r+4s-3)^2 dx dy \right] (36E_{11} + 64E_{33})$$

$$K_{11} = t \left(\frac{E_{11}}{4} + \frac{4}{9} E_{33} \right) \checkmark$$

$$\begin{cases} E_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} \\ E_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{cases}$$

در مختصات

③ ④

ک(6,7) از سطح

$$[N_{3 \times X}] = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{3,2} \\ N_{3,3} \end{bmatrix} = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4(3-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_{3,2} \\ N_{3,3} \end{bmatrix} = \frac{12}{72} \begin{bmatrix} 0 \\ 4(3-1) \end{bmatrix}$$

$$M = 4L_1L_2 \\ N_4 = 4(1-L_2-L_3)(L_2)$$

$$\begin{bmatrix} N_{4,2} \\ N_{4,3} \end{bmatrix} = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{4,2} = 4(1-L_2-L_3) - 4L_2 = 4 - 8L_2 - 4L_3 \\ N_{4,3} = -4L_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_{4,2} \\ N_{4,3} \end{bmatrix} = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 6(4 - 8L_2 - 4L_3) \\ -16 - 16L_2 - 4L_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 24(1 - 2L_2 - L_3) \\ -16(1 + L_2 + L_3) \end{bmatrix}$$

$$K(6,7) = t \int_{\Omega} \left[(N_{3Y} N_{4X}) E_{12} + (N_{3X} N_{4Y}) E_{33} \right] d\Omega$$

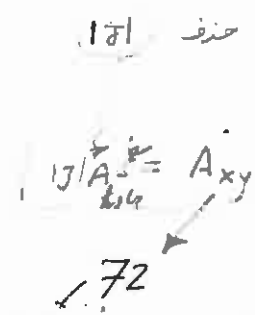
$$= \frac{t}{72 \times 72} \left[\int 12(4L_3 - 1) 24(1 - 2L_2 - L_3) E_{12} + \int 0 E_{33} \right] d\Omega$$

$$= \frac{12 \times 24 t}{72 \times 72} \int (4L_3 - 2L_2L_3 - 4L_3^2 - 1 + 2L_2 + L_3) E_{12}$$

$$= \frac{12 \times 24 t}{72 \times 72} \left(\frac{4 \cdot 1}{3!} - \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{4!} - \frac{4 \cdot 2}{4!} - \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{1}{3!} \right) 2A$$

$$\frac{12 \times 24 \times t \times 72}{72 \times 72} \left(\frac{4}{3!} - \frac{(2+2)}{4!} - \frac{1}{2!} + \frac{3}{3!} \right) = 0$$

$K_{6,7} = 0$



local (K6,7)

$$\begin{bmatrix} N_{3,2} \\ N_{3,3} \end{bmatrix} = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{3,2} = 0 \\ N_{3,3} = 4S - 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 0 \\ 12(4S - 1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_{4,2} \\ N_{4,3} \end{bmatrix} = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{4,2} = -8r - 4S + 4 \\ N_{4,3} = -4r \end{bmatrix} = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 24(1 - 2r - S) \\ -16(1 + r + S) \end{bmatrix}$$

$$K = t \int_{\Omega} (N_{3Y} N_{4X}) E_{33} + (N_{3X} N_{4Y}) E_{12}$$

$$K = \frac{t}{72 \times 72} \int_0^1 \int_0^{1-s} 12(4S - 1) 24(1 - 2r - S) dr ds = 0$$

$K_{6,7} = 0$

NY

از سوال (K9,11)

$$\begin{bmatrix} N5,x \\ N5,y \end{bmatrix} = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N5,L2 = 4L3 \\ N5,L3 = 4L2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N5,x \\ N5,y \end{bmatrix} = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 24L3 \\ 16(-L3 + 3L2) \end{bmatrix}$$

$$N6 = 4L1L3 \\ N6 = 4(1-L2-L3)L3$$

$$\begin{bmatrix} N6,x \\ N6,y \end{bmatrix} = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N6,L2 = -L3 \\ N6,L3 = 4(1-L2-2L3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N6,x \\ N6,y \end{bmatrix} = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} -24L3 \\ 16(3-3L2-5L3) \end{bmatrix}$$

$$5 \times 6 \quad \begin{matrix} 9 \\ 10 \end{matrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$K_{9,11} = t \int_r ([N5,x \ N6,x] E_{11} + [N5,y \ N6,y] E_{33}) d/r$$

$$K_{9,11} = \frac{t}{72 \times 72} \int E_{11} (24L3 \times (-24L3)) + E_{33} (16^2 (3L2-L3)(3-3L2-5L3))$$

$$= \frac{t}{72 \times 72} \left[-24^2 E_{11} \int L3^2 + 16^2 E_{33} \int (9L2 - 9L2^2 - 15L2L3 - 3L3 - 3L2L3 - 5L3^2) \right]$$

$$= \frac{t \times 72}{72 \times 72} \left[-24^2 E_{11} \frac{2!}{4!} + 16^2 E_{33} \left[\frac{9}{2!} - \frac{9 \cdot 2!}{4!} - \frac{15}{4!} - \frac{3}{2!} - \frac{3}{4!} - \frac{5 \cdot 2!}{4!} \right] \right]$$

$$t \left(\frac{13}{12} E_{33} - \frac{2}{3} E_{11} \right)$$

beal j (K9,11)

$$\begin{bmatrix} N5,x \\ N5,y \end{bmatrix} = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4S \\ 4r \end{bmatrix} = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 24S \\ 16(3r-5) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N6,x \\ N6,y \end{bmatrix} = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4S \\ 4(1-r-2S) \end{bmatrix} = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} -24S \\ 16(3-3r-5S) \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{t}{72 \times 72} \int N5,x N6,x E_{11} + N5,y N6,y E_{33} \quad |J| = 72$$

$$\frac{t}{72} \int_0^1 \int_0^{1-S} -24^2 S^2 E_{11} + 16^2 E_{33} (3r-5)(3-3r-5S)$$

$$= t \left(-\frac{2}{3} E_{11} + \dots \right)$$

N/V = 2



$$\begin{aligned}
 N_3 &= 1 - 3x^2/L^2 + 2x^3/L^3 & \psi &= -6/L^2 + 12x/L^3 \\
 N_4 &= x - 2x^2/L + x^3/L^2 & \psi &= 4/L - 6x/L^2 \\
 N_5 &= 3x^2/L^2 - 2x^3/L^3 & \psi &= 6/L^2 - 12x/L^3 \\
 N_2 &= -x^2/L + x^3/L^2 & \psi &= -2/L + 6x/L^2
 \end{aligned}$$

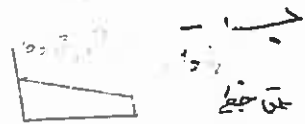
$\epsilon = T B \Delta$ $B = [N_1, N_2, N_3, N_4]$

$$K = \int_0^L B^T E B dx = \int_0^L \int_A T^T \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \end{bmatrix} E [N_1 \quad N_2 \quad \dots]$$

$$= \int_0^L T^T A dx \int_A [N] E [N]$$

$$= \frac{E E I}{L} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3/L & -3/L \\ 1 & 2 & 3/L & -3/L \\ 3/L & 3/L & 12/L^2 & -3/L \\ -3/L & -3/L & -12/L^2 & 12/L^2 \end{bmatrix}$$

الف



$$K = \int_0^L \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \end{bmatrix} E(x) \langle N \dots \rangle [N \dots]$$

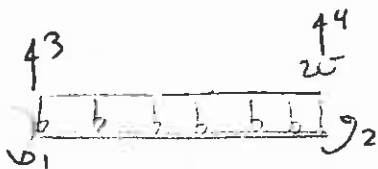
$$d = \left(\left(\frac{1}{2} \right)^3 - \left(\frac{3}{2} \right)^3 \right) x + \left(\frac{3}{2} \right)^3$$

$$I_x = \left(\left(\left(\frac{1}{2} \right)^3 - \left(\frac{3}{2} \right)^3 \right) \frac{x}{L} + \left(\frac{3}{2} \right)^3 \right)^3 I_0$$

$$I_x = \left(-0.3510137 \frac{x}{L} + 1.125 \right)^3 I_0$$

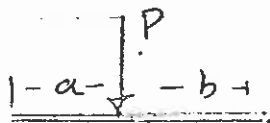
$$\Rightarrow K = \frac{E I}{L} \begin{bmatrix} 4.8253 & 1.9522 & 6.780/L & -6.780/L \\ 2.837 & 4.789/L & -17.89/L & 17.89/L \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 11.589/L \end{bmatrix}$$

مشابه در دو طرف و در صورت لزوم



$$\begin{aligned}
 N_1 &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \rightarrow N_1' = 1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \rightarrow N_1'' = \frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \\
 N_2 &= -x^2/L + x^3/L^2 \rightarrow N_2' = -2x/L + 3x^2/L^2 \rightarrow N_2'' = \frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \\
 N_3 &= 1 - 3x^2/L^2 + 2x^3/L^3 \rightarrow N_3' = -6x/L^2 + 6x^2/L^3 \rightarrow N_3'' = \frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \\
 N_4 &= 3x^2/L^2 - 2x^3/L^3 \rightarrow N_4' = \frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3} \rightarrow N_4'' = -\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2}
 \end{aligned}$$

$$\int_0^L N^T P \rightarrow \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \int_0^L \begin{bmatrix} x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \sim \\ \sim \\ \sim \\ \sim \end{bmatrix} x \cdot w = \begin{bmatrix} -\frac{wL^2}{12} \\ \frac{2wL^3}{12} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

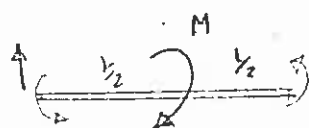


$$\begin{bmatrix} N_{1a} \\ N_{2a} \\ N_{3a} \\ N_{4a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{1b} \\ N_{2b} \\ N_{3b} \\ N_{4b} \end{bmatrix} (-P) = \begin{bmatrix} a - \frac{2a^2}{L} + \frac{a^3}{L^2} \\ -\frac{a^2}{L} + \frac{a^3}{L^2} \\ 1 - \frac{3a^2}{L^2} + \frac{2a^3}{L^3} \\ \frac{3a^2}{L^2} - \frac{2a^3}{L^3} \end{bmatrix}$$

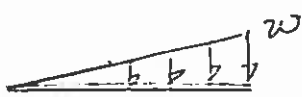
exact

دقیقاً از حالت

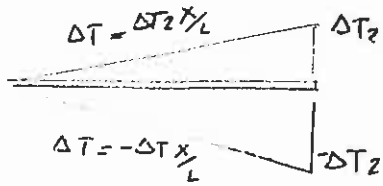
تابع تغییر شکل در آن نقطه



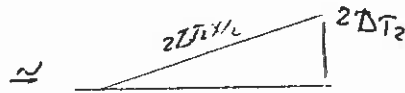
$$\begin{bmatrix} N_1(L/2) \\ N_2(L/2) \\ N_3(L/2) \\ N_4(L/2) \end{bmatrix} (+M) = \begin{bmatrix} 0.25ML \\ 0.25ML \\ 1.5ML/2 \\ -1.5ML/2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \left(\frac{wL}{L} \right) = \begin{bmatrix} \frac{2wL^2}{30} \\ \frac{5wL^2}{12} \\ \frac{3wL}{20} \\ \frac{7wL}{20} \end{bmatrix}$$



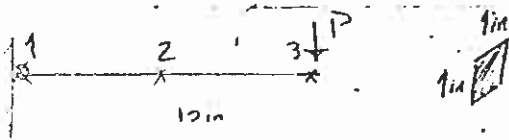
1.5.9 (weaver) $\Delta T = \Delta T_2 \frac{x}{L}$



$$f_a = \int B^T E = \alpha \int B^T \Delta T \quad B^T = Z \begin{bmatrix} N_{2,x} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \int B^T E E = \int Z \begin{bmatrix} N_{2,x} \\ \vdots \end{bmatrix} \left(\Delta T \frac{x}{L} \left(\frac{Z}{d/2} \right) \right) x dx dA$$

$$\frac{2\alpha E Z}{d} \int Z^2 E dA E \begin{bmatrix} N_{2,x} \\ \vdots \end{bmatrix} x dx = \frac{2EI \alpha \Delta T}{d} (1, 0, 1, 0, -1)$$



$$N_1 = 2 \left(\frac{x}{L} - 0.5 \right) \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \rightarrow N_{1,x} = \frac{2}{L} \left(\frac{x}{L} - 1 \right) + \frac{2}{L} \left(\frac{x}{L} - 0.5 \right) = \frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L}$$

$$N_2 = 4 \frac{x}{L} \left(\frac{x}{L} - 1 \right) \rightarrow N_{2,x} = \frac{4}{L} \left(1 - \frac{x}{L} \right) - \frac{4x}{L^2} = -\frac{8x}{L^2} + \frac{4}{L}$$

$$N_3 = 2 \frac{x}{L} \left(\frac{x}{L} - 0.5 \right) \rightarrow N_{3,x} = \frac{2}{L} \left(\frac{x}{L} - 0.5 \right) + \frac{2x}{L^2} = \frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L}$$

$$B_{1a} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ N_{1,x} & N_a \end{bmatrix}, \quad B_{2a} = \begin{bmatrix} 0 & N_{2,x} \\ 0 & N_a \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{No Axial force}$$

$$B_i^T E B_i C = \begin{bmatrix} 0 & N_{a,x} \\ \vdots & N_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & \mu K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ N_{c,x} & N_c \end{bmatrix}$$

$$K_{ac}^S = \int_0^L \mu K A \begin{bmatrix} N_{a,x} \\ N_a \end{bmatrix} \langle N_{c,x} \quad N_c \rangle dx \Rightarrow \begin{bmatrix} S & S \\ S & S \end{bmatrix}$$

$$K_{as}^B = \int_0^L EI \begin{bmatrix} \vdots \\ N_{a,x} \end{bmatrix} \langle 0, N_{c,x} \rangle dx \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

$$K_{ac}^S = \mu K A \begin{bmatrix} N_{a,x} N_{c,x} & N_{a,x} N_c \\ N_a N_{c,x} & N_a N_c \end{bmatrix}$$

$$K_{as}^B = EI \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 & N_{a,x} N_{c,x} \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{E}{6}$$

$$A = 1 \times 1 = 1$$

$$I = h^3 \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$$

$$l = .25 \quad E = 30,000 \text{ KSC}$$

$$L = 10 \text{ in (left)}$$

$$L = 10 \text{ in (right)}$$

$$K_{11} = \begin{bmatrix} N_{1,x}^2 & N_{1,x} N_1 \\ N_1 N_{1,x} & N_1^2 \end{bmatrix} \text{ MKA}$$

Shear

$$K_{11} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{7}{3L^2} & \frac{1}{2L} \\ \frac{2}{15} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \quad K_{12} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -\frac{8}{3L^2} & -\frac{2}{3L} \\ \frac{2}{3L} & \frac{1}{15} \end{bmatrix} \quad K_{13} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{3L^2} & \frac{1}{6L} \\ -\frac{1}{6L} & -\frac{1}{30} \end{bmatrix}$$

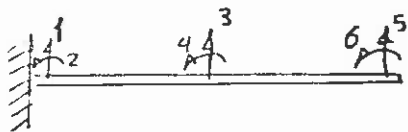
$$K_{22} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{16}{3L^2} & 0 \\ 0 & \frac{8}{15} \end{bmatrix} \quad K_{23} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -\frac{8}{3L^2} & -\frac{2}{3L} \\ -\frac{2}{3L} & \frac{1}{15} \end{bmatrix} \quad K_{33} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{7}{3L^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

Bending

$$K_{11} = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3L^2} \end{bmatrix}, \quad K_{12} = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3L} \end{bmatrix}, \quad K_{13} = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3L} \end{bmatrix}$$

$$K_{22} = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{3L^2} \end{bmatrix}, \quad K_{23} = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3L} \end{bmatrix}, \quad K_{33} = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3L^2} \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{7}{3L^2} & \frac{1}{2L} & -\frac{8}{3L^2} & -\frac{2}{3L} & \frac{1}{3L^2} & \frac{1}{6L} \\ \frac{2}{15} & \frac{2}{3L} & \frac{1}{15} & \frac{1}{6L} & -\frac{1}{30} & \\ & \frac{16}{3L^2} & 0 & -\frac{8}{3L^2} & -\frac{2}{3L} & \\ & & \frac{8}{15} & -\frac{2}{3L} & \frac{1}{15} & \\ & & & \frac{7}{3L^2} & 0 & \\ & & & & \frac{2}{15} & \end{bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{7}{3L^2} & 0 & -\frac{8}{3L^2} & 0 & \frac{1}{3L^2} \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{16}{3L^2} & 0 & -\frac{8}{3L^2} \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & \frac{7}{3L^2} \end{bmatrix}$$



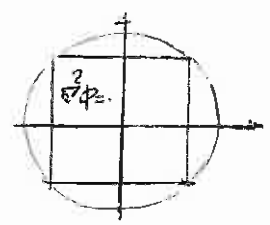
$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \end{bmatrix}$$

9/18

(۱)

در یک شبکه انتقال حرارت شرایط مرزی ایجاب می کند توزیع دمای حرارت در یک

$x=+1 \rightarrow 1-x^2$
 $y=+1 \rightarrow 1-y^2$



به وسیله روش Galerkin توزیع را تقریبی کنیم

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

$$\begin{cases} L\phi + P = S_b \\ m\phi + r = 0 \end{cases}$$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\begin{cases} \phi = \hat{\phi} = u_b + \sum a_i N_i = \\ m u_b + r = 0 \\ m N_i = 0 \end{cases}$$

انتخاب $u_b = x^2(1-y^2) + y^2(1-x^2)$
OR $2 - x^2 - y^2$

گردش دما را در شبکه با تابع interpolate یک نابزرگیم

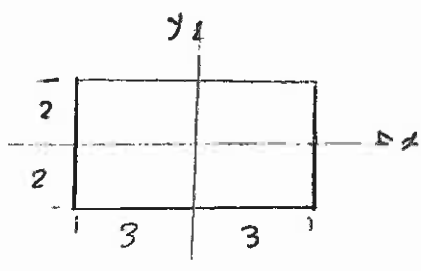
$$N = (1-x^2)(1-y^2)$$

$$L N = 2(x^2 + y^2 - 2)$$

$$K = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2(1-x^2)(1-y^2)(x^2 + y^2 - 2) dx dy$$

$$F = - \int_{\Omega} N L u_b dx dy = \iint 4(1-x^2)(1-y^2)(1+x^2+y^2) dx dy$$

در یک پهنای الاستیک یک میله هگزان (مستطوری) در یک طرف مقابلهت در طرف دیگر برقرار است



$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta$$

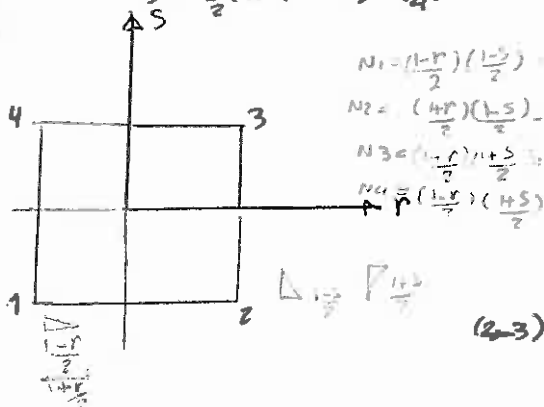
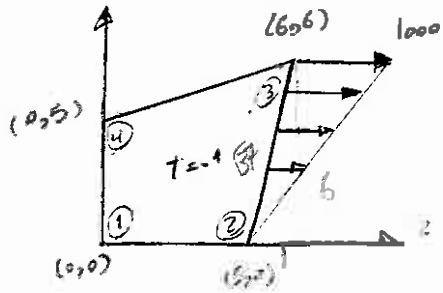
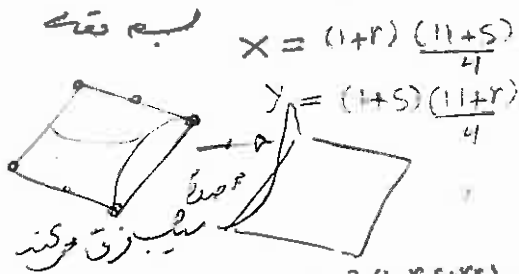
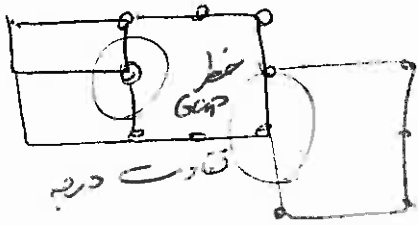
G = Elastic shear modulus
 θ = Angle of torsion
 ϕ = stress function

جهت سوراخ دایره ای به سبب $G\theta = 1$ فون رید شرایط مرزی میسر در تمام لبه $x=+3$
 $y=+2$

وقتی در پهنای در هر مقطع از طول مقابلهت می آید. با استفاده از روش Galerkin مقدار تقریبی $I = 2 \iint \phi dx dy$ میسر کنیم.

رابطه ای با توجه به آنکه مقطع نسبت به محور دورگه متقارن است و مرکز آن از توابع متلاطمی زیرین است متقارن است هر محور ϕ در این است از توابع هم مقابلهت است

$$\begin{aligned} N_1(x,y) &= \frac{\cos \pi x}{8} \frac{\cos \pi y}{4} \\ N_2(x,y) &= \frac{\cos 3\pi x}{8} \frac{\cos \pi y}{4} \\ N_3(x,y) &= \frac{\cos \pi x}{8} \frac{\cos 3\pi y}{4} \end{aligned}$$



$$N_1 = \frac{(1-r)}{2} \left(\frac{1-s}{2} \right)$$

$$N_2 = \frac{(4r)}{2} \left(\frac{1-s}{2} \right)$$

$$N_3 = \frac{(1-r)}{2} \left(\frac{1+s}{2} \right)$$

$$N_4 = \frac{(1-r)}{2} \left(\frac{1+s}{2} \right)$$

فقط دو درجه از بیرون
 $(2-3) \quad dr = -$
 $r = 1$

$$N_4 = N_3 = 0$$

$$\begin{cases} N_2 = \frac{1-s}{2} \\ N_3 = \frac{1+s}{2} \end{cases}$$

$$x = \sum N_i x_i = 5 \left(\frac{1-s}{2} \right) + 6 \left(\frac{1+s}{2} \right) = \frac{11}{2} + \frac{s}{2} \Rightarrow x_{gs} = \frac{1}{2}$$

$$y = \sum N_i y_i = 6 \left(\frac{1+s}{2} \right) = 3(1+s) \Rightarrow y_{gs} = 3$$

$$dr = \frac{L_{23}}{2} ds$$

$$\begin{cases} N_2 = 1-s \\ N_3 = s \end{cases}$$

$$\{f_a\}_i = \int_{\Gamma} N_i \{T\} ds$$

$$\begin{cases} T_y = 0 \\ T_x = 1000/6 \end{cases}$$

$$(dT^2 = dx^2 + dy^2)$$

$$dT = \frac{L_{23}}{2} ds$$

$$= \frac{1000}{6} \left(\frac{6}{2} (1+s) \right)$$

$$\begin{cases} x = \frac{(1+s)}{2} \\ y = 3(1+s) \\ s = y-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 + \frac{y}{6} \\ y = 6x - 30 \end{cases}$$

$$dT = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2} ds$$

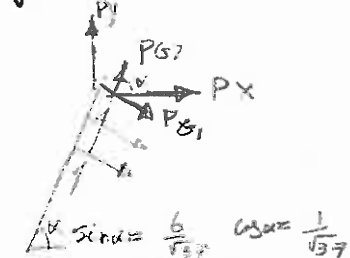
توجه در این

$$\{f_a\}_2 = \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1-s}{2} \right) \left\{ 5000(1+s) \right\} \sqrt{.5^2 + 3^2} ds$$

$$dT = L_{23} ds$$

$$\{101.379\}$$

$$0$$



$$dT = \frac{L_{23}}{2} ds$$

$$\{f_a\}_3 = \int_{-1}^{+1} \frac{1+s}{2} \left\{ 5000(1+s) \right\} \sqrt{.5^2 + 3^2} ds =$$

$$\{202.759\}$$

$$0$$

$$\sum F = 1000 \times .1 \times \frac{\sqrt{37}}{2} = 304.138$$

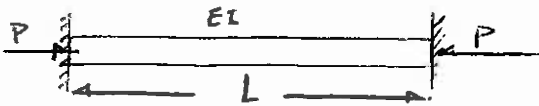
$$= 101.379 + 202.759$$

$$\sum M = 304.138 \times \frac{2}{3} \times 6 = 1216.552 \approx 1216.554 = 202.759 \times 6$$

نتیجه صحیح به

(2)

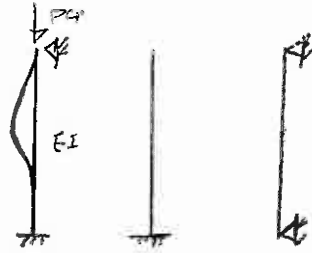
از روش Galerkin بار باری مقطع ثابت آرد



و بار باری متناهی قدر ثابت آرد

$$EI Y'''' + PY'' = 0$$

$$|K - KG| = 0$$



$$[K - KG] \{a\} = \{f\}$$

$$N_1 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{2x^3}{L^2}$$

$$K = \int B^T E B dx \rightarrow K_{ab} = \int N_{a,xx} EI N_{b,xx} dx$$

$$K_{ab} = \int P N_{a,x} N_{b,x} dx$$

$$K_{bb} = \int_0^L EI N_1^2 dx = \frac{4EI}{L}$$

$$EI \frac{dy^2}{dx^2} - Py = 0 \quad \frac{P}{EI} = N^2$$

$$KG = \int_0^L \dots = \frac{2}{15} PL$$

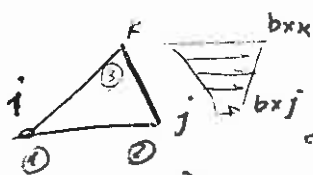
$$\frac{P}{EI} = \frac{K^2}{L}$$

$$y = A \sin Nx \quad N_x = K/L$$

$$|K - KG| = 0$$

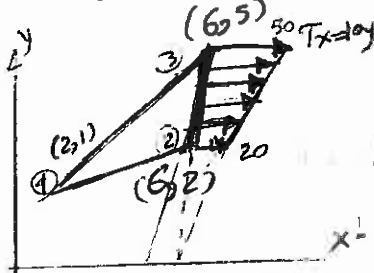
$$P_{cr} = \frac{30EI}{L^2}$$

$$\frac{20.4EI}{L^2} \quad \text{فکر صفتی}$$



$$d\Gamma = L_j dx + L_k dy$$

$$\Gamma = b_{xx}x + L_2(b_{xy}x - b_{yy}y)$$



در صورتی که بارها در گره‌ها قرار دارد
بارهای گره‌ای را برا وجه مستطالی که تحت کوشش می‌باشد
2-3 و با استفاده از آرد

$$x = \sum N_i x_i = L_1 x_1 + L_2 x_2 + (1 - L_1 - L_2) x_3$$

$$y = \sum N_i y_i = L_1 y_1 + L_2 y_2 + (1 - L_1 - L_2) y_3$$

(2-3)

$$L_1 = 0$$

$$\begin{cases} T_x = 10 [L_2 (y_2 - y_3) + y_3] = 10 [L_2 (2 - 5) + 5] = 50 - 30L_2 \\ T_y = 0 \end{cases}$$

$$d\Gamma = \sqrt{dx^2 + dy^2} = |dy| = \sqrt{y_2^2 - y_3^2} |dL_2| = |2 - 5| dL_2 = 3 dL_2$$

$$\{F_a\} = h \int N^T \{T\} ds$$

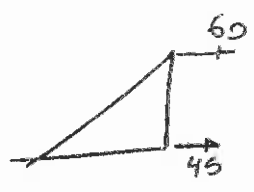
10, 3

(8)

$$\{F_a\} = h \int N^T \{T\} ds = h \int \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_1 \\ L_2 & 0 \\ 0 & L_2 \\ L_3 & 0 \\ 0 & L_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} d\tau$$

2.9 3.9
l2 → 0 → 1

$$\{F_a\} = h \int_0^1 \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ L_2 & 0 \\ 0 & L_2 \\ 1-L_2 & \cdot \\ \cdot & 1-L_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 50-30l_2 \\ 0 \end{Bmatrix} dl_2 = h \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 45 \\ 0 \\ 60 \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix}$$

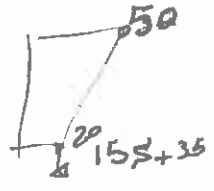
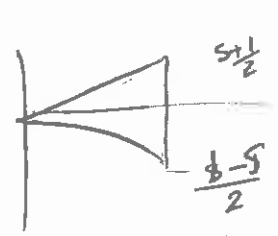


$$\int L_i^\alpha L_j^\beta d\tau = \frac{\alpha! \beta!}{(\alpha+\beta+1)!} \tau$$

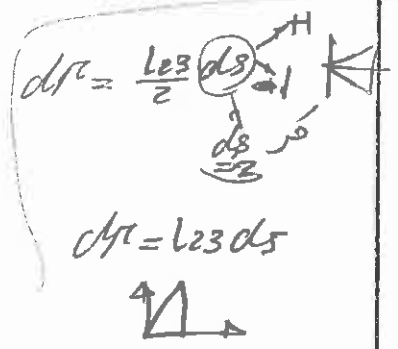
$$\int L_1^\alpha L_2^\beta L_3^\gamma dA = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha+\beta+\gamma+2)!} (2A)$$

$$\{F_a\} = h \int \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ L_2 & 0 \\ \cdot & L_2 \\ L_3 & 0 \\ \cdot & L_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 50-30l_2 \\ 0 \end{Bmatrix} dy$$

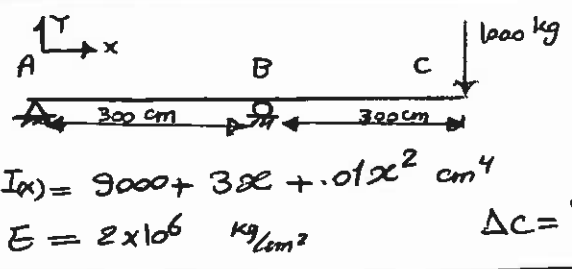
$$= h \int \begin{bmatrix} 0 \\ (50l_2 - 30l_2^2) dy \\ 0 \\ (50l_2 - 30l_2^2) dy \\ 0 \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{50 \cdot 0! \cdot 1!}{2!} (3) - \frac{30 \cdot 0! \cdot 2!}{3!} (3) \\ \frac{50 \cdot 1! \cdot 0!}{2!} (3) - 30 \frac{1! \cdot 1!}{3!} (3) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 45 \\ \cdot \\ 60 \\ \cdot \end{Bmatrix}$$



$$\int_{-1}^1 \frac{z+1}{2} (15s+35) \left(\frac{3}{2}\right) ds$$



$$\begin{cases} y = \frac{z}{2} + 1.55 \\ x = 6 \end{cases} \Rightarrow d\tau = \sqrt{1.5^2} = 1.5$$



$$N = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

$$N_{,1} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3$$

$$N_{,2} = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2$$



$$\begin{cases} N(0) = 0 \\ N'(0) = \Delta \\ N(300) = 0 \\ N(600) = 1 \\ N'(600) = 0 \end{cases}$$

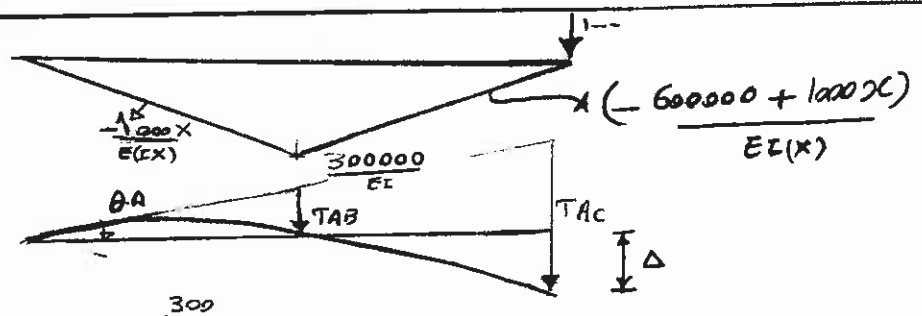
1

$$\begin{bmatrix} 300 & 300^3 & 300^4 \\ 600 & 600^3 & 600^4 \\ 0 & 6 \times 600 & 12 \times 600^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N_{,2} = 8.88 \times 10^{-8} x - 1.481 \times 10^{-11} x^2$$

$$K = \int E \cdot I(x) N_{,2}^2 dx = 1243.42$$

$$K \Delta = -1000 \Rightarrow \Delta = .804233$$



exact
روش نیرو

2

$$T_{AB} = \int_0^{300} \frac{-1000x(300-x)}{2 \times 10^6 I(x)} dx = -.23188$$

$$T_{AC} = \int_0^{300} \frac{-1000x(600-x)}{E I(x)} dx + \int_{300}^{600} \frac{(-600000 + 1000x)(600-x)}{E I(x)} dx$$

$$= -.9051 - .39023 = -1.2952$$

$$\Delta = T_{AC} - 2T_{AB} = \boxed{-.831488}$$

1/1

