۱-۳

یکای متر : $\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰۰}$ طول نصف النهاری بود که قطب شمال را به استوا وصل می کرد.

طول نصف النهار $= x$ شعاع کره زمین $= r$

$$\frac{۱}{۱۰^{۷}}x = ۱ \text{ m} \Rightarrow x = ۱۰^{۷} \text{ m}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{محیط کره زمین} = ۴x \\ \text{محیط کره} = ۲\pi r \end{array}\right\} \Rightarrow ۴ \times ۱۰^{۷} = ۲\pi r \Rightarrow r = \frac{۴ \times ۱۰^{۷}}{۲ \times ۳٫۱۴} = ۰٫۶۳ \times ۱۰^{۷} = ۰٫۶ \times ۱۰^{۷}$$

$$\Rightarrow \boxed{r = ۶ \times ۱۰^{۶}}$$

۱-۵

سرعت صوت در هوا $= ۳۴۰ \text{ m/s}$ سرعت هواپیما $= ۲ \times ۳۴۰ \text{ m/s} = ۶۸۰ \text{ m/s}$

$$\left\{\begin{array}{l} ۱ \text{ mi} = ۱٫۶۱ \text{ km} \\ ۱ \text{ h} = ۳۶۰۰ \text{ S} \\ ۱ \text{ km} = ۱۰۰۰ \text{ m} \end{array}\right.$$

$$۶۸۰ \text{ m/s} \times \frac{۱ \text{ km}}{۱۰۰۰ \text{ m}} \times \frac{۳۶۰۰ \text{ S}}{۱ \text{ h}} = ۲۴۴۸ \frac{\text{km}}{\text{h}} \Rightarrow \boxed{۶۸۰ \frac{\text{m}}{\text{S}} = ۲۴۴۸ \frac{\text{km}}{\text{h}}}$$

$$۶۸۰ \text{ m/s} \times \frac{۱ \text{ km}}{۱۰۰۰ \text{ m}} \times \frac{۱ \text{ mi}}{۱٫۶۱ \text{ km}} \times \frac{۳۶۰۰ \text{ S}}{۱ \text{ h}} = \frac{۲۴۴۸}{۱٫۶۱} = ۱۵۲۰٫۵ = ۱۵۲ \times ۱۰$$

$$= ۱٫۵۲ \times ۱۰^{۳} \frac{\text{mi}}{\text{h}}$$

$$\Rightarrow \boxed{۶۸۰ \frac{\text{m}}{\text{S}} = ۱٫۵۲ \times ۱۰^{۳} \frac{\text{mi}}{\text{h}}}$$

۱-۶

$$\left\{\begin{array}{l} ۱ \text{ ft} = ۱۲ \text{ in} \\ ۱ \text{ ft} = ۰٫۳۰۴۸ \text{ m} \end{array}\right.$$

قطر استوانه $= D = ۶٫۸ \text{ in}$

بلندی استوانه $= h = ۲ \text{ ft}$

$$\text{حجم استوانه} = V = Ah = \pi r^{۲} h = \pi \left(\frac{D}{۲}\right)^{۲} h = \frac{\pi}{۴} \times (۶٫۸)^{۲} \times ۲ \ (\text{in})^{۲}\text{ft}$$

$$= ۷۲٫۵۹۴۸ \ (\text{in})^{۲}\text{ft} = ۷٫۲۵۹۴۸ \times ۱۰ = \underline{۷٫۳ \times ۱۰ \ (\text{in})^{۲}\text{ft}}$$

$$V = ۷٫۳ \times ۱۰ \ (\text{in})^{۲}\text{ft} \times \left(\frac{۱ \text{ ft}}{۱۲ \text{ in}}\right)^{۲} = \frac{۷٫۳ \times ۱۰}{۱۴۴} (\text{ft})^{۳} = ۱۰۵۱٫۲ \times ۱۰ = ۱٫۱ \times ۱۰^{۴} \ (\text{ft})^{۳}$$

ادامه سؤال ۱ـ۶

$$\Rightarrow \quad V = ۱/۱ \times ۱۰^{۴}\ (ft)^{۳}$$

$$V = ۷/۳ \times ۱۰\ (in)^{۲} ft \times \left(\frac{۱\ ft}{۱۲\ in}\right)^{۲} \times \left(\frac{۰/۳۰۴۸\ m}{۱\ ft}\right)^{۳}$$

$$= \frac{۷/۳ \times ۱۰ \times ۲/۸۳۱ \times ۱۰^{-۲}}{۱۴۴}\ m^{۳} = ۰/۱۴۳ \times ۱۰^{-۱} = ۱/۴ \times ۱۰^{-۲}\ m^{۳}$$

$$\Rightarrow \quad V = ۱/۲ \times ۱۰^{-۲}\ m^{۳}$$

۱ـ۷

$$\left.\begin{array}{l} \text{بعد نیرو} = \dfrac{ML}{T^{۲}} \\ F = G\dfrac{m_{۱} m_{۲}}{r^{۲}} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{ML}{T^{۲}} = G\frac{M^{۲}}{L^{۲}} \Rightarrow G\ \text{بعد} = \frac{L^{۳}}{MT^{۲}}$$

۱ـ۸)

$$R = CAv^{۲}$$

$$\begin{array}{l} \text{بعد سرعت} = \dfrac{L}{T} \\ \text{بعد مساحت} = L^{۲} \\ \text{بعد نیرو} = \dfrac{ML}{T^{۲}} \end{array} \Rightarrow \frac{ML}{T^{۲}} = C L^{۲}\left(\frac{L}{T}\right)^{۲} \Rightarrow C\ \text{بعد} = \frac{M}{L^{۳}}$$

۱ـ۹

الف) $(۱۱/۱۴)(۹/۹۹ \times ۱۰^{۳}) = ۱۱/۳۸۸۶ \times ۱۰^{۴} = ۱/۱۴ \times ۱۰^{۵}$

ب) $(۲/۷۸ \times ۱۰^{-۸}) - (۵/۳۱ \times ۱۰^{-۹}) = (۲/۷۸ \times ۱۰^{-۸}) - (۰/۵۳۱ \times ۱۰^{-۸})$

$= ۲/۲۴۹ \times ۱۰^{-۸} = ۲/۲۵ \times ۱۰^{-۸}$

ج) $\dfrac{۱۲\pi}{۴/۵۶ \times ۱۰^{-۳}} = \dfrac{۱۲ \times ۳/۱۴}{۴/۵۶ \times ۱۰^{-۳}} = ۸/۲۶۳ \times ۱۰^{-۳} = ۸/۳ \times ۱۰^{-۳}$

د) $۲۷/۶ + (۵/۹۹ \times ۱۰^{۲}) = ۲۷/۶ + ۵۹۹ = ۶۲۶/۶ = ۶/۲۶۶ \times ۱۰^{۲} = ۶/۲۷ \times ۱۰^{۲}$

۱۰ـ۱)

الف) $(۲٫۰۰ \times ۱۰^{۴})(۶٫۱۰ \times ۱۰^{-۲}) = ۱۲٫۲ \times ۱۰^{۲} = ۱٫۲۲ \times ۱۰^{۳}$

ب) $(۳٫۱۴۱۵۹۲)(۴٫۰۰ \times ۱۰^{۵}) = ۱۲٫۵۶۶۳۶۸ \times ۱۰^{۵} = ۱۲٫۶ \times ۱۰^{۵} = ۱٫۲۶ \times ۱۰^{۶}$

ج) $(۲٫۲۲ \times ۱۰^{۳})(۱٫۱۲ \times ۱۰^{۸}) = ۲٫۴۹۱۲ \times ۱۰^{۱۱} = ۲٫۴۹ \times ۱۰^{۱۱}$

د) $(۵٫۱۴ \times ۱۰^{۳}) + (۲٫۷۸ \times ۱۰^{۲}) = (۵٫۱۴ \times ۱۰^{۳}) + (۰٫۲۷۸ \times ۱۰^{۳}) = ۵٫۴۱۸ \times ۱۰^{۳} = ۵٫۴۲ \times ۱۰^{۳}$

هـ) $(۱٫۹۹ \times ۱۰^{۲})(۹٫۹۹ \times ۱۰^{-۵}) = ۱۹٫۸۸۰۱ \times ۱۰^{-۳} = ۱٫۹۹ \times ۱۰^{-۲}$

و) $(۰٫۰۰۰۰۰۷۵)(۲٫۴ \times ۱۰^{-۱۲}) = (۷٫۵ \times ۱۰^{-۶})(۲٫۴ \times ۱۰^{-۱۲}) = ۱۸ \times ۱۰^{-۱۸}$

۱۵ـ۱

$P = ۱٫۰۱ \times ۱۰^{۵}\ Pa$ $\qquad P = \frac{F}{A}$

$\Rightarrow$ بعد فشار $= \frac{ML}{T^{۲}} \frac{1}{L^{۲}} = \frac{M}{LT^{۲}}$

$mg = W =$ وزن $\qquad \Rightarrow P = \frac{mg}{A} = \frac{W}{A} = \frac{W}{\pi r^{۲}}$

$\Rightarrow$ وزن هوای ستون $= \pi r^{۲} P$

۱۹ـ۱

$v \propto P \rho$ سرعت صوت در هوا به فشار و چگالی بستگی دارد

بعد فشار $= \frac{M}{LT^{۲}}$ $\qquad \Rightarrow \frac{P}{\rho}$ بعد $= \frac{L^{۲}}{T^{۲}} \qquad \Rightarrow \frac{P}{\rho} = v^{۲} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$

بعد چگالی $= \frac{M}{L^{۳}}$

۲۰ـ۱

بعد $v = \frac{L}{T}$

بعد $\lambda = \frac{M}{L}$ $\qquad \Rightarrow \frac{T}{\lambda} = \frac{L^{۲}}{T^{۲}} = \left(\frac{L}{T}\right)^{۲} \Rightarrow \frac{T}{\lambda} = v^{۲}$

بعد $T = \frac{ML}{T^{۲}}$

$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{T}{\lambda}}$

« حل تمرینهای فصل اوّل »

(۷-۱

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2} \Longrightarrow G = \frac{F r^2}{m_1 m_2}$$

$$[G] = \frac{[F][r]^2}{[m_1][m_2]} \xrightarrow[\text{و } [m] = M \text{ و } [r] = L]{[F] = \frac{ML}{T^2}} [G] = \frac{L^3}{MT^2}$$

واحد G عبارتست از : $\frac{m^3}{kg\, s^2}$.

(۹-۱

الف) $\underbrace{(1/14)}_{\text{۳ رقم با معنی}}\underbrace{(9/99 \times 10^4)}_{\text{۳ رقم با معنی}} = 11/388 \times 10^4$

$\xrightarrow[\text{با معنی}]{\text{گرد کردن به ۳ رقم}} \underbrace{11/4 \times 10^4}_{\text{۳ رقم با معنی}} \xrightarrow{\text{نماد علمی}} 1/14 \times 10^5$

ب) $(2/78 \times 10^{-8}) - (5/31 \times 10^{-9})$

در جمع و تفریق ارقام با معنی :

۱- تعداد ارقام با معنی در قسمت اعشاری هر کدام از اعداد داده شده را بشمارید.

۲- اعداد را جمع یا تفریق کنید (بصورت نرمال).

۳- عدد بدست آمده را طوری گرد نمائید که تعداد ارقام با معنی اعشاری آن برابر با تعداد ارقام با معنی اعشاری، در کوچکترین عامل جمع باشد.

ادامهٔ ب) : داریم :

۲/۷۸×۱۰^-۹ - ۵/۳۱×۱۰^-۹ =

۳ رقم با معنی پس از صفر   ۳ رقم با معنی پس از صفر

۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۲۷۸ - ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۵۳۱ =

  ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۲۷۸
- ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۵۳۱

۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۲۲۴۹

گرد کردن تا ۳ رقم با معنی پس از صفر ← ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۲۲۵ ← نمادگذاری علمی ← ۲/۲۵×۱۰^-۹

ج) $\underbrace{۱۲}_{\text{۲ رقم با معنی}}$ ۳ ← عدد ۳ را دقیق فرض می‌کنیم پس تعداد ارقام با معنی آن بسیار زیاد است.

$\underbrace{۴/۵۶\times۱۰^{-۳}}_{\text{۳ رقم با معنی}}$

= ۸/۲۶۷۳×۱۰^۳ ← گرد کردن به ۲ رقم با معنی ← ۸/۳×۱۰^۳

د) ۲۷/۶ + (۵/۹۹×۱۰^۲) = ۲۷/۶ + ۵۹۹/___ =

ارقام با معنی پس از صفر   پس از صفر رقم با معنی ندارد

  ۲۷/۶
+ ۵۹۹/___

۶۲۶/۶

گرد کردن به ۰ تا رقم با معنی ← ۶۲۷ ← نماد علمی ← ۶/۲۷×۱۰^۲

(۱۰-۱

الف) $\overbrace{(۲/۰۰ \times ۱۰^{۴})}^{\text{۳ رقم با معنی}}\overbrace{(۶/۱۰ \times ۱۰^{-۲})}^{\text{۳ رقم با معنی}} = \overbrace{۱۲/۲ \times ۱۰^{۲}}^{\text{۳ رقم با معنی}}$

$\xrightarrow{\text{نماد علمی}} ۱/۲۲ \times ۱۰^{۳}$

ب) $\overbrace{(۳/۱۴۱۵۹۲)}^{\text{۷ رقم با معنی}}\overbrace{(۴/۰۰ \times ۱۰^{۵})}^{\text{۳ رقم با معنی}} = \overbrace{۱۲/۶ \times ۱۰^{۵}}^{\text{۳ رقم با معنی}} \xrightarrow{\text{نماد علمی}} ۱/۲۶ \times ۱۰^{۶}$

ج) $\underbrace{(۲/۳۲ \times ۱۰^{-۳})}_{\text{۳ رقم با معنی}} / \underbrace{(۱/۱۶ \times ۱۰^{۸})}_{\text{۳ رقم با معنی}} = \overbrace{۲/۰۰ \times ۱۰^{-۵}}^{\text{۳ رقم با معنی}}$

د) $۵/۱۴ \times ۱۰^{۳} + ۲/۷۸ \times ۱۰^{۲} = ۵۱۴۰/\overbrace{—}^{\text{پس از ممیز رقم با معنا ندارد}} + ۲۷۸/\overbrace{—}^{\text{پس از ممیز رقم با معنا ندارد}}$

$= ۵۴۱۸ \xrightarrow{\text{نماد علمی}} ۵/۴۱۸ \times ۱۰^{۳}$

ه) $(۱/۹۹ \times ۱۰^{۲})(۹/۹۹ \times ۱۰^{-۵}) = ۱/۹۹ \times ۱۰^{-۲}$

و) $(۰/۰۰۰۰۰۷۵)(۲/۴ \times ۱۰^{-۱۲}) = ۱۸ \times ۱۰^{-۱۸} \xrightarrow{\text{نماد علمی}} ۱/۸ \times ۱۰^{-۱۷}$

(۱۱-۱

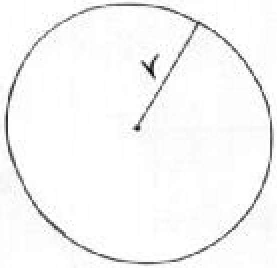
الف) $۱/۶۷۹ \times ۱۰^{۷}$

ب) ۵

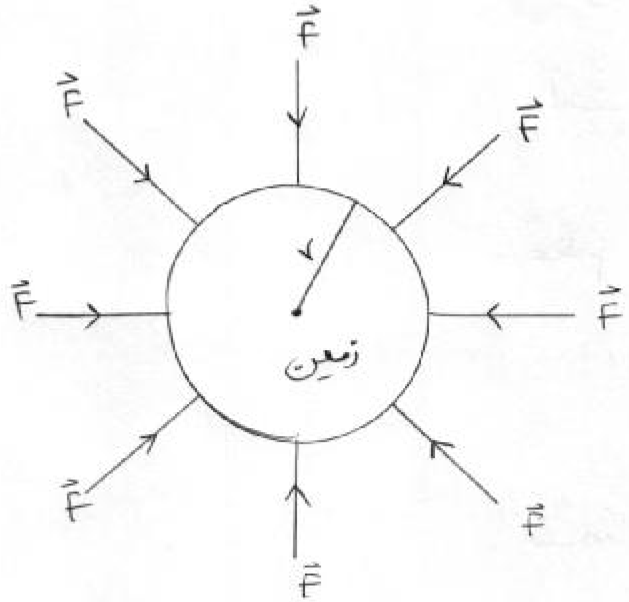
ج) ۶×۱۰^{-۱}

د) ۱۰

راهنمایی ۱-۱۲ و ۱-۱۸ :



$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$



(۱۵-۱

فشار

$$P = \frac{\text{نیروی وارد بر زمین (یا نیروی وزن جو)}}{\text{مساحت زمین}} = \frac{F}{4\pi r^2}$$

«حل تمرین‌های باستاره‌ی فصل ۲»

۲-۸) الف)

$\hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

بردار یکه در راستای $\vec{a}$

ب) $\vec{a} \cdot \hat{b} = \vec{a} \cdot \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

۲-۹) الف) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \longrightarrow$ $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمودند

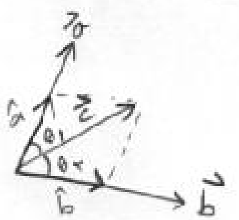
ب) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ بر هر ۲ بردار عمود است.

۲-۱۱) $\hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \dfrac{(4, -2, 4)}{\sqrt{16+4+16}} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$\hat{b} = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \dfrac{(-4, 0, 3)}{\sqrt{16+9}} = \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$

اگر مجموع ۲ بردار را با $\vec{c}$ نشان دهیم:

$\vec{c} = \hat{a} + \hat{b} = \left(-\frac{2}{15}, -\frac{1}{3}, \frac{19}{15}\right)$

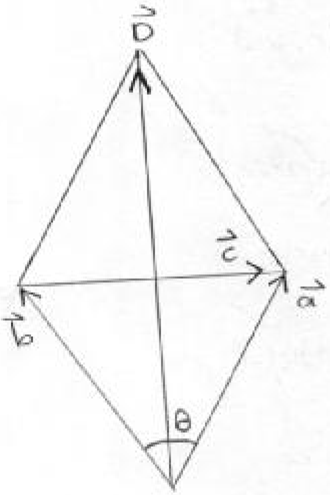


اگر زاویه‌ی بین $\vec{a}$ و $\vec{c}$ را با θ_1 و زاویه‌ی بین $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را با θ_2 نشان دهیم:

$\cos\theta_1 = \dfrac{\hat{a} \cdot \vec{c}}{|\hat{a}||\vec{c}|}$ ؛ $\cos\theta_2 = \dfrac{\hat{b} \cdot \vec{c}}{|\hat{b}||\vec{c}|}$

باید ثابت کنیم که $\vec{c}$ نیمساز $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است یعنی باید ثابت کنیم که $\theta_1 = \theta_2$. با محاسبهٔ $\cos\theta_1$ و $\cos\theta_2$ و تساوی آنها رابطهٔ $\theta_1 = \theta_2$ را نتیجه بگیرید.

۱۵-۲)



قطر بزرگ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{D}\ ;\ |\vec{D}| =$

قطر کوچک $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}\ ;\ |\vec{c}| =$

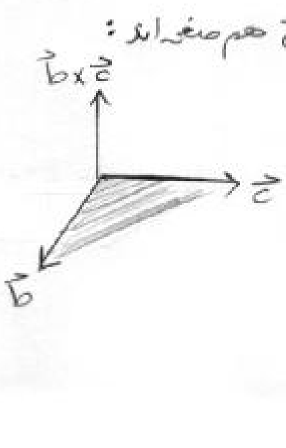
$$|\vec{D}| = 2|\vec{c}|$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}} = 2\sqrt{a^2 + b^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}} \xrightarrow{|\vec{a}| = |\vec{b}|}$$

$$\sqrt{2a^2(1+\cos\theta)} = 2\sqrt{2a^2(1-\cos\theta)} \Longrightarrow 1+\cos\theta = 4(1-\cos\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{3}{5} \longrightarrow \theta =$$ بدست آورید

۱۹-۲) بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ هم صفحه‌اند $\xleftrightarrow{\text{اگر و فقط اگر}}$ $abc = 0$



الف) ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$ ، ۳ بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ هم صفحه‌اند:

اثبات: می‌دانیم که ۲ بردار $\vec{b}$ و $\vec{c}$ همواره در یک صفحه قرار دارند.

همچنین $\vec{b}\times\vec{c}$ عمود بر صفحهٔ $\vec{b}$ و $\vec{c}$ است.

همچنین می‌دانیم که اگر $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$ آنگاه $\vec{a}$ به $\vec{b}\times\vec{c}$ عمود است.

پس نتیجه می‌شود که $\vec{a}$ در صفحهٔ $\vec{b}$ و $\vec{c}$ قرار دارد بنابراین $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه قرار دارند.

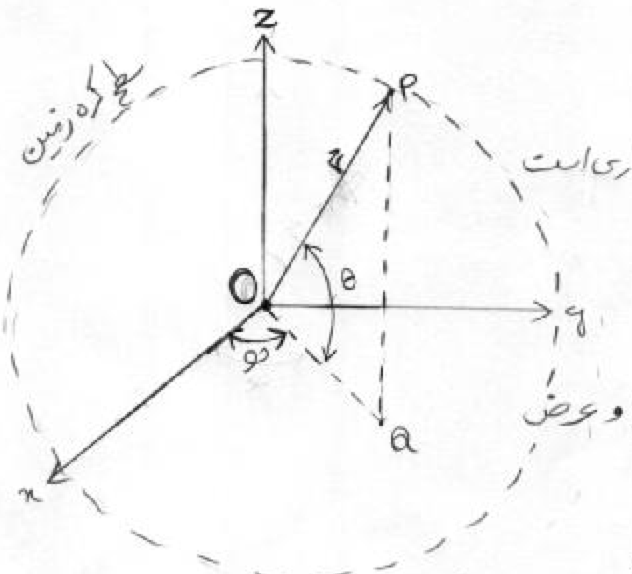
ب) حال ثابت می‌کنیم که اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ هم صفحه باشند آنگاه $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$.

اثبات: از آنجا که $\vec{b}\times\vec{c}$ عمود بر صفحهٔ سه بردار است. بنابراین $\vec{a}$ بر $\vec{b}\times\vec{c}$ عمود بوده پس

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$$

۲-۲۱) $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}\cdot(\overbrace{\vec{a}\times\vec{a}}^{\text{صفر}})=0$

به طور مشابه $\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\cdot(\overbrace{\vec{b}\times\vec{b}}^{\text{صفر}})=0$



۲-۲۵) در شکل مقابل، بردار $\vec{r}$، برداری است که از مرکز زمین به یک نقطه روی سطح زمین (با طول جغرافیایی φ و عرض جغرافیایی θ) متصل شده است و

شعاع زمین $=|\vec{r}|$. توجه کنید که θ زاویه بردار $\vec{r}$ با صفحهٔ xy و φ زاویهٔ بین تصویر بردار $\vec{r}$ در صفحهٔ xy (یعنی $\overrightarrow{OQ}$) با محور x است.

برای بدست آوردن مولفه‌های بردار $\vec{r}$ در دستگاه دکارتی، اینگونه عمل می‌شود.

۱) مولفه z : بردار $\vec{r}$ با محور z زاویهٔ $\frac{\pi}{2}-\theta$ می‌سازد. پس مولفهٔ z بردار $\vec{r}$

برابر است با $r_z = \vec{r}\cdot\hat{z} = |r|\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$

<u>یا</u>

$$(1)\quad r_z = |r|\sin\theta$$

۲) برای تعیین مولفه‌های x و y، ابتدا اندازهٔ تصویر بردار $\vec{r}$ در صفحهٔ xy (یعنی $|\vec{OQ}|$) را محاسبه کنیم: زاویهٔ $\vec{r}$ با صفحهٔ xy، θ است بنابراین $\bigstar\ |\vec{OQ}| = |r|\cos\theta$. حال باید مولفه‌های x و y بردار $\vec{OQ}$ را تعیین نمائیم. از آنجا که زاویهٔ بردار $\vec{OQ}$ با محور x برابر با φ است داریم:

$$\begin{cases} \overbrace{\vec{OQ}_x}^{\text{مولفهٔ x بردار } \vec{OQ}} = |\vec{OQ}|\cos\varphi \overset{\bigstar \text{از}}{=\!=} |r|\cos\theta\cos\varphi & (2) \\ \underbrace{OQ_y}_{\text{مولفهٔ y بردار } \vec{OQ}} = |\vec{OQ}|\sin\varphi \overset{\bigstar \text{از}}{=\!=} |r|\cos\theta\sin\varphi & (3) \end{cases}$$

در واقع مولفه‌های x و y بردار $\vec{OQ}$ همان مولفه‌های x و y بردار $\vec{r}$ هستند.

بنابراین:

$$\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)\ ; \quad \begin{cases} r_x = |r|\cos\theta\cos\varphi & (2) \\ r_y = |r|\cos\theta\sin\varphi & (3) \\ r_z = |r|\sin\theta & (1) \end{cases}$$

حال در مورد تهران

$$\begin{cases} \theta_{\text{تهران}} = 35^\circ \\ \varphi_{\text{تهران}} = 51^\circ \end{cases}$$

و در مورد لندن

$$\begin{cases} \theta_{\text{لندن}} = 51^\circ \\ \varphi_{\text{لندن}} = 0^\circ \end{cases}$$

پس برای تهران :

$$\vec{r}_{\text{تهران}} = \left(|r|\cos\theta_{\text{تهران}} \cos\varphi_{\text{تهران}} \,,\; |r|\cos\theta_{\text{تهران}} \sin\varphi_{\text{تهران}} \,,\; |r|\sin\theta_{\text{تهران}} \right)$$

که با قرار دادن مقادیر $|r|$ ، $\theta_{\text{تهران}}$ و $\varphi_{\text{تهران}}$ ، بردار $\vec{r}_{\text{تهران}}$ بدست می آید.

به همین ترتیب می توان $\vec{r}_{\text{لندن}}$ را نیز محاسبه نمود.

در نهایت : $\text{بردار جابجایی} = \vec{\Delta r} = \vec{r}_{\text{لندن}} - \vec{r}_{\text{تهران}}$

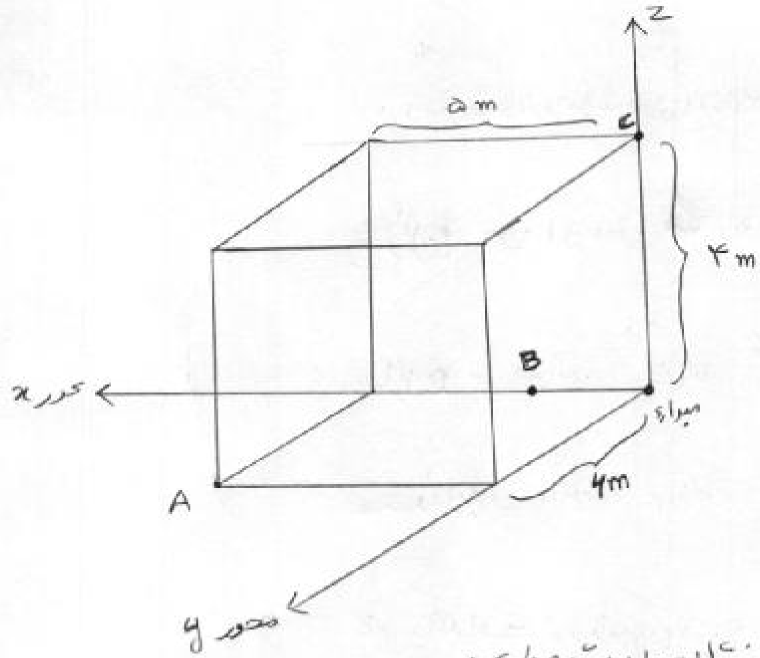
و اندازهٔ بردار جابجایی $= |\vec{\Delta r}|$ را محاسبه نمایید.

توجه : در شکل نشان داده شده زاویهٔ θ از -90° تا $+90^\circ$ تغییر می کند و زاویه φ از -180° تا $+180^\circ$ تغییر می کند.

ص۱۰

۲۶-۲)

ابتدا محورهای مختصات را مطابق شکل رسم می‌نمائیم.



حال در دستگاه مختصات نشان داده شده داریم:

مختصات نقطه A $\longleftarrow$ $A(5, 6, 0)$

مختصات نقطه B $\longleftarrow$ $B(x, 0, 0)$

مختصات نقطه C $\longleftarrow$ $C(0, 0, 4)$

الف) طول مسیر از A به C که آن را L می‌نامیم عبارتست از:

$$L = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$$

همچنین:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (x, 0, 0) - (5, 6, 0) = (x-5, -6, 0) \\ \overrightarrow{BC} = (0, 0, 4) - (x, 0, 0) = (-x, 0, 4) \end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{cases} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x-5)^2 + 36} \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{x^2 + 16} \end{cases}$$

$$L = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| \Longrightarrow L = \sqrt{(x-5)^2 + 36} + \sqrt{x^2 + 16} \quad (1)$$

حال از L نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$\frac{dL}{dx} = \frac{2(x-5)}{2\sqrt{(x-5)^2+36}} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}}$$

حال مشتق را مساوی صفر قرار می‌دهیم و x را بدست می‌آوریم.

$$\frac{dL}{dx} = 0 \longrightarrow -(x-5)\sqrt{x^2+16} = x\sqrt{(x-5)^2+36} \xrightarrow[\text{۲ برسانیم}]{\text{طرفین را به توان}}$$

$$(x-5)^2(x^2+16) = x^2(x-5)^2 + 36x^2$$

$$(x-5)^2(x^2+16-x^2) = 36x^2 \Longrightarrow (x-5)^2 = \frac{36}{16}x^2$$

$$\longrightarrow (x-5) = \pm\frac{6}{4}x \Longrightarrow \begin{cases} x = -10\,m & \text{غ ق} \\ x = 2\,m & \text{ق ق} \end{cases}$$

پس به ازای $x = 2m$ مسافت L کمینه خواهد شد و این مقدار کمینه با جایگذاری $x=2$ در رابطهٔ ① بدست می‌آید

$$L_{min} = \sqrt{9+36} + \sqrt{4+16}$$

$$\Rightarrow L_{min} = \sqrt{45} + \sqrt{20}$$

ب)

$$\vec{AC} = (0,0,4) - (5,6,0) = (-5,-6,4)$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{25+36+9} = \sqrt{70}$$

اختلاف بین دو مسیر عبارتست از:

$$L_{min} - |\vec{AC}| = \sqrt{45} + \sqrt{20} - \sqrt{70}$$

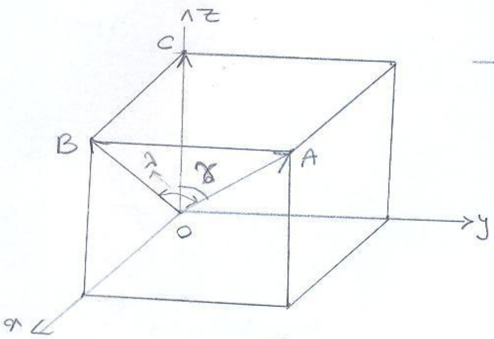
فصل دوم

۹-۲

$$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}$$
$$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$$

$$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}| \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta} = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+2ab\cos\theta = a^2+b^2-2ab\cos\theta \Rightarrow 4ab\cos\theta = 0$$
$$ab\cos\theta = 0$$
$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a \perp b$$



۱۰-۲) زاویه بین قطر فضایی و یال

$$\cos\gamma = \frac{\vec{OA}\cdot\vec{OC}}{|\vec{OA}||\vec{OC}|} = \frac{a^2}{a^2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \gamma = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$\gamma = 54.7^\circ$$

زاویه بین قطر فضایی و قطر یکی از وجه‌ها

$$\cos\lambda = \frac{\vec{OA}\cdot\vec{OB}}{|\vec{OA}|\cdot|\vec{OB}|}$$

$$\cos\lambda = \frac{2a^2}{\sqrt{3}a\cdot\sqrt{2}a} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\lambda = \cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

۱۴-۲

$$\vec{a}\times\vec{b} = 12\hat{k}$$

$$a\times b = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 0 & 0 \\ b_x & b_y & 0 \end{vmatrix} = 4b_y\hat{k}$$

$$4b_y = 12 \rightarrow \boxed{b_y = 3}$$

$$|b| = 5 \Rightarrow \sqrt{b_x^2+b_y^2} = 5 \Rightarrow \sqrt{b_x^2+9} = 5$$
$$\boxed{b_x = 4}$$

$$\vec{b} = 4\hat{i}+3\hat{j}$$

(۲_۱۶

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0 \Rightarrow \vec{a}=-\vec{b}-\vec{c}$$

① $$\vec{a}\times\vec{b}=(-\vec{b}-\vec{c})\times\vec{b} \Rightarrow [\underbrace{\cancel{-\vec{b}\times\vec{b}}}_{0}-\vec{c}\times\vec{b}]=\vec{b}\times\vec{c}$$

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0 \qquad \vec{b}=-\vec{a}-\vec{c}$$

② $$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times(-\vec{a}-\vec{c}) \Rightarrow [\underbrace{\cancel{\vec{a}\times-\vec{a}}}_{0}-\vec{a}\times\vec{c}]=\vec{c}\times\vec{a}$$

①,② $\Rightarrow$ $$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$$

فصل سوم

(۳_۱

$$y_1=-\frac{1}{2}g(T_1)^2 \qquad T_2=T_1-1$$
$$y_2=-\frac{1}{2}g(T_2)^2$$

$$y_2-y_1=-\frac{1}{2}g[T_2^2-T_1^2]$$
$$\text{〃}=-\frac{1}{2}g\underbrace{[T_2-T_1]}_{-1}\underbrace{[T_2+T_1]}_{2T_1-1}$$
$$\text{〃}=+\frac{1}{2}g[2T_1-1] \Rightarrow \Delta y \propto 2T_1-1$$

افزایش می‌یابد زیرا تغییرات فاصله به زمان بستگی دارد.

(۳_۹

$h=4m$
$t=0.2s$

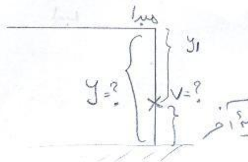
ابتدا سرعت را در نقطهٔ x از رابطهٔ زیر به دست می‌آوریم

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0$$
$$-4=-\frac{1}{2}(10)(0.2)^2+v_0(0.2)+0$$
$$v_0=-19\,m/s$$

برای به دست آوردن y، مبدأ را بالای ساختمان در نظر می‌گیریم و از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم.

$$v^2-v_0^2=-2gy$$
$$(-19)^2-0=-2\times10\times y \Rightarrow y=\frac{(-19)^2}{-20}=-18.05$$

(۱۰-۳



ابتدا سرعت را در نقطهٔ x به دست می‌آوریم برای این کار مبدأ را در بالا قرار می‌دهیم:

$$v^2 - v_0^2 = -2gy_1$$
$$v^2 - 0 = -2\times 10 \times y_1$$
$$y_1 = -\frac{2}{3}h \Rightarrow \quad v^2 = -2\times 10 \times -\frac{2}{3}h$$
$$v^2 = \frac{40}{3}h$$
$$v = \pm\sqrt{\frac{40}{3}h}$$
$$v = -\sqrt{\frac{40}{3}h} \quad \text{قابل قبول}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$$

مبدأ را در نقطهٔ x قرار می‌دهیم تا h یعنی ارتفاع پرتگاه مجهول ما بشود.

$$-\frac{1}{3}h = -\frac{1}{2}\times 10 \times (1)^2 - \sqrt{\frac{40}{3}h}\,(1) - 0$$

$$-\frac{1}{3}h = -5 - \sqrt{\frac{40}{3}h}$$

$$-\frac{1}{3}h + 5 = -\sqrt{\frac{40}{3}h}$$

طرفین تساوی را به توان 2 می‌رسانیم.

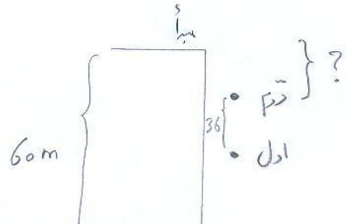
$$\frac{1}{9}h^2 + 25 - \frac{10}{3}h = \frac{40}{3}h$$

$$\frac{1}{9}h^2 - \frac{50}{3}h + 25 = 0$$

h از حل معادلهٔ درجه دوم روبه‌رو به دست می‌آید.

(۱۲-۳

$T_2 = T_1 - 1{,}6 \qquad g = 10\,m/s^2$



$$y_1 = -\frac{1}{2}gt^2 + \cancel{v_0 t} + \cancel{y_0}$$
$$y_1 = -5t_1^2$$
$$y_2 = -5T_2^2$$

$$y_1 = -5(T_2 + 1{,}6)^2$$
$$y_2 = -5T_2^2 \Rightarrow y_2 - y_1 = -5T^2 + 5(T_2 + 1{,}6)^2$$

$$36 = -\cancel{5T_2^2} + \cancel{5T_2^2} + 5(1{,}6)^2 + 16T_2$$

$$36 = +16T_2 + 12{,}8$$

$$23{,}2 = +16T_2$$

$$T_2 = 1{,}45$$

$$y_2 = -5T^2$$

$$y_2 = -5(1{,}45)^2 = -10{,}51$$

(۱۵-۳

$$V = at + V_0$$

$$15 = 3\times 2 + V_0 \Rightarrow V_0 = 9$$

$$V^2 - V_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow (15)^2 - (9)^2 = 2\times 3\times \Delta x$$

$$\Delta x = 24$$

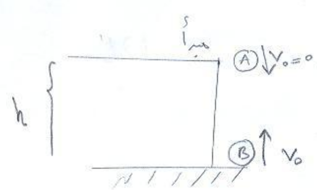
$$x = 100 + 24 = 124$$

(۱۷-۳

$$V = at + V_0$$

$$V = 0{,}4\times 6 + 0 \Rightarrow V = 2{,}4$$

(۱۸-۳



$$\begin{cases} y_A = -\frac{1}{2}gt^2 + V_{0A}t + y_{0A} \\ y_B = -\frac{1}{2}gT^2 + V_{0B}T + y_{0B} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_A = -\frac{1}{2}gT^2 \\ y_B = -\frac{1}{2}gT^2 + V_0T - h \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_A = -gT + V_{0A} \\ V_B = -gT + V_{0B} \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{cases} V_A = -gT \\ V_B = -gT + V_0 \\ V_A = -2V_B \end{cases}\right\} \Rightarrow -gT = 2gT - 2V_0$$

$$3gT = 2V_0 \Rightarrow V_0 = \frac{3}{2}gT$$

$$y_A = y_B \Rightarrow 0 = \frac{3}{2}gT^2 - h \Rightarrow \frac{3}{2}gT^2 = h \Rightarrow T^2 = \frac{2h}{3g}$$

$$y_A = -\frac{1}{2}g\left(\frac{2h}{3g}\right) = -\frac{h}{3}$$ ← فاصله از مبدأ که پشت بام است

بسم الله الرحمن الرحیم

تمرینات فصل دوم

$$\begin{cases} \vec{a} = 5\hat{i} \\ \vec{b} = 10\hat{i} - 7\hat{j} \\ \vec{c} = -2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k} \end{cases} \qquad \begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{5^2 + (0)} = 5 \\ |\vec{b}| = \sqrt{10^2 + (-7)^2} = \sqrt{149} \\ |\vec{c}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{29} \end{cases}$$

برای تعیین راستا زاویه‌ی این بردارها با محور x ها را بدست می‌آوریم

$$\underbrace{\vec{a} \cdot \hat{i}}_{(5\hat{i}) \cdot \hat{i} = 5} = |\vec{a}||\hat{i}| \cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{5} = 1 \rightarrow \boxed{\alpha = 0}$$

$$\underbrace{\vec{b} \cdot \hat{i}}_{(10\hat{i} - 7\hat{j})(\hat{i}) = (10)} = |b||i| \cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{10}{\sqrt{149}} \rightarrow \boxed{\alpha = \quad}$$

$$\underbrace{c \cdot \hat{i}}_{(-2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}) \cdot (\hat{i}) = -2} = |c||\hat{i}| \cos\alpha \longrightarrow \cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{29}} \rightarrow \boxed{\alpha = \quad}$$

چون در سه بعد هستیم تمام کسینوس‌های هادی را مشخص می‌کنیم.

$$\underbrace{c \cdot \hat{j}}_{(-2i - 3j + 4\hat{k}) \cdot (j) = -3} = |c||j| \cos\beta \rightarrow \cos\beta = \frac{-3}{\sqrt{29}} \rightarrow \boxed{\beta = \quad}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \rightarrow \left(\frac{-2}{\sqrt{29}}\right)^2 + \left(\frac{-3}{\sqrt{29}}\right)^2 + \cos^2\gamma = 1$$

$$\frac{4}{29} + \frac{9}{29} + \cos^2\gamma = 1 \rightarrow \frac{13}{29} + \cos^2\gamma = 1 \rightarrow \cos^2\gamma = \frac{16}{29}$$

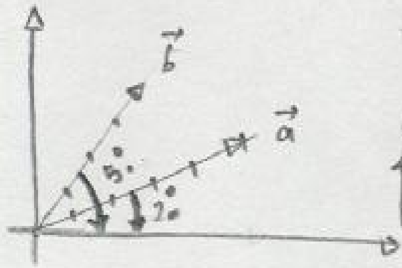
$$\cos\gamma = \frac{4}{\sqrt{29}} \rightarrow \boxed{\gamma = \quad}$$

می‌توانستیم γ را نیز از رابطه‌ی: $\underbrace{\vec{c} \cdot \hat{k}}_{(-2i - 3j + 4\hat{k}) \cdot (\hat{k}) = 4} = |\vec{c}||\hat{k}| \cos\gamma$ نیز بدست آوریم

$$\cos\gamma = \frac{4}{\sqrt{29}}$$

که با جواب قبلی در توافق است.

۳/۲



$|\vec{a}| = 5$

$|\vec{b}| = 4$

$$\begin{cases} \vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} & a_x = |\vec{a}|\cos\alpha \\ \alpha = 20^\circ & a_y = |\vec{a}|\sin\alpha \end{cases}$$

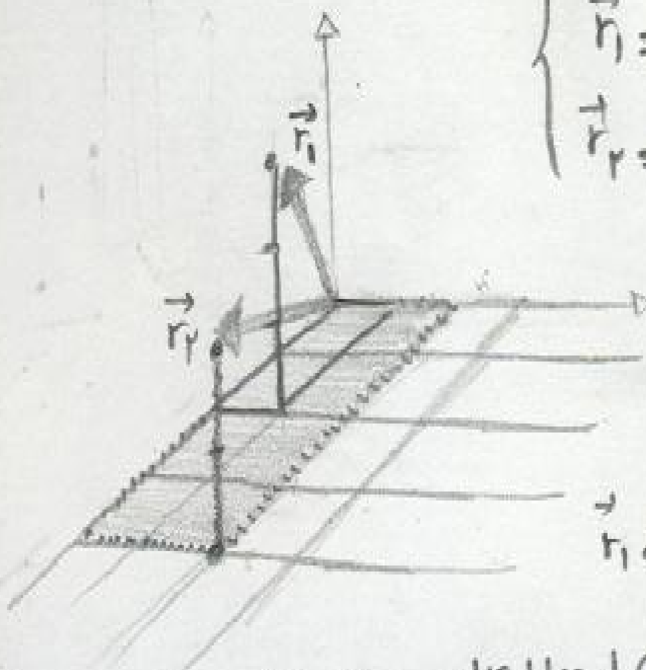
$$\beta = 50^\circ,\ |\vec{b}| = 4 \Longrightarrow \begin{cases} \vec{a} = (5)\cos 20\ \hat{i} + 5\sin 20\ \hat{j} \\ \vec{b} = 4\cos 50^\circ\ \hat{i} + 4\sin 50^\circ\ \hat{j} \end{cases}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow (5\cos 20 + 4\cos 50)\hat{i} + (5\sin 20 + 4\sin 50)\hat{j}$$

تمرین $\Rightarrow |\vec{c}| = ?$

راستای بردار را تعیین کنید.

۵/۲



$$\begin{cases} \vec{r}_1 = 2\hat{i} + 1\hat{j} + 3\hat{k} \\ \vec{r}_2 = 4\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} \end{cases}$$

$$|\vec{r}_1| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

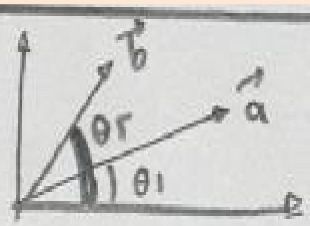
$$|\vec{r}_2| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{24}$$

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = 2\times 4 + 1\times 2 + 3\times 2 = 16$$

$$r_1 \cdot r_2 = |r_1||r_2|\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{|r_1||r_2|}$$

$$\cos\alpha = \frac{16}{\sqrt{14}\sqrt{24}} = \frac{16}{\sqrt{14\times 24}} \Rightarrow \boxed{\alpha =}$$

۷/۱



$$\begin{cases} \vec a = a_x \hat i + a_y \hat j = |\vec a|\cos\theta_1 \hat i + |\vec a|\sin\theta_1 \hat j \\ \vec b = b_x \hat i + b_y \hat j = |\vec b|\cos\theta_2 \hat i + |\vec b|\sin\theta_2 \hat j \end{cases}$$

$$\vec a \cdot \vec b = |\vec a||\vec b|\cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\vec a \cdot \vec b = (|\vec a|\cos\theta_1 \hat i + |\vec a|\sin\theta_1 \hat j)\cdot(|\vec b|\cos\theta_2 \hat i + |\vec b|\sin\theta_2 \hat j)$$

$$\vec a \cdot \vec b = |\vec a||\vec b|\cos\theta_1\cos\theta_2 + |\vec a||\vec b|\sin\theta_1\sin\theta_2$$

$$= |a||b|\left[\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\right]$$

$$\cancel{|a|}\cancel{|b|}\cos(\theta_2-\theta_1) = \cancel{|a|}\cancel{|b|}(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)$$

۹/۱

شرط عمود بودن $\boxed{a \cdot b = 0}$

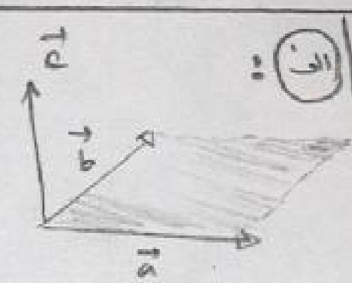
$$\left.\begin{aligned} \vec a &= 2\hat i - \hat j + 4\hat k \\ \vec b &= 5\hat i + 2\hat j - 2\hat k \end{aligned}\right\} \rightarrow \vec a \cdot \vec b = 2\times5 - 2\times1 - 2\times4 = 10 - 2 - 8 = 0$$

برداری بر دو بردار فوق عمود باشد به صورت زیر است $a \times b = \vec c$

$$\vec c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \hat i\left[(-1)(-2) - 4\times2\right] - \hat j\left[2\times(-2) - 4\times5\right]$$

$$+ \hat k\left[2\times2 - 5\times(-1)\right] = -6\hat i + 24\hat j + 9\hat k$$

$\frac{۱۳}{۲}$ الف:



$$\left.\begin{aligned}\vec{a} &= ۲\hat{i} + ۳\hat{j} \\ \vec{b} &= \hat{i} - ۲\hat{j} + \hat{k}\end{aligned}\right\} \; |(a\times b)| \to \left[\text{مساحت متوازی الاضلاع ساخته شده در دو ضلع}\right]$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{مساحت متوازی الاضلاع}}{۲}$$

$$\overrightarrow{a\times b} = \vec{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = [(3\times 1) - (0)(-2)]\,\hat{i} - \hat{j}\,[(2)(1) - (0)(1)] + \hat{k}\,[2(-2) - 3(1)]$$

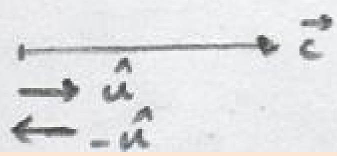
$$\vec{c} = [\,۵\hat{i} - ۲\hat{j} - ۷\hat{k}\,] \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{۲۵ + ۴ + ۴۹} = \sqrt{۲۹ + ۴۹} = \sqrt{۷۸} \to$$

$$\text{مساحت متوازی الاضلاع} = \sqrt{۷۸}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}\left[\text{مساحت متوازی الاضلاع}\right] \Rightarrow \frac{\sqrt{۷۸}}{۲}$$

ب) برداری که بر صفحه مثلث یا متوازی الاضلاع عمود است بردار $\vec{c}$ است که باید آن را تبدیل به بردار یکه کرد.

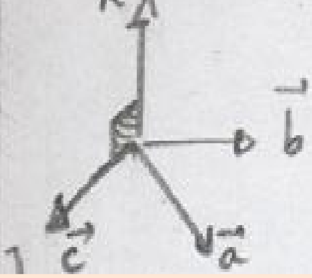
$$c = ۵\hat{i} - ۲\hat{j} - ۷\hat{k} \quad |c| = \sqrt{۷۸} \to \begin{cases} \vec{u} = \dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \dfrac{۵}{\sqrt{۷۸}}\hat{i} - \dfrac{۲}{\sqrt{۷۸}}\hat{j} - \dfrac{۷}{\sqrt{۷۸}}\hat{k} \\ -\vec{u} = \vec{u}' \end{cases}$$



$(\frac{19}{2})$

بردار $\vec{R} = \overrightarrow{a\times b}$ بر دو بردار a و b عمود است. و در صفحه a و b هیچ مؤلفه‌ای ندارد.

اگر بردار c بر این بردار R عمود باشد مطمئناً در صفحه x-y قرار خواهد گرفت.



$\vec{c}\cdot\vec{R} = ۰$ شرط عمود بودن

$$\boxed{c\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = ۰}$$

$$\begin{cases} \vec{d_1} = \overrightarrow{a+b} \\ \vec{d_2} + \vec{b} = \vec{a} \to \vec{d_2} = \overrightarrow{a-b} \end{cases}$$

۱۵/۲

$$|\vec{d_1}| = 2|\vec{d_2}| \to |\overrightarrow{a+b}| = 2|\overrightarrow{a-b}| \Rightarrow$$

$$|(\overrightarrow{a+b})\cdot(\overrightarrow{a+b})| = 4|(\overrightarrow{a-b})\cdot(\overrightarrow{a-b})| \qquad \underline{\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}}$$

$$\to a^2 + a\cdot b + b\cdot a + b^2 = 4[a^2 - a\cdot b - b\cdot a + b^2]$$

$$a^2 + 2a\cdot b + b^2 = 4a^2 + 4b^2 - 8a\cdot b \to a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta = 4a^2 + 4b^2 - 8ab\cos\theta$$

$$|a^2| + |b^2| + 2|a||b|\cos\theta = 4|a|^2 + 4|b|^2 - 8|a||b|\cos\theta$$

$$\xrightarrow[|a|=|b|]{\text{درنتیجه}} \quad 2|\cancel{a^2}| + 2|\cancel{a^2}|\cos\theta = 8|\cancel{a|^2} - 8|\cancel{a|^2}\cos\theta$$

$$1 + \cos\theta = 4 - 4\cos\theta \to 5\cos\theta = 3 \to \cos\theta = 3/5 = 0.6 \to$$

$$\boxed{\theta = \_\_}$$

۲۱/۲

$$\vec{c} = \overrightarrow{a\times b} \qquad \vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}, \quad \vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$$

$\vec{c} \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{c}\cdot\vec{a} = 0$ باید $\Rightarrow (a\times b)\cdot a = 0$

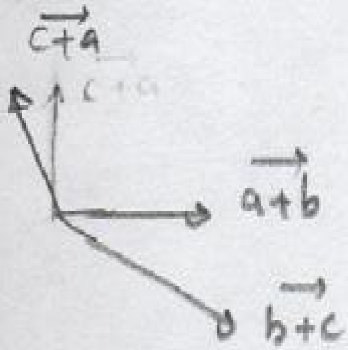
$$\vec{c} = \overrightarrow{a\times b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_y & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_yb_z - a_zb_y)\hat{i} - \hat{j}(a_xb_z - a_zb_x) + \hat{k}[a_xb_y - a_yb_x]$$

$$\vec{a}\cdot(\overrightarrow{a\times b}) = a_x(a_yb_z - a_zb_y) - a_y(a_xb_z - a_zb_x) + a_z(a_xb_y - a_yb_x)$$

$$a\cdot(a\times b) = \cancel{a_xa_yb_z} - a_xa_zb_y - \cancel{a_ya_xb_z} + a_ya_zb_x + a_xa_zb_y - a_za_yb_x$$

$$\Rightarrow a\cdot(a\times b) = 0$$

به همین صورت نیز مي توان نشان داد که c بر b عمود است



$$\text{حجم} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{(a+b)} \times \overrightarrow{(b+c)} \Rightarrow \text{سطح قاعده} \\ (c+a) \text{ ارتفاع} \end{array} \right\}$$

$$\overrightarrow{(c+a)} \cdot \left[\overrightarrow{(a+b)} \times \overrightarrow{(b+c)} \right] =$$

$$\overrightarrow{(c+a)} \cdot \left[\vec{a} \times b + \vec{a} \times c + \cancel{\vec{b} \times b} + \vec{b} \times c \right] \Rightarrow$$

$$(c+a) \cdot \left[(a \times b) + a \times c + b \times c \right] = \vec{c} \cdot [\overrightarrow{a \times b}] + \vec{c} \cdot [\overrightarrow{a \times c}] + \vec{c} \cdot [\overrightarrow{b \times c}]$$
$$+ \vec{a} \cdot [\overrightarrow{a \times b}] + \vec{a} \cdot [\overrightarrow{a \times c}] + \vec{a} \cdot [\overrightarrow{b \times c}]$$

$$\rightarrow c \cdot [a \times b] + \cancel{c \cdot [a \times c]} + 0 + 0 + 0 + a \cdot (b \times c) = \vec{c} \cdot (\overrightarrow{a \times b}) + \vec{a} \cdot (\overrightarrow{b \times c})$$

$$\text{حجم} = \vec{c} \cdot (\overrightarrow{a \times b}) + \vec{a} \cdot (\overrightarrow{b \times c}) = c \cdot (a \times b) + c \cdot (a \times b) =$$

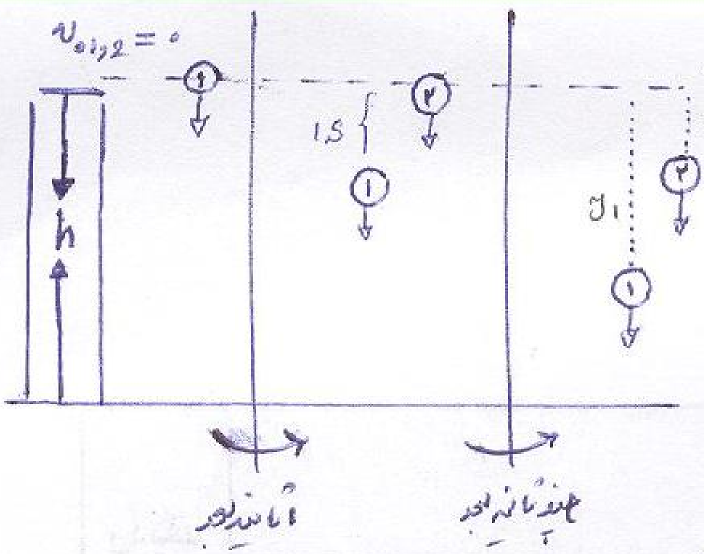
$$(V)\text{حجم} = ۲ \left[c \cdot (a \times b) \right]$$

$$(V')\text{حجم} \rightarrow c \cdot (a \times b) \Rightarrow \boxed{۲(V') = V}$$


موفق و پیروز باشید

بسم الله الرحمن الرحیم

تمرینات فصل سوم



$g = -9.8\ m/s^2$ (۱/۳)

$$\boxed{t_1 \ , \ t_2 = t_1 - 1}$$

$$y_1 = -\tfrac{1}{2} g t_1^2 + 0$$

$$y_2 = -\tfrac{1}{2} g t_2^2$$

$$y_1 - y_2 = -\tfrac{1}{2} g \left[t_1^2 - t_2^2 \right]$$

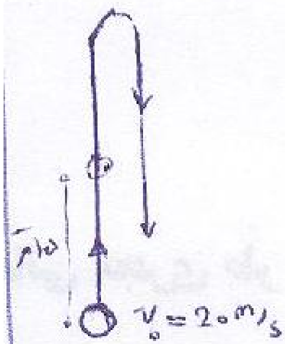
$$y_1 - y_2 = -\tfrac{1}{2} g \left[t_1^2 - t_1^2 - 1 + 2t_1 \right] = -\tfrac{1}{2} g \left[2t_1 - 1 \right]$$

$$y_1 - y_2 = -\tfrac{1}{2} \times 9.8 \times \left[2t_1 - 1 \right]$$

با افزایش t_1 فاصله دو گوی از هم افزایش می یابد

(۳/۳) پیکان با سرعت v1=40(m/s) مسافت d را در مدت زمان t1طي میکند تا به هدف برسد .مدت زمان t2 طول میکشد تا صوت مسافت d را طي كرده و به گوش تیرانداز برسد . پس از زمان پرتاب تیر تا زمان رسیدن صداي صوت به گوش تیرانداز t1+t2 زمان طول كشیده است كه طبق صورت مساله این مقدار برابر ۱ ثانیه مي باشد .

d=v1*t1=40(m/s)*t1 à t1=d/40
d= v2*t2=340(m/s)*t2 à t2=d/340 à d/40+d/340=1
t1+t2=1 d=(340*40)/380



۵/۲) الف) حرکت سقوط آزاد: $y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0$

$$y=-\frac{1}{2}\times 10\times t^2+20t+0=0$$

$$20t=5t^2 \rightarrow \boxed{4=t}$$

ب) $v^2-v_0^2=-2gh \rightarrow 0-(20)^2=-2gh \rightarrow h=\frac{400}{20}$

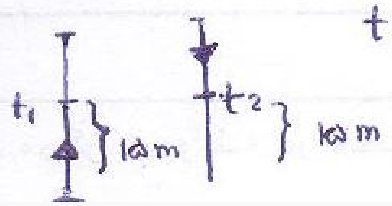
$$\boxed{h=20\,m}$$

ج) ارتفاع ۱۵ متری بالای نقطه پرتاب

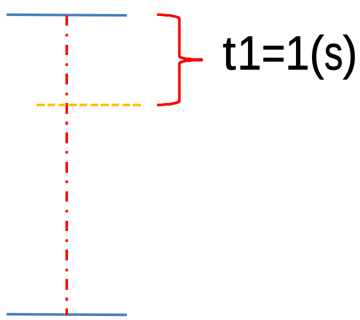
$$y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0$$

$$15=-5t^2+20t \rightarrow 3t^2-4t+3=0 \rightarrow t=\frac{4\pm\sqrt{16-4(3)(1)}}{6}$$

$$t=\frac{4\pm 2}{6} \Rightarrow \begin{cases} t_1=1/3 \rightarrow \text{ارتفاع ۱۵ متری در حالت رفت} \\ t_2=1 \rightarrow \text{ارتفاع ۱۵ متری در حالت برگشت} \end{cases}$$



t1=1/3 مدت زمان طي كردن ۱۵ متر در حال رفت و t2=1 زماني است كه در حالت برگشت از زمين ۱۵ متر ارتفاع داريم



(۷/۳) براي تكه 0.4h مسير داريم :

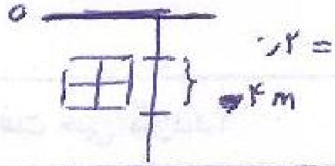
$$y=\frac{-1}{2}gt^2+v_0t+y_0$$

à 0.4h=-0.5*g à h=-50/4=-12.5 (m)

براي كل مسير داريم :

$$\begin{cases} y=\frac{-1}{2}gt^2+v_0t+y_0 \rightarrow h=\frac{-1}{2}gt^2+0 \rightarrow \frac{50}{4}=5t^2 \rightarrow t^2=\frac{10}{4} \\ v^2-v_0^2=-2gy \rightarrow v^2=-2g\times\frac{-50}{4} \rightarrow v=\sqrt{250} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{v}=\frac{\sqrt{250}+0}{2}=\frac{5\sqrt{10}}{2} \quad \text{يا} \quad \bar{v}=\frac{y_2-y_1}{t_2-t_1}=\frac{5\sqrt{10}}{2}$$



$$y_1 = -\tfrac{1}{2} \times 10 \times t_1^2 = -5t_1^2$$

$$y_2 = -\tfrac{1}{2} \times 10 \times t_2^2 = -5t_2^2$$

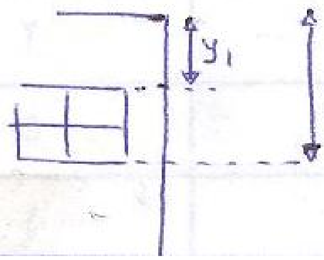
$$y_2 - y_1 = -5(t_2^2 - t_1^2) = -5(t_2 - t_1)(t_2 + t_1)$$

$$(4m) = 5 \times (t_2 + t_1) \times 0.2(s)$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 4s \\ t_2 - t_1 = 0.2s \end{cases} \rightarrow t_2 = \frac{4.2}{2} = 2.1 \quad , \quad t_1 = 1.9(s)$$

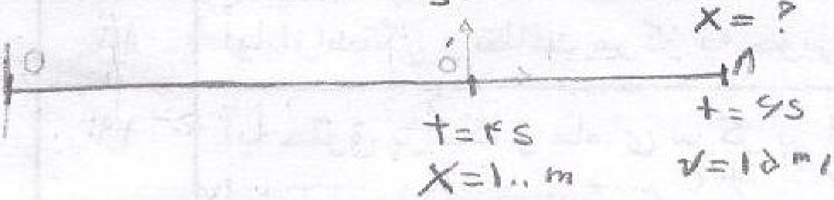
$$y_1 = -\tfrac{1}{2} \times 10 \times (1.9)^2 =$$

$$y_2 = -\tfrac{1}{2} \times 10 \times (2.1)^2 =$$



$\frac{15}{3}$

$a = 3\,m/s^2$



$$\begin{cases} v^2 - v_0^2 = 2ax \rightarrow (15)^2 - v_0^2 = 2 \times 3 \times x \rightarrow 225 - 6x = v_0^2 \\ x = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t \rightarrow x = \tfrac{3}{2} \times 2^2 + v_0 \times 2 = 6 + 2v_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 225 - 6x = v_0^2 \\ 6x - 36 = 12v_0 \end{cases} \rightarrow -189 + v_0^2 + 12v_0 = 0 \rightarrow v_0 = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(-189)}}{2 \times 1}$$

$$\boxed{v_0 = 9}$$

$x = 6 + 18 = 24\ m \Rightarrow$ در مبدأ O' ، ۲۴ متر فاصله داریم ←

در مبدأ O ، ۱۰۰ متر فاصله داریم پس برای یافتن موقعیت نقطه از نقطه O باید

$24 + 100 = 124\ m$

$\frac{۳۳}{۳}$

$a = ٫۲t$

$x_0 = ۰ \;,\; v_0 = ۰$

$$\begin{cases} t \to [۰ \,،\, ۱۰\,s] \quad a = \dfrac{dv}{dt} = ٫۲t \to \\ v = ٫۱t^۲ + v_0 = ٫۱t^۲ = \dfrac{dx}{dt} \to x = \dfrac{٫۱}{۳}t^۳ + ۰ \end{cases}$$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \begin{cases} x(t=۲) = \dfrac{٫۱}{۳} * ۸ = \dfrac{٫۸}{۳} \to \bar{v} = \cdots \\ x(t=۷) = \dfrac{٫۱}{۳} * ۳۲۵ = \dfrac{۳۲٫۵}{۳} \end{cases}$$

$\left(\frac{۲۹}{۳}\right)$

$$a = bx \Rightarrow a = ۲x = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\,\frac{dx}{dt} = v\,\frac{dv}{dx}$$

$$۲x\,dx = v\,dv \to \int_{x=۱}^{x} ۲x\,dx = \int_{v=۰}^{v} v\,dv \to \frac{۲}{۲}x^۲\Big|_۱^x = \frac{۱}{۲}v^۲\Big|_۰^v$$

$$x^۲ - ۱ = \frac{v^۲}{۲} \to \boxed{v^۲ = ۲x^۲ - ۲} \Rightarrow x = ۳m \to v^۲ = ۲*۹ - ۲ = ۱۶$$

$$v = ۴\,m/s$$

ب) زمان = ؟

$$v = \sqrt{۲x^۲ - ۲} = \sqrt{۲}\sqrt{x^۲ - ۱} = \frac{dx}{dt}$$

$$\sqrt{۲}\int_۰^t dt = \int_{x=۱}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x^۲-۱}} \Rightarrow \sqrt{۲}\,t = \int_{x=۱}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x^۲-۱}} \Rightarrow$$ (ادامه دهید)


موفق و پیروز باشید

حل مسائل فصل چهارم - فیزیک عمومی ۱

مسأله ۴-۲- معادله حرکت با شتاب ثابت بصورت زیر است

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

بصورت مولفه‌ای بازنویسی می‌کنیم

$$r_x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t + r_{0x} \quad , \quad r_y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{0y}t + r_{0y}$$

مقادیر اولیه $\vec{r}$ و $\vec{v}$ را برابر $\vec{r}_1$ و $\vec{v}_1$ می‌گیریم:

$$r_x = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{1x}t + 4 \qquad (\text{۴-۲-۱-الف})$$

$$r_y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_{1y}t + 3 \qquad (\text{۴-۲-۱-ب})$$

معادلات سرعت را نیز بدین صورت می‌نویسیم

$$v_x = a_x t + v_{1x} \qquad (\text{۴-۲-۲-الف})$$

$$v_y = a_y t + v_{1y} \qquad (\text{۴-۲-۲-ب})$$

الف- به ازای $t=2$ مقادیر $\vec{r}_2$ و $\vec{v}_2$ را جاگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} 10 = 2a_x + 2v_{1x} + 4 \\ 2 = 2a_y + 2v_{1y} + 3 \end{cases} \qquad (۴\text{-}۲\text{-}۳)$$

و به ازای $\vec{v}_2$

$$\begin{cases} 5 = 2a_x + v_{1x} \\ 6 = 2a_y + v_{1y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_x = 5 - v_{1x} \\ 2a_y = 6 - v_{1y} \end{cases} \qquad (۴\text{-}۲\text{-}۴)$$

معادلات ۴-۲-۴ را در ۴-۲-۳ قرار می‌دهیم:

$$10 = v_{1x} + 9 \Rightarrow v_{1x} = 1$$

$$2 = v_{1x} + 9 \Rightarrow v_{1y} = -7$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = 1\,(m/s)\,\hat{i} - 7\,(m/s)\,\hat{j}$$

ادامه مسأله ۴-۲-۶

ب- برای بدست آوردن شتاب از معادلات ۴-۲-۲ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} v_x = a_x t + 1 \\ v_y = a_y t - 7 \end{cases} \xrightarrow{t=2} \begin{cases} 5 = 2a_x + 1 \\ 6 = 2a_y - 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a_x = 2 \ m/s^2 \\ a_y = \frac{13}{2} \ m/s^2 \end{matrix}$$

$$\vec{a} = 2\left(\frac{m}{s^2}\right)\hat{i} + \frac{13}{2}\left(\frac{m}{s^2}\right)\hat{j}$$

ج- سرعت ذره برابر است با: $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$

کافی است معادلات ۴-۲-۲، ۱ را با a بدست آمده دوباره بازنویسی کنیم

$$\vec{v} = (2t+1)\hat{i} + \left(\frac{13}{2}t - 7\right)\hat{j}$$

د- بردار مکان از معادلات ۴-۲-۱ بدست می‌آید: $\vec{r} = r_x \hat{i} + r_y \hat{j}$

$$\vec{r} = (t^2 + t + 4)\hat{i} + \left(\frac{13}{4}t^2 - 7t + 3\right)\hat{j}$$

مسأله ۴-۳-

الف- سرعت نسبی را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\vec{u}_{12} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

• از $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$، $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ را بدست می‌آوریم:

$$\vec{v}_1 = 2\hat{i} - 2t\hat{j} + (6t-4)\hat{k}$$

$$\vec{v}_2 = (10t - 12)\hat{i} + 3t^2\hat{j} - 3\hat{k}$$

سرعت نسبی برابر است با:

$$\vec{u}_{12} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = (10t - 14)\hat{i} + (3t^2 + 2t)\hat{j} + (-6t + 1)\hat{k}$$

ب- شتاب نسبی بدست می‌آید

$$\vec{a}_{12} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$

$$\vec{a}_{12} = (10)\hat{i} + (6t+2)\hat{j} - 6\hat{k}$$

الف- بردار سرعت برابر است با:

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=-\omega\sin\omega t\,\hat{i}+\omega\cos\omega t\,\hat{j}$$

می دانیم که اگر دو بردار بر هم عمود باشند ضرب داخلی آنها صفر است.

$$\vec{r}\cdot\vec{v}=r_x v_x+r_y v_y=-\omega\sin\omega t\cos\omega t+\omega\sin\omega t\cos\omega t=0$$

پس $\vec{v}$ بر $\vec{r}$ عمود است.

ب- بردار شتاب بصورت زیر است:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=-\omega^2\cos\omega t\,\hat{i}-\omega^2\sin\omega t\,\hat{j}$$

$$\vec{a}=-\omega^2\vec{r}\quad\Rightarrow\quad|\vec{a}|=\omega^2|\vec{r}|$$

بنابراین اندازه $|\vec{a}|$ متناسب با $|\vec{r}|$ یعنی فاصله ذره از مبدأ است.

چون بردار $\vec{r}$ برداری است که از مبدأ به سمت ذره رسم می شود و $\vec{a}=-\omega^2\vec{r}$

بردار $\vec{a}$ به سمت مبدأ خواهد بود.

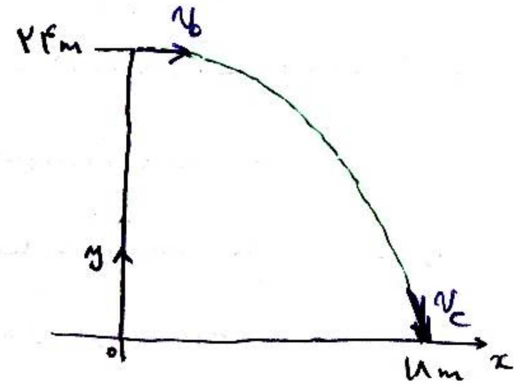
ج- حاصلضرب $\vec{r}\times\vec{v}$ را محاسبه می کنیم

$$\vec{r}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ \cos\omega t&\sin\omega t&0\\ -\omega\sin\omega t&\omega\cos\omega t&0\end{vmatrix}=\hat{k}\,(\omega\cos^2\omega t+\omega\sin^2\omega t)$$

$$\Rightarrow\quad\vec{r}\times\vec{v}=\omega\,\hat{k}$$

که اندازه آن بطور واضح، ثابت است.

مسأله ۴-۱۰- حرکت سنگ بصورت شکل روبرو است معادلات حرکت پرتابه را برای آن می‌نویسیم



$$y=-\frac{a_y}{2}t^2+v_{0y}t+y_0$$

$$x=\frac{1}{2}a_x t^2+v_{0x}t+x_0$$

با توجه به داده‌های مسأله داریم:

$a_y=-g$ ، $v_{0y}=0$ ، $y_0=24$ و $a_x=0$ و $v_{0x}=v_0$ و $x_0=0$

معادلات حرکت بصورت زیر در می‌آیند:

$y=-5t^2+24$ و $x=v_0t$ (۴-۱۰-۱)

الف- در لحظه برخورد سنگ به زمین: $y=0$ و $x=18$

در معادلات ۴-۱۰-۱ قرار می‌دهیم:

$18=v_0t$

$0=-5t^2+24 \Rightarrow t^2=4.8 \Rightarrow t=\pm 2.2$ (s)

زمان منفی مدنظر نیست بنابراین:

$18=2.2\,v_0 \Rightarrow$

$v_0=8.2$ m/s

ب- معادلات سرعت بصورت زیرند:

$v_x=v_{0x}=v_0=8.2$ m/s

$v_y=at+v_{0y}=-gt+0=-10t$

بنابراین درلحظه برخورد

$v_{cx}=8.2$

$v_{cy}=-10\times 2.2=-22 \Rightarrow$ $\vec{v}_c=8.2\,\hat{i}-22\,\hat{j}$ (m/s)

مسأله ۴-۱۳-۶

معادلات حرکت پرتابه را می‌نویسیم.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta \, t & \text{(الف)} \\ x = v_0 \cos\theta \, t & \text{(ب)} \end{cases} \qquad (۱-۱۳-۴)$$

با توجه به هندسه مسأله، معادله نقاط روی تپه بصورت زیر است:

$$\tan\phi = y/x \qquad (۲-۱۳-۴)$$

از دو معادله بالا بدست می‌آوریم:

$$\tan\phi = \frac{-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\theta \, t}{v_0 \cos\theta \, t} = \tan\theta - \frac{g t}{2 v_0 \cos\theta} \qquad (۳-۱۳-۴)$$

از طرفی برد روی تپه یعنی R برابر است با:

$$\cos\phi = \frac{x}{R} \Rightarrow R = \frac{x}{\cos\phi} = \frac{v_0 \cos\theta \, t}{\cos\phi} \qquad (۴-۱۳-۴)$$

از معادله (۳-۱۳-۴)، t را بدست آورده و در معادله (۴-۱۳-۴) قرار می‌دهیم

$$t = \frac{2(\tan\theta - \tan\phi)\, v_0 \cos\theta}{g}$$

$$R = \frac{2 v_0^2 \cos^2\theta \, (\tan\theta - \tan\phi)}{g \cos\phi}$$

صفحه ۶

مسأله ۴-۳۳- در متن کتاب، صفحات ۹۰-۹۲ بدست آمده است.

مسأله ۴-۴۷- معادله سرعت در مختصات قطبی بصورت زیر است:

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{u}_r + r\dot{\theta}\,\hat{u}_\theta \qquad \text{~~(۴-۴۷-۱)~~}\ (۱-۴۷-۴)$$

$\dot{r} = \frac{dr}{dt}$. دقت کنید که r بطور صریح تابعیت t ندارد اما چون شامل θ است و θ نیز تابعی از t است بنابراین:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = (0.1\sin\theta)\times 5 = 0.5\sin\theta$$

بنابراین

$$\vec{v} = 0.5\sin\theta\,\hat{u}_r + 0.5(2-\cos\theta)\,\hat{u}_\theta$$

توجه: ~~[illegible]~~ در معادلات بالا، r را برحسب θ بیان کرده‌ام.

مسأله ۴-۵۰-

معادلات سرعت و شتاب را در مختصات قطبی می‌نویسیم:

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{u}_r + r\dot{\theta}\,\hat{u}_\theta$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} - r\ddot{\theta})\,\hat{u}_\theta \qquad (۱-۵۰-۴)$$

$$r = 0.1t^2 \Rightarrow \dot{r} = 0.2t,\ \ddot{r} = 0.2,\ \dot{\theta} = \frac{2}{3}t^{-1/3},\ \ddot{\theta} = -\frac{2}{9}t^{-4/3}$$

بنابراین:

$$\vec{v} = 0.2t\,\hat{u}_r + \frac{0.2}{3}t^{5/3}\,\hat{u}_\theta$$

$$\vec{a} = \left(0.2 - \frac{0.4}{9}t^{4/3}\right)\hat{u}_r + \left(\frac{0.8}{3}t^{2/3} + \frac{0.2}{9}t^{2/3}\right)\hat{u}_\theta$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v}(1) &= 0.2\,\hat{u}_r + \frac{0.2}{3}\,\hat{u}_\theta \\ \vec{a}(1) &= \frac{1.4}{9}\,\hat{u}_r + \frac{2.2}{9}\,\hat{u}_\theta \end{aligned}} \qquad ۲-۵۰-۴$$

ادامه مسأله ۴-۵۰-۶

بردارهای سرعت و شتاب را با استفاده از تبدیلات زیر به مختصات کارتزین (دکارتی) می‌بریم:

$$\hat{u}_r = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$$
$$\hat{u}_\theta = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j} \qquad ۳\text{-}۵۰\text{-}۴$$

این رابطه‌ها را در معادلات (۴-۵۰-۲) قرار می‌دهیم:

$$\vec{v}(1) = \left(0.2\cos\theta - \frac{0.2}{3}\sin\theta\right)\hat{i} + \left(0.2\sin\theta + \frac{0.2}{3}\cos\theta\right)\hat{j}$$
$$\vec{a}(1) = \left(\frac{1.4}{9}\cos\theta - \frac{2.2}{9}\sin\theta\right)\hat{i} + \left(\frac{1.4}{9}\sin\theta + \frac{2.2}{9}\sin\theta\right)\hat{j}$$

در $t = 1\,(s)$، $\theta = 1\,(rad)$ بنابراین:

$$\vec{v}_1 = \left[0.2\cos(1) - \frac{0.2}{3}\sin(1)\right]\hat{i} + \left[0.2\sin(1) + \frac{0.2}{3}\cos(1)\right]\hat{j}$$

$$\vec{v} = 0.05\,\hat{i} + 0.2\,\hat{j} \quad , \quad \vec{a}(1) = -0.12\,\hat{i} + 0.26\,\hat{j}$$

برای تعیین زاویه بردار $\vec{c}$ با محور x داریم:

$$\tan\theta_c = \frac{c_y}{c_x} \Rightarrow$$

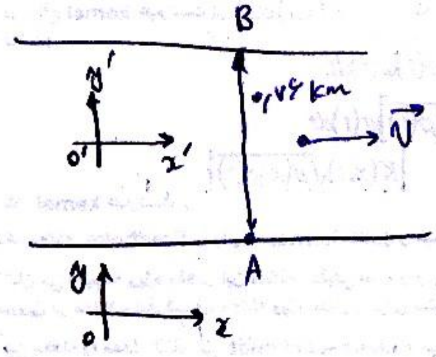
$$\tan\theta_v = \frac{v_y}{v_x} = \frac{0.2}{0.05} = 4 \Rightarrow \theta_v = 1.3\ (rad)$$

$$\tan\theta_a = \frac{a_y}{a_x} = -\frac{0.26}{0.12} \simeq -2.2 \Rightarrow \theta_a = -1.1\ (rad)$$

صفحه ۸

مسأله ۴-۶۱

چارچوب $S: oxy$ را متصل به ساحل و چارچوب $S': o'x'y'$ را متصل به آب در نظر می‌گیریم:



$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{\rho} \qquad \vec{u} = 4\left(\frac{km}{h}\right)\hat{i}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

بصورت مؤلفه ای می‌نویسیم:

$$v_x = v_x' + u_x = v_x' + 4$$

$$v_y = v_y'$$

اگر بخواهد روی خط راست عرض رودخانه را طی کند:

$$v_x = 0 \Rightarrow v_x' = -4\ (km/h)$$

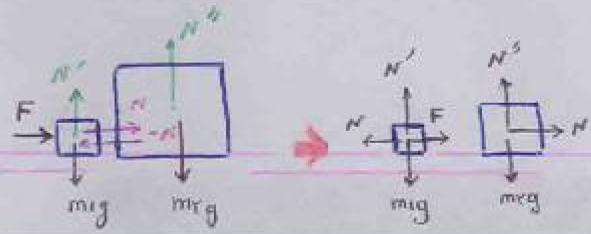
چون این مقدار برابر حداکثر سرعت قایق است. بنابراین

$$v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = 4 \Rightarrow v_y' = 0$$

بنابراین بخاطر محدود بودن سرعت به این مقدار، قایق نمی‌تواند در جهت y سرعت داشته باشد، مگر اینکه بخواهد مسیر AB را بطور مستقیم حرکت کند.

پس گزینه (د) درست می‌باشد.

(۱/۵)

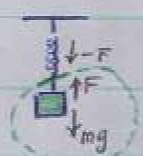


$$\begin{cases} F - N = m_1 a \\ N = m_2 a \end{cases} \rightarrow F - m_2 a = m_1 a \rightarrow \boxed{a = \frac{F}{m_1 + m_2}}$$

ب) می توان مقدار عددی را جایگذاری کرد.

$$N = m_2 a = m_2 \times \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2}$$

(۳/۵)



دو نیروی F و F- عمل و عکس العمل یکدیگرند.

الف) $a_y = 0$ شتاب صفر ← سرعت ثابت

$$\sum F_y = m a_y = 0 \rightarrow F - mg = 0 \rightarrow F = mg$$

آنچه نیروسنج نمایش می دهد نیروی F است، در این حالت نیروی F برابر وزن جسم است (قسمت ب هم مانند قسمت الف شتاب صفر است ← $F = mg$)

(ج) $a = 2\ m/s^2 \Rightarrow F - mg = ma \rightarrow F = m(g + a)$

(د)

$t = 9s \quad v = 0\ m/s$

$t = 5s \quad v = 10\ m/s$

$t = 0 \quad v = 10\ m/s$

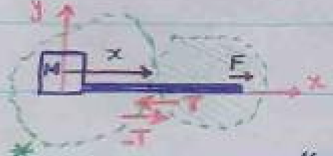
$\Delta t = 4s$

$$v = at + v_0 \rightarrow a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - 10}{4} = \frac{-10}{4} = -2/5$$

در بازه ی ۰ تا ۵ ثانیه چون شتاب صفر است نیروسنج همان وزن جسم را نمایش می دهد ولی در بازه ی ۵ تا ۹ ثانیه داریم:

$$\sum F = ma \rightarrow F - mg = ma \rightarrow F = m(10 - 2/5)$$

(۵/۵)

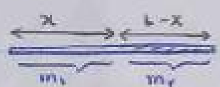


الف) $\sum F_x = m a_x \rightarrow 100 = (4 + 6) a_x \rightarrow a_x = 10\ m/s^2$

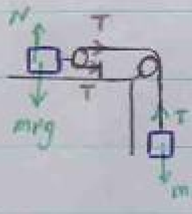
ب) در قسمت الف قانون نیوتن را برای کل جسم و طناب نوشتیم. در این قسمت قانون نیوتن را برای جسمی که با * نشان داده شده است می نویسیم:

$$\left.\begin{cases} \sum F_x = m a_x \rightarrow T = (m_1 + M) a_x \\ m_1 + m_2 = m = 4\ kg \\ \text{چون طناب همگن است:}\ \frac{(m_1 + m_2)}{L} = \frac{m_1}{x} \end{cases}\right\} \rightarrow T = \left(\frac{mx}{L} + M\right) a_x = \left(\frac{4}{10} x + 6\right) \times 10 = 4x + 60$$

(m, L)



(۷/۵)



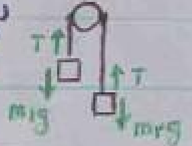
الف) چون نخ از روی قرقره ی بالایی رد می شود است پس اگر جرم 5 kg، 10 cm پایین بیاید جرم 20 kg نصف این مقدار پایین می آید. پس اگر شتاب جرم 5 kg، a باشد شتاب جرم 20 kg، a' می شود:

$\boxed{a = 2a'}$

$$\sum F = ma \rightarrow \left[m_1 g - T = m_1 a \ ,\ 2T = m_2 a' \ ,\ a = 2a' \right] \Rightarrow$$

$$a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2/4} = \frac{50}{5 + 20/4} = 5 \rightarrow T = 25\ (N)$$

(۹/۵)



$$\left.\begin{matrix} m_1 + m_2 = M \ ,\ m_1 g - m_2 g = Ma \rightarrow a = \frac{(m_1 - m_2)}{M} g \\ m_1 g - T = m_1 a \rightarrow T = m_1 g - m_1 a = m_1 (g - a) \end{matrix}\right\} \rightarrow T = m_1 g \left(1 - \frac{(m_1 - m_2)}{M}\right)$$

$$\frac{dT}{dm_1} = 0 \rightarrow m_1 = M/2 \ ,\ m_2 = M/2$$

(۱۱/۵)

$$\Rightarrow mg \sin\theta = ma \rightarrow a = g \sin\theta$$

$$N = mg \cos\theta$$

(مقداری که نیروسنج نمایش می دهد N می باشد)

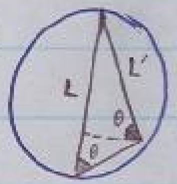
(۱۳/۵) $F = 8t \;,\; F = ma = m\,dv/dt \Rightarrow 8t = m\,dv/dt \Rightarrow$ با انتگرال‌گیری از طرفین $\Rightarrow mv\Big|_0^v = \frac{8t^2}{2}\Big|_0^t \rightarrow mv = 4t^2$

(الف) $t = 3s \rightarrow v = 4t^2/m = 3/2$

(ب) $v = \frac{dx}{dt} = \frac{4t^2}{m} \rightarrow$ با انتگرال‌گیری $\rightarrow x = \frac{4t^3}{3m} + \cancel{x_0}$ در $t = 3$ ثانیه $\rightarrow x = 3/2$

(ج) $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{3/2}{3} = 1/2$

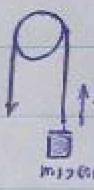
(د) $F = ma \rightarrow \bar{F} = m\bar{a}$ و $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3/2}{3} = 1/2 \Rightarrow \bar{F} = 24 \times 1/2 = 12$

(۱۷/۵) 

$L = 1/2\, g t^2$: زمان لازم برای طی کردن طول L ⇐ مهره‌ای که مسیر L را طی می‌کند (پس) : $\boxed{t^2 = \frac{2L}{g}}$ *

* باید زمان لازم برای طی کردن طول L' را به دست آوریم و با * مقایسه کنیم. $\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} L' = \frac{1}{2} g \sin\theta\, t'^2 \\ \sin\theta = \frac{L'}{L} \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{t'^2 = \frac{2L}{g}}$ **

از مقایسه * و ** به این نتیجه می‌رسیم که این دو مقدار مساوی هستند و نتیجه ربطی به طول میله ندارد.

(۲۱/۵) 

F نیرویی است که شخص با دست خود به طناب وارد می‌کند تا آن را به سمت پایین بکشد و خود را به سمت بالا بکشد:

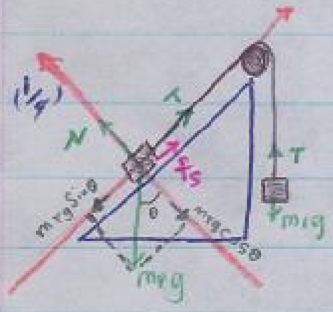
برای شخص : $F - m_2 g = m_2 a$ برای جرم m_1 : $F - m_1 g = m_1 a_1$

$\Rightarrow m_2(g+a) - m_1 g = m_1 a_1 \rightarrow a_1 = \frac{m_2(g+a) - m_1 g}{m_1}$

(۲۵/۵) $F = (ax+b)\,\hat{i}$ و $F = m\,dv/dt = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = mv\,dv/dx$ (v) $\Rightarrow mv\frac{dv}{dx} = ax + b \Rightarrow$ با انتگرال‌گیری $\Rightarrow$

$m(1/2\, v^2)\Big|_{v_0}^{v} = ax^2 + bx\Big|_0^x \rightarrow 1/2\, m(v^2 - v_0^2) = 2x^2 + 4x$ $v_0 = 1/5$ و $x = 6m$ و $v = ?$

$\rightarrow 1/2 \times 0/5 \times (v^2 - 1/5^2) = 2(6)^2 + 4(6) \rightarrow \boxed{v = 2}$

(۱/۶) 

• اگر جرم m_2 به اندازه‌ای کوچک باشد که باعث شود به سمت پایین سطح شیب‌دار سر نخورد:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{جرم } m_2 : T + f_s = m_2 g \sin\theta \;,\; N = m_2 g \cos\theta \;,\; f_s = \mu_s N \\ \text{جرم } m_1 : T = m_1 g \rightarrow m_1 g + \mu_s m_2 g \cos\theta = m_2 g \sin\theta \end{array} \right.$

$\rightarrow m_1 g = m_2 g(\sin\theta - \mu_s \cos\theta) \rightarrow$

$m_2 = m_1 / (\sin\theta - \mu_s \cos\theta)$

• اگر جرم m_2 به اندازه‌ای کوچک باشد که سیستم به سمت بالا حرکت کند داریم:

جرم m_2 : $\left\{ \begin{array}{l} T = m_2 g \sin\theta + f_s \\ f_s = \mu_s N \;,\; N = \mu_s m_2 g \cos\theta \end{array} \right.$ جرم m_1 : $T = m_1 g \rightarrow m_2 = m_1/(\sin\theta + \mu_s \cos\theta)$

پس اگر سیستم بین دو مقدار فوق باشد حرکت نخواهد کرد:

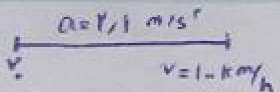
$\frac{m_1}{\sin\theta + \mu_s \cos\theta} < m_2 < \frac{m_1}{\sin\theta - \mu_s \cos\theta}$

(۳/۶) 

(الف) $f_k = Ma$ و $f_k = \mu_k N \;,\; N = mg$ نیروی اصطکاک همواره در خلاف جهت حرکت می‌باشد.

$\Rightarrow \mu_k mg = Ma$ و $m = 4/10\, M \rightarrow \mu_k \times \frac{4}{10} Mg = Ma \rightarrow a = 4/10\, \mu_k g$

$\mu_k = 7/10 \rightarrow a \simeq 2/1\, m/s^2$

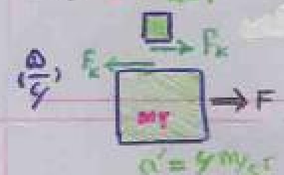
(ب) 

$v = 100 \frac{km}{h} \times \frac{1000\,m}{1\,km} \times \frac{1\,h}{3600\,s} = \frac{1000}{36}\,(m/s)$

$v = at + \cancel{v_0} \rightarrow t = v/a = \frac{1000}{36 \times 2/1} \rightarrow \boxed{t = \quad}$

جهت حرکت $\leftarrow a = 4$

(5/6)



جرم m_2: $F - f_k = m_2 a'$ جرم m_1: $f_k = -m_1 a$

الف) $f_k = -m_1 a = -60 \times 4 = -240\ (N)$

ب) $\sum F = m_2 a' \rightarrow (F - f_k) = m_2 a'$ نیروی خالص: $\sum F \rightarrow F - f_k \Rightarrow$

نیروی خالص $= 100 \times 6$

ج) $F = m_2 a' + f_k \rightarrow F = 600 + 240 = 840$

د) $F = m_2 a \rightarrow a = \frac{840}{100} = 8/4\ m/s^2$

(7/6)

الف) $F = (m+M)a$, $f_s = \mu_s N$, $N = mg \rightarrow a = \mu_s g$, $F = (m+M)\mu_s g$

$F = 10 \times 0/4 \times 6 = 24\ N$

ب) اگر نیروی کمتر از این مقدار وارد شود تا در نسبت جسم را حرکت دهد و هر دو با هم حرکت می‌کنند

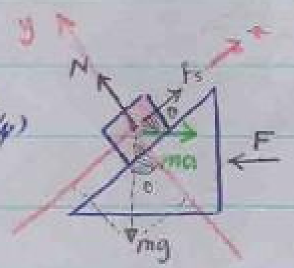
$F = (m+M)a \rightarrow a = 12/2 = 6\ (m/s^2)$

ج)

$F = 2 \times (24) = 48$ $f_k = -ma' = \mu_k mg \rightarrow a' = -\mu_k g = -0/3 \times 10 = -3\ m/s^2$

$F - f_k = Ma \rightarrow 48 - \mu_k mg = Ma \rightarrow a = \frac{48 - 0/3 \times 2 \times 10}{2} = 21/2\ m/s^2$

(9/6)

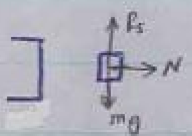


$$\begin{cases} F = (m+M)a \\ \pm f_s + ma\cos\theta = mg\sin\theta \\ ma\sin\theta + mg\cos\theta = N \end{cases} \Rightarrow \pm\mu_s(ma\sin\theta + mg\cos\theta) + ma\cos\theta = mg\sin\theta$$

$$a = \frac{g\sin\theta \mp g\mu\cos\theta}{\cos\theta \pm \mu\sin\theta}$$

$$\rightarrow F = (m+M)g\left(\frac{\sin\theta \mp \cos\theta}{\mu\sin\theta \pm \cos\theta}\right)$$

(11/6)



$N = ma$, $f_s = mg$, $f_s = \mu_s N \Rightarrow f_s = \mu_s ma \rightarrow \mu_s a = g \rightarrow \boxed{a = g/\mu_s}$

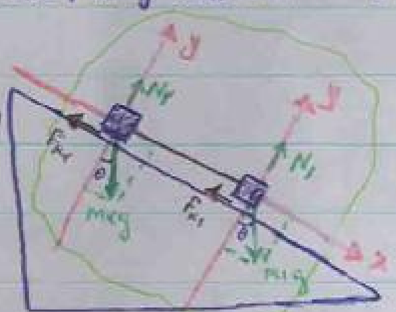
اگر شتاب از این مقدار بیشتر باشد نمی‌افتد ولی اگر کمتر باشد می‌افتد.

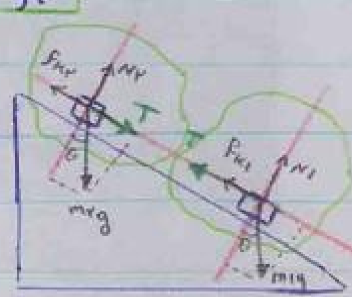
(15/6)

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \\ v = at + v_0 \rightarrow v_0 = -at \end{cases} \rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + (-at)t \rightarrow \boxed{a = -2\Delta x/t^2}$$

$f_k = \mu_k mg$, $f_k = ma \rightarrow -\mu_k mg = ma \Rightarrow \boxed{\mu_s = \frac{2\Delta x}{gt^2}}$

(13/6)





$$\begin{cases} (m_1+m_2)g\sin\theta - f_{k_1} - f_{k_2} = (m_1+m_2)a \\ f_{k_1} = \mu_{k_1}N_1 \ , \ f_{k_2} = \mu_{k_2}N_2 \ , \ N_1 = m_1 g\cos\theta \\ \qquad N_2 = m_2 g\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{[(m_1+m_2)g\sin\theta - (\mu_{k_1}m_1 + \mu_{k_2}m_2)g\cos\theta]}{m_1+m_2}$$

جرم m_2: $T + m_2 g\sin\theta - f_{k_2} = m_2 a$

$\Rightarrow T = m_2 a + f_{k_2} - m_2 g\sin\theta$

با جایگذاری مقادیر فوق T بدست می‌آید.

(19/6) 

$v_0 = 180\,km/h \rightarrow 180\,\frac{km}{h} \times \frac{1h}{3600s} \times \frac{1000m}{1km} = \frac{1800}{36}\,(m/s)$

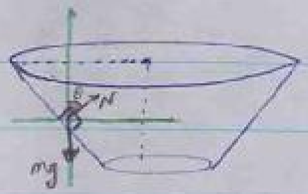
(الف) $a = \frac{v^2}{R} = \frac{(1800/36)^2}{400} \cong 7\,m/s^2$

(ب) نیروی خالص: $F = mv^2/R = ma \rightarrow F = 65 \times 7 = 455\,N$

(ج) $N - mg = mv^2/R \rightarrow N = mv^2/R + mg \rightarrow N = 455 + 650 = 1100\,N$

(21/6) 

$$\left.\begin{aligned} T\sin\theta &= mv^2/R \\ T\cos\theta &= mg \end{aligned}\right\} \rightarrow T = 4mg \rightarrow \cos\theta = 1/4 \rightarrow \boxed{\theta = \dots}$$

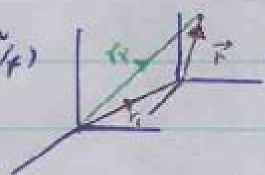
(22/6) 

$$\left.\begin{aligned} N\cos\theta &= mg \\ N\sin\theta &= mv^2/R \end{aligned}\right\} \rightarrow \tan\theta = v^2/Rg \rightarrow v = \sqrt{Rg\tan\theta}$$

$v = \sqrt{20 \times 10 \times \tan 15^\circ} =$

(1/4) $\vec{r} = (6 + 2t^2)\hat{i} + (3 - 2t + 3t^2)\hat{j}$, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = 4t\,\hat{i} + (6t - 2)\hat{j}$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow 4\hat{i} + 6\hat{j}$ $\quad t=2 \Rightarrow \begin{cases} \vec{v} = 8\hat{i} + 10\hat{j} \;, \; \vec{a} = 4\hat{i} + 6\hat{j} \\ |\vec{v}| = \sqrt{8^2 + 10^2} = \sqrt{164} \;, \; |\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} \end{cases}$

(3/4) 

(الف) $\left.\begin{aligned} &\vec{r}_1 + \vec{r} = \vec{r}_2 \rightarrow \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ &\vec{r}_1 = 2t\,\hat{i} - t^2\hat{j} + (3t^2 - 4t)\hat{k} \\ &\vec{r}_2 = (5t^2 - 12t + 4)\hat{i} + \hat{j} - 2t^2\hat{k} \end{aligned}\right\} \rightarrow \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \Rightarrow$

$\vec{r} = (5t^2 - 14t + 4)\hat{i} + (t^3 + t^2)\hat{j} + (t - 3t^2)\hat{k}$

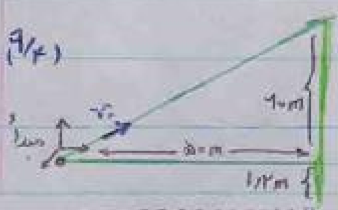
(ب) $\vec{v} = d\vec{r}/dt \rightarrow \vec{v} = (10t - 14)\hat{i} + (3t^2 + 2t)\hat{j} + (1 - 6t)\hat{k}$

(ج) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 10\hat{i} + (6t + 2)\hat{j} - 6\hat{k}$

(5/4) $\vec{r} = b\cos\omega t\,\hat{i} + b\sin\omega t\,\hat{j} + ct^2\hat{k} \rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = -b\omega\sin\omega t\,\hat{i} + b\omega\cos\omega t\,\hat{j} + 2ct\,\hat{k}$

$\vec{a} = d\vec{v}/dt \rightarrow \vec{a} = -b\omega^2\cos\omega t\,\hat{i} - b\omega^2\sin\omega t\,\hat{j} + 2c\hat{k} \rightarrow$

$|\vec{a}| = \sqrt{(-b\omega^2\cos\omega t)^2 + (-b\omega^2\sin\omega t)^2 + (2c)^2} = \sqrt{b^2\omega^4(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t) + 4c^2} = \sqrt{4c^2 + b^2\omega^4}$

(6/4) 

$\begin{cases} y_m = -1/2\,gt^2 + v_{0my}t + y_{0m} \\ y_m = -1/2\,gt^2 + 10 \end{cases}$ (اندیس های m مربوط به حرکت میمون هستند)
(اندیس های t ... ... تیر هستند)

$\{ y_t = -1/2\,gt^2 + v_{0y_t}t + y_{0t} \rightarrow -1/2\,gt^2 + v_{0y_t}t = y_t$ و $\boxed{x = v_{0x}t}$ ★

$y_t = y_m$ در لحظه ی برخورد میمون و تیر $\rightarrow -1/2\,gt^2 + 10 = -1/2\,gt^2 + v_{0y_t}t \rightarrow \boxed{v_{0y_t} = 10/t}$ ★★

از روابط فوق ★ و ★★ دیده می شود که هر چه t افزایش یابد سرعت ها کاهش می یابند. بنابراین برای داشتن حداقل سرعت باید max زمان را بدست آوریم و ماکزیمم زمان وقتی است که میمون به زمین رسیده باشد.

در لحظه ی رسیدن به زمین $\left.\begin{aligned} y_m &= -1/2 \\ y_m &= -1/2\,gt^2 + v_{0my}t + y_{0m} \end{aligned}\right\} \rightarrow -\frac{1}{2} = -1/2 \times 9.8 \times t^2 + 0 + \cancel{y_{0m}}^{10m} \rightarrow t \simeq 1.51$ ثانیه

با جایگذاری t در ★ و ★★ داریم: $\begin{cases} v_{0x} = 33.1 \\ v_{0y} = 6.61 \end{cases} \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \simeq 34\,m/s$

($\frac{11}{4}$)

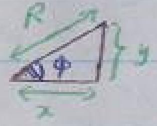
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0 \to -h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\cos\theta_0 t + 0 & * \\ x = v_{0x}t + x_0 \to R = v_0\sin\theta_0 t \to t = R/(v_0\sin\theta_0) & ** \end{cases}$$

با جاگذاری t از ** در * داریم : $h = \frac{1}{2}g\left(\frac{R^2}{v_0^2\sin^2\theta_0}\right) - v_0\cos\theta_0 \times \frac{R}{v_0\sin\theta_0} = 0$

$$R^2\left(\frac{g}{2v_0^2\sin^2\theta_0}\right) - R\left(\frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\right) - h = 0 \to R = \frac{v_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g} - \frac{v_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g}\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2\cos^2\theta_0}} \xrightarrow{2\sin\theta_0\cos\theta_0 = \sin(2\theta_0)}$$

$$R = \frac{v_0^2\sin 2\theta_0}{2g}\left(1 + \sqrt{1 + 2gh/v_0^2\cos\theta_0}\right)$$

($\frac{13}{4}$)



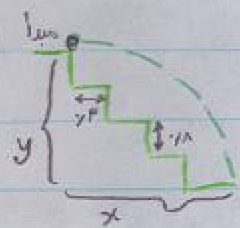
$\sin\phi = y/R$, $\cos\phi = x/R$, $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_y t$, $x = v_x t$

با استفاده از روابط فوق : $R\sin\phi = -\frac{1}{2}g\frac{R^2\cos^2\phi}{v_x^2} + v_y\frac{R\cos\phi}{v_x}$

$$\to R = \frac{2v_x v_y}{g\cos\phi} - \frac{2\sin\phi\, v_x^2}{g\cos^2\phi} \to \begin{cases} v_x = v_0\cos\theta_0 \\ v_y = v_0\sin\theta_0 \end{cases} \to$$

$$R = \frac{2v_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g\cos\phi} - \frac{2\sin\phi\, v_0^2\cos^2\theta_0}{g\cos^2\phi} \to R = \frac{2v_0^2\cos^2\theta_0}{g\cos\phi}[\tan\theta_0 - \tan\phi]$$

($\frac{15}{4}$)



$x = v_x t + x_0$, $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_y t + y_0 \Rightarrow x = 3t$, $y = -\frac{1}{2}gt^2 + 0$

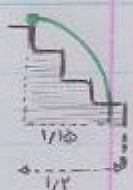
t را از یکی در دیگری جاگذاری می‌کنیم :

$y = -0.54x^2 \leftarrow y = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{9}$

$y = h \to \boxed{h = -0.54x^2}$

اگر تعداد پله‌هایی را که توپ پایین می‌رود را n در نظر بگیریم ← $x = 0.3n$, $y = 0.18n$ ← $0.18n = 0.54(0.3n)^2$

$\to n = 3.7 \to$ n باید عددی صحیح باشد. بنابراین عدد را به عدد صحیح بالاتر گرد کنیم $\to y = 0.18\times4 = 0.72 \to 0.72 = 0.54x^2 \to x \approx 1.2$

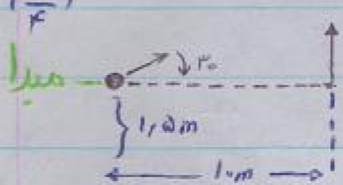


($\frac{17}{4}$) برد پرتابه را برای دو حالتی که از زاویه‌ی ۴۵ درجه اندکی بیشتر (R_1) و از زاویه‌ی ۴۵ درجه اندکی کمتر (R_2) هستیم حساب می‌کنیم و نشان می‌دهیم $R_1 = R_2$

$$R = \frac{v_0^2\sin 2\phi_0}{g} \to \begin{cases} \phi_0 = \pi/4 + \alpha \to R_1 = v_0^2\sin 2(\alpha + \pi/4)/g = \frac{v_0^2\sin(\pi/2 + 2\alpha)}{g} = \frac{v_0^2\cos 2\alpha}{g} \\ \phi_0 = \pi/4 - \alpha \to R_2 = v_0^2\sin 2(\pi/4 - \alpha)/g = \frac{v_0^2\sin(\pi/2 - 2\alpha)}{g} = \frac{v_0^2\cos 2\alpha}{g} \end{cases}$$

$\boxed{R_1 = R_2}$

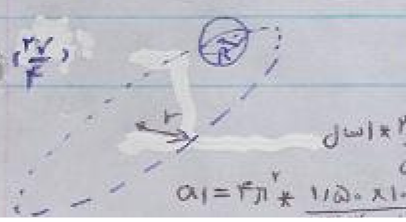
($\frac{19}{4}$)



$y = x\tan\theta - gx^2/2v_0^2\cos^2\theta \to 1.5 = 10\times\tan 30 - 10\times\frac{10^2}{2v_0^2\cos^2 30}$

$1.5 = \frac{1\times1}{\sqrt{3}} - \frac{10\times100\times4}{2\times3\times v_0^2} \to \boxed{v_0^2 = \dots}$

($\frac{27}{4}$)



$R = 6370\ km$, $a = r\omega^2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} \to a = r\times\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$

زمین هر ۱ سال ۱ دور به دور خورشید می‌چرخد :

1 سال $\times \frac{365\ \text{روز}}{1\ \text{سال}} \times \frac{36000\ (s)}{1\ \text{روز}} = 1314000\ (s)$

$a_1 = 4\pi^2 \times \frac{1.50\times10^{11}}{\dots}$, $a_2 = 4\pi^2\times\frac{6370\times1000}{\dots} \approx 19.4\ (m/s^2)$

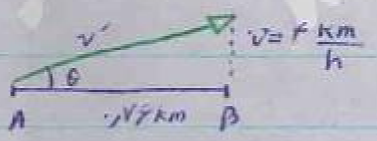
(۵۹/۴)

$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}' \Rightarrow v(\hat{i}) = u(-\hat{j}) + v'\cos\theta\,\hat{i} + v'\sin\theta\,\hat{j}$

از تساوی قرار دادن مولفه ها داریم $\Rightarrow \begin{cases} u = v'\sin\theta \rightarrow \left\{\begin{matrix} v' = 10\ m/s \\ u = 5\ m/s \end{matrix}\right\} \rightarrow \sin\theta = 1/2 \rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ v = v'\cos\theta \quad (*) \end{cases}$

از قرار دادن $\cos\theta$ در $*$ داریم: $v = 10 \times \sqrt{3}/2 = 5\sqrt{3} \Leftarrow$ $x = vt \leftarrow 400\,m = 5\sqrt{3}\,t \leftarrow t = 80/\sqrt{3}$

(۶۱/۴)



$\boxed{\sin\theta = \frac{4\ km/h}{v'}}$

الف) قایق را در راستای AB راندن یعنی $\theta = 0$.

بنابراین $\rightarrow$ پس v' بی نهایت شود که این غیر ممکن است $\Leftarrow 0 = \frac{4\ km/h}{v'}$
حالت ممکن نیست.

ب) این حداقل و حداکثر سرعت قایق یعنی $4\ \frac{km}{h}$ نشود پس این
حالت نیز ممکن می باشد.

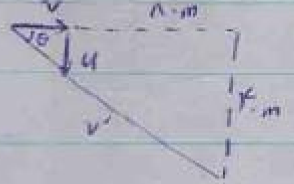
$\theta = 53 \rightarrow \sin 53 = \frac{4}{v'} \rightarrow v' = 5\ \frac{km}{h}$

ج) نیز دلیل قسمت ب این حالت نیز ممکن نمی باشد.

د) $\sin\theta = \frac{4\ km/h}{v'} \rightarrow v' = \frac{4\ km/h}{\sin\theta} \rightarrow v' < 4\ km/h \rightarrow \frac{4\ km/h}{\sin\theta} < 4 \rightarrow \sin\theta > 1$

چون $\sin\theta$ عددی بین ۰ تا ۱ است پس به علت محدود بودن سرعت قایق ممکن نیست به مقصد برسیم.

(۶۳/۴)



سرعت قایق نسبت به ساحل $\Leftarrow v'$ سرعت قایق نسبت به آب $v \Rightarrow 1.6\ m/s$

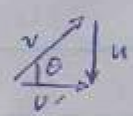
$u \Rightarrow$ سرعت آب به ساحل

الف) $\tan\theta = 40/80 = 1/2 \rightarrow \theta = \tan^{-1} 1/2 \rightarrow \theta = 27^\circ$

$\tan\theta = \frac{u}{v} = 1/2 \rightarrow \frac{u}{1.6} = \frac{1}{2} \rightarrow u = \frac{1.6}{2} = 0.8\ m/s$

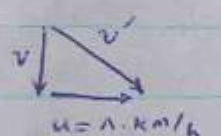
ب) $\cos\theta = \frac{v}{v'} = \frac{1.6}{v'} \rightarrow v' = \frac{1.6}{\cos\theta} \rightarrow v' \simeq 1.8\ m/s$

ج)



$\sin\theta = u/v \rightarrow \frac{0.8}{1.6} = 0.5 \rightarrow \theta = 30^\circ$

(۶۵/۴)

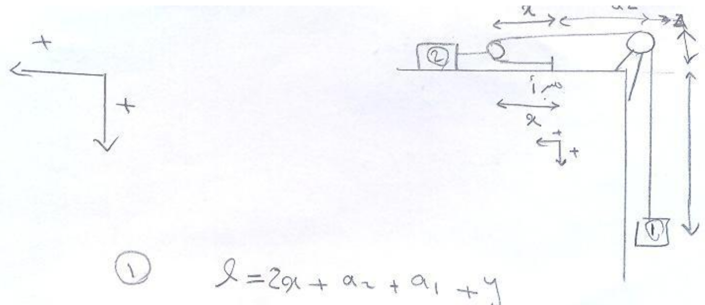


v سرعت قطره های باران نسبت به زمین
v' سرعت قطره ها نسبت به راننده
u سرعت اتومبیل نسبت به زمین

$\tan\theta = \frac{80\ km/h}{v} \rightarrow v = \frac{80\ km/h}{\tan 80} \simeq 14\ \frac{km}{h}$

$\sin\theta = \frac{80\ km/h}{v'} \rightarrow v' = \frac{80\ km/h}{\sin 80}$

$v' = 81.23\ \frac{km}{h}$



الف)

① $\ell = 2x + a_2 + a_1 + y$

$$\ell' = 2x' + a_2 + a_1 + y'$$

$$\ell' = 2x' + a_2 + a_1 + (y + 10)$$

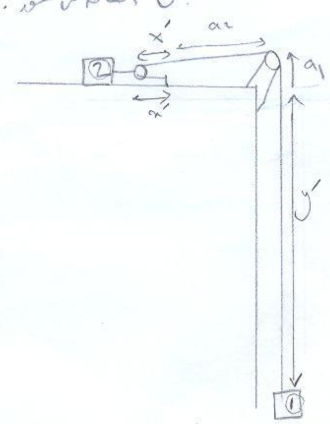
$$\ell = \ell' \Rightarrow 2x + \cancel{a_1} + \cancel{a_2} + \cancel{y} = 2x' + \cancel{a_2} + \cancel{a_1} + \cancel{y} + 10$$

$$2x = 2x' + 10$$

$$2x - 10 = 2x'$$

$$\boxed{x' = x - 5}$$

یعنی 5cm از هر x در شکل بالا کم می‌شود و 10cm به y اضافه می‌شود. این تغییرات در شکل زیر نمایش داده شده است.



ب) برای تعیین رابطه‌ی بین شتابها از معادله‌ی (1) مشتق می‌گیریم

$$0 = 2\underbrace{\ddot{x}}_{a_2} + \underbrace{\ddot{y}}_{a_1}$$

$$0 = 2a_2 + a_1$$

① برای جسم $\rightarrow m_1 g - T = m_1 a_1$

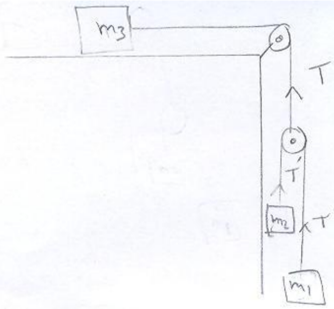
② " " $\rightarrow -2T = m_2 a_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 g - T = m_1 a_1 \\ -2T = m_2(-\frac{1}{2}a_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 g - T = m_1 a_1 \\ 2T = \frac{1}{2} m_2 a_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m_1 g - \cancel{2T} = 2m_1 a_1 \\ \cancel{2T} = \frac{1}{2} m_2 a_1 \end{cases}$$

$$2m_1 g = a_1 \left(2m_1 + \frac{m_2}{2}\right) \Rightarrow a_1 = \frac{2m_1 g}{2m_1 + \frac{m_2}{2}} = \frac{2 \times 5 \times 10}{10 + 10} = 5\,m/s^2$$

(19_5



$T = 2T'$

$T = m_3 a$

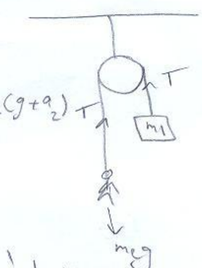
با استفاده از نتیجه مسئله 15 داریم.

$$a = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

$$\begin{cases} m_1 g - T' = m_1 a_1 \\ T' - m_2 g = m_2 a_2 \\ T = m_3 a \Rightarrow 2T' = m_3 a \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 g - T' = m_1 a_1 \\ T' - m_2 g = m_2 a_2 \\ T' = \frac{1}{2} m_2 a \\ a = \frac{a_1 + a_2}{2} \end{cases}$$

(21_5



$$\begin{cases} ① \quad T - m_1 g = m_1 a_1 \\ ② \quad T - m_2 g = m_2 a_2 \Rightarrow ③ \; T = m_2 (g + a_2) \end{cases}$$

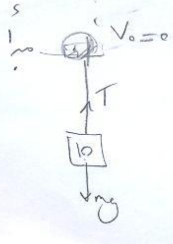
$a_1 = ?$

T را از رابطه ③ در رابطه ① قرار میدهیم

$$m_2 (g + a_2) - m_1 g = m_1 a_1$$

$$a_1 = \frac{m_2 (g + a_2) - m_1 g}{m_1} =$$

(24_5



$$\begin{cases} T = k y^2 \\ k = 2 N/m^2 \end{cases}$$

$mg - T = ma$

$mg - k y^2 = ma$

شتاب را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy} \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v}$$

$$\rightarrow a = v \frac{dv}{dy}$$

$$mg - ky^2 = mv\frac{dv}{dy}$$

$$(mg - ky^2)\,dy = mv\,dv$$

$$\int_0^{10}(mg - ky^2)\,dy = \int_0^{v} mv\,dv$$

$$\Big|_0^{10} mgy - \frac{ky^3}{3} = \Big|_0^{v}\frac{mv^2}{2} \Rightarrow 10mg - \frac{k\times1000}{3} = \frac{mv^2}{2}$$

$$10\times10\times10 - \frac{2\times1000}{3} = \frac{10v^2}{2}$$

$$1000 - \frac{2000}{3} = \frac{10v^2}{2} \Rightarrow v^2 = \frac{200}{3}$$

$$\boxed{v = 10\sqrt{\tfrac{2}{3}}}$$

$$mgy - \frac{ky^3}{3} = \frac{mv^2}{2}$$

$$100y - \frac{2y^3}{3} = 5v^2 \Rightarrow v^2 = 20y - \frac{2y^3}{15}$$

$$v = \sqrt{20y - \frac{2y^3}{15}}$$

$$0 = \sqrt{20y - \frac{2y^3}{15}} \Rightarrow 20y = \frac{2y^3}{15}$$

$$20 = \frac{2y^2}{15} \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{150}}$$

$$F = ma \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$ (25-5

$$\vec{a} = \frac{(ax+b)\,\hat{i}}{0/5} \Rightarrow \frac{(2x+4)\,\hat{i}}{0/5} = \boxed{(4x+8)\,\hat{i}}$$

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a = \frac{dv}{dx}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v} \Rightarrow a = v\frac{dv}{dx}$$

$$(4x+8) = v\frac{dv}{dx} \Rightarrow (4x+8)\,dx = v\,dv$$

$$\int(4x+8)\,dx = \int v\,dv \quad *$$

$$\Big|_0^{6}\frac{4x^2}{2} + 8x = \Big|_{1/5}^{v}\frac{v^2}{2}$$

$$2(6)^2+8(6)=\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}(1,5)^2$$

$$72+48=\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}(1,5)^2 \qquad v=\dots$$

ب) با توجه به رابطهٔ * در قسمت قبل داریم:

$$\int_0^x (4x+8)\,dx=\int_{1,5}^{v}\frac{v^2}{2}$$

$$2x^2+8x=\frac{1}{2}\left[v^2-(1,5)^2\right]$$

$$4x^2+16x=v^2-(1,5)^2$$

$$4x^2+16x+2,25=v^2 \implies v=\sqrt{4x^2+16x+2,25}$$

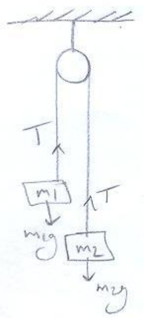
$a_1 = \ddot{y} \Rightarrow \ddot{y} = 5 m/s^2$

$a_2 = -\frac{a}{2} = -2{,}5 m/s$

$\ddot{x} = -2{,}5 m/s$

$-2T = m_2(-2{,}5) \Rightarrow -2T = 20(-2{,}5)$

$$\boxed{T = 25N}$$



(9-5

$$\begin{cases} ① \; m_2 g - \cancel{T} = m_2 a \\ ② \; \cancel{T} - m_1 g = m_1 a \end{cases}$$

$m_2 g - m_1 g = a(m_1 + m_2)$

$$\boxed{a = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}}$$

$② \Rightarrow T - m_1 g = m_1 \left[\frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}\right]$

$T = m_1 g \left[1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right]$

$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$

از مسأله داریم $m_1 + m_2 = M$

$T = \frac{2m_1(M - m_1)}{M} g$

$T = \frac{2m_1 M - 2m_1^2}{M} g$

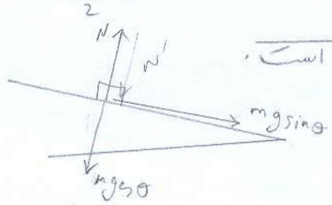
$\frac{dT}{dm_1} = 0 \Rightarrow \frac{2M - 4m_1}{M} g = 0 \Rightarrow 2M - 4m_1 = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{m_1 = \frac{M}{2}}$$

$m_1 + m_2 = M$

$\frac{M}{2} + m_2 = M \Rightarrow \boxed{m_2 = \frac{M}{2}}$

11-5) ترازو واکنش نیروی N را نشان می‌دهد که برابر با N' است.



$N' = mg\cos\theta$

$N' = 650 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 553N$

$F = 8t$ (13 – 5

$F = \frac{m\,dv}{dt}$

$F\,dt = m\,dv \Rightarrow \int F\,dt = \int m\,dv \Rightarrow \int_{t=0}^{3} 8t\,dt = \int_{v_0}^{v} m\,dv$ الف)

$\Big|_0^3 \frac{8t^2}{2} = m(v - \cancel{v_0}) \Rightarrow \left(\frac{8(3)^2}{2} - \cancel{\frac{8(0)^2}{2}}\right) = mv$

$36 = 24v \Rightarrow v = \frac{36}{24} = 1.5\,m/s$

$F = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow F = m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)$ ب)

$F\,dt = m\,d\left(\frac{dx}{dt}\right)$

$\int 8t\,dt = \int m\,d\left(\frac{dx}{dt}\right)$

$\frac{8t^2}{2} = m\frac{dx}{dt}$

$\left(\frac{8t^2}{2}\right)dt = m\,dx \Rightarrow 4t^2\,dt = m\,dx$

$\Rightarrow \int 4t^2\,dt = \int m\,dx$

$\Rightarrow \Big|_0^3 \frac{4t^3}{3} = \Big|_{x_0}^{x} m(x - \cancel{x_0})$

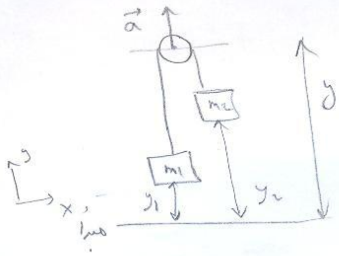
$\frac{4}{3}(3)^3 = 24x \Rightarrow 36 = 24x \Rightarrow \boxed{x = 1.5\,m}$

$\bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1.5}{3}$ ج)

$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \frac{1.5}{3}$ د)

$\bar{F} = m\bar{a} \Rightarrow \bar{F} = 24\left(\frac{1.5}{3}\right)$

(15-5



$$l=(y-y_2)+(y-y_1)+\pi R$$

$$l=2y-y_1-y_2+\pi R$$

$$0=2\ddot{y}-\ddot{y}_1-\ddot{y}_2+0$$

$$0=2a-a_1-a_2 \quad (1)$$

رابطه‌ی شتاب‌ها

$$\begin{cases} T-m_2g=m_2a_2 \\ m_1g-T=m_1a_1 \end{cases} \Longrightarrow \quad m_1g-m_2g=m_2a_2+m_1a_1$$

با استفاده از (1)

$$m_1g-m_2g=m_2a_2+m_1(2a-a_2)$$

$$(m_1-m_2)g=m_2a_2+2m_1a-m_1a_2$$

$$(m_1-m_2)g=a_2(m_2-m_1)+2m_1a$$

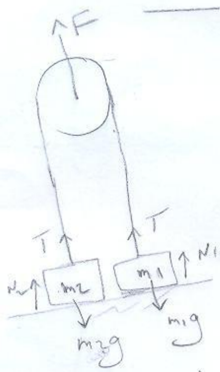
$$\boxed{\frac{(m_1-m_2)g-2m_1a}{m_2-m_1}=a_2}$$

$$a_1=2a-a_2$$

$$\boxed{a_1=2a-\left[\frac{(m_1-m_2)g-2m_1a}{m_2-m_1}\right]}$$

$$T-m_2g=m_2a_2 \Longrightarrow \quad T=m_2(g+a_2)$$

(16-5



$m_1=2$
$m_2=5$

$$m_1g=20N$$
$$m_2g=50N$$

وقتی دو جرم روی زمین هستند. به هر جرم سه نیرو وارد می‌شود N, T, mg

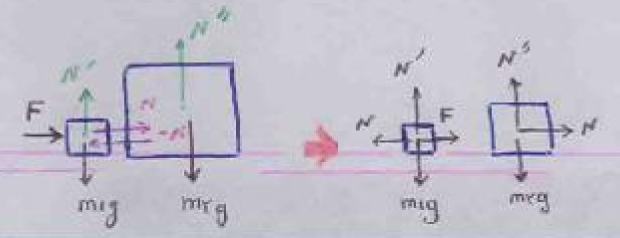
هر کدام از جسم‌ها اگر از زمین جدا شود N مساوی صفر خواهد شد.

$$\begin{cases} m_1g=T+N_1 \\ m_2g=T+N_2 \end{cases}$$ در حالت سکون این روابط برقرار است.

اگر m_1 از زمین جدا شود $N_1=0$ می‌شود

— — m_2 — $N_2=0$ می‌شود.

(۱/۵)



$$\begin{cases} F - N = m_1 a \\ N = m_2 a \end{cases} \to F - m_2 a = m_1 a \to \boxed{a = \frac{F}{m_1 + m_2}}$$

ب- می‌توان مقدار محوری را جایگذاری کرد.

$$N = m_2 a = m_2 \times \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2}$$

(۳/۵)

دو نیروی F و F- عمل و عکس‌العمل یکدیگرند.

الف) شتاب صفر $(a_y = 0)$ ← سرعت ثابت

$$\sum F_y = m a_y = 0 \to F - mg = 0 \to F = mg$$

آن چیزی که نیروسنج نمایش می‌دهد نیروی F است که در این حالت نیروی F برابر وزن جسم است (قسمت ب و قسمت الف شتاب صفر است ← $F = mg$)

(ج) $a = 2\,m/s^2 \Rightarrow F - mg = ma \to F = m(g + a)$

(د)

$t = 9s \quad v = 0\,m/s$

$t = 5s \quad v = 10\,m/s$ $\Big\}\ \Delta t = 4s$

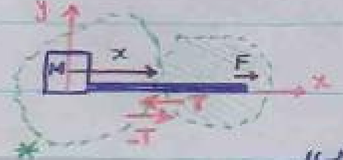
$t = 0 \quad v = 10\,m/s$

$$v = at + v_0 \to a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - 10}{4} = \frac{-10}{4} = -2{,}5$$

در بازه‌ی ۰ تا ۵ ثانیه چون شتاب صفر است نیروسنج همان وزن جسم را نمایش می‌دهد و در بازه‌ی ۵ تا ۹ ثانیه داریم:

$$\sum F = ma \to F - mg = ma \to F = m(10 - 2{,}5)$$

(۵/۵)



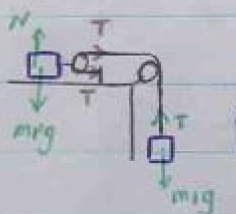
الف) $\sum F_x = m a_x \to 100 = (4 + 6) a_x \to a_x = 10\,m/s^2$

ب) در قسمت الف قانون نیوتن را برای کل جسم و طناب نوشتیم. در این قسمت قانون نیوتن را برای جسمی که با * نشان داده شده است می‌نویسیم:

$$\left.\begin{cases} \sum F_x = m a_x \to T = (m_1 + M) a_x \\ m_1 + m_2 = m = 4\,kg \\ \text{چون طناب همگن است:}\ \dfrac{(m_1 + m_2)}{L} = \dfrac{m_1}{x} \end{cases}\right\} \to T = \left(\frac{mx}{L} + M\right) a_x = \left(\frac{4}{10}x + 6\right) \times 10 = 4x + 60$$

(m,L)

(۷/۵)



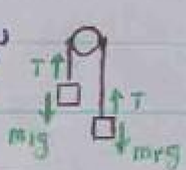
الف) چون نخ از روی قرقره‌ی بالایی دو برابر می‌شود است پس اگر جسم ۵kg، ۱۰cm پایین بیاید جسم ۲۰kg نصف این مقدار بالا می‌آید. پس اگر شتاب جسم ۵kg، a باشد شتاب جسم ۲۰kg، a' می‌شود:

$\boxed{a = 2a'}$

$$\sum F = ma \to \left[m_1 g - T = m_1 a \ ,\ 2T = m_2 a' \ ,\ a = 2a' \right] \Rightarrow$$

$$a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2/4} = \frac{50}{5 + 20/4} = 5 \to T = 25\,(N)$$

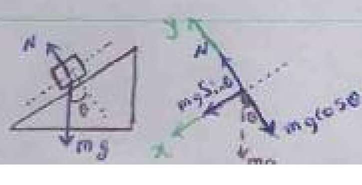
(۹/۵)



$$\left.\begin{array}{l} m_1 + m_2 = M \ ,\ m_1 g - m_2 g = Ma \to a = \dfrac{(m_1 - m_2)}{M} g \\ m_1 g - T = m_1 a \to T = m_1 g - m_1 a = m_1 (g - a) \end{array}\right\} \to T = m_1 g \left(1 - \frac{(m_1 - m_2)}{M}\right)$$

$$\frac{dT}{dm_1} = 0 \to m_1 = M/2 \ ,\ m_2 = M/2$$

(۱۱/۵)



$$\Rightarrow mg\sin\theta = ma \to a = g\sin\theta$$

$$N = mg\cos\theta$$

(مقداری که نیروسنج نمایش می‌دهد N می‌باشد)

(۱۳/۵) $F = 8t$, $F = ma = m\,dv/dt \Rightarrow 8t = m\,dv/dt \Rightarrow$ با انتگرال گیری از طرفین $\Rightarrow mv\Big|_0^v = \frac{8t^2}{2}\Big|_0^t \rightarrow mv = 4t^2$

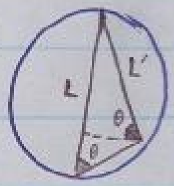
(الف) $t = 3s \rightarrow v = 4t^2/m = 3/2$

(ب) $v = \frac{dx}{dt} = \frac{4t^2}{m} \rightarrow$ با انتگرال گیری $\rightarrow x = \frac{4t^3}{3m} + \cancel{x_0}$ در $t=3$ ، $\rightarrow x = 3/2$

(ج) $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{3/2}{3} = 1/2$

(د) $F = ma \rightarrow \bar{F} = m\bar{a}$, $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3/2}{3} = 1/2 \Rightarrow \bar{F} = 24 \times 1/2 = 12$

(۱۷/۵)

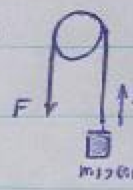


$L = \frac{1}{2}gt^2$: زمان لازم برای طی کردن طول L $\Leftarrow$ مهره‌ای به مسیر L را طی می‌کند : پس $\boxed{t^2 = \frac{2L}{g}}$ *

* باید زمان لازم برای طی کردن مسیر L' را به دست آورده و با مقایسه کنیم. $\rightarrow \begin{cases} L' = \frac{1}{2} g \sin\theta\, t'^2 \\ \sin\theta = \frac{L'}{L} \end{cases} \rightarrow \boxed{t'^2 = \frac{2L}{g}}$ **

از مقایسه * و ** به این نتیجه می‌رسیم که این دو مقدار مساوی هستند و نتیجه ربطی به طول مسیر ندارد.

(۲۱/۵)



F نیرویی است که شخص با دست خود به طناب وارد می‌کند تا آن را به سمت پایین بکشد و خود را به سمت بالا بکشد :

برای شخص : $F - m_2 g = m_2 a$ برای جرم m_1 : $F - m_1 g = m_1 a_1$

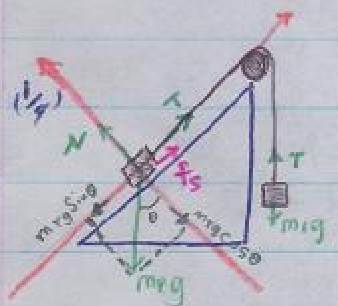
$\Rightarrow m_2(g+a) - m_1 g = m_1 a_1 \rightarrow a = \frac{m_2(g+a) - m_1 g}{m_1}$

(۲۵/۵) $F = (ax+b)\hat{i}$, $F = m\,dv/dt = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = mv\,dv/dx \Rightarrow mv\frac{dv}{dx} = ax+b \Rightarrow$ با انتگرال گیری $\Rightarrow$

$m(\frac{1}{2}v^2)\Big|_{v_0}^{v} = ax^2 + bx\Big|_0^x \rightarrow \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = 2x^2 + 4x$ $v_0 = 1.5$, $x = 6m$, $v = ?$

$\rightarrow \frac{1}{2} \times 0.5 \times (v^2 - 1.5^2) = 2(6)^2 + 4(6) \rightarrow \boxed{v = 2}$

(۱/۴)



● اگر جرم m_2 به اندازه‌ای بزرگ باشد که باعث شود به سمت پایین سطح شیب‌دار سر بخورد :

$\begin{cases} m_2 \text{ جرم}: T + f_s = m_2 g \sin\theta \ , N = m_2 g \cos\theta \ ; f_s = \mu_s N \\ m_1 \text{ جرم}: T = m_1 g \rightarrow m_1 g + \mu_s m_2 g \cos\theta = m_2 g \sin\theta \end{cases}$

$\rightarrow m_1 g = m_2 g(\sin\theta - \mu_s \cos\theta) \rightarrow$

$m_2 = m_1/(\sin\theta - \mu_s\cos\theta)$

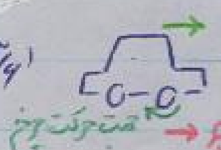
● اگر جرم m_2 به اندازه‌ای کوچک باشد که سیستم به سمت بالا حرکت کند داریم :

جرم m_2 : $\begin{cases} T = m_2 g \sin\theta + f_s \\ f_s = \mu_s N , N = \mu_s m_2 g \cos\theta \end{cases}$ جرم m_1 : $T = m_1 g \rightarrow m_2 = m_1/(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)$

پس اگر m_2 بین دو مقدار فوق باشد حرکت نخواهد کرد:

$\frac{m_1}{\sin\theta + \mu_s\cos\theta} < m_2 < \frac{m_1}{\sin\theta - \mu_s\cos\theta}$

(۳/۴)

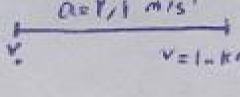


(الف) $f_k = Ma$, $f_k = \mu_k N$, $N = mg$ نیروی اصطکاک همواره در خلاف جهت حرکت می‌باشد.

$\Rightarrow \mu_k mg = Ma$, $m = 4/10\, M \rightarrow \mu_k \times \frac{4}{10} Mg = Ma \rightarrow a = 4/10\, \mu_k g$

$\mu_k = 7/10 \rightarrow a \simeq 2/1\ m/s^2$

(ب)

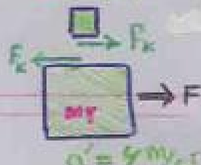


$v = 100\frac{km}{h} \times \frac{1000m}{1km} \times \frac{1h}{3600s} = \frac{1000}{36}(m/s)$

$v = at + \cancel{v_0} \rightarrow t = v/a = \frac{1000}{36 \times 2/1} \rightarrow \boxed{t =\ }$

مجبور حرکت ← $a=4$

(5/6)



جرم m_2: $F - f_k = m_2 a'$ جرم m_1: $f_k = -m_1 a$

الف) $f_k = -m_1 a = -60\times 4 = -240\,(N)$

ب) $\sum F = m_2 a' \to (F - f_k) = m_2 a'$ نیروی خالص: $\sum F \to F - f_k \Rightarrow$

نیروی خالص $= 100\times 6$

ج) $F = m_2 a' + f_k \to F = 600 + 240 = 840$

د) $F = m_2 a \to a = \frac{840}{100} = 8.4\, m/s^2$

(7/6)

الف) $F = (m+M)a$, $f_s = \mu_s N$, $N = mg \to a = \mu_s g$, $F = (m+M)\mu_s g$

$F = 10\times 0.4\times 6 = 24\, N$

ب) اگر نیروی کوچکتر از این مقدار وارد شود تا در نسبت جسم را حرکت دهد و هر دو با هم حرکت می‌کنند.

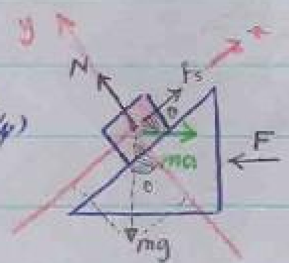
$F = (m+M)a \to a = 12/6 = 2\,(m/s^2)$

ج)

$F = 2\times(24) = 48$ $f_k = -ma' = \mu_k mg \to a' = -\mu_k g = -0.3\times 10 = -3\, m/s^2$

$F - f_k = Ma \to 48 - \mu_k mg = Ma \to a = \frac{48 - 0.3\times 2\times 10}{4} = 21/2\, m/s^2$

(9/6)

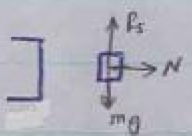


$$\begin{cases} F = (m+M)a \\ \pm f_s + ma\cos\theta = mg\sin\theta \\ ma\sin\theta + mg\cos\theta = N \end{cases} \Rightarrow \pm\mu_s(ma\sin\theta + mg\cos\theta) + ma\cos\theta = mg\sin\theta$$

$$a = \frac{g\sin\theta \mp g\mu\cos\theta}{\cos\theta \pm \mu\sin\theta}$$

$$\to F = (m+M)g\left(\frac{\sin\theta \mp \cos\theta}{\mu\sin\theta \pm \cos\theta}\right)$$

(11/6)



$N = ma$, $f_s = mg$, $f_s = \mu_s N \Rightarrow f_s = \mu_s ma \to \mu_s a = g \to \boxed{a = g/\mu_s}$

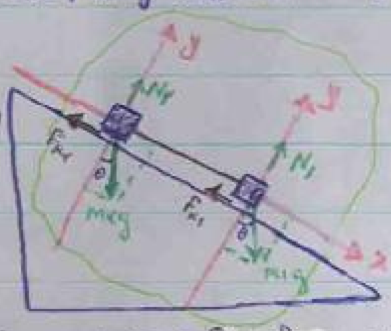
اگر شتاب از این مقدار بیشتر باشد نمی‌افتد ولی اگر کمتر باشد می‌افتد.

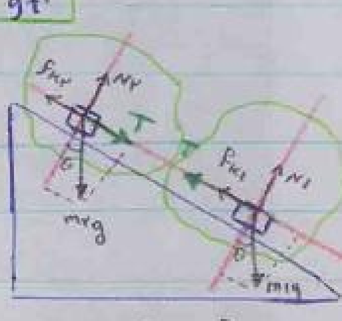
(15/6)

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \\ v = at + v_0 \to v_0 = -at \end{cases} \to \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + (-at)t \to \boxed{a = -2\Delta x/t^2}$$

$f_k = \mu_k mg$, $f_k = ma \to -\mu_k mg = ma \Rightarrow \boxed{\mu_s = \frac{2\Delta x}{g t^2}}$

(13/6)





$$\begin{cases} (m_1+m_2)g\sin\theta - f_{k_1} - f_{k_2} = (m_1+m_2)a \\ f_{k_1} = \mu_{k_1}N_1 \ , \ f_{k_2} = \mu_{k_2}N_2 \ , \ N_1 = m_1 g\cos\theta \\ N_2 = m_2 g\cos\theta \end{cases}$$

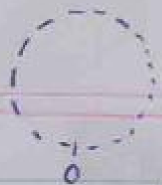
$$\Rightarrow a = \frac{\left[(m_1+m_2)g\sin\theta - (\mu_{k_1}m_1 + \mu_{k_2}m_2)g\cos\theta\right]}{m_1+m_2}$$

جرم m_2: $T + m_2 g\sin\theta - f_{k_2} = m_2 a$

$\Rightarrow T = m_2 a + f_{k_2} - m_2 g\sin\theta$

با جایگذاری مقادیر فوق بدست می‌آید.

(19/6)



$v_0 = 180\ km/h \rightarrow 180\ \frac{km}{h} \times \frac{1h}{3600s} \times \frac{1000m}{1km} = \frac{1800}{36}\ (m/s)$

(الف) $a = \frac{v^2}{R} = \frac{(1800/36)^2}{400} \cong 7\ m/s^2$

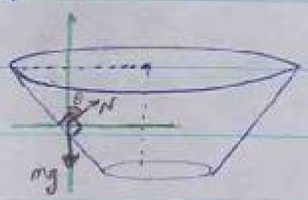
ب) نیروی مرکزی: $F = mv^2/R = ma \rightarrow F = 65 \times 7 = 455\ N$

ج) $N - mg = mv^2/R \rightarrow N = mv^2/R + mg \rightarrow N = 455 + 650 = 1100\ N$

(21/6)

$$\left.\begin{array}{l} T\sin\theta = mv^2/R \\ T\cos\theta = mg \end{array}\right\} \rightarrow T = 4mg \rightarrow \cos\theta = 1/4 \rightarrow \boxed{\theta = \cdots}$$

(22/6)



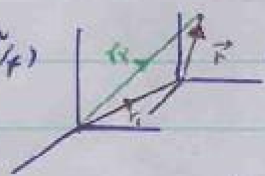
$$\left.\begin{array}{l} N\cos\theta = mg \\ N\sin\theta = mv^2/R \end{array}\right\} \rightarrow \tan\theta = v^2/Rg \rightarrow v = \sqrt{Rg\tan\theta}$$

$v = \sqrt{20 \times 10 \times \tan 15^\circ} =$

(1/4) $\vec r = (6+2t^2)\hat i + (3-2t+3t^2)\hat j \quad , \vec v = \frac{d\vec r}{dt} \Rightarrow \vec v = 4t\ \hat i + (6t-2)\hat j$

$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} \Rightarrow 4\hat i + 6\hat j \qquad t=2 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec v = 8\hat i + 10\hat j \quad , \vec a = 4\hat i + 6\hat j \\ |\vec v| = \sqrt{8^2+10^2} = \sqrt{164} \quad , |\vec a| = \sqrt{4^2+6^2} = \sqrt{52} \end{array}\right.$

(3/4)



$$\left.\begin{array}{l} \text{(الف)}\ \vec r_1 + \vec r = \vec r_2 \rightarrow \vec r = \vec r_2 - \vec r_1 \\ \vec r_1 = 2t\hat i - t^2\hat j + (3t^2 - 4t)\hat k \\ \vec r_2 = (5t^2 - 12t + 4)\hat i + \hat j - 2t^2\hat k \end{array}\right\} \rightarrow \vec r = \vec r_2 - \vec r_1 \Rightarrow$$

$\vec r = (5t^2 - 14t + 4)\hat i + (t^3 + t^2)\hat j + (t - 3t^2)\hat k$

ب) $\vec v = d\vec r/dt \rightarrow \vec v = (10t - 14)\hat i + (3t^2 + 2t)\hat j + (1 - 6t)\hat k$

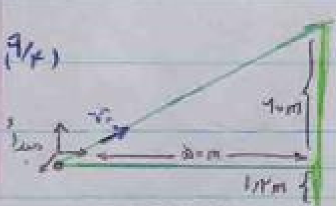
(ج) $\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = 10\hat i + (6t+2)\hat j - 6\hat k$

(5/4) $\vec r = b\cos\omega t\ \hat i + b\sin\omega t\ \hat j + ct^2\hat k \rightarrow \vec v = \frac{d\vec r}{dt} \Rightarrow \vec v = -b\omega\sin\omega t\ \hat i + b\omega\cos\omega t\ \hat j + 2ct\ \hat k$

$\vec a = d\vec v/dt \rightarrow \vec a = -b\omega^2\cos\omega t\ \hat i - b\omega^2\sin\omega t\ \hat j + 2c\hat k \rightarrow$

$|\vec a| = \sqrt{(-b\omega^2\cos\omega t)^2 + (-b\omega^2\sin\omega t)^2 + (2c)^2} = \sqrt{b^2\omega^4(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t) + 4c^2} = \sqrt{4c^2 + b^2\omega^4}$

(6/4)



$\left\{\begin{array}{l} y_m = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0my}t + y_{0m} \\ y_m = -\frac{1}{2}gt^2 + 10 \end{array}\right.$ (اندیس m مربوط به حرکت میمون هستند) (اندیس t ″ ″ تیر هستند)

$\left\{ y_t = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0ty}t + y_{0t} \rightarrow -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0ty}t = y_t \right.$ و $\boxed{x = v_{0x}t}$ *

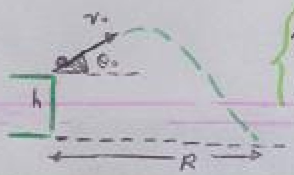
$y_t = y_m$ در لحظه‌ی برخورد میمون و تیر $\rightarrow -\frac{1}{2}gt^2 + 10 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0ty}t \rightarrow \boxed{v_{0ty} = 10/t}$ **

از روابط فوق * و ** دیده می‌شود که هر چه t افزایش یابد سرعت‌ها کاهش می‌یابند. بنابراین برای داشتن حداقل سرعت باید max زمان را به دست آوریم و ماکزیمم زمان وقتی است که میمون به زمین رسیده باشد.

در لحظه‌ی رسیدن به زمین $\left.\begin{array}{l} y_m = -1/2 \\ y_m = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0my}t + y_{0m} \end{array}\right\} \rightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2 + 0 + \cancel{y_{0m}}^{\,10m} \rightarrow t \cong 1.51\ (s)$

با جایگذاری t در * و ** داریم: $\left\{\begin{array}{l} v_{0x} = 33.1 \\ v_{0y} = 6.61 \end{array}\right\} \rightarrow |\vec v| = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \cong 34\ m/s$

$\left(\frac{11}{4}\right)$



$$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}gt^2+v_{0y}t+y_0 \rightarrow -h=-\frac{1}{2}gt^2+v_0\cos\theta_0 t+0 & * \\ x=v_{0x}t+x_0 \rightarrow R=v_0\sin\theta_0 t \rightarrow t=R/(v_0\sin\theta_0) & ** \end{cases}$$

با جایگذاری t از ** در * داریم: $h=\frac{1}{2}g\left(\frac{R^2}{v_0^2\sin^2\theta_0}\right)-v_0\cos\theta_0\times\frac{R}{v_0\sin\theta_0}=0$

$$R^2\left(\frac{g}{2v_0^2\sin^2\theta_0}\right)-R\left(\frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\right)-h=0 \rightarrow R=\frac{v_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g}-\frac{v_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g}\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^2\cos^2\theta_0}} \xrightarrow[2\sin\theta_0\cos\theta_0=\sin 2\theta_0]{}$$

$$R=\frac{v_0^2\sin 2\theta_0}{2g}\left(1+\sqrt{1+2gh/v_0^2\cos^2\theta_0}\right)$$

$\left(\frac{13}{4}\right)$

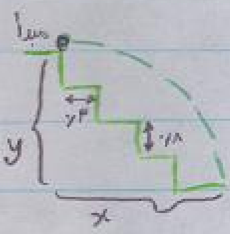
$\sin\phi=y/R$, $\cos\phi=x/R$, $y=-\frac{1}{2}gt^2+v_{0y}t$, $x=v_{0x}t$

با استفاده از روابط فوق: $R\sin\phi=-\frac{1}{2}g\frac{R^2\cos^2\phi}{v_{0x}^2}+v_{0y}\frac{R\cos\phi}{v_{0x}}$

$$\rightarrow R=\frac{2v_{0x}v_{0y}}{g\cos\phi}-\frac{2\sin\phi\, v_{0x}^2}{g\cos^2\phi} \rightarrow \begin{cases} v_{0x}=v_0\cos\theta_0 \\ v_{0y}=v_0\sin\theta_0 \end{cases} \rightarrow$$

$$R=\frac{2v_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g\cos\phi}-\frac{2\sin\phi\, v_0^2\cos^2\theta_0}{g\cos^2\phi} \rightarrow R=\frac{2v_0^2\cos^2\theta_0}{g\cos\phi}\left[\tan\theta_0-\tan\phi\right]$$

$\left(\frac{15}{4}\right)$



$x=v_xt+x_0$, $y=-\frac{1}{2}gt^2+v_{0y}t+y_0 \Rightarrow x=3t$, $y=-\frac{1}{2}gt^2+0$

t را از یکی در دیگری جایگذاری می‌کنیم:

$y=-0.54x^2 \leftarrow y=-\frac{1}{2}g\frac{x^2}{9}$

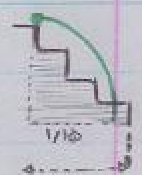
$y=h \rightarrow \boxed{h=0.54x^2}$

اگر تعداد پله‌هایی را که توپ پایین می‌رود را n در نظر بگیریم $\longrightarrow$

$0.18n=0.54(0.3n)^2 \leftarrow y=0.18n$, $x=0.3n$

$\rightarrow n=3.7 \rightarrow$ عدد صحیح را به عدد صحیح n باید عددی صحیح باشد لذا این عدد را بالاتر گرد کنیم $\rightarrow y=0.18\times 4=0.72 \rightarrow$

$0.72=0.54x^2 \rightarrow x\approx 1.2$

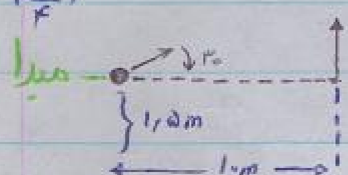


$\left(\frac{17}{4}\right)$ برد پرتابه را برای دو حالتی که از زاویه ۴۵ درجه اندکی بیشتر (R_1) و از زاویه ۴۵ درجه اندکی کمتر (R_2) هستند حساب می‌کنیم و نشان می‌دهیم $R_1=R_2$

$$R=\frac{v_0^2\sin 2\phi_0}{g} \rightarrow \begin{cases} \phi_0=\pi/4+\alpha \rightarrow R_1=v_0^2\sin 2(\alpha+\pi/4)/g=\frac{v_0^2\sin(\pi/2+2\alpha)}{g}=\frac{v_0^2\cos 2\alpha}{g} \\ \phi_0=\pi/4-\alpha \rightarrow R_2=v_0^2\sin 2(\pi/4-\alpha)/g=\frac{v_0^2\sin(\pi/2-2\alpha)}{g}=\frac{v_0^2\cos 2\alpha}{g} \end{cases}$$

$\boxed{R_1=R_2}$

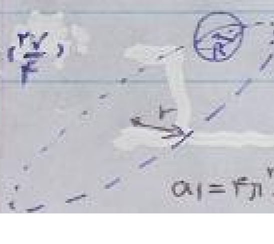
$\left(\frac{19}{4}\right)$



$y=x\tan\theta-gx^2/2v_0^2\cos^2\theta \rightarrow 1.5=10\times\tan 30-10\times\frac{10^2}{2v_0^2\cos^2 30}$

$1.5=\frac{10\times 1}{\sqrt{3}}-\frac{10\times 100\times 4}{2\times 3\times v_0^2} \rightarrow \boxed{v_0^2=\dots}$

$\left(\frac{27}{4}\right)$



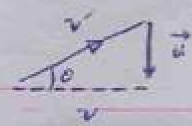
$R=6370\ km$, $a=r\omega^2$, $\omega=\frac{2\pi}{T} \rightarrow a=r\times\frac{4\pi^2}{T^2}=\frac{4\pi^2 r}{T^2}$

زمین هر سال ۱ دور به دور خورشید می‌چرخد:

۱ سال × $\frac{365\ \text{روز}}{\text{سال}}\times\frac{36000\ (s)}{\text{روز}}=31400\dots (s)$

$a_1=4\pi^2\times\frac{1150\times 10^{11}}{\dots}$, $a_2=4\pi^2\times\frac{6370\times 1000}{\dots}\simeq 19.4\ (m/s^2)$

(۵۹/۴)

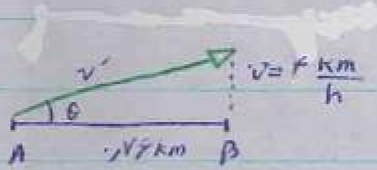


$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}' \Rightarrow v(\hat{i}) = u(-\hat{j}) + v'\cos\theta\,\hat{i} + v'\sin\theta\,\hat{j}$

از تساوی قرار دادن مولفه‌ها داریم $\Rightarrow \begin{cases} u = v'\sin\theta \\ v = v'\cos\theta \ (*) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v' = 10\ m/s \\ u = 5\ m/s \end{cases} \rightarrow \sin\theta = 1/2 \rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

از قرار دادن $\cos\theta$ در $*$ داریم: $v = 10 \times \sqrt{3}/2 = 5\sqrt{3}$ $\Leftarrow$ $x = vt \rightarrow 400\,m = 5\sqrt{3}\,t \rightarrow t = 80/\sqrt{3}$

(۶۱/۴)



$\boxed{\sin\theta = \frac{4\ km/h}{v'}}$

الف) قایق باید راستای AB را طی کند $\theta = 0$.

پس داریم $\rightarrow$ بردار v' بی‌نهایت خواهد شد که غیر ممکن است $\Leftarrow$ $0 = \frac{4\ km/h}{v'}$

حالت ممکن نیست.

ب) این حداقل از هرگز سرعت قایق $4\ \frac{km}{h}$ بیشتر باشد این حالت نیز ممکن می‌باشد.

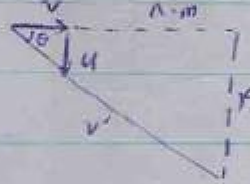
$\theta = 53 \rightarrow \sin 53 = \frac{4}{v'} \rightarrow v' = 5\ \frac{km}{h}$

ج) نیز در این سمت به این حالت نیز ممکن نمی‌باشد.

د) $\sin\theta = \frac{4\ km/h}{v'} \rightarrow v' = \frac{4\ km/h}{\sin\theta} \rightarrow v' < 4\ km/h \rightarrow \frac{4\ km/h}{\sin\theta} < 4 \rightarrow \sin\theta > 1$

چون $\sin\theta$ عددی ۰ تا ۱ است پس به علت محدود بودن سرعت قایق ممکن نیست به مقصد برسیم.

(۶۳/۴)



سرعت قایق نسبت به ساحل $\Rightarrow v$ سرعت قایق نسبت به آب

$v \Rightarrow 1.6\ m/s$

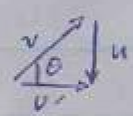
$u \Rightarrow$ سرعت آب به ساحل

الف) $\tan\theta = 40/80 = 1/2 \rightarrow \theta = \tan^{-1} 1/2 \rightarrow \theta = 27^\circ$

$\tan\theta = \frac{u}{v} = 1/2 \rightarrow \frac{u}{1.6} = \frac{1}{2} \rightarrow u = \frac{1.6}{2} = 0.8\ m/s$

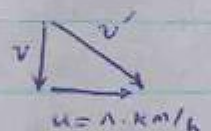
ب) $\cos\theta = \frac{v}{v'} = \frac{1.6}{v'} \rightarrow v' = \frac{1.6}{\cos\theta} \rightarrow v' \simeq 1.8\ m/s$

ج)



$\sin\theta = u/v \rightarrow \frac{0.8}{1.6} = 0.5 \rightarrow \theta = 30^\circ$

(۶۵/۴)



v: سرعت قطره حالت بدون باد

v': سرعت قطره‌ها نسبت به راننده

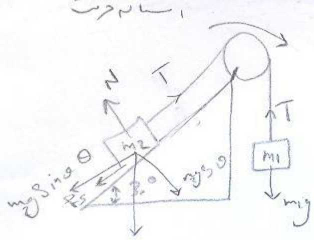
u: سرعت اتومبیل نسبت به زمین

$\tan\theta = \frac{80\ km/h}{v} \rightarrow v = \frac{80\ km/h}{\tan 80} = 14\ \frac{km}{h}$

$\sin\theta = \frac{80\ km/h}{v'} \rightarrow v' = \frac{80\ km/h}{\sin 80}$

$v' = 81.23\ \frac{km}{h}$

آستانه حرکت



$m_2 = 4\,kg$

$\mu_s = 0/4$

$m_1 = ?$

(1-6

الف) اگر $\boxed{m_1 g > m_2 g\sin\theta}$

برای تعادل

$$\begin{cases} m_1 g = T & (1) \\ N = m_2 g\cos\theta & (2) \\ T = m_2 g\sin\theta + f_s \end{cases}$$

$$(1)\ T = m_2 g\sin\theta + \mu_s N\ (2)$$

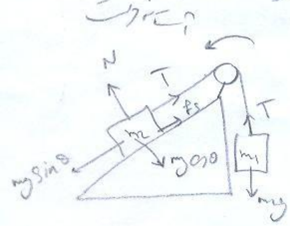
$$m_1 g = m_2 g\sin\theta + \mu_s m_2 g\cos\theta$$

$$m_1(10) = \underbrace{4\times10\times\frac{1}{2}}_{20} + \underbrace{0/4\times4\times10\times\frac{\sqrt{3}}{2}}_{13/6}$$

$$m_1(10) = 33/6 \Rightarrow m_1 = 3.36\,kg$$

اگر $\boxed{m_2 g\sin\theta > m_1 g}$ نیروی اصطکاک سمت بالای سطح شیب دار است.

آستانه حرکت



$$\begin{cases} m_1 g = T \\ m_2 g\sin\theta = T + f_s \\ N = m_2 g\cos\theta \end{cases}$$

$$m_2 g\sin\theta = m_1 g + \mu_s N$$

$$4\times10\times\frac{1}{2} = m_1\times10 + 0/4\times4\times10\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$20 = 10m_1 + 13/6$$

$$6/4 = 10m_1 \Rightarrow m_1 = 0/64\,kg$$

ب) $m_1 = 1\,kg$ $\quad f_s = ?$

اگر $m_1 = 1kg$ باشد آستانه حرکت مشابه حالت دوم می‌شود.

$$\begin{cases} m_1 g = T \\ m_2 g\sin\theta = T + f_s \Rightarrow 20 = 10 + f_s \Rightarrow \boxed{f_s = 10N} \\ N = m_2 g\cos\theta \end{cases}$$

(3-6

جرم $= 0.4M$

$\mu_s = 0.7$

الف)

$f_s = \mu_s N$

$= 0.7 \times mg \Rightarrow f_s = 0.7 \times 0.4M \times 10 = 2.8M$

$F = Ma \Rightarrow 2.8M = Ma \Rightarrow a = 2.8\ m/s^2$

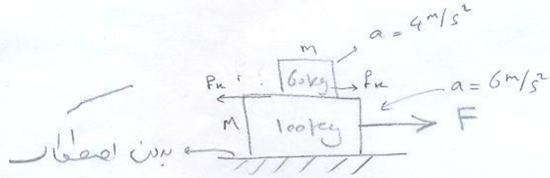
ب)

$V_0 = 0 \quad , \quad V = 100 \times \frac{10}{36} \simeq 28\ m/s$

$V = at + V_0$

$28 = 2.8 \times T + 0 \qquad \boxed{T = 10s}$

(5-6



الف) چون F هم مجهول است از این رابطه نمی‌توان f_k را حساب کرد.

قانون دوم برای جسم 100kg ① $F - f_k = Ma$

قانون دوم برای جسم 60kg ② $f_k = ma \Rightarrow f_k = 60 \times 4 = 240N$

ب) نیروی خالص یعنی برآیند نیروها یعنی $F - f_k$

$\underbrace{F - f_k}_{?} = Ma$

$= 100 \times 6 = \boxed{600N}$

ج) $F = ?$

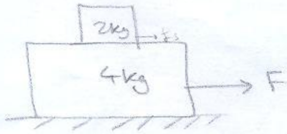
$F - f_k = Ma$

$F - 240 = 100 \times 6 \Rightarrow F - 240 = 600 \Rightarrow \boxed{F = 840}$

د)

$F = Ma \Rightarrow 840 = 100 \times a \Rightarrow a = 8.4\ m/s^2$

(7-6



$F = Ma$

$F = (m_1 + m_2) a$

$F = 6a \qquad a = ?$

برای محاسبهٔ a ، قانون دوم برای جرم بالایی را می‌نویسیم

$f_s = \mu_s N \Rightarrow f_s = 0.4 \times 20 = 8N$

$f_s = ma \Rightarrow 8 = 2 \times a \Rightarrow a = 4$

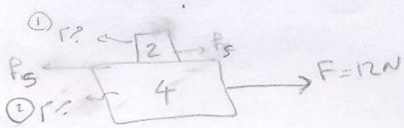
چون دو جسم با هم حرکت می‌کنند پس شتاب یکسان دارند. در نتیجه:

$$F = 6a \Rightarrow F = 6 \times 4 = 24N$$

ب)

$a_1, a_2 = ?$ $\quad F = 12N$

$f_k = ?$



چون نیرو از 24N کمتر است پس دو جسم نسبت به هم نمی‌لغزند یعنی با یک شتاب یکسان حرکت می‌کنند. در این حالت نیز نیروی اصطکاک ایستایی داریم.

$$\begin{cases} F - f_s = M_2 a \\ f_s = M_1 a \end{cases}$$

$$F = M_2 a + M_1 a$$

$$12 = 6a \qquad \boxed{a = 2\,m/s^2}$$

$$\boxed{f_s = 2 \times 2 = 4N}$$

$F = 48N$

ج) چون نیرو بیشتر از 24 نیوتن است دو جسم نسبت به هم می‌لغزند یعنی دو شتاب مختلف دارند.

در این حالت نیروی اصطکاک لغزشی داریم.

$$\begin{cases} F - f_k = M_2 a_2 \\ f_k = M_1 a_1 \end{cases}$$

$$\underbrace{f_k}_{\mu_k mg} = 2 \times a_1 \Rightarrow 0/3 \times 2 \times 10 = 2 \times a_1 \qquad \boxed{a_1 = 3\,m/s^2}$$

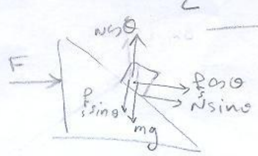
$$48 - \mu_k M_1 g = M_2 a_2$$

$$48 - 6 = 4a_2 \Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{21}{2}\,m/s^2}$$

9 - 6

$$F = (m+M)a$$

$$a = \frac{F}{m+M}$$



حالت اول: آستانه لغزش به سمت بالا

بیشینه نیرو

① در راستای افقی $\quad N\sin\theta + f_s\cos\theta = ma \Rightarrow N\sin\theta + \mu_s N\cos\theta = ma \Rightarrow N(\sin\theta + \mu_s\cos\theta) = ma$

② در راستای عمودی $\quad N\cos\theta = f_s\sin\theta + mg \Rightarrow N\cos\theta = \mu_s N\sin\theta + mg \Rightarrow N(\cos\theta - \mu_s\sin\theta) = mg$

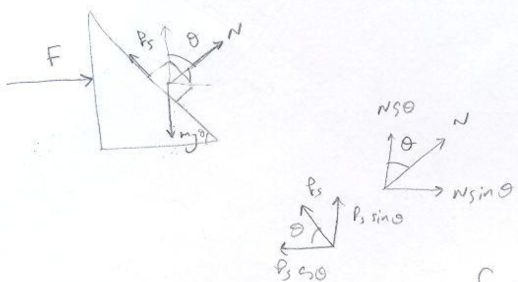
$$N = \frac{mg}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}$$ این را در رابطه بالا ① جایگزین می‌کنیم.

$$① \Rightarrow \left(\frac{\cancel{m}g}{\cos\theta-\mu_s\sin\theta}\right)(\sin\theta+\mu_s\cos\theta)=\cancel{m}a$$

a از این رابطه بدست می آید.

$$a=\frac{\sin\theta+\mu_s\cos\theta}{\cos\theta-\mu_s\sin\theta}$$ شتاب بیشینه $$\Rightarrow F_{max}=\underbrace{(m+M)}_{2,5}a_{max}$$

اگر آستانه لغزش به سمت پایین باشد
نیرو کمینه



$$\begin{cases} N\sin\theta-f_s\cos\theta=ma \\ N\cos\theta+f_s\sin\theta=mg \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ①\ N\sin\theta-\mu_s N\cos\theta=ma \\ ②\ N\cos\theta+\mu_s N\sin\theta=mg \Rightarrow \end{cases}$$

$$② \Rightarrow \quad N=\frac{mg}{\cos\theta+\mu_s\sin\theta}$$

$$① \Rightarrow N(\sin\theta-\mu_s\cos\theta)=ma$$

به جای N از رابطه 2 قرار دهیم.

$$① \Rightarrow \frac{\cancel{m}g}{\cos\theta+\mu_s\sin\theta}(\sin\theta-\mu_s\cos\theta)=\cancel{m}a$$

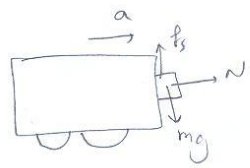
$$a=\frac{\sin\theta-\mu_s\cos\theta}{\cos\theta+\mu_s\sin\theta}$$ شتاب کمینه

$\theta=35^\circ$ $\quad \cos 35^\circ=0{,}82$ $\quad \sin 35^\circ=0.57$ $\qquad F_{min}=(M+m)a_{min}$

ب)

$$\mu_s=0{,}4 \Rightarrow \begin{array}{l} a_{max} \Rightarrow F_{max}=(m+M)a_{max} \\ a_{min} \rightarrow F_{min}=(m+M)a_{min} \end{array}$$

(11-6



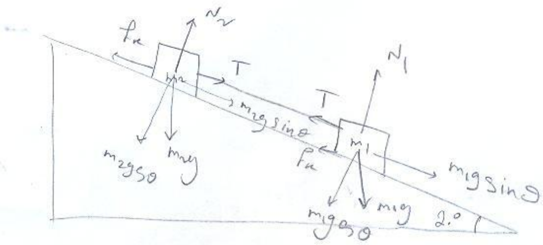
$$f_s = mg \Rightarrow \mu_s N = mg$$ در راستای عمودی جسم در آستانه لغزش است.

در راستای افق $\quad N = ma \rightarrow a = \frac{N}{m}$

$$a = \frac{mg/\mu_s}{\cancel{m}} = \frac{g}{\mu_s}$$

اگر شتاب بیشتر شود m ساکن می‌ماند.

(13-6



جسم ① $\Rightarrow$ در راستای عمود بر سطح شیب دار : $\begin{cases} N_1 = m_1 g \cos\theta \\ m_1 g \sin\theta - T - f_k = m_1 a \end{cases}$

$$\begin{cases} N_1 = m_1 g \cos\theta \\ m_1 g \sin\theta - T - \mu_k N_1 = m_1 a \end{cases}$$

$$m_1 g \sin\theta - T - \mu_k (m_1 g \cos\theta) = m_1 a$$

$$\boxed{m_1 g [\sin\theta - \mu_k \cos\theta] - T = m_1 a} \quad *$$

جسم ② $\quad \begin{cases} N_2 = m_2 g \cos\theta \\ m_2 g \sin\theta + T - f_{2k} = m_2 a \end{cases}$

$$m_2 g \sin\theta + T - \mu_{2k} N_2 = m_2 a$$

$$m_2 g \sin\theta + T - \mu_{2k} (m_2 g \cos\theta) = m_2 a$$

$$\boxed{m_2 g [\sin\theta - \mu_{2k} \cos\theta] + T = m_2 a} \quad **$$

$\boxed{F = 2T}$

$F = 35N \qquad T = 17{,}5\,N \qquad \begin{matrix} m_1 g > T \\ m_2 g > T \end{matrix}$ دو جسم حرکت نمی‌کنند

$F = 70N \qquad T = 35N \qquad T > m_1 g$ جرم m_1 حرکت می‌کند.

$T < m_2 g$ جرم m_2 ساکن می‌ماند

$F = 140N \qquad T = 70N \qquad \begin{matrix} T > m_1 g \\ T > m_2 g \end{matrix}$ دو جرم حرکت می‌کنند.

اگر $F=70N$ باشد فقط جرم m_1 حرکت می‌کند داریم:

$T - m_1 g = m_1 a_1$

$35 - 20 = 2a_1 \qquad a_1 = 7{,}5\, m/s^2$

اگر $F=140N$ باشد دو جرم حرکت می‌کنند.

$$\begin{cases} T - m_1 g = m_1 a_1 \\ T - m_2 g = m_2 a_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 70 - 20 = 2a_1 \\ 70 - 50 = 5a_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a_1 = 25\, m/s^2 \\ a_2 = 4\, m/s^2 \end{matrix}}$$

از مسأله قبل داریم:

$$2a = a_1 + a_2$$

$$a = \frac{25+4}{2} = 14.5\, m/s^2$$

شتاب قرقره نسبت به زمین $14.5\, m/s^2$ است.

a_1 و a_2 شتاب جرم های m_1 و m_2 نسبت به زمین است.

شتاب m_1 نسبت به زمین = شتاب قرقره نسبت به زمین + شتاب m_1 نسبت به قرقره

$$a_1 = a + a'_1$$

$$25 = 14{,}5 + a'_1 \Rightarrow a'_1 = 10{,}5$$

و برای جرم دوم داریم:

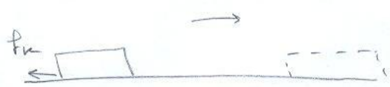
$$a_2 = a + a'_2$$

$$4 = 14{,}5 + a'_2 \Rightarrow a'_2 = -10{,}5\, m/s^2$$

با حذف T از دو معادله * ، ** شتاب محاسبه می‌شود.

نیروی میله بر قطعه‌ها T است که با دانستن a می‌توان T را از معادله * یا ** به دست آورد.

15-6) $\mu_k = ?$



$$F = ma$$

$$-f_k = ma$$

$$-\mu_k N = ma$$

$$-\mu_k \cancel{m} g = \cancel{m} a \Rightarrow \boxed{a = -\mu_k g} \quad (1)$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \Rightarrow 0 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow \boxed{a = \frac{-v_0^2}{2\Delta x}} \quad (2)$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{\Delta t} = \frac{-v_0}{\Delta t} \quad (3)$$

$$\frac{-v_0}{\Delta t} = \frac{-v_0^2}{2\Delta x} \Rightarrow \frac{1}{\Delta t} = \frac{v_0}{2\Delta x} \Rightarrow v_0 = \frac{2\Delta x}{\Delta t}$$

$$a = -\frac{\left(\frac{2\Delta x}{\Delta t}\right)^2}{2\Delta x}$$

$$a = -\frac{2\Delta x}{(\Delta t)^2}$$

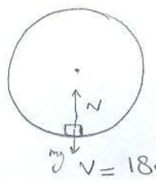
$$\frac{-2\Delta x}{(\Delta t)^2} = -\mu_k g \Rightarrow \mu_k = \frac{2\Delta x}{(\Delta t)^2 g}$$

$$\mu_k = \frac{2 \times 1/37}{(0/97)^2 \times 10} = \dots$$

$$v_0 = ?$$

$$v_0 = \frac{2\Delta x}{\Delta t} = \frac{2(1/37)}{0/97} = \dots$$

(19-6



$V = 180 \,km/h$

$180 \times \frac{10}{36} = 50 \,m/s$

الف)

$$a = \frac{V^2}{R}$$

$$a = \frac{(50)^2}{300} = \frac{25}{3}$$

ب) برآیند نیروها در نیروی خاص ما نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند.

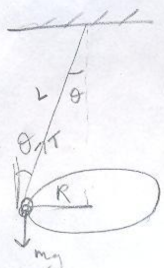
$$F = \frac{mv^2}{R} = \frac{65 \times 2500}{300} \simeq 542$$

ج) نیروی مشترک نیروی N است.

$$N - mg = \frac{mv^2}{R}$$

$$\boxed{N = mg + \frac{mv^2}{R}}$$

(21-6



$$T\cos\theta = mg$$

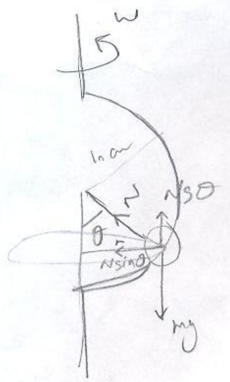
$$T\sin\theta = \frac{mv^2}{R}$$

θ چقدر باشد تا $T = 6mg$

$$6\cancel{mg}\cos\theta = \cancel{mg}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{6} \Rightarrow \boxed{\theta = \operatorname{Arccos}\frac{1}{6}}$$

(24-6



$m = 0{,}1\,kg$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

ثانیه ۲ دور

T ۱ دور

$T = \frac{1 \times 1}{2} = 0{,}5\,s$

$w = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi\,(s^{-1})$

$$\begin{cases} N\cos\theta = mg \quad (2) \\ N\sin\theta = \frac{mv^2}{r} \rightarrow rw \end{cases} \Rightarrow N\sin\theta = mrw^2 \quad (1)$$

$? = \theta$

طرفین رابطه ۱ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{N\sin\theta}{N\cos\theta} = \frac{mrw^2}{mg}$$

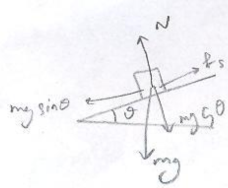
$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{rw^2}{g}$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{R\sin\theta\ w^2}{g} \Rightarrow \cos\theta = \frac{g}{Rw^2}$$

$$\boxed{\theta = Arc\cos\frac{g}{Rw^2}}$$

$$\theta = Arc\cos\frac{10}{0{,}1 \times 16\pi^2}$$

(28-6 $\theta = ?$



حالت اول: خودرو ساکن است.

در راستای سطح شیب دار $\Rightarrow \begin{cases} mg\sin\theta = f_s \Rightarrow mg\sin\theta = \mu_s N \quad (1) \\ N = mg\cos\theta \quad (2) \end{cases}$

در راستای عمود بر سطح شیب دار $\Rightarrow$

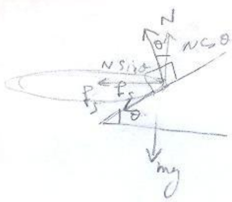
N را از رابطه ۲ در رابطه ۱ قرار می‌دهیم

$\cancel{mg}\sin\theta = \mu_s \cancel{mg}\cos\theta$

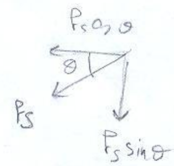
$\boxed{\mu_s = \tan\theta}$ $\quad 0{,}8 = \tan\theta \quad$ $\boxed{\theta = Arc\tan 0{,}8}$

$60\,km/h \times \frac{10}{36} = 16.7\,m/s$

در این حالت خودرو با سرعت 60km/h حرکت می‌کند



$$\begin{cases} N\cos\theta = mg + f_s\sin\theta \rightarrow \\ f_s\cos\theta + N\sin\theta = \frac{mv^2}{R} \rightarrow \end{cases} \begin{cases} N\cos\theta = mg + \mu_s N\sin\theta \\ \mu_s N\cos\theta + N\sin\theta = \frac{mv^2}{R} \end{cases}$$



$$\begin{cases} N\cos\theta - \mu_s N\sin\theta = mg \quad (1) \\ \mu_s N\cos\theta + N\sin\theta = \frac{mv^2}{R} \quad (2) \end{cases}$$

رابطه ① را بر ② تقسیم می‌کنم

$$\frac{\cancel{N}(\cos\theta - \mu_s\sin\theta)}{\cancel{N}(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)} = \frac{\cancel{m}g}{\frac{\cancel{m}v^2}{R}}$$

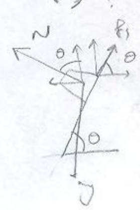
$$\frac{\cos\theta - \mu_s\sin\theta}{\sin\theta + \mu_s\cos\theta} = \frac{Rg}{v^2}$$

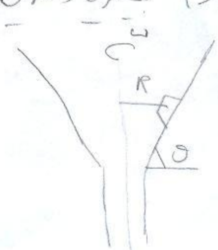
صورت و مخرج کسر را بر cosθ تقسیم می‌کنم

$$\frac{1 - \mu_s\tan\theta}{\tan\theta + \mu_s} = \frac{Rg}{v^2} \Rightarrow \frac{1 - 0.8 \times 0.8}{0.8 + 0.8} = \frac{R \times 10}{279} \qquad \boxed{R = \dots}$$

(36-6) بیشترین و کمترین مقداری که به ازای آن جسم حرکت نکند

? ω_{max}





$$\begin{cases} mg = f_s\sin\theta + N\cos\theta \\ N\sin\theta - f_s\cos\theta = \frac{mv^2}{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_s N\sin\theta + N\cos\theta = mg \quad (1) \\ N\sin\theta - \mu_s N\cos\theta = \frac{mv^2}{R} \rightarrow mR\omega^2 \quad (2) \end{cases}$$

(26) $(2) \div (1) \Rightarrow \frac{\cancel{N}(\sin\theta - \mu_s\cos\theta)}{\cancel{N}(\mu_s\sin\theta + \cos\theta)} = \frac{\cancel{m}R\omega^2}{\cancel{m}g} \rightarrow \frac{R\omega^2}{g} = \frac{(\sin\theta - \mu_s\cos\theta)}{(\mu_s\sin\theta + \cos\theta)} \Rightarrow \omega = \dots$

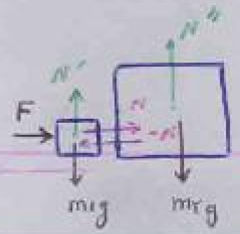
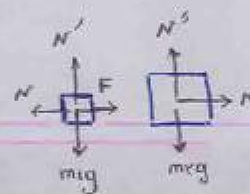
$$\begin{cases} N\cos\theta = mg + f_s\sin\theta \\ N\sin\theta + f_s\cos\theta = \dfrac{mv^2}{R} \end{cases}$$

f, ω_{min}

$$\begin{cases} ① \; N\cos\theta - \mu_s N\sin\theta = mg \\ ② \; N\sin\theta + \mu_s N\cos\theta = mR\omega^2 \end{cases}$$

$$② \div ① \Rightarrow \frac{\cancel{N}(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)}{\cancel{N}(\cos\theta - \mu_s\sin\theta)} = \frac{\cancel{m}R\omega^2}{\cancel{m}g}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{R}\frac{[\sin\theta + \mu_s\cos\theta]}{(\cos\theta - \mu_s\sin\theta)} \qquad \omega = \cdots$$

(۱/۵)  

$$\begin{cases} F - N = m_1 a \\ N = m_2 a \end{cases} \rightarrow F - m_2 a = m_1 a \rightarrow \boxed{a = \frac{F}{m_1 + m_2}}$$

ب) می‌توان مقادیر عددی را جایگذاری کرد.

$$N = m_2 a = m_2 \times \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2}$$

(۳/۵) 

دو نیروی F و F- عمل و عکس‌العمل یکدیگرند.

الف) شتاب صفر $(a_y = 0)$ ← سرعت ثابت

$$\sum F_y = m a_y = 0 \rightarrow F - mg = 0 \rightarrow F = mg$$

آنچه نیروسنج نمایش می‌دهد نیروی F است که در این حالت نیروی F برابر وزن جسم است (قسمت ب مانند قسمت الف شتاب صفر است ← $F = mg$)

(ج) $a = 3\,m/s^2 \Rightarrow F - mg = ma \rightarrow F = m(g + a)$

(د)

$t = 9s \quad v = 0\,m/s$

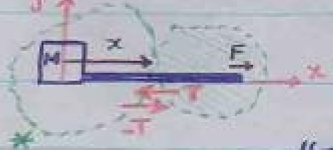
$t = 5s \quad v = 10\,m/s$ } $\Delta t = 4s$

$t = 0 \quad v = 10\,m/s$

$$v = at + v_0 \rightarrow a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - 10}{4} = \frac{-10}{4} = -2/5$$

در بازه‌ی ۰ تا ۵ ثانیه چون شتاب صفر است نیروسنج همان وزن جسم را نمایش می‌دهد ولی در بازه‌ی ۵ تا ۹ ثانیه داریم:

$$\sum F = ma \rightarrow F - mg = ma \rightarrow F = m(10 - 2/5)$$

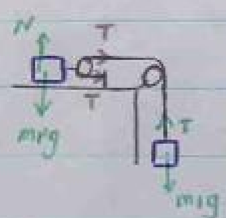
(۵/۵) 

الف) $\sum F_x = m a_x \rightarrow 100 = (4 + 6) a_x \rightarrow a_x = 10\,m/s^2$

ب) در قسمت الف قانون نیوتن را برای کل جسم و طناب نوشتیم. در این قسمت قانون نیوتن را برای جسمی که با * نشان داده شده است می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \sum F_x = m a_x \rightarrow T = (m_1 + M) a_x \\ m_1 + m_2 = m = 4\,kg \\ \text{چون شتاب خطی است:} \ \frac{(m_1 + m_2)}{L} = \frac{m_1}{x} \end{cases} \rightarrow T = \left(\frac{mx}{L} + M\right) a_x = \left(\frac{4}{10} x + 6\right) \times 10 = 4x + 60$$

(m, L) 

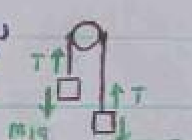
(۷/۵) 

الف) چون نخ از روی قرقره‌ی بالایی دو برابر شده است پس اگر جرم ۵kg، ۱۰cm پایین بیاید جرم ۲۰kg نصف این مقدار را می‌رود. پس اگر شتاب جرم ۵kg، a باشد شتاب جرم ۲۰kg، a' می‌شود:

$\boxed{a = 2a'}$

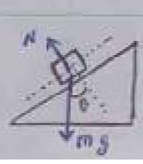
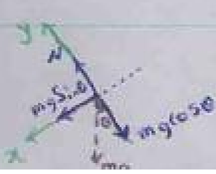
$$\sum F = ma \rightarrow \left[m_1 g - T = m_1 a \ , \ 2T = m_2 a' \ , \ a = 2a' \right] \Rightarrow$$

$$a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2/4} = \frac{50}{5 + 20/4} = 5 \rightarrow T = 25\,(N)$$

(۹/۵) 

$$\left. \begin{array}{l} m_1 + m_2 = M \ , \ m_1 g - m_2 g = Ma \rightarrow a = \frac{(m_1 - m_2)}{M} g \\ m_1 g - T = m_1 a \rightarrow T = m_1 g - m_1 a = m_1 (g - a) \end{array} \right\} \rightarrow T = m_1 g \left(1 - \frac{(m_1 - m_2)}{M}\right)$$

$$\frac{dT}{dm_1} = 0 \rightarrow m_1 = M/2 \ , \ m_2 = M/2$$

(۱۱/۵)  

$$\Rightarrow mg \sin\theta = ma \rightarrow a = g \sin\theta$$
$$N = mg \cos\theta$$

(مقداری که نیروسنج نمایش می‌دهد همان N می‌باشد)

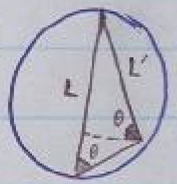
(۱۳/۵) $F=8t$, $F=ma=m\,dv/dt \Rightarrow 8t = m\,dv/dt \Rightarrow$ با انتگرال گیری از طرفین $\Rightarrow mv\Big|_0^v = \frac{8t^2}{2}\Big|_0^t \rightarrow mv = 4t^2$

(الف) $t=3s \rightarrow v = 4t^2/m = 3/2$

(ب) $v=\frac{dx}{dt}=\frac{4t^2}{m} \rightarrow$ با انتگرال گیری $\rightarrow x=\frac{4t^3}{3m}+\cancel{x_0}$ در $t=3$ ثانیه $\rightarrow x=3/2$

(ج) $\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{3/2}{3}=1/2$

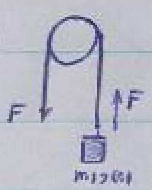
(د) $F=ma \rightarrow \bar{F}=m\bar{a}$, $\bar{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{3/2}{3}=1/2 \Rightarrow \bar{F}=24\times 1/2=12$

(۱۷/۵) 

$L=1/2\,gt^2$: زمان لازم برای طی کردن طول L $\Rightarrow$ مهره‌ای که مسیر L را طی می‌کند : پس $\boxed{t^2=\frac{2L}{g}}$ *

* باید زمان لازم برای طی کردن این مسافت را هم به دست آورده و با * مقایسه کنیم. $\rightarrow \begin{cases} L'=\frac{1}{2}g\sin\theta\, t'^2 \\ \sin\theta=\frac{L'}{L}\end{cases} \rightarrow \boxed{t'^2=\frac{2L}{g}}$ **

از مقایسه * و ** به این نتیجه می‌رسیم که این دو مقدار مساوی هستند و نتیجه ربطی به طول سیم ندارد.

(۲۱/۵) 

F نیرویی است که شخص با دست خود به طناب وارد می‌کند تا آن را به سمت پائین بکشد و خود را به سمت بالا بکشد:

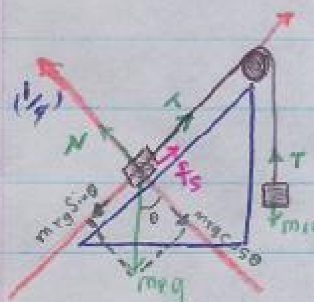
برای شخص : $F-m_2g=m_2a$ برای جرم m_1 : $F-m_1g=m_1a_1$

$\Rightarrow m_2(g+a)-m_1g=m_1a_1 \rightarrow a=\frac{m_2(g+a)-m_1g}{m_1}$

(۲۵/۵) $F=(ax+b)\,\hat{i}$, $F=m\,dv/dt = m\frac{dv}{dx}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v} = mv\,dv/dx \Rightarrow mv\frac{dv}{dx}=ax+b \Rightarrow$ با انتگرال گیری $\Rightarrow$

$m(1/2\,v^2)\Big|_{v_0}^{v} = ax^2+bx\Big|_0^x \rightarrow 1/2\,m(v^2-v_0^2)=2x^2+4x$ $v_0=1/5$, $x=6m$, $v=?$

$\rightarrow 1/2\times 0/5\times(v^2-1/5^2)=2(6)^2+4(6)\rightarrow \boxed{v=2}$

(۱/۶) 

• اگر جرم m_2 به اندازه‌ای بزرگ باشد که باعث شود به سمت پائین شیب سر بخورد:

$\begin{cases} \text{جرم } m_2: & T+f_s=m_2g\sin\theta , N=m_2g\cos\theta , f_s=\mu_sN \\ \text{جرم } m_1: & T=m_1g \rightarrow m_1g+\mu_sm_2g\cos\theta=m_2g\sin\theta \end{cases}$

$\rightarrow m_1g=m_2g(\sin\theta-\mu_s\cos\theta)\rightarrow$

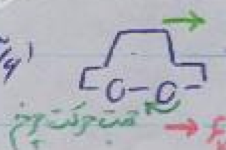
$m_2=m_1/(\sin\theta-\mu_s\cos\theta)$

• اگر جرم m_2 به اندازه‌ای کوچک باشد، سیستم به سمت بالا حرکت کند داریم:

جرم m_2: $\begin{cases} T=m_2g\sin\theta+f_s \\ f_s=\mu_sN , N=\mu_sm_2g\cos\theta\end{cases}$ جرم m_1: $T=m_1g \rightarrow m_2=m_1/(\sin\theta+\mu_s\cos\theta)$

پس اگر جرم بین این دو مقدار باشد حرکت نخواهد کرد:

$\frac{m_1}{\sin\theta+\mu_s\cos\theta} < m_2 < \frac{m_1}{\sin\theta-\mu_s\cos\theta}$

(۳/۶) 

(الف) $f_k=Ma$, $f_k=\mu_kN$, $N=mg$ نیروی اصطکاک همواره در خلاف جهت حرکت می‌باشد.

$\Rightarrow \mu_kmg=Ma$, $m=4/10\,M \rightarrow \mu_k\times\frac{4}{10}Mg=Ma\rightarrow a=4/10\,\mu_kg$

$\mu_k=7/10 \rightarrow a\simeq 2/1\,m/s^2$

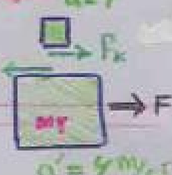
(ب) $a=2/1\,m/s^2$, v_0 , $v=100\,km/h$

$v=100\frac{km}{h}\times\frac{1000m}{1km}\times\frac{1h}{3600s}=\frac{1000}{36}(m/s)$

$v=at+\cancel{v_0}\rightarrow t=v/a=\frac{1000}{36\times 2/1}\rightarrow \boxed{t=}$

مثبت حرکت ← $a=4$

(۵/۶)



جرم m_2: $F - f_k = m_2 a'$ جرم m_1: $f_k = -m_1 a$

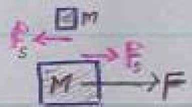
(الف) $f_k = -m_1 a = -60 \times 4 = -240\ (N)$

(ب) $\sum F = m_2 a' \rightarrow (F - f_k) = m_2 a'$ نیروی خالص: $\sum F \rightarrow F - f_k \Rightarrow$

نیروی خالص $= 100 \times 6$

(ج) $F = m_2 a' + f_k \rightarrow F = 600 + 240 = 840$ (د) $F = m_2 a \rightarrow a = \frac{840}{100} = 8/4\ m/s^2$

(۷/۶)



(الف) $F = (m+M)a$, $f_s = \mu_s N$, $N = mg \rightarrow a = \mu_s g$, $F = (m+M)\mu_s g$

$F = 10 \times 0/4 \times 6 = 24\ N$

(ب) اگر نیروی کوچکتر از این مقدار وارد شود تا در نسبت جسم را حرکت دهد و هر دو با هم حرکت می‌کنند

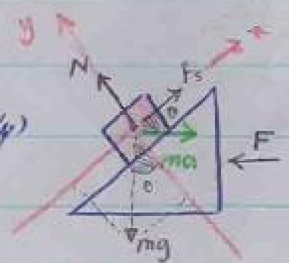
$F = (m+M)a \rightarrow a = 12/6 = 2\ (m/s^2)$

(ج)

$F = 2 \times (24) = 48$ $f_k = -ma' = \mu_k mg \rightarrow a' = -\mu_k g = -0/3 \times 10 = -3\ m/s^2$

$F - f_k = Ma \rightarrow 48 - \mu_k mg = Ma \rightarrow a = \frac{48 - 0/3 \times 2 \times 10}{4} = 21/2\ m/s^2$

(۹/۶)

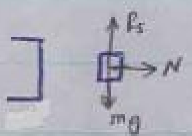


$$\begin{cases} F = (m+M)a \\ \pm f_s + ma\cos\theta = mg\sin\theta \\ ma\sin\theta + mg\cos\theta = N \end{cases} \Rightarrow \pm\mu_s(ma\sin\theta + mg\cos\theta) + ma\cos\theta = mg\sin\theta$$

$$a = \frac{g\sin\theta \mp g\mu\cos\theta}{\cos\theta \pm \mu\sin\theta}$$

$$\rightarrow F = (m+M)g\left(\frac{\sin\theta \mp \cos\theta}{\mu\sin\theta \pm \cos\theta}\right)$$

(۱۱/۶)



$N = ma$, $f_s = mg$, $f_s = \mu_s N \Rightarrow f_s = \mu_s ma \rightarrow \mu_s a = g \rightarrow \boxed{a = g/\mu_s}$

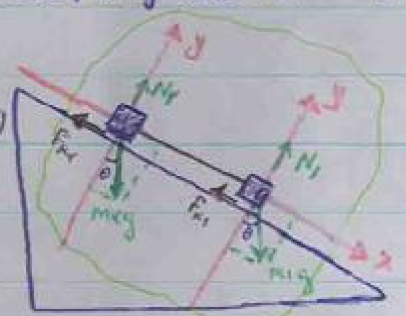
اگر شتاب از این مقدار بیشتر باشد نمی‌افتد ولی اگر کمتر باشد می‌افتد

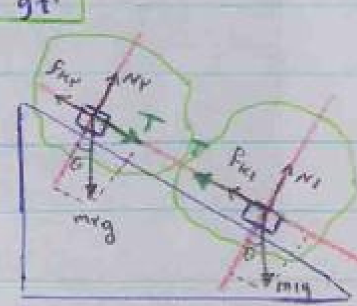
(۱۵/۶)

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \\ v = at + v_0 \rightarrow v_0 = -at \end{cases} \rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + (-at)t \rightarrow \boxed{a = -2\Delta x/t^2}$$

$f_k = \mu_k mg$, $f_k = ma \rightarrow -\mu_k mg = ma \Rightarrow \boxed{\mu_s = \frac{2\Delta x}{g t^2}}$

(۱۳/۶)





$$\begin{cases} (m_1+m_2)g\sin\theta - f_{k_1} - f_{k_2} = (m_1+m_2)a \\ f_{k_1} = \mu_{k_1}N_1 \ , \ f_{k_2} = \mu_{k_2}N_2 \ , \ N_1 = m_1 g\cos\theta \\ \qquad N_2 = m_2 g\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{\left[(m_1+m_2)g\sin\theta - (\mu_{k_1}m_1 + \mu_{k_2}m_2)g\cos\theta\right]}{m_1+m_2}$$

جرم m_2: $T + m_2 g\sin\theta - f_{k_2} = m_2 a$

$\Rightarrow T = m_2 a + f_{k_2} - m_2 g\sin\theta$

با جایگذاری مقادیر فوق بدست می‌آید.

(19/6) $v_0 = 180\ km/h \to 180 \frac{km}{h} \times \frac{1h}{3600s} \times \frac{1000m}{1km} = \frac{1800}{36} (m/s)$

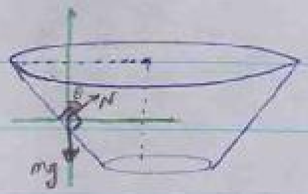
(الف) $a = \frac{v^2}{R} = \frac{(1800/36)^2}{400} \cong 7\ m/s^2$

(ب) نیروی خالص: $F = mv^2/R = ma \to F = 650 \times 7 = 4550\ N$

ج) $N - mg = mv^2/R \to N = mv^2/R + mg \to N = 4550 + 6500 = 1100\ N$

(21/6) 

$$\left.\begin{array}{l} T\sin\theta = mv^2/R \\ T\cos\theta = mg \end{array}\right. \to T = 6mg \to \cos\theta = 1/6 \to \boxed{\theta = \dots}$$

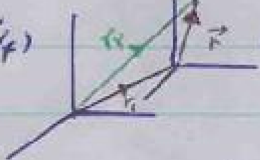
(22/6) 

$$\left.\begin{array}{l} N\cos\theta = mg \\ N\sin\theta = mv^2/R \end{array}\right\} \to \tan\theta = v^2/Rg \to v = \sqrt{Rg\tan\theta}$$

$$v = \sqrt{20 \times 10 \times \tan 15^\circ} =$$

(1/4) $\vec{r} = (6 + 2t^2)\hat{i} + (3 - 2t + 3t^2)\hat{j}$, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = 4t\ \hat{i} + (6t - 2)\hat{j}$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow 4\hat{i} + 6\hat{j}$ $\quad t = 2 \Rightarrow \begin{cases} \vec{v} = 8\hat{i} + 10\hat{j} \quad , \vec{a} = 4\hat{i} + 6\hat{j} \\ |\vec{v}| = \sqrt{8^2 + 10^2} = \sqrt{164} \quad , |\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} \end{cases}$

(3/4) 

$$\left.\begin{array}{l} \text{(الف)}\ \vec{r}_1 + \vec{r} = \vec{r}_2 \to \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ \vec{r}_1 = 2t\hat{i} - t^2\hat{j} + (3t^2 - 4t)\hat{k} \\ \vec{r}_2 = (5t^2 - 12t + 4)\hat{i} + \ \hat{j} - 2t^3\hat{k} \end{array}\right\} \to \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \Rightarrow$$

$$\vec{r} = (5t^2 - 14t + 4)\hat{i} + (t^3 + t^2)\hat{j} + (t - 3t^2)\hat{k}$$

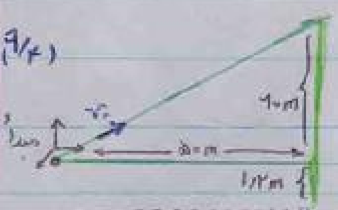
(ب) $\vec{v} = d\vec{r}/dt \to \vec{v} = (10t - 14)\hat{i} + (3t^2 + 2t)\hat{j} + (1 - 6t)\hat{k}$

(ج) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 10\hat{i} + (6t + 2)\hat{j} - 6\hat{k}$

(5/4) $\vec{r} = b\cos\omega t\ \hat{i} + b\sin\omega t\ \hat{j} + ct^2\hat{k} \to v = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = -b\omega\sin\omega t\ \hat{i} + b\omega\cos\omega t\ \hat{j} + 2ct\ \hat{k}$

$\vec{a} = d\vec{v}/dt \to \vec{a} = -b\omega^2\cos\omega t\ \hat{i} - b\omega^2\sin\omega t\ \hat{j} + 2c\hat{k} \to$

$|\vec{a}| = \sqrt{(-b\omega^2\cos\omega t)^2 + (-b\omega^2\sin\omega t)^2 + (2c)^2} = \sqrt{b^2\omega^4(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t) + 4c^2} = \sqrt{4c^2 + b^2\omega^4}$

(9/4) 

$$\begin{cases} y_m = -1/2\, gt^2 + v_{0my}t + y_{0m} & \text{(فرض می‌کنیم m مربوط به حرکت میمون هستند)} \\ y_m = -1/2\, gt^2 + 10 & \text{(فرض می‌کنیم t ... تیر هستند)} \end{cases}$$

$\{ y_t = -1/2\, gt^2 + v_{0ty}t + y_{0t} \to -1/2\, gt^2 + v_{0ty}t = y_t$ و $\boxed{x = v_{0x}t}$ *

$y_t = y_m$ در لحظه‌ی برخورد میمون و تیر $\to -1/2\, gt^2 + 10 = -1/2\, gt^2 + v_{0ty}t \to \boxed{v_{0ty} = 10/t}$ **

از روابط فوق * و ** دیده می‌شود که هر چه t افزایش یابد سرعت‌ها کاهش می‌یابند. بنابراین برای داشتن حداقل سرعت باید max زمان را به دست آوریم و ماکزیمم زمان وقتی است که میمون به زمین رسیده باشد.

در لحظه‌ی رسیدن به زمین $\left.\begin{array}{l} y_m = -1/2 \\ y_m = -1/2\, gt^2 + v_{0my}t + y_{0m} \end{array}\right\} \to -\frac{1}{2} = -1/2 \times 9.8 \times t^2 + 0 + y_{0m} \to t \simeq 1.51\ (s)$

با جایگذاری t در * و ** داریم: $\begin{cases} v_{0x} = 33.1 \\ v_{0y} = 6.61 \end{cases} \to |\vec{v}| = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \simeq 34\ m/s$

(11/4)

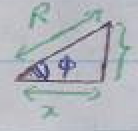
$$\begin{cases} y=-\tfrac12 gt^2+v_{0y}t+y_0 \rightarrow -h=-\tfrac12 gt^2+v_0\cos\theta_0 t+0 & * \\ x=v_{0x}t+x_0 \rightarrow R=v_0\sin\theta_0 t \rightarrow t=R/(v_0\sin\theta_0) & ** \end{cases}$$

با جاگذاری t از ** در * داریم: $h=\tfrac12 g\left(\frac{R^2}{v_0^2\sin^2\theta_0}\right)-v_0\cos\theta_0\times\frac{R}{v_0\sin\theta_0}=0$

$$R^2\left(\frac{g}{2v_0^2\sin^2\theta_0}\right)-R\left(\frac{\cos\theta_0}{\sin\theta_0}\right)-h=0 \rightarrow R=\frac{v_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g}-\frac{v_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g}\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^2\cos^2\theta_0}} \xrightarrow{2\sin\theta_0\cos\theta_0=\sin 2\theta_0}$$

$$R=\frac{v_0^2\sin 2\theta_0}{2g}\left(1+\sqrt{1+2gh/v_0^2\cos\theta_0}\right)$$

(13/4)



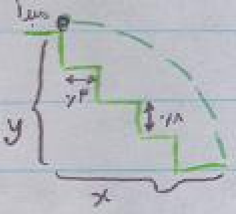
$\sin\phi=y/R$ ، $\cos\phi=x/R$ ، $y=-\tfrac12 gt^2+v_{0y}t$ ، $x=v_{0x}t$

با استفاده از روابط فوق: $R\sin\phi=-\tfrac12 g\,\frac{R^2\cos^2\phi}{v_{0x}^2}+v_{0y}\,\frac{R\cos\phi}{v_{0x}}$

$$\rightarrow R=\frac{2v_{0x}v_{0y}}{g\cos\phi}-\frac{2\sin\phi\, v_{0x}^2}{g\cos^2\phi} \rightarrow \begin{cases} v_{0x}=v_0\cos\theta_0 \\ v_{0y}=v_0\sin\theta_0 \end{cases} \rightarrow$$

$$R=\frac{2v_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g\cos\phi}-\frac{2\sin\phi\, v_0^2\cos^2\theta_0}{g\cos^2\phi} \rightarrow R=\frac{2v_0^2\cos^2\theta_0}{g\cos\phi}\left[\tan\theta_0-\tan\phi\right]$$

(15/4)



$x=v_xt+x_0$ ، $y=-\tfrac12 gt^2+v_yt+y_0 \Rightarrow x=3t$ ، $y=-\tfrac12 gt^2+0$

t را از یکی در دیگری جاگذاری می‌کنیم:

$y=-0{,}54x^2 \leftarrow y=-\tfrac12 g\frac{x^2}{9}$

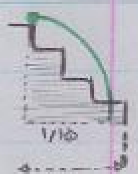
$y=h \rightarrow \boxed{h=0{,}54x^2}$

اگر تعداد پله‌هایی را که توپ پایین می‌رود را n در نظر بگیریم

$0{,}18n=0{,}54(0{,}3n)^2 \leftarrow y=0{,}18n$ ، $x=0{,}3n$

$\rightarrow n=3{,}7 \rightarrow$ n باید عددی صحیح باشد. بنابراین عدد را به عدد صحیح بالاتر گرد کنیم $\rightarrow y=0{,}18\times4=0{,}72 \rightarrow$

$0{,}72=0{,}54x^2 \rightarrow x\approx1{,}2$

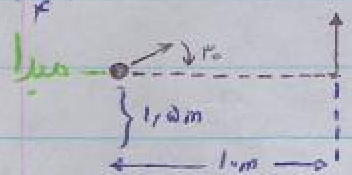


(17/4) برد پرتابه را برای دو حالتی که از زاویه‌ی ۴۵ درجه اندکی بیشتر (R_1) و از زاویه‌ی ۴۵ درجه اندکی کمتر (R_2) هستند حساب می‌کنیم و نشان می‌دهیم $R_1=R_2$

$$R=\frac{v_0^2\sin 2\phi_0}{g} \rightarrow \begin{cases} \phi_0=\pi/4+\alpha \rightarrow R_1=v_0^2\sin 2(\alpha+\pi/4)/g=\frac{v_0^2\sin(\pi/2+2\alpha)}{g}=\frac{v_0^2\cos2\alpha}{g} \\ \phi_0=\pi/4-\alpha \rightarrow R_2=v_0^2\sin 2(\pi/4-\alpha)/g=\frac{v_0^2\sin(\pi/2-2\alpha)}{g}=\frac{v_0^2\cos2\alpha}{g} \end{cases}$$

$\boxed{R_1=R_2}$

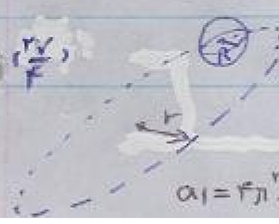
(19/4)



$$y=x\tan\theta-gx^2/2v_0^2\cos^2\theta \rightarrow 1{,}5=10\times\tan30-10\times\frac{10^2}{2v_0^2\cos^2 30}$$

$$1{,}5=\frac{10\times1}{\sqrt3}-\frac{10\times100\times4}{2\times3\times v_0^2} \rightarrow \boxed{v_0^2=\ldots}$$

(27/4)



$R=6370\ km$ ، $a=r\omega^2$ ، $\omega=\frac{2\pi}{T} \rightarrow a=r\times\frac{4\pi^2}{T^2}=\frac{4\pi^2 r}{T^2}$

زمین هر ۱ سال ۱ دور به دور خورشید می‌چرخد:

$1\,سال\times\frac{365\ روز}{سال}\times\frac{86400\ (s)}{روز}=31536000\ (s)$

$a_1=4\pi^2\times\frac{1150\times10^{11}}{\ldots}$ ، $a_2=4\pi^2\times\frac{6370\times1000}{\ldots}\approx19{,}4\ (m/s^2)$

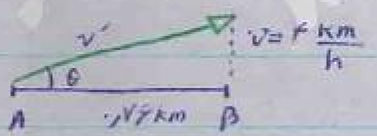
(۵۹/۴)

$\vec{v}=\vec{u}+\vec{v}' \Rightarrow v(\hat{i})=u(-\hat{j})+v'\cos\theta\,\hat{i}+v'\sin\theta\,\hat{j}$

از تساوی قراردادن مولفه‌ها داریم $\Rightarrow \begin{cases} u=v'\sin\theta \rightarrow \left\{ \begin{matrix} v'=10\ m/s \\ u=5\ m/s \end{matrix} \right\} \rightarrow \sin\theta=1/2 \rightarrow \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ v=v'\cos\theta\ (*) \end{cases}$

از قرار دادن $\cos\theta$ در $*$ داریم: $v=10\times\sqrt{3}/2=5\sqrt{3}$ $\Leftarrow$ $x=vt$ $\leftarrow$ $400m=5\sqrt{3}t$ $\leftarrow$ $t=80/\sqrt{3}$

(۶۱/۴)



$\boxed{\sin\theta=\frac{4\ km/h}{v'}}$

الف) شناگر باید راستای AB را طی کند $\theta=0$.

بنابراین ← بزرگی v' بی‌نهایت بزرگ باشد که غیرممکن است $\Leftarrow$ $0=\frac{4\ km/h}{v'}$

حالت ممکن نیست.

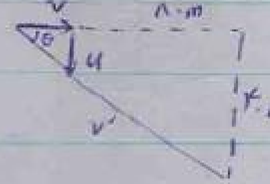
ب) این حداقل سرعت شناگر $4\ \frac{km}{h}$ نسبت به آب است این حالت نیز ممکن می‌باشد. $\theta=53 \rightarrow \sin 53=\frac{4}{v'} \rightarrow v'=5\ \frac{km}{h}$

ج) شناگر در این سمت به این حالت نیز ممکن نمی‌باشد.

د) $\sin\theta=\frac{4\ km/h}{v'} \rightarrow v'=\frac{4\ km/h}{\sin\theta} \rightarrow v'<4\ km/h \rightarrow \frac{4\ km/h}{\sin\theta}<4 \rightarrow \sin\theta>1$

چون $\sin\theta$ عددی ۰ تا ۱ است پس به علت محدود بودن سرعت شناگر ممکن نیست به مقصد برسیم.

(۶۳/۴)



سرعت قایق نسبت به ساحل $\Rightarrow v'$

سرعت قایق نسبت به آب $v \Rightarrow 1/6\ m/s$

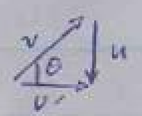
سرعت آب به ساحل $u \Rightarrow$

الف) $\tan\theta=40/80=1/2 \rightarrow \theta=\tan^{-1}1/2 \rightarrow \theta=27^\circ$

$\tan\theta=\frac{u}{v}=1/2 \rightarrow \frac{u}{1/6}=\frac{1}{2} \rightarrow u=\frac{1/6}{2}=0/8\ m/s$

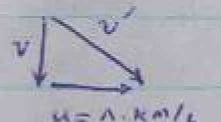
ب) $\cos\theta=\frac{v}{v'}=\frac{1/6}{v'} \rightarrow v'=\frac{1/6}{\cos\theta} \rightarrow v'\simeq 1/8\ m/s$

ج)



$\sin\theta=u/v \rightarrow \frac{0/8}{1/6}=0/5 \rightarrow \theta=30^\circ$

(۶۵/۴)



$\begin{cases} v & \text{سرعت قطره حالت سکون زمین} \\ v' & \text{سرعت قطره‌ها نسبت به راننده} \\ u & \text{سرعت اتومبیل نسبت به زمین} \end{cases}$

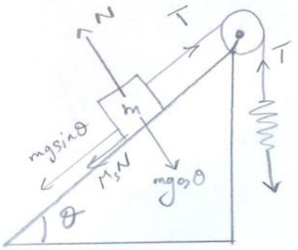
$\tan\theta=\frac{80\ km/h}{v} \rightarrow v=\frac{80\ km/h}{\tan 80}\simeq 14\ \frac{km}{h}$

$\sin\theta=\frac{80\ km/h}{v'} \rightarrow v'=\frac{80\ km/h}{\sin 80}$

$v'=81/23\ \frac{km}{h}$

(5-8

در آستانه حرکت ← $f_{\text{اصطکاک}} = \mu_s N$

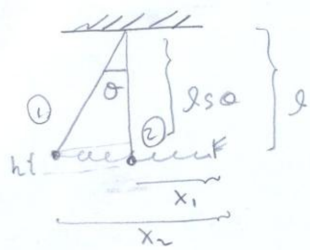


$$N = mg\cos\theta$$
$$T = mg\sin\theta + \mu_s N$$
$$T = mg\sin\theta + \mu_s mg\cos\theta$$

نیروی فنر : $F = ky$

$$ky = mg\sin\theta + \mu_s mg\cos\theta$$
$$y = \frac{mg}{k}\sin\theta + \frac{\mu_s mg}{k}\cos\theta$$
$$U = \frac{1}{2}ky^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}k\left[\frac{mg}{k}\sin\theta + \frac{\mu_s mg}{k}\cos\theta\right]^2$$

(6-8



$$U = mgh$$
$$h = l - l\cos\theta$$
$$h = l(1-\cos\theta)$$

اگر طول اولیه فنر زمانی که در حالت تعادل است را X_1 در نظر بگیریم

زمانی که فنر کشیده می‌شود طول آن X_2 می‌شود.

انرژی پتانسیل فنر $U = \frac{1}{2}k(X_2 - X_1)^2$

$X_2 - X_1 \simeq l\sin\theta$ برای زوایای کوچک

$$U = \frac{1}{2}k\,l^2\sin^2\theta$$
$$U_1 = mgh + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2$$
$$U_1 = mg\,l(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}k\,l^2\sin^2\theta$$

$U_2 = 0$ در نقطه ② انرژی پتانسیل صفر است

$$K_2 = \frac{1}{2}mv^2$$

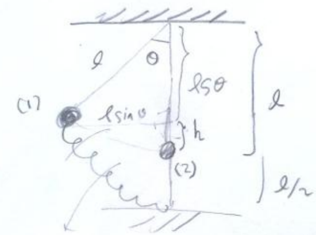
$E_1 = E_2 \Rightarrow \quad U_1 + K_1 = U_2 + K_2$

$$\frac{1}{2} k L^2 \sin^2\theta + mgl(1-\cos\theta) = 0 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$\frac{k}{m} L^2 \sin^2\theta + 2gl(1-\cos\theta) = v^2$$

$$v = \left[\frac{k}{m} L^2 \sin^2\theta + 2gl(1-\cos\theta)\right]^{1/2}$$

(8-7

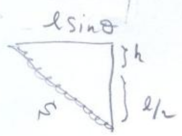


$h = l - l\cos\theta$

$h = l(1-\cos\theta)$

$S_0 = \frac{l}{2}$: طول فنر در حالت اولیه

S : طول فنر در حالت کشیده.



$$S^2 = (l\sin\theta)^2 + \left(h + \frac{l}{2}\right)^2$$

$$S = \sqrt{l^2\sin^2\theta + h^2 + \frac{l^2}{4} + lh}$$

مقدار بازشدگی فنر ← $S - S_0$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \quad mg\left(h + \frac{l}{2}\right) + \frac{1}{2}k(S-S_0)^2 = mg\frac{l}{2} + \frac{1}{2}mv^2$$

$$mgh + \cancel{mg\frac{l}{2}} + \frac{1}{2}k(S-S_0)^2 = \cancel{mg\frac{l}{2}} + \frac{1}{2}mv^2$$

$$mgl(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}k\left[\sqrt{\frac{l^2}{4} + lh + h^2 + l^2\sin^2\theta} - \frac{l}{2}\right]^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$mgl(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}k\left[\sqrt{\frac{l^2}{4} + l^2(1-\cos\theta) + l^2(1-\cos\theta)^2 + l^2\sin^2\theta} - \frac{l}{2}\right]^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$mgl(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}k\left[\sqrt{\frac{l^2}{4} + l^2 - l^2\cos\theta + l^2 + l^2\cos^2\theta - 2l^2\cos\theta + l^2\sin^2\theta} - \frac{l}{2}\right]^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$mgl(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}k\left[l\sqrt{\frac{17}{4} - 3\cos\theta} - \frac{l}{2}\right]^2 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = ?$$

(8-11 الف) N را می‌خواهد.

$$N + mg = \frac{mv^2}{R}$$

$$N = \left(\frac{mv^2}{R} - mg\right)$$

برای محاسبه N بایستی ابتدا v^2 را محاسبه کنیم برای این منظور از بقای انرژی استفاده می‌کنیم.

$$E_1 = E_2 \Rightarrow mgH = \frac{1}{2}mv^2 + mg2R$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgH - 2mgR$$

$$v^2 = 2gH - 4gR$$

$$v^2 = 2\times10\times23 - 4\times10\times7/5 = 160$$

$$N = \underbrace{\frac{1500\times160}{7/5}}_{32000} - 15000 = 17000\,N$$

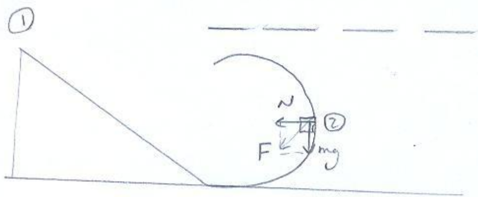
ب) H چقدر باشد تا در بالاترین نقطه مسیر $N=mg$ شود.

$$N + mg = \frac{mv^2}{R}$$

$$2mg = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v^2 = 2gR$$

$$mgH = mg2R + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow mgH = mg2R + \frac{1}{2}m\,2gR \Rightarrow \boxed{H = 3R}$$

$$H = 3\times7.5 = 22.5$$



ج)

$F = ?$

$$F = \underbrace{-mg\hat{j}}_{\text{داریم}} - \underbrace{N\hat{i}}_{?}$$

$$N = \frac{mv^2}{R}$$

برای محاسبه N باید ابتدا v^2 را بدست آوریم، سپس از پایستگی انرژی استفاده کنیم

$$mgH = mgR + \frac{1}{2}mv^2$$

$$mg3R = mgR + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 2gR = \frac{1}{2}v^2 \Rightarrow \boxed{v^2 = 4gR}$$

$$N = \frac{mv^2}{R}$$

$$N = \frac{m4gR}{R} \Rightarrow N = 4mg \Rightarrow \boxed{N = 4\times10\times1500 = 60000\,N}$$

$$F = -60000\,\hat{i} - 15000\,\hat{j}$$

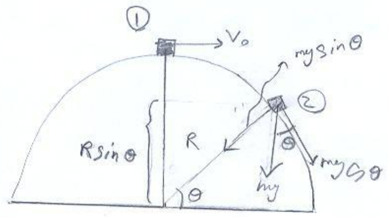
$$tg\,\theta = \frac{F_y}{F_x} \Rightarrow \frac{-15000}{-60000} = \frac{1}{4} \Rightarrow tg\,\theta = \frac{1}{4}$$

$$Arc\,tg\,(tg\,\theta) = Arc\,tg\,\frac{1}{4}$$

$$\boxed{\theta = Arc\,tg\,\frac{1}{4}}$$

3)

12-8) الف)



$$N + mg\sin\theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$mg\sin\theta = \frac{mv^2}{R} \Longrightarrow v^2 = ?$$

از بقای انرژی v^2 را محاسبه می‌کنیم.

$$mgR + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

$$\cancel{mg}R + \frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 + \cancel{mg}R\sin\theta$$

$$gR + \frac{1}{2}v_0^2 - gR\sin\theta = \frac{1}{2}v^2$$

$$\boxed{2gR + v_0^2 - 2gR\sin\theta = v^2}$$

$$mg\sin\theta = \frac{mv^2}{R} \longrightarrow mg\sin\theta = \frac{m}{R}\left[2gR + v_0^2 - 2gR\sin\theta\right]$$

$$mg\sin\theta = 2mg + \frac{mv_0^2}{R} - 2mg\sin\theta$$

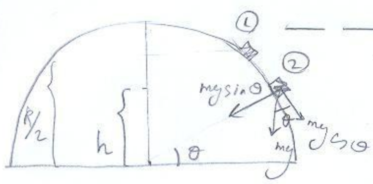
$$3mg\sin\theta = 2mg + \frac{mv_0^2}{R} \Longrightarrow \boxed{\sin\theta = \frac{2gR + v_0^2}{3gR}}$$

ب)

$$\cancel{N} + mg = \frac{mv_0^2}{R}$$

$$mg = \frac{mv_0^2}{R} \Longrightarrow v_0 = \sqrt{Rg}$$

ج) h=?



$$mg\sin\theta + \cancel{N} = \frac{mv^2}{R}$$

$$mg\sin\theta = \frac{mv^2}{R} \Longrightarrow v^2 = Rg\sin\theta$$

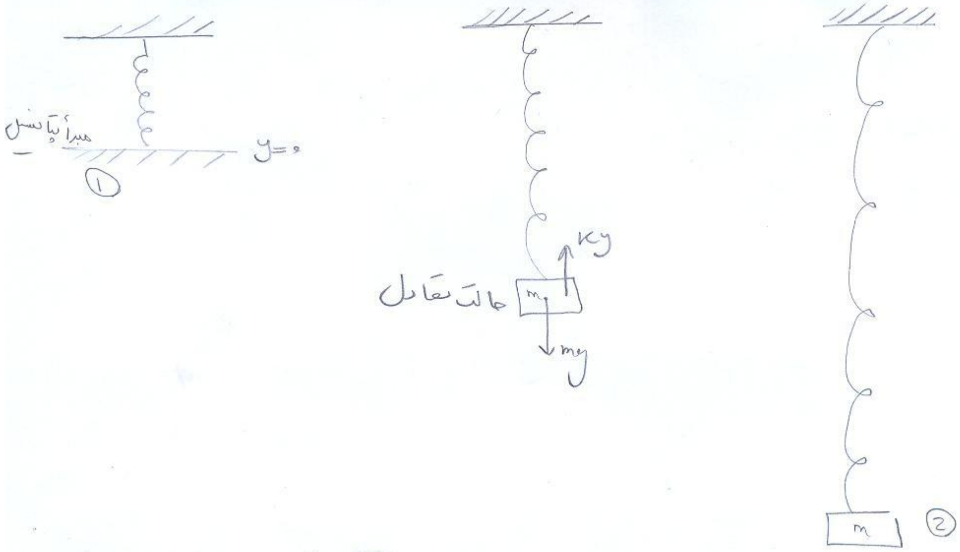
$$mg\frac{R}{2} = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\cancel{mg}\frac{\cancel{R}}{2} = \cancel{mg}\cancel{R}\sin\theta + \frac{1}{2}\cancel{m}\cancel{Rg}\sin\theta \Longrightarrow \frac{1}{2} = \sin\theta + \frac{1}{2}\sin\theta \Longrightarrow 1 = 2\sin\theta + \sin\theta$$

$$\boxed{\sin\theta = \frac{1}{3}}$$

$$h = R\sin\theta \Longrightarrow \boxed{h = \frac{R}{3}}$$

(19-8



الف) $ky = mg \Rightarrow y = \frac{mg}{k}$

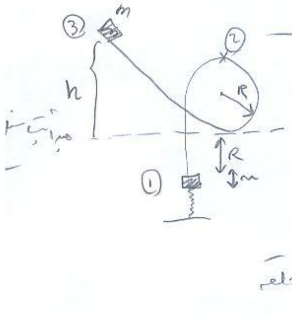
ب) $U = -mgy + \frac{1}{2}ky^2$

$F = -\frac{dU}{dy} = -[ky - mg] = -ky + mg$

ج) $0 + 0 + 0 = \frac{1}{2}ky^2 - mgy + 0 \Rightarrow y_{max} = \frac{2mg}{k}$

هـ) $0 + 0 + 0 = \frac{1}{2}ky_{equ}^2 - mgy_{equ} + E_{\text{اتلاف}}$

(27-8 $\quad x = ?$



$1, 2 \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 - mg(R+x) = \frac{1}{2}mv^2 + 2mgR$

حداقل مقدار فشردگی زمانی است که در بالای حلقه $N=0$ باشد.

در بالای حلقه $\quad mg + \underset{0}{N} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v^2 = Rg$

$\frac{1}{2}kx^2 - mg(R+x) = \frac{1}{2}mRg + 2mgR$

$\frac{1}{2}kx^2 - mgR - mgx = \frac{1}{2}mRg + 2mgR$

$\frac{1}{2}kx^2 - mgx = \frac{7}{2}mgR \Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 - mgx - \frac{7}{2}mgR = 0$

$$x = \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 4(\frac{1}{2}k)(\frac{7}{2}mgR)}}{2(\frac{1}{2}k)}$$

ب) $h=?$

پایستگی در نقاط ②,③

$$mg2R+\frac{1}{2}mV^2=mgh$$

$$\cancel{m}g2R+\frac{1}{2}\cancel{m}R\cancel{g}=\cancel{m}\cancel{g}h \Rightarrow \boxed{h=\frac{5}{2}R}$$

(32-8

$$\vec{F}=(y^2-2xyz^3)\hat{i}+(3+2xy-x^2z^3)\hat{j}+(-3x^2yz^2)\hat{k}$$

الف)

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)-\hat{j}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial z}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$$=\hat{i}\underbrace{(-3x^2z^2\cancel{+3x^2z^2})}_{0}-\hat{j}\underbrace{(-6xyz^2+\cancel{6xyz^2})}_{0}+\hat{k}\underbrace{(2y-2xz^3-2y+2xz^3)}_{0}$$

$$=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{F} \text{ پایستار.}$$

ب)

(1)

$$U=-\int F_x\,dx$$

$$=-\int(y^2-2xyz^3)\,dx=\boxed{-y^2x+x^2yz^3+C(y,z)}$$

(2)

$$U=-\int F_y\,dy=-\int(3+2xy-x^2z^3)\,dy=\boxed{-3y-xy^2+x^2yz^3+C(x,z)}$$

(3)

$$U=-\int F_z\,dz=-\int(-3x^2yz^2)\,dz=\boxed{x^2yz^3+C(x,y)}$$

باید $C(x,z)$، $C(x,y)$، $C(y,z)$ طوری انتخاب شوند که این ۳ U با هم برابر شوند.

$$C(x,y)=-y^2x-3y$$

$$C(y,z)=-3y$$

$$C(x,z)=0$$

پس

$$\boxed{U=-3y-xy^2+x^2yz^3}$$

(6)

ج) کار انجام شده برابر است با تغییرات انرژی پتانسیل:

$W = -\Delta U$

$W = U_B - U_A$

$U_A = -3(-1) - (2)(-1)^2 + (2)^2(-1)(2)^3 = 3 - 2 - 32 = -31\,J$

$U_B = -3(3) - (-1)(3)^2 + (-1)^2(3)(-2)^3 = -9 + 9 - 24 = -24\,J$

$w = -(-24 + 31) = -7\,J$

33-8)

الف)

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$\hat{i}(\underbrace{c+1}) - \hat{j}(\underbrace{4-a}) + \hat{k}(\underbrace{b-2}) = 0$$

$c = -1 \qquad a = 4 \qquad b = 2$

ب) ①

$$U = -\int F_x\,dx = -\int (x + 2y + 4z)\,dx = \boxed{-\frac{x^2}{2} - 2yx - 4zx + C(y,z)}$$

②

$$U = -\int F_y\,dy = -\int (2x - 3y - z)\,dy = \boxed{-2xy + \frac{3}{2}y^2 + zy + C(x,z)}$$

③

$$U = -\int F_z\,dz = -\int (4x + y + 2z)\,dz = \boxed{-4xz + yz - z^2 + C(x,y)}$$

$$U = -\frac{x^2}{2} - 2yx - 4zx + \frac{3}{2}y^2 + zy - z^2$$

$C(y,z) = \frac{3}{2}y^2 + zy - z^2$

$C(x,z) = -\frac{x^2}{2} - 4zx - z^2$

$C(x,y) = -\frac{x^2}{2} - 2yx + \frac{3}{2}y^2$

(7)

$\vec{F} = (x^2y - z^3)\hat{i} + (3xyz + xz^2)\hat{j} + (2x^2yz + yz^4)\hat{k}$ (37-8

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$$\hat{i}(2x^2z + z^4 - 3xy + 2xz) - \hat{j}(4xyz + 3z^2) + \hat{k}(3yz + z^2 - x^2)$$

غیر پایستار است.

(8)