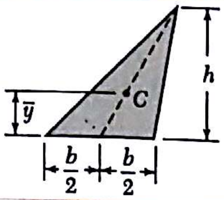
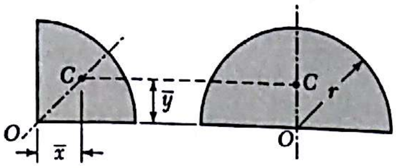
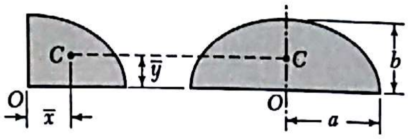
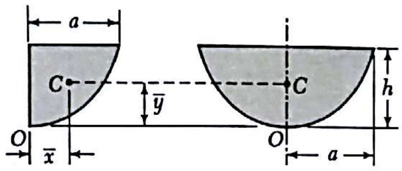
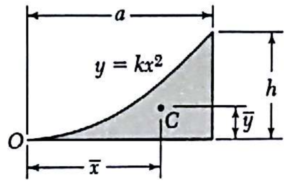
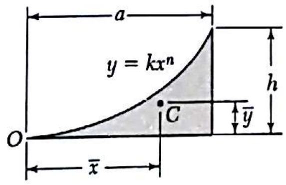
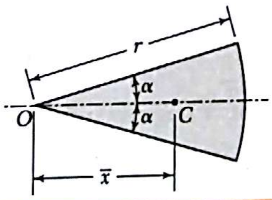
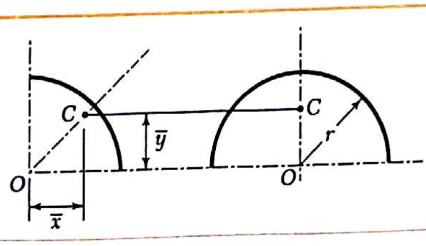
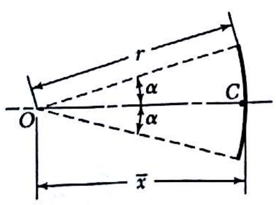
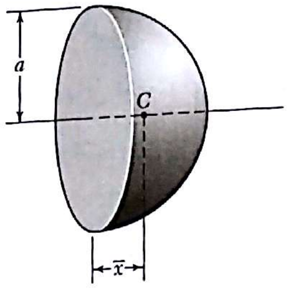
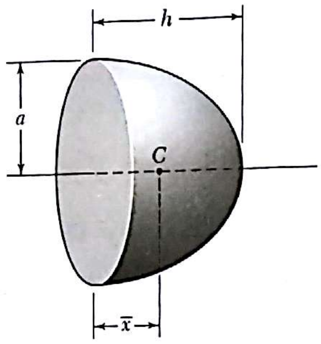
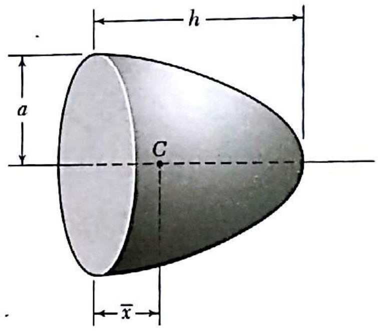
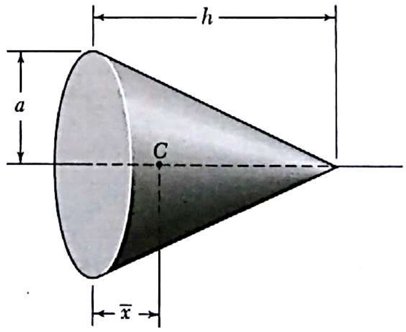
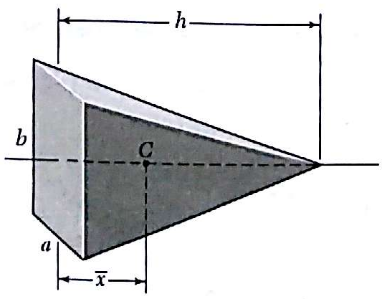
سطح		$\bar{x}$	$\bar{y}$	مساحت
مثلث			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
ربع دایره		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
نیمدایره		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
ربع بیضی		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
نیم‌بیضی		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
نیم‌سهمی		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
سهمی		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
سپاندرل سهموی		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
سپاندرل عمومی		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
قطاع دایره‌ای		$\frac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

خط		$\bar{x}$	$\bar{y}$	طول
قوس ربع‌دایره‌ای		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
قوس نیمدایره‌ای		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
قوس دایره‌ای		$\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

شکل ۵-۱۱ مرکز هندسی سطوح و خطوط متداول

شکل		$\bar{x}$	حجم
نیمکره		$\frac{3a}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^3$
نیم‌بیضیگون		$\frac{3h}{8}$	$\frac{2}{3}\pi a^2 h$
سهمیگون		$\frac{h}{3}$	$\frac{1}{2}\pi a^2 h$
مخروط		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}\pi a^2 h$
هرم		$\frac{h}{4}$	$\frac{1}{3}abh$

شکل ۵-۲۱ مرکز هندسی احجام متداول

خلاصه مطالب استاتیک پایه

تحلیل نیرو : $\vec{F} = (F\cos\theta_x)\vec{i} + (F\cos\theta_y)\vec{j} + (F\cos\theta_z)\vec{k}$

$\vec{F} = (F\sin\theta\cos\beta)\vec{i} + (F\cos\theta)\vec{j} + (F\sin\theta\sin\beta)\vec{k}$

که θ_x ، θ_y و θ_z زاویه نیرو با محورهای مختصات و θ و β زاویه نیرو با محور y و تصویر آن با محور x می‌باشد.

قانون سینوس‌ها ← $\frac{F_1}{\sin\theta_1} = \frac{F_2}{\sin\theta_2} = \frac{F_3}{\sin\theta_3}$

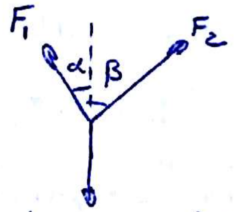
برآیند دو نیروی یکسان با زاویه θ : $R = 2F\cos\frac{\theta}{2}$

برآیند نیروها در حالت سه بعدی : $\cos\theta_x = \frac{\sum F_x}{R}$ $\cos\theta_y = \frac{\sum F_y}{R}$ $\cos\theta_z = \frac{\sum F_z}{R}$

تصویر نیروی $\vec{F}$ بر امتداد بردار یکه λ : $\vec{F}\cdot\vec{\lambda}$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \det\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

ـ کشش کابل در یک قرقره در صورتی در طرفین یکسان است که اصطکاک بین کابل و قرقره صفر باشد.



$\Rightarrow F_1 = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}P$ ، $F_2 = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}P$

ـ برای تعیین کششی یا فشاری بودن F_1 ، F_2 را امتداد می‌دهیم. اگر F_1 و P در طرفین F_2 واقع شوند نیروی P مربوط به F_1 کششی (مثبت) و در غیر این صورت فشاری (منفی) است.

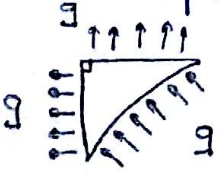
ـ در حالت تعادل دو نیرو استفاده از روش ترسیمی توصیه می‌شود.

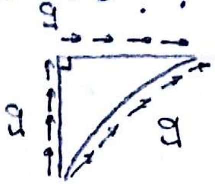
کوپل ـ دو نیروی موازی با اندازه‌ی برابر ولی جهت مخالف ← برآیند نیرو صفر و برآیند گشتاور $M = Fd$ که d فاصله بین دو نیرو است.

بار گسترده : $|\vec{F}| = \int w(x)\,dx$ $|\vec{M}| = \int x\,w(x)\,dx$

ـ برای یافتن گشتاور بار گسترده حول یک نقطه دلخواه، نیرویی برابر سطح زیر نمودار بار را در مرکز سطح بار قرار می‌دهیم.

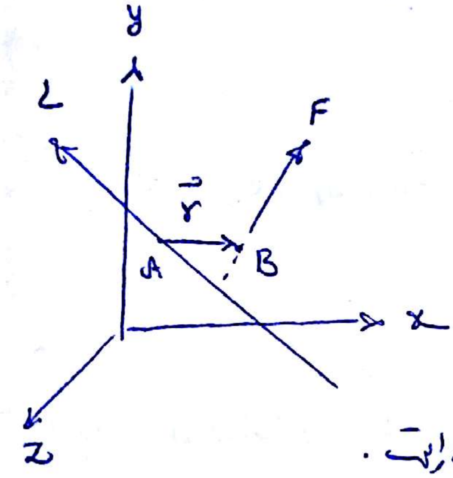
در یک عضو ساختمانی شکل یک بار گسترده عمودی یا مماسی می‌توان از تجزیه‌ی بار به مولفه‌های عمود بر هم استفاده کرد.





- اگر عضو منحنی شکل به صورت کمانی از دایره باشد آنگاه علاوه بر یافتن نیرو، می‌توان برای یافتن گشتاور حول نقطه دلخواه نیز از تجزیه به مؤلفه‌های عمودی استفاده کرد

گشتاور نیرو حول محور :



$$M_L = \det \begin{vmatrix} \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

α : مؤلفه‌های بردار یکه راستای L $\quad$ r : مؤلفه‌های بردار AB

عضو دو نیرویی ← برای تعادل باید دو نیرو مساوی، مخالف جهت و روی یک خط راست.

عضو سه نیرویی ← برای تعادل باید سه نیرو متقارب باشند.

- عضو سه نیرویی نامتقارب که هیچ دو نیرویی هم امتداد نباشند برای تعادل هر سه نیرو صفرند. اگر دوتا موازی بود سومی نیز باید به موازات آنها باشد.

- گشتاورگیری عموماً حول نقطه‌ای انجام می‌شود که بیشترین نیروهای مجهول از آن عبور کنند.

- برای محاسبه‌ی گشتاور یک نیرو حول یک نقطه، می‌توان نیرو را در راستای خودش انتقال داد.

- وجود مفصل که n عضو به آن متصل است باعث می‌شود $n-1$ معادله‌ی تعادل جدید به دست آید.

- در خرپاها اگر وزن قابل چشم‌پوشی نباشد به طور مساوی در دو انتهای عضو روی مفاصل تقسیم می‌شود.

- در روش مقطع در تحلیل خرپاها حداکثر سه عضو قطع می‌شود که نباید همرس باشند. همچنین از دو قسمت ایجاد ش قسمتی که پایه‌ها را دارد بهتر است انتخاب شود.

$m + R = 2j$ ← خرپا معین

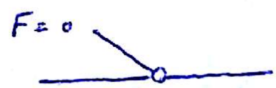
$m + R > 2j$ ← خرپا نامعین

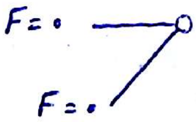
$m + R < 2j$ ← خرپا ناپایدار

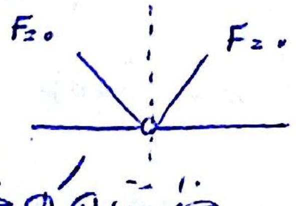
m : تعداد اعضا

R : تعداد مجهولات پایه‌ها $\quad$ j = تعداد مفاصل

اعضای صفر نیرویی در خرپاها :

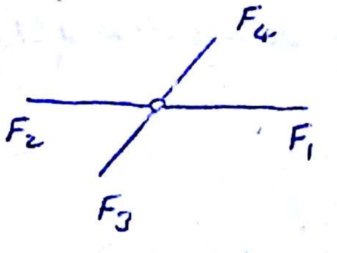
I. 

II. 

III. 

خط تقارن کل خرپا

حالت خاص :



$$\begin{cases} F_1 = F_2 \\ F_3 = F_4 \end{cases}$$

روش snake (مار) در حل خرپاهایی که در ساختار آنها حرف k زبان لاتین وجود دارد. تشخیص که در این روش زده می‌شود مانند یک مار به دور حرف x می‌پیچد.

انواع قاب‌های دو عضوی :

I . پایه‌های قاب روی یک سطح افقی یا قائم قرار گرفته‌اند ← گشتاورگیری حول یکی از پایه‌ها و یافتن یکی از دو مولفه‌ی نیروی آن ← سپس گشتاورگیری نسبت به مفصل و یافتن مولفه‌ی دیگر نیروی پایه فوق الذکر.

- اگر یکی از اعضای قاب دو نیرویی باشد، نیروی آن عضو در امتداد خط واصل دو انتهای آن عضو است.

II . پایه‌های قاب روی یک سطح افقی یا قائم قرار ندارند ← دو حالت دارد :

الف - یکی از مولفه‌های یکی از پایه‌ها از مفصل عبور کند ← نوشتن تعادل گشتاور در مفصل و یافتن مولفه‌ی دیگر پایه. سپس در کل خرپا نسبت به پایه‌ی دوم گشتاور می‌گیریم تا به این ترتیب هر دو مولفه‌ی پایه‌ی اول محاسبه شوند.

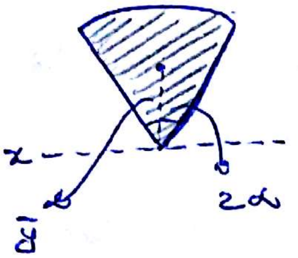
ب - هیچ یک از مولفه‌های پایه‌ها از مفصل عبور نکند ← نسبت به یک پایه و مفصل گشتاورگیری می‌کنیم تا برای مولفه‌های پایه‌ی دیگر دو معادله حاصل شود. سپس از حل دو معادله، دو مولفه‌ی پایه‌ی دوم را می‌یابیم.

* در حل مسائل قاب‌ها و ماشین‌ها کمک گرفتن از سایر اعضای قاب برای یافتن مجهولات توصیه می‌شود !!

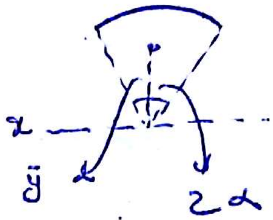
~~~

میان ترم تمام !!:

اگر $\bar{x}$ و $\bar{y}$ مختصات مرکز سطح باشند :

مربوط به المان

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i} \qquad \bar{y} = \frac{\sum y_i w_i}{\sum w_i}$$ ← مرکز نیرو

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dA}{\int dA} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dA}{\int dA}$$ ← مرکز سطح

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dl}{\int dl} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dl}{\int dl}$$ ← مرکز خط $\quad dl = \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx$

اگر در مختصات قطبی کار کنیم :

$$x = \frac{2}{3} r\cos\theta \qquad y = \frac{2}{3} r\sin\theta \qquad dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

- اگر وزن مخصوص در نقاط مختلف تابعی از x و y (چون تابع $\gamma(x,y)$) داشته باشد، این تابع را در تابع تحت انتگرال صورت تابع فوق ضرب می‌کنیم.

$$\bar{x} = \frac{\int \gamma(x,y)\, x\, dv}{\int \gamma(x,y)\, dv}, \quad \bar{y} = \frac{\int \gamma(x,y)\, y\, dv}{\int \gamma(x,y)\, dv}$$ ← مرکز حجم
~~~

قضایای پاپوس : $\bar{y}$: فاصله مرکز ثقل منحنی یا مرکز سطح صفحه از محور دوران

$S = 2\pi \bar{y} L$ $\qquad$ $V = 2\pi \bar{y} A$



$\rightarrow \bar{y} = \frac{2}{3} r \frac{\sin\alpha}{\alpha}$

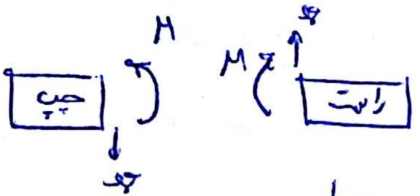


$\rightarrow \bar{y} = r \frac{\sin\alpha}{\alpha}$

$dL = \sqrt{1 + x'(y)}\, dy$ یا $dL = \sqrt{r^2 + r'(\theta)}\, d\theta$

- نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی در نقاطی که : I. بار گسترده تغییر می‌کند یا II. بار متمرکز یا گشتاور خمشی به تیر وارد می‌شود ناپیوستگی دارد.

علائم قرارداد :



رابطه‌ی بین بار گسترده، نیروی برشی و گشتاور خمشی : $\frac{dV}{dx} = -w$ $\qquad$ $\frac{dM}{dx} = V$ $\qquad$ $\frac{d^2M}{dx^2} = -w$

یافتن موقعیت و مقدار گشتاور خمشی بیشینه :

I. معادله‌ی گشتاور خمشی یک نقطه دلخواه به فاصله‌ی x از مبدأ یافته مشتق آن را صفر می‌گذاریم.

II. گشتاور Max ممکن است در نقاطی که نیروی برشی صفر است، نقاط اعمال بار متمرکز یا گشتاور خمشی و نقاطی که شدت بار گسترده تغییر می‌کند رخ دهد. ← در نقاط مذکور گشتاور را یافته Max آن را انتخاب می‌کنیم.

- همچنین نقاط ابتدایی و انتهایی تیر باید بررسی شوند.

یافتن موقعیت و مقدار نیروی برشی بیشینه :

بررسی نقاطی که $\frac{dV}{dx} = 0$ ، نقاطی که بار گسترده صفر می‌شود یا نقاطی که نیروی متمرکز وارد می‌شود.

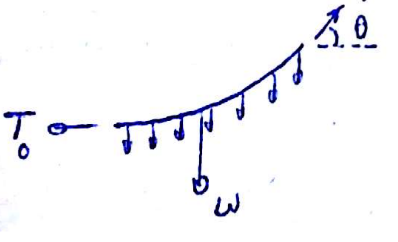
نکته‌ی بسیار مهم

انواع کابل :

I. حامل بار متمرکز ← مولفه‌ی افقی نیروی کشش در تمام طول کابل یکسان است. (با رسم نمودار آزاد هر قطعه واضح است)

II. حامل بار گسترده ← نیروی داخلی در هر نقطه از کابل یک نیروی کشش در راستای مماس بر منحنی است.

- در حالت دوم نیروی کشش در بالاترین نقطه‌ی کابل Max و در پایین‌ترین نقطه‌ی کابل Min می‌باشد.



$\tan\theta = \frac{W}{T_0}$ $\qquad$ $T = \sqrt{T_0^2 + W^2}$

- منحنی کابل‌هایی که توزیع بار وارد بر آنها در امتداد افقی یکنواخت (w) است به شکل سهمی با معادله $y = \frac{w}{2T_0}x^2$ است که T_0 کشش کابل در مبدأ مختصات است.

- در حالتی که تکیه‌گاه‌های کابل هم تراز نباشند طول کابل از مبدأ تا تکیه‌گاه B به صورت زیر است:

$$s_{OB} = x_B + \frac{2}{3}\left(y_B/x_B\right)^2$$

- در کابل‌های حامل بار متمرکز حداکثر کشش مربوط به قطعه‌ای با حداکثر شیب (شیب θ) می‌باشد.

کابل تحت نیروی وزن خود: (s طول کابل، w بار بر طول در امتداد کابل)

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2 s^2}$$

تعریف می‌شود: $T_0 = wc \Rightarrow T = w\sqrt{s^2 + c^2}$

اگر مبدأ مختصات به اندازه c از پایین‌ترین نقطه‌ی کابل پایین‌تر باشد معادله‌ی زیر طول s کابل و فاصله‌ی افقی x را به هم مربوط می‌کند.

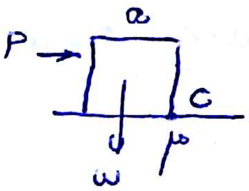
$s = c\sinh\frac{x}{c} \Rightarrow y = c\cosh\frac{x}{c}$: معادله منحنی زنجیری

$$\Rightarrow y^2 - s^2 = c^2 \Rightarrow \boxed{T_0 = wc,\quad W = ws,\quad T = wy} \qquad h = y_A - c$$

که اگر پایه‌های A و B هم تراز باشند h شکم کابل است. که کاربرد: محاسبه طول کابل

$\mu = \tan\phi$ $\qquad \phi$: زاویه اصطکاک ← بین N و R

- در مسائل اصطکاک که بحث واژگونی نیز مطرح می‌شود باید لغزیدن جسم را نیز بررسی کنیم. سپس با توجه به بررسی این موارد تصمیم‌گیری کنیم که جسم با واژگونی از تعادل خارج می‌شود یا لغزش.



اگر: گشتاور P حول C $>$ گشتاور w حول C ⟸ واژگونی

" " " $<$ " " " ⟸ عدم واژگونی

" " " $=$ " " " ⟸ بلوک در آستانه‌ی واژگونی

- فاصله‌ی افقی نقطه اثر نیروی عمودی سطح از مرکز بلوک برابر $x = \frac{Ph}{w}$ است. که اگر $x = \frac{a}{2}$ باشد جسم در آستانه واژگونی و اگر $\mu w = P$ جسم در آستانه لغزش است.

اصطکاک تسمه‌ها و کابل‌ها:

$T_2 = T_1 e^{\mu\theta}$ $\qquad \mu$: ضریب اصطکاک

اگر n دور پیچیده شده باشد $\theta = 2\pi n$ می‌شود ← زاویه تماس با قرقره: θ

- T_2 سمتی از طناب در نظر گرفته می‌شود که تمایل به حرکت در آن جهت است.

— در مسائل اصطکاک تشخیص نیروی بزرگتر از نظر حرکت اهمیت دارد.

در برخی مسائل قرقره متحرک و طناب ثابت است که در این مسائل نیروی کشش طناب در طرفی که چرخش حول محور قرقره هم‌جهت با چرخش قرقره است کوچکتر از نیروی طرف دیگر است. دلیل آن لغزش تسمه حالت قبل است.

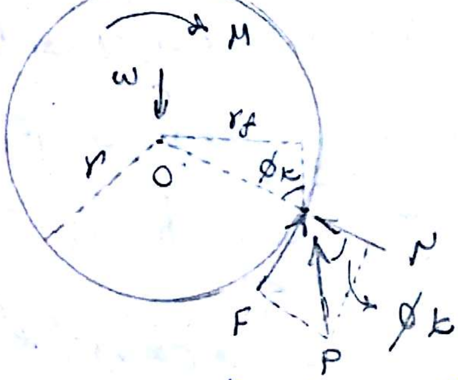
* عبور کامل از روی n قرقره با زوایای تماس θ_i و ضرایب اصطکاک μ_i که F_1 نیروی ابتدای طناب و F_2 نیروی انتهای طناب باشد:

$$F_2 = F_1 e^{\sum \mu_i \theta_i}$$

— اصطکاک تسمه با قرقره شیاردار: (β : زاویه شیار قرقره)

$$T_2 = T_1 e^{\mu\theta/\sin\beta/2}$$

اصطکاک در یاتاقان استوانه‌ای:



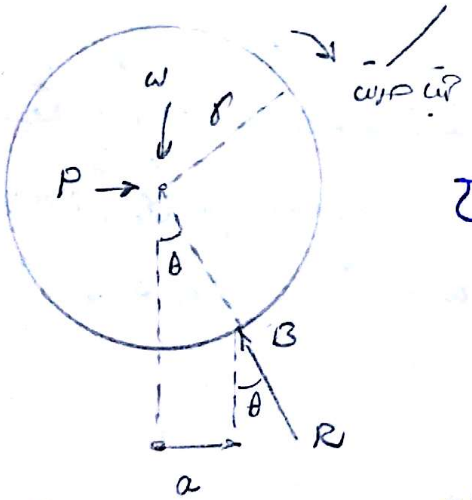
$$M = wr\sin\phi_k \qquad \tan\phi_k = \mu_k$$

$$r\sin\phi_k = r_f$$

دایره‌ای به شعاع r_f و به مرکزیت O ← دایره اصطکاک.

یاتاقان ناقص روغن‌کاری شود ← $\mu_k = \phi_k \Rightarrow M = wr\mu_k$

مقاومت غلتشی:



$$\sum M_B = 0 \Rightarrow wa = Pr\cos\theta \xrightarrow{\theta\ \text{کوچک}} P = \frac{wa}{r}$$

فاصله a ثابت ← ضریب مقاومت غلتشی

ممان اینرسی: $I_x = \int y^2 dA \qquad I_y = \int x^2 dA$

که نسبت به محور x

— المان‌های سطح باید در روابط فوق باید موازی محورها باشد که نسبت به آن ممان را حساب می‌کنیم.

حاصلضرب اینرسی: $I_{xy} = \int_A xy\, dA$

ممان اینرسی قطبی: $J_o = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA = I_x + I_y$

که در واقع حول محور عمود بر صفحه‌ی xoy

- در یک سطح متقارن حاصلضرب اینرسی نسبت به محور تقارن و هر محور عمود بر آن صفر است. ممان محور گذرنده از مرکز

قضیه‌ی محورهای موازی (شرط: یک محور از مرکز سطح عبور کند)

$$I_a = \bar{I}_b + A d^2$$

سطح ناحیه — فاصله‌ی دو محور

$$J_o = \bar{J}_c + A d^2$$: مشابه → ممان قطبی

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + \bar{x}\bar{y}A$$

برای بررسی ممان و حاصلضرب اینرسی کافی است در روابط داده شده تغییر متغیر $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ را به کار ببریم.

شعاع ژیراسیون :

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad r_o = \sqrt{\frac{J_o}{A}}$$

چرخش محورها در جهت پادساعتگرد به اندازه‌ی θ :

$$I_{x'} = I_x \cos^2\theta + I_y \sin^2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{y'} = I_x \sin^2\theta + I_y \cos^2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

$$\Rightarrow I_x + I_y = I_{x'} + I_{y'}$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta \quad \Rightarrow I_{x'}I_{y'} - I_{x'y'}^2 = I_x I_y - I_{xy}^2$$

- بنابراین مقادیر ممان وابسته به زاویه چرخش است. محورهایی که ممان اینرسی Max یا Min را دارند محور اصلی می‌نامند. اگر θ_p زاویه محور اصلی باشد آنگاه :

$$\tan 2\theta_p = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$ ⇐ دو مقدار می‌دهد ⇐ دو محور اصلی متعامد

(جهات اصلی)

- حاصلضرب اینرسی یک مقطع نسبت به محورهای اصلی صفر است.

- مقادیر ویژه این تانسور ممان اینرسی Max و Min می‌باشند.

تانسور ممان اینرسی :

$$\begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix}$$

$$J_1 = I_x + I_y$$ تغییرناپذیر اول

جمع قطر اصلی تانسور

$$J_2 = I_x I_y - I_{xy}^2$$ تغییرناپذیر دوم

دترمینان تانسور

- قضیه: با دو محور مختصات اصلی، ممان اینرسی نسبت به حول کلیه محورهایی که از مرکز مختصات دو دستگاه می‌گذرند برابر است.

- درصورت برابری ممان اینرسی حول محورهای اصلی، ممان اینرسی حول هر محوری که از مرکز مختصات محورهای اصلی می‌گذرد یکسان است.

- هر محور تقارن و محور عمود بر آن یک دستگاه محورهای اصلی می‌سازند، به محور تقارن‌های نامتقارن می‌توان دو دستگاه محور اصلی تشکیل داد.

زوج نیروها (کوپل‌ها) هنگامی کار انجام می‌دهند که حول یک محور عمود بر صفحه دوران داشته باشند.

در کوپل: کار برای جابجایی: $\omega_1 = 0$ ، کار برای دوران: $dW_2 = Fr\,d\theta = M\,d\theta$

اصل کار مجازی: برای یک جسم صلب در وضعیت تعادل مجموع کار مجازی نیروها و کوپل‌های خارجی وارده بر آن برای یک جابجایی یا دوران مجازی صفر است.

$\delta W = F\cos\theta\,\delta s$ ، $\delta W = M\,\delta\theta$

نیروهای فعال کار انجام می‌دهند و غیرفعال کار انجام نمی‌دهند ::

مراحل راه حل مسائل: I. رسم شکل آزاد و مشخص کردن نیروهای فعال و غیرفعال

II. دستگاه مختصات با مبدأ در یک نقطه ثابت.

III. تعیین مختصات و جابجایی‌های موثر یک نیروی فعال

IV. یافتن دیفرانسیل مجازی نقطه اثر نیروها

V. یافتن کار مجازی از ضرب نیرو در تغییر مکان مجازی نقطه اثر آن

VI. صفر قرار دادن مجموع کارهای مجازی و یافتن مجهولات

- علامت نیروها با توجه به جهت محورها تعیین می‌شود (کار مثبت یا منفی)

شهاب ::

۹۶/۳/۱۸