محاسبات عددی

Subject :
Year.　Month.　Date. ( )

سرفصل های درس

1- نمایش اعداد حقیقی در ماشین

2- انواع خطا و تحلیل آن

3- انباشتگی و انتشار خطا

4- ریشه یابی توابع غیرخطی
  - روش دوبخشی
  - روش نابجایی
  - روش نیوتن رافسون
  - روش وتری
  - روش نقطه ثابت
  - همگرایی روش ها

5- حل دستگاه های غیرخطی

6- درون یابی
  - لاگرانژ
  - نیوتن
  - خطای درون یابی

7- تقریب کمترین مربعات (برازش)

8- انتگرال گیری عددی - قاعده انتگرال گیری
  - ذوزنقه ای
  - نقطه میانی
  - سیمسون
  - گاوسی
  - اویلر
  - تیلور مرتبه بالا
  -

9- حل عددی معادلات دیفرانسیل
  - اویلر
  - تیلور مرتبه بالا

10- حل دستگاه های خطی $Ax = b$ - روش - مستقیم (حذفی گاوس و کروت)
تکراری ژاکوبی گاوس

9000

منابع خطا

خطای مدل سازی

خطای داده ها

خطای برش (گسسته سازی)

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \simeq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$f(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

خطای روند کردن

نمایش اعداد حقیقی در ماشین :

نمایش در مبنا :

$$x = (\overset{\beta^{n-1}}{a_{n-1}} \cdots \overset{\beta^{1}}{a_1} \overset{\beta^{0}}{a_0} . \overset{\beta^{-1}}{a_{-1}} \overset{\beta^{-2}}{a_{-2}} \cdots)_\beta$$

مثال ← $\beta = 4$; $x = (23.01)_4 = (3 \times 4^0 + 2 \times 4^1 + 0 \times 4^{-1} + 1 \times 4^{-2})_{10}$

$= (11 + \frac{1}{16})_{10}$

مثال : $x = (9.125)_{10}$; $x = (?)_2$

$$\begin{array}{llll} 9 & \underline{|2} & & \\ \underline{8} & 4 & \underline{|2} & \\ 1 & \underline{4} & 2 & \underline{|2} \\ & 0 & \underline{2} & 1 \\ & & 0 & \end{array} \rightsquigarrow (9)_{10} = (1001)_2$$

$$\textcircled{0}.125 \times 2 = \textcircled{0}.250 \times 2 = 0.5 \times 2 = \textcircled{1}.0 \quad \text{①, ②, ③} \rightarrow .001$$

تا جایی ادامه می دهیم که رقم بعد از ممیز صفر شود

$\Rightarrow (0.125)_{10} = (0.001)_2$

$$(9.125)_{10} = (1001.001)_2$$

Subject :
Date

تذکر: ممکن است عددی در مبنایی مختوم باشد ولی در مبنای دیگری نه

مثال: $(0.1)_{10} = (?)_2$

$$\begin{cases} 0.1 \times 2 = ⓪.2 \\ 0.2 \times 2 = ⓪.4 \\ 0.4 \times 2 = ⓪.8 \\ 0.8 \times 2 = ①.6 \\ 0.6 \times 2 = ①.2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.2 \times 2 = 0.4 \\ \vdots \end{cases}$$

$(0.1)_{10} = (0.\overline{00011})_2$

↓

متناوب

PAPCO

نمایش عدد در مبنای β: $x = \pm(a_{n-1} \cdots a_1 a_0 . a_{-1} \cdots a_{-m} \cdots)_\beta$

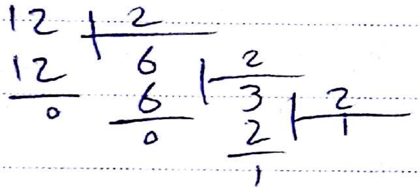
سیستم نمایش ممیز شناور: $\beta = 10: (23.45)_{10} = (0.2345)_{10} \times 10^2$

$\beta = 2: x = (101.01)_2 = (0.10101)_2 \times 2^3$

در این سیستم، فرم کلی نمایش عدد به صورت $x = \pm(0.a_1 \cdots a_m)_\beta \times \beta^e$ می باشد که e یک عدد صحیح است و بین کران پایین l و کران بالای u قرار دارد. $(l \le e \le u)$

مثال: $\beta = 2, m = 4, l = -3, u = 5$ ⟶ سیستم ۱

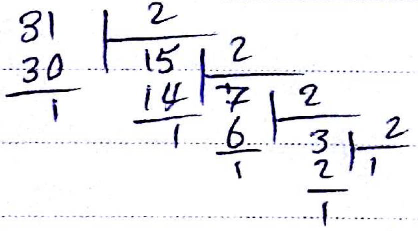
$x = \pm(0.a_1 a_2 a_3 a_4)_2 \times 2^e (-3 \le e \le 5)$



$(12)_{10} = (1100)_2 = (0.1100)_2 \times 2^4$

$= \cancel{(0.0110)_2 \times 2^5}$

برای داشتن نمایش منحصر به فرد برای اعداد، نمایشی به گونه ای در نظر گرفته می شود که اولین رقم بعد از ممیز، ناصفر باشد



$(31)_{10} = (11111)_2 = (0.11111)_2 \times 2^5$

مجموعه اعداد ممیز شناور به فرم (*) که اولین رقم بعد از ممیز آن‌ها ناصفر است، را اعداد ممیز شناور نرمال شده گوییم و با $F(\beta, m, l, u)$ نمایش می دهیم. اگر x عددی به صورت $x = \pm(0.a_1 \cdots a_m \cdots)_\beta \times \beta^e$ باشد، آنگاه توسط نگاشتی به نام نگاشت روند کردن به یک عدد ماشینی (عدد قابل نمایش در ماشین) نظیر می شوند

① برش دادن، ② گرد کردن

① برش داده شده‌ی $x = \pm(0.a_1 \cdots a_m \cdots)_\beta \times \beta^e$ را با $fl_c(x)$ نمایش داده و تعریف می کنیم

$fl_c(x) = \pm(0.a_1 \cdots a_m)_\beta \times \beta^e$

گرد شده‌ی عدد $x = \pm(0.a_1 \dots a_m a_{m+1} \dots)_\beta \times \beta^e$ را با $fl_r(x)$ نمایش داده و به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$fl_r(x) = \begin{cases} \pm(0.a_1 \dots a_m)_\beta \times \beta^e & ; \ a_{m+1} < \beta/2 \\ \pm(0.a_1 \dots a_m + 0.\underbrace{00 \dots 0}_{m-1\ \text{تا}}1)_\beta \times \beta^e & ; \ a_{m+1} \geq \beta/2 \end{cases}$$

مثال: برش داده شده و گرد شده‌ی $x = (0.1001)_2 \times 2^3$ را در سیستم $(\overset{\beta}{2}, \overset{m}{3}, \overset{l}{-4}, \overset{u}{6})$ به دست آورید

$fl_c(x) = (0.100)_2 \times 2^3$ $\quad$ $fl_r(x) = (0.101)_2 \times 2^3$

مثال: قبل برای عدد $x = (0.1111)_2 \times 2^3$

$fl_c(x) = (0.111)_2 \times 2^3$

$fl_r(x) = (0.100)_2 \times 2^4$

$$\begin{array}{l} (0.111)_2 \times 2^3 \\ (0.001)_2 \times 2^3 \\ \hline (1.000)_2 \times 2^3 \end{array}$$

خطای مطلق و خطای نسبی:

فرض کنیم $\hat{x}$ تقریبی از x باشد در این صورت خطای مطلق و نسبی به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$E_{abs}(x, \hat{x}) = |x - \hat{x}|$$

$$E_{rel}(x, \hat{x}) = \frac{|x - \hat{x}|}{|x|} \quad (x \neq 0)$$

1) $x = 1$, $\hat{x} = 2$, $E_{abs}(x, \hat{x}) = |1 - 2| = 1$ $\quad$ $E_{rel}(x, \hat{x}) = \frac{1}{1} = 1$

2) $x = 1.000000 \times 10^6$, $\hat{x} = 1.000001 \times 10^6$ $\quad$ $E_{abs}(x, \hat{x}) = 0.000001 \times 10^6 = 1$

$E_{rel}(x, \hat{x}) = \frac{1}{10^6} = 10^{-6}$

کران‌های بالای خطاهای روند کردن و برش دادن:

$$E_{abs}(x, fl_c(x)) \leq \beta^{e-m}$$

$$E_{rel}(x, fl_c(x)) \leq \beta^{-m+1}$$

مثال: $F = (2, \overset{m}{3}, -4, 6)$, $x = (0.1111)_2 \times 2^3$

$$E_{abs}(x, flc(x)) \le 2^{3-3} = 2^0 = 1$$

$$E_{abs}(x, flc(x)) = |(0.1111)_2 \times 2^3 - (0.111)_2 \times 2^3| = (0.0001)_2 \times 2^3 = 2^{-4} \times 2^3 = 2^{-1} = 1/2$$

$$E_{rel}(x, flc(x)) \le 2^{-3+1} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

خطای گرد کردن

$$E_{abs}(x, flr(x)) \le \frac{1}{2} \beta^{e-m}$$

$$E_{rel}(x, flr(x)) \le \frac{1}{2} \beta^{-m+1}$$

محاسبات ماشینی: زمانی که می خواهیم یک عمل حسابی را بین دو عدد x و y در ماشین انجام دهیم، ممکن است انجام این عمل به شکل دقیق امکان پذیر نباشد

1) ممکن است اعداد x و y ماشینی نباشند و مجبور به روند کردن آنها باشیم

2) ممکن است حاصل عمل حسابی بین دو عدد ماشینی، یک عدد ماشینی نبوده و مجبور به روند کردن آن باشیم

مثال: $F(10, 3, -6, 7)$

$x = 0.9889$ $y = 0.1247$ $\quad x \boxed{+} y$

$flr(x) = 0.989$ $flr(y) = 0.125$

$$flr(x) + flr(y) = 1.114 = (0.1114)_{10} \times 10 \xrightarrow{flr(flr(x)+flr(y))} (0.111)_{10} \times 10$$

عمل ماشینی متناظر با جمع $\boxed{+}$

$$|(x+y) - (x \boxed{+} y)| = |(x+y) - fl(fl(x) + fl(y))|$$

$$= |(x+y) - (fl(x) + fl(y)) + (fl(x) + fl(y)) - fl(fl(x) + fl(y))|$$

$$\le \underbrace{|(x+y) - (fl(x) + fl(y))|}_{\text{خطای انتشاری}} + \underbrace{|\underbrace{(fl(x) + fl(y))}_{z} - \underbrace{fl(fl(x) + fl(y))}_{fl(z)}|}_{E_{abs}(z, fl(z))}$$

خطای انتشاری

$E_{abs}(z, fl(z))$

خطای نمایش

$$E_{abs}(x+y, fl(x)+fl(y)) = |(x+y) - (fl(x)+fl(y))|$$

$$\le \underbrace{|x-fl(x)|}_{E_{abs}(x,fl(x))} + \underbrace{|y-fl(y)|}_{E_{abs}(y,fl(y))}$$

خطای انباشتگی عملیات حسابی:

$$E_{abs}(x \pm y, fl(x) \pm fl(y)) \le E_{abs}(x, fl(x)) + E_{abs}(y, fl(y))$$

$$E_{rel}(x \pm y, fl(x) \pm fl(y)) \le \frac{|x|}{|x \pm y|} E_{rel}(x, fl(x)) + \frac{|y|}{|x \pm y|} E_{rel}(y, fl(y))$$

$$E_{rel}(x \overset{\times}{\div} y, fl(x) \overset{\times}{\div} fl(y)) \le E_{rel}(x, fl(x)) + E_{rel}(y, fl(y))$$

خطای انباشتگی توابع:

$x \sim \hat{x}$

$f(x), f(\hat{x})$

$E_{\hat{x}} = E_{abs}(x, \hat{x}) = |x - \hat{x}| \Rightarrow x = \hat{x} + E_{\hat{x}}$

$f(x) = f(\hat{x} + E_{\hat{x}})$ ①

یادآوری (بسط تیلور):

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \cdots \quad ②$$

$$①,② \Rightarrow f(x) = f(\hat{x} + E_{\hat{x}}) = f(\hat{x}) + E_{\hat{x}} f'(\hat{x}) + \frac{E_{\hat{x}}^2}{2!} f''(\hat{x}) + \cdots$$

$$f(x) \simeq f(\hat{x}) + E_{\hat{x}} f'(\hat{x}) \Rightarrow f(x) - f(\hat{x}) \simeq E_{\hat{x}} f'(\hat{x}) \Rightarrow$$

$$E_{abs}(f(x), f(\hat{x})) = |f(x) - f(\hat{x})| \simeq E_{abs}(x, \hat{x}) |f'(\hat{x})|$$

$$E_{rel}(f(x), f(\hat{x})) = \frac{|f(x) - f(\hat{x})|}{|f(x)|} \simeq \frac{E_{abs}(x,\hat{x})\,|f'(\hat{x})|}{|f(x)|}$$

$$x\frac{|x|}{|x|} = E_{rel}(x,\hat{x}) \boxed{\left|\frac{x f'(\hat{x})}{f(x)}\right|}$$ عدد حالت f

تابع دو متغیره:

$$E_{abs}(f(x,y), f(\hat{x},\hat{y})) \simeq E_{abs}(x,\hat{x})\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x},\hat{y})\right| + E_{abs}(y,\hat{y})\left|\frac{\partial f}{\partial y}(\hat{x},\hat{y})\right|$$

$$E_{rel}(f(x,y), f(\hat{x},\hat{y})) \simeq E_{rel}(x,\hat{x})\left|\frac{x\frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x},\hat{y})}{f(x,y)}\right| + E_{rel}(y,\hat{y})\left|\frac{y\frac{\partial f}{\partial y}(\hat{x},\hat{y})}{f(x,y)}\right|$$

مثال: حجم استوانه‌ای به شعاع $\frac{4}{3}$ و ارتفاع $\frac{5}{3}$ را در سیستم $F(10,3,-4,5)$ بدست آورده‌ایم کران بالای خطای نسبی انباشتگی را محاسبه کنید. (برای روند کردن ، از گرد کردن استفاده کرده‌ایم)

حجم استوانه $= \pi r^2 h$

$f(x,y,z) = xy^2z$

$x = \pi \simeq 3.1415\ldots = (0.31415\ldots)_{10} \times 10 \rightsquigarrow \hat{x} = 0.314 \times 10$

$y = \frac{4}{3} = 1.33\ldots = 0.1\bar{3} \times 10 \Rightarrow \hat{y} = 0.133 \times 10$

$z = \frac{5}{3} = 1.666\ldots = 0.1666\ldots \times 10 \rightsquigarrow \hat{z} = 0.167 \times 10$

$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2z$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz$

$\frac{\partial f}{\partial z} = xy^2$

$E_{rel}(x,\hat{x}) \leq \frac{1}{2}\beta^{-m+1} = \frac{1}{2}10^{-3+1} = \frac{1}{200} = 0.005$

$E_{rel}(y,\hat{y}) \leq 0.005$

$E_{rel}(z,\hat{z}) \leq 0.005$

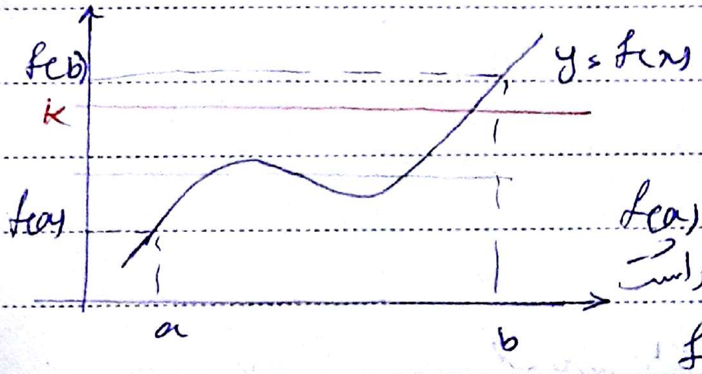
$$E_{rel}(f(x,y,z), f(\hat{x},\hat{y},\hat{z})) \leq 0.005 \left| \frac{x\hat{y}^2\hat{z}}{xy^2z} \right|$$

$$+ 0.005 \left| \frac{y2\hat{x}\hat{y}\hat{z}}{xy^2z} \right| + 0.005 \left| \frac{z\hat{x}\hat{y}^2}{xy^2z} \right|$$

پایداری →

ریشه یابی توابع غیرخطی:

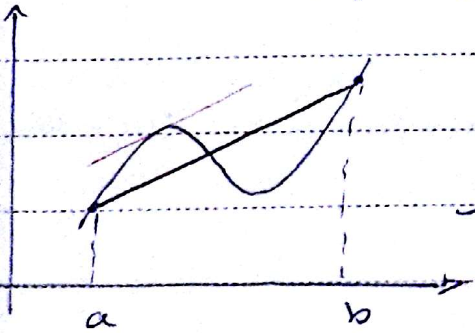
قضیه مقدار میانی: فرض کنیم تابع f روی $[a,b]$ پیوسته بوده و $f(a) < k < f(b)$ در این صورت $c \in [a,b]$ وجود دارد که $f(c) = k$



حالت خاص قضیه مقدار میانی:

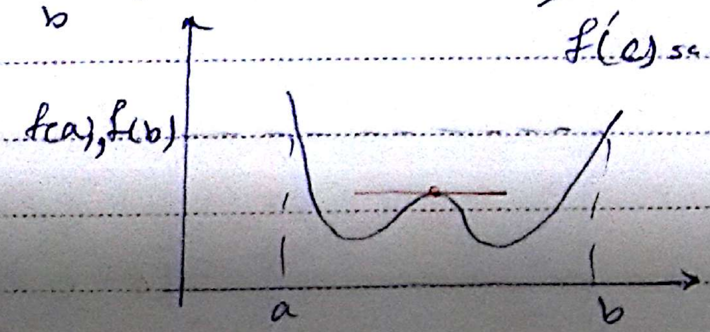
فرض کنیم f روی $[a,b]$ پیوسته بوده و $f(a)f(b) < 0$ در این صورت f حداقل یک ریشه در $[a,b]$ خواهد داشت $f(a) < 0 < f(b)$, $f(c) = 0$

قضیه مقدار میانگین: فرض کنیم f روی $[a,b]$ پیوسته و نیز روی (a,b) مشتق پذیر باشد در این صورت $c \in (a,b)$ وجود دارد که $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$



حالت خاص قضیه ی مقدار میانگین (قضیه رُل):

فرض کنیم f در $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق پذیر باشد و نیز $f(a) = f(b)$. در این صورت $c \in (a,b)$ وجود دارد به طوری که $f'(c) = 0$



تعمیم قضیه رل: فرض کنیم f در $[a,b]$ پیوسته بوده و n ریشه در این بازه داشته باشد. در این صورت $f^{(k)}$ (در صورت وجود) حداقل $n-k$ ریشه در بازه‌ی (a,b) خواهد داشت

$n=2 ,\ k=1 \Rightarrow$ f' حداقل 1 ریشه دارد

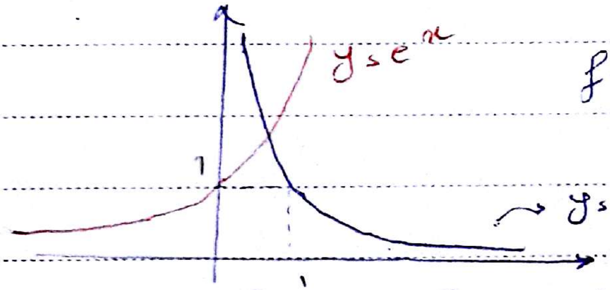
$n=3$ $\begin{cases} k=1 \xRightarrow{n-k=2} \\ k=2 \xRightarrow{n-k=1} \end{cases}$

$k=1$: f' حداقل 2 ریشه دارد

$k=2$: f'' حداقل 1 ریشه دارد

مثال: $f(x) = xe^x - 1 ,\ x \geq 0$

$f(x)=0 \Rightarrow xe^x - 1 = 0 \Rightarrow xe^x = 1 \Rightarrow e^x = 1/x$



$f(0) = -1 < 0 ,\ f(1) = e-1 > 0$

طبق قضیه مقدار میانی $f(0)f(1) < 0 \Rightarrow$ f حداقل 1 ریشه در بازه‌ی $[0,1]$ دارد

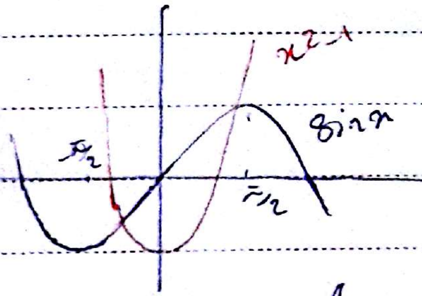
فرض می‌کنیم f در بازه فوق 2 ریشه داشته باشد در این صورت f' در بازه فوق باید ریشه داشته

$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x \neq 0 \quad x \in [0,1]$ پس چون ریشه ندارد

پس f دقیقاً 1 ریشه در بازه‌ی $[0,1]$ دارد

مثال: $f(x) = \sin x - x^2 + 1$

$f(x) = 0 \Rightarrow \sin x = x^2 - 1$



$f(0) = 1 > 0 ,\ f(\pi/2) = 2 - \frac{\pi^2}{4} < 0$

$f(0)f(\pi/2) < 0 \rightsquigarrow$ حداقل 1 ریشه در بازه $[0, \pi/2]$

$f(0) = 1 > 0 ,\ f(-\pi/2) = -\frac{\pi^2}{4} < 0$

$f(0)f(-\pi/2) < 0 \rightsquigarrow$ حداقل 1 ریشه در بازه $[-\pi/2, 0]$ دارد

$f'(x) = \cos x - 2x \Rightarrow f''(x) = -\sin x - 2 \neq 0$ — طبق قضیه تعمیم رل

پس در بازه فوق فقط دو ریشه دارد

فرض می‌کنیم 3 ریشه داشته باشد

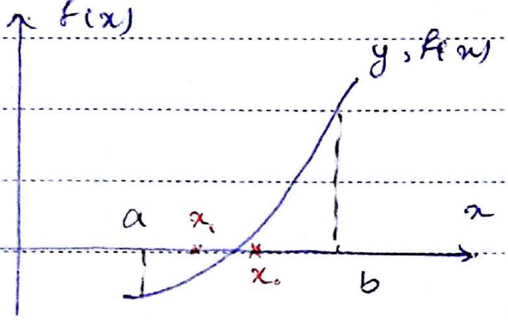
← f'' حداقل یک ریشه

روش های عددی ریشه یابی :

روش دو بخشی (تنصیف) :

فرض کنیم f تابعی پیوسته روی $[a,b]$ باشد به طوری که $f(a)f(b)<0$

$\{x_n\} \longrightarrow \alpha$ (α ریشه‌ای از تابع f)



الگوریتم :

1) $a_0 = a , b_0 = b , x_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$

2) برای $k=1,2,\dots$ مراحل زیر را انجام می دهیم :

i) $f(a_{k-1})f(x_{k-1})<0 : a_k = a_{k-1} , b_k = \overset{x}{b}_{k-1}$

ii) $f(x_{k-1})f(b_{k-1})<0 : a_k = x_{k-1} , b_k = b_{k-1}$

$\Longrightarrow x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$

iii) $f(x_{k-1}) = 0 \Longrightarrow$ x_{k-1} ریشه‌ای از تابع f است

مثال : $f(x) = x^3+2x+1 , x \in [-1,1]$ $f(-1)=-2 , f(1)=4$

$a_0=-1 , b_0 = 1 , x_0 = \frac{-1+1}{2} = 0$ $f(x_0) = f(0) = 0+0+1>0$

$a_1 = -1 , b_1 = 0 , x_1 = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}$ بازه $[-1,0]$

$f(x_1) = f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2})^3 + 2(-\frac{1}{2}) + 1 = -\frac{1}{8} < 0$ $[\overset{a_2}{-\frac{1}{2}} , \overset{b_2}{0}]$

⋮

شرط های توقف ($\varepsilon>0$ را در نظر بگیریم) :

1) $|f(x_n)|<\varepsilon$

2) $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

3) $\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} < \varepsilon$

* تذکر : در برنامه برای جلوگیری از گیر کردن در حلقه ، تعداد تکرار ها را مشخص می کنیم

قضیه: فرض کنیم f روی $[a , b]$ پیوسته بوده و نیز $f(a)f(b)<0$، اگر $\{x_n\}$ دنباله ی تولید شده با روش دوبخشی باشد آنگاه داریم:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}$$ (α ریشه ای از تابع f)

همگرایی $\rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$

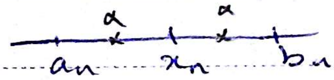
اثبات:

$$b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b_0 - a_0) = \frac{1}{2}(b-a)$$

$$b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(b-a)\right) = \frac{1}{2^2}(b-a)$$

$\vdots$

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$$



از آنجایی که x_n نقطه‌ی وسط بازه ی $[a_n , b_n]$ است، داریم:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

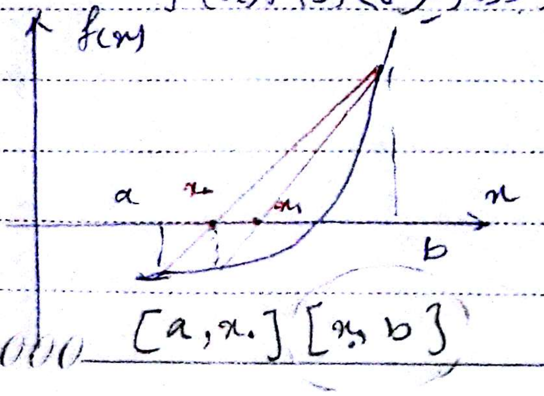
مثال: چند تکرار از روش دوبخشی را برای یافتن ریشه تابع $f(x) = x^3 + 2x + 1$ در بازه ی $[-1 , 1]$ انجام دهیم تا مطمئن باشیم فاصله ی تقریب به دست آمده تا ریشه از $\varepsilon = 10^{-6}$ کمتر است

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} \Rightarrow$$

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} = \frac{1-(-1)}{2^{n+1}} < 10^{-6} \Rightarrow 2^n > 10^6 \Rightarrow n \log 2 > 6 \Rightarrow$$

$$n > \frac{6}{\log 2} = 19.93 \Rightarrow n \geq 20$$

روش نابجایی: فرض می کنیم f روی $[a , b]$ پیوسته بوده و نیز $f(a)f(b)<0$



$[a , x_0]$ $[x_0 , b]$

معادله‌ی خط گذرنده از $(a_k, f(a_k))$ و $(b_k, f(b_k))$:

$$y - f(b_k) = \frac{f(b_k) - f(a_k)}{b_k - a_k}(x - b_k)$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)}(-f(b_k)) = x - b_k \Rightarrow x = b - f(b)\frac{b - a}{f(b) - f(a)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \Rightarrow x_k = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$$

تذکر: سرعت همگرایی روش نابجایی در بیشتر موارد بیشتر از روش دوبخشی است و اکثر موارد از روش دوبخشی به عنوان شروع کننده استفاده می‌شود و در ادامه از روش دیگری استفاده می‌شود
که برای پیدا کردن بازه

مثال: $f(x) = x^3 + 2x + 1$ و $x \in [-1, 1]$

$$a_0 = -1,\ b_0 = 1,\ x_0 = \frac{(-1)f(1) - (1)f(-1)}{f(1) - f(-1)} = \frac{-4 - (-2)}{4 - (-2)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$f(-1) = -2 \quad f(1) = 4$$

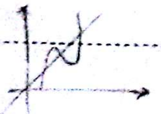
$$f(-\tfrac{1}{3}) = (-\tfrac{1}{3})^3 + 2(-\tfrac{1}{3}) + 1 = -\frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{-1 - 18 + 27}{27} = \frac{8}{27}$$

$a_1 = -1$, $b_1 = -\frac{1}{3}$ ----

روش نقطه ثابت:

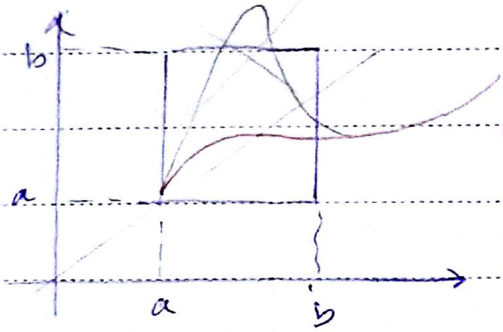
$x = \alpha$ را نقطه ثابت تابع ϕ گوییم هرگاه $\phi(\alpha) = \alpha$

مثال: تابع $f(x) = x - \sin(\pi x)$ در بازه‌ی $[0, 1]$ دارای نقاط ثابت ۰ و ۱ است
$f(0) = 0 - 0 = 0$, $f(1) = 1 - \sin(\pi) = 1$



مثال: تابع $\phi(x) = x$ در هر نقطه از دامنه، نقطه ثابت دارد

قضیه: فرض کنیم تابع ϕ روی $[a, b]$ پیوسته باشد و نیز $\phi([a, b]) \subseteq [a, b]$ در این صورت ϕ حداقل یک نقطه ثابت در $[a, b]$ دارد. همچنین اگر ϕ روی (a, b) مشتق پذیر باشد و ثابت مثبت $k<1$ موجود باشد به طوری که
$|\phi'(x)| \leq k,\ \forall x \in (a, b)$



آنگاه نقطه ثابت ϕ منحصر بفرد است

مثال: $\phi(x)=\frac{x^2-1}{3}, x\in[-1,1]$

$\phi'(x)=\frac{2}{3}x , \phi'(x)=0 \Rightarrow x=0$

$\phi(0)=\frac{0-1}{3}=-\frac{1}{3}$

$\phi(-1)=\frac{(-1)^2-1}{3}=0$

$\phi(1)=\frac{1-1}{3}=0$

برد تابع $[-\frac{1}{3}, 0]$

$\phi([-1,1])\subseteq[-1,1] \Rightarrow$ ϕ حداقل ۱ نقطه ثابت در $[-1,1]$ دارد

$-1\le x\le 1 \Rightarrow -\frac{2}{3}\le\frac{2}{3}x\le\frac{2}{3}$

$|\phi'(x)|=|\frac{2}{3}x|\le\boxed{\frac{2}{3}}^{k} \Rightarrow$ نقطه ثابت ϕ منحصر بفرد است

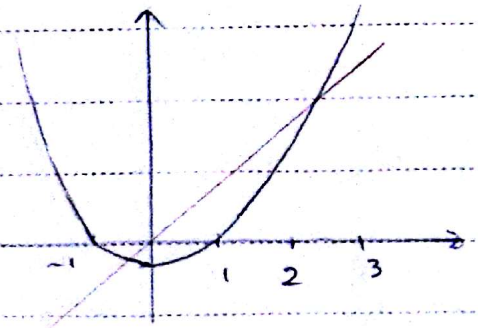
مثال: $\phi(x)=\frac{x^2-1}{3} , x\in[3,4]$

$\phi'(x)=\frac{2}{3}x , \phi'(x)=0 \Rightarrow x=0$

$\phi(3)=\frac{3^2-1}{3}=\frac{8}{3}$ برد تابع $[\frac{8}{3},5]$

$\phi(4)=\frac{4^2-1}{3}=5$ $\phi([3,4])\not\subseteq[3,4]$

ولی نمی‌توانیم بگوییم ϕ نقطه ثابت ندارد



روش نقطه ثابت:

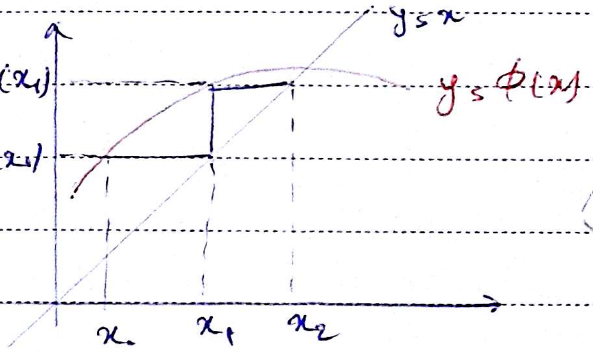
x_0 مقدار اولیه‌ی دلخواه در $[a,b]$

$x_n = \phi(x_{n-1})\,,\ n \geq 1$

$x_1 = \phi(x_0)\ ,\ x_2 = \phi(x_1)\ ,\ \ldots$

اگر ϕ تابعی پیوسته روی $[a,b]$ باشد و دنباله‌ی $\{x_n\}$ همگرا به α باشد، آنگاه α نقطه ثابت تابع ϕ است

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \phi(x_{n-1}) = \phi(\lim x_{n-1}) = \phi(\alpha)$$



قضیه: فرض کنیم تابع ϕ در مفروضات قضیه‌ی نقطه ثابت صدق کند. در این صورت دنباله‌ی $\{x_n\}$ تولید شده با $x_n = \phi(x_{n-1})$ همگرا به نقطه ثابت منحصر به فرد تابع ϕ می‌باشد.

مثال: $\phi(x) = \frac{x^2-1}{3}\ ,\ x \in [-1,1]$

$x_0 = -1$

$x_1 = \phi(x_0) = \phi(-1) = \frac{(-1)^2-1}{3} = 0$

$x_2 = \phi(x_1) = \phi(0) = \frac{0-1}{3} = -1/3$

$x_3 = \phi(x_2) = \phi(-1/3) = \frac{(-1/3)^2-1}{3} = \frac{-\frac{8}{9}}{3} = \frac{-8}{27}$

حل معادله با روش نقطه ثابت

$$\underbrace{f(x)=0}\ \Longleftrightarrow\ \phi(x)=x$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{x+f(x)}_{\phi(x)}=x \rightarrow 3x+f(x)=3x \Rightarrow x=\underbrace{\frac{3x+f(x)}{3}}_{\phi(x)}$$

Subject:

Year. Month Date. ( )

مثال: $f(x) = x^2 - 2 , x \in [1,2]$

1) $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{x} = \phi_1(x)$

2) $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = 2/x \Rightarrow 2x = \frac{2}{x} + x \Rightarrow$

$x = \frac{1}{2}(2/x + x) = \phi_2(x)$

3) $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2 + x = x \Rightarrow x^2 + x = x + 2 \Rightarrow x(x+1) = x+2 \Rightarrow x = \frac{x+2}{x+1} = \phi_3(x)$

$x_n = \phi_i(x_{n-1}) , i = 1, 2, 3, \ldots$

n	$x_n = \phi_1(x_{n-1})$	$x_n = \phi_2(x_{n-1})$	$x_n = \phi_3(x_{n-1})$
0	1.5000	1.5000	1.5000
1	1.3333	1.4167	1.4000
2	1.5000	1.4142	1.4167
3	1.3333	1.4142	1.4138
			1.4142
			1.4142
	واگرا	همگرا	همگرا

$x_0 = 1.5 = 3/2 \Rightarrow x_1 = \varphi_1(x_0) = \varphi_1(3/2) = \frac{2}{3/2} = 4/3$

$x_2 = \varphi(x_1) = \phi(4/3) = \frac{2}{(4/3)} = 6/4 = 3/2$

$x_1 = \phi_2(x_0) = \phi_2(3/2) = 1/2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(3/2)} + 3/2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{6}\right) = \frac{17}{12}$

$\phi_3 = \frac{x+2}{x+1} \quad \phi'_3 = \frac{-1}{(x+1)^2} \neq 0 \quad \phi(1) = 3/2 , \phi(2) = 4/3 \Rightarrow R = [4/3 , 3/2]$

RCD ✓

$1 \leq x \leq 2 \rightarrow 2 \leq x+1 \leq 3 \rightarrow 4 \leq (x+1)^2 \leq 9 \Rightarrow |\phi'(x)| < 1/4$

مرتبه همگرایی :

فرض کنیم دنباله‌ی $\{x_n\}$ همگرا به α باشد. اگر ثابت‌های مثبت p و λ موجود باشند بطوری که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p} = \lambda$$

آنگاه گوییم مرتبه همگرایی دنباله‌ی $\{x_n\}$ ، برابر p می باشد

$$x_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

$$\lim \frac{\left|\frac{1}{n+1}-0\right|}{\left|\frac{1}{n}-0\right|^p} = \lambda \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{(\frac{1}{n})^p} = \lambda \Longrightarrow p=1 \Rightarrow \lambda=1$$

مرتبه همگرایی دنباله $\underline{1}$ می باشد

$$p<1: \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{(\frac{1}{n})^p} = 0 \qquad p>1: \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{(\frac{1}{n})^p} = \infty$$

$$* \; |x_{n+1}-\alpha| \simeq \lambda |x_n-\alpha|^p$$

$$|x_{n+1}-\alpha| \simeq \lambda |x_n-\alpha|^1$$

$$|\hat{x}_{n+1}-\hat{\alpha}| \simeq \lambda |\hat{x}_n-\hat{\alpha}|^2$$

یک تابع دیگر

روش دوبخشی $\longrightarrow$ مرتبه همگرایی اش به روش تجربی بدست آمده است که یک است

روش نابجایی مرتبه همگرایی $\underline{1}$ دارد

قضیه : فرض کنیم $\phi \in C^p[a,b]$ در شرایط قضیه نقطه ثابت صدق کند اگر

$$\phi'(\alpha) = \cdots = \phi^{(p-1)}(\alpha) = 0 \quad \& \quad \phi^{(p)}(\alpha) \neq 0$$

آنگاه مرتبه همگرایی دنباله‌ی $\{x_n\}$ که تولید شده با $x_n=\phi(x_{n-1})$ ، برابر p می باشد

مثال : مرتبه همگرایی ϕ_2 را بدست آورید

$$\phi_2(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}+x\right) \qquad \phi_2'(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{x^2}+1\right)$$

$$\Phi'_2(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{2}+1\right) = 0$$

$$\Phi''_2(x) = \frac{2}{x^3} \,,\quad \Phi''_2(\sqrt{2}) \neq 0 \Rightarrow$$

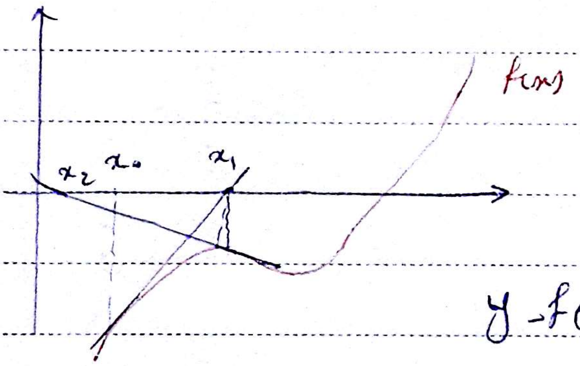
مرتبه‌ی همگرایی دنباله‌ی $\{x_n\}$ تولید شده با $x_n = \Phi_2(x_{n-1})$ دو می‌باشد

$$\Phi_3(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

$$\Phi'_3(x) = \frac{x+1-(x+2)}{(x+1)^2} = \frac{-1}{(x+1)^2} \neq 0$$

$\Phi'_3(\sqrt{2}) \neq 0 \Rightarrow$ مرتبه همگرایی ۱ است

روش نیوتن :



معادله‌ی مماس بر نمودار در نقطه $(x_n, f(x_n))$:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

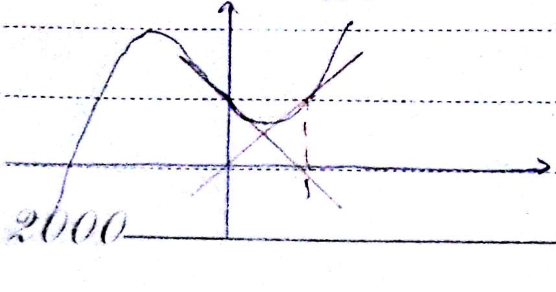
$$y = 0 \Rightarrow x - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (f'(x_n) \neq 0)$$

مثال : $f(x) = x^3 - 2x + 2$

$$x_0 = 0 \,,\quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n + 2}{3x_n^2 - 2}$$

$$x_1 = 0 - \frac{0 - 2\times0 + 2}{3\times0 - 2} = 1 \qquad x_2 = 1 - \frac{1 - 2\times1 + 2}{3\times1 - 2} = 0$$



روش نیوتن:

$\{x_n\}$ $$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

گوییم f در $x=\alpha$، یک ریشه از مرتبه تکرار m دارد هرگاه بتوان f را به صورت $f(x)=(x-\alpha)^m q(x)$ نوشت که $\lim_{x\to\alpha} q(x) \neq 0$ اگر $m=1$، α را ریشه ساده‌ی تابع f و اگر $m>1$، α را ریشه‌ی تکراری تابع f گوییم

مثال: $f(x)=(x+2)^3 x^2 (x-1)$، تابع f در $x=-2$، ریشه از مرتبه‌ی تکرار 3 در $x=0$، ریشه از مرتبه تکرار 2 و در $x=1$ ریشه از مرتبه‌ی تکرار 1 دارد

مثال: $f(x)=e^x-x-1$ ؛ $f(0)=e^0-0-1=0$

قضیه: فرض کنیم $f \in C^m[a,b]$، f در $x=\alpha$ یک ریشه از مرتبه‌ی تکرار m دارد اگر و فقط اگر

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=\dots=f^{(m-1)}(\alpha)=0 \ \& \ f^{(m)}(\alpha)\neq 0$$

در مثال بالا: $f'(x)=e^x-1$ و $f'(0)=e^0-1=0$ و $f''(x)=e^x$، $f''(0)=e^0=1\neq 0$

$x=0$، ریشه تابع f با مرتبه‌ی تکرار 2 می‌باشد

مرتبه همگرایی روش نیوتن (در صورت همگرایی): برای ریشه‌های ساده، 2 و برای ریشه‌های تکراری 1 می‌باشد

روش نیوتن بهبود یافته: (α ریشه از مرتبه تکرار m باشد)

1) $$x_n = x_{n-1} - m\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

2) $$x_n = x_{n-1} - \frac{f^{(m-1)}(x_{n-1})}{f^{(m)}(x_{n-1})}$$

مرتبه همگرایی 2

$$g(x)=f^{(m-1)}(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} g(\alpha)=f^{(m-1)}(\alpha)=0 \\ g'(\alpha)=f^{(m)}(\alpha)\neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$ α ریشه‌ی ساده تابع g است

$$x_n = x_{n-1} - \frac{g(x_{n-1})}{g'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{f^{(m-1)}(x_{n-1})}{f^{(m)}(x_{n-1})}$$

هزینه عملیات مشتق زیاد است

$$f(x)=4^x x^5 \sin(x)$$

$$f'(x)=\ln(4)\,4^x x^5 \sin x + 4^x(5x^4)\sin x + 4^x x^5 \cos x$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

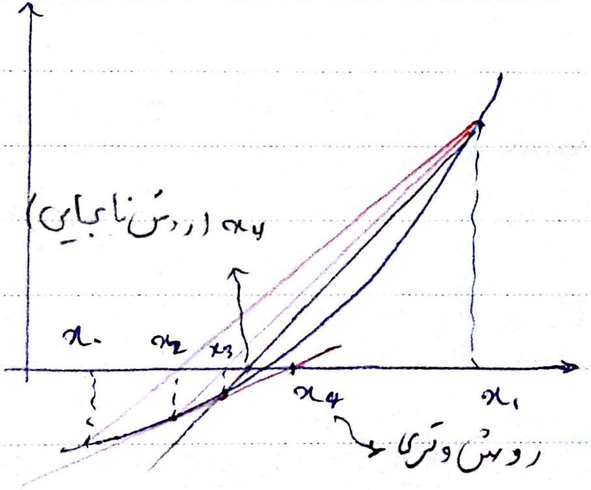
$$f'(x_{n-1}) = \lim_{x \to x_{n-1}} \frac{f(x) - f(x_{n-1})}{x - x_{n-1}} \Rightarrow f'(x_{n-1}) \simeq \frac{f(x) - f(x_{n-1})}{x - x_{n-1}}$$

$$x = x_{n-2} : f'(x_{n-1}) \simeq \frac{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}{x_{n-2} - x_{n-1}}$$

روش وتری (خط قاطع)

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{\frac{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}{x_{n-2} - x_{n-1}}} = \frac{x_{n-1} f(x_{n-2}) - x_{n-2} f(x_{n-1})}{f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})}$$

بین نقطه $f(x_{n-1})$ و $f(x_{n-2})$ خط رسم می‌کنیم



* مرتبه همگرایی روش وتری $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ است
$\simeq 1.6$

حل دستگاه های غیرخطی:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 1 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

$X^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix}$ را بیابیم به طوری که
$f_1(x_1^*, x_2^*) = 0$, $f_2(x_1^*, x_2^*) = 0$

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \rightsquigarrow X_n = X_{n-1} - (J_F(x_{n-1}))^{-1} F(X_{n-1})$$