Subject
Date

$$J_F(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$X_n = X_{n-1} + \delta X_{n-1}$$

هزینه عملیاتی J_F بالاست :

$$\delta X_{n-1} = -(J_F(X_{n-1}))^{-1} F(X_{n-1})$$

$$\Rightarrow (J_F(X_{n-1}))\,\delta X_{n-1} = -F(X_{n-1})$$

مثال :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 1 = 0 & (f_1) \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 & (f_2) \end{cases}$$

معادله از درجه دوم

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad F(X) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = X_0 + \delta X_0$$

$$(J_F(X_0))\,\delta X_0 = -F(X_0)$$

$$J_F(X) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \qquad J_F(X_0) = J_F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$F(X_0) = F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \delta X_0 = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\delta_1 - \delta_2 = 0 \\ 2\delta_1 + 2\delta_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow 3\delta_2 = -1 \Rightarrow \delta_2 = -\tfrac{1}{3} \Rightarrow \delta_1 = -\tfrac{1}{6}$$

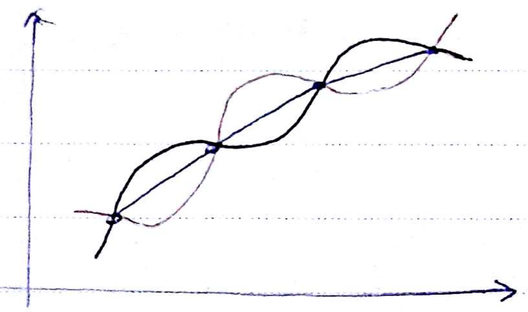
$$\delta X_0 = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \qquad X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

درون یابی توابع :

مثلاً جمعیت در سال‌های مختلف

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	1360	1370	1380	1390
$f(x)$	α_1	α_2	α_3	α_4

$$f(1384) = ?$$



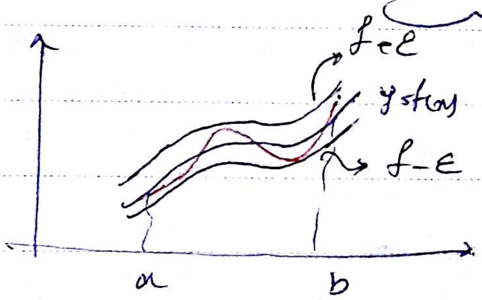
$f(x) \simeq P(x)$

$P(x_i) = f(x_i) \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$

تابع P که در خاصیت فوق صدق می‌کند را درون‌یاب تابع f در نقاط $x_0, \dots, x_n$ می‌نامیم

درون‌یاب چندجمله‌ای:

- مشتقات و انتگرال چندجمله‌ای‌ها به سادگی قابل محاسبه است
- تقریب یکنواخت توابع پیوسته توسط چندجمله‌ای‌ها



فرض کنیم $f_0, \dots, f_n$ مقادیر تابع f در نقاط متمایز $x_0, \dots, x_n$ باشند

$$f(x_i) = f_i \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

$P_n(x_i) = f_i \quad , \quad i = 0, \dots, n$

$$\left.\begin{array}{l} i=0 : P_n(x_0) = f_0 \Rightarrow a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = f_0 \\ i=1 : P_n(x_1) = f_1 \Rightarrow a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n = f_1 \\ \vdots \\ i=n : P_n(x_n) = f_n \Rightarrow a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = f_n \end{array}\right\}$$

n+1 معادله

n+1 مجهول

$a_0, \dots, a_n$ مجهولات

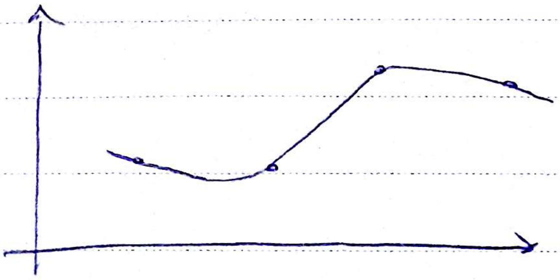
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

ماتریس ضرایب = ماتریس واندرموند

اگر x_iها متمایز باشند، آنگاه ماتریس واندرموند وارون‌پذیر است و دستگاه حاصل از مسئله درون‌یابی جواب منحصربفرد دارد و لذا مسئله درون‌یابی نیز جواب منحصربفرد دارد

ایک و نقطه یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر n وجود دارد به طوری که ($P_n(x_i)=f_i$)

$i=0,\dots,n$



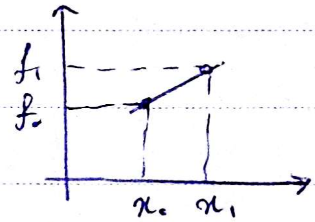
$(x_0,f_0),\dots,(x_n,f_n)$

$P_n(x_i)=f_i\ ,\ i=0,\dots,n$

درون‌یابی لاگرانژ:

$n=0\ ,\ (x_0,f_0)$

$P_0(x_0)=f_0\ ,\ P_0(x)=f$



$n=1\ ,\ (x_0,f_0)\ ,\ (x_1,f_1)$

$$y-f_0=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}(x-x_0)\Rightarrow y=f_0+\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

$$=f_0\left(1-\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)+f_1\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)$$

$$P_1(x)=f_0\underbrace{\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)}_{l_0(x)}+f_1\underbrace{\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)}_{l_1(x)}$$

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\ ,\ l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\qquad P_1(x)=f_0l_0(x)+f_1l_1(x)$$

$$P_n(x)=f_0l_0(x)+f_1l_1(x)+\dots+f_nl_n(x)$$

$(x_0,f_0),\dots,(x_n,f_n)$

$$l_i(x_j)=\begin{cases}0\ ,\ i\neq j\\ 1\ ,\ i=j\end{cases}\qquad 1=l_0(x_0)\ ,\ l_0(x_1)=l_0(x_2)=\dots=l_0(x_n)=0$$

$P_n(x_i)=f_i\ ,\ i=0,\dots,n\ ,$

$$P_n(x_i)=f_0\cancel{l_0(x_i)}+\dots+f_il_i(x_i)+\dots+f_n\cancel{l_n(x_i)}=f_i$$

Date

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$\begin{cases} l_i(x_j)=0 , & i\neq j \\ l_i(x_i)=1 & (i=j) \end{cases}$$

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

مثال: درون‌یاب لاگرانژ داده‌های زیر را بدست آورید

x_i	-1 (x_0)	0 (x_1)
f_i	0 (f_0)	2 (f_1)

$n=1$

$$P_1(x) = f_0\, l_0(x) + f_1\, l_1(x)$$

$$l_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} = \frac{x-0}{-1-0} = -x$$

$$l_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{x-(-1)}{0-(-1)} = x+1$$

$$P_1(x) = 0(-x) + 2(x+1) = \underline{2x+2}$$

مثال:

x_i	-1	0	-2
f_i	0	2	-2

$n=2$ $\quad P_2(x) = f_0\, l_0(x) + f_1\, l_1(x) + f_2\, l_2(x)$

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{x(x+2)}{(-1)(1)} = -x(x+2) = -x^2-2x$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x+2)}{(1)(2)} = \frac{1}{2}(x^2+3x+2)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x+0)}{(-1)(-2)} = \frac{1}{2}(x^2+x)$$

$$P_2(x) = 0(-x^2-2x) + 2\times\frac{1}{2}(x^2+3x+2) + (-2)\left(\frac{1}{2}\right)(x^2+x)$$

$$= \underline{2x+2}$$

تذکر: درجه چند جمله‌ای حداکثر n است

اگر داده‌ای اضافه شود نمی‌توان از درون‌یاب قبلی کمک گرفت

البته چون نقطه (-2,-2) در درون‌یاب قبلی صدق می‌کرد درون این مثال مشابه قبلی می‌شد

PAPCO

Subject :
Date

ویژگی های روش لاگرانژ :

۱) پیاده سازی آن ساده است

2) اگر داده ای به داده های قبلی اضافه شود ، از محاسبات قبلی نمی توان استفاده کرد

3) درجه ی چندجمله ای درون یاب ، پس از اتمام عملیات مشخص می شود

4) l_i ها تنها به x_i ها بستگی دارند

درون یاب نیوتن :

$P_n(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$

$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$

$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ پایه ی چندجمله ای درجه n است

$\{1, x-x_0, (x-x_0)(x-x_1), \dots, (x-x_0)\dots(x-x_{n-1})\}$ یعنی پایه دیگر

$P_n(x_i) = f_i \,, \; i = 0, \dots, n$

تفاضلات تقسیم شده نیوتن :

فرض کنیم $f_0, \dots, f_n$ مقادیر تابع f در نقاط $x_0, \dots, x_n$ باشد

تفاضل تقسیم شده ی مرتبه ی صفر تابع f نسبت به x_i را با نماد $f[x_i]$ نمایش داده و تعریف می کنیم

$f[x_i] = f_i$

تفاضلات تقسیم شده ی مرتبه های بعد با استقرا تعریف می شوند : تفاضل تقسیم شده ی مرتبه k ام تابع f نسبت به $x_i, \dots, x_{i+k}$ با نماد $f[x_i, \dots, x_{i+k}]$ نشان داده شده و تعریف می شود :

$$f[x_i, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

$$k=1: \; f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$k=2: \; f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

$$= \frac{\dfrac{f_{i+2}-f_{i+1}}{i+2-i+1} - \dfrac{f_{i+1}-f_i}{x_{i+1}-x_i}}{x_{i+2}-x_i}$$

$$P_n(x_0)=f_0 \Rightarrow a_0=f_0=f[x_0]$$

$$P_n(x_1)=f_1 \Rightarrow a_0+a_1(x_1-x_0)=f_1 \Rightarrow a_1=\frac{f_1-a_0}{x_1-x_0}=\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}=f[x_0,x_1]$$

$$a_k=f[x_0,\dots,x_k]$$

$$P_n(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+\dots+f[x_0,\dots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

x_i	f_i	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$
x_0	f_0		$f[x_0,x_1]$
		$\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}=A$	
x_1	f_1		$\frac{B-A}{x_2-x_1} \rightarrow f[x_0,x_1,x_2]$
		$\frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}=B$	
x_2	f_2		

*

مثال: درون یابی نیوتن داده های زیر را بدست آورید

x_i	f_i	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$
-3	10		
		$\frac{2-10}{-1-(-3)}=-4$	
-1	2		$\frac{0-(-4)}{1-(-3)}=1$
		$\frac{2-2}{1-(-1)}=0$	
1	2		

$$P_2(x)=10+(-4)(x-(-3))+(1)(x-(-3))(x-(-1))=x^2+1$$

مثال بعد: داده $(0,0)$ اضافه شود

-3	10			
		-4		
-1	2		1	
		0		$\frac{2-1}{0-(-3)}=\frac{1}{3}$
1	2		2	
		$\frac{0-2}{0-1}=2$		
0	0			

Subject
Date

مشابه مرحله قبل

$$P_3(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0, \dots, x_3](x-x_0)\cdots(x-x_2)$$

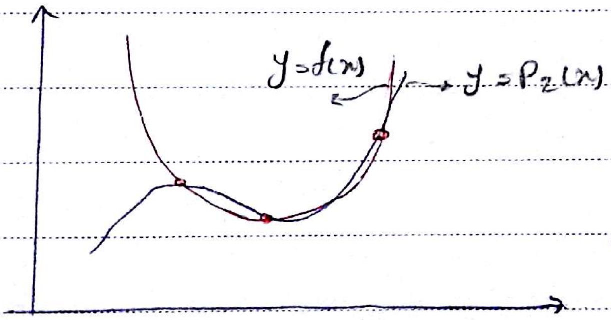
$$P_3(x) = x^2+1 + \left(\tfrac{1}{3}\right)(x-\overset{-3}{x_0})(x-\overset{-1}{x_1})(x-\overset{1}{x_2})$$

مثال ۲

x_i	f_i	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$	
-3	6	-4	1	0
-1	2	0	1	
1	2	1		
0	1			

$$P_2(x) = x^2+1$$

تذکر: درجه درون‌یاب = مرتبه آخرین تفاضل تقسیم شده ناصفر



قضیه: فرض کنیم $x_0, x_1, \dots, x_n$ نقاط متمایز از $[a,b]$ باشند و $f \in C^{n+1}[a,b]$. در این صورت به ازای هر $x \in [a,b]$، $c_x \in (a,b)$ وجود دارد به طوری که

$$f(x) - P_n(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x)$$

P_n درون‌یاب تابع f از درجه‌ی حداکثر n در نقاط $x_0, \dots, x_n$ می‌باشد.

مثال: فرض کنیم تابع $f(x) = x^4 - 1$ را در بازه‌ی $[-1, 1]$ و در نقاط $x_0=-1$، $x_1=0$ و $x_2=1$ با P_2 درون‌یابی کرده‌ایم. خطای درون‌یابی در نقطه‌ی $x=\frac{1}{2}$ را تخمین بزنید.

$n=2$:

$$|f(x) - P_2(x)| = \left| \frac{(x-(-1))(x-0)(x-1)}{3!} f^{(3)}(c_x) \right|$$

$f(x) = x^4 - 1 \qquad f'(x) = 4x^3 \qquad f''(x) = 12x^2 \qquad f^{(3)}(x) = 24x$

$$-1\le x\le 1 \Rightarrow -24 \le 24x \le 24 \Rightarrow |f^{(3)}(x)| \le 24$$

$$\left|f(\tfrac12)-P_2(\tfrac12)\right| \le \frac{\left|(\frac12-(-1))(\frac12-0)(\frac12-1)\right|}{\cancel{3!}}\times \overset{4}{\cancel{24}} = \frac{3}{2}$$

مثال: تابع $f(x)=\sin x$ را در نقاط متساوی الفاصله $x_i=\frac{i}{n}$ که $i=0,\dots,n$، در بازه ی $[0,1]$ با P_n درون یابی کرده ایم. نشان دهید

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x)=f(x)$$

$$f(x)=\sin x,\quad f'(x)=\cos x,\quad f''(x)=-\sin x,\ \dots$$

$$|f^{(n+1)}(x)|\le 1$$

$$0\le x\le 1,\ 0\le x_i\le 1 \Rightarrow -1\le -x_i\le 0 \Rightarrow -1\le x-x_i\le 1$$

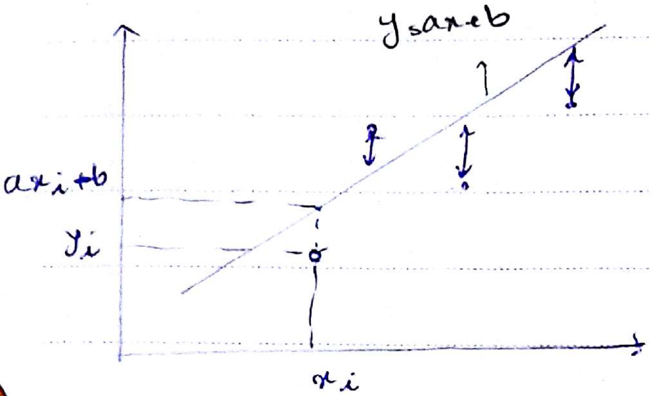
$$\Rightarrow |x-x_i|\le 1$$

$$0\le |f(x)-P_n(x)| \le \frac{|1\times 1\times\cdots\times 1|}{(n+1)!}\times 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}|f(x)-P_n(x)|=0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}P_n(x)=f(x)$$

تقریب کمترین مربعات :

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$



$$e_i = |y_i - (ax_i + b)|$$

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i+b))^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial a} = 0 \Rightarrow 2\sum_{i=1}^{n} (-x_i)(y_i - (ax_i+b)) = 0 \\ \dfrac{\partial E}{\partial b} = 0 \Rightarrow 2\sum_{i=1}^{n} (-1)(y_i - (ax_i+b)) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

$$S_{x^2} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad S_x = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad S_y = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\begin{cases} a S_{x^2} + b S_x = S_{xy} \\ a S_x + bn = S_y \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} S_{x^2} & S_x \\ S_x & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{xy} \\ S_y \end{bmatrix}$$

مثال ۱: با استفاده از تقریب کمترین مربعات داده‌های زیر را با خطی به فرم $y=ax+b$ تقریب بزنید.

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
-2	1	4	-2
0	-3	0	0
1	4	1	4
2	-2	4	-4
$S_x=1$	$S_y=0$	$S_{x^2}=9$	$S_{xy}=-2$

$$\begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 9a+b=-2 \Rightarrow -36b+b=-2 \Rightarrow \boxed{b=\frac{2}{35}} \\ a+4b=0 \Rightarrow a=-4b=\frac{-8}{35} \end{cases}$$

$$\boxed{y=\frac{-8}{35}x+\frac{2}{35}}$$

برازش داده‌ها با سهمی :

$$y=ax^2+bx+c$$

$$e_i=|y_i-(ax_i^2+bx_i+c)|$$

$$E(a,b,c)=\sum_{i=1}^{n} e_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-(ax_i^2+bx_i+c)\right)^2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a}=0 \\ \frac{\partial E}{\partial b}=0 \\ \frac{\partial E}{\partial c}=0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma x^4 & \Sigma x^3 & \Sigma x^2 \\ \Sigma x^3 & \Sigma x^2 & \Sigma x \\ \Sigma x^2 & \Sigma x & n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma x^2y \\ \Sigma xy \\ \Sigma y \end{bmatrix}$$

برازش داده‌ها با چندجمله‌ای درجه m :

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_mx^m$$

$$E(a_0,\dots,a_n)=\sum_{i=1}^{n} e_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-(a_0+a_1x_i+\dots+a_mx_i^m)\right)^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial a_i}=0 \quad , i=0,\dots,m \rightsquigarrow$$ m معادله m مجهول

$$\begin{array}{cc} \text{درجه } 3 & \begin{bmatrix} \Sigma x^6 & \Sigma x^5 & \Sigma x^4 & \Sigma x^3 \\ \Sigma x & & & \Sigma x^2 \\ & & & \Sigma x \\ & & & n \end{bmatrix} \end{array}$$

وقتی از برازش استفاده می‌کنیم که تعداد نقاط‌مون از درجه چندجمله‌ای‌مون بیشتر باشه

Scanned by CamScanner

Subject :
Date

برازش داده ها با تابع نمایی به فرم $(y = a e^{bx})$

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a e^{b x_i})^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial a} = 0 \Rightarrow 2\sum_{i=1}^{n}(-e^{b x_i})(y_i - a e^{b x_i}) = 0 \\ \dfrac{\partial E}{\partial b} = 0 \Rightarrow 2\sum_{i=1}^{n}(-a x_i e^{b x_i})(y_i - a e^{b x_i}) = 0 \end{cases}$$

دستگاه غیرخطی

$$y = a e^{bx} \Rightarrow \ln y = \ln a + bx$$

$$Y = \ln y \ , \ A = \ln a \Rightarrow Y = A + bx$$

$$\hookrightarrow a = e^{A}$$

مثال: داده های زیر را با یک تابع نمایی به فرم $y = ae^{bx}$ تقریب بزنید

x_i	y_i	$Y_i = \ln y_i$	x_i^2	$x_i Y_i$
-1	2	$\ln(2)$		
0	1	$\ln(1)$		
2	4	$\ln(4)$		
S_x		S_Y	S_{x^2}	S_{xY}

مثال: خطی سازی

$$y = \frac{1}{ax+b} \Rightarrow \frac{1}{y} = ax+b$$

به شرط اینکه $y \neq 0$

$$Y = 1/y \ , \ Y = ax+b$$

تذکر: وقتی خطی سازی می کنیم در نهایت معادله نسبت به a و b خطی باشد

مثال: با استفاده از تقریب کمترین مربعات، داده های زیر را با تابعی به صورت $y = a\sin x + b\cos x$ تقریب بزنید

x_i	y_i
$-\pi/2$	-1
0	1
$+\pi/3$	2

Subject:
Date

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (a\sin x_i + b\cos x_i)\right)^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} (-\sin x_i)\left(y_i - (a\sin x_i + b\cos x_i)\right) = 0 \\ \dfrac{\partial E}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} (-\cos x_i)\left(y_i - (a\sin x_i + b\cos x_i)\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} (\sin x_i)^2 + b\sum_{i=1}^{n} \sin x_i \cos x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \sin x_i \\ a\sum_{i=1}^{n} \sin x_i \cos x_i + b\sum_{i=1}^{n} (\cos x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \cos x_i \end{cases}$$

$$y = a_0 \phi_0(x) + a_1 \phi_1(x) + \dots + a_m \phi_m(x).$$

نیاز به خطی سازی ندارد

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

انتگرال گیری عددی :

$f(x) \simeq P_n(x)$, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P_n(x)\,dx$

یک نقطه

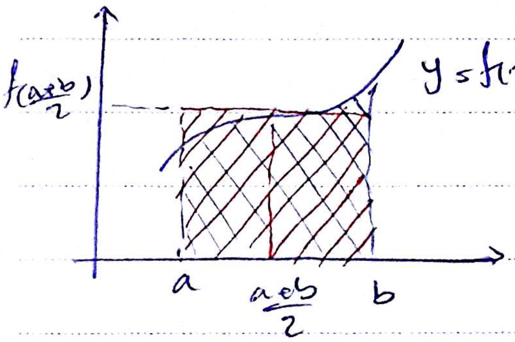
$(c, f(c))$

قاعده انتگرال گیری عددی نقطه میانی ساده

$P_0(x) = f(c)$ $\quad I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b P_0(x)\,dx = \int_a^b f(c)\,dx$

$= f(c)\int_a^b dx = (b-a)f(c)$

$C = \frac{a+b}{2}$ $\quad I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \simeq (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) = I_0(f)$



$R_0(f) = I(f) - I_0(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$

که $\eta \in (a,b)$

قاعده انتگرال گیری ذوزنقه‌ای ساده

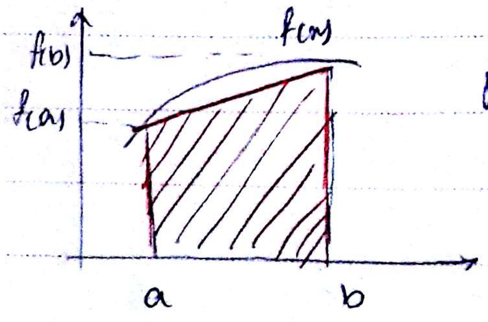
$x_0 = a$, $x_1 = b$

$P_1(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$

$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b P_1(x)\,dx = \int_a^b \left[\frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)\right] dx$

$= \left[\frac{(x-b)^2}{2(a-b)} f(a) + \frac{(x-a)^2}{2(b-a)} f(b)\right]_a^b = \frac{b-a}{2} f(b) - \frac{a-b}{2} f(a)$

$= \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right] = I_1(f)$



$R_1(f) = I(f) - I_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$ $\quad \eta \in (a,b)$

Subject :
Date

قاعده انتگرال‌گیری سیمسون ساده

$x_0=a\,,\; x_1=\frac{a+b}{2}\,,\; x_2=b$

$$I(f)=\int_a^b f(x)\,dx \simeq \int_a^b P_2(x)\,dx = \frac{\frac{b-a}{2}}{3}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)=I_2(f)$$

$$R_2(f)=I(f)-I_2(f)=-\frac{(b-a)^5}{2^5\times 90}f^{(4)}(\eta)\qquad \eta\in(a,b)$$

مثال ۱ با استفاده از فرمول های انتگرال‌گیری نقطه میانی ساده، ذوزنقه‌ای ساده، سیمسون ساده $\int_0^4 (x^3+2x)\,dx$ را تقریب زده و کران های بالای برای خطای ناشی از این تقریب بیابید

نقطه میانی ساده $\quad I_0(f)=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)=(4-0)f\left(\frac{0+4}{2}\right)=4f(2)=4\times 12=48$

ذوزنقه‌ای ساده $\quad I_1(f)=\frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)=\frac{4-0}{2}\left(f(0)+f(4)\right)=2(0+72)=144$

سیمسون ساده $\quad I_2(f)=\frac{\frac{4-0}{2}}{3}\left(f(0)+4f\left(\frac{0+4}{2}\right)+f(4)\right)=\frac{2}{3}(0+4\times12+72)=80$

$f(x)=x^3+2x\,,\; f'(x)=3x^2+2\,,\; f''(x)=6x\,,\; 0\leq x\leq 4 \Rightarrow 0\leq 6x\leq 24$

$f'''(x)=6\,,\; f^{(4)}(x)=0 \qquad \Rightarrow |f''(x)|\leq 24\,,\; x\in[0,4]$

$R_0(f)=\frac{(b-a)^3}{24}f''(\eta) \Rightarrow |R_0(f)|\leq \frac{(4-0)^3}{24}\times 24=64$

$R_1(f)=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta) \qquad |R_1(f)|\leq \frac{(4-0)^3}{12}\times 24=128$

$R_2(f)=I(f)-I_2(f)=-\frac{(b-a)^5}{2^5\times 90}f^{(4)}(\eta) \qquad |R_2(f)|=0$

$\int_0^4 (x^3+2x)\,dx=\frac{x^4}{4}+2\frac{x^2}{2}\Big|_0^4=\frac{16\times16}{4}+16=64+16=80$

البته باید توجه $f(x)\neq P_2(x)$ است ولی انتگرالشان در این بازه با هم برابر است

PAPCO

Subject:
Date

مرتبه دقت فرمول های انتگرال گیری عددی :

گوییم یک فرمول انتگرال گیری عددی از مرتبه ی دقت m است هرگاه m بزرگ ترین عدد صحیحی باشد که فرمول مربوطه برای چند جمله ای های از درجه ی حداکثر m دقیق است

$R_0(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta)$ → مرتبه ی دقت نقطه میانی ساده 1 است

مرتبه ی دقت ذوزنقه ای ساده 1 است

مرتبه ی دقت سیمپسون ساده 3 است

$n=0$: مرتبه دقت 1

$n=1$: مرتبه دقت 1 — از زوج به فرد تغییری نداریم

$n=2$: مرتبه دقت 3 — از فرد به زوج ← 2 تا افزایش

$n=3$: مرتبه دقت 3

$n=4$: مرتبه دقت 5

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

یک فرمول انتگرال گیری عددی برای چند جمله ای های از درجه ی حداکثر n دقیق است اگر و فقط اگر برای توابع $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ دقیق باشد

$f(x)=1: \int_a^b 1\,dx = b-a \Rightarrow (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) = b-a$ ✓ → برای چند جمله ای های درجه صفر دقیق است (نقطه میانی ساده)

$$f(x)=x: \int_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2}$$

با فرمول نقطه میانی : $(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\frac{a+b}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}$

$$f(x)=x^2: \int_a^b x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3}$$

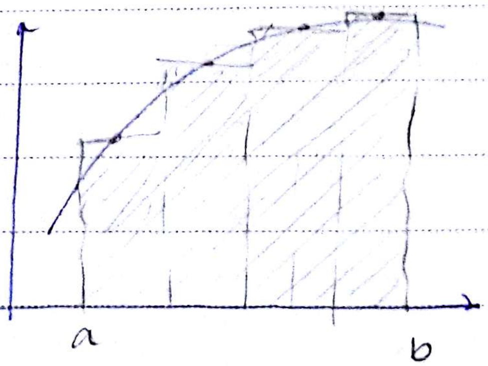
$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$\neq$ — پس نقطه میانی ساده برای درجه 2 دقیق نیست

Date

قاعده نقطه میانی مرکب:

نقاط $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ را با فاصله مساوی در بازه‌ی $[a,b]$ در نظر بگیریم



$$x_{i+1} - x_i = h \,,\quad i = 0, \ldots, n-1$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a=x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n=b} f(x)\,dx$$

$$\simeq 2h f(x_1) + 2h f(x_3) + \cdots + 2h f(x_{n-1})$$

$$= 2h \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) = M_n(f)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx - M_n(f) = \frac{(b-a)h^2}{6} f''(\eta) \;:\; \eta \in (a,b)$$

قاعده ذوزنقه‌ای مرکب:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a=x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n=b} f(x)\,dx$$

$$\simeq \frac{h}{2}\left[f(a) + f(x_1)\right] + \frac{h}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right] + \cdots + \frac{h}{2}\left[f(x_{n-1}) + f(b)\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] = T_n(f)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx - T_n(f) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\eta)$$

Subject
Date

قاعده سیمپسون مرکب:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a=x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n=b} f(x)dx$$

$$\simeq \frac{h}{3}\left[f(a)+4f(x_1)+f(x_2)\right] + \frac{h}{3}\left[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right]$$

$$+ \dots + \frac{h}{3}\left[f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(b)\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(a)+4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i}) + f(b)\right] = S_n(f)$$

$$\int_a^b f(x)dx - S_n(f) = -\frac{(b-a)h^4 f^{(4)}(\eta)}{180} \quad ; \quad \eta \in (a,b)$$

مثال ۱: در تقریب $\int_1^7 \frac{1}{x}dx$ با استفاده از فرمول‌های ذوزنقه‌ای و سیمپسون مرکب، بازه را به چند زیربازه افراز کنیم تا مطمئن باشیم خطای تقریب از 5×10^{-5} کمتر است.

$f = \frac{1}{x} \Rightarrow f' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'' = -\frac{2}{x^3}$ $\qquad \frac{1}{2} < \frac{1}{|f''|} < \frac{7^3}{2}$

$1 < x < 7 \Rightarrow \frac{1}{7} < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow \frac{1}{7^3} < \frac{1}{x^3} < 1 \Rightarrow -\frac{2}{7^3} > -\frac{2}{x^3} > -2 \Rightarrow \frac{2}{7^3} < |f''| < 2$

قاعده ذوزنقه‌ای

$$\left|\frac{\overset{6}{(b-a)}h^2 f''(\eta)}{12}\right| < 5\times10^{-5} \Rightarrow h^2 < \frac{5\times10^{-5}\times 2}{|f''(\eta)|} \Rightarrow \underset{\uparrow\ \frac{b-a}{n}}{h^2} < 5\times10^{-5}\times 7^3$$

$$\Rightarrow \frac{6^2}{n^2} < 5\times10^{-5}\times 7^3 \Rightarrow n > \frac{6}{\sqrt{5\times10^{-5}\times 7^3}} \Rightarrow n > 45.8 \rightarrow n = 46$$

قاعده سیمپسون $\quad |(b-a)h^4 f$

انتگرال‌گیری گاوسی : x_i ها و w_i ها مجهولند — $\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a) f\left(\underbrace{\frac{a+b}{2}}_{x_0}\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

$$x = \frac{(b-a)t + b + a}{2} \qquad t\in[-1,1] \ , \ x\in[a,b]$$

$$t=-1 \Rightarrow x=a \qquad t=1 \Rightarrow x=b$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{f\left(\frac{(b-a)t+b+a}{2}\right)}\left(\frac{b-a}{2}\right)dt$$

تبدیل کردن حدود انتگرال

$$\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(t)dt$$

$n=0$: $\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq w_0 f(x_0)$ — x_0 و w_0 مجهول‌اند

$$f(x)=1 : \int_{-1}^{1} dx = \boxed{2 = w_0}$$

$$f(x)=x : \int_{-1}^{1} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = \boxed{0 = w_0 x_0} \Rightarrow x_0 = 0$$

$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq 2f(0)$ — فرمول گاوسی تک نقطه — مرتبه دقت : $\underline{1}$

مثال : با استفاده از فرمول گاوسی تک نقطه‌ای $\int_2^6 \frac{1}{x+2}dx$ را تقریب بزنید

$$x = \frac{(6-2)t + 6 + 2}{2} = \frac{4t+8}{2} = 2t+4 \Rightarrow dx = 2dt$$

$$\int_2^6 \frac{1}{x+2}dx = \int_{-1}^{1}\frac{1}{(2t+4)+2}\times 2dt = 2\int_{-1}^{1}\underbrace{\frac{1}{2t+6}}_{g(t)}dt = 2\times \overset{w_0}{2}\times \overset{x_0}{\frac{1}{6}} = \frac{2}{3}$$

فرمول گاوس دو نقطه‌ای :

$n=1$:

$$\int_{-1}^{1} \underbrace{f(x)\,dx}_{g(t)dt} \simeq \sum_{i=0}^{1} w_i f(x_i) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

w_1 و w_0 و x_1 و x_0 مجهولند.

$f(x)=1$: $\int_{-1}^{1} dx = \boxed{2 = w_0 + w_1}$

$f(x)=x$: $\int_{-1}^{1} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = \boxed{0 = w_0 x_0 + w_1 x_1}$

$f(x)=x^2$: $\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \boxed{\frac{2}{3} = w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2}$

$f(x)=x^3$: $\int_{-1}^{1} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = \boxed{0 = w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3}$

با حل دستگاه فوق به جواب زیر رسیم :

$w_0 = w_1 = 1$, $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

مثال : با استفاده از فرمول گاوس دو نقطه، $\int_{-3}^{4} \sin x\,dx$ را تقریب بزنید

$$x = \left(\frac{7t+1}{2}\right) \Rightarrow dx = \frac{7}{2}dt \Rightarrow \int_{-3}^{4} \sin(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \sin\left(\frac{7t+1}{2}\right)\frac{7}{2}dt$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq \left[\sin\left(\frac{-\frac{7\sqrt{3}}{3}+1}{2}\right) + \sin\left(\frac{\frac{7\sqrt{3}}{3}+1}{2}\right)\right] \times \frac{7}{2}$$

فرمول گاوس 3 نقطه‌ای : $n=2$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{2} w_i f(x_i) = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

مرتبه دقت : 5

مرتبه دقت کلی : $2n+1$

تمرین ۱) ضرایب a و b و c را طوری به دست آورید که فرمول انتگرال گیری زیر دارای مرتبه دقت 2 باشد
درجه چند جمله ای

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = af(0) + bf(\tfrac{1}{3}) + cf(1)$$

$f(x)=1$: $\int_{-1}^{1} dx = \boxed{2 = a+b+c}$

$f(x)=x$: $\int_{-1}^{1} x\,dx = \boxed{0 = b\times\frac{1}{3} + c}$

$f(x)=x^2$: $\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \boxed{\frac{2}{3} = b\times(\frac{1}{3})^2 + c}$

حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول با شرط اولیه

برحسب یک متغیر

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) , & x\in[a,b] \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

$y'(x) = y^2 - e^x + 1 , \quad x\in[0,1]$

ابتدا نقاط $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ را در بازه $[a,b]$ در نظر می گیریم سپس معادله دیفرانسیل را به یک معادله ی تفاضلی تبدیل کرده و مقادیر y را در نقاط x_i با استفاده از این معادله ی تفاضلی تقریب می زنیم

$h = \frac{b-a}{n}$, $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0, \dots, n-1$ $\quad x_0 = a$

مقدار جواب دقیق در نقطه ی x_i : $y_i = y(x_i)$

مقدار تقریبی در نقطه ی x_i ، w_i

$y(a) = y(x_0) = y_0 = \alpha$

$w_0 = \alpha$

روش اویلر ،

$$y(x) = y(x_i) + (x-x_i)y'(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2}y''(c_i)$$

که c_i بین x و x_i است

$x = x_{i+1}$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + (x_{i+1}-x_i)y'(x_i) + \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2}y''(c_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + h\,y'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(c_i)$$

Subject:
Date

$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} y''(c_i)$ ← استفاده از معادله دیفرانسیل

معادله تفاضلی
$$\begin{cases} w_0 = \alpha \\ w_{i+1} = w_i + h f(x_i, w_i) \quad , \quad i = 0, \dots, n-1 \end{cases}$$

مثال : معادله دیفرانسیل زیر را با روش اویلر حل کنید

$$y'(x) = \underbrace{-y + x + 1}_{f(x,y)} \quad , \quad x \in [0,1] \quad , \quad y(0) = 1$$

$h = 0.1 \quad , \quad \frac{b-a}{n} = h = \frac{1}{n} = 0.1 \Rightarrow n = 10$

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{i+1} = w_i + h f(x_i, w_i) = w_i + h(-w_i + x_i + 1) \quad , \quad i = 0, \dots, 9 \end{cases}$$

$i=0 : \quad w_1 = w_0 + h(-w_0 + x_0 + 1) = 1 + 0.1(-1 + 0 + 1) = 1$

$i=1 : \quad w_2 = w_1 + h(-w_1 + x_1 + 1) = 1 + 0.1(-1 + 0.1 + 1) = 1.01$

⋮

$i=9 : \quad w_{10} =$

جواب دقیق معادله : $y(x) = x + e^{-x}$ $\quad y_i = y(x_i) = x_i + e^{-x_i}$

x_i	$\lvert y_i - w_i \rvert$
0.0	0.0
0.1	0.004837
0.2	0.008731
0.3	0.011818
⋮	⋮
0.9	0.019150
1.0	0.019201

مثال : با استفاده از روش اویلر، معادله دیفرانسیل زیر را حل کرده و تقریبی از $y(0.4)$ را بیابید

$h = 0.2 \quad x \in [0,1] \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(x) = \begin{cases} y(x)\,x\,(-2x + \frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

PAPCO

Scanned by CamScanner