۱- هر معادله به صورت $y' = f(x)g(y)$ تفکیک پذیر (جداشدنی ، متغیرهای جداپذیر) نامیده می شود . برای حل این معادله متغیرهای x و y را به صورت زیر تفکیک می کنیم :

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

و پس از انتگرال گرفتن ، جواب معادله با یک ثابت به دست می آید .

۲- هر معادله به صورت $y' = f(ax+by+c)$ و $b \neq ۰$ با تغییر متغیر $u = ax+by+c$ به معادله ای تفکیک پذیر تبدیل می شود .

۳- هر معادله خطی مرتبه اول به صورت $a_۱(x)y' + a_۰(x)y = f(x)$ است که با تقسیم آن بر $a_۱(x)$ به صورت استاندارد $y' + p(x)y = q(x)$ نوشته می شود . برای حل این معادله عامل انتگرال $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ را تشکیل داده و از رابطه $y = \frac{۱}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)q(x) + c\right)$ جواب عمومی را محاسبه می کنیم .

۴- با فرض $q(x) = ۰$ جواب عمومی معادله همگن $y' + p(x)y = ۰$ برابر است با $y = ce^{-\int p(x)dx}$.

۵- اگر یکی از جواب های معادله $y' + p(x)y = q(x)$ را به صورت y_p (جواب خصوصی) حدس زدیم ، جواب معادله عمومی این معادله از رابطه $y = y_p + ce^{-\int p(x)dx}$ به دست می آید . به عبارت دیگر داریم :

جواب معادله همگن + جواب خصوصی = جواب معادله غیر همگن

۶- برخی از معادلات مرتبه اول را با تغییر متغیر می توان به معادله خطی مرتبه اول تبدیل کرد . صورت کلی این نوع معادلات به صورت $f'(y)y' + p(x)f(y) = q(x)$ است که با استفاده از تغییر متغیر $u = f(y)$ به معادله خطی $u' + p(x)u = q(x)$ تبدیل می شود .

۷- معادله $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$ وقتی $\alpha \neq ۰,۱$ معادله برنولی نامیده می شود و برای حل آن کافی است دو طرف را بر y^{α} تقسیم کنیم تا به معادله غیر خطی $y^{-\alpha}y' + p(x)y^{۱-\alpha} = q(x)$ تبدیل شود . سپس از تغییر متغیر $z = y^{۱-\alpha}$ استفاده می کنیم تا به معادله ای خطی بر حسب z برسیم . در این صورت داریم :

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \xrightarrow{z=y^{۱-\alpha}} \frac{z'}{۱-\alpha} + p(x)z = q(x)$$

۸- هر معادله به شکل $y' = a(x)\,y + b(x)\,y^{2} + c(x)$ در حالتی که $b(x)$ و $c(x)$ ناصفر هستند ، معادله ریکاتی نامیده می شود . اگر یک جواب از معادله ریکاتی به شکل $y = \phi(x)$ داده شده باشد ، برای به دست آوردن جواب معادله از تغییر متغیر $y = \phi(x) + \frac{1}{z}$ استفاده می کنیم . در این صورت معادله ریکاتی به معادله خطی مرتبه اول تبدیل می شود .

۹- تابع f را همگن از درجه α می نامیم هرگاه برای هر $t > 0$ داشته باشیم $f(tx, ty) = t^{\alpha} f(x, y)$. معادله دیفرانسیلی همگن است که به یکی از دو صورت زیر باشد :

الف) $y' = f(x, y)$ که f همگن از درجه $\alpha = 0$ است .

ب) $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ به شرط آن که M و N همگن و از درجه یکسانی باشند .

۱۰- برای حل معادله همگن از تغییر متغیر $u = \frac{y}{x}$ یا $y = xu$ استفاده می کنیم تا به معادله ای تفکیک پذیر بر حسب u برسیم .

۱۱- معادله $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$ مفروض است . در حالتی که $c = c' = 0$ ، چون درجه صورت و مخرج برابر است این معادله همگن است و در غیر این صورت :

الف) در حالتی که $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$ دو خط $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ متقاطع هستند . در این صورت این دو خط را با هم تلاقی داده تا نقطه $\omega(\alpha, \beta)$ به دست آید . سپس با انتقال محورهای مختصات به نقطه تلاقی یعنی اعمال تغییر متغیر $\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases}$ به معادله همگن $\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{a'X + b'Y}\right)$ می رسیم .

ب) اگر $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$ دو خط موازیند و لذا با تغییر متغیر $u = ax + by$ و $u' = a + by'$ به معادله ای تفکیک پذیربر حسب تابع u و متغیر مستقل x می رسیم .

۱۲- برخی از معادلات با تعویض نقش x و y یعنی با فرض این که x تابعی از y است ، به معادلاتی مانند معادلات خطی یا برنولی تبدیل می شوند .

۱۳- معادله دیفرانسیل $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ کامل نامیده می شود هرگاه داشته باشیم $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

۱۴- اگر معادله $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = ۰$ کامل باشد ، پاسخ آن با هر یک از دو روش زیر قابل محاسبه است :

۱) $\int M\,dx + \int N^{*}dy = c$ (N^{*} تمام جملاتی از N است که شامل متغیر x نیست یعنی $\frac{\partial N^{*}}{\partial x} = ۰$)

۲) $\int N\,dy + \int M^{*}dx = c$ (M^{*} تمام جملاتی از M است که شامل متغیر y نیست یعنی $\frac{\partial M^{*}}{\partial y} = ۰$)

۱۵- برای یافتن عامل انتگرال معادله $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = ۰$ به شرط آن که عامل انتگرال ، تابعی از $z = z(x,y)$ باشد ، کسر $k(z) = \frac{M_y - N_x}{N z_x - M z_y}$ را تشکیل داده و از فرمول $\mu = e^{\int k(z)\,dz}$ عامل انتگرال را محاسبه می کنیم .

۱۶- اگر عامل انتگرال معادله $M\,dx + N\,dy = ۰$ تابعی از x باشد یعنی $z = x$ آنگاه $\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}dx}$.

۱۷- اگر عامل انتگرال معادله $M\,dx + N\,dy = ۰$ تابعی از y باشد یعنی $z = y$ آنگاه $\mu(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M}dy}$.

۱۸- اگر عامل انتگرال معادله $M\,dx + N\,dy = ۰$ تابعی از xy باشد یعنی $z = xy$ آنگاه $\mu(z) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{yN - xM}dz}$.

۱۹- هر معادله به شکل $y(Ax^a y^b + Bx^c y^d)\,dx + x(A'x^a y^b + B'x^c y^d)\,dy = ۰$ دارای عامل انتگرالی به صورت $\mu = x^{\alpha} y^{\beta}$ است که با ضرب معادله در μ و نوشتن شرط کامل بودن و مقابسه ضرایب یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی بر حسب α و β به دست می آید .

۲۰- دیفرانسیل های معروف :

۱) $d(xy) = y\,dx + x\,dy$

۲) $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^{۲}}$

۳) $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^{۲}}$

۴) $d\left(\ln(x^{۲} + y^{۲})\right) = \frac{۲x}{x^{۲} + y^{۲}}dx + \frac{۲y}{x^{۲} + y^{۲}}dy$

$$۵)\ d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

۲۱- در صورتی که معادله دیفرانسیل به صورت $y = f(x, y')$ یا $x = f(y, y')$ باشد ، برای حل آن کافی است $y' = p$ فرض شود و پس از مشتق (دیفرانسیل) گرفتن از معادله داده شده ، جواب معادله را به صورت پارامتری بر حسب p به دست آورد . در صورت امکان می بایست پارامتر p بین x و y حذف شود تا جواب به صورت صریح بر حسب $f(x, y) = c$ به دست آید .

۲۲- منظور از پوش دسته منحنی های $\phi(x, y, c) = 0$ منحنی (یا منحنی هایی) است که بر تمام منحنی ها (و بر هر کدام فقط در یک نقطه) مماس شود .

۲۳- برای به دست آوردن پوشش دسته منحنی های $\phi(x, y, c) = 0$ کافی است پارامتر c را بین معادله ϕ و مشتق این معادله نسبت به c حذف کنیم .

۲۴- هر معادله به شکل $y = xy' + g(y')$ معادله کلرو نامیده می شود و دارای دو نوع جواب است .

الف) با جایگذاری $y' = c$ در معادله کلرو جواب عمومی آن دسته خطوط $y = cx + g(c)$ هستند .

ب) جواب تکین معادله ، پوشش جواب عمومی است .

۲۵- هر معادله به شکل $y = x f(y') + g(y')$ معادله لاگرانژ نامیده می شود. برای حل این معادله مانند نکته ۲۱ عمل می کنیم .

۲۶- اگر معادله ای به صورت $F(y') = 0$ بوده و معادله $F(t) = 0$ دارای حداقل یک ریشه حقیقی به صورت $t = k$ باشد ، آن گاه $F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$ جواب عمومی معادله خواهد بود .

۲۷- اگر معادله مرتبه اول و درجه n ام به صورت $y'^n + p_{n-1}(x, y)(y')^{n-1} + \ldots + p_0(x, y) = 0$ قابل تجزیه به صورت $\left(y' - q_1(x, y)\right)\ldots\left(y' - q_n(x, y)\right) = 0$ باشد ، آن گاه هر یک از معادلات $y' = q_1(x, y), \ldots, y' = q_n(x, y)$ را حل کرده و اگر جواب آن ها به صورت $\phi_1(x, y, c) = 0, \ldots, \phi_n(x, y, c) = 0$ باشد ، جواب عمومی معادله اولیه ضرب این جواب ها یعنی $\phi_1(x, y, c) \times \ldots \times \phi_n(x, y, c) = 0$ است

۲۸- هر گاه دو دسته منحنی $\phi(x, y, c) = 0$ و $\psi(x, y, k) = 0$ دارای این خصوصیت باشند که تمام منحنی های یک دسته منحنی بر تمام منحنی های دسته منحنی دیگر عمود باشد ، یک دسته را مسیرهای متعامد یا قائم دسته دیگر می نامند .

۲۹- برای به دست آوردن معادله مسیرهای متعامد دسته منحنی های ϕ کافی است ۳ مرحله زیر را انجام دهیم :

مرحله اول : معادله دیفرانسیل دسته منحنی های ϕ را با حذف ثابت c بین معادله ϕ و مشتق آن نسبت به x به دست آوریم .

مرحله دوم : y' را به $-\frac{1}{y'}$ تبدیل کنیم تا معادله دیفرانسیل مسیر متعامد به دست آید .

مرحله سوم : معادله حاصل را حل کنیم .

۳۰- اگر معادله ϕ در مختصات قطبی داده شود ، برای یافتن معادله مسیرهای متعامد ، کافی است در مرحله دوم $\frac{r}{r'}$ را به $-\frac{r'}{r}$ تبدیل کنیم .

۱- منظور از یک معادله دیفرانسیل رابطه ای بین یک تابع ، متغیر (متغیرهای) مستقل و مشتقات تابع نسبت به آن متغیر (متغیرها) می باشد . در صورتی که فقط یک متغیر مستقل وجود داشته باشد ، معادله را معادله دیفرانسیل عادی یا معمولی و اگر بیش از یک متغیر مستقل داشته باشیم ، معادله را معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی یا پاره ای می نامیم .

۲- بالاترین مرتبه مشتق ظاهر شده در معادله را مرتبه معادله دیفرانسیل می نامیم .

۳- هر معادله دیفرانسیل عادی به صورت $a_n(x)\,y^{(n)}+\dots+a_1(x)\,y'+a_0(x)\,y=f(x)$ را یک معادله دیفرانسیل خطی می نامیم و در غیر این صورت ، معادله غیر خطی نامیده می شود . در حالت خاصی که طرف دوم معادله یعنی $f(x)$ تابع ثابت صفر باشد ، آن را همگن (هموژن – بدون طرف دوم) می نامیم .

۴- اگر یک معادله دیفرانسیل را نسبت به بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله بتوان به صورت یک چند جمله ای نوشت ، توان مشتق با بالاترین مرتبه را درجه معادله دیفرانسیل می نامند .

۵- هر معادله خطی ، از درجه یک است .

۶- تابع $y=\phi(x)$ را جواب معادله دیفرانسیل مرتبه n می نامیم هرگاه دارای مشتق n ام بوده و در معادله دیفرانسیل صدق کند .

۷- جواب معادله دیفرانسیل از مرتبه n معمولا شامل n ثابت (پارامتر) است و در این صورت جواب عمومی نامیده می شود .

۸- شرط اولیه یک معادله از مرتبه n به صورت زیر است :

$$y(x_0)=y_0 \quad , \quad y'(x_0)=y_1 \quad , \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$$

در این حالت معادله دیفرانسیل را همراه با شرایط اولیه ، مسئله مقدار اولیه می نامیم . اگر شرایط در یک نقطه مطرح نشود ، یه آن شرایط مرزی گفته می شود .

۹- برخی از جواب های یک معادله دیفرانسیل از مقدار دادن به ثابت های موجود در جواب عمومی به دست نمی آیند که آن ها را جواب غیر عادی (تکین ، ایزوله) می نامیم .

۱۰- با داشتن معادله دسته منحنی ها ، می توان یک معادله دیفرانسیل به دست آورد که دسته منجنی های ϕ در آن صدق کنند . به این صورت که کافی است بین معادله دسته منحنی ها و مشتقات آن نسبت به x تا مرتبه n ام ، ثابت های $c_1,\dots,c_n$ را حذف کنیم .

۱۱- اگر معادله دسته منحنی ها به صورت $y = c_1 f_1(x) + ... + c_n f_n(x)$ باشد ، با بسط دترمینان زیر معادله دیفرانسیل آن ها از مرتبه n به دست می آید :

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & ... & f_n(x) & y \\ f_1'(x) & f_2'(x) & ... & f_n'(x) & y' \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ f_1^{(n)}(x) & f_2^{(n)}(x) & ... & f_n^{(n)}(x) & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$