باسمه تعالی

جلسه — سه شنبه (7 / 2 / 95):

اگر خطای تولید شده در هر مرحله‌ای از الگوریتم در هر مرحله‌ای از الگوریتم، در مراحل بعد رشد نکند، الگوریتم را پایدار و در غیر اینصورت الگوریتم را ناپایدار گویند.

مثال: فرض کنیم $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+10}\,dx$. می‌خواهیم I_6 را تا 6 رقم اعشار حساب کنیم.

$$I_n + 10 I_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n + 10x^{n-1}}{x+10}\,dx = \int_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n} \Rightarrow I_n + 10 I_{n-1} = \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{n} - 10 I_{n-1} \quad , \; n \geqslant 1$$

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+10}\,dx = \ln(x+10)\Big|_0^1 = \ln(11) - \ln(10) \simeq 0.095310$$

$n=1$: $I_1 = 1 - 10 I_0 \simeq 0.046900$

$n=2$: $I_2 = \frac{1}{2} - 10 I_1 \simeq 0.031000$

⋮

$n=6$: $I_6 = \frac{1}{6} - 10 I_5 \simeq -0.166333$

$$\overset{\text{تقریبی}}{\bar{I}_0} \rightsquigarrow \overset{\text{دقیق}}{I_0} + \overset{\text{خطا}}{\varepsilon} \qquad \bar{I}_1 = 1 - 10 \overset{\text{تقریبی}}{\bar{I}_0} = 1 - 10(\overset{\text{دقیق}}{I_0 + \varepsilon}) = \overbrace{1 - 10 I_0}^{\text{دقیق } I_1} - 10\varepsilon$$

$$\bar{I}_2 = \frac{1}{2} - 10 \overset{\text{تقریبی}}{\bar{I}_1} = \frac{1}{2} - 10(\overset{\text{دقیق}}{I_1 - 10\varepsilon}) = \overbrace{\frac{1}{2} - 10 I_1}^{\text{دقیق } I_2} + 100\varepsilon \;\cdots\cdots \longrightarrow$$ ناپایدار

روش دوم:

$$I_n + 10 I_{n-1} = \frac{1}{n} \Rightarrow I_{n-1} = \frac{1}{10n} - \frac{1}{10} I_n$$

فرض $\rightsquigarrow I_{10} \simeq 0 \Rightarrow I_9 = \frac{1}{10 \times 10} - 10 I_{10} = 0.01$

$I_8 = \frac{1}{10 \times 9} - \frac{1}{10} I_9 = 0.01011 \;\cdots\cdots\; I_6 = \frac{1}{10 \times 7} - \frac{1}{10} I_7 = 0.01317$

$\overset{\text{تقریبی}}{I_n} \rightarrow \overset{\text{دقیق}}{I_n} + \overset{\text{خطا}}{\varepsilon}$ $\qquad I_{n-1} = \frac{1}{10n} - \frac{1}{10}(I_n + \varepsilon) = \overbrace{\frac{1}{10n} - \frac{1}{10} I_n}^{\text{دقیق } I_{n-1}} - \frac{1}{10}\varepsilon$

$I_{n-2} = \frac{1}{10\times(n-1)} - \frac{1}{10}(\overset{\text{دقیق}}{I_{n-1}} - \frac{1}{10}\varepsilon) = \frac{1}{10\times(n-1)} - \frac{1}{10} I_{n-1} + \frac{1}{100}\varepsilon$ ... و الی آخر

$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+10} dx$ $\qquad$ در حل فرض کردیم $I_{10} \simeq 0$ زیرا:

$0 \leq x \leq 1 \Longrightarrow 10 \leq x+10 \leq 11 \Longrightarrow \frac{1}{11} \leq \frac{1}{x+10} \leq \frac{1}{10} \Longrightarrow \frac{x^n}{11} \leq \frac{x^n}{x+10} \leq \frac{x^n}{10}$

$\Longrightarrow \int_0^1 \frac{x^n}{11} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{x+10} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{10} dx \Longrightarrow \frac{1}{11\times(n+1)} - 0 \leq I_n - 0 \leq \frac{1}{10\times(n+1)} - 0 \rightarrow$

$\Longrightarrow I_{10} \simeq 0 \Longrightarrow I_{10} - 0 \leq \frac{1}{10\times 11}$

تا اینجا مباحث میانترم بود

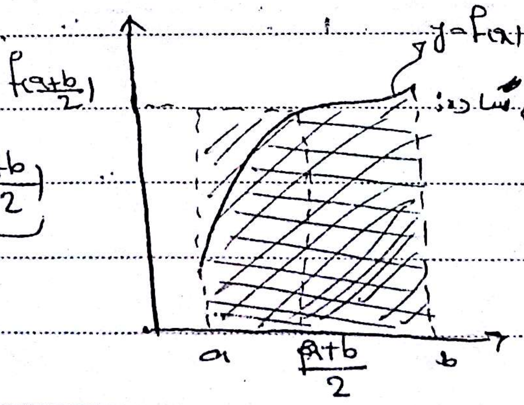
انتگرال گیری عددی :

$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$

$n=0 : (x_0, f(x_0))$ $\qquad P_0(x) = f(x_0)$

$I_0(f) = \int_a^b P_0(x)dx = \int_a^b f(x_0)dx = (b-a)f(x_0)$

قاعدهٔ انتگرال گیری نقطه میانی ساده:



$x_0 = \frac{a+b}{2}$

$I(f) \simeq I_0(f) = \underbrace{(b-a)f(\frac{a+b}{2})}_{\text{برابر مساحت مستطیلی که با قرمزها هاشور زده شده}}$

$R_0(f) = I(f) - I_0(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(c)$ $\qquad$ که $c \in (a,b)$

درون یابی لاگرانژ $L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_j - x_j}$ ① ، $P(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i f(x_i)$

② یادا باشد اسلایدها [illegible]

[redacted] از بیان

Subject:

Date 33.2

قاعده‌ٔ انتگرال‌گیری ذوزنقه‌ای ساده : $n=1 \quad x_0 = a \quad x_1 = b \Rightarrow (a, f(a))$ و $(b, f(b))$

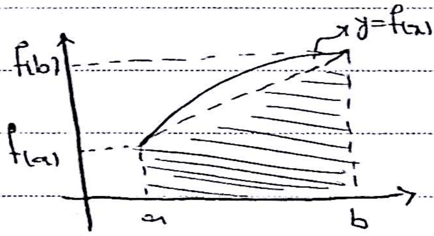
درون یابی لاگرانژ $\Longrightarrow P_1(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$

$$I_1(f) = \int_a^b P_1(x)\,dx = \int_a^b \left[\frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)\right] dx$$

$$= \left[\frac{(x-b)^2}{2(a-b)} f(a) + \frac{(x-a)^2}{2(b-a)} f(b)\right]\Bigg|_a^b = \frac{b-a}{2} f(b) - \frac{a-b}{2} f(a)$$

$$= \underbrace{\frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]}$$

برابر مساحت ذوزنقه که ها شور خورده است.



$$R_1(f) = I(f) - I_1(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b P_1(x)\,dx = \int_a^b \underbrace{(f(x) - P_1(x))}_{\text{خطای درون یابی}}\,dx \longrightarrow$$

$\longrightarrow = -\frac{(b-a)^3}{12} f'(c) \quad c \in (a, b)$ که

قاعده‌ٔ انتگرال‌گیری سیمسون ساده : $n=3 \quad x_0 = a$ و $x_1 = \frac{a+b}{2}$ و $x_2 = b$

در خیلی جاها این را با h نمایش می‌دهند.

پس از محاسبات لازم $\Longrightarrow I_2(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{\overset{h}{\frac{b-a}{2}}}{3} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$

$$R_2(f) = I(f) - I_2(f) = -\frac{(b-a)^5}{2^5 \times 90} f^{(4)}(c) \quad c \in (a, b)$$ که

مثال) مقدار انتگرال $\int_0^2 (x^3 - 2x)\,dx$ را با فرمول‌های انتگرال‌گیری نقطه میانی، ذوزنقه‌ای و سیمسون ساده تقریب بزنید و کران خطاها را برای هر یک از تقریب‌ها را بیابید.

روش نقطه میانی

جلسه سه‌شنبه ۱۳۹۵/۲/۱۴

می‌گوییم یک فرمول انتگرال‌گیری عددی از مرتبه دقت m است هرگاه m بزرگترین عدد صحیحی باشد که فرمول مربوطه برای چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر m، دقیق است.

قاعده نقطه میانی: $I(f)=\int_a^b f(x)\,dx$ $\qquad I_0(f)=(b-a)f(\frac{a+b}{2})$

$R_0(f)=I(f)-I_0(f)=\frac{(b-a)^3}{24}f'(c)$

می‌توان دید که

اگر f یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر 1 باشد، آنگاه $R_0(f)=0$ ولذا مرتبه دقت قاعده نقطه میانی 1 است.

قاعده ذوزنقه‌ای: $R_1(f)=I(f)-I_1(f)=\frac{-(b-a)^3}{12}f''(c)$

مرتبه دقت قاعده ذوزنقه‌ای 1 است.

قاعده سیمپسون: $R_2(f)=I(f)-I_2(f)=\frac{(b-a)^5}{2^5\times 90}f^{(4)}(c)$

مرتبه دقت قاعده سیمپسون 3 است.

به نام حق

⑤ روش رامبرگ در سؤالات امتحانی بود پس آن را در بیاریم ⑤

مرتبه دقت	تعداد نقاط
1	1و2
3	3و4
5	5و6

$$I(f)=\int_a^b f(x)\,dx \simeq (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

یک فرمول انتگرال گیری عددی که برای چند جمله‌ای های از درجه m دقیق است، اگر و فقط اگر برای توابع $\{1, x, x^2, \dots, x^m\}$ دقیق باشد

$$f(x)=1 : \int_a^b 1\,dx = b-a$$ ← مقدار واقعی

$$\| $$

$$(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)=(b-a)$$ ← مقدار تقریبی

به روش نقطه میانی

$$f(x)=x : \int_a^b x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2}$$

$$(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{b^2-a^2}{2}$$

$$f(x)=x^2 : \int_a^b x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3}$$

* تا جایی ادامه می‌دهیم که مقادیر واقعی و تقریبی برابر نشوند.

$$\neq$$

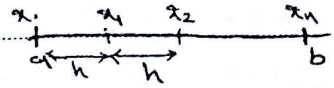
$$(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

* پس دقت فرمول نقطه میانی 1 است.

مثال) مرتبه دقت فرمول انتگرال گیری زیر را بدست آورید.

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq \frac{1}{2}\left(f(0)+f(1)\right)+\frac{1}{12}\left(f'(0)-f'(1)\right)$$

قاعده نقطه میانی مرکب :



$$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$$

n زوج

$$x_1=a+h$$

$$x_2=a+2h$$

$$\vdots$$

$$x_i=a+ih \qquad i=0,\dots,n$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{x=x_0}^{x_2} f(x)\,dx+\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx+\dots+\int_{x_{n-2}}^{x_n=b} f(x)\,dx$$

$$\boxed{h=\frac{b-a}{n}}$$

[redacted]

روش نقطه میانی مرکب $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \simeq 2hf(x_1)+2hf(x_3)+\cdots+2hf(x_{n-1})=2h\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1})= M_n(f)$

$$\boxed{I(f)-M_n(f)=\frac{h^2(b-a)}{6}f''(c)}$$ که $c\in(a,b)$

*مرتبه دقت نقطه میانی مرکب مانند نقطه میانی 1 است.

قاعده ذوزنقه ای مرکب:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a=x_0}^{x_1} f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx+\cdots+\int_{x_{n-1}}^{x_n=b} f(x)dx$$

$$\simeq \frac{h}{2}(f(a)+f(x_1))+\frac{h}{2}(f(x_1)+f(x_2))+\cdots+\frac{h}{2}(f(x_{n-1})+f(b))\Rightarrow$$

$$\Rightarrow=\frac{h}{2}\left(f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(b)\right)=T_n(f)$$

$$\boxed{I(f)-T_n(f)=\frac{-h^2(b-a)}{12}f''(c) \qquad c\in(a,b) \text{ که } \leftarrow \text{خطا}}$$

قاعده سیمپسون مرکب:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{a=x_0}^{x_2} f(x)dx+\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx+\cdots+\int_{x_{n-2}}^{x_n=b} f(x)dx$$

خارج

$$\simeq\frac{h}{3}(f(a)+4f(x_1)+f(x_2))+\frac{h}{3}(f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4))+\cdots+\frac{h}{3}(f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(b))$$

$$\Rightarrow=\frac{h}{3}\left(f(a)+4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1})+2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i})+f(b)\right)=S_n(f)$$

$$\boxed{I(f)-S_n(f)=-\frac{h^4(b-a)}{180}f^{(4)}(c)}$$ که $c\in(a,b)$

مثال) انتگرال $\int_2^7 \frac{1}{x}dx$ را در نظر بگیرید. الف) تقریبهای $\underset{\text{میانی}}{M_4(f)}$ و $\overset{\text{ذوزنقه}}{T_4(f)}$ و $\overset{\text{سیمپسون}}{S_4(f)}$ را برای این انتگرال بیابید.

ب) اگر در روشهای فرمولهای انتگرال گیری عددی ذوزنقه ای و سیمپسون مرکب چند زیر بازه در نظر بگیریم تا مطمئن شویم خطای حاصل

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
2	$13/4$	$18/4$	$23/4$	7

$n=4$

انتگرال گیری عددی از 5×10^{-7} کمتر است؟

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{7-2}{4}=\frac{5}{4} \qquad f(x)=1/x$$

$$M_4(f)=2\times\frac{5}{4}\left(f(\overset{13/4}{x_1})+f(\overset{23/4}{x_3})\right)=\frac{5}{2}\left(\frac{4}{13}+\frac{4}{23}\right)=$$

$$T_4(f)=\frac{\frac{5}{4}}{2}\left(f(2)+2\left(f(\tfrac{13}{4})+f(\tfrac{18}{4})+f(\tfrac{23}{4})\right)+f(7)\right)$$
$$=\frac{5}{8}\left(\frac{1}{2}+2\left(\frac{4}{13}+\frac{4}{18}+\frac{4}{23}\right)+\frac{1}{7}\right)=$$

$$S_4(f)=\frac{\frac{5}{4}}{3}\left(f(2)+4\left(f(\tfrac{13}{4})+f(\tfrac{23}{4})\right)+2\left(f(\tfrac{18}{4})\right)+f(7)\right)$$
$$=\frac{5}{12}\left(\frac{1}{2}+4\left(\frac{4}{13}+\frac{4}{23}\right)+2\times\frac{4}{18}+\frac{1}{7}\right)=$$

روش ذوزنقه ای مرکب:

$$I(f)-T_n(f)=\frac{-h^2(b-a)}{12}f''(c)$$

$$f''(c)=\frac{2}{x^3}\leqslant\frac{2}{2^3}=1/4$$

$$|I(f)-T_n(f)|\leqslant\frac{5}{12}\times h^2\times\frac{1}{4}\leqslant 5\times10^{-9}\Longrightarrow h^2\leqslant 48\times10^{-9}\Longrightarrow h\leqslant\sqrt{48\times10^{-9}}$$

$$h=\frac{b-a}{n}\longrightarrow\boxed{n\geqslant 2282}$$

روش سیمپسون مرکب:

$$f^{(4)}(x)=\frac{24}{x^5}\leqslant\frac{24}{2^5}$$

$$|I(f)-S_n(f)|=\frac{-h^4(b-a)}{180}f^{(4)}(c)\leqslant\frac{5h^4}{180}\times 24/32\leqslant 5\times10^{-9}\longrightarrow$$

$$\longrightarrow h^4\leqslant 15\times16\times10^{-9}\Longrightarrow\boxed{n\geqslant 114}$$

انتگرال گیری گاوسی:

$$\int_a^b f(x)dx\simeq\sum_{i=0}^{n}w_i f(x_i)$$

x_i ها و w_i ها مجهول اند.
گاوس!؟

$x = \frac{(b-a)t + b + a}{2}$; $t \in [-1,1]$, $x \in [a,b]$

$t = -1 \Rightarrow x = a$

$t = 1 \Rightarrow x = b$

تغییر متغیر $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t+b+a}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)dt \rightarrow$

$\Rightarrow = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(t)dt$ $\Longrightarrow \int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i)$

$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \omega_0 f(x_0)$ ω_0 و x_0 مجهول

$f(x) = 1 : \int_{-1}^{1} 1 dx = x\Big|_{-1}^{1} = 2$
$\omega_0 f(x_0) = \omega_0$ $//$

$f(x) = x : \int_{-1}^{1} x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0$
$\omega_0 f(x_0) = \omega_0 x_0$ $//$

$\rightarrow \boxed{\omega_0 = 2}$, $\omega_0 x_0 = 0 \rightarrow \boxed{x_0 = 0}$

$O_0 \rightarrow \int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \omega_0 f(x_0) = 2f(0)$ ⟵ گاوسی یک نقطه‌ای

مثال) انتگرال $\int_2^7 \frac{1}{x}dx$ را با فرمول گاوسی یک نقطه‌ای تقریب بزنید.

بسمه تعالی

Subject:
Date 39

جلسه ـ سه‌شنبه 195/12/21:

$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(x_i) \rightarrow$ مرتبه دقت $\leq 2n+1$

فرمول گاوسی دونقطه ای: $2n+1$ = مرتبه دقت فرمولهای گاوسی (بیشترین مرتبه دقت را دارند)

$n=0 : \int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq 2f(0)$

$n=1 : \int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1)$ $\qquad$ ω_0 و ω_1 و x_0 و x_1 مجهولند.

$f(x)=1 : \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2$

$\boxed{\omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1) = \omega_0 + \omega_1 = 2}$

$f(x)=x : \int_{-1}^{1} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 1/2 - 1/2 = 0$

$\boxed{\omega_0 x_0 + \omega_1 x_1 = 0}$

$f(x)=x^2 : \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3} = \frac{2}{3}$

$\boxed{\omega_0 x_0^2 + \omega_1 x_1^2 = \frac{2}{3}}$

$f(x)=x^3 : \int_{-1}^{1} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = 0$

$\boxed{\omega_0 x_0^3 + \omega_1 x_1^3 = 0}$

چهار معادله و چهار مجهول داریم. پس از حل: $\omega_0 = \omega_1 = 1$ و $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -x_1$

$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3}) \rightarrow$ مرتبه دقت 3 است.

گاوسی دو نقطه ای

مثال) انتگرال $\int_2^7 \frac{1}{x}dx$ را با فرمول گاوسی دونقطه ای حل کنید.

$$x = \frac{(b-a)t + b + a}{2} = \frac{5t+9}{2}$$

$$\int_2^7 \frac{1}{x}dx = \int_{-1}^{1} \frac{2}{5t+9} \times \frac{5}{2} dt = \int_{-1}^{1} \frac{5}{5t+9} dt = \frac{5}{5(-\frac{\sqrt{3}}{3})+9} + \frac{5}{5(\frac{\sqrt{3}}{3})+9}$$

فرمول گاوسی سه نقطه ای:

$n=2 : \int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1) + \omega_2 f(x_2)$

$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{5}{9} f(-\frac{\sqrt{3}}{5}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\frac{\sqrt{3}}{5}) \rightarrow$ فرمول گاوسی ۳ نقطه ای

مرتبه دقت: 5

حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول با شرط اولیه:

فرم کلی: $y'(x) = f(x, y(x))$ $\quad x \in [a,b]$ $\quad$ شرط اولیه: $y(a) = \alpha$

برای حل عددی معادله دیفرانسیل ابتدا بازه $[a,b]$ را با انتخاب از نقاط $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ گسسته سازی

می‌کنیم بطوریکه $x_{i+1} - x_i = h \quad i = 0, \ldots, N-1 \quad h = \frac{b-a}{N}$

PAPCO

سپس معادله‌ی دیفرانسیل را به یک معادله‌ی تفاضلی تبدیل کرده و به کمک آن مقادیر تقریبی تابع y در نقاط x_iها را می‌یابیم.

$y_i = y(x_i)$: مقدار جواب دقیق در نقطه‌ی x_i

w_i : مقدار تقریبی در نقطه‌ی x_i

روش اویلر:

بسط تیلور: $y(x) = y(x_i) + (x-x_i)y'(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2} y''(c_i)$

که c_i بین x و x_i است. ← برای این عددی غیر از c_i را گذاشتیم تا بگوییم با الگوریتم این تقریب.

$x = x_{i+1}$: $y(x_{i+1}) = y(x_i) + (x_{i+1}-x_i) y'(x_i) + \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2} y''(c_i)$,

$\longrightarrow y_{i+1} = y_i + h y'(x_i) + h^2/_2\, y''(c_i)$

داریم: $y'(x) = f(x, y(x)) \longrightarrow y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$

با جایگذاری در معادله‌ی بالا → $y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} y''(c_i)$

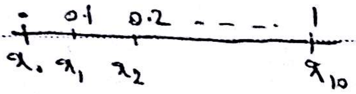
معادله‌ی تفاضلی
$$\begin{cases} w_0 = \alpha \\ w_{i+1} = w_i + h f(x_i, w_i) \quad , \quad i = 0, 1, \text{——}, N-1 \end{cases}$$

$\leftarrow w_0 = y_0 = y(x_0) = y(a) = \alpha$

مثال) با استفاده از روش اویلر، معادله‌ی دیفرانسیل زیر را حل کنید. $(h = 0.1)$

$y' = -y + x + 1 \quad , \quad x \in [0, 1] \quad , \quad y(0) = 1$

$h = \frac{b-a}{N} \Rightarrow 0.1 = \frac{1-0}{N} \Rightarrow N = 10$



$f(x, y) = -y + x + 1$
$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{i+1} = w_i + h(-w_i + x_i + 1) \quad , \quad i = 0, \text{--}, 9 \end{cases}$$

$i = 0$: $w_1 = w_0 + h(-w_0 + x_0 + 1) = 1 + 0.1(-1 + 0 + 1) = 1$

$i = 1$: $w_2 = w_1 + h(-w_1 + x_1 + 1) = 1 + 0.1(-1 + 0.1 + 1) = 1.01$

⋮

$i = 9$: $w_{10} = --$

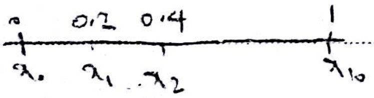
جواب دقیق معادله : $y(x) = x + e^{-x}$ $\qquad y_i = y(x_i) = x_i + e^{-x_i}$

x_i	$\lvert y_i - w_i \rvert$
0.0	0
0.1	0.004837
0.2	0.008731
0.3	0.011818
0.4	0.014220
⋮	⋮
0.9	0.019150
1.0	0.019201

مثال) معادله دیفرانسیل زیر را با روش اویلر حل کرده و تقریبی از $y(0.4)$ بیابید. $(h=0.2)$.

$$y'(x) = \begin{cases} y(x)\times(-2x+\frac{1}{x}) & x\neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases} \qquad x\in[0,2] \text{ و } y(0)=0$$

$$h=\frac{b-a}{N} \Rightarrow 0.2=\frac{2-0}{N} \Rightarrow N=10$$



$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{i+1} = w_i + h f(x_i, w_i) \end{cases} \qquad f(x,y) = y(x)(-2x+1/x)$$

$$i=0 \rightarrow w_1 = w_0 + h f(x_0, w_0) = 0 + 0.2 \times 1 = 0.2$$

$$i=1 \rightarrow w_2 = w_1 + h f(x_1, w_1) = 0.2 + 0.2 \times 0.2 \times 4.6 = 0.384$$

$$f(0.2, 0.2) = 0.2\left(-2\times 0.2 + \frac{1}{0.2}\right) = 0.2 \times 4.6$$

روشهای تیلور مرتبه بالا :

$$y(x) = y(x_i) + (x-x_i)y'(x_i) + \frac{(x-x_i)^2}{2}y''(x_i) + \cdots + \frac{(x-x_i)^n}{n!}y^{(n)}(x_i) + \frac{(x-x_i)^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\xi_i)$$

که ξ_i بین x و x_i است.

$x = x_{i+1}$, $y_{i+1} = y_i + h y'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(x_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(c_i)$

$y'(x) = f(x, y(x))$ $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$ $y''(x_i) = f'(x_i, y(x_i))$ ،

$y'''(x) = f''(x_i, y(x_i))$ .... $y^{(k)}(x_i) = f^{(k-1)}(x_i, y(x_i))$

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i, y_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(x_i, y_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(c_i)$$

$$\begin{cases} w_0 = \alpha \\ w_{i+1} = w_i + h T^{(n)}(x_i, w_i) \qquad i = 0, \dots, N-1 \end{cases}$$

روش تیلور مرتبه n

$$T^{(n)}(x_i, w_i) = f(x_i, w_i) + \frac{h}{2} f'(x_i, w_i) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n-1)}(x_i, w_i)$$

* روش تیلور مرتبه 1، همان روش اویلر است. Nice :)

جلسه سه شنبه (95/2/28):

حل مسئله های امتحان قبلی:

برای میان ترم

فرض کنید $f(x) = x^n$ نشان دهید: i) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 1$

ii) $f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] = x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1}$

i) $f(x) - P_n(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} \cancel{f^{(n+1)}(c_x)} \Rightarrow x^n = f(x) = P_n(x)$

$x^n = f[x_0] + (x-x_0) f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1) f[x_0, x_1, x_2] + \cdots +$

$+ (x-x_0) \cdots (x-x_{n-2}) f[x_0, \dots, x_{n-1}] + (x-x_0) \cdots (x-x_{n+1}) f[\overset{1}{\cancel{x_0}}, \dots, x_n]$

ضریب x^n : $f[x_0, \dots, x_n]$

ii) $0 = f[x_0, \dots, x_{n-1}] - x_0 - x_1 - \cdots - x_{n-1}$

روش تیلور مرتبه n :

$$\begin{cases} \omega_0 = \alpha \\ \omega_{i+1} = \omega_i + hT^{(n)}(x_i, \omega_i) \qquad i = 0, \dots, N-1 \end{cases}$$

$$T^{(n)}(x_i, \omega_i) = f(x_i, \omega_i) + \frac{h}{2} f'(x_i, \omega_i) + \dots + \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n-1)}(x_i, \omega_i)$$

مثال) معادله دیفرانسیل زیر را با روش تیلور مرتبه 2 حل کنید (h=0.2).

$$y'(x) = y - x^2 + 1 \qquad x \in [0, 2],\ y(0) = 0.5$$

$$\begin{cases} \omega_0 = \alpha \\ \omega_{i+1} = \omega_i + hT^{(2)}(x_i, \omega_i) \end{cases} \qquad T^{(2)}(x_i, \omega_i) = f(x_i, \omega_i) + \frac{h}{2} f'(x_i, \omega_i)$$

$$f(x,y) = y - x^2 + 1 \qquad f'(x,y) = y' - 2x = \overset{y'}{\boxed{y - x^2 + 1}} - 2x$$

$$\omega_0 = 0.5$$

$$\omega_1 = 0.5 + 0.2T^{(2)}(\overset{0}{x_0}, \overset{0.5}{\omega_0})$$

$$T^{(2)}(\underset{0}{x_0}, \underset{0.5}{\omega_0}) = \overset{f}{\boxed{\omega_0 - x_0^2 + 1}} + \frac{0.2}{2}\overset{f'}{\boxed{(\omega_0^2 - x_0^2 + 1 - 2x_0)}} = 0.5 - 0 + 1 + \overbrace{\frac{0.2}{2}}^{=0.1}(0.5 - 0 + 1 - 2\times 0)$$

$$= 1.5 + 0.15 = 1.65$$

$$\longrightarrow \omega_1 = 0.5 + \underbrace{0.2 \times 1.65}_{0.330} = 0.830$$

$$h = 0.2 = \frac{b-a}{N} = \frac{2-0}{N} \Rightarrow N = 10$$

جواب دقیق : $y(x) = (x+1)^2 - 0.5e^x$

$$y_i(x_i) = (x_i + 1)^2 - 0.5e^{x_i}$$

x_i	تیلور مرتبه اول	تیلور مرتبه دوم	تیلور مرتبه 4
	$\lvert y_i - \omega_i \rvert$		
0	0	0	0
0.2	0.02930	0.00070	0.000014
0.4	0.06208	0.00171	0.000034
⋮	⋮	⋮	⋮
1.8	0.38702	0.03112	0.0000615
2.0	0.43968	0.04221	0.0000834

روش‌های رانگه - کوتا: این روش‌ها همانند روش‌های تیلور مرتبه بالا دقت خوبی دارند. علاوه براین دارای این مزیت نیز هستند که نیازی به محاسبه مشتقات تابع f ندارند.

روش رانگه - کوتای مرتبه 2:

$$\begin{cases} w_0 = \alpha \\ k_1 = hf(x_i, w_i) \\ k_2 = hf(x_i, w_i + k_1) \\ w_{i+1} = w_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \qquad i = 0, \ldots, N-1 \end{cases}$$

روش رانگه - کوتای مرتبه 4:

$$\begin{cases} w_0 = \alpha \\ k_1 = hf(x_i, w_i) \\ k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 = hf(x_i + h, w_i + k_3) \\ w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad i = 0, \ldots, N-1 \end{cases}$$

خطای برشی موضعی: این خطا، خطایی که ناشی از جایگزینی معادله دیفرانسیل اصلی با معادله تفاضلی است را و در بازه آن را اندازه‌گیری می‌کند و با جایگذاری جواب دقیق معادله در معادله تفاضلی به‌دست می‌آید. در واقع خطای برشی موضعی، خطا در هر مرحله از حل عددی را با این فرض که جواب مرحله قبلی دقیق است، محاسبه می‌کند
شده است.

این سمت
فرمول را شکل
محاسبه
سمت راست
به طور دقیق

$$\begin{cases} w_0 = \alpha \\ w_{i+1} = w_i + h\phi(x_i, w_i) \qquad i = 0, \ldots, N-1 \end{cases}$$

روش اویلر: $\phi(x_i, w_i) = f(x_i, w_i)$

روش تیلور مرتبه n: $\phi(x_i, w_i) = T^{(n)}(x_i, w_i)$

$$w_{i+1} = w_i + h\phi(x_i, w_i) \longrightarrow \frac{w_{i+1} - w_i}{h} - \phi(x_i, w_i) = 0$$

$T_i(h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \phi(x_i, y_i) \Longrightarrow$ خطای برشی موضعی

مثلاً برای روش اویلر $\longrightarrow T_i(h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - f(x_i, y_i)$

$$y(x) = y(x_i) + (x - x_i)y'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2} y''(c_i)$$

$$x = x_{i+1} : y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} y''(c_i)$$

$$T_i(h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - f(x_i, y_i) = \overbrace{\frac{h}{2}}^{O(h)} y''(c_i)$$

مثلاً برای روش تیلور مرتبه n $\longrightarrow T_i(h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - T^{(n)}(x_i, y_i) = \overbrace{\frac{h^n}{(n+1)!}}^{O(h^n)} y^{(n+1)}(c_i)$

حل عددی دستگاههای معادلات دیفرانسیل:

تعمیم دو ← بیش از دو [illegible]
به تعداد m

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}, x \in [a, b], \quad y_1(a) = \alpha, \quad y_2(a) = \beta$$

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix}, F(x, Y) = F(x, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1, y_2) \\ f_2(x, y_1, y_2) \end{bmatrix}$$

$$Y'(x) = F(x, Y), \quad x \in [a, b] \qquad Y(a) = \begin{bmatrix} y_1(a) \\ y_2(a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

مثال) روش اویلر:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1 y_2 - 2x \\ y_2'(x) = y_2^2 + y_1 - 1 \end{cases}, x \in [0, 1], \quad y_1(0) = -1, \quad y_2(0) = 1$$

$$\begin{cases} w_0 = \alpha \\ w_{i+1} = w_i + h f(x_i, w_i) \end{cases} \qquad \begin{cases} W_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \\ W_{i+1} = W_i + h F(x_i, W_i) \end{cases} \quad i = 0, \ldots, N-1$$

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} \qquad F(x, Y) = F(x, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} y_1 y_2^2 - 2x \\ y_2^2 + y_1 - 1 \end{bmatrix}$$

$$h=0.1 \quad \begin{cases} W_0=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} \\ W_1=W_0+hF(x_0,W_0)=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}+0.1F\left(0,\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\begin{matrix}\to y_1\\ \to y_2\end{matrix}\right) \Rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}+0.1\begin{bmatrix}-1\times1-2\times0\\1-1-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0.1\\-0.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boxed{-1.1}\\ \boxed{0.9}\end{bmatrix}\begin{matrix}\to y_1(0.1) \text{ تقریب} \\ \to y_2(0.1) \text{ تقریب}\end{matrix}$$

حل عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه بالا:

$$y''(x)+xy'(x)+y(x)=0 \quad , \quad x\in[0,1] \quad , \quad y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=2$$

$$\begin{cases} y'(x)=u(x) \Longrightarrow y''(x)=u'(x) \\ \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} u'(x)+xu(x)+y(x)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x)=u(x) \\ u'(x)=-xu(x)-y(x) \end{cases}$$

$$y(0)=1 \quad , \quad u(0)=2$$

بسمه تعالی

جلسه سه‌شنبه 1395/3/4:

$Ax = B$

حل عددی دستگاه‌های خطی:

A ماتریس $n \times n$ و x و b بردارهای n تایی هستند.

A و b معلوم و x مجهول است.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad AX = b$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

مثال)

$$Ax = b, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ \frac{3}{2} & -6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 4x_2 \\ 3/2\, x_1 - 6x_2 = 1 \longrightarrow 6x_2 - 6x_2 = 0 \neq 1 \end{cases} \longrightarrow$$

پس دستگاه جواب ندارد.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3/2 & -6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 4x_2 \\ 3/2\, x_1 - 6x_2 = 0 \longrightarrow 6x_2 - 6x_2 = 0 \checkmark \end{cases} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 4x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

دستگاه بی‌نهایت جواب دارد.

* دستگاه $Ax = b$، جواب منحصربفرد دارد اگر و فقط اگر ماتریس A، وارون‌پذیر باشد. یعنی: $\det(A) \neq 0$

قاعده‌ی کرامر:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)}{\det(A)} = \frac{3}{3} = 1, \quad x_2 = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)}{\det(A)} = \frac{3}{3} = 1 \longrightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

روش دیگر، روش ماتریس وارون است ← $Ax=b \Longrightarrow x=A^{-1}b$

order
$O((n+1)!)$
قاعده‌ی کرامر

قاعده‌ی کرامر	روش حذفی گاوس	n
6×10^{-12} s	6×10^{-12} s	2
2.4×10^{-11} s	1.7×10^{-11} s	3
1.2×10^{-10} s	3.6×10^{-11} s	4
⋮	⋮	⋮
1.622 dk	3.06×10^{-9} s	20
2.98×10^{138} قرن	3.433×10^{-7} s	100

10^{12} عمل را در یک ثانیه انجام می‌دهد.

$$2.98\times10^{138} \text{ قرن} \leftarrow = \frac{\overset{n=100}{(101)!}}{10^{12}\times60\times60\times24\times365\times10^{2}}$$

روش‌های عددی حل دستگاه‌های خطی:

1) روش‌های مستقیم: در این روش‌ها، با انجام تعداد متناهی مرحله به جواب دقیق دستگاه می‌رسیم (به شرط در نظر نگرفتن خطاهای کامپیوتری).

2) روش‌های غیرمستقیم (تکراری): در این روش‌ها، دنباله‌ی برداری $\{x^{(k)}\}$ تولید می‌شود که در صورت مناسب بودن شرایط، به x، جواب دستگاه $Ax=b$، همگرا می‌شود.

$$x^{(0)}=\begin{bmatrix}x_1^{(0)}\\x_2^{(0)}\\ \vdots\\x_n^{(0)}\end{bmatrix},\quad x^{(1)}=\begin{bmatrix}x_1^{(1)}\\x_2^{(1)}\\ \vdots\\x_n^{(1)}\end{bmatrix},\quad \text{———},\quad x^{(k)}=\begin{bmatrix}x_1^{(k)}\\x_2^{(k)}\\ \vdots\\x_n^{(k)}\end{bmatrix} \longrightarrow x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

$$x^{(k)}\xrightarrow[(k\to\infty)]{}x,\quad x_i^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}x_i,\quad 1\leq i\leq n$$

روش‌های مستقیم:

$Ax=b$ A بالا مثلثی

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \text{---} + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + \text{---} + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\quad \vdots \\ \quad a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \longrightarrow x_{n-1} = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1}x_n}{a_{n-1,n-1}} \\ \quad a_{nn}x_n = b_n \longrightarrow x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

جایگذاری پسرو

* اگر ماتریس ضرایب پایین مثلثی بود، روش حل جایگذاری پیشرو بوده.

در روشهای مستقیم دستگاه $Ax=b$ به یک دستگاه مثلثی تبدیل می‌شود بطوریکه جواب هر دو دستگاه یکی باشد.

عملیات سطری مقدماتی : 1) جابجا کردن دو سطر 2) ضرب کردن یک سطر در یک اسکالر
3) جمع کردن ضریبی از یک سطر با سطر دیگر

$\boxed{R_i \text{ سطر } i \text{ ام}}$

روش حذفی گاوس :

مثال) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 8 \\ -11 \\ -3 \end{bmatrix}$

ابتدا ماتریس افزوده را تشکیل می‌دهیم. ماتریس افزوده ماتریسی است که ماتریس b را به ستونهای ماتریس A می‌افزاییم. مانند زیر

$$\underbrace{\left[A^{(0)} \middle| b^{(0)}\right]}_{\text{ماتریس افزوده}} = [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{2} & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

عنصر محوری

باید اینها صفر شوند.

ابتدا ستون اول مثلث را صفر کرده و سپس به سراغ ستونهای دیگر می‌رویم.

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_1 + R_3]{R_2 \leftarrow \frac{3}{2}R_1 + R_2} \left[A^{(1)} \middle| b^{(1)}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

باید این صفر شود.

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow -4R_2 + R_3} \left[A^{(2)} \middle| b^{(2)}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=8 \longrightarrow x_1=2 \\ \frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3=1 \longrightarrow x_2=3 \\ -x_3=1 \longrightarrow x_3=-1 \end{cases} \longrightarrow x=\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}$$

روش تجزیه LU : در این روش، ماتریس A بصورت حاصلضرب دو ماتریس L و U نوشته می‌شود ($A=LU$)

که در آن L یک ماتریس پائین مثلثی و U یک ماتریس بالا مثلثی است.

$$Ax=b \Rightarrow LUx=b \xrightarrow{Ux=y} Ly=b$$

مثال) $A=\begin{bmatrix}2&1&-1\\-3&-1&2\\-2&1&2\end{bmatrix}=A^{(0)}$ و $b=\begin{bmatrix}8\\-11\\-3\end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_1+R_3]{R_2 \leftarrow \frac{3}{2}R_1+R_2} A^{(1)}=\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&2&1\end{bmatrix}$$

همین اعمال سطری مقدماتی را روی ماتریس همانی ($I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$) انجام می‌دهیم و $M^{(0)}$ بدست می‌آید.

$$M^{(0)}=\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{3}{2}&1&0\\1&0&1\end{bmatrix} \qquad A^{(1)}=M^{(0)}A^{(0)}$$

روی I اعمال کنیم نه روی $M^{(0)}$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow -4R_2+R_3} A^{(2)}=\begin{bmatrix}2&1&-1\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&-1\end{bmatrix} \Rightarrow M^{(1)}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-4&1\end{bmatrix} \qquad A^{(2)}=M^{(1)}A^{(1)}$$

همانطور که مشاهده می‌شود ماتریس $A^{(2)}$ همان ماتریس U است. پس:

$$U=A^{(2)}=M^{(1)}A^{(1)}=M^{(1)}M^{(0)}A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(M^{(0)})^{-1}(M^{(1)})^{-1}}_{L}U=A$$

همچنین هر دو ماتریس $M^{(0)}$ و $M^{(1)}$ پائین مثلثی اند که در شرط L آورده شده است. پس:

$$L=(M^{(0)})^{-1}(M^{(1)})^{-1} \qquad A=LU$$

* برای بدست آوردن وارون ماتریس‌های مثلثی کافیست درایه‌های غیر از قطر اصلی و غیر صفر را قرینه کنیم:

- $(M^{(1)})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad (M^{(11)})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$$L = (M^{(1)})^{-1}(M^{(11)})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

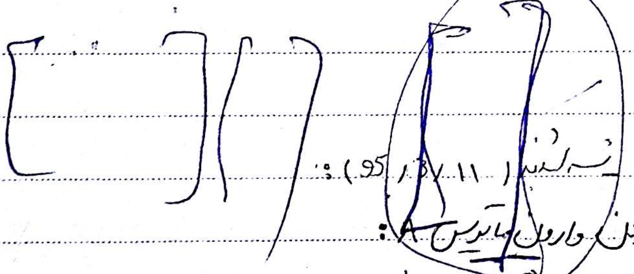
$$Ly = b \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -11 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 8 \\ -3/2\, y_1 + y_2 = -11 \\ -y_1 + 4y_2 + y_3 = -3 \end{cases} \rightarrow y_2 = 1 \rightarrow y_3 = 1 \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Ux = y \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 8 \\ 1/2\, x_2 + 1/2\, x_3 = 1 \\ -x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = -1 \end{cases} \rightarrow x_2 = 3 \rightarrow x_1 = 2 \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- روش تجزیه LU زمانی مفید است که چند دستگاه داشته باشیم که ماتریس ضرایب آنها یکسان است ولی ماتریس معلومات آنها متفاوت است:

$$\begin{cases} Ax^{(1)} = c^{(1)} \\ Ax^{(2)} = c^{(2)} \\ \vdots \\ Ax^{(k)} = c^{(k)} \end{cases}$$

n.



جلسه سه‌شنبه (95/13/11):

بدست آوردن وارون ماتریس A:

$AA^{-1} = I \quad , \quad A^{-1} = [\,x_1 \; x_2 \cdots x_n\,]$ ، x_i: ستون iام ماتریس A^{-1}

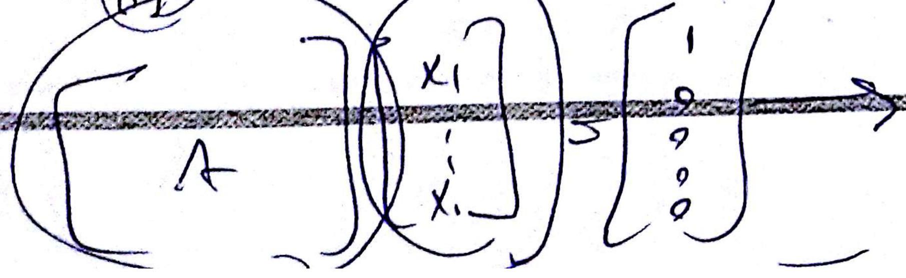
$$AA^{-1} = I \longrightarrow A[x_1 \; x_2 \cdots x_n] = [e_1 \; e_2 \cdots e_n] \Rightarrow [Ax_1 \; Ax_2 \cdots Ax_n] = [e_1 \; e_2 \cdots e_n]$$

$$\begin{cases} Ax_1 = e_1 \\ Ax_2 = e_2 \\ \vdots \\ Ax_n = e_n \end{cases} \qquad [\quad]_n \; X \; [\quad]_{n \times 1}$$

مثال) وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ را با استفاده از تجزیه LU بدست آورید.

$$\begin{cases} Ax_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ Ax_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ Ax_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

⟵ به روش LU مقادیر x_iها را بدست می‌آوریم ⟵ $A^{-1} = [x_1 \; x_2 \; x_3]$



روشهای تکراری : چند نمونه از نرم های برداری :

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

$$1)\quad \|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

$$2)\quad \|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}$$ نرم اقلیدسی

$$3)\quad \|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

مثال) $x=\begin{bmatrix}-2\\5\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \|x\|_1=|2|+|-5|+|0|=7$

$$\|x\|_2=\sqrt{2^2+(-5)^2+0^2}=\sqrt{29}$$

$$\|x\|_\infty=5$$

روش ژاکوبی : $Ax=b$

الگوریتم ژاکوبی :

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \Rightarrow x_1^{(k)}=\frac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}x_2^{(k-1)}-\cancel{Ax=b}\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \Rightarrow x_2^{(k)}=\frac{1}{a_{22}}(b_2-a_{21}x_1^{(k-1)}-\cdots-a_{2n}x_n^{(k-1)})\\ \vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \Rightarrow x_n^{(k)}=\frac{1}{a_{nn}}(b_n-a_{n1}x_1^{(k-1)}-\cdots-a_{nn-1}x_{n-1}^{(k-1)})\end{cases}$$

$$\{x^{(k)}\},\quad x^{(k)}=\begin{bmatrix}x_1^{(k)}\\x_2^{(k)}\\ \vdots\\x_n^{(k)}\end{bmatrix}\qquad X^{(0)}=\begin{bmatrix}x_1^{(0)}\\x_2^{(0)}\\ \vdots\\x_n^{(0)}\end{bmatrix}$$

محک توقف : $\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|<\varepsilon$

مثال) دستگاه معادلات زیر را به روش ژاکوبی با محک توقف $\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_\infty<10^{-3}$ و با $X^{(0)}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ حل کنید.

$$\begin{cases}5x_1-2x_2+3x_3=-1 \Rightarrow x_1^{(k)}=1/5(-1+2x_2^{(k-1)}-3x_3^{(k-1)})\\ -3x_1+9x_2+x_3=2 \rightarrow x_2^{(k)}=1/9(2+3x_1^{(k-1)}-x_3^{(k-1)})\\ 2x_1-x_2-7x_3=3 \Rightarrow x_3^{(k)}=-1/7(3-2x_1^{(k-1)}+x_2^{(k-1)})\end{cases}$$

$$k=1:\begin{cases}x_1^{(1)}=1/5(-1+2x_2^{(0)}-3x_3^{(0)})=-1/5\\ x_2^{(1)}=1/9(2+3x_1^{(0)}-x_3^{(0)})=2/9\\ x_3^{(1)}=-1/7(3-2x_1^{(0)}+x_2^{(0)})=-3/7\end{cases}\Rightarrow X^{(1)}=\begin{bmatrix}-1/5\\2/9\\-3/7\end{bmatrix}$$

تمرین های شماره دو ریاضیات
تا دوم ترم

Subject:
Date

$$X^{(1)}-X^{(0)}=\begin{bmatrix}-1/5\\ 2/9\\ -3/7\end{bmatrix} \longrightarrow \|x^{(1)}-x^{(0)}\|_\infty = 3/7 \times 10^{-3}$$ ← تحقیق توقف

k	0	1	------ 6	7
$x_1^{(k)}$	0.000	−0.200	0.186	0.186
$x_2^{(k)}$	0.000	0.222	0.331	0.331
$x_3^{(k)}$	0.000	−0.429	−0.423	−0.423

چون $x_1^{(k)}$ محاسبه شده است قبلاً

روش گاوس-سایدل: $Ax=b$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \Rightarrow x_1^{(k)}=\frac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}x_2^{(k-1)}-\cdots-a_{1n}x_n^{(k-1)}) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \Rightarrow x_2^{(k)}=\frac{1}{a_{22}}(b_2-a_{21}x_1^{\boxed{(k)}}-\cdots-a_{2n}x_n^{(k-1)}) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \longrightarrow x_n^{(k)}=\frac{1}{a_{nn}}(b_n-a_{n1}x_1^{(k)}-\cdots-a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}) \end{cases}$$

و بقیه قضایا مانند روش ژاکوبی است.

مثال) مثال قبل را به روش گاوسی بدست آورید.

$$\begin{cases} x_1^{(k)}=1/5(-1+2x_2^{(k-1)}-3x_3^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)}=1/9(2+3x_1^{(k)}-x_3^{(k-1)}) \\ x_3^{(k)}=-1/7(3-2x_1^{(k)}+x_2^{(k)}) \end{cases}$$

$$k=1: \begin{cases} x_1^{(1)}=1/5(-1+2x_2^{(0)}-3x_3^{(1)})=-1/5 \\ x_2^{(1)}=1/9(2+3x_1^{(1)}-x_3^{(0)})\simeq 0.156 \\ x_3^{(1)}=-1/7(3-2x_1^{(1)}+x_2^{(1)})\simeq -0.508 \end{cases}$$

k	0	1 ----	4	5
$x_1^{(k)}$	0.000	−0.200	0.186	0.186
$x_2^{(k)}$	0.000	0.156	0.331	0.331
$x_3^{(k)}$	0.000	−0.508	−0.423	−0.423

مثال ۱)

$$\begin{cases} 7x_1 - x_2 = 6 \\ x_1 - 5x_2 = -4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{7}(6 + x_2^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = -\frac{1}{5}(-4 - x_1^{(k)}) \end{cases} \qquad X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

k	0	1 ----	4	5
$x_1^{(k)}$	0.000	0.8571	1.000	1.000
$x_2^{(k)}$	0.000	0.9714	1.000	1.000

اگر در دستگاه قبلی، جای معادله اول و دوم را عوض کنیم:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = -4 \\ 7x_1 - x_2 = 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1^{(k)} = -4 + 5x_2^{(k-1)} \\ x_2^{(k)} = -(6 - 7x_1^{(k)}) \end{cases} \qquad X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

k	0	1	2 ------	5
$x_1^{(k)}$	0	-4	-174	-7503124
$x_2^{(k)}$	0	34	-1224	-52521879

مشاهده می‌شود با جابجایی دو معادله، ← جواب معادله واگرا شد

* ماتریس A را غالب قطری اکید گوییم هرگاه: $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$ ، $i = 1, \ldots, n$

مثلاً) $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow$

$|-5| > |0| + |4|$ ✓

$|7| > |2| + |-1|$ ✓

$|4| > |1| + |1|$ ✓

⟵ ماتریس A غالب قطری اکید است

اگر یکی از سه شرط بالا برقرار نباشد، ماتریس دیگر غالب قطری اکید نیست.

قضیه: اگر ماتریس A غالب قطری اکید باشد، آنگاه روشهای تکراری ژاکوبی و گاوس سایدل در حل دستگاه $Ax=b$ به ازای هر بردار اولیه $X^{(0)}$ به x، جواب دستگاه، همگرا هستند. (ولی عکس قضیه برقرار نیست) یعنی

اگر ماتریس ما غالب قطری اکید نباشد ، ممکن است جواب ما همگرا باشد) .

مثلاً در مثال قبل :

$A=\begin{bmatrix}7 & -1\\ 1 & -5\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}7>1\\ 5>1\end{matrix}$ ✓ $\Rightarrow$ A ماتریس غالب قطری اکید است

$A=\begin{bmatrix}1 & -5\\ 7 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}1 \not> 5\\ 1 \not> 7\end{matrix}$ X $\Rightarrow$ A ماتریس غالب قطری اکید نیست $\xrightarrow{\text{پس}}$ همگرایی ماتریس تضمین شده نیست.