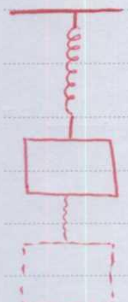
www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

Subject: ۹۰٫۱۱٫۱۶ جلسه اول   دکتر احدیان   ارتعاشات
Year. Month. Date. ( )

برای جرم و فنر ارتعاشات را بعد از رسیدن به تعادل بررسی می‌کنیم. مهم نیست که دستگاه جرم و فنر قائم است یا افقی. در قائم: از جایی که به کشش آمده   در افقی: از جای طول طبیعی



$M\ddot{x} + kx = 0$ ①   معادله‌ی جرم و فنر

x از نقطه‌ی تعادل است.

$x = Ae^{i}$

$$\xrightarrow[\text{تقسیم بر } M]{①} \ddot{x} + \frac{k}{M}x = 0 \xrightarrow[\text{فرکانس طبیعی}]{\sqrt{\frac{k}{M}} = \omega} \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

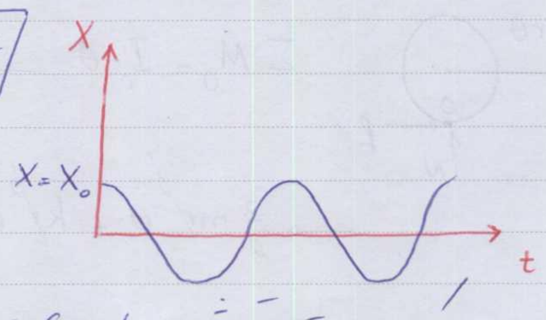
$$X = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \qquad X = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ X = X_0 \end{matrix}\right\} \rightarrow X_0 = A\sin 0 + B\cos 0 \rightarrow \underline{X_0 = B}$$

پس $\rightarrow X = A\sin\omega t + X_0\cos\omega t \quad \Big| \begin{matrix} t = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{matrix}$

$\rightarrow A\omega\cos 0 - X_0\omega\sin 0 = 0 \rightarrow \underline{A = 0}$

بنابراین $\rightarrow \boxed{X = X_0\cos\omega t}$



معادله‌ی کلی سیستم ارتعاشی $X = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ می‌باشد.

PAPCO

①

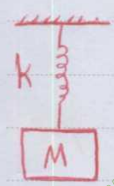
www.g-alm.ir

www.DastyarKhoob.ir

www.DastyarKhoob.ir

Subject:
Year. Month. Date.

حال اگر با سرعت اولیه رها کنیم:

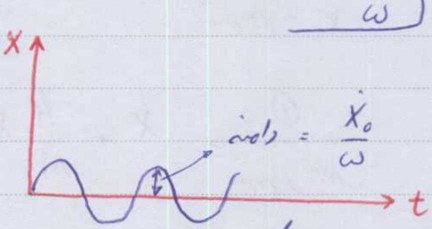


$$\ddot{X} + kX = 0 \qquad \left| \begin{array}{l} t=0 \\ X=0 \end{array} \right. ① \quad \left| \begin{array}{l} t=0 \\ \dot{X}=\dot{X}_0 \end{array} \right. ②$$

$$\xrightarrow{①} 0 = 0 + B\cos 0 \longrightarrow \boxed{B=0} \qquad X = A\sin\omega t$$

$$\left.\begin{array}{l} t=0 \\ \dot{X}=\dot{X}_0 \end{array}\right\} \longrightarrow \dot{X}_0 = A\omega \cos\omega t - B\omega \sin 0 \longrightarrow \boxed{A = \frac{\dot{X}_0}{\omega}}$$

معادله‌ی ارتعاشی $\boxed{X = \frac{\dot{X}_0}{\omega}\sin\omega t}$



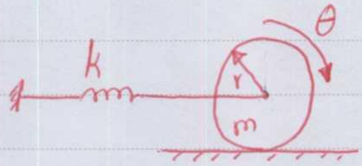
$$X = \frac{\dot{X}_0}{\omega}\sin\omega t + X_0\cos\omega t$$

اگر بکشیم و با ضربه رها کنیم:

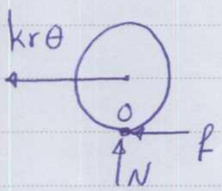
یعنی جرم را به مقدار X_0 پایین می‌کشیم و با سرعت $\dot{X}_0$ رها می‌کنیم.

جلسه‌ی دوم 90,11,18

مثال: فرکانس طبیعی سیستم؟



راه اول:



$$\Sigma M_0 = I_0\ddot{\theta} \longrightarrow \frac{3}{2}mr^2\ddot{\theta} = -kr\theta(r)$$

$$\longrightarrow \frac{3}{2}m\cancel{r^2}\ddot{\theta} + k\cancel{r^2}\theta = 0 \longrightarrow \frac{3}{2}m\ddot{\theta} + k\theta = 0$$

PAPCO

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac

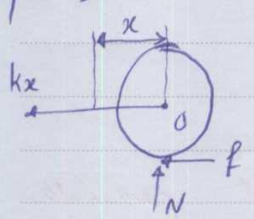
www.g-alm.ir

www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{3}\frac{k}{m}\theta = 0 \longrightarrow$$ فرکانس طبیعی $$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}}$$

راه دوم:



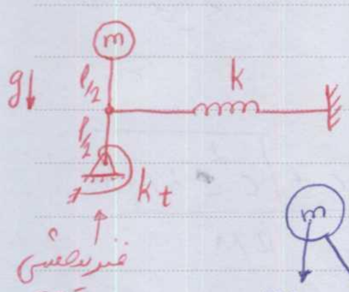
$$m\ddot{x} = -kx - f \quad (1)$$

$$\Sigma M_O \overset{(2)}{=} I\ddot{\theta} \longrightarrow fr = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta} = \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{\ddot{x}}{r}\right)$$

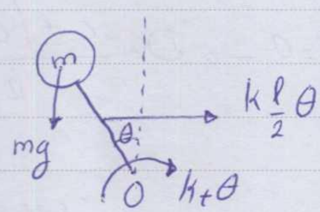
$$\longrightarrow fr = \frac{1}{2}mr\ddot{x} \longrightarrow \boxed{f = \frac{1}{2}\ddot{x}} \quad (3)$$

$$(1),(3) \longrightarrow m\ddot{x} = -kx - \frac{1}{2}\ddot{x} \longrightarrow \frac{3}{2}m\ddot{x} + kx = 0 \longrightarrow \boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{2k}{3m}}}$$

مثال: فرکانس طبیعی سیستم روبرو؟



برای حل ابتدا سیستم را منحرف می‌کنیم:



تقریبا $mgl\theta$

$$\Sigma M_O = I_O\ddot{\theta} \longrightarrow -k_t\theta - k\frac{l}{2}\theta\left(\frac{l}{2}\right) + mgl\sin\theta = ml^2\ddot{\theta}$$

$$ml^2\ddot{\theta} + \left(k_t + k\frac{l^2}{4} - mgl\right) = 0$$

$$\longrightarrow \omega_n = \left(\frac{k_t + k\frac{l^2}{4} - mgl}{ml^2}\right)^{1/2}$$

سه حالت ممکن است پیش بیاید:

P4PCO

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac

www.g-alm.ir

www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject:

Year. Month. Date. ( )

① → $k_t + k\frac{l^2}{4} > mgl$ سیستم پایدار است.

② → $k_t + k\frac{l^2}{4} = mgl$ سیستم در مرز پایداری است.

③ → $k_t + k\frac{l^2}{4} < mgl$ سیستم ناپایدار است.

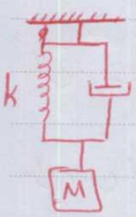
جلسه سوم ۱۱,۲۳

میرایی

damping

$f_s = c\dot{x}$ نیروی میرایی با سرعت متناسب است و از رابطه ی روبرو محاسبه می‌شود.

ضریب میرایی را با c نشان می‌دهند.



$$M\ddot{x} + kx + c\dot{x} = 0$$

معادله مشخصه $MD^2 + CD + k = 0 \to D = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4Mk}}{2M}$

$$X = Ae^{D_1 t} + Be^{D_2 t}$$

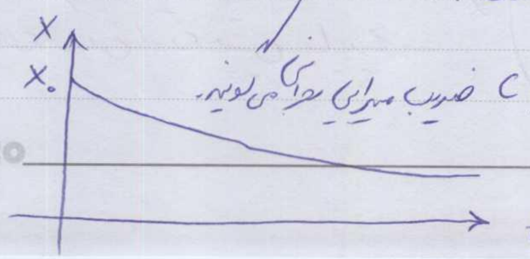
بحث در حالات مختلف:

$X = Ae^{-\frac{c}{2M}t} + Bte^{-\frac{c}{2M}t}$ $c^2 - 4km = 0$ ①

شرایط اولیه $\left| \begin{array}{l} t = t_0 = 0 \\ X = X_0 \end{array} \right. \to X = X_0 e^{-\frac{c}{2M}t}$

در این حالت سیستم ارتعاش نخواهند داشت.

در این حالت، حالت بحرانی می‌گویند و به c ضریب میرایی بحرانی می‌گویند.



$\boxed{C_{cr} = 2\sqrt{km}}$

PAPCO

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac

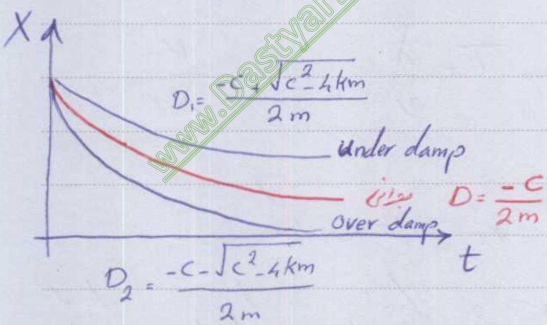
www.g-alm.ir

www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

Subject:
Year. Month. Date. ( )

② $c^2-4km>0$ ریشه‌های D بدست می‌آید که هر دو منفی خواهند بود. یعنی کوچکتر از حالت

قبلی و میرایی بزرگتر.



در این حالت هم نوسان رخ نمی‌دهد.

③ $c^2-4km<0$

$$D=\frac{-c\pm i\sqrt{4km-c^2}}{2m}$$

$$X=e^{-\frac{c}{2m}t}\left[A\sin\mu t+B\cos\mu t\right]\qquad \mu=\sqrt{\frac{4km-c^2}{4m^2}}=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{c^2}{4m^2}}$$

در این حالت دامنه‌ی نوسانات کم می‌شود تا صفر برود. ξ همیشه بین صفر و یک است.

به نسبت $\frac{c}{c_{cr}}$ ، ξ می‌گویند.

$$\frac{c}{2M}=\frac{c}{C_{cr}}\cdot\frac{C_{cr}}{2M}=\xi\cdot\frac{2\sqrt{KM}}{2M}=\xi\sqrt{\frac{K}{M}}=\xi\omega_n$$

در معادله‌ی بالا به جای $\frac{c}{2M}$ ، $\xi\omega_n$ قرار می‌دهیم و معادله را بازنویسی می‌کنیم.

$$X=e^{-\xi\omega_n t}\left[A\sin\mu t+B\cos\mu t\right]\qquad \boxed{\mu=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

ω_n همان فرکانس طبیعی سیستم است. فرکانس میرایی $\omega_d=\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

$$X=e^{-\xi\omega_n t}\left(A\sin\omega_d t+B\cos\omega_d t\right)$$

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac

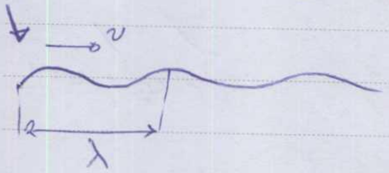
www.g-alm.ir

www.DastyarKhoob.ir

Subject:
Year. Month. Date. ( )

با توجه به اینکه $\omega_d < \omega_n$ پس فرکانس نوسانات کاهش می‌یابد.

جاده



$$\frac{\lambda}{T} = v \to T = \frac{\lambda}{v} \quad , N = \frac{v}{\lambda}$$

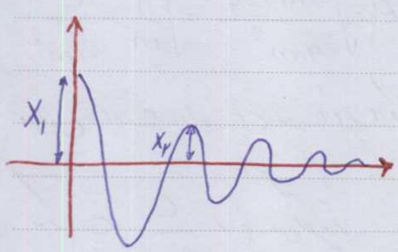
$$2\pi N = \frac{2\pi v}{\lambda} = \omega \leftarrow \text{فرکانس جاده}$$

اگر فرکانس جاده با فرکانس ماشین یکی شود تشدید رخ می‌دهد که خوب نیست.

Force Vibration:

معادله‌ی کلی $M\ddot{X} + C\dot{X} + kX = f_0 \sin \Omega t$

جلسه چهارم ۹۰٫۱۱٫۲۵



$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{e^{-\xi\omega_n(t+T)}} = e^{\xi\omega_n T}$$

دوره تناوب $\frac{2\pi}{\omega_d}$ می‌باشد.

$$\ln\frac{X_1}{X_2} = \xi\omega_n T \approx 2\pi\xi$$

بدون تقریب: $\ln\frac{X_1}{X_2} = \xi\omega_n\frac{2\pi}{\omega_d} = \xi\omega_n\frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n} = \xi\frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}$

PAPCO

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac

www.g-alm.ir

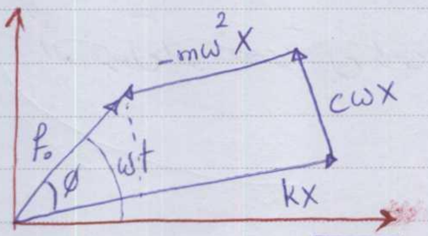
www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نمایش برداری معادله‌ی ارتعاشی:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 \sin\omega t$$



$$\tan\phi = \frac{c\omega X}{kX - m\omega^2 X} = \frac{\frac{c}{C_{cr}} \cdot C_{cr}\,\omega}{k\left(1 - \frac{m}{k}\omega^2\right)}$$

$$\tan\phi = \frac{\xi\,\frac{2\sqrt{km}}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{2\xi\,\omega/\omega_n}{\left(1 - \left(\omega/\omega_n\right)^2\right)}$$

اختلاف فاز $= \phi$

معادله‌ی ارتعاشی در این حالت $X = A\sin(\omega t - \phi)$ می‌باشد که ϕ از رابطه‌ی بالا به دست می‌آید. اگر A را هم بیابیم مسئله حل می‌شود. (منظور از X در دیاگرام بالا همان بیشینه دامنه یعنی A می‌باشد).

می‌توان فرمول فیثاغورس را برای مثلث قائم‌الزاویه نوشت:

$$f_0^2 = (kA - m\omega^2 A)^2 + (c\omega A)^2$$

$$\longrightarrow A = \frac{f_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} = \frac{f_0/k}{\sqrt{\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}}$$

دامنه‌ی ارتعاشی

$$= \frac{f_0/k}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{c}{C_r} \cdot \frac{2\sqrt{mk}}{k}\,\omega\right)^2}} = \frac{f_0/k}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}}$$

PAPCO

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac

www.g-alm.ir

www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject:

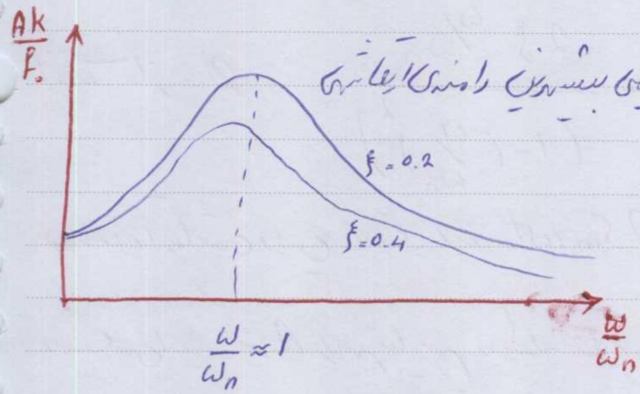
Year. Month. Date.

www.DastyarKhoob.ir

در نهایت جواب آخر سؤال: $X = A \sin(\omega t - \phi)$ $\boxed{\frac{\phi}{\omega} : \text{lag time}}$

اگر فرمول آخر صفحه‌ی قبل را بی‌بعد کنیم:

$$\frac{Ak}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}}$$



زمانی که $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$ تشدید رخ می‌دهد یعنی بیشترین دامنه‌ی ارتعاشی را خواهیم داشت.

اگر $\xi = 0$ باشد ناگهان دامنه تا مقدار خیلی زیادی افزایش می‌یابد.

جلسه پنجم ۹۰/۱۱/۳

فرکانس طبیعی سازه‌های ساختمانی:

$$\delta = \frac{Fl^3}{3EI} \longrightarrow F = \frac{3EI}{l^3}\,\delta \longrightarrow \boxed{k = \frac{3EI}{l^3}}$$

ضریب سختی سازه

PAPCO

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac

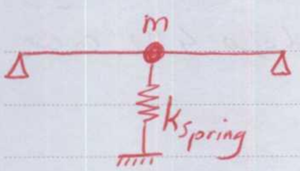
www.g-alm.ir

www.DastyarKhoob.ir

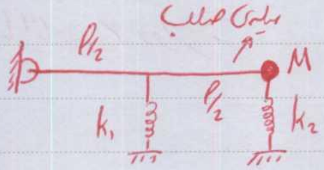
Subject:
Year. Month. Date. ( )

چون اگر تغییر طول δ ایجاد کنیم هم روی فنر و تیر به یک اندازه تغییر مکان می‌دهند پس همانند دو فنر موازی با هم عمل می‌کنند.

$$k_{eff} = k_{beam} + k_{spring}$$

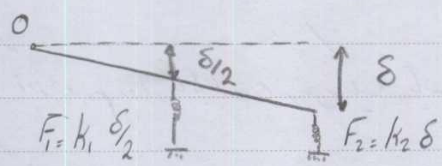


با محاسبه جابجایی در وسط تیر در اثر اعمال یک نیرو می‌توان k را بدست آورد.



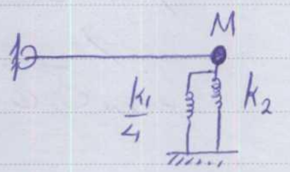
فرکانس این سیستم؟

یک تغییر مکان فرضی به سیستم اعمال می‌کنیم:



این معادل به این معنی است که می‌توانیم $T = F_1 \frac{l}{2} = \frac{k_1}{4} \delta . l$ گشتاور نیروی F_1 حول O

به جای فنر وسطی یک فنر با سختی $\frac{k_1}{4}$ با k_2 موازی کنیم. پس سیستم معادل می‌شود:



$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1/4 + k_2}{M}}$$

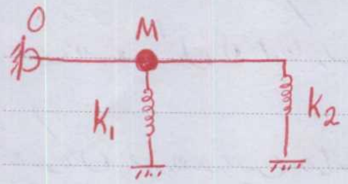
P4PCO

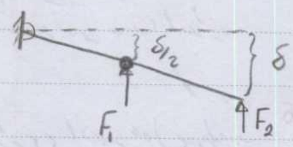
www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac

www.g-alm.ir

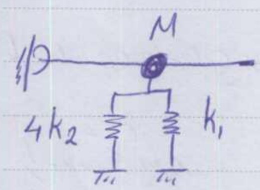
www.DastyarKhoob.ir

Subject:
Year. Month. Date. ( )





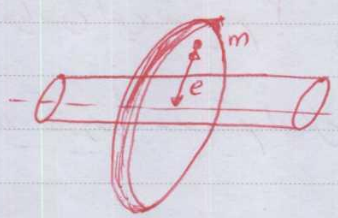
پس می‌توانیم فنری با $T = k_2 \delta . l = k_2 (\frac{\delta}{2})(\frac{l}{2}) 4$ که معادل فنر 2 حول O



سختی $4k_2$ همراه با k_1 در وسط تیر بگذاریم.

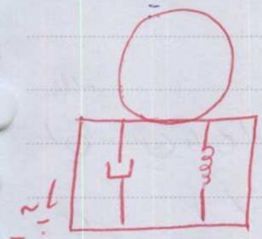
$$\omega = \sqrt{\frac{4k_2 + k_1}{M}}$$

نابالانسی دوار:



نیروی مرکز گریز $F = me\omega^2$

اگر جسم دوار نابالانسی روی یک پایه باشد، می‌توانیم پایه را با یک فنر و دمپر مدلسازی کنیم:



در این حالت معادله‌ی دیفرانسیل همان معادله دیفرانسیل است که قبلاً گفته شد ($m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$) فقط در حل این مسائل دامنه‌ی ارتعاشی تفاوت می‌کند:

$$x = X \sin(\omega t - \phi)$$

$$X = \frac{me\omega^2}{k\sqrt{\left[\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]}}$$

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac

www.g-alm.ir

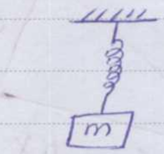
www.DastyarKhoob.ir

Subject:
Year. Month. Date. ( )

انرژی:

انرژی پتانسیل فنر $= \frac{1}{2} kx^2$

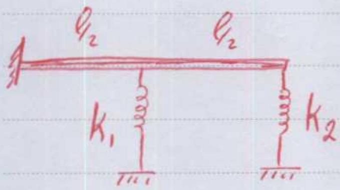
انرژی جنبشی $= \frac{1}{2} m\dot{x}^2$



$$Total = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

$$\frac{d}{dt}(E) = 0 \rightarrow \frac{1}{2} k(2x\dot{x}) + \frac{1}{2} m(2\ddot{x}\dot{x}) = 0 \rightarrow \boxed{m\ddot{x} + kx = 0}$$

سؤال:



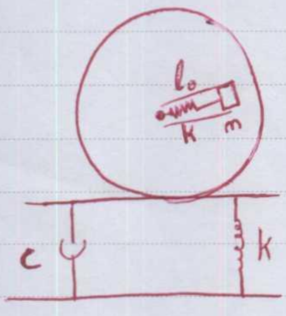
فرکانس نوسانی با استفاده از روش انرژی برای حالات زیر:

۱) همه‌ی جرم در نقطه‌ی وسط باشد و تیر صلب

۲) تیر صلب است و دارای توزیع جرم است.

جلسه ششم ۹۰,۱۲,۷

سؤال: معادله‌ی نوسان پایه هنگام چرخش دیسک. سیستم افقی است.



$$me\omega^2 = m(l_0 + \Delta)\omega^2 = k\Delta$$

$$F_0 = me\omega^2 \sin \omega t$$

PAPCO

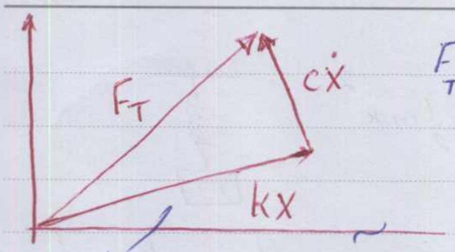
www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac

www.g-alm.ir

www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$F_T = \sqrt{(kx)^2 + (c\omega x)^2}$$

$$= kx\sqrt{1 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

F_T نیرویی است که پایه هنگام لرزش و نوسان اجسام روی آن احساس می‌کند.

$$\frac{F_0}{kx} = \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\rightarrow \quad \frac{F_T}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

PAPCO

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac

www.g-alm.ir

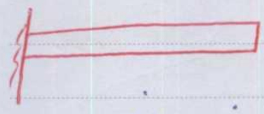
www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

Subject:
Year. Month. Date. ( )

جلسه هفتم ۱۲/۹

روش انرژی: با برابر قرار دادن U_{max} و T_{max} می‌توانیم فرکانس طبیعی سیستم را بیابیم.

تیر یک سر درگیر:



$\int \frac{1}{2} \varepsilon \sigma \, dV$ = انرژی پتانسیل

ρ: جرم واحد طول

انرژی جنبشی $= \int \frac{1}{2} \dot{y}^2 \rho A \, dx = \omega^2 \int \frac{1}{2} y^2 \rho A \, dx$

بنابراین:

$$\omega^2 = \frac{\int \frac{1}{2} \varepsilon \sigma \, dV}{\int \frac{1}{2} y^2 \rho A \, dx} = \frac{\int \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} \, dA \, dx}{\int \frac{1}{2} y^2 \rho A \, dx} = \frac{\int \frac{1}{2E} \left(\frac{MC}{I}\right)^2 dA \, dx}{\int \frac{1}{2} y^2 \rho A \, dx}$$

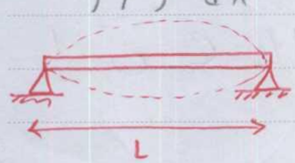
در نهایت

$$\omega^2 = \frac{\int EI \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 dx}{\int \rho y^2 \, dx}$$

این معادله، معادله‌ای کلی برای محاسبه‌ی فرکانس طبیعی تیرها است.

$$\omega^2 = \frac{\int EI \, y''^2 \, dx}{\int \rho y^2 \, dx}$$

مثال: تیر دو سر ساده:



شکل ارتعاش این تیر می‌توانیم بنویسیم:

$$y = A \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$\omega^2 = \frac{\int_0^L EI \left(\frac{d}{dx^2}\left(\sin \frac{\pi x}{L}\right)\right)^2 dx}{\int_0^L \rho \left(\sin^2 \frac{\pi x}{L}\right) dx} = \frac{EI}{\rho} \frac{\pi^4}{L^4}$$

PAPCO

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac

www.g-alm.ir

www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

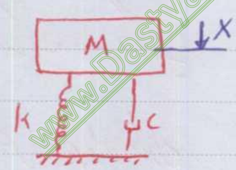
Subject:
Year. Month. Date. ( )

ارتعاشات پیچشی:

$I\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + K\theta = T_0 \sin\omega t$

جلسه هشتم ۱۲٫۱۴

زلزله:



$y = y_{max} \sin\omega t$

$M\ddot{X} + C(\dot{X} - \dot{y}) + K(X - y) = 0$ تغییر متغیر $X - y = Z$

$M(\ddot{Z} + \ddot{y}) + C\dot{Z} + KZ = 0$

$\rightarrow m\ddot{Z} + C\dot{Z} + KZ = -m\ddot{y} = m y_{max} \omega^2 \sin\omega t$

$X = Z + Y$

یافتن C معادل:

$mg\cos\theta$

$$W = \int_{-\theta_1}^{\theta_1} \mu mg \cos\theta \, r \, d\theta = \pi C_{eq} \omega X^2$$

در حالت میرایی غیر لزجی می‌توانیم C_{eq} را از طریق مبحث انرژی به دست آوریم.

PAPCO

www.g-alm.ir

www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject:

Year. Month. Date. ( )

جلسه نهم ۱۳۹۱/۱/۱۵ سه‌شنبه

تبدیل لاپلاس:

$$f(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

تبدیل لاپلاس 1 اگر $f(t)=1 \longrightarrow f(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_0^\infty = \boxed{\frac{1}{s}}$

معکوس لاپلاس:

$$f(t) = \int_0^{+\infty} f(s)\, e^{-st}\, ds$$

$f(s) = \frac{1}{s} \longrightarrow f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{s} e^{-st}\, ds = -e^{-st}\Big|_0^\infty = 1 \longleftarrow$ اصطلاحاً فرمول معکوس مطلقاً ثابت

$$X(s) = \int_0^\infty X(t)\, e^{-st}\, dt \qquad \int_0^\infty \dot{X}(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^\infty \underbrace{e^{-st}}_{u}\, \underbrace{\dot{x}\, dt}_{dv} = e^{-st} x(t)\Big|_0^\infty - \cdots$$

در نهایت:

$$\boxed{\mathcal{L}\, \dot{X}(t) = S X(s) - X(0)}$$

حل معادلات ارتعاشی با استفاده از تبدیل لاپلاس:

$$m\ddot{X} + c\dot{X} + kX = f(t)$$

$$\mathcal{L}(m\ddot{X}) + \mathcal{L}(c\dot{X}) + \mathcal{L}(kX) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(s)\, e^{st}\, ds$$

$$m\left[S^2 X(s) - S X(0) - \dot{X}(0)\right] + c\left[S X(s) - X(0)\right] + k X(s) = f(s)$$

$$X(s)\left[mS^2 + cS + k\right] = f(s) + \dot{X}(0) + \cancel{S X(0)} + \cancel{c X(0)}$$

با فرض جابجایی اولیه نداشته باشیم

$X(0)$ و $\dot{X}(0)$ بستگی به شرایط اولیه سیستم یعنی مکان و سرعت اولیه دارند.

1: $f(s)=0$، $c=0$

$$X(s) = \frac{m\dot{X}(0)}{mS^2 + \cancel{cS} + k} = \frac{\dot{X}(0)}{S^2 + \omega^2}$$

PAPCO

www.g-alm.ir

www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$X(s)=\frac{\dot{X}(0)}{s^2+\omega^2}=\frac{\omega\,\dot{X}(0)}{\omega(s^2+\omega^2)} \qquad X(t)=\frac{\dot{X}(0)}{\omega}\sin(\omega t)$$

$$\mathcal{L}\,\sin\omega t=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$f(t)=f_0 e^{-\alpha t}\ ,\ ۲$$

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f(t)=f_0 e^{-\alpha t}$$

$$X(s)=\frac{\gamma s+z}{s^2+\alpha s+\beta}$$

وقتی در لاپلاس مخرج ۱ یا ۲ درجه بزرگتر از صورت باشد باید کسر را شکست. به ریشه‌های مخرج کسر را می‌شکنیم.

$$X(s)=\frac{u_1}{(s+\alpha)}+\frac{u_2}{(s+\beta)}$$

مثلاً $X(s)=\dfrac{\quad}{s^4+\alpha s^2+\beta}=\dfrac{a_1 s+a_2}{s^2+\gamma}+\dfrac{b_1 s+b_2}{s^2+\xi}$

«ضربه»

$\delta(t-t_0)$ این تابع همه‌جا صفر است ولی در $t=t_0$ می‌شود یک. یک تغییر سرعت در لحظه t_0 معادل تابع δ است.

$$\text{Pulse}=m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(mv)=f \rightarrow m(v_2-v_1)=\int f\,dt \qquad \hat{f}=\int f\,dt$$

$$m(v_2-\cancel{v_1})=\hat{f} \rightarrow \boxed{v_0=\frac{\hat{f}}{m}} \qquad X=\frac{\dot{X}(0)}{\omega}\sin\omega t=\frac{\hat{f}}{m\omega}\sin\omega t$$

PAPCO

به‌جای سرعت اولیه در فرمول X باید impulse تقسیم بر جرم را قرار دهیم.

www.g-alm.ir

www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject:
Year. Month. Date.

جلسه دهم ۱۳۹۱/۱/۲۰

Impulse یک $\rightarrow \frac{Impulse}{m} =$ سرعت اولیه

اگر نیرویی تا زمان T_p به سیستم اعمال شود، مجموعه‌ای از یک Impulse را هم داریم و در این صورت باید از انتگرال کانولوشن استفاده کنیم.

$$x = \int_0^{T_p} f(\xi)\, h(t-\xi)\, d\xi$$

خیلی اوقات که در انتگرال $e^{-\alpha}$ را هم داریم بهتر است از روش زیر انتگرال بگیریم:

$$\int_0^{T_p} — = \int_0^{\infty} — - \int_{T_p}^{\infty} —$$

لاگرانژ:

$\mathcal{L} = T - U =$ انرژی جنبشی - انرژی پتانسیل

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \\ U &= \frac{1}{2} k x^2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

معادلات لاگرانژ: $\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = f_i$

q_i یک متغیر فضایی است که مثلاً می‌تواند x یا y یا z یا θ باشد. در مثال بالا:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = f_i \\ &\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{در نهایت}} \frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = f_x \rightarrow m\ddot{x} + kx = f$$

PAPCO

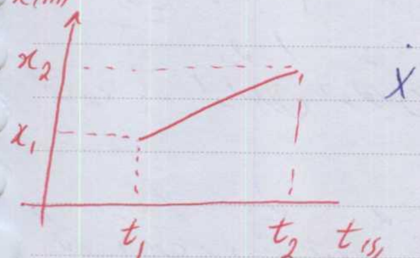
www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac

www.g-alm.ir

www.DastyarKhoob.ir

Subject:
Year. Month. Date. ( )

همانطور که معلوم شد معادله ی لاگرانژ، معادله ی سیستم را به ما نشان می دهد. لاگرانژ برای سیستم های چند درجه آزادی هم استفاده می شود.



$$\dot{X} = \frac{dX}{dt} = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad \text{یا} \quad \boxed{\dot{X} = \frac{X_n - X_{n-1}}{\Delta t}} \quad (I)$$

یعنی هرجا $\dot{x}$ داشتیم معادله ی (I) را قرار می دهیم.

$$\ddot{X} = \frac{X_{n+1} - 2X_n + X_{n-1}}{(\Delta t)^2}$$

$$m\ddot{X} + c\dot{X} + kX = f \rightarrow m\left(\frac{X_{n+1} - 2X_n + X_{n-1}}{(\Delta t)^2}\right) + c\left(\frac{X_n - X_{n-1}}{\Delta t}\right) + kX_n = f$$

از این رابطه عبارت X_{n+1} را استخراج می کنیم:

$$X_{n+1} = ---$$
$$= f(X_n, X_{n-1}, \Delta t)$$

مثلاً → for $t = 5s$, $\Delta t = 0.1s$ جدول کامل می کنیم

X_{n+1}	X_n	X_{n-1}

$n = 1$ گام اول $\Delta t = 0.1s \rightarrow X_0 =$ شرایط اولیه

مسئله: معادله ی $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ را برای $m = 1\,kg$, $k = 1$, $c = 2$ در نظر بگیرید. x را بر حسب t در 6 ثانیه اول رسم کنید. $\Delta t = 0.25$ و با پاسخ تحلیلی مقایسه کنید.

$X(0) = 0$
$\dot{X}(1) = 0$

www.g-alm.ir

www.DastyarKhoob.ir

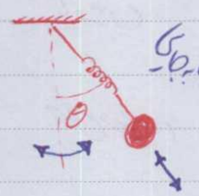
DastyarKhoob

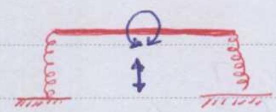
Subject:

Year. Month. Date. ( )

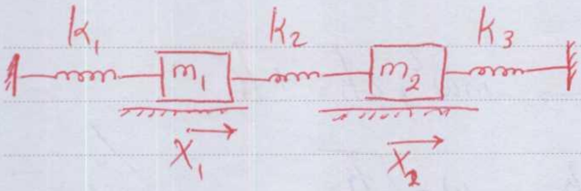
جلسه یازدهم ۱۳۹۱/۱/۲۲

دستگاه‌های دو درجه آزادی





معادلات ارتعاشی مربوط به سیستم مقابل را بنویسید.



$$m_1 \ddot{X}_1 + k_1(X_1 - 0) + k_2(X_1 - X_2) = 0$$

$$m_2 \ddot{X}_2 + k_2(X_2 - X_1) + k_3(X_2 - 0) = 0$$

اگر حرکت نوسانی را هارمونیک فرض کنیم در نتیجه $\ddot{X}_1 = -\omega^2 X_1$ $\quad \ddot{X}_2 = -\omega^2 X_2$

از X_1 معادله اول فاکتور می‌گیریم.

$$\begin{cases} -m_1\omega^2 X_1 + k_1 X_1 + k_2(X_1 - X_2) = 0 \\ -m_2\omega^2 X_2 + k_2(X_2 - X_1) + k_3 X_2 = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1(-m_1\omega^2 + k_1 + k_2) - k_2 X_2 = 0 \\ X_2(-m_2\omega^2 + k_2 + k_3) - k_2 X_1 = 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} X_1(-m_1\omega^2 + k_1 + k_2) + X_2(-k_1) = 0 \\ X_1(-k_2) + X_2(-m_2\omega^2 + k_2 + k_3) = 0 \end{aligned}$$

برای این که معادله جواب داشته باشد باید

$$\begin{bmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$AX = 0$$

دترمینان ضرایب صفر باشد.

PAPCO

www.g-alm.ir

www.DastyarKhoob.ir

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\det(A)=0$ با فرض $k_1=k_2=k_3=k$ و $m_1=m_2=m$ سوال را حل می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}-m\omega^2+2k & -k\\ -k & -m\omega^2+2k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix}=0$$

$$\det(A)=(-m\omega^2+2k)^2-k^2=0 \rightarrow -m\omega^2+2k=\pm k$$

$$\rightarrow \begin{cases}-m\omega^2+2k=k \rightarrow m\omega^2=k \rightarrow \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\\ -m\omega^2+2k=-k \rightarrow m\omega^2=3k \rightarrow \omega=\sqrt{\frac{3k}{m}}\end{cases}$$

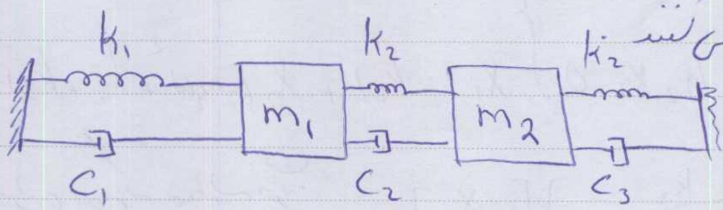
نتیجه این که این سیستم دارای رزونانس طبیعی است

$$(-m\omega^2+2k)X_1-k\,X_2=0$$

$$\rightarrow \frac{X_2}{X_1}=\frac{-m\omega^2+2k}{k}$$

$\xrightarrow{\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}} \frac{X_2}{X_1}=1$ دو جسم هم دامنه اند و در جهت هم حرکت می‌کنند.

$\xrightarrow{\omega=\sqrt{\frac{3k}{m}}} \frac{X_2}{X_1}=-1$ دو جسم هم دامنه اند ولی در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند



میرا گشته:

$$m_1\ddot{X}_1+k_1(X_1-0)+k_2(X_1-X_2)+C_1(\dot{X}_1-0)+C_2(\dot{X}_1-\dot{X}_2)=0$$

$$m_2\ddot{X}_2+k_2(X_2-X_1)+k_3(X_2-0)+C_2(\dot{X}_2-\dot{X}_1)+C_3(\dot{X}_2-0)=0$$

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac

www.g-alm.ir

www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject:

Year. Month. Date. ( )

فرض می‌کنیم $x = Xe^{i\omega t}$. این فرض برای حالت قبلی درست بود ولی برای این حالت جدید جواب نمی‌دهد. در این حالت فرض می‌کنیم $x = Xe^{\omega t}$ پس:

$$\dot{x} = \omega X e^{\omega t} = \omega x \,, \quad \ddot{x} = \omega^2 X e^{\omega t} = \omega^2 x$$

پس در معادلات صفحه‌ی قبل عبارات زیر را جایگزین می‌کنیم،

$$\ddot{X}_1 = \omega^2 X_1 \quad \dot{X}_1 = \omega X_1$$

$$\ddot{X}_2 = \omega^2 X_2 \quad \dot{X}_2 = \omega X_2$$

$$\begin{bmatrix} m_1\omega^2 + k_1 + k_2 + c_1\omega + c_2\omega & -k_2 - c_2\omega \\ -k_2 - c_2\omega^2 & m_2\omega^2 + k_2 + k_3 + c_2\omega + c_3\omega \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 0$$

پاسخ‌های مثبت ω غیرقابل قبول است بلکه ω باید منفی شود یا مختلط چون اگر $\omega > 0$ باشد دامنه مرتب زیاد می‌شود و این منطقی نیست.

$$\omega = -\alpha - i\beta \quad \text{یا} \quad -\alpha + i\beta$$

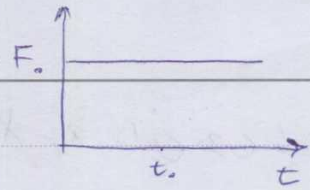
جلسه دوازدهم ۹۱/۱/۲۷

PAPCO

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac

www.g-alm.ir

www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob



پاسخ سیستم جرم و فنر و دمپر به پله:

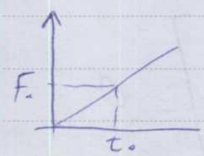
$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$$

$$h(t)=\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{m\omega_d}\sin(\omega_d t)$$

پاسخ به پله $\rightarrow$ $$x(t)=\frac{F_0}{m\omega_d}\int_0^t e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}\sin\omega_d(t-\tau)\,d\tau$$

$$=\frac{F_0}{k}\left[1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\cdot e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t-\phi)\right] \quad \phi=\tan^{-1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

اگر پله از زمان t_0 شروع می‌شود در جواب آخر همه جا به جای t می‌گذاریم $\underline{t-t_0}$



پاسخ سیستم جرم فنر و دمپر به شیب:

$$x(t)=\frac{F_0}{t_0 k}\left[t-\frac{2\xi}{\omega_n}+e^{-\xi\omega_n t}\left(\frac{2\xi}{\omega_n}\cos\omega_d t-\left\{\frac{\omega_d^2-\xi^2\omega_n^2}{\omega_n^2\omega_d}\right\}\sin\omega_d t\right)\right]$$

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac

www.g-alm.ir

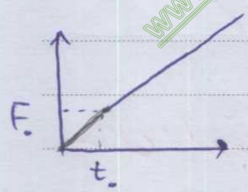
www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

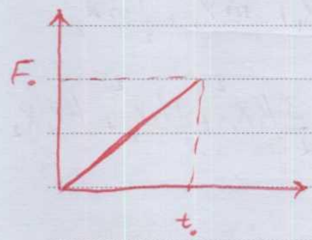
فصل ٤

پاسخ به پله واحد $x(t) = \int_0^t \sin \omega_n (t-\tau)\, d\tau = \frac{1}{k}(1-\cos\omega_n t)$

پاسخ به شیب $x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n t_0}\int_0^t \tau \sin\omega_n (t-\tau)\, d\tau = \frac{F_0}{t_0 k}\left(t - \frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}\right)$



سؤال: پاسخ به شیب روبرو را بیابید.



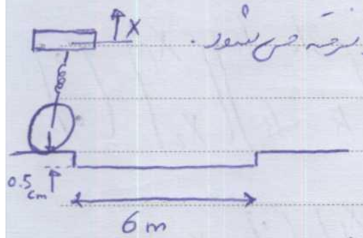
$$F(t) = \frac{F_0}{t_0} t\, u(t) - \frac{F_0}{t_0}(t-t_0)\, u(t-t_0) - F_0\, u(t-t_0)$$

$$x(t) = \frac{F_0}{t_0 k}\left(t - \frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}\right) u(t) - \frac{F_0}{t_0 k}\left[(t-t_0) - \frac{\sin\omega_n (t-t_0)}{\omega_n}\right] u(t-t_0)$$

$$- \frac{F_0}{k}\left[1-\cos\omega_n (t-t_0)\right] u(t-t_0)$$

سؤال: واگنی با سرعت ثابت $3\,m/s$ در امتداد ریلی حرکت می‌کند. قسمتی از ریل به طول $6m$ به اندازه‌ی $0.5cm$ جابجا شده است. پاسخ واگن را به این جابجایی بیابید.

حل: فرض می‌کنیم قسمت جابجا شده به صورت پالس پله‌ای در نظر گرفته می‌شود.



$$-k(x-y) = m\ddot{x} \longrightarrow m\ddot{x} + kx = ky$$

$$y(t) = -0.5\, u(t) + 0.5\, u(t-2)$$

در نهایت $x(t) = 0.5(-1+\cos\omega_n t)\, u(t) + 0.5\left[1-\cos\omega_n (t-2)\right] u(t-2)$

P4PCO

www.DastyarKhoob.ir

www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سیستم‌های دو درجه آزادی

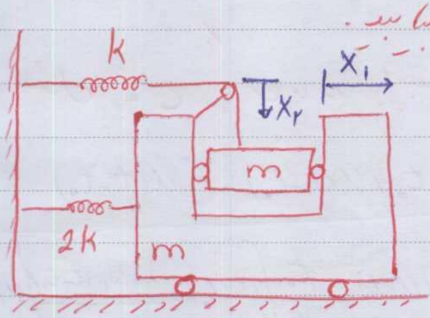
روش لاگرانژ $L = T - U$ $\quad \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$

چون معمولاً انرژی پتانسیل به $\dot{q}$ بستگی ندارد:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i$$

$Q_i =$ کار نیروهای ناپایستار

سؤال: با روش لاگرانژ معادلات ارتعاشی سیستم زیر را بیابید.



$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_1)^2 = m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2}k(x_1+x_2)^2 + \frac{1}{2}2k\,x_1^2 = \frac{3}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + kx_1x_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = 2m\dot{x}_1 \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = 2m\ddot{x}_1 \qquad \frac{\partial U}{\partial x_1} = 3kx_1 + kx_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m\ddot{x}_2 \qquad \frac{\partial U}{\partial x_2} = kx_2 + kx_1$$

$$2m\ddot{x}_1 + 3kx_1 + kx_2 = 0$$

$$m\ddot{x}_2 + kx_2 + kx_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & k \\ k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3k - 2m\omega^2 & k \\ k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow$$

$$\omega_1^2 = \frac{2k}{m} \quad \begin{bmatrix} -k & k \\ k & -k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad -x_1 + x_2 = 0 \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_2^2 = \frac{k}{2m} \quad \begin{bmatrix} 2k & k \\ k & \frac{k}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 2x_1 + x_2 = 0 \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

PAPCO

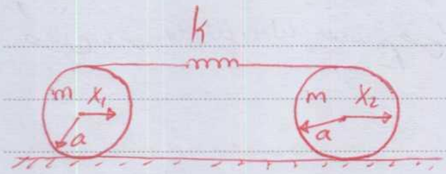
www.g-alm.ir

www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سئوال: با روش لاگرانژ معادلات ارتعاشی سیستم زیر را بیابید.



$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}ma^2\right)\left(\frac{\dot{x}_1}{a}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}ma^2\right)\left(\frac{\dot{x}_2}{a}\right)^2=\frac{3}{4}m\dot{x}_1^2+\frac{3}{4}m\dot{x}_2^2$$

$$U=\frac{1}{2}k(2x_2-2x_1)^2=2k(x_2-x_1)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2}m\dot{x}_1\right)=\frac{3}{2}m\ddot{x}_1 \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2}m\dot{x}_2\right)=\frac{3}{2}m\ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}=4k(x_2-x_1) \qquad \frac{\partial U}{\partial x_2}=4k(x_2-x_1)$$

معادلات ارتعاشی :

$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_1+4kx_1-4kx_2=0$$
$$\frac{3}{2}m\ddot{x}_2-4kx_1+4kx_2=0$$

$$\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}m\omega^2+4k & -4k\\ -4k & -\frac{3}{2}m\omega^2+4k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\omega_1^2=0 \longrightarrow Q_1=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix} \qquad \omega_2^2=\frac{16k}{3m}\longrightarrow Q_2=\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}$$

معادلات ارتعاشی تیر بدون بارگذاری، تحت تاثیر وزن خودش:

$$EI\frac{d^4\omega}{dx^4}+\rho\frac{d^2\omega}{dt^2}=0$$

ω = خیز تیر در هر نقطه $\qquad \rho$ = جرم واحد طول

از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌کنیم:

$$\omega(x,t)=W(x).W(t)$$

$$EI\frac{d^4}{dx^4}\left(W(x)W(t)\right)+\rho\frac{d^2}{dt^2}\left(W(x).W(t)\right)=0$$

PAPCO

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac

www.g-alm.ir

www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject:
Year. Month. Date. ( )

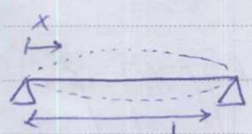
طرفین را بر $w_{(x)} w_{(t)}$ تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{1}{w_{(x)}} EI \frac{d^4 w_{(x)}}{dx^4} + \frac{\rho}{w_{(t)}} \frac{d^2 w_{(t)}}{dt^2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{EI}{w_{(x)}} \frac{d^4 w_{(x)}}{dx^4} = -\frac{\rho}{w_{(t)}} \frac{d^2 w_{(t)}}{dt^2} = \lambda^2$$

حل معادله زمان: $\frac{d^2 w_{(t)}}{dt^2} + \frac{\lambda^2}{\rho} w_{(t)} = 0 \qquad w_{(t)} = \alpha \sin \frac{\lambda}{\sqrt{\rho}} t + \beta \cos \frac{\lambda}{\sqrt{\rho}} t$

حل معادله مکان: $EI \frac{d^4 w_{(x)}}{dx^4} - w_{(x)} \lambda^2 = 0 \qquad w_{(x)} = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x + C \sinh \lambda x + D \cosh \lambda x$



در تیرهای دو سر ساده شکل روبرو اگر شرایط مرزی را

جایگذاری کنیم معادله مکان به $w_{(x)} = A \sin \lambda x$ ساده می‌شود که $\boxed{\lambda = \frac{n\pi}{L}}$

شرایط مرزی
$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow w = 0 \\ x = L \rightarrow w = 0 \\ x = 0 \rightarrow w'' = 0 \\ x = L \rightarrow w'' = 0 \end{cases}$$

در نهایت معادله خیز تیر می‌شود:

$$\boxed{w = \sum_{n=1}^{\infty} A \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \frac{n\pi}{L\sqrt{\rho}} t}$$

PAPCO

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac

www.g-alm.ir

www.DastyarKhoob.ir

Dastyar Khoob

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل معادله‌ی ارتعاشی تیر دو سر ساده :

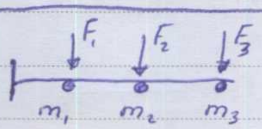
$\boxed{y_{(x)} = Y \sin \frac{n\pi}{L} x}$ برحسب مکان

$\boxed{y_{(t)} = e^{i\omega t}}$ برحسب زمان

ترکیب ← $\boxed{y = Y \sin \frac{n\pi}{L} x \sin \omega t}$ (1)

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} - \rho \omega^2 y = 0 \quad (2)$$

$$(1),(2) \rightarrow EI \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 - \rho \omega^2 = 0 \rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{EI}{\rho} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4}$$



$$X_1 = A_{11} F_1 + A_{12} F_2 + A_{13} F_3$$
$$X_2 = A_{21} F_1 + A_{22} F_2 + A_{23} F_3$$
$$X_3 = A_{31} F_1 + A_{32} F_2 + A_{33} F_3$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

حال برای محاسبه‌ی ماتریس ضرایب، F_1 را یک و F_2، F_3 را صفر می‌کنیم. جابجایی‌ها را حساب می‌کنیم و در این صورت ستون اول ماتریس ضرایب حساب می‌شود. بعد نیروهای F_1 و F_3 را صفر می‌کنیم و F_2 را یک می‌کنیم تا ستون دوم ماتریس ضرایب حساب شود. با همین روش ستون سوم هم پیدا می‌شود.

$\boxed{AF = X}$

ماتریس A را ماتریس نرمی می‌گویند.

اگر معکوس A را بدست آوریم به آن ماتریس سختی می‌گویند. (K)

PAPCO

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac

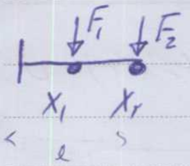
www.g-alm.ir

www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject:
Year. Month. Date. ( )

ستون اول



$$F_1=1,\ F_2=0 \rightarrow A_{11}=X_1=\frac{F_1(\frac{l}{2})^3}{3EI}=\boxed{\frac{L^3}{24EI}}$$

$$A_{21}=X_2=\frac{F_1(\frac{l}{2})^3}{3EI}+\frac{l}{2}\frac{F_1(\frac{l}{2})^2}{2EI}=\boxed{\frac{5}{48}\frac{L^3}{EI}}$$

برای محاسبه X_1 با نیروی F_2 را باید مثل نیروی اول جایگذاری کنیم

$$F_2=1,\ F_1=0 \rightarrow A_{12}=X_1=$$

$$A_{22}=X_2=\frac{L^3}{3EI}$$

$$\frac{l^3}{EI}\begin{bmatrix}\frac{1}{24} & \frac{5}{48}\\ \frac{5}{48} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_1\\F_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix} \qquad K=A^{-1}$$

معادله حرکت را به کمک یکی از روش‌های قبلی می‌نویسیم.

$$m\ddot{x}+kx=0$$

$$\begin{bmatrix}\frac{m}{2} & 0\\ 0 & \frac{m}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{X}_1\\ \ddot{X}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}=0 \qquad \boxed{\ddot{X}=-\omega^2 X}$$

از این معادلات دو ω بدست می‌آید. با استفاده از هر ω می‌توانیم نسبت X_1 و X_2 را پیدا کنیم.

$$\underbrace{\begin{bmatrix}k_{11}-m_1\omega^2 & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}-m_2\omega^2\end{bmatrix}}_{\beta}\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}=0$$

دترمینان ماتریس β باید صفر باشد.

PAPCO

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac

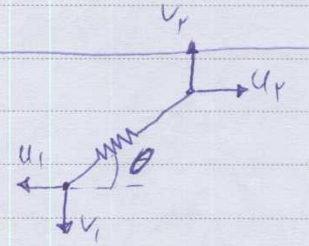
www.g-alm.ir

www.DastyarKhoob.ir
DastyarKhoob

Subject:
Year. Month. Date. ( )

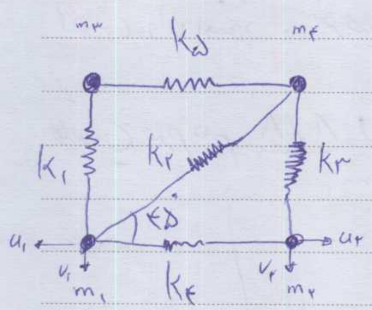
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta}\right) = I\ddot\theta + m\left[r^2\ddot\theta + l^2(\ddot\theta+\ddot\phi) + rl(\ddot\theta+\ddot\phi)\cos\phi - rl(\dot\theta+\dot\phi)\dot\phi\sin\phi + rl\ddot\theta\cos\phi - rl\dot\theta\dot\phi\sin\phi\right]$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$



$$K\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta & -\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

سختی فنر دو بعدی



برای هرکدام از فنرها باید ماتریس بالا را تشکیل دهیم.

$$K_1\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{array} & K_2\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \end{array}$$

برای هر یک فنر باید ماتریس را بنویسیم.

$2i,\ 2i-1$

PAPCO

www.g-alm.ir

www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject:
Year. Month. Date. ( )

8×8

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ & ۸ \\
\hline
۱ & & & & & & & & \\
۲ & & & & & & & & \\
۳ & & & & & & & & \\
۴ & & & & & & & & \\
۵ & & & & & & & & \\
۶ & & & & & & & & \\
۷ & & & & & & & & \\
۸ & & & & & & & &
\end{array}
\quad
\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

عدد موجود در ستون ۳ و سطر چهارم ماتریس K_2 باید در ستون ۷ و سطر ۸ ماتریس اصلی وارد شود. اگر چند عدد در یک خانه‌ی ماتریس بزرگ وارد شوند آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

ماتریس جرم هم ۸×۸ است.

$$\begin{bmatrix}
m_1 & m_1 & m_2 & m_2 & m_3 & m_3 & m_4 & m_4 \\
m_1 & m_1 & m_2 & m_2 & m_3 & m_3 & m_4 & m_4 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\
\end{bmatrix}$$

PAPCO

www.g-alm.ir/forum www.g-alm.ir/ac