

## تحلیل مسائل دو بعدی

تعاریف و کلیات:

این حالت، تعمیم حالت یک بعدی به حالت دو بعدی می باشد که در آن تغییر مکانها، مؤلفه های نیروهای سطحی و نیروهای جرمی هر یک تابع موفقیت  $(X, Y)$  خواهند بود. بردار تغییر مکان یک گره بصورت زیر می باشد.

$$\delta = \{u, v\}^T$$

$U, V$  مؤلفه های در جهات  $X, Y$  می باشند.

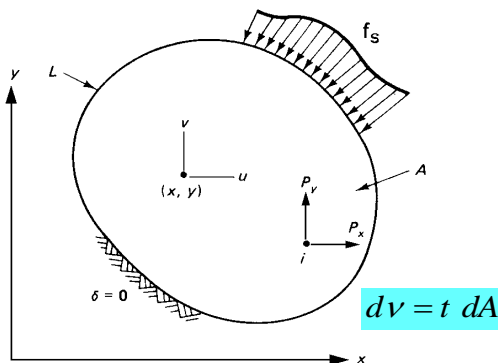
$$\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T \quad \varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$$

تنشها و تغییر شکل های نسبی نیز بصورت زیر می باشند:

$$f_b = \begin{Bmatrix} f_{bx} \\ f_{by} \end{Bmatrix}$$

$$f_s = \begin{Bmatrix} f_{sx} \\ f_{sy} \end{Bmatrix}$$

$$p_i = \begin{Bmatrix} p_{ix} \\ p_{iy} \end{Bmatrix}$$



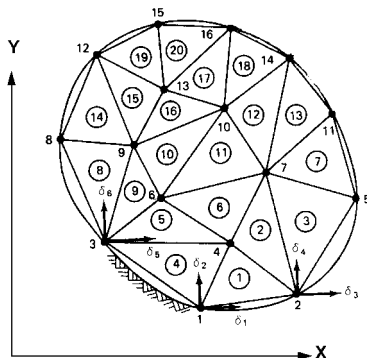
$t$  ضخامت جسم در جهت محور  $Z, f_b$  نیرو در واحد حجم و  $f_s$  نیرو بر واحد سطح می باشد. رابطه تغییر شکل نسبی و بصورت زیر است.

$$\varepsilon = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\}^T$$

رابطه تغییر شکل نسبی و تغییر شکلها نیز بصورت زیر است.

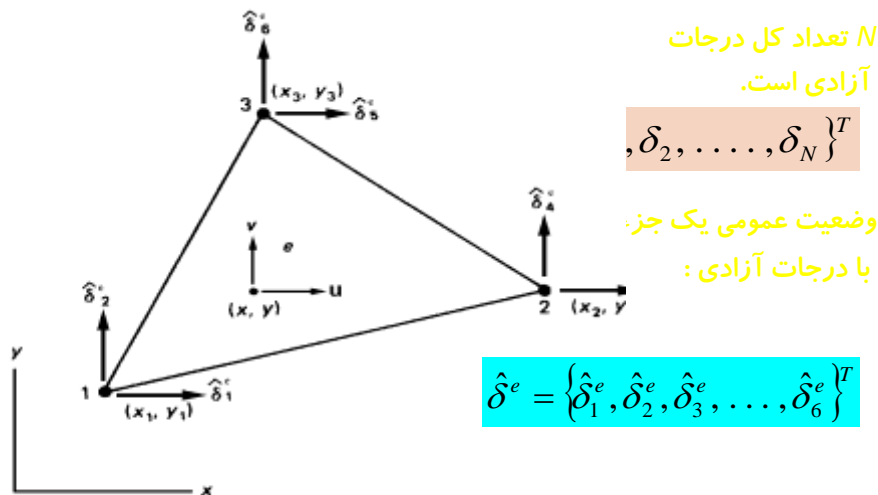
$$\sigma = D\varepsilon \quad \text{رابطه تنش - تغییر شکل نسبی:}$$

گوشه مثلثها را **گره ها** تشکیل می دهند و هر مثلث دارای **سه گره** و **سه ضلع** بوده که **یک جزء** نامیده می شود. اجزاء تمامی سطح جسم را بجز قطعاتی کوچک در مرزهای جسم که محدود به لبه های منحنی شکل می باشند پر می نمایند.



نواحی پر نشده مرزی را نیز می توان با انتخاب تعداد بیشتری جزء مثلث شکل پر نمود و یا حتی با مثلثهایی که کناره های منحنی دارند این کار را انجام داد. روش اجزاء محدود حل تقریبی و پیوسته اجزاء فرضی بر روی جسم است که طبیعتاً قدری تقریب را در بر خواهد داشت. در نظر نگرفتن بخشی از سطح جسم نیز باعث افزایش خطا خواهد گردید.

هر گره و نیز هر جزء با شماره ای مشخص می‌شود. در این حالت برای هر گره تنها امکان دو تغییر مکان در جهات  $x, y$  منظور می‌گردد. بنابراین هر گره دارای دو درجه آزادی می‌باشد. مشابه بحث در خرپای دو بعدی برای گره  $j$  نیز می‌توان تغییر مکانهای  $\hat{\delta}_{2j-1}^e$  در جهت  $y$  در نظر گرفت. به این ترتیب بردار کلی تغییر مکان گره ها بشکل زیر خواهد بود.



جزء فوق در دستگاه موضعی دارای گره های ۱ و ۲ و ۳ می‌باشد. اطلاعات مربوط به وضعیت اجزاء را می‌توان در ماتریس با سه ستون (شماره گره ها) که به تعداد کل اجزاء سطر دارد ذخیره ساخت. جهت جلوگیری از منفی شدن سطح اجزاء ترتیب شماره گذاری اجزاء اغلب در جهت خلاف عقربه های ساعت می‌باشد. مؤلفه های تغییر مکان گره ها در مختصات موضعی مطابق شکل بصورت  $\hat{\delta}_{2j-1}^e, \hat{\delta}_{2j}^e$  برای جهات  $x, y$  نشان داده شده اند این تغییر مکانها را می‌توان با بردار زیر نشان داد.

$$\hat{\delta}^e = \{\hat{\delta}_1^e, \hat{\delta}_2^e, \hat{\delta}_3^e, \dots, \hat{\delta}_6^e\}^T$$

با توجه به شماره گره ها می‌توان رابطه بردار  $\hat{\delta}$  را با بردار  $\hat{\delta}^e$  در مختصات کلی بدست آورد. همانگونه که نشان داده شده است، مختصات گره ها با  $(x_3, y_3), (x_2, y_2), (x_1, y_1)$  دستگاه مختصات کلی مشخص شده اند. مشخصات گره ها در مختصات موضعی و درجات آزادی را می‌توان به سادگی بدست آورد.

## مثلث با تغییر شکل نسبی ثابت (CST)

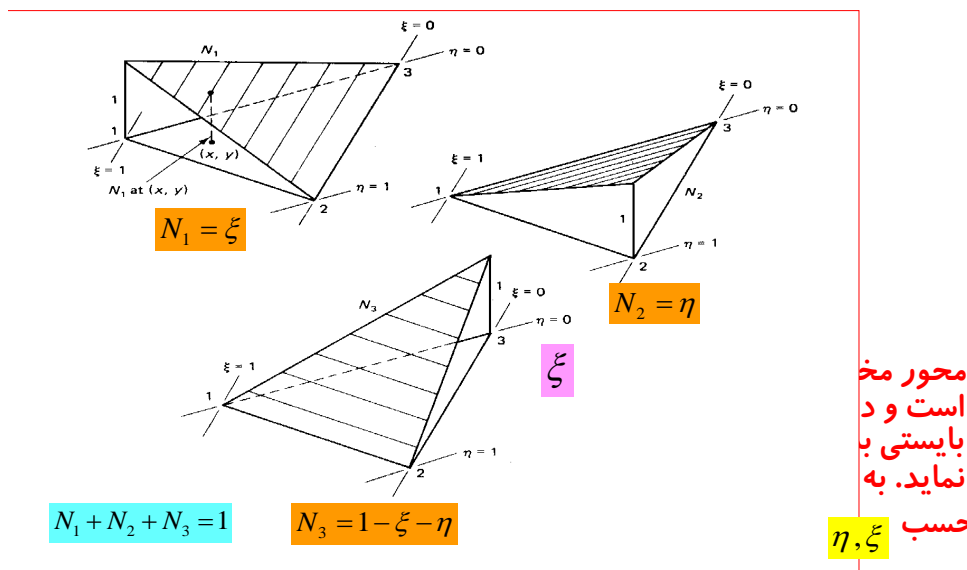
تغییر مکان نقاط داخلی مثلث را در حالت عمومی باید بتوان با توجه به موقعیت گره ها به تغییر مکان آنها مرتبط نمود. همانگونه که قبلاً بحث گردید این کار در روش اجزاء محدود به کمک توابع شکل امکان پذیر است.

در صورتیکه در پهنه اجزای مثلث شکل، تغییر نسبی ثابت فرض گردد، لازم است توابع شکل بصورت خطی انتخاب گردند. سه تابع شکل که مربوط به گره های ۱ و ۲ و ۳ می باشند در شکل نشان داده شده اند. مطابق تعریف تابع شکل لازم است مقدار تابع  $N_1$  در نقطه ۱ برابر واحد و در سایر گره ها صفر باشد. با این تعریف تابع شکل  $N_1$  یک سطح تخت را بر روی جزء ایجاد می کند. بطور مشابه  $N_2$ ،  $N_3$  سطوح دیگری را تشکیل خواهند داد. در حالت عمومی مقادیر توابع شکل در ضلع مقابل به گره مربوطه صفر است. هر ترکیب خطی این توابع شکل نیز خود تشکیل یک سطح تخت بر روی سطح جزء را خواهند داد. عبارت

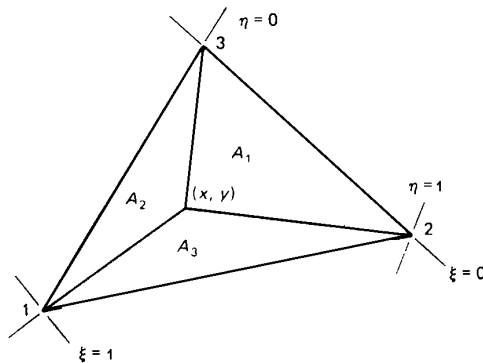
یک صفحه به ارتفاع ۱ در گره های ۱ و ۲ و ۳ است که به ناچار این صفحه با توجه به لزوم مسطح بودن، موازی صفحه  $N_1 + N_2 + N_3 = 1$  این با هر انتخاب طی می توان نوشت:

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1$$

علاوه بر آن می توان گفت  $N_3$ ،  $N_2$ ،  $N_1$  مستقل خطی نخواهند بود یعنی تنها دو تای آنها می توانند مستقل باشند. توابع شکل مستقل و ساده را می توان بر حسب  $\xi$ ،  $\eta$  با روابط زیر ارائه نمود.



**ارتباط هندسی :** توابع شکل را می توان بوسیله مساحتی در دستگاه مختصات انتخاب شده نشان داد. نقطه  $(x, y)$  در داخل مثلث (جزء) آنرا  $A_1, A_2, A_3$  تقسیم نموده است. بطوریکه سه سطح را می توان بسادگی با روابط صفحه بعد نشان داد.  $A$  کل مساحت جزء است و رابطه ساده فوق در هر نقطه از مثلث برقرار می باشد.



$$N_1 = \frac{A_1}{A}$$

$$N_2 = \frac{A_2}{A}$$

$$N_3 = \frac{A_3}{A}$$

### اجزاء ایزوپارامتریک یا همگام :

$$x = N_1 \hat{x}_1 + N_2 \hat{x}_2 + N_3 \hat{x}_3$$

$$y = N_1 \hat{y}_1 + N_2 \hat{y}_2 + N_3 \hat{y}_3$$

تغییر مکانهای نقاط داخلی مثلث را می توان به کمک توابع شکل و مقادیر تغییر مکان در گره ها بدست آورد.

$$u = N_1 \hat{\delta}_1^e + N_2 \hat{\delta}_3^e + N_3 \hat{\delta}_5^e$$

$$v = N_1 \hat{\delta}_2^e + N_2 \hat{\delta}_4^e + N_3 \hat{\delta}_6^e$$

بدین ترتیب می توان نوشت:

$$\begin{cases} u \\ v \end{cases} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\delta}_1^e \\ \hat{\delta}_2^e \\ \hat{\delta}_3^e \\ \hat{\delta}_4^e \\ \hat{\delta}_5^e \\ \hat{\delta}_6^e \end{Bmatrix}$$

توابع شکل را بفرم ماتریس :

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

رابطه کلی تغییرات مکان در سطح جزء و تغییر مکان گره:  $\underline{\delta} = \underline{N} \delta^e$

با توجه به ارتباط یکسان دستگاه مختصات موضعی و کلی، در مورد اجزاء مثلث شکل نیز می توان مختصات  $x, y$  را بر حسب مختصات موضعی و توابع شکل ارائه نمود. این روش ایزوپارامتری نامیده می شود. استفاده از این روش باعث سهولت و یکنواختی در محاسبات می گردد، و می توان بر این اساس نوشت:

$$x = N_1 \hat{x}_1 + N_2 \hat{x}_2 + N_3 \hat{x}_3$$

$$y = N_1 \hat{y}_1 + N_2 \hat{y}_2 + N_3 \hat{y}_3$$

$$x = (x_1 - x_3) \xi + (x_2 - x_3) \eta + x_3$$

$$y = (y_1 - y_3) \xi + (y_2 - y_3) \eta + y_3$$

در صورتیکه:

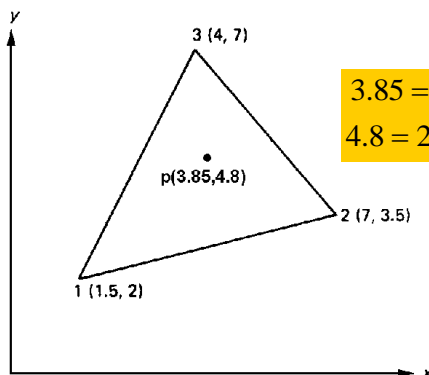
$$y_{ij} = y_i - y_j, \quad x_{ij} = x_i - x_j$$

$$x = x_{13} \xi + x_{23} \eta + x_3$$

$$y = y_{13} \xi + y_{23} \eta + y_3$$

مثال:

مقادیر توابع شکل  $N_1, N_2, N_3$  را در نقطه  $P$  با توجه به شکل در حالت ایزوپارامتری بدست آورید.



$$3.85 = 1.5N_1 + 7N_2 + 4N_3 = -2.5\xi + 3\eta + 4$$

$$4.8 = 2.0N_1 + 3.5N_2 + 7N_3 = -5\xi - 3.5\eta + 7$$

$$2.5\xi - 3\eta = 0.15$$

$$2.0\xi + 3.5\eta = 2.2$$

$$\begin{cases} \xi = 0.3 \\ \eta = 0.2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = 0.3 \\ N_2 = 0.2 \\ N_3 = 0.5 \end{cases}$$

## ماتریس یعقوبی ( Jacobian Matrix ) :

در بدست آوردن تغییر شکل‌های نسبی لازم است مشتقات پاره ای  $u, v$  نسبت به  $x, y$  تعیین گردند. اما  $u, v$  همچنین  $x, y$  توابع  $\xi, \eta$  می‌باشند بطوریکه می‌توان نوشت:

$$u = u[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$$

$$v = v[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

با استفاده از قاعده زنجیره ای دیفرانسیل ها

می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

ماتریس واسطه (2) یا

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix}$$

ماتریس یعقوبی نامیده با  $J$  نشان داده می‌شود.

$J^{-1}$  معکوس ماتریس  $J$  است بطوریکه:

در این حالت تمامی جملات این ماتریس بر حسب

مختصات گره ها و ثابت می‌باشند.

$$J^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix}$$

مقادیر دیفرانسیل در مختصات کلی و موضعی :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} y_{23} \frac{\partial u}{\partial \xi} - y_{13} \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ -x_{23} \frac{\partial u}{\partial \xi} + x_{13} \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} y_{23} \frac{\partial v}{\partial \xi} - y_{13} \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ -x_{23} \frac{\partial v}{\partial \xi} + x_{13} \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

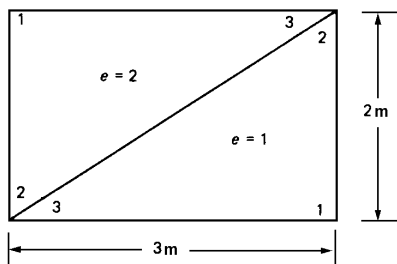
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{Bmatrix} y_{23}(\hat{\delta}_1^e - \hat{\delta}_5^e) - y_{13}(\hat{\delta}_3^e - \hat{\delta}_5^e) \\ -x_{23}(\hat{\delta}_2^e - \hat{\delta}_6^e) + x_{13}(\hat{\delta}_4^e - \hat{\delta}_6^e) \\ -x_{23}(\hat{\delta}_1^e - \hat{\delta}_5^e) + x_{13}(\hat{\delta}_3^e - \hat{\delta}_5^e) + y_{23}(\hat{\delta}_2^e - \hat{\delta}_6^e) - y_{13}(\hat{\delta}_4^e - \hat{\delta}_6^e) \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = B \hat{\delta}^e$$

$$\underline{B} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}$$

با توجه به تعریف  $x_{ij}, y_{ij}$  می‌توان نشان داد که و ... بنابراین معادله فوق را می‌توان بصورت زیر در آورد:  
ماتریس  $B$  یک ماتریس  $(3 \times 6)$  بوده و آنرا ماتریس تغییر شکل نسبی - تغییر مکان برای جزء می‌نامند این ماتریس سه تغییر شکل نسبی در جزء را به  $6$  تغییر مکان ارتباط می‌دهد.

مثال ۱: ماتریس  $B^e$  را برای اجزاء شکل زیر بدست آورید.



می توان نشان داد که دترمینان ماتریس  $J$  دو برابر مساحت مثلث ساخته شده بین گره های ۱ و ۲ و ۳ است. (البته لازم است شماره گذاری در جهت خلاف عقربه های ساعت انجام شده باشد که در این صورت  $J$  مثبت خواهد بود)

$$B^1 = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det J = x_{13}y_{23} - x_{23}y_{13} = (3)(2) - (3)(0) = 6$$

$$B^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس  $J$  دو برابر مساحت مثلث ساخته شده بین گره های ۱ و ۲ و ۳ است. (البته لازم است شماره گذاری در جهت خلاف عقربه های ساعت انجام شده باشد که در این صورت  $J$  مثبت خواهد بود) یعنی:

$$\det J = x_{13}y_{23} - x_{23}y_{13}$$

$$A = \frac{1}{2} |\det J|$$

$$dA = \det J \, d\xi \, d\eta$$

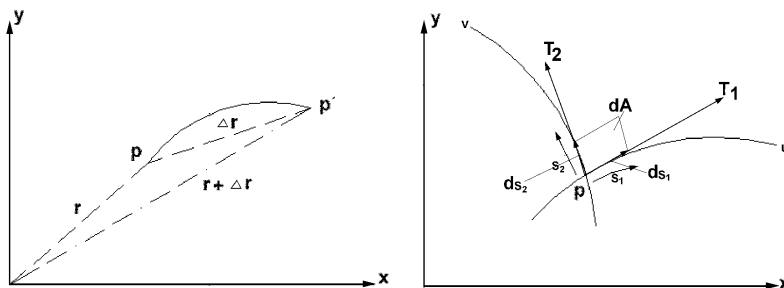
ثابت کنید:

در صورتیکه تطبیق مختصات  $x, y$  از مختصات کلی به تغییر مکانهای  $u, v$  مورد نظر باشد.

$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v)$$

حالا لازم است  $u, v$  بر حسب  $x, y$  حاصل گردند و جوابها یگانه باشند. در دو فضای فوق فرض می شود. نقطه  $P$  تغییر مکان دهد بطوری که  $v$  ثابت بماند و  $u$  تغییر نماید و بطور مشابه در قسمت بعدی می توان در نظر گرفت که  $u$  ثابت باشد و  $v$  تغییر نماید در دو حالت منحنی های  $u, v$  در اثر تغییر مکان حاصل خواهند گردید.



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

اگر  $r$  بردار مکان نقطه  $P$  باشد در این صورت:

$i, j$  بردارهای یکه در جهت های  $x, y$  هستند. مشتقات پاره ای  $r$  را می توان بشکل زیر بدست آورد:

$$T_1 = \frac{\partial r}{\partial u} \quad , \quad T_2 = \frac{\partial r}{\partial v}$$

$$T_1 = \frac{\partial x}{\partial u} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \vec{j}$$

$$T_2 = \frac{\partial x}{\partial v} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \vec{j}$$

می توان نشان داد که بردار  $T_1$  مماس بر منحنی  $u$ ,  $T_2$  مماس بر منحنی  $v$  است زیرا طبق تعریف:

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta u}$$

در صورتیکه  $\Delta r = r(u + \Delta u) - r(u)$  در حالت حدی  $\Delta r$  این بر منحنی  $u$  است. و از طرفی  $\frac{\partial r}{\partial v}$  بر منحنی  $v$  می باشند برای آوردن طول این بردارها می توان نوشت:

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \frac{\partial r}{\partial s_1} \frac{ds_1}{du}$$

$S_1$  طول قوس در امتداد  $u$ ,  $ds_1$  دیفرانسیل طول قوس است.

دیفرانسیل فوق حد نسبت طول قوس است که برابر واحد می باشد

$$\frac{\partial r}{\partial s_1} = \lim_{\Delta s_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta s_1}$$

بنابراین می توان نتیجه گرفت که بردار  $\frac{\partial r}{\partial u}$  برابر است

$$\frac{ds_1}{du} \frac{\partial r}{\partial s_1}$$

بنابراین:

$$T_1 = \left( \frac{ds_1}{du} \right) t_1 \quad T_2 = \left( \frac{ds_2}{dv} \right) t_2$$



بردارهای  $t_2, t_1$  یک می‌باشند که مماس بر منحنیهای  $u, v$  هستند. با توجه به معادلات فوق  $ds_2, ds_1$  (دیفرانسیل های  $S_2, S_1$ ) که طول هایشان برابر  $ds_2, ds_1$  است. بشکل زیر می‌باشند.

$$ds_1 = t_1 ds_1 = T_1 du$$

$$ds_2 = t_2 ds_2 = T_2 dv$$

دیفرانسیل مساحت  $A$  که با  $dA$  مشخص می‌شود. برداری است با بزرگی  $dA$  و با جهتی عمود بر مساحت جزء که در جهت می‌باشد، بردار  $dA$  را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$dA = ds_1 \cdot ds_2 = T_1 \times T_2 du \cdot dv = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du \cdot dv$$

تعریف ماتریس یعقوبی بصورت:

$$dA = \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du \cdot dv \cdot \vec{k}$$

می‌توان بزرگی بردار یعنی  $dA$  را بصورت زیر نوشت:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$dA = \det J \cdot du \cdot dv$$

در صورتیکه بجای  $u, v$  نادیر  $\xi, \eta$  جاگزین شوند:

$$\xi, \eta$$

$$dA = \det J \cdot d\xi \cdot d\eta$$

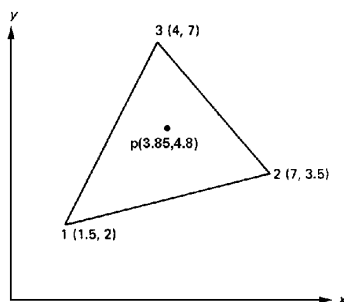
در حالت سه بعدی مسأله قابل تعمیم بوده و بشکل زیر نوشته می‌شود:

$$dA = \det J \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta$$

**مثال ۳:** ماتریس یعقوبی را برای جزء مثلث شکل نشان داده شده در مثال ۱ را پیدا کنید:

$$J = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.5 & -5 \\ 3 & -3.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det J = 23.75$$

مقدار بدست آمده برای دترمینان دو برابر مساحت مثلث یاد شده می‌باشد.



در صورتیکه شماره گره های ۱ و ۲ و ۳ در جهت خلاف عقربه های ساعت انتخاب نشوند،  $J$  منفی خواهد شد.

## انرژی پتانسیل

انرژی پتانسیل یک جزء را می توان در حالت عمومی بصورت زیر در نظر گرفت:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_A \varepsilon^T D \varepsilon t dA - \int_A \delta^T f_b t dA - \int_L \delta^T f_s t dl - \sum \delta_i^T p_i$$

در جمله آخر سمت راست،  $i$  نمایانگر نقطه اعمال بار  $P_i$  می باشد بطوریکه  $P_i = \{P_x, P_y\}_i^T$  و علامت جمع بخاطر حاصل شدن جمع شدن کل انرژی در اثر بارهای متمرکز وارده است.

برای بدست آوردن کل انرژی پتانسیل در جسم مورد نظر می توان نوشت:

$$\Pi = \sum_e \frac{1}{2} \int_e \varepsilon^T D \varepsilon t dA - \sum_e \int_e \delta^T f_b t dA - \int_l \delta^T f_s t dl - \sum \delta_i^T p_i$$

$$\Pi = \sum_e U_e - \sum_e \int_e \delta^T f_b t dA - \int_l \delta^T f_s t dl - \sum \delta_i^T p_i$$

در صورتیکه  $U_e = 1/2 \int_e \varepsilon^T D \varepsilon t dA$  انرژی ذخیره شده در اثر تغییر شکلهای نسبی در جزء است.

## ماتریس سختی جزء:

در صورتیکه ماتریس تغییر شکل نسبی - تغییر مکان در جمله انرژی تغییر شکل نسبی جزء جایگزین شود می توان نوشت:

$$U_e = \frac{1}{2} \int \varepsilon^T D \varepsilon t dA = \frac{1}{2} \int_e \hat{\delta}^{eT} B^T D B \hat{\delta}^e t dA$$

در صورتیکه  $t_e$  (ضخامت جزء) ثابت در نظر گرفته شود و ماتریسها  $B, D$  ثابت

$$U_e = \frac{1}{2} \hat{\delta}^{eT} B^T D B \left( \int_e dA \right) \hat{\delta}^e$$

باشند رابطه فوق بشکل زیر است:

با فرض  $\int_e dA = A_e$  نتیجه بصورت زیر است:

$$U_e = \frac{1}{2} \hat{\delta}^{eT} t_e A_e B^T D B \hat{\delta}^e$$

ماتریس سختی جزء:

$$U_e = \frac{1}{2} \hat{\delta}^{eT} k^e \hat{\delta}^e$$

$$k^e = t_e A_e B^T D B$$

ماتریس  $K^e$  یک ماتریس قرینه است زیرا ماتریس  $D$  قرینه می باشد.  
برای جایگزینی ماتریس  $K^e$  در ماتریس  $K$  می توان از جدول اطلاعات مربوط به اتصالات و درجات آزادی گره ها استفاده نمود در صورتیکه جمله انرژی در دستگاه مختصات موضعی و کلی مورد مقایسه قرار گیرند می توان نوشت:

$$U = \sum_e \frac{1}{2} \hat{\delta}^{eT} k^e \hat{\delta}^e = \frac{1}{2} \delta^T K \delta \quad \text{ماتریس } K \text{ در دستگاه مختصات کلی نیز یک ماتریس قرینه و نواری است. به عبارتی می توان گفت جملات } K_{ij} \text{ در}$$

صورتیکه درجات آزادی  $i, j$  در معرض اتصال هیچ جزئی نباشند، برابر صفر می باشند. در صورتیکه  $i, j$  در معرض اتصال یک جزء یا اجزایی باشند جملات ماتریس سختی مربوطه در ماتریس سختی کلی شرکت خواهند نمود. در این ماتریس عرض نوار قطری بستگی به اختلاف شماره گره های بکار رفته در اجزاء دارد. در صورتیکه شماره گره های جزء  $e$  باشند حداکثر اختلاف شماره گره های جزء از رابطه زیر حاصل می گردد:

$$m_e = \max(|i_1 - i_2|, |i_2 - i_3|, |i_3 - i_1|) \quad \text{نصف عرض نوار :}$$

$$NBW = 2[\max(m_e) + 1] \quad 1 \leq e \leq NE \quad \text{NE تعداد اجزاء و عدد 2 بخاطر}$$

ماتریس  $K$  در حالت عمومی مربوط به شرایط محدود نبودن تمامی درجات آزادی است.

## جمله نیروهای معادل گرهی جرمی :

جمله نیروهای جرمی برای یک جزء بصورت  $\int_e \delta^{eT} f_b t dA$  در انرژی پتانسیل حاصل گردید، این جمله بصورت زیر قابل بسط است:

$$\underline{f}_b = \{f_{bx}, f_{by}\}^T, \quad \underline{\delta}^e = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \underline{N} \underline{\delta}^e$$

در صورتیکه  $f_b, t_e$  در پهنه جزء ثابت باشند  $\int_e \delta^{eT} f_b t dA = t_e \int_e (u f_{bx} + v f_{by}) dA$

$$\int_e \delta^{eT} f_b t dA = \hat{\delta}_1^e \left( t_e f_{bx} \int_e N_1 dA \right) + \hat{\delta}_2^e \left( t_e f_{by} \int_e N_1 dA \right) + \hat{\delta}_3^e \left( t_e f_{bx} \int_e N_2 dA \right) + \hat{\delta}_4^e \left( t_e f_{by} \int_e N_2 dA \right) + \hat{\delta}_5^e \left( t_e f_{bx} \int_e N_3 dA \right) + \hat{\delta}_6^e \left( t_e f_{by} \int_e N_3 dA \right)$$

با توجه به تعریف تابع شکل  $\int_e N_1 dA$  برابر حجم هرم باقاعده  $A_e$  و ارتفاع  $1$  در گره  $1$  می باشد این حجم برابر  $1/3$  سطح قاعده ضربدر ارتفاع هرم است بنابراین:

$$\int_e N_1 dA = \frac{1}{3} A_e$$

$$\int_e N_2 dA = \int_e N_3 dA = \frac{1}{3} A_e$$

بطور مشابه:

به این ترتیب رابطه بدست آمده برای نیروی جرمی بشکل زیر در می آید:

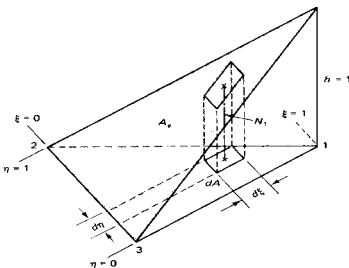
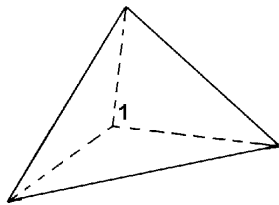
$$\int_e \delta^{eT} f_b t dA = \hat{\delta}^{eT} f_b^{ie}$$

بردار نیروی جرمی در جزء  $e$  می باشد بطوریکه:

$$f_b^{ie} = \frac{t_e A_e}{3} \left\{ \hat{f}_{bx}, \hat{f}_{by}, \hat{f}_{bx}, \hat{f}_{by}, \hat{f}_{bx}, \hat{f}_{by} \right\}^T$$

$$\int N_1 dA = \frac{1}{3} A_e h = \frac{1}{3} A_e$$

$$\int_e N_1 dA = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} N_1 \det J d\eta d\xi = 2A_e \int_0^1 \int_0^{1-\xi} d\eta d\xi = \frac{1}{3} A_e$$



نیروهای بدست آمده گرهی بشکل فوق می توانند در بردار نیروی  $F$  در مختصات کلی وارد شوند. با توجه به چگونگی اتصال گره ها می توان  $f_b^{ie}$  را به بردار نیروی  $F$  در مختصات کلی وارد نمود. بردار  $f_b^{ie}$  دارای اندازه  $(6 \times 1)$  است. در صورتیکه

$F$  دارای اندازه  $(N \times 1)$  می باشد. بطور کلی می توان نوشت:

$$\sum_e f_b^{ie} \rightarrow F$$

جمله نیروهای معادل گرهی سطحی:

نیروهای سطحی که قاعدتا بر سطح جزء وارد می گردند با انتخاب جزء مثلث شکل و با درجات آزادی در جهت  $x, y$  ناگزیر تنها می تواند به لبه های جزء وارد شوند و در صفحه جزء قرار داشته باشند. جمله کلی برای این نیروی سطحی بصورت  $\int \delta^{eT} f_s t dl$  می باشد در صورتیکه لبه جزء مثلا  $1-2$  در عرض  $f_{sx}, f_{sy}$  بر حسب نیرو بر واحد طول باشد می توان نوشت:

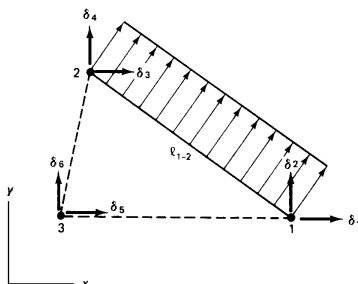
$$\int \delta^{eT} f_s t dl = \int_{l_{1-2}} (u f_{sx} + v f_{sy}) t dl$$

جمله مربوط به  $1-2$  بصورت زیر خواهد بود:

$$\int_{l_{12}} \delta^{eT} f_s t dl = \hat{\delta}_1^e (t_e f_{sx} \int N_1 dl) + \hat{\delta}_2^e (t_e f_{sy} \int N_1 dl) + \hat{\delta}_3^e (t_e f_{sx} \int N_2 dl) + \hat{\delta}_4^e (t_e f_{sy} \int N_2 dl)$$

$N_2, N_1$  در طول ضلع  $1-2$  برابر صفر و  $N_3$  مشابه به حالت یک بعدی می باشد بطوریکه:

$$N_1 + N_2 = 1$$



انتگرال های جملات بدست آمده فوق هر کدام برابر حاصل ضرب:  
 $\times l_e$  ارتفاع  $\times 1/2$  می باشند یعنی:

$$\int_{l_{1-2}} N_i dl = \frac{1}{2} l_{1-2}$$

جمله نیروی سطحی :

$$\int \delta^{eT} f_s t dl = \hat{\delta}^{eT} f_s^{ie}$$

$\hat{\delta}^e$  نمایانگر بردار تغییر مکان گره های جزء می باشد

بطوریکه در این حالت:  $\hat{\delta}^e = \{\hat{\delta}_1^e, \hat{\delta}_2^e, \hat{\delta}_3^e, \hat{\delta}_4^e\}^T$

بارهای ناشی از نیروهای سطحی نیز لازم است

$$f_s^e = \frac{t_e l_{1-2}}{2} \{f_{sx}, f_{sy}, f_{sx}, f_{sy}\}^T$$

به بردار نیروها در مختصات کلی یعنی  $F$  وارد می شوند.

$$f_s^e = \frac{t_e l_{1-2}}{2} \{f_{sx}, f_{sy}, f_{sx}, f_{sy}, 0, 0\}^T$$

## جمله بارهای معادل گرهی متمرکز:

در صورت وجود چنین نیروهایی عموماً سعی می شود در نقطه اعمال نیرو یک گره تعریف گردد. در صورتیکه  $i$  گرهی باشد که نیروی  $\hat{p}_i = \{\hat{p}_x, \hat{p}_y\}^T$  بر آن وارد شده است در این صورت می توان نوشت:

$$\delta_1^{eT} P_i = \delta_{2i-1} P_x + \delta_{2i} P_y$$

بنابراین  $P_x, P_y$  که مؤلفه های نیروی  $P_i$  در جهات  $x, y$  می باشند بایستی در مؤلفه های  $(2i-1)$  ام و  $2i$  ام بردار نیروی کلی  $F$  جمع شوند.

تجمع آثار نیروهای جرمی و نیروهای سطحی و بارهای متمرکز در بردار نیروهای کلی  $F$  را می توان بشکل زیر نشان داد.

$$\sum (f_b^e + f_s^e) + p \rightarrow F$$

انرژی ناشی از تغییر شکلهای نسبی و نیروها که انرژی پتانسیل در آن است بسنل زیر می باشد:

$$\Pi = \frac{1}{2} \delta^T K \delta - \delta^T F$$

با اعمال شرایط حدی در ماتریس  $K$  و بردار نتیجه کار بصورت زیر خواهد بود:

$$K \delta = F$$

## روش گلرکین

مشابه با مسائل یک بعدی، روش گلرکین را در حل مسائل دو بعدی با اجزاء مثلث شکل نیز می توان بکار گرفت در این حالت تابع تغییر مکان بشکل

زیر فرض می گردد:

$$\phi = \{\phi_x, \phi_y\}^T$$

تغییر شکل نسبی :

$$\varepsilon(\phi) = \left\{ \frac{\partial \phi_x}{\partial x}, \frac{\partial \phi_y}{\partial y}, \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right\}^T$$

تابع  $\varepsilon(\phi)$  یک تابع اختیاری است که بطور مجازی (بر اساس) می باشد. این تابع تغییر مکان انتخاب گردیده است. میزان انرژی در اثر این تغییر شکل مجازی بصورت زیر است:

$$\Pi = \int_A \varepsilon^T \sigma(\phi) t dA - \left( \int_A \phi^T f_b t dA + \int_l \phi^T f_s t dl + \sum \phi_i^T P_i \right)$$

جمله اول معرف کار مجازی است. با توجه به تقسیم جسم به اجزاء می توان رابطه فوق را بشکل زیر در نظر گرفت:

$$\Pi = \sum_e \int_e \varepsilon^T D \varepsilon(\phi) t dA - \left( \sum_e \int_e \phi^T f_b t dA + \int_e \phi^T f_s t dl + \sum \phi_i^T P_i \right)$$

در صورتیکه تساوی های زیر در نظر گرفته شوند:

$$\phi = N \Psi$$

$$\varepsilon(\phi) = B \hat{\Psi}^e$$

$$\hat{\Psi}^e = \{\hat{\Psi}_1^e, \hat{\Psi}_2^e, \hat{\Psi}_3^e, \hat{\Psi}_4^e, \hat{\Psi}_5^e, \hat{\Psi}_6^e\}^T$$

تابع  $\hat{\Psi}^e$  معرف تغییر مکانهای فرضی در گره های جزء  $e$  می باشد. در دستگاه مختصات کلی این تغییر مکانها بصورت زیر نوشته می شوند:

$$\hat{\Psi}^e = \{\hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_2, \hat{\Psi}_3, \dots, \hat{\Psi}_N\}^T$$

جمله مربوط به انرژی داخلی جسم بصورت زیر نوشته می شود:

$$\int_e \varepsilon^T D \varepsilon(\phi) t dA = \int_e \hat{\delta}^{eT} B^T D B \hat{\Psi}^e t dA$$

با شرط رفتار ارتجاعی خطی ماده و استفاده از جزء  $e$  خواهیم داشت. با فرض اینکه  $t_e$  ضخامت و  $A_e$  سطح جزء می باشند می توان نوشت:

$$\int_e \varepsilon^T D \varepsilon(\phi) t dA = \hat{\delta}^{eT} B^T D B t_e \int_e dA \hat{\Psi}^e = \hat{\delta}^{eT} = \hat{\delta}^{eT} t_e A_e B^T D B \hat{\Psi}^e = \hat{\delta}^{eT} K^e \hat{\Psi}^e$$

ماتریس

ماتریس رفتار مکانیکی ماده که  $D$  میباشد یک ماتریس قرینه است. نتیجتاً  $K^e = t_e A_e B^T D B$  جزء قرینه خواهد بود. با توجه به اتصال اجزاء می توان ماتریسهای  $K_e$  را در ماتریس

کلی  $K$  جایگزین نمود. بنابراین:

$$\sum_e \int_e \varepsilon^T D \varepsilon(\phi) t dA = \sum_e \hat{\delta}^{eT} K^e \hat{\Psi}^e = \sum_e \hat{\Psi}^{eT} K^e \hat{\delta}^e = \hat{\Psi}^T K \hat{\delta}$$

ماتریس  $K$  در رابطه فوق ماتریس نواری و قرینه می‌باشد.  
با ملاحظه کار مجازی خارجی در جمله نیرو می‌توان در جمله انرژی پتانسیل دریافت که  
با جایگزینی  $\delta^e$  گردیده است.

$$\int_e \phi^T f_b s dA = \Psi^{eT} f_b^e$$

می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\text{کار مجازی داخلی} = \Psi^T K \delta$$

$$\text{کار مجازی خارجی} = \hat{\Psi}^T F$$

در حالت عمومی ماتریس  $K$  و بردار  $F$  با توجه به آزاد بودن کلیه درجات آزادی حاصل  
می‌گردند اما با اعمال شرایط حدی لازم است ماتریس و بردار یاد شده تغییر کنند  
نتیجتاً با توجه به تابع اختیاری رابطه کلی زیر حاصل می‌گردد.

$$K \delta = F$$

## محاسبه تنشها:

با توجه به ثابت بودن تغییر شکل‌های نسبی در پهنه هر جزء تنشهای حاصله  
نیز ناگزیر ثابت خواهند بود. بنابراین جهت محاسبه تنشها در هر جزء  
می‌توان رابطه زیر را بکار گرفت:

$$\sigma = DB \hat{\delta}^e$$

پس از بدست آوردن  $\hat{\delta}^e$  (تغییر شکل گره‌ها در دستگاه مختصات کلی) و  
مقادیر  $\hat{\delta}^e$  (تغییر مکانهای گره‌های جزء در دستگاه مختصات موضعی)  
تنشها را بدست آورد برای سادگی عمل تنش را در مرکز جزء (بطور  
متوسط) در نظر می‌گیرند.

تنشهای اصلی و جهاتشان را می‌توان با کاربرد اصول حاکم بر دایره موهر و  
روابط مربوطه بدست آورد.

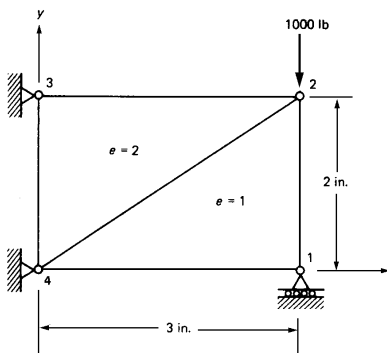
## مثال ۴

صفحه ای بشکل زیر از دو جزء مثلث تشکیل گردیده است. تغییر مکانهای گره های ۱ و ۲ و تنشهای حاصله در جزء را با فرض حالت تنشهای مسطح بدست آورید. فرض کنید نیروهای جرمی نسبت به نیروهای خارجی ناچیز می باشند.

$$t = 0.5 \text{ in}, E = 30 \times 10^6 \text{ lb/in}^2, \nu = 0.25$$

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2 \times 10^7 & 0.8 \times 10^7 & 0 \\ 0.8 \times 10^7 & 3.2 \times 10^7 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2 \times 10^7 \end{bmatrix}$$

شماره جزء	1	2	3
1	1	2	4
2	3	4	2



حاصل ضرب ماتریس  $DB_e$ :

$$DB^1 = 10^7 \begin{bmatrix} 1.067 & -0.4 & 0 & +0.4 & -1.067 & 0 \\ +0.267 & -1.6 & 0 & +1.6 & -0.267 & 0 \\ -0.6 & +0.4 & +0.6 & 0 & 0 & -0.4 \end{bmatrix} \text{ lb/in}^3$$

$$DB^2 = 10^7 \begin{bmatrix} 1.067 & -0.4 & 0 & +0.4 & -1.067 & 0 \\ +0.267 & -1.6 & 0 & +1.6 & -0.267 & 0 \\ -0.6 & +0.4 & +0.6 & 0 & 0 & -0.4 \end{bmatrix} \text{ lb/in}^3$$

$$\sigma = DB^e \delta^e$$

دو ماتریس بدست آمده را می توان به سادگی  $K^e = t_e A_e B^e T DB^e$  بتفاده قرار داد. بکار گرفت از طرف دیگر می توان آنها را در رابطه

$$K^1 = 10^7 \begin{bmatrix} 0.983 & -0.5 & -0.45 & 0.2 & -0.533 & 0.3 & 1 \\ & 1.4 & 0.3 & -1.2 & 0.2 & -0.2 & 2 \\ & & 0.45 & 0 & 0 & -0.3 & 3 \\ & & & 1.2 & -0.2 & 0 & 4 \\ & & & & 0.533 & 0 & 5 \\ & & & & & 0.2 & 6 \\ \text{sym.} & & & & & & \end{bmatrix} \text{ lb/in}$$

$$K^2 = 10^7 \begin{bmatrix} 0.983 & -0.5 & -0.45 & 0.2 & -0.533 & 0.3 & 5 \\ & 1.4 & 0.3 & -1.2 & 0.2 & -0.2 & 6 \\ & & 0.45 & 0 & 0 & -0.3 & 7 \\ & & & 1.2 & -0.2 & 0 & 8 \\ & & & & 0.533 & 0 & 3 \\ & & & & & 0.2 & 4 \\ \text{sym.} & & & & & & \end{bmatrix} \text{ lb/in}$$

در ماتریسهای سختی اجزاء بدست آمده شماره درجات آزادی با توجه به اینکه درجات  $\delta_{2i}, \delta_{2i-1}$  گره  $i$  منظور شوند، در دستگاه مختصات کلی در بالای ستونهای ماتریس نوشته شده اند. درمسأله مورد نظر مقادیر

$$\delta_2 = \delta_5 = \delta_6 = \delta_7 = \delta_8 = 0$$

می باشند بنابراین میتوان سطرها و ستونهای مربوطه در ماتریس کلی  $K$  را حذف نمود. به این ترتیب ماتریس اصلی باقیمانده تنها برای درجات آزادی خواهد بود. با توجه به ناچیز بودن  $\delta_4, \delta_3, \delta_1$  نیروهای جرمی تنها نیروی باقیمانده بصورت  $F_4 = 1000 \text{ lb}$  است. بنابراین معادلات باقیمانده بشکل زیر می باشند:

$$10^7 \begin{bmatrix} 0.983 & -0.45 & 0.2 \\ -0.45 & 0.983 & 0 \\ 0.2 & 0 & 1.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1000 \end{Bmatrix}$$



برای جزء ۱ بردار تغییر شکلهای گره ها بقرار زیر است:

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.913 \times 10^{-5} \\ 0.875 \times 10^{-5} \\ -7.436 \times 10^{-5} \end{Bmatrix} \text{ in}$$

$$\delta^1 = 10^{-5} \{1.913, 0, 0.875, -7.436, 0, 0\}^T \text{ in}$$

$\sigma^1$  با استفاده از جمله  $DB^T \delta^1$  بصورت زیر می باشد.

$$\sigma^1 = \{-93.3, -113.87, -62.3\}^T \text{ lb/in}^2 \quad \delta^2 = 10^{-5} \{0.875, -7.436, 0, 0, 0, 0\}^T \text{ in}$$

$$\sigma^2 = \{93.4, 23.4, -297.4\}^T \text{ lb/in}^2$$

### اثر تغییر درجه حرارت:

تغییر شکلهای نسبی ناشی از تغییر درجه حرارت مشابه تغییر شکلهای نسبی اولیه  $\varepsilon_0$  منظور می گردند. در صورتیکه تغییر درجه حرارت بصورت  $\Delta t(x, y)$  منظور شود در حالت تنشهای مسطح می توان نوشت:

$$\varepsilon_0 = [\alpha \Delta t, \alpha \Delta t, 0]^T$$

در حالت کرنشهای مسطح:

به عبارتی جلوگیری از افزایش کرنش حرارتی در جهت Z باعث افزایش کرنش به میزان  $\nu$  برابر در جهات X, Y شده است.

رابطه تنش - تغییر شکل نسبی نیز بصورت زیر است:

$$\varepsilon_0 = (1 + \nu) [\alpha \Delta t, \alpha \Delta t, 0]^T$$

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0)$$

### اثر تغییر درجه حرارت در رابطه انرژی ناشی از تغییر شکلهای نسبی

$$U = \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon_0)^T D (\varepsilon - \varepsilon_0) t dA = \frac{1}{2} \int (\varepsilon^T D \varepsilon - 2 \varepsilon^T D \varepsilon_0 + \varepsilon_0^T D \varepsilon_0) t dA$$

اولین جمله ماتریس سختی را ارائه می نماید. آخرین جمله نیز مقداری ثابت و مشتق آن صفر می باشد و اثری در حداقل شدن میزان انرژی و یا رابطه نیرو - تغییر مکان نخواهد داشت. اما جمله میانی ارائه کننده نیروهای معادل ناشی از تغییر درجه حرارت می باشد. در صورتیکه رابطه تغییر شکل نسبی - تغییر مکان در این جمله جایگزین گردد،

می توان نوشت:

$$(\varepsilon = B \hat{\delta}^e)$$

### نیروی ناشی از تغییر درجه حرارت در جزء:

تانسور  $\varepsilon_0$  در اصل تغییر شکل نسبی در اثر تغییر

$$\int \varepsilon^T D \varepsilon_0 t dA = \sum \hat{\delta}^{eT} (B^T D \varepsilon_0) t_e A_e$$

درجه حرارت متوسط در جزء بوده و  $f_t^e$  نمایانگر

$$f_t^e = t_e A_e B^T D \varepsilon_0$$

نیروهای گرهی ناشی از این تغییرات در جزء

خواهد بود که بایستی در بردار اصلی نیرو با توجه به

$$f_t^e = \{f_{1t}^e, f_{2t}^e, f_{3t}^e, f_{4t}^e, f_{5t}^e, f_{6t}^e\}^T$$

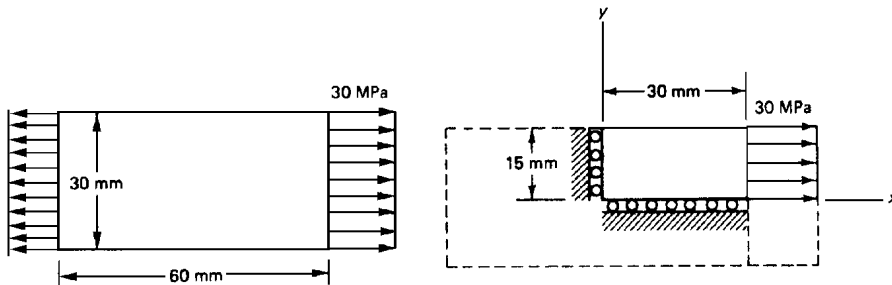
جایگزین گردد. البته در این حالت چون محورهای دو دستگاه مختصات موضعی و کلی موازی هستند نیازی به انتقال این نیروها از دستگاه مختصات موضعی به کلی نمی باشد.

تنش حاصله در جزء از رابطه زیر بدست خواهد آمد.

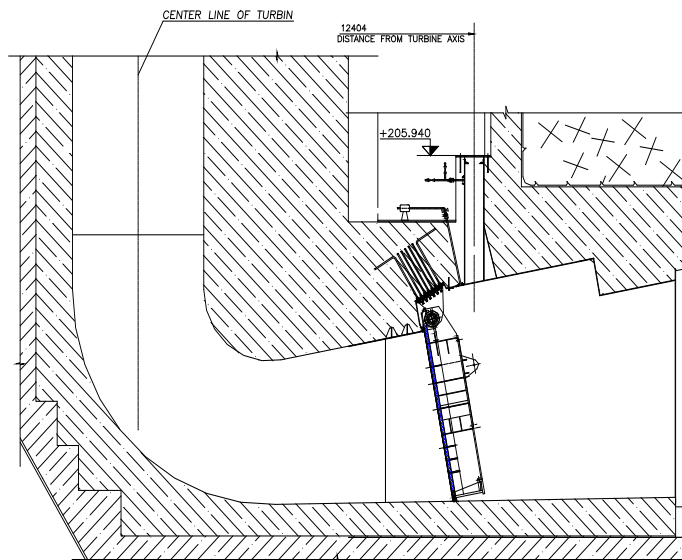
$$\delta = D(B \hat{\delta}^e - \varepsilon_0)$$

### مدل حل مسائل با استفاده از تقارن و شرایط حدی در محورهای تقارن

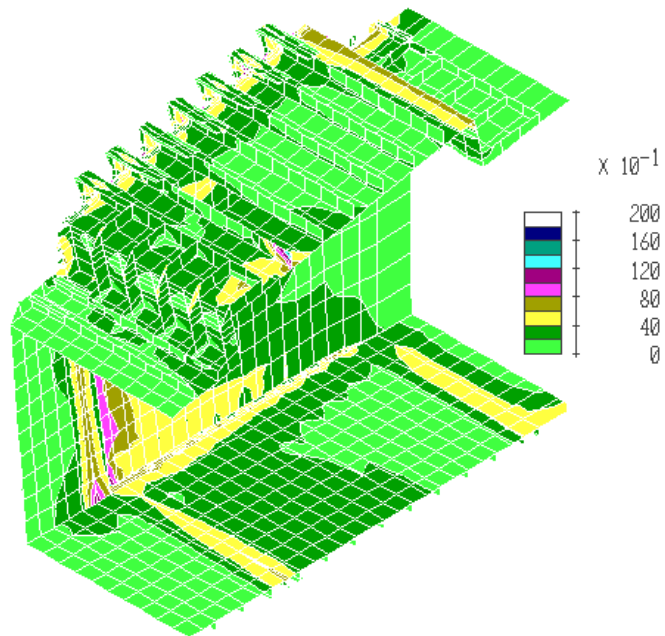
یک صفحه تحت تأثیر بار متقارن قرار گرفته است. تقارن های هندسی و بارگذاری در این مورد حائز اهمیت می باشند. در صورتیکه محورهای  $x$ ,  $y$  محورهای تقارن اختیار شوند، نقاط در طول محور  $x$  تنها امکان حرکت در جهت  $x$  را دارند و می توان حرکت آنها را در جهت  $y$  محدود شده تلقی نمود. نقاط روی محور  $y$  حالت مشابهی را در طول محور  $x$  و محدودیت حرکت در جهت  $x$  را دارا می باشند. بدین ترتیب این شرایط ایجاب می کند. که حل ربع این صفحه به تنهایی اطلاعات کافی در مورد تمام صفحه را ارائه می نماید. زیرا سایر تنشها با در نظر گرفتن تقارن وضعیت مشابهی را دارا خواهند بود.



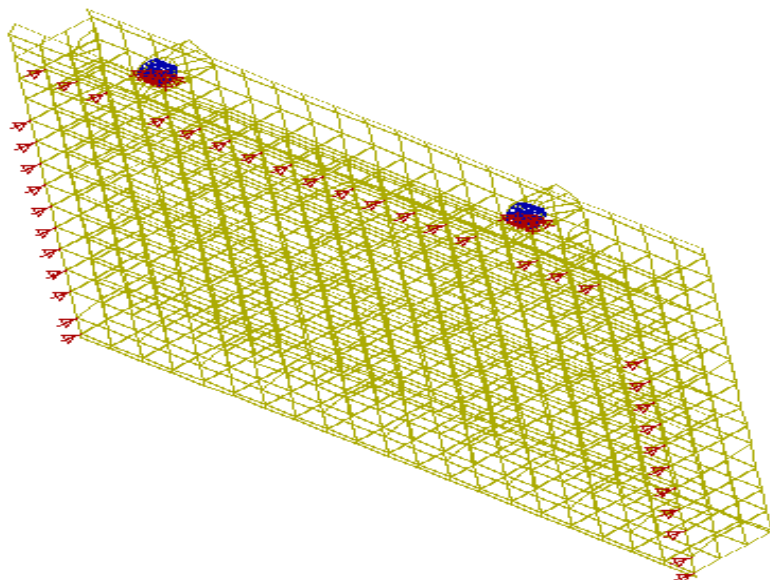
### BIG FLAP-GATE IN MASJED-E-SOLEIMAN DAM



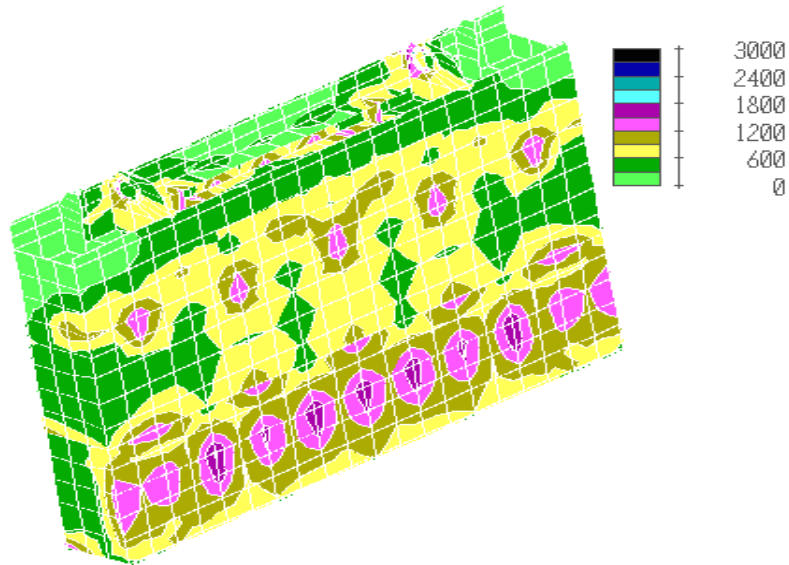
Half of steel lining symmetrical mesh



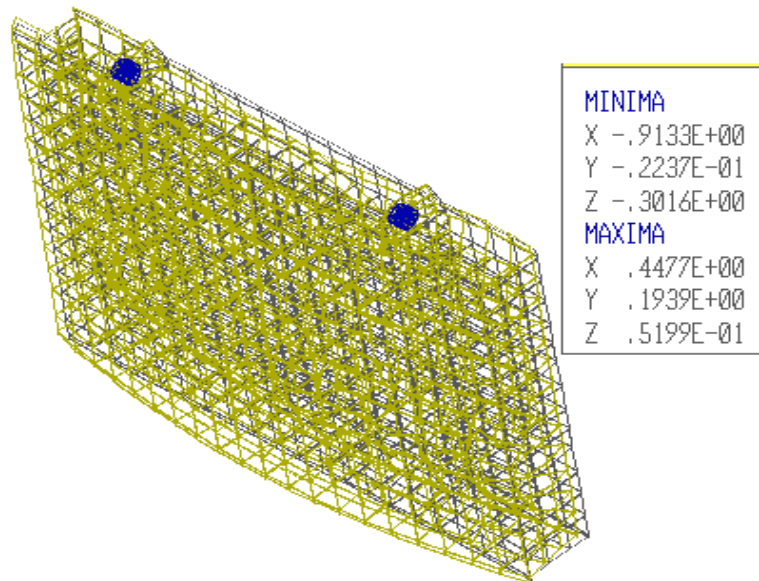
Flap gate leaf mesh including restrained points



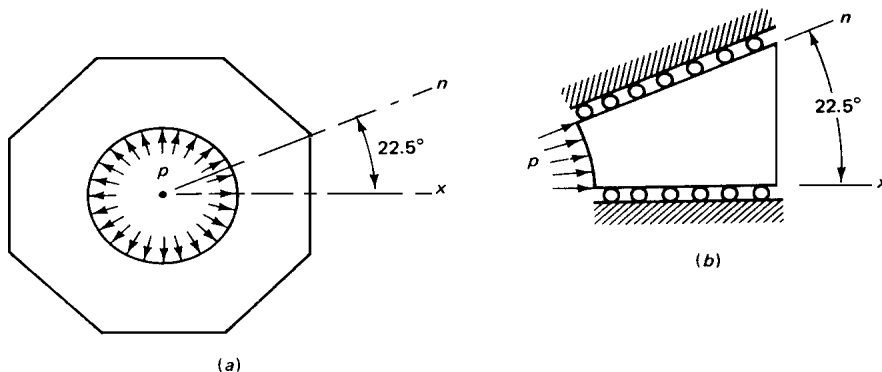
### Combined stress due to internal pressure



### Deformed mesh due to external pressure



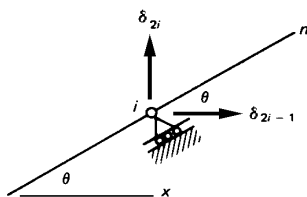
بعنوان مثالی دیگر می توان لوله ای با مرز خارجی هشت وجهی با مرز داخلی دایره را در نظر گرفت. این لوله می تواند تحت فشار داخلی  $P_i$  فرض شود. با توجه به تقارن می توان تنها بخشی از سطح مقطع، که در گستره زاویه ای معادل  $22.5^\circ$  قرار گرفته را مورد بررسی قرار داد. فرض معقول حرکت نقاط روی محور  $X$  و محدودیت حرکت در جهت  $n$  روی این محور، علت این انتخاب می باشد. بطور مشابه امکان حرکت نقاط روی محور  $n$  و محدودیت حرکت در جهت عمود بر این محور وجود دارد. البته در صورتیکه مرز خارجی سطح مقطع نیز دایره باشد، فرض موجودیت تنها تغییر شکل های شعاعی صحیح خواهد بود. در صورتیکه یک گره بر روی محور  $n$  مانند  $i$  در نظر گرفته شود، این گره در حالت عمومی دارای دو درجه آزادی بوده و در جهت  $n$  می تواند حرکت نماید.



در صورتیکه زاویه امتداد  $n$  با محور  $X$  با نشان داده شود. می توان نوشت:

$$\delta_{2i-1} \sin \theta - \delta_{2i} \cos \theta = 0$$

رابطه فوق بیانگر ارتباط بین درجات آزادی  $i$  بوده به گونه ای که حرکتی عمود بر سطح غلطک حاصل می گردد. بدین ترتیب شرایط حدی در حرکت این نقطه دارای محدودیتی نسبت به درجات آزادی ممکن می باشد. در این مورد ساده تر است که در مقابل با محدودیت حرکت یاد شده فیزیکی فرضی با سختی  $C$  در نظر گرفته شود. در این صورت جمله انرژی پتانسیل بشکل زیر نوشته می شود:



$$\Pi = \frac{1}{2} \delta^T K \delta - \delta^T F + \frac{1}{2} c (\delta_{2i-1} \sin \theta - \delta_{2i} \cos \theta)^2$$

در عبارت فوق  $K$  معرف سختی سایر قسمتهای سازه می باشد. جمله مربع شده در رابطه فوق را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{2} c (\delta_{2i-1} \sin \theta - \delta_{2i} \cos \theta)^2 = \frac{1}{2} \{\delta_{2i-1}, \delta_{2i}\} \begin{bmatrix} c \sin^2 \theta & -c \sin \theta \cos \theta \\ -c \sin \theta \cos \theta & c \cos^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{2i-1} \\ \delta_{2i} \end{Bmatrix}$$

جملات  $C \cos^2 \theta$  ،  $-C \sin \theta \cos \theta$  ،  $C \sin \theta$  در نهایت با جملات ماتریس سختی مربوط به گره های واقع بر روی محور  $n$  جمع شده و ماتریس حاصل جهت بدست آوردن تغییر مکانها به کار گرفته خواهد شد.

اما بر اساس روش فنر توجیهی برای منظور نمودن این گونه شرایط حدی رابطه کلی زیر را در ارتباط تغییر مکانهای درجات آزادی گروه  $i$  می توان در نظر گرفت:

با توجه به ثابت بودن مقادیر  $\beta_2, \beta_1, \beta_0$  جمله انرژی ناشی از فنر توجیهی برابر است با:

$$\beta_1 \delta_{2i-1} + \beta_2 \delta_{2i} = \beta_0$$

**مقادیر ضرائب :**  $\beta_2, \beta_1, \beta_0$

با توجه به اینکه  $C$  مقدار نسبتا بزرگی فرض می شود، انرژی پتانسیل هنگامی به حداقل خواهد رسید

که مقدار عددی جمله  $(\beta_1 \delta_{2i-1} + \beta_2 \delta_{2i} - \beta_0)$  بسیار کوچک باشد یعنی:

در این صورت، ماتریس سختی برای دو درجه آزادی

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_1 = \sin \theta, \quad \beta_2 = -\cos \theta \quad 2i, 2i-1 \text{ تغییرات زیر را خواهد داشت:}$$

همچنین بردار نیرو نیز بشکل زیر تغییر خواهد کرد:

$$\begin{bmatrix} K_{2i-1,2i-1} & K_{2i-1,2i} \\ K_{2i,2i-1} & K_{2i,2i} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} K_{2i-1,2i-1} + c\beta_1^2 & K_{2i-1,2i} + c\beta_1\beta_2 \\ K_{2i,2i-1} + c\beta_1\beta_2 & K_{2i,2i} + c\beta_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{2i-1} \\ F_{2i} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} F_{2i-1} + c\beta_0\beta_1 \\ F_{2i} + c\beta_0\beta_2 \end{Bmatrix}$$

بردار نیرو نیز بشکل زیر تغییر خواهد کرد:  
معادلات حاصله با توجه به برقراری شرایط  
بشکل زیر در خواهند آمد:

$$\sum K_{2i-1,j} \delta_j - F_{2i-1} = R_{2i-1}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta_{2i}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \delta_{2i-1}} = 0$$

$$\sum K_{2i,j} \delta_j - F_{2i} = R_{2i}$$

ژشمارشگر عددی تمامی درجات آزادی است که در ماتریس

سختی ارتباطش با درجات آزادی  $2i, 2i-1$  تعریف شده اند. در این صورت نیروهای

عکس العمل  $R_{2i}, R_{2i-1}$  که در جهت درجات آزادی  $2i, 2i-1$  می باشد از روابط

زیر بدست می آیند:

$$R_{2i-1} = \frac{-\partial}{\partial \delta_{2i-1}} \left[ \frac{1}{2} c (\beta_1 \delta_{2i-1} + \beta_2 \delta_{2i} - \beta_0)^2 \right]$$

$$R_{2i-1} = -c\beta_1 (\beta_1 \delta_{2i-1} + \beta_2 \delta_{2i} - \beta_0)$$

$$R_{2i} = \frac{\partial}{\partial \delta_{2i}} \left[ \frac{1}{2} c (\beta_1 \delta_{2i-1} + \beta_2 \delta_{2i} - \beta_0)^2 \right]$$

$$R_{2i} = c\beta_2 (\beta_1 \delta_{2i-1} + \beta_2 \delta_{2i} - \beta_0)$$

## محدودیت‌های اجزاء مثلث شکل

در صورتیکه سطح جسم به اجزاء مثلث شکل تقسیم شود، لازم است که از ایجاد تغییر با نسبت‌های بزرگ خودداری گردد. نسبت فوق را می‌توان بعنوان حاصل تقسیم ابعاد حداکثر به حداقل در نظر گرفت. بطور کلی هر چه مثلث‌ها به فرم مثلث متساوی الاضلاع نزدیکتر باشند وضعیت مناسبتری حاصل خواهد گردید اما اغلب ایجاد این حالت کار دشواری است. در حالت عمومی انتخاب مثلث با زوایایی بین  $30^\circ$ ،  $120^\circ$  مناسب است. در صورتیکه اجسام گوشه دار مورد بحث باشند، جهت رعایت حدود فوق بهتر است **در نواحی گوشه و دندان‌ها از اجزاء با ابعاد کوچکتر** استفاده کرد. در این صورت گسترش تنش در این نواحی طبیعی‌تر حاصل خواهد گردید.

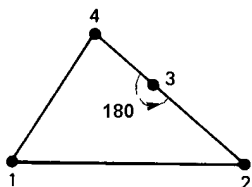
در صورتیکه جزء مثلث با **تغییر شکل نسبی ثابت (CST)** انتخاب شود، نتیجتاً توزیع تنش یکنواخت در پهنه اجزاء حاصل خواهد گردید. در این شرایط انتخاب مثلث‌های کوچکتر جواب‌های دقیق‌تری را ارائه خواهد نمود. در صورتیکه تنها مقادیر حداکثر تنش‌ها مورد نظر باشد، حتی با انتخاب اجزاء بزرگتر، می‌توان با در نظر گرفتن مقادیر متوسط تنش‌ها در مرکز اجزاء و رسم منحنی تراز تنش، نتایج بهتری حاصل نمود.

عموماً انتخاب اجزاء بزرگتر برای بدست آوردن تخمین اولیه مناسب است. از فواید این کار از بین بردن خطاها قبل از محاسبات طولانی با اجزاء کوچک است.

## جزء مثلثی با چهار گره

گاهی اوقات ناچاراً در حین تقسیم جسم به اجزاء چهار ضلعی ممکن است یک جزء مثلثی بشکل حاصل گردد، یعنی دو ضلع جزء چهار ضلعی در امتداد یکدیگر قرار گیرند. یا یکی از **زوایای چهار ضلعی برابر  $180^\circ$**  گردد.

در چنین حالتی محاسبه انتگرال عددی با مشکل روبرو نخواهد شد. بنابراین انتخاب چنین جزئی اگرچه از نظر فرم کلی مجاز نیست ولی با پذیرش قدری خطای بیشتر با پذیرش این جزء مثلثی در قالب یک جزء چهار ضلعی با چهار گره امکان پذیر است.



## جزء مثلث شکل با ۶ گره (Quadratic triangle)

$$\begin{aligned} N_1 &= \xi(2\xi - 1) & N_4 &= 4\xi\eta \\ N_2 &= \eta(2\eta - 1) & N_5 &= 4\xi\eta \\ N_3 &= \zeta(2\zeta - 1) & N_6 &= 4\xi\zeta \end{aligned}$$

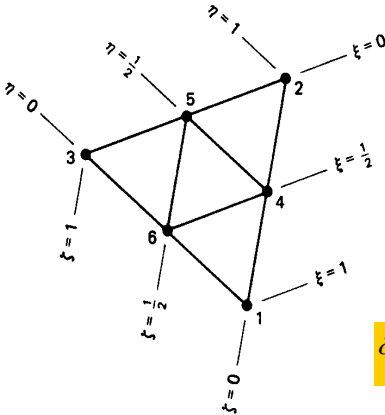
دستگاه مختصات موضعی این جزء همانند دستگاه مختصات موضعی در مثلث سه گرهی است. توابع شکل را می توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\zeta = 1 - \xi - \eta \text{ می باشد.}$$

با توجه به حضور جملاتی مانند  $\eta^2, \xi^2$  این نوع جزء بنام **جزء مثلثی درجه ۲** معروف است.

در صورتیکه در این مورد از انتقال مختصا همگام استفاده شود، می توان نوشت:

$$\delta^e = N \hat{\delta}^e, \quad x = \sum_i N_i x_i, \quad y = \sum_i N_i y_i$$



## ماتریس سختی جزء :

در مورد ماتریس سختی جزء که لازم است با روش انتگرال گیری عددی محاسبه گردد، می توان در جهت کوتاه شدن محاسبات مقادیر ماتریسها را برای یک جزء مثلث سه گرهی در مرکز جزء محاسبه نمود و نوشت:

$$K_e = t_e \int_A \int B^T D B \det J d\xi d\eta = \frac{1}{2} t_e \bar{B}^T \bar{D} \bar{B} \det \bar{J}$$

به عبارتی می توان چنین عنوان نمود که با توجه به اعدادی که در سیستم مست سحل و چهار ضلعی موجود است، برای مقادیر متغیر در پهنه جزء مقدار متوسط که مناسب ترین آنها مقدار متغیر در مرکز مثلث است، در نظر گرفت. **در مرکز مثلث** می توان مقادیر مختصات و ضریب وزنه را بصورت زیر منظور نمود.

در رابطه ماتریس سختی جزء مقادیر

نقطه مبنای گاوسی محاسبه شده اند.  $\bar{J}, \bar{B}$  ورتیکه

$$N_1 = \frac{1}{3} \left( \frac{2}{3} - \frac{3}{3} \right) = \frac{1}{9}, \quad \xi_1 = \eta_1 = \zeta_1 = \frac{1}{3}$$

تعداد نقاط مبنای گاوسی بیش از یک در نظر باشد، ارائه شده در این جدول با توجه به تقارن تهیه شده اند. با توجه به چگونگی تقارن در مثلث، نقاط مبنای گاوسی در گروههای چندگانه اعم از یک و سه و شش گانه ارائه شده اند. در حالت سه گانه چنانچه اولین مختصات نقاط مبنای گاوس، مثلا بصورت  $(2/3, 1/6, 1/6)$  دومین و سومین مختصات بصورتهای  $(1/6, 2/3, 1/6)$  و  $(1/6, 1/6, 2/3)$  خواهند بود. لازم به ذکر است که

$$\zeta = 1 - \xi - \eta$$



## نقاط مبنای گاوسی

در حالت شش گانه لازم است. هر شش حالت از مختصات  $(\xi, \eta, \zeta)$  بکار گرفته شوند.

$n$	تعداد نقاط گاوسی	ضریب وزنه $W_i$	چندگانه	$\xi_i$	$\eta_i$	$\zeta_i$
یک	1	1/3	1	1/3	1/3	1/3
سه	3	1/6	3	2/3	1/3	1/6
سه	3	1/6	3	1/2	1/2	0
چهار	4	-9/32	1	1/3	1/3	1/3
چهار	4	25/96	3	3/5	1/5	1/5
شش	6	1/12	6	0.65902762	0.2319333685	0.1090390090



## اجزاء چهار ضلعی ایزوپارامتری (همگام)

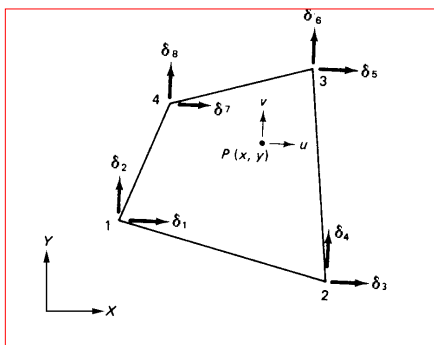
یکی از متداولترین نوع در میان اجزاء صفحه ای (دو لبه ای)، جزء چهار ضلعی با چهار گره در چهار گوشه آنست. عموماً شماره گذاری این گونه اجزاء در جهت خلاف عقربه های ساعت صورت می گیرد.

$$\hat{\delta}^e = \{\hat{\delta}_1^e, \hat{\delta}_2^e, \hat{\delta}_3^e, \dots, \hat{\delta}_8^e\}^T$$

در صورتی که هر گره در صفحه جزء دارای دو درجه آزادی باشد، بردار تغییر مکان گره ها بصورت زیر نوشته می شود.

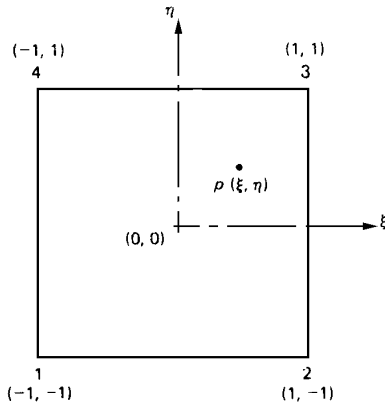
موقعیت یک نقطه مانند  $P$  با مختصات  $(x, y)$  مشخص شده و تغییر مکان آنرا می توان با دو مؤلفه نشان داد.

$$\hat{\delta}_p^e = \{u(x, y), v(x, y)\}^T$$



## دستگاه مختصات محلی

برای تعریف توابع شکل بر روی این گونه اجزاء عموماً یک دستگاه مختصات محلی انتخاب و توابع شکل در این دستگاه تعریف می‌شود. در دستگاه مختصات محلی شکل  $N_i$  مشخص می‌گردد، مقدار آن بر روی گره  $i$  واحد و در سایر گره‌ها صفر است. می‌باشند. با تعریف چهار گره بر روی جزء برای هر گره یک تابع شکل  $-1 \leq \xi \leq 1$  ,  $-1 \leq \eta \leq 1$



تابع شکل می‌توان برای گره ۱ عبارت زیر را در نظر گرفت (خانواده توابع شکل لاگرانژی):

C در عبارت فوق یک عدد ثابت است.  $N_1 = c(1-\xi)(1-\eta)$   
با توجه به اینکه  $N_1$  در گره‌های ۲، ۳، ۴ بایستی صفر گردد، می‌توان چنین بیان نمود که در مقدار  $N_1$  صفر است. بنابراین  $\eta=1$  ,  $\xi=-1$  مناسب انتخاب شده است.

## توابع شکل

از طرف دیگر شرط  $N_1 = 1$  در گره ۱ که در حالت  $\xi = -1$  ,  $\eta = -1$  صادق است، را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$1 = c(2)(2) \Rightarrow c = \frac{1}{4}$$

با جایگزینی C تابع شکل کامل و بصورت  $N_1 = 1/4(1-\xi)(1-\eta)$  حاصل می‌شود. جهت چهار گره جزء می‌توان به همین ترتیب روابط زیر را در نظر گرفت:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

در حالت عمومی می‌توان توابع شکل فوق را به فرم زیر ارائه نمود:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)$$

در این رابطه  $(\xi_i, \eta_i)$  مختصات هر نقطه مانند  $i$  می‌باشد.

در صورتیکه تغییر مکان هر نقطه بصورت  $\delta(u, v)$  تعریف گردد تغییر شکل در پهنه جزء را بر حسب توابع شکل و تغییر شکل گره‌ها بدست آورد. بردار تغییر شکل گره‌ها در این حالت یک بردار  $(8 \times 1)$  می‌باشد.

## تغییر شکل هر نقطه با مختصات $(\xi, \eta)$

$$u = N_1 \hat{\delta}_1^e + N_2 \hat{\delta}_3^e + N_3 \hat{\delta}_5^e + N_4 \hat{\delta}_7^e$$

$$v = N_1 \hat{\delta}_2^e + N_2 \hat{\delta}_4^e + N_3 \hat{\delta}_6^e + N_4 \hat{\delta}_8^e$$

روابط فوق بشکل ماتریسی  $\delta^e = N \hat{\delta}^e$  می‌گردد.

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

ماتریس  $N$  بصورت زیر خواهد بود:

با تعریف اجزاء ایزوپارامتری (همگام) برای بدست آوردن مختصات در دستگاه مختصات کلی از توابع شکل یکسان  $N_i$  استفاده شده و روابط زیر بین مختصات هر نقطه و مختصات گره‌ها حاکم:

$$x = N_1 \hat{x}_1 + N_2 \hat{x}_2 + N_3 \hat{x}_3 + N_4 \hat{x}_4$$

$$y = N_1 \hat{y}_1 + N_2 \hat{y}_2 + N_3 \hat{y}_3 + N_4 \hat{y}_4$$

جهت بدست آوردن مشتقات در دستگاه مختصات از روش مشتق گیری زنجیره ای می‌توان استفاده نمود.

$$\eta, \xi$$

در صورتیکه تابع  $f$  بصورت زیر تعریف شده باشد،  $x, y$  خود تابع  $\eta, \xi$  باشند. بنابراین:

$$f = f(x, y) = f[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

$J$  در عبارت فوق ماتریس تعقوبی است

$$J = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta)x_1 + (1-\eta)x_2 + (1+\eta)x_3 - (1+\eta)x_4 & -(1-\eta)y_1 + (1-\eta)y_2 + (1+\eta)y_3 - (1+\eta)y_4 \\ -(1-\xi)x_1 - (1-\xi)x_2 + (1-\xi)x_3 + (1-\xi)x_4 & -(1-\xi)y_1 - (1-\xi)y_2 + (1-\xi)y_3 + (1-\xi)y_4 \end{bmatrix}$$

رابطه مشتقات در دستگاه مختصات موضعی و کلی به شکل زیر

نوشته می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$$dx dy = \det J . d\xi d\eta$$

### ماتریس سختی جزء:

بطریق مشابه ماتریس سختی جزء چهار ضلعی را می‌توان از اولین جمله در رابطه انرژی پتانسیل یعنی جمله مربوط به انرژی داخلی (انرژی ناشی از تغییر شکل نسبی) بدست آورد. این جمله بصورت زیر است:

$$U = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon^T \sigma dV = \sum_e t_e \int_{e2} \frac{1}{2} \varepsilon^T D \varepsilon dA$$

$t_e$  ضخامت جزء است که در پهنه جزء ثابت فرض شده است. رابطه تغییر شکل نسبی و تغییر مکان بصورت زیر است:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon = A \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

رابطه تغییر شکل نسبی و تغییر مکان را با توجه به اینکه کرنش تابعی از مشتقات تغییر مکان هر نقطه نسبت به  $\xi, \eta$  می باشد، بصورت زیر می توان نوشت:

ماتریس  $A$  لازم است پاسخگوی ارتباط کرنش با مشتقات تغییر مکان باشد، این ماتریس به جملات ماتریس یعقوبی بستگی داشته و بشکل زیر خواهد بود.

$$A = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21} & J_{11} \\ -J_{21} & J_{11} & J_{22} & -J_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = L \hat{\delta}^e$$

برای ارتباط با مشتقات تغییر مکانها در دستگاه مختصات محلی با تغییر مکان گره ها می توان نوشت:

$$L = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) & 0 \\ -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) & 0 \\ 0 & -(1-\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & -(1+\eta) \\ 0 & -(1-\xi) & 0 & -(1+\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix}$$

با توجه به رابطه کلی  $\varepsilon = B \hat{\delta}^e$  می توان نتیجه گرفت:  $B = AL$

براساس روابط فوق رابطه تغییر شکل نسبی در پهنه جزء بر حسب تغییر مکانهای گره های جزء بدست می آید. با بدست آوردن تغییر مکان در گره ها می توان بسادگی تنش را از رابطه زیر بدست آورد:

در این حالت  $D$  ماتریس  $(3 \times 3)$  و معرف رفتار مکانیکی مواد  $\sigma = D \bar{B} \hat{\delta}^e$  رفته در جزء است. اولین جمله در رابطه انرژی کلی پتانسیل که مربوط به انرژی داخلی در اثر تغییر شکلهای نسبی در تمام اجزاء می باشد، بصورت زیر است:

$$U = \sum \frac{1}{2} \hat{\delta}^{eT} \left[ t_e \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B^T D B \det J d\xi d\eta \right] \hat{\delta}^e = \sum \frac{1}{2} \hat{\delta}^{eT} k^e \hat{\delta}^e$$

$$k^e = t_e \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B^T DB \det J d\xi d\eta$$

ماتریس سختی جزء که یک ماتریس  $(8 \times 8)$  است بدست می‌آید. در رابطه بدست آمده ماتریس  $B$ ،  $\det J$  تابع  $\eta, \xi$  می‌باشند. انتگرال گیری در روابط فوق معمولاً بطریق عددی انجام می‌شود.

## نیروهای جرمی:

نیروی جرمی که بر حسب نیرو بر واحد حجم می‌باشد، در جمله کلی انرژی ناشی از نیروی جرمی جایگزین می‌گردد. جمله انرژی پتانسیل مربوط به نیروی جرمی با توجه به روابط و صورت زیر است:

$$f_b = \{f_{bx}, f_{by}\}^T$$

$$\delta^e = N \hat{\delta}^e$$

بردار نیروهای جرمی که یک بردار  $(8 \times 1)$  می‌باشد به شکل  $\int_V \delta^{eT} f_b dv = \hat{\delta}^{eT} f_b^e$  می‌گیرد:

$$f_b^e = t_e \left[ \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N^T \det J d\xi d\eta \right] \begin{Bmatrix} f_{bx} \\ f_{by} \end{Bmatrix}$$

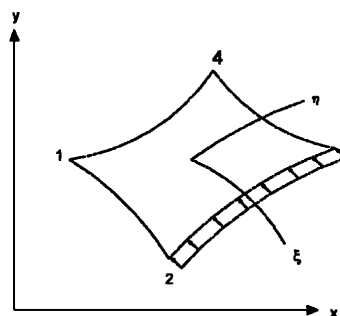
عملیات انتگرال گیری نیز عددی محاسبه می‌شود.

## نیروهای سطحی:

این نیرو که مانند حالت قبل بصورت  $f_s = \{f_{sx}, f_{sy}\}^T$  می باشد. بر حسب نیرو بر واحد سطح بوده و تنها در حالت یاد شده می تواند بر لبه های جزء و در صفحه جزء به جزء وارد گردد. در صورتیکه لبه (2-3) برای اعمال نیروهای سطحی در نظر گرفته شود، برای لبه یاد شده  $\xi = 1$  می باشد. در صورتیکه توابع شکل خطی انتخاب گردد، می توان نوشت:

$$N_1 = N_4 = 0$$

$$N_2 = \frac{(1-\eta)}{2} \quad N_3 = \frac{(1+\eta)}{2}$$



در این حالت بردار نیروی سطحی برای جزء مورد نظر بصورت زیر است:

$$f_s^e = \frac{t_e \ell_{2-3}}{2} \{0, 0, f_{sx}, f_{sy}, f_{sx}, f_{sy}, 0, 0\}^T$$

طول لبه جزء در زیر بار می باشد. در صورتیکه نیروی سطحی بصورت یکنواخت اعمال شده باشد، بار معادل در گره های دو سر لبه زیر بار بصورت برابر اعمال می گردد.

### بارهای متمرکز:

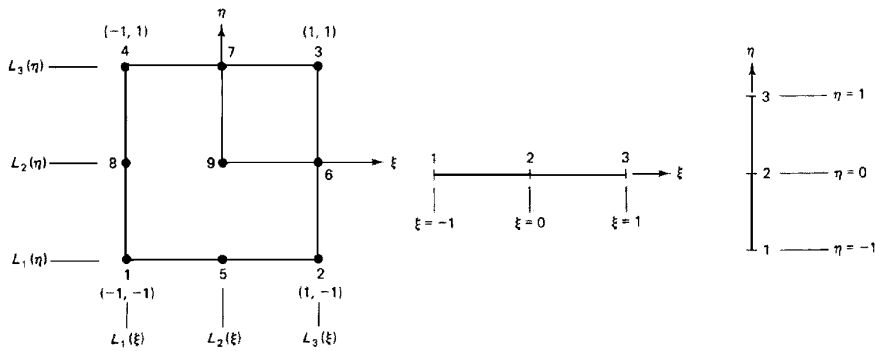
در صورتیکه بار متمرکز به جزء وارد شده باشد، می توان نقطه زیر بار را در هنگام انتخاب گره های المان منظور نموده و یا اینکه بارهای معادل را در گره های جزء محاسبه نمود.

## توابع شکل با درجات بالاتر

برای افزایش دقت در جوابها و ایجاد پیوستگی قوی تر در کناره های جزء می توان توابع شکل را از درجات بالاتری انتخاب نمود. این کار اگرچه حجم محاسبات را افزایش می دهد، ولی بدون افزایش تعداد اجزاء نتایج دقیق تری را حاصل می نماید. گاهی نیز می توان بدون افزایش تعداد گره در اجزاء از توابع شکل با درجات بالا استفاده نمود.

### جزء چهار ضلعی با ۹ گره:

جزء چهار ضلعی با ۹ گره یکی از حالت های متداول در انتخاب جزء چهار ضلعی است. در این حالت می توان شماره گذاری گره ها را بشکل انتخاب نمود.





با انتخاب جزء بصورت نشان داده شده، برای تعیین توابع شکل می توان  
بشکل زیر عمل نمود:

ابتدا محور  $\xi$  را در نظر گرفته می توان برای مثال روی یک محور گره های  $1, 2, 3$  را  
بطور موضعی منظور نمود. در این صورت مقادیر  $\xi$  ای گره های مورد نظر  
بصورت  $\xi = -1, \xi = 0, \xi = +1$  هندی. حال اگر توابع شکل برای سه گره یاد  
شده بصورت  $L_3, L_2, L_1$  در نظر گرفته شوند. طبق تعریف تابع شکل، مقدار این  
توابع بایستی در نقطه مربوطه برابر واحد و در سایر گره ها برابر صفر شوند.  
در این صورت  $L_1$  بایستی در گره ۱ دارای مقدار واحد و گره  $2, 3$  ( $\xi = 0, +1$ )  
مقدارش صفر گردد.

نزدیک ترین فرم که مناسب حالت فوق باشد، بصورت  $L_1 = C\xi(1-\xi)$  خواهد بود. در  
این رابطه  $C$  یک مقدار ثابت است. مقدار ای ثابت  $L_1 = C\xi(1-\xi)$  جود می توان  
استخراج کرد. یعنی در نقطه مقدار  $L_1 = 1$  باشد. بنابراین  $C = -1/2$   
خواهد بود، که در نتیجه می توان نوشت  $\xi = -1$

$$L_1(\xi) = -\frac{\xi(1-\xi)}{2}$$

$$L_2(\xi) = (1+\xi)(1-\xi)$$

بطور مشابه:

$$L_3(\xi) = \frac{\xi(1+\xi)}{2}$$

نظیر روش فوق، می توان در جهت نیز  $\eta$  عمل نمود.

$$L_1(\eta) = -\frac{\eta(1-\eta)}{2}$$

با توجه به اینکه مختصات نقاط مهم بر روی جزء

$$L_2(\eta) = (1+\eta)(1-\eta)$$

تنها دارای مقادیر  $0, -1, +1$  هستند، می توان

$$L_3(\eta) = \frac{\eta(1+\eta)}{2}$$

بسادگی با حاصلضرب توابع مستقل، توابع شکل

اصلی (دو بعدی) را حاصل نمود با انتخاب ۹ گره،

بر روی جزء تعداد ۹ تابع شکل مورد نیاز هستند.

این توابع بصورت زیر می باشند.

$$N_1 = L_1(\xi)L_1(\eta) \quad N_5 = L_2(\xi)L_1(\eta) \quad N_2 = L_3(\xi)L_1(\eta)$$

$$N_8 = L_1(\xi)L_2(\eta) \quad N_9 = L_2(\xi)L_2(\eta) \quad N_6 = L_3(\xi)L_2(\eta)$$

$$N_4 = L_1(\xi)L_3(\eta) \quad N_7 = L_2(\xi)L_3(\eta) \quad N_3 = L_3(\xi)L_3(\eta)$$

با پیگیری روش فوق به آسانی می توان نشان داد که مقدار تابع شکل  $N_i$  در نقطه / برابر  
واحد و در سایر گره ها برابر صفر میباشد.

با انتخاب نمای بزرگتر برای تابع شکل در اصل تقریب بهتری برای تابع تغییر شکل بر روی جزء انتخاب شده است، که در حالت عمومی بصورت زیر است:

$$\delta^e = N \hat{\delta}^e$$

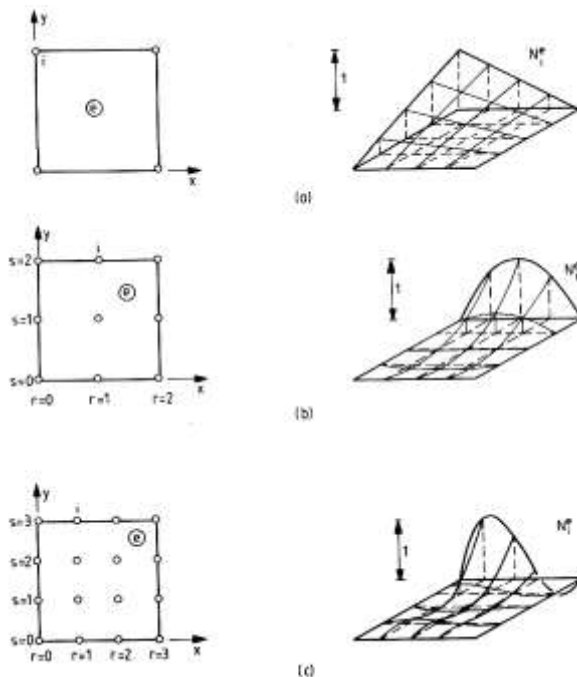
از طرفی با توجه به انتخاب اجزاء همگام [Iso - parametric]، بصورت زیر:

تقریب دقیقتری برای ارائه هندسه جسم در صورتیکه در انتخاب توابع مختصات، درجه پایین تری برای توابع شکل انتخاب گردد، انتقال مختصات همگام نبوده و بصورت:

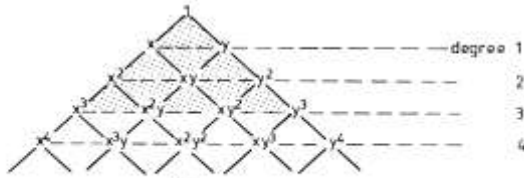
$$x = \sum_i N_i x_i, \quad y = \sum_i N_i y_i$$

زیر- همگام [Sub - parametric] خواهد بود. اما در صورتیکه تابع شکل انتخاب شده دارای نمای بزرگتری از تابع اصلی در جزء باشد. انتقال مختصات به روش فوق - همگام [Super - parametric] خواهد بود.

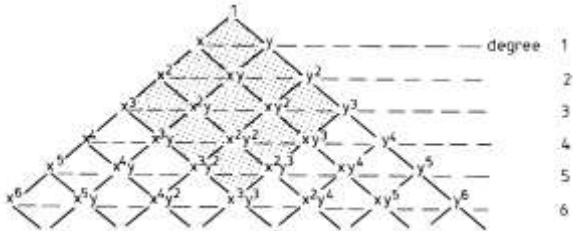
## خانواده توابع لاگرانژ



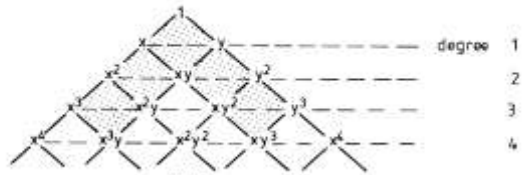
# مثلث پاسکال



(a)



(b)



(c)

## جزء چهار ضلعی با ۸ گره:

یکی دیگر از شکلهای انتخاب گره برای اجزاء چهار ضلعی، جزء هشت گرهی است. این روش از انتخاب گره از گره گزینی های خانواده **سرنديپتی [Serendipity]** می باشد. در این حالت گره ها روی مرزهای جزء، در گوشه ها و در میان اضلاع قرار می گیرند. برای تعیین توابع شکل می توان بطور مشابه به تعریف تابع شکل و شرایط آن رجوع نمود.

برای بدست آوردن  $N_1$  لازم است این تابع در گره ۱ دارای مقدار واحد و در سایر گره ها صفر شود. بنابراین فرم زیر را که قابلیت صفر شدن روی خط را دارد و در نظر گرفت.

با توجه به شرایط  $1 + \xi + \eta = 0$  می توان مقدار ثابت  $C$  را بصورت  $C = -1/4$  بدست آورد.

$$N_1 = C(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)$$

$$N_1 = -\frac{(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)}{4} \quad N_3 = -\frac{(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)}{4}$$

$$N_2 = -\frac{(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)}{4} \quad N_4 = -\frac{(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)}{4}$$

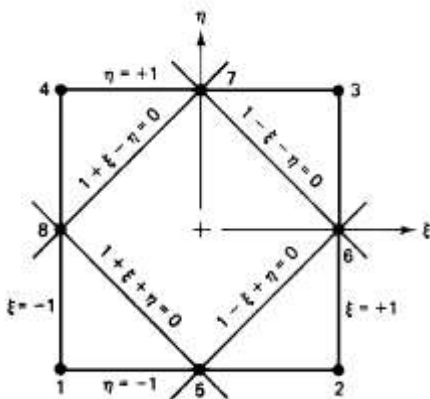
برای تعیین توابع شکل برای گره هایی که در وسط اضلاع واقع می شوند، یعنی  $N_5, N_6, N_7, N_8$  میتوان بصورت زیر عمل نمود:

برای بدست آوردن  $N_5$  نیز که می باید در  $\xi = \pm 1, \eta = \pm 1$  شود، می توان فرم کلی زیر را در نظر گرفت:

$$N_5 = C(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi) = C(1-\xi^2)(1-\eta)$$

مقدار پارامتر  $C$  را شرایط  $N_5$  در گره ۵ بصورت  $C = 1/2$  حاصل می گردد.

بنابراین:



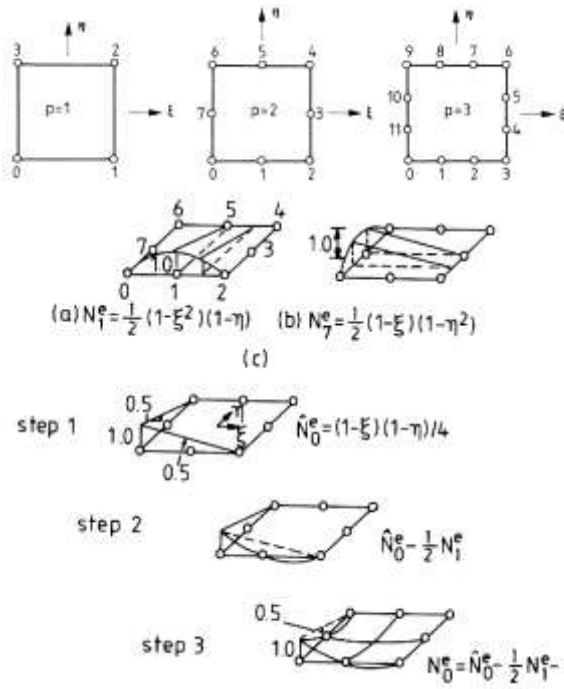
$$N_5 = \frac{(1-\xi^2)(1-\eta)}{2}$$

$$N_6 = \frac{(1+\xi)(1-\eta^2)}{2}$$

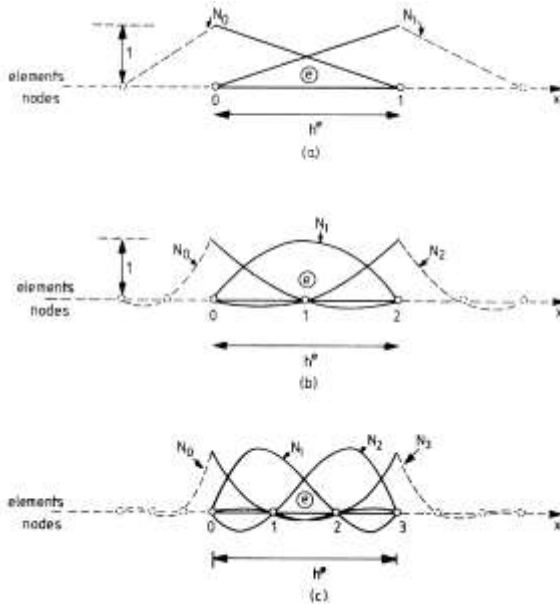
$$N_7 = \frac{(1-\xi^2)(1+\eta)}{2}$$

$$N_8 = \frac{(1-\xi)(1-\eta^2)}{2}$$

### توابع شکل سرندییتی

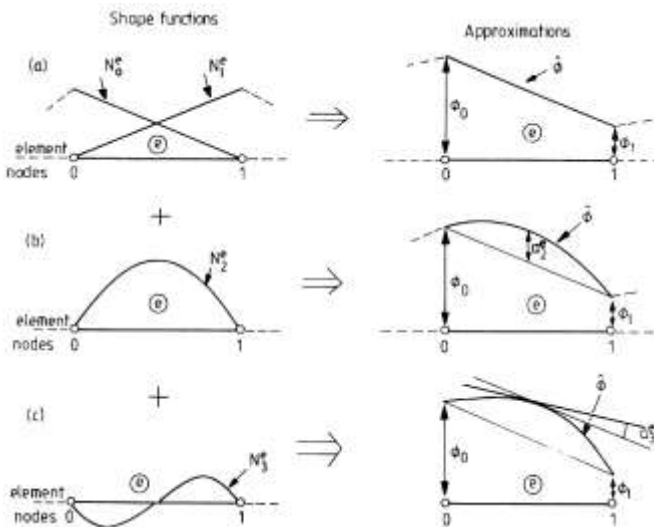


### توابع شکل استاندارد یک بعدی



در این قالب درمرزهای بین اجزاء پیوستگی از درجه  $C^0$  ضمانت می شود.

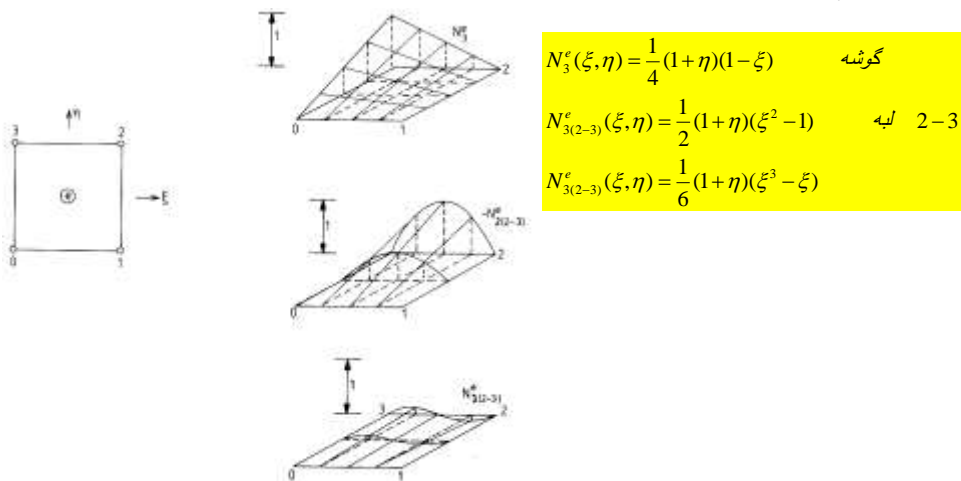
## مؤلفه های توابع شکل بعدی هیر آرکی (Hierarchical S.F.)



توابع شکل هیر آرکی  
 (a) خطی  
 (b) سهمی  
 (c) درجه سه

## توابع شکل هیر آرکی (Hierarchical S.F.)

- توابع شکل گوشه ها همان توابع شکل خطی قبلی است.
- مؤلفه های توابع شکل هیر آرکی در توابع شکل گوشه ها صفر است.



$$N_p^e(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{p!}(\xi^p - 1), & p \text{ زوج} \\ \frac{1}{p!}(\xi^p - \xi), & p \text{ فرد} \end{cases}$$

$$N_2^e(\xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 - 1), \quad N_3^e(\xi) = \frac{1}{6}(\xi^3 - \xi)$$

$$N_4^e(\xi) = \frac{1}{24}(\xi^4 - 1), \quad N_5^e(\xi) = \frac{1}{120}(\xi^5 - \xi)$$

$$P_p(\xi) = \frac{1}{(p-1)!} \frac{1}{2^{p-1}} \frac{d^p}{d\xi^p} [(\xi^2 - 1)^p]$$

$$N_2^e(\xi) = \xi^2 - 1, \quad N_3^e(\xi) = 2(\xi^3 - \xi)$$

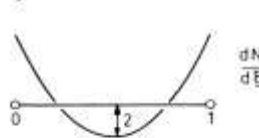
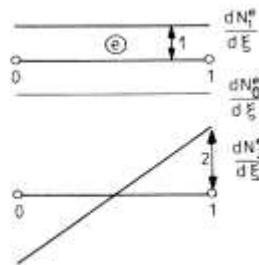
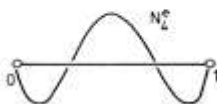
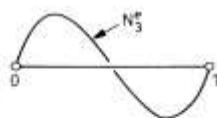
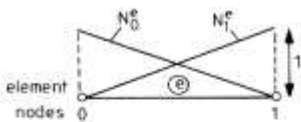
$$N_4^e(\xi) = \frac{1}{4}(15\xi^4 - 18\xi^2 + 3), \quad N_5^e(\xi) = 7\xi^5 - 10\xi^3 + 3\xi$$

لازم به ذکر است که مشتقات  $N_p^e$  از درجات دو و بالاتر در  $\xi = 0$  صفر است.

البته مشتق  $d^p N_p^e / d\xi^p$  در خود نقطه برابر واحد است.

چند جمله ای های لجنرز:

برای  $p=1,2,3,4$

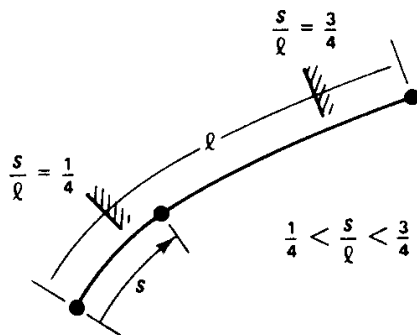


توابع شکل ارتوگونال:

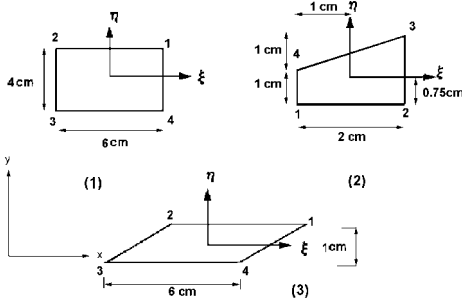
## محل مناسب نقاط میانی در لبه اجزاء:

در صورتیکه اجزاء هم-گام با توابع شکل از درجات بالا مورد استفاده واقع شوند، گاهی وجود نقاط میانی اجتناب ناپذیر می‌باشند. در این صورت اگر نقطه میانی یکی است، لازم خواهد بود که این نقطه هر چه **بیشتر در وسط ضلع مربوطه** قرار داشته باشند. در این مورد بهر طریق نبایستی نقطه میانی خارج از فاصله  $1/4 < S/\ell < 3/4$  (طبق شکل) واقع گردد. تنها در این حالت خواهد بود که

$det J$  مطلقاً در جزء صفر شده و خط قابل پذیرش است.



**مثال:** ماتریس یعقوبی  $J$  را در اجزاء زیر بدست آورید.



برای حل عمومی این گونه مسائل می‌توان گفت: در صورتیکه امتدادها در دستگاه

مختصات موضعی  $(\xi, \eta)$  به موازات

$(X, Y)$  باشند، ماتریس یعقوبی برای

انتقال از هر دستگاه به دستگاه دیگر

یکسان خواهد بود.

$$x = \sum_i N_i x_i$$

$$y = \sum_i N_i y_i$$

**برای انتقال:**

در صورتیکه شکل جزء در

اثر تغییر مکان گره‌ها بطور

نا مناسب تغییر شکل پیدا نمایند،

یعنی مثلاً زاویه‌ای بزرگتر از  $180^\circ$  ایجاد شده و یا لبه جزء تا گردد، دیگر برای هر نقطه

در انتقال مسأله، یگانگی رعایت نمی‌گردد. در این حالت ها ماتریس یعقوبی مفرد

**[Singular]** شده و امکان معکوس نمودن را نخواهد داشت.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\text{و یا } \frac{\partial}{\partial \xi} = J \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = J^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi}$$



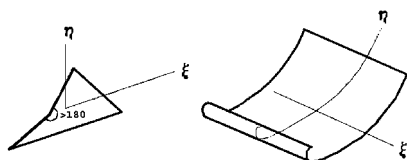
برای جزء ۱، می توان نوشت:

$$x = 3\xi \quad , \quad y = 2\eta$$

ماتریس یعقوبی :

بطور مشابه برای جزء ۲ می توان نوشت:

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$



$$x = \frac{1}{4} \left\{ (1+\xi)(1+\eta) \left( 3 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) + (1-\xi)(1+\eta) \left( -3 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) + (1-\xi)(1-\eta) \left( -3 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) + (1+\xi)(1-\eta) \left( 3 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \right\}$$

$$y = \frac{1}{4} \left\{ (1+\xi)(1+\eta) \left( \frac{1}{2} \right) + (1-\xi)(1+\eta) \left( \frac{1}{2} \right) + (1-\xi)(1-\eta) \left( -\frac{1}{2} \right) + (1+\xi)(1-\eta) \left( -\frac{1}{2} \right) \right\}$$

برای جزء ۳:

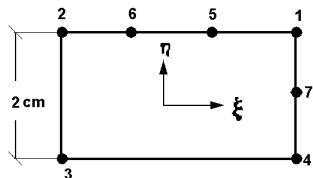
$$x = \frac{1}{4} \left\{ (1+\xi)(1+\eta)(1) + (1-\xi)(1+\eta)(-1) + (1-\xi)(1-\eta)(-1) + (1+\xi)(1-\eta)(1) \right\}$$

$$y = \frac{1}{4} \left\{ (1+\xi)(1+\eta) \left( \frac{5}{4} \right) + (1-\xi)(1+\eta) \left( \frac{1}{4} \right) + (1-\xi)(1-\eta) \left( -\frac{3}{4} \right) + (1+\xi)(1-\eta) \left( -\frac{3}{4} \right) \right\}$$

$$J = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & (1+\eta) \\ 0 & (3+\eta) \end{bmatrix}$$

در سه حالت فوق ماتریس یعقوبی  $(2 \times 2)$  است. در دو جزء ۱، ۲، ماتریس  $J$  بستگی به موقعیت  $(\xi, \eta)$  ندارد. چون محل دستگاه مختصات در مرکز جزء قرار گرفته است. در جزء ۳ ماتریس  $J$  بستگی به موقعیت  $(\xi, \eta)$  دستگاه مختصات خواهد داشت.

مثال: جزء چهار ضلعی زیر مورد نظر است. توابع شکل مختلف بصورت خطی، درجه ۲ و درجه ۳ برای گره های مختلف بکار گرفته شده اند. توابع شکل را برای جزء زیر بنویسید.



$$N_5 = \left\{ \frac{1}{6}(-27\xi^3 - 9\xi^2 + 27\xi + 9) \right\} \left\{ \frac{1}{2}(1+\eta) \right\}$$

$$N_6 = \left\{ (1-\xi^2) + \frac{1}{16}(27\xi^3 + 7\xi - 7) \right\} \left\{ \frac{1}{2}(1+\eta) \right\}$$

$$N_2 = \left\{ \frac{1}{2}(1-\xi) - \frac{1}{2}(1-\xi^2) + \frac{1}{16}(9\xi^3 - \xi^2 + 9\xi - 1) \right\} \left\{ \frac{1}{2}(1+\eta) \right\} \quad N_3 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

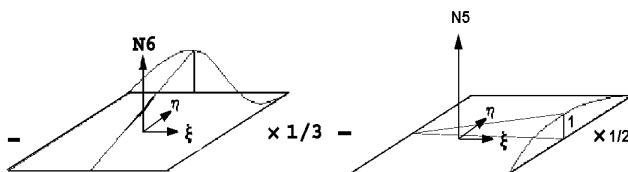
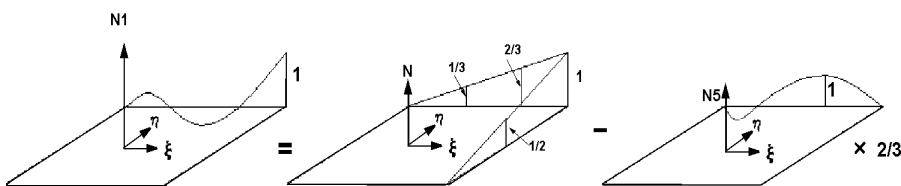
$$N_7 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) - \frac{N_7}{2}$$

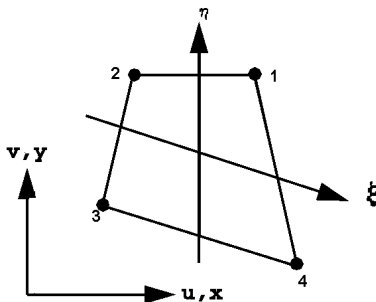
$$N_1 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) - \frac{2}{3}N_5 - \frac{1}{3}N_6 - \frac{1}{2}N_7$$

شکل توابع برای گره ۱ ترکیبی بصورت زیر را داراست.

$$N_1 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) - \frac{2}{3}N_5 - \frac{1}{3}N_6 - \frac{1}{2}N_7$$



مثال: ماتریس سختی جزء چهار ضلعی و چهار گرهی زیر را بدست آورید.



$$N_1 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

توابع شکل :

جهت انتقال می توان نوشت:

$$x = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)x_1 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)x_2 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)x_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)x_4$$

$$y = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)y_1 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)y_2 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)y_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)y_4$$

تغییر مکان

$$u = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)u_1 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)u_2 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)u_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)u_4$$

در پهنه جزء :

$$v = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)v_1 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)v_2 + \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)v_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)v_4$$

تغییر شکل نسبی در پهنه جزء دارای سه مؤلفه بصورت  $\varepsilon = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$  است. بطوریکه:

برای بدست آوردن جملات فوق

لازم است، روابط انتقال زیر در نظر گرفته شوند.

و یا

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = J \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = J^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

نتیجتا:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

با استفاده از عبارات فوق

می توان ماتریس  $J$  را برای

هر نقطه  $(\xi, \eta)$  بدست

آورد. در نتیجه مشتقات

پاره ای مورد نیاز در

محاسبه تغییر شکلهای

نسبی حاصل خواهند

گردید.

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1+\eta)x_1 - \frac{1}{4}(1+\eta)x_2 - \frac{1}{4}(1-\eta)x_3 + \frac{1}{4}(1-\eta)x_4$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1+\xi)x_1 + \frac{1}{4}(1-\xi)x_2 - \frac{1}{4}(1-\xi)x_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)x_4$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1+\eta)y_1 - \frac{1}{4}(1+\eta)y_2 - \frac{1}{4}(1-\eta)y_3 + \frac{1}{4}(1-\eta)y_4$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1+\xi)y_1 + \frac{1}{4}(1-\xi)y_2 - \frac{1}{4}(1-\xi)y_3 + \frac{1}{4}(1+\xi)y_4$$

مشتقات پاره ای تغییر شکلها در دستگاه مختصات موضعی به شکل زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1+\eta)u_1 - \frac{1}{4}(1+\eta)u_2 - \frac{1}{4}(1-\eta)u_3 + \frac{1}{4}(1-\eta)u_4$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1+\eta)u_1 + \frac{1}{4}(1-\xi)u_2 - \frac{1}{4}(1-\xi)u_3 - \frac{1}{4}(1+\xi)u_4$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1+\eta)v_1 - \frac{1}{4}(1+\eta)v_2 - \frac{1}{4}(1-\eta)v_3 + \frac{1}{4}(1-\eta)v_4$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1+\xi)v_1 + \frac{1}{4}(1-\xi)v_2 - \frac{1}{4}(1-\xi)v_3 - \frac{1}{4}(1+\xi)v_4$$

$$\varepsilon^e = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} J^{-1} \begin{bmatrix} 1+\eta & 0 & -1-\eta & 0 & -1+\eta & 0 & 1-\eta & 0 \\ 0 & 1+\xi & 0 & 1-\xi & 0 & -1+\xi & 0 & -1-\xi \\ 1+\xi & 1+\eta & 1-\xi & 1-\eta & -1+\xi & -1+\eta & -1-\xi & -1-\eta \end{bmatrix} \hat{\delta}^e$$

در حالی که:

$$\hat{\delta}^e = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4\}^T$$

با توجه به مقایسه رابطه بدست آمده برای و مقایسه آن با رابطه می توان

ماتریس  $B$  را در دستگاه مختصات کلی بصورت زیر نوشت:

$$B = \frac{1}{4} J^{-1} \begin{bmatrix} 1+\eta & 0 & -1-\eta & 0 & -1+\eta & 0 & 1-\eta & 0 \\ 0 & 1+\xi & 0 & 1-\xi & 0 & -1+\xi & 0 & -1-\xi \\ 1+\xi & 1+\eta & 1-\xi & 1-\eta & -1+\xi & -1+\eta & -1-\xi & -1-\eta \end{bmatrix}$$

بطور کلی می توان این ماتریس را در دستگاه مختصات موضعی بصورت زیر است:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی جزء در مختصات کلی بصورت زیر است:

$$K_e = B^T D B \det J (t)$$

$t$  در عبارت فوق ضخامت یکنواخت جزء است. با توجه به دو بعدی بودن آن و در نظر گرفتن  $l$  بصورت ماتریس  $(2 \times 2)$  وجود  $t$  لازم است.

مثال: جزء زیر با چهار گره و جرم مخصوص  $\rho$  مورد نظر است. بارهای معادل در گره ها در اثر نیروی جذب به مرکز بدست آورید. نشان داده شده در اصل مقطع حاصل از جسمی است که از دوران این سطح حول محور  $\gamma$  بدست می آید.

$$F_b^e = \int_V N^T f_b^e dV$$

$$f_b^e = \begin{Bmatrix} f_{bx} \\ f_{by} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho \omega^2 R \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad N_2 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad N_4 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$R = \sum N_i R_i$$

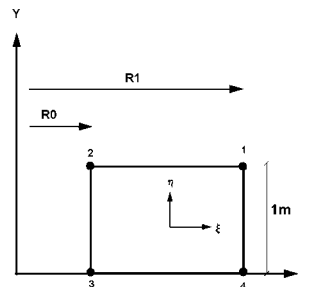
$$R = \frac{1}{2}(1-\xi)R_0 + \frac{1}{2}(1+\xi)R_1 = \frac{R_0 + R_1}{2} + \xi \frac{-R_0 + R_1}{2}$$

بردار نیروهای جرمی :

توابع شکل :

شعاع نقاط نیز بصورت یک متغیر در

پهنه جزء بصورت زیر نوشته می شود:



ماتریس توابع شکل و ماتریس یعقوبی :

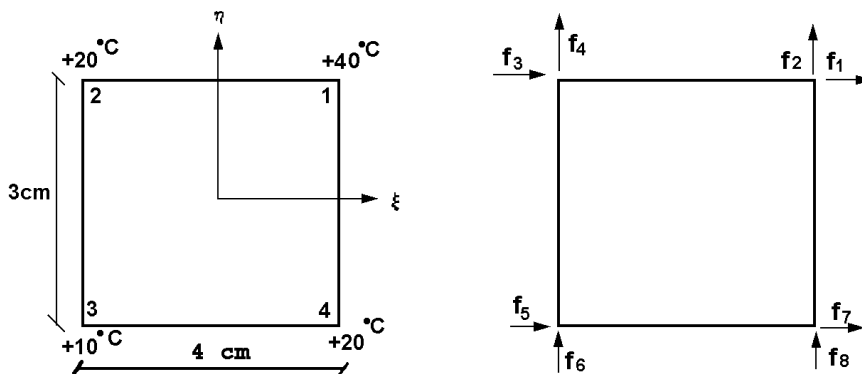
$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} \frac{R_1 - R_0}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$dV$  بصورت زیر می باشد.

$$dV = \det J \, d\xi d\eta \, R = \left( \frac{R_1 - R_0}{4} \right) d\xi d\eta \left[ \frac{R_0 + R_1}{2} + \frac{-R_0 + R_1}{2} \xi \right]$$

$$F_b^e = \frac{\rho \omega^2 (R_1 - R_0)}{64} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} (1+\xi)(1+\eta) & 0 \\ 0 & (1+\xi)(1+\eta) \\ (1-\xi)(1+\eta) & 0 \\ 0 & (1-\xi)(1+\eta) \\ (1+\xi)(1-\eta) & 0 \\ 0 & (1+\xi)(1-\eta) \\ (1-\xi)(1-\eta) & 0 \\ 0 & (1-\xi)(1-\eta) \end{bmatrix} \left[ (R_1 + R_0) + (R_1 - R_0)\xi \right]^2 d\xi d\eta$$

یک جزء چهار ضلعی با چهار گره در حالت تنشهای مسطح مورد نظر است که در آن درجه حرارت در گره ها بشکل زیر تغییر نموده است. در صورتیکه درجه اولیه  $t_0$  باشد. و با فرض عدم امکان تغییر مکان گره ها در صفحه جزء، نیروهای ایجاد شده در گره ها را در اثر تغییر درجه حرارت بدست آورید.



ضریب انبساط حرارتی  $\alpha$  و ضریب پواسن  $\nu$  و مدول الاستیسیته  $E = 1 \text{ cm}$  ضخامت جسم می باشند. رابطه تنش - تغییر شکل نسبی در حالت

عمومیه شکل زیر است:

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0)$$

$$\varepsilon^T = \{\alpha(t - t_0), \alpha(t - t_0), 0\}^T$$

$$F_i = \int_V B \sigma^T dv = \int_V B^T D \varepsilon_0 dv$$

$$U_i = \int_V \delta^{\varepsilon T} B^T D \varepsilon_0 dv$$

$$t = \sum_{i=1}^4 N_i t_i \quad \sigma_1 = D \begin{Bmatrix} \alpha(t - t_0) \\ \alpha(t - t_0) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

تغییر شکلهای نسبی حرارتی :

با توجه به عدم امکان تغییر مکان گره ها در اثر

تغییر شکلهای نسبی حرارتی در صفحه جزء،

یک بردار نیرو بصورت زیر در جزء حاصل می گردد:

انرژی مؤثر در اثر تغییر درجه حرارت :

**تغییر درجه حرارت در پهنه جزء :**

با توجه به رفتار خطی مواد و فرض انجام کرنشهای حرارتی و برگرداندن آنها به حالت اول

بوسیله اعمال تنش می توان تنشهای

را که باعث حذف کرنشهای حرارتی

می شوند، بصورت زیر بدست آورد:

$$\sigma_1 = -\frac{E\alpha}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \left\{ \left( \sum_{i=1}^4 N_i t_i \right) - t_0 \right\}$$

### ماتریس یعقوبی :

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \det J = 3$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1+\eta}{8} & 0 & -\frac{1+\eta}{8} & 0 & -\frac{1-\eta}{8} & 0 & \frac{1-\eta}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1+\xi}{6} & 0 & \frac{1-\xi}{6} & 0 & -\frac{1-\xi}{6} & 0 & -\frac{1+\xi}{6} \\ \frac{1+\xi}{6} & \frac{1+\eta}{8} & \frac{1-\xi}{6} & \frac{1+\eta}{8} & -\frac{1-\xi}{6} & -\frac{1-\eta}{8} & -\frac{1+\xi}{6} & \frac{1-\eta}{8} \end{bmatrix}$$

ماتریس B بصورت زیر

بدست می آید.  $B = AL$

**نتیجتاً بردار نیروی معادل گرهی حرارتی  $F_i$ :**

$$F_i = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \frac{1+\eta}{8} & 0 & \frac{1+\xi}{6} \\ 0 & \frac{1+\xi}{6} & \frac{1+\eta}{8} \\ -\frac{1+\eta}{8} & 0 & \frac{1-\xi}{6} \\ 0 & \frac{1+\xi}{6} & -\frac{1+\eta}{8} \\ -\frac{1-\eta}{8} & 0 & -\frac{1-\xi}{6} \\ 0 & -\frac{1-\xi}{6} & -\frac{1-\eta}{8} \\ \frac{1-\eta}{8} & 0 & -\frac{1+\xi}{6} \\ 0 & -\frac{1+\xi}{6} & \frac{1-\eta}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1+\nu \\ 1+\nu \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{E\alpha}{1-\nu^2} [2.5(\eta+3)(\xi+3)-t_0] 3d\xi d\eta$$

$$F_i = -\frac{E\alpha}{1-\nu^2} \{(37.5-1.5t_0), (50-2t_0), (-37.5+1.5t_0), (40-2t_0), (-30+1.5t_0), (-40+2t_0), (30-1.5t_0), (-50+2t_0)\}^T \quad ^\circ C$$

مثال: در جزء زیر نیروهای معادل گرهی را در اثر بارهای سطحی نشان داده شده

$$f_s^e = \int_s N f_s ds$$

بدست آورید. فشار را مثبت فرض کنید.

الف- لازم است در اصل بردار نیروهای سطحی که بشکل زیر است محاسبه شود.

در لبه ۱-۲ که است، توابع شکل زیر را می توان بکار گرفت:

$$N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \Big|_{\eta=+1}$$

توابع شکل مقابل در اصل توابع شکل جزء روی ضلع زیر بار با سه

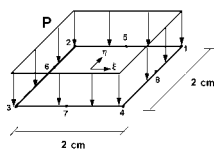
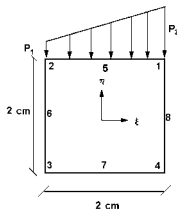
گره می باشند. در مورد مؤلفه های تغییر مکان هر گره در حالت

$$N_1 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \Big|_{\eta=+1} = \frac{1}{2}\xi(1+\xi)$$

کلی، در اثر بارهای سطحی، می توان نوشت:

$$N_2 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(\eta-\xi-1) \Big|_{\eta=+1} = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\xi(\xi+1) & 0 & -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) & 0 & 1-\xi^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\xi(1+\xi) & 0 & -\frac{1}{2}\xi(1-\xi) & 0 & 1-\xi^2 \end{bmatrix}$$



بردار نیروهای سطحی :

$$\begin{Bmatrix} f_s^\xi \\ f_s^\eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}(1+\xi)P_1 + \frac{1}{2}(1-\xi)P_2 \end{bmatrix}, \quad \det J^s = 1.0$$

$$F_s^e = \int_{-1/2}^{+1/2} \begin{bmatrix} \xi(1+\xi) & 0 \\ 0 & \xi(1+\xi) \\ -\xi(1-\xi) & 0 \\ 0 & -\xi(1-\xi) \\ 2(1-\xi^2) & 0 \\ 0 & 2(1-\xi^2) \end{bmatrix} \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}(1+\xi) P_1 + \frac{1}{2}(1-\xi) P_2 \right] d\xi$$

بطریق مشابه می توان در حالت (ب) برای جزء سه بعدی نیز مسأله را حل نمود. با توجه به تخت بودن سطح جزء و عمود بودن بار سطحی بر آن نیروهای معادل گرهی، تنها عمود بر سطح بوده و از طرف دیگر بخاطر وجود تقارن، نیروهای معادل گرهی در گره های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ با هم برابر و همچنین در گره های ۵ و ۶ و ۷ و ۸ نیز با توجه به توابع شکل ارائه شده برای جزء چهار ضلعی تحت بار نهشت گره، می توان نتایج زیر را حاصل نمود.

$$F_s^e = \frac{1}{3} \{0, P_1, 0, P_2, 0, 2(P_1 + P_2)\}^T$$

$$F_s^e = P \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} (1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) d\xi d\eta = -\frac{1}{3} P$$

$$F_s^e = P \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} (1-\xi^2)(1+\eta) d\xi d\eta = \frac{4}{3} P$$

جمع بارهای گرهی برابر  $4P$  است، که با کل بار وارده برابری می نماید، البته بارهای گرهی در گوشه ها در جهت مخالف فشار می باشند.

$$N_5 = \frac{1}{2} (1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$N_8 = \frac{1}{2} (1-\eta^2)(1+\xi)$$

$$N_1 = \frac{1}{4} (1+\xi)(1+\eta) - \frac{1}{2} N_5 - \frac{1}{2} N_8$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1-\xi)(1+\eta) - \frac{N_6}{2}$$

مختصات گره های جزء چهار ضلعی، در شکل نشان داده شده است. بردار تغییر مکان گره های جزء نیز بصورت  $\hat{\delta}_e = [0, 0, 0.20, 0, 0, 0.15, 0.10, 0, 0.05]^T$  mm است:

الف) مختصات  $x, y$  نقطه  $P$  را که مختصات موضعی آن بصورت  $\eta = 0.5, \xi = 0.5$  داده شده است  $\theta$  بدست آورید.

ب) تغییر مکان  $u, v$  نقطه  $P$  را بدست آورید.

حل:

در حالت همگام بودن جزء می توان نوشت:

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4$$

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4$$

$$N_1 = \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta) \quad N_3 = \frac{1}{4} (1+\xi)(1+\eta) \quad N_1 = 0.0625 \quad N_3 = 0.5625$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1+\xi)(1-\eta) \quad N_4 = \frac{1}{4} (1-\xi)(1+\eta) \quad N_2 = 0.1875 \quad N_4 = 0.1875$$

$$x = 0.0625(1) + 0.1875(5) + 0.5625(6) + 0.1875(1) = 4.5625 \quad mm$$

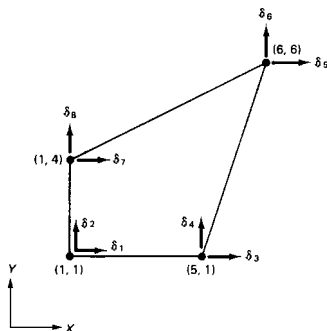
$$y = 0.0625(1) + 0.1875(1) + 0.5625(6) + 0.1875(4) = 4.375 \quad mm$$

$$u = N_1 \hat{\delta}_1^e + N_2 \hat{\delta}_3^e + N_3 \hat{\delta}_5^e + N_4 \hat{\delta}_7^e$$

$$v = N_1 \hat{\delta}_2^e + N_2 \hat{\delta}_4^e + N_3 \hat{\delta}_6^e + N_4 \hat{\delta}_8^e$$

$$u = 0.1875(0.2) + 0.5625(0.15) = 0.1219 \quad mm$$

$$v = 0.5625(0.1) + 0.1875(0.05) = 0.05663 \quad mm$$



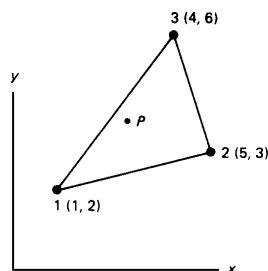


مثال: مختصات گره های جزء مثلثی، در شکل نشان داده شده است. مختصات  $x$  نقطه داخلی  $P$  برابر با  $3.3$ ،  $0.3$  است.  $N_2$ ،  $N_3$  و مختصات  $y$  نقطه  $P$  را بدست آورید.

$$x = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 = N_1(1) + 5N_2 + 4N_3 = 3.3$$

$$y = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + 2(N_1) + 3N_2 + 6N_3 =$$

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1$$

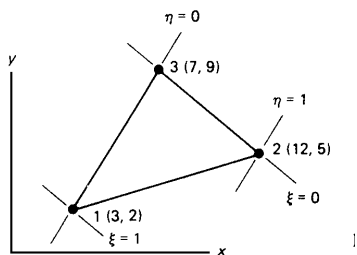


حل همزمان سه معادله و سه مجهول :

$$N_3 = 0.2 \quad N_2 = 0.5 \quad y = 4.2$$

مثال: مختصات گره ها در جزء مثلثی در شکل نشان داده شده است. الف) ماتریس تعقوبی را برای انتقال دستگاه مختصات عمومی و موضعی به دست آورید.

ب) مساحت جزء را بدست آورید.



$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

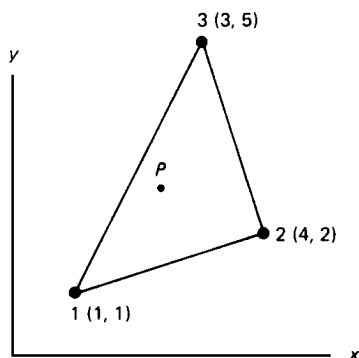
$$x = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 = x_1\xi + x_2\eta + x_3(1 - \xi - \eta) \\ = (x_1 - x_3)\xi + (x_2 - x_3)\eta + x_3 \Rightarrow x = x_{13}\xi + x_{23}\eta + x_3$$

$$y = y_{13}\xi + y_{23}\eta + y_3$$

$$j = \begin{bmatrix} x_{13} & y_{13} \\ x_{23} & y_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -7 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} |j| = \frac{1}{2} |(-4)(-4) - (-7)(5)| = 25.5$$

مثال: توابع شکل  $N_2, N_1$  در جزء مثلثی نشان داده شده، بترتیب  $0.25, 0.15$  است. مختصات نقطه داخلی  $P$  را بدست آورید.



$$N_3 = 1 - N_1 - N_2 = 1 - 0.15 - 0.25 = 0.6$$

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 = 0.15 \times 1 + 0.25 \times 4 + 0.6 \times 3 = 2.95$$

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 = 0.15 \times 1 + 0.25 \times 2 + 0.6 \times 5 = 3.65$$

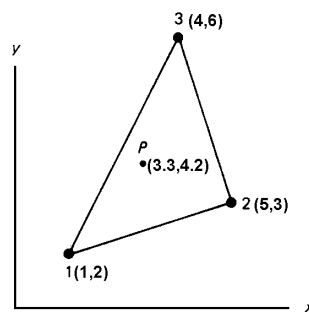
مثال: در جزء مثلثی نشان داده شده، توابع شکل را با استفاده از مساحت سه ناحیه داخلی مثلثی بدست آورید.

$$A = \frac{1}{2} |x_{13} y_{23} - x_{23} y_{13}| = \frac{1}{2} |(-3)(-3) - (1)(-4)| = 6.5$$

$$A_3 = \frac{1}{2} |(-2.3)(-1.2) - (1.7)(-2.2)| = 3.25$$

$$A_2 = \frac{1}{2} |(-3)(-1.8) - (-0.7)(-4)| = 1.3$$

$$A_1 = \frac{1}{2} |(-0.7)(-3) - (-1.8)(1)| = 1.95$$



$$N_1 = \frac{A_1}{A} = 0.3 \quad N_2 = \frac{A_2}{A} = 0.2 \quad N_3 = \frac{A_3}{A} = 0.5$$

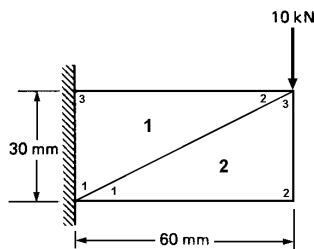
مثال: تغییر مکان گره های شکل داده شده را در شرایط تنش مسطح بدست آورید.  
در اینجا، از دو جزء مثلثی جهت تقسیم بندی سطح استفاده شود.

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = \frac{70 \times 10^3}{1-(0.33)^2} \begin{bmatrix} 1 & 0.33 & 0 \\ 0.33 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.335 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}$$

$$\det J = |(y_{23})(x_{13}) - (x_{23})(y_{13})|$$

$$B_1^e = \frac{1}{1800} \begin{bmatrix} -30 & 0 & 30 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -60 & 0 & 60 \\ 0 & -30 & -60 & 30 & 60 & 0 \end{bmatrix}$$



$$B_2^e = \frac{1}{1800} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 30 & 0 & -30 & 0 \\ 0 & -60 & 0 & 0 & 0 & 60 \\ -60 & 0 & 0 & 30 & 60 & -30 \end{bmatrix}$$

$$K_1^e = \frac{9000 \times 70 \times 10^3}{(1800)^2 \times 0.8911} \begin{bmatrix} 900 & 0 & -900 & 594 & 0 & -594 & 1 \\ & 301.5 & 603 & -301.5 & -603 & 0 & 2 \\ & & 2106 & -1197 & -1206 & 594 & 3 \\ & & & 3901.5 & 603 & -3600 & 4 \\ & & & & 1206 & 0 & 5 \\ & & & & & 3600 & 6 \end{bmatrix}$$

$$K^e = t_e A_e B^T D B$$

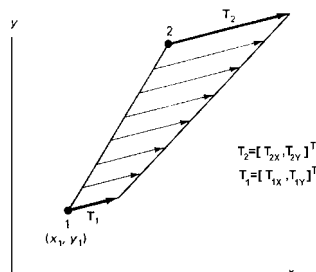
$$K_2^e = \frac{9000 \times 70 \times 10^3}{(1800)^2 \times 0.8911} \begin{bmatrix} 1206 & 0 & 0 & -603 & -1206 & 603 & 1 \\ & 3600 & -594 & 0 & 594 & -3600 & 2 \\ & & 900 & 0 & -900 & 594 & 5 \\ & & & 301.5 & 603 & -301.5 & 6 \\ & & & & 2106 & 1197 & 7 \\ & & & & & 3901.5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$K = 218.207 \begin{bmatrix} 2106 & -1197 & -1206 & 594 & 1 \\ & 3901.5 & 603 & -3600 & 4 \\ & & 2106 & 0 & 5 \\ & & & 3901.5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$[sym. \quad 3901.5] [\delta_6^e] [10]$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\delta}_3^e \\ \hat{\delta}_4^e \\ \hat{\delta}_5^e \\ \hat{\delta}_6^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.02236 \\ -0.12056 \\ +0.021716 \\ -0.11959 \end{bmatrix}$$

مثال: بر روی لبه 1-2 شکل نشان داده شده، تغییر توزیع بار بصورت خطی است. بارهای گره ای  $F_2, F_1, F_4, F_3$  را بر حسب بدست آورید در این حال، در نظر گرفته شود.



با حذف سطر و ستون گره های مسدود:

$$U = \int_{\underline{s}} \underline{\delta}^T f_s ds \quad U = \int_{\underline{s}} \left( \underline{N} \underline{\delta}^e \right)^T f_s ds$$

$$U = \underline{\delta}^{eT} \int_{\underline{s}} \underline{N} f_s ds \Rightarrow F_s^e = \int_{\underline{l}} \underline{N}^T \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} t d\ell$$

$$F_s^e = \int_{\underline{l}} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} t d\ell$$

$$F_s^e = \int_{\underline{l}} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 T_{1x} + N_2 T_{2x} \\ N_1 T_{1y} + N_2 T_{2y} \end{bmatrix} t d\ell$$

$$F_s^e = \int_{\underline{l}} \begin{bmatrix} N_1 N_1 T_{1x} + N_1 N_2 T_{2x} \\ N_1 N_1 T_{1y} + N_1 N_2 T_{2y} \\ N_2 N_1 T_{1x} + N_2^2 T_{2x} \\ N_2 N_1 T_{1y} + N_2^2 T_{2y} \end{bmatrix} t d\ell$$

$$F_s^e = t \begin{bmatrix} T_{1x} \int_{\underline{l}} N_1^2 d\ell + T_{2x} \int_{\underline{l}} N_1 N_2 d\ell \\ T_{1y} \int_{\underline{l}} N_1^2 d\ell + T_{2y} \int_{\underline{l}} N_1 N_2 d\ell \\ T_{1x} \int_{\underline{l}} N_2 N_1 d\ell + T_{2x} \int_{\underline{l}} N_2^2 d\ell \\ T_{1y} \int_{\underline{l}} N_2 N_1 d\ell + T_{2y} \int_{\underline{l}} N_2^2 d\ell \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \frac{\ell}{L} \quad N_2 = \frac{\ell}{L} + 1$$

$$\int_{\underline{l}} N_2^2 d\ell = \int_0^L \left( \frac{\ell}{L} \right)^2 d\ell = \int_0^L \frac{\ell^2}{L^2} d\ell = \left[ \frac{\ell^3}{3L^2} \right]_0^L = \frac{L}{3}$$

$$\int_{\underline{l}} N_2^2 d\ell = \int_0^L \left( 1 - \frac{\ell}{L} \right)^2 d\ell = \int_0^L \left( \frac{\ell^2}{L^2} - \frac{2\ell}{L} + 1 \right) d\ell = \left[ \frac{\ell^3}{3L^2} + \ell - \frac{\ell^2}{L} \right]_0^L = \frac{L}{3}$$

$$\int_{\underline{l}} N_1 N_2^2 d\ell = \int_0^L \left( 1 - \frac{\ell}{L} \right) \frac{\ell}{L} d\ell = \int_0^L \left( \frac{-\ell^2}{L^2} + \frac{\ell}{L} \right) d\ell = \frac{L}{6}$$

$$f_s^e = t \begin{bmatrix} T_{1x} \frac{L}{3} + T_{2x} \frac{L}{6} \\ T_{1y} \frac{L}{3} + T_{2y} \frac{L}{6} \\ T_{1x} \frac{L}{6} + T_{2x} \frac{L}{3} \\ T_{1y} \frac{L}{6} + T_{2y} \frac{L}{3} \end{bmatrix}$$

## انتگرال عددی

در استخراج ماتریسهای مربوط به جزء، با افزایش نمای توابع شکل پیچیدگی محاسبه **انتگرالها** نیز افزایش می‌یابد. علاوه بر آن با تغییر شکل‌های حاصله در اثر انتقال و بدست آوردن دیفرانسیلها و معکوس ماتریس یعقوبی و همچنین بدست آوردن انتگرالها، جملگی گاهی مسأله را پیچیده نموده، بطوریکه دقت هم در محاسبات ناچاراً کاهش خواهد یافت. در چنین مواردی بکارگیری یک **روش عددی مناسب برای محاسبه انتگرالها** اجتناب ناپذیر می‌باشد و **با این روش عملیات انتگرال گیری تبدیل به محاسبه یک مجموعه خواهد شد.**

عموماً این روش عددی می‌تواند برای انتگرال‌ها در فضاهای یک بعدی، دو بعدی، و حتی سه بعدی با بکارگیری هر یک از جملات سری مربوطه و ضرب نمودن آن در یک ضریب وزنه بدست آید.

اساساً هدف از حل عددی یک انتگرال تبدیل آن در ابتدا به سری شکل زیر و سپس محاسبه مجموعه تا حد مورد نیاز است لازم به ذکر است که غالباً دامنه انتگرالهای عددی در روش اجزاء محدود در فاصله از  $-1$  تا  $+1$  می‌باشد.

$$I = \int_{-1}^{+1} G(\xi) d\xi \cong W_0 G(\xi) + W_1 G(\xi) + \dots + W_n G(\xi_n)$$

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} C(\xi, \eta) d\xi d\eta \cong W_0 G(\xi_0, \eta_0) + W_1 G(\xi_1, \eta_1) + \dots + W_n G(\xi_n, \eta_n)$$

برای اینکار، بایستی نقاطی بصورت مبنا *Sampling Points* در دامنه انتگرال اختیار شوند. در فضای یک بعدی این نقاط  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$  می‌شوند. سپس لازم است مقادیر چند جمله‌ای در این نقاط بصورت تقریبی  $F_n(\xi)$  برت یک چند جمله‌ای از درجه  $n$  می‌باشد و تقریباً برابر در  $G(\xi)$  طه مبنا است، محاسبه گردد. بنابراین  $F_n(\xi)$  را در حالت عمومی می‌توان بصورت زیر در نظر گرفت:

$$F_n(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \dots + \alpha_n \xi^n$$

**ضرایب مجهول** را می‌توان از معادلات

زیر بدست آورد:

(تعداد معادلات و مجهولات برابرند.)

$$\begin{aligned} G(\xi_0) &= \alpha_0 + \alpha_1 \xi_0 + \dots + \alpha_n \xi_0^n \\ G(\xi_1) &= \alpha_0 + \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_1^n \\ &\vdots \\ G(\xi_n) &= \alpha_0 + \alpha_1 \xi_n + \dots + \alpha_n \xi_n^n \end{aligned}$$

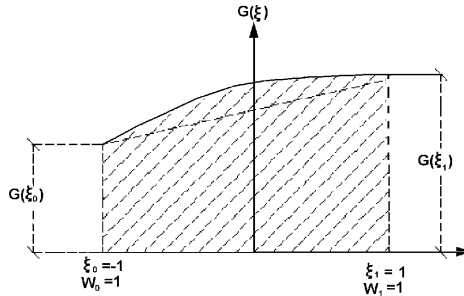
**مقدار انتگرال بصورت زیر است:**

$$I = \int_{-1}^{+1} G(\xi) d\xi = \int_{-1}^{+1} F_n(\xi) d\xi = 2\alpha_0 + \frac{2\alpha_2}{3} + \dots + \frac{\alpha_n}{n+1} [1 - (-1)^{n+1}]$$

در صورتیکه مقادیر مجهول بدست آمده  $\alpha_0$  تا  $\alpha_n$  در رابطه فوق قرار گیرند، انتگرال عددی محاسبه شده است.

این ضرائب را می توان به سادگی از معادلات بدست آورد. در این حالت لازم است تعداد جملات سری به گونه ای انتخاب گردد که **تعداد ضرائب مجهول**  $\alpha_0$  تا  $\alpha_n$  برابر **تعداد نقاط مبنا** که در آنها تابع  $G(\xi)$  معلوم است باشد، تا بتوان معادلات را حل نمود. برای مثال می توان شکل زیر را در نظر گرفت. در این حالت ساده **قانون تقریب دوزنقه ای** بکار گرفته شده است، بطوریکه  $\xi_0 = -1$ ,  $\xi_1 = 1$  می باشند. بنابراین می توان نوشت:

$$F_1(\xi) = \frac{G(\xi_1) + G(\xi_0)}{2} + \frac{G(\xi_1) - G(\xi_0)}{2} \xi$$



**ضرائب وزنه و مقادیر در نقاط مبنا در تقریب دوزنقه ای**

براساس این تقریب بین دو نقطه مبنا تغییرات تابع خطی در نظر گرفته شده و **مقدار تابع در نقاط مبنا** دقیقاً برابر مقادیر تابع  $G(\xi)$  می باشند.

$$I = \int_{-1}^{+1} G(\xi) d\xi \cong \int_{-1}^{+1} F_1(\xi) d\xi = G(\xi_0) + G(\xi_1)$$

رابطه فوق رابطه عمومی ارائه شده در شرایط  $n = 1$  است.

در صورتیکه  $n$  عددی فرد باشد، در مورد چند جمله ای تا درجه  $n$  این روش با خطای بسیار کم جواب انتگرال را حاصل می نماید. در صورتیکه  $n$  زوج باشد، برای چند جمله ای تا درجه  $n + 1$  جواب نسبتاً دقیق حاصل خواهد شد.

در صورتیکه **فواصل نقاط مبنا مساوی** در نظر گرفته شوند، این روش

**نیوتن - کوتس** [Newton - Cotes] نامیده می شود. در این روش به تعداد جملات استفاده شده در جمله  $F_n(\xi)$ ، نقطه مبنا مورد نیاز است. یعنی در این نقاط بایستی مقادیر  $G(\xi)$  معلوم باشند.

# انتگرال عددی بروش گاوس

## Gaussian – quadrature

بروش دیگری انتگرال گیری عددی نیز می تواند در جهت کاستن خطای بین مقدار حقیقی انتگرال و میزان محاسبه شده، مورد محاسبه قرار داد. در این روش تابع چند جمله ای بکار رفته بجای تابع  $G(\xi)$  که درجه آن  $p$  منظور شده است را می توان به شکل زیر در نظر گرفت:

$$F_p(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \dots + \alpha_p \xi^p$$

پاسخ انتگرال در قالب سری عددی بشکل زیر نوشته می شود:

$$I = \int_{-1}^{+1} F_p(\xi) d\xi \sim W_0(\alpha_0 + \alpha_1 \xi_0 + \alpha_2 \xi_0^2 + \dots + \alpha_p \xi_0^p) +$$

$$W_1(\alpha_0 + \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_1^2 + \dots + \alpha_p \xi_1^p) + \dots + W_n(\alpha_0 + \alpha_1 \xi_n + \alpha_2 \xi_n^2 + \dots + \alpha_p \xi_n^p)$$

در حالیکه بصورت تحلیلی، رابطه ارائه شده  $F_p(\xi)$  بصورت زیر محاسبه می شود:

$$I = \int_{-1}^{+1} G(\xi) d\xi \sim \int_{-1}^{+1} F_n(\xi) d\xi = 2\alpha_0 + \frac{2\alpha_2}{3} + \dots + \frac{\alpha_p}{p+1} [1 - (-1)^{p+1}]$$

با مقایسه ضرایب دوسری معادلات می توان نتیجه گرفت:  $W_0 + W_1 + \dots + W_n = 2$

$$W_0 \xi_0 + W_1 \xi_1 + \dots + W_n \xi_n = 0$$

$$\vdots$$

$$W_0 \xi_0^p + W_1 \xi_1^p + \dots + W_n \xi_n^p = \frac{1}{p+1} [1 - (-1)^{p+1}]$$

به این ترتیب  $p+1$  معادله برای بدست آوردن مقادیر  $\{w_i, \xi_i, i=0, 1, 2, \dots, n\}$  که مجهولات می باشند حاصل شده اند. از طرفی مسلم است تعداد معادلات بایستی برابر با تعداد مجهولات باشند. یعنی:

$$p+1 = 2(n+1)$$

از آنجائیکه  $n$  یک عدد صحیح است می توان گفت همیشه  $p$  یک عدد فرد خواهد بود. یعنی برای مثال:

تعداد نقاط مبنا	درجه چند جمله ای مورد استفاده
$(n+1)$	$(P)$
1	1
2	3
3	5
4	7

در این روش با در اختیار گذاشتن تابع  $G(\xi)$  از درجه  $n$ ، تعداد  $n + 1$  مقدار مینا از تابع مورد نیاز می‌باشند. در چنین حالتی دینیه مجهولات که شامل اطلاعات مربوط به موقعیت نقاط مینا ضرایب وزنه می‌باشند حاصل خواهد گردید.

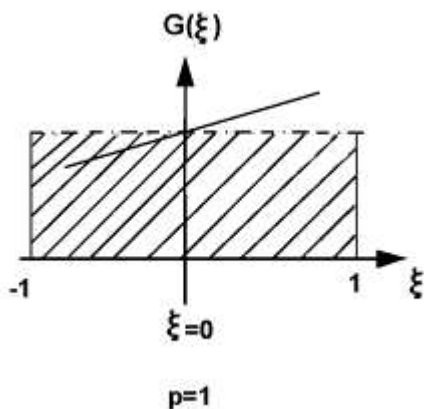
$$\begin{cases} W_0 = 2 \\ W_0 \xi_0 = 0 \end{cases}$$

صورتیکه  $n = 0$  باشد. می‌توان نوشت:

$$2(n+1)=2$$

مسئله با در نظر گرفتن یک مقدار (یک نقطه) مینا بهترین جواب را در حالتی که نقطه در وسط محیط قرار گیرد بدست آورد. در این صورت انتگرال چند جمله ای درجه اول مطابق شکل محاسبه می‌شود. در این حالت است.

$$W_i = 2 \quad \xi = 0$$



صورتیکه  $n = 1$  باشد. می‌توان نوشت:

$$2(n+1)=4$$

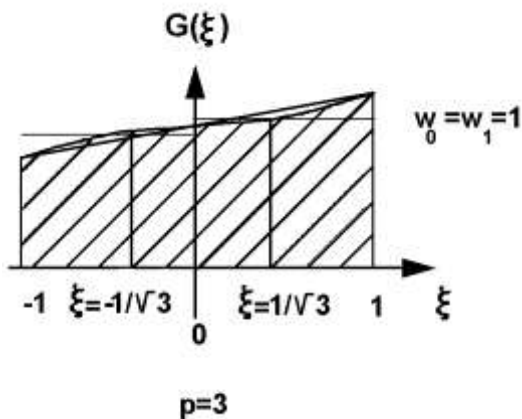
با حل سری معادله غیر خطی حاصل می‌توان جوابهای زیر را بدست آورد:

$$W_0 \xi_0 + W_1 \xi_1 = 0$$

$$W_0 + W_1 = 2$$

$$W_0 \xi_0^2 + W_1 \xi_1^2 = 2/3$$

$$W_0 \xi_0^3 + W_1 \xi_1^3 = 0$$



به این ترتیب انتگرال به کمک چند جمله ای درجه ۳ مطابق شکل حاصل شده است.



در صورتیکه  $n = 2$  باشد ،

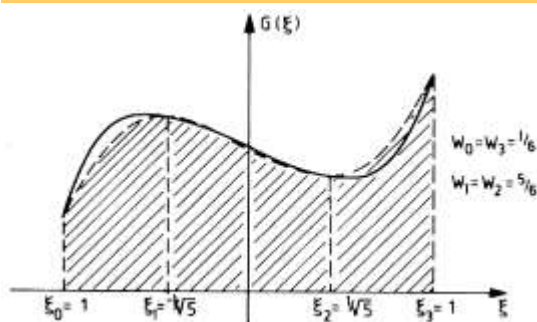
$$2(n+1)=6$$

شش معادله در عملیات محاسبه می‌باشند:

جوابها در این حالت بصورت زیر  $\xi_i, W_j, W_i$  اند.

$$\xi_0 = -\xi_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}} = -0.7745966692, \quad \xi_1 = 0$$

$$W_0 = W_2 = \frac{5}{a} = 0.5555555556, \quad W_1 = \frac{8}{9} = 0.8888888889$$



## انتگرال عددی در حالت دو و سه بعدی

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} G(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

در حالت دو بعدی مسأله منجر به محاسبه یک انتگرال با تابع دو متغیره خواهد شد. یعنی:

در صورتیکه دامنه انتگرال یک مستطیل باشد ، به سادگی می‌توان روش حل را به حالت مسأله یک بعدی در دو جهت متعامد تعمیم داده و در دو جهت بطور مستقل مسأله در پیش برد. بنابراین در حال  $\xi, \eta$

عمومی می‌توان نوشت:

$$\int_{-1}^{+1} G(\xi, \eta) d\xi \approx \sum_{i=0}^n W_i G(\xi_i, \eta)$$

با منظور نمودن تغییرات مسأله در جهت  $\xi$  و ثابت ماندن

$\xi$

تغییرات در جهت  $\eta$  می‌توان نوشت:

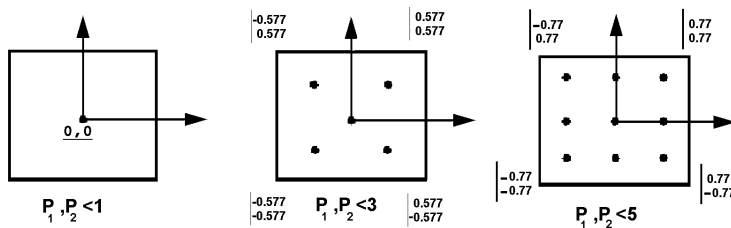
$\eta$

$$I = \int_{-1}^{+1} \left[ \sum_{i=0}^n W_i G(\xi_i, \eta) \right] d\eta \approx \sum_{i=0}^n \left[ W_i \sum_{j=0}^n W_j G(\xi_i, \eta_j) \right]$$

$$I \approx \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \bar{W}_{ij} G(\xi_i, \eta_j), \quad \bar{W}_{ij} = W_i W_j$$

$$(\xi_i, \eta_j)$$

بدین ترتیب اگر موقعیت نقاط مبنا به صورت نشان داده شوند، موقعیت دقیق آنها براساس روش انتخاب شده مشخص می‌گردند. در صورتیکه  $\xi_1, \eta_1$  در صورتیکه  $P_1, P_2 \leq P$  گرفته شده در دو بعد به ترتیب اندرجات  $P_1, P_2$  باشد، می‌توان انتگرالها را با جملات  $\xi_1, \eta_1$  در صورتیکه  $P_1, P_2 \leq P$  مورد محاسبه قرار داد. با کاربرد روش گوس برای اجزاء دو بعدی بصورت شکل نتایج نشان داده شده بدست می‌آیند.



$$W_0 = W_2 = \frac{5}{9} \quad W_1 = \frac{8}{9}$$

در حالت سه بعدی جهت محاسبه انتگرالها بر روی محیط منشور مانند در فضای سه

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} G(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \approx \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n W_{ijk} G(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$$

بعدی بصورت  $-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$  حاصل می‌گردد:

$$\bar{W}_{ijk} = W_i W_j W_k$$

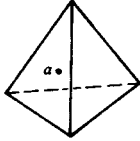
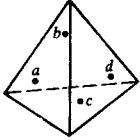
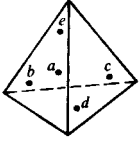
در این حالت نیز همانند حالت دو بعدی می‌توان عمل نموده و نهایتاً با تعیین نقاط مبنا و ضرایب وزنه انتگرال عددی را محاسبه نمود.

Order	Fig.	Error	Points	Triangular Co-ordinates	Weights
Linear		$R = O(h^2)$	$a$	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	1
Quadratic		$R = O(h^3)$	$a, b, c$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$
Cubic		$R = O(h^4)$	$a, b, c, d, e$	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $0.6, 0.2, 0.2$ $0.2, 0.6, 0.2$ $0.2, 0.2, 0.6$	$-\frac{21}{24}$ $\frac{21}{24}$
Quintic		$R = O(h^6)$	$a, b, c, d, e, f, g$	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $\alpha_1, \beta_1, \beta_1$ $\beta_1, \alpha_1, \beta_1$ $\beta_1, \beta_1, \alpha_1$ $\alpha_2, \beta_2, \beta_2$ $\beta_2, \alpha_2, \beta_2$ $0.2, \beta_2, \alpha_2$	0.22500,00000 0.13239,41527 0.12593,91805

with  
 $\alpha_1 = 0.0597158717$   
 $\beta_1 = 0.4701420641$   
 $\alpha_2 = 0.7974269853$   
 $\beta_2 = 0.1012865073$

روابط حاکم برای انتگرال عددی مثلث در تعداد مختلف نقاط مبنا

## روابط حاکم برای انتگرال عددی چهار وجهی در تعداد مختلف نقاط مبنا

No.	Order	Fig.	Error	Points	Tetrahedral Co-ordinates	Weights
1	Linear		$R = O(h^2)$	a	$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$	1
2	Quadratic		$R = O(h^3)$	a b c d	$\alpha, \beta, \beta, \beta$ $\beta, \alpha, \beta, \beta$ $\beta, \beta, \alpha, \beta$ $\beta, \beta, \beta, \alpha$ $\alpha = 0.58541020$ $\beta = 0.13819660$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$
3	Cubic		$R = O(h^4)$	a b c d e	$\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$ $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$	$-\frac{4}{20}$ $\frac{9}{20}$ $\frac{9}{20}$ $\frac{9}{20}$ $\frac{9}{20}$

مثال ۱ : مقدار انتگرال زیر را با انتخاب یک و دو نقطه مبنا پیدا کنید:

$$I = \int_{-1}^{+1} \left[ 3e^x + x^2 + \frac{1}{(x+2)} \right] dx$$

در صورتیکه  $n = 1$  باشد:

$$w_1 = 2, \quad x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 \sim 2f(0) = 7.0$$

در صورتیکه  $n = 2$  باشد:

$$w_1 = w_2 = 1, \quad x_1 = -0.57735, \quad x_2 = 0.57735$$

مقدار دقیق انتگرال فوق بصورت زیر است:

$$I = 8.7857$$

## انتگرال گیری برای بدست آوردن ماتریس سختی جزء

$$K_e = t_e \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B^T DB \det J d\xi d\eta \quad \text{ماتریس سختی جزء :}$$

در رابطه فوق ماتریس  $B$  دترمینان  $J$  هر دو توابعی از  $\xi, \eta$  می باشند. برای جزء چهار ضلعی حاصل انتگرال فوق بصورت یک ماتریس  $8 \times 8$  می باشد. این انتگرال بایستی بر روی هر جزء مورد محاسبه قرار گیرد. به عبارتی در حالت عمومی اگر همه مؤلفه های ماتریس سختی مخالف صفر باشند لازم است **۶۴ بار** انتگرال محاسبه گردد. جهت سهولت کار، با توجه به اینکه  $K_e$  ماتریسی قرینه است، می توان تنها در عملیات، حاصل انتگرال جملات بالای قطر و خود قطر ماتریس را بدست آورد.

در صورتیکه تابع مورد انتگرال گیری  $\phi(\xi, \eta)$  برای جزء  $ij$

$$\phi(\xi, \eta) = t_e (B^T DB \det J)_{ij} \quad \text{فرض گردد:}$$

و در صورتیکه در مورد تعداد نقاط مبنا حالت  $2 \times 2$  انتخاب شود:

$$K_{ij} \approx W_1^2 \phi(\xi_1, \eta_1) + W_1 W_2 \phi(\xi_1, \eta_2) + W_2 W_1 \phi(\xi_2, \eta_1) + W_2^2 \phi(\xi_2, \eta_2)$$

مقادیر مجهولات بصورت زیر خواهند بود:

$$W_1 = W_2 = 1.0 \quad , \quad \xi_1 = \eta_1 = -0.57735 \quad , \quad \xi_2 = \eta_2 = 0.57735$$

## محاسبه جملات ماتریس $K_e$

در حالت عمومی رابطه زیر را می توان برای محاسبه جملات

$$K_{ij} = \sum_{ip=0}^n W_{ip} \phi_{ip}$$

ماتریس  $K_e$  در نظر گرفت:

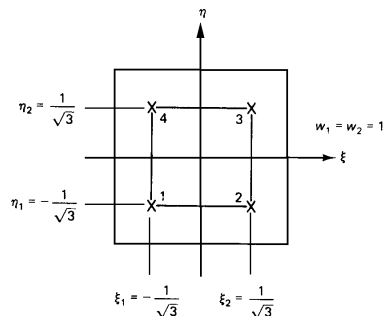
در رابطه فوق  $\phi_{ip}$  مقدار تابع  $W_{ip} \cdot \phi$  ضرب وزن در نقطه  $ip$  است. لازم به ذکر است که

$$W_{ip} = (1)(1) = 1.0$$

در حالت استفاده از  $2 \times 2$  نقطه مبنا می توان نوشت:

نقاط گاوسی 1, 2, 3, 4 در حالت فوق

در شکل نشان داده شده اند:



براین اساس چهار مقدار تابع در نقاط گاوسی

نماینده کلی تغییرات این تابع در پهنه جزء

خواهند بود.

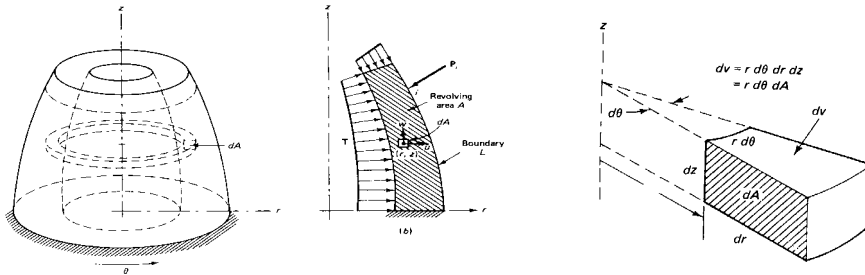
$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = W_1^2 f(\xi_1, \eta_1) + W_2 W_1 f(\xi_2, \eta_1) + W_2^2 f(\xi_2, \eta_2) + W_1 W_2 f(\xi_1, \eta_2)$$



## تحلیل مسائل اجسام با تقارن محوری

### تعاریف و کلیات:

اجسام سه بعدی که از نظر هندسی و همچنین از نظر بارگذاری و از نظر رفتار مواد دارای تقارن محوری باشند را می توان مشابه مسائل دو بعدی، مورد بحث قرار داد. با توجه به تقارن این گونه اجسام حول یک محور (مثلا محور Z مطابق شکل زیر) کلیه تغییر شکلها و تنشها به زاویه چرخش بستگی نخواهند داشت. بنابراین می توان این گونه مسائل را، مسائلی دو بعدی در صفحه  $r - z$  در نظر گرفت. در صورت وجود نیروهای ثقلی بهتر است برای از دست ندادن تقارن، دستگاه مختصات را طوری انتخاب کرد که این نیروها در جهت Z قرار گیرند. مسائلی نظیر چرخهای دوار همراه با نیروهای جذب به مرکز (نیروهای جرمی) از این گونه مسائل می باشند.



### روابط حاکم :

در صورتی که یک جزء کوچک با شرایط یاد شده در نظر گرفته شود، انرژی پتانسیل را می توان بصورت زیر در نظر گرفت:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_A \varepsilon^T \sigma r dA d\theta - \int_0^{2\pi} \int_A \delta^T f_b r dA d\theta - \int_0^{2\pi} \int_L \delta^T f_s r dL d\theta - \int_0^{2\pi} \sum \delta_i^T P_i r d\theta$$

در صورتیکه  $dr, dl$  برابر سطح جزء بوده و نیروی  $P_i$  یک نیروی گسترده بر روی محیط یک دایره روی سطح جانبی جسم است. لازم به توضیح است که در این حالت کلیه متغیرها مستقل از  $\theta$  می باشند بنابراین رابطه بشکل زیر نوشته می شود:

$$\Pi = 2\pi \left( \frac{1}{2} \int_A \varepsilon^T \sigma r dA - \int_A \delta^T f_b r dA - \int_L \delta^T f_s r dL - \sum \delta_i^T P_i r \right)$$

$$\delta = \{u, w\}^T \quad f_b = \{f_{br}, f_{bz}\}^T \quad f_s = \{f_{sr}, f_{sz}\}^T \quad P_i = \{P_{ir}, P_{iz}\}^T$$

رابطه تغییر شکل نسبی و تغییر مکان:

$$\varepsilon = \{\varepsilon_r, \varepsilon_z, \gamma_{rz}, \varepsilon_\theta\}^T = \left\{ \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, \frac{u}{r} \right\}^T$$

سه مؤلفه اول تانسور کرنش مطابق تعریفهای قبل است. تنها مؤلفه چهارم دارای قالبی دیگر است. این مؤلفه مطابق رابطه زیر قابل استخراج می باشد.

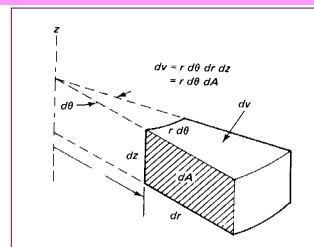
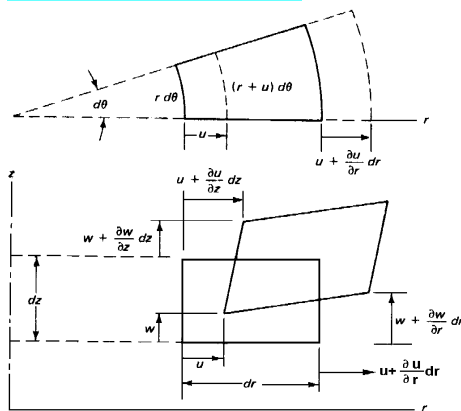
$$\epsilon_{\theta} = \frac{\Delta(rd\theta)}{rd\theta} = \frac{(r+u)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{ud\theta}{rd\theta} = \frac{u}{r}$$

تانسور تنش و روابط تنش - تغییر شکل نسبی بشکل زیر است:

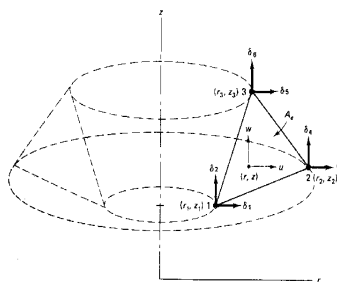
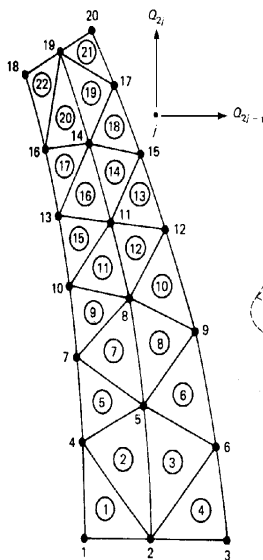
$$\sigma = \{\sigma_r, \sigma_z, \tau_{rz}, \sigma_{\theta}\}^T \quad \sigma = D \epsilon$$

D یک ماتریس (4x4) بفرم زیر است

$$D = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & \nu \\ \nu & 1 & 0 & \nu \\ 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 0 \\ 1-\nu & 1-\nu & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



## مدل نمودن سطح دو بعدی با اجزاء مثلث



بر اساس فرضیات انجام شده سطح مقطع جسم لازم است به اجزاء دو بعدی (مثلا مثلث شکل) تقسیم شود، سطح تقسیم شده، سطحی است که از دوران آن حول محور z، جسم حاصل می گردد. شرایط شماره گذاری گره ها و نحوه اتصال اجزاء مشابه حالت دو بعدی است. شکل زیر نمونه ای از تقسیم سطح به تعدادی مثلث و موقعیت یک جزء را نشان می دهد. تنها فرق این حالت دو بعدی ساده، جایگزینی r, z بجای x, y است.

در صورتیکه سه تابع شکل مربوط به سه گره مثلث با  $N_3, N_2, N_1$  معرفی شوند می توان نوشت

$$\delta^e = N \hat{\delta}^e$$

$\hat{\delta}^e$  تغییر مکان گره های جزء  $e$ ,  $\delta^e$  تغییر مکان جزء  $e$  است. در این صورت:

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

در صورتیکه از جزء مثلث با تغییر شکل نسبی ثابت

$$\hat{\delta}^e = \{\hat{\delta}_1^e, \hat{\delta}_2^e, \hat{\delta}_3^e, \hat{\delta}_4^e, \hat{\delta}_5^e, \hat{\delta}_6^e\}^T$$

فرضی استفاده شود، همانند جزء مثلثی CST در

حالت دو بعدی توابع شکل از درجه یک و  $N_1 = \xi$ ,  $N_2 = \eta$ ,  $N_3 = 1 - \xi - \eta$  بصورت زیر خواهند بود:

بنابراین مؤلفه های تغییر شکل بصورت زیر می باشند:

$$u = \xi \hat{\delta}_1^e + \eta \hat{\delta}_3^e + (1 - \xi - \eta) \hat{\delta}_5^e$$

$$w = \xi \hat{\delta}_2^e + \eta \hat{\delta}_4^e + (1 - \xi - \eta) \hat{\delta}_6^e$$

با فرض ایزوپارامتری (همگام) بودن اجزاء:

$$r = \xi r_1 + \eta r_2 + (1 - \xi - \eta) r_3 \quad z = \xi z_1 + \eta z_2 + (1 - \xi - \eta) z_3$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

جهت بدست آوردن مشتقات پاره ای

مؤلفه های تغییر مکان می توان از قاعده

مشتقات زنجیره ای استفاده نمود. در این صورت:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} r_{13} & z_{13} \\ r_{23} & z_{23} \end{bmatrix}$$

$J$  ماتریس یعقوبی بوده و بشکل زیر است:

در ماتریس فوق  $z_{ij} = z_i - z_j$ ,  $r_{ij} = r_i - r_j$

تعریف شده اند. دترمینان این ماتریس بصورت زیر محاسبه می شود:

$$\det J = r_{13} z_{23} - r_{23} z_{13}$$

$$|\det J| = 2A_e$$

$$J^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} z_{23} & -z_{13} \\ -r_{23} & r_{13} \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

در صورتیکه روابط انتقال فوق در رابطه

تغییر شکل نسبی - تغییر مکان جایگزین شوند

$$\epsilon^e = \begin{Bmatrix} \frac{z_{23}(\hat{\delta}_1^e - \hat{\delta}_5^e) - z_{13}(\hat{\delta}_3^e - \hat{\delta}_5^e)}{\det J} \\ -r_{23}(\hat{\delta}_2^e - \hat{\delta}_6^e) + r_{13}(\hat{\delta}_4^e - \hat{\delta}_6^e) \\ -r_{23}(\hat{\delta}_1^e - \hat{\delta}_5^e) + r_{13}(\hat{\delta}_3^e - \hat{\delta}_5^e) + z_{23}(\hat{\delta}_2^e - \hat{\delta}_6^e) - z_{13}(\hat{\delta}_4^e - \hat{\delta}_6^e) \\ \frac{\det J}{N_1 \hat{\delta}_1^e + N_2 \hat{\delta}_3^e + N_3 \hat{\delta}_5^e} \\ r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \end{Bmatrix}$$



رابطه بدست آمده را می توان بشکل ماتریس :

$$\varepsilon^e = B \hat{\delta}^e$$

ماتریس تغییر شکل نسبی - تغییر مکان جزء یعنی  $B$  در اندازه  $(4 \times 6)$  بشکل زیر است:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{z_{23}}{\det J} & 0 & \frac{z_{31}}{\det J} & 0 & \frac{z_{12}}{\det J} & 0 \\ 0 & \frac{r_{32}}{\det J} & 0 & \frac{r_{13}}{\det J} & 0 & \frac{r_{21}}{\det J} \\ \frac{r_{32}}{\det J} & \frac{z_{23}}{\det J} & \frac{r_{13}}{\det J} & \frac{z_{31}}{\det J} & \frac{r_{21}}{\det J} & \frac{z_{12}}{\det J} \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & \frac{N_3}{r} & 0 \end{bmatrix}$$

انرژی پتانسیل کلی روی جسم :

$$\Pi = \sum_e 2\pi \left[ \frac{1}{2} \int_e \varepsilon^T D \varepsilon r dA - \int_e \delta^{eT} f_b r dA - \int_e \delta^T f_s r dL - \sum \delta_i^{eT} P_i r \right]$$

انرژی پتانسیل ناشی از تغییر شکلهای نسبی یعنی  $U_e$  :  $U_e = \frac{1}{2} \hat{\delta}^{eT} \left( 2\pi \int_e B^T D B r dA \right) \hat{\delta}^e$  جمله داخل پراتنز در اصل همان ماتریس سختی جزء است:

$$K_e = 2\pi \int_e B^T D B r dA$$

**ردیف چهارم** در ماتریس  $B$  دارای جمله ای بصورت  $N_i$  می باشد. از طرفی در جمله انتگرال فوق  $r$  ظاهر شده است. در واقع ماتریس  $B$ ،  $K_e$  هر دو تابع  $r$  می باشند. این تغییر باعث طولانی شدن عمل انتگرال گیری می گردد. برای سهولت در محاسبات عموماً بصورت تقریبی مقدار ماتریس های  $B$ ،  $K_e$  بطور متوسط در مرکز جزء محاسبه می گردند. در مرکز جزء می توان نوشت:

$$N_1 = N_2 = N_3 = \frac{1}{3}$$

**$r$**  شعاع مرکز جزء مثلث است. در صورتیکه ماتریس  $B$  برای

$$\bar{r} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$$

مرکز مثلث تعریف شود:

$$K_e = 2\pi \bar{r} B^T D B \int_e dA$$

در رابطه بدست آمده برای سختی جزء، جمله  $2\pi \bar{r} A_e$  برابر حجم جزء حلقه مانند می باشد که در شکل نشان داده شده است.

همچنین مقدار  $A_e$  برابر **نصف دترمینان ماتریس یعقوبی**

$$K_e = 2\pi \bar{r} A_e \bar{B}^T D \bar{B}$$

است. بطور مشابه می توان مقادیر بردار نیروهای جرمی

$$A_e = \frac{1}{2} |\det J|$$

و نیروهای سطحی را بطور متوسط در مرکز جزء بدست آورد. لازم به

ذکر است که برای حاصل شدن دقت بیشتر اجزاء نزدیک به محور تقارن را بایستی کوچکتر انتخاب نمود. علاوه بر این در محاسبه  $r$  می توان نوشت:

$$r = N_1 r_1 + N_2 r_2 + N_3 r_3$$

## نیروهای جرمی :

جمله انرژی ناشی از نیروهای جرمی بصورت  $2\pi \int \delta^{eT} f_b r dA$  می باشد. این جمله را می توان به صورت زیر بسط داد.

$$2\pi \int \delta^{eT} f_b r dA = 2\pi \int_e (u f_{br} + w f_{bz}) r dA =$$

$$= 2\pi \int_e \left[ (N_1 \hat{\delta}_1^e + N_2 \hat{\delta}_3^e + N_3 \hat{\delta}_5^e) f_{br} + (N_1 \hat{\delta}_2^e + N_2 \hat{\delta}_4^e + N_3 \hat{\delta}_6^e) f_{bz} \right] r dA$$

با تقریب زدن متغیرها بر روی جزء بصورت مقدار متوسط آن

$$2\pi \int \delta^{eT} f_b r dA = \hat{\delta}^{eT} \hat{f}_b^e \text{ در دست آورد.}$$

در حالیکه  $\hat{f}_b^e$  بردار نیروهای معادل گرهی نیروی جرمی است. این نیروها برای یک جزء بصورت زیر است:

$$\hat{f}_b^e = \frac{2\pi \bar{A}_e}{3} \{ \bar{f}_r, \bar{f}_z, \bar{f}_r, \bar{f}_z, \bar{f}_r, \bar{f}_z \}^T$$

علامت (-) روی حروف به منزله مقدار

متوسط آن متغیر یعنی میزان متغیر در مرکز مثلث است.

## چرخش دیسک:

در صورتیکه دیسک حول محور z چرخش داشته باشد، می توان نیروهای وارد بر اجزاء آنرا در حالت تعادل، همراه با اثر نیروهای جذب به مرکز بدست آورد. نیروی جذب به مرکز بصورت است، که بر حسب نیرو بر واحد حجم بوده و در این جمله  $\rho$  جرم مخصوص و سرعت زاویه ای جسم بر حسب rad/s می باشند. در صورتیکه نیروهای ثقلی نیز در جهت منفی اثر نمایند می توان نوشت:

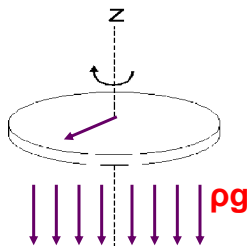
$$f_b = \{ f_{br}, f_{bz} \}^T = \{ \rho r \omega^2, -\rho g \}^T$$

مقدار متوسط آن نیز بشکل زیر می باشد:

r را می توان از رابطه زیر و انتگرال گیری

$$\bar{f}_{br} = \rho \bar{r} \omega^2, \quad \bar{f}_{bz} = -\rho g$$

عددی بدست آورد:

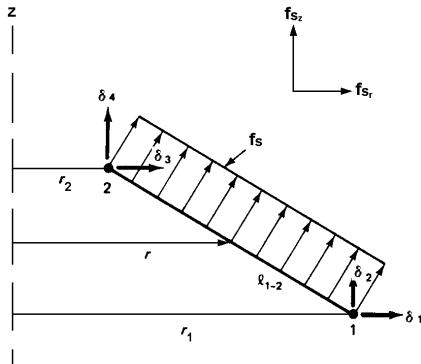


$$r = N_1 r_1 + N_2 r_2 + N_3 r_3$$

## نیروهای سطحی:

در صورتیکه نیروی سطحی با دو مؤلفه  $f_{sz}$   $f_{sr}$  همانند شکل زیر بر لبه ۱-۲ اثر نماید، می توان نوشت:

$$2\pi \int_{l_e} \delta^{eT} f_s r dL = \hat{\delta}^{eT} f_s^e = 2\pi \int \hat{\delta}^{eT} N^T f_s (N_1 r_1 + N_2 r_2) dl = 2\pi \hat{\delta}^{eT} f_s \int N^T (N_1 r_1 + N_2 r_2) dl$$



$$\hat{\delta}^e = \{\hat{\delta}_1^e, \hat{\delta}_2^e, \hat{\delta}_3^e, \hat{\delta}_4^e\}^T$$

$$\hat{f}_s^e = 2\pi l_{1-2} \{af_{sr}, af_{sz}, bf_{sr}, bf_{sz}\}^T$$

$$a = \frac{2r_1 + r_2}{6} \quad b = \frac{r_1 + 2r_2}{6}$$

$$l_{1-2} = \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

در جملات بالا می توان  $r$  را از رابطه و انتگرال گیری بدست آورد. در صورتیکه خط 1-2 به موازات محور Z باشد.  $r_1 = r_2$  که در این صورت:

$$a = b = 0.5r_1$$

در مورد بارهای خطی که بر روی محیط یک دایره حول محور Z در جسم اعمال شده باشند، می توان اثر آن را بصورت دو مؤلفه در جهات درجات آزادی یک نقطه در نظر گرفت.

با اعمال بارها و اعمال شرایط حدی و تغییر ماتریس سختی و حذف سطر و ستونهای قابل حذف و به **حداقل رسانیدن انرژی پتانسیل سیستم**، در نهایت نتیجه ها بصورت یک سری معادله بصورت زیر خواهد بود:

$$\sum (f_b^e + f_s^e) + p \rightarrow F$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \delta^T K \delta - \delta^T F$$

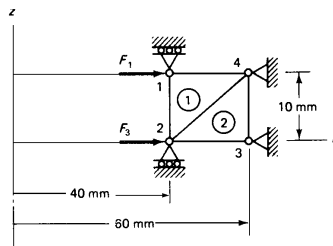
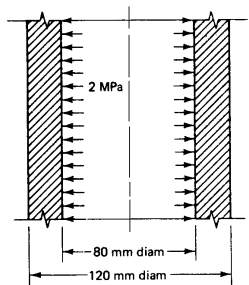
$$K \delta = F$$

$$\Pi = \Pi(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, r$$

لازم به تذکر است که شرایط حدی تنها به مرزهای سطح دوران کننده اعمال می گردد.

مثال ۱: سیلندر طولانی با قطر داخلی 80 mm و قطر خارجی 120 mm در داخل سوراخی هم اندازه طول آن جایگرفته است. این استوانه تحت اثر فشار داخلی 2 MPa قرار دارد. مقطع را به ۲ جزء به طول 10 mm تقسیم و تغییر شکل شعاع داخلی را بدست آورید.



$E=200 \text{ GPa.}$   
 $=200000 \text{ MPa.}$   
 $\nu=0.3$

ترتیب گره ها			
جزء	1	2	3
1	1	2	4
2	2	3	4

مختصات		
گره	۱	۲
1	40	10
2	60	0
3	60	0
4	60	10

$$D = \begin{bmatrix} 2.69 \times 10^5 & 1.15 \times 10^5 & 0 & 1.15 \times 10^5 \\ 1.15 \times 10^5 & 2.69 \times 10^5 & 0 & 1.15 \times 10^5 \\ 0 & 0 & 0.77 \times 10^5 & 0 \\ 1.15 \times 10^5 & 1.15 \times 10^5 & 0 & 2.69 \times 10^5 \end{bmatrix}$$

برای هر دو جزء ،  $Ae = 100 \text{ mm}^2$  ,  
 $\det J = 200 \text{ mm}^2$

$$A = \frac{1}{2} |\det J|$$

$$F_1 = F_3 = \frac{2\pi r_1 \ell_c P_i}{2} = \frac{2\pi(40)(10)(2)}{2} = 2514 \text{ N}$$

$$\bar{r}_2 = 1/3(40 + 60 + 60) = 58.33 \text{ mm}$$

$$\bar{r}_1 = 1/3(40 + 40 + 60) = 46.47 \text{ mm}$$

ماتریس B برای دو جزء:

$$\bar{B}_1 = \begin{bmatrix} -0.05 & 0 & 0 & 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & -0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & -0.05 & -0.1 & 0 & 0 & 0.05 \\ 0.0071 & 0 & 0.0071 & 0 & 0.0071 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_2 = \begin{bmatrix} -0.05 & 0 & 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0.1 \\ 0 & -0.05 & -0.1 & 0.05 & 0.1 & 0 \\ 0.00625 & 0 & 0.00625 & 0 & 0.00625 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D\bar{B}_1 = \begin{bmatrix} -1.26 & 1.15 & 0.82 & -1.15 & 1.43 & 0 \\ -0.49 & 2.69 & 0.82 & -2.69 & 0.657 & 0.1 \\ 0.77 & -0.385 & -0.77 & 0 & 0 & 0.385 \\ -0.384 & 1.15 & 0.191 & -1.15 & 0.766 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D\bar{B}_2 = \begin{bmatrix} -1.27 & 0 & 1.42 & -1.15 & 0.072 & 1.15 \\ -0.503 & 0 & 0.647 & -2.69 & 0.072 & 2.69 \\ 0.77 & -0.385 & -0.77 & 0 & 0 & 0.385 \\ -0.384 & 1.15 & 0.191 & -1.15 & 0.766 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس های سختی را با استفاده از رابطه  $K^e = 2\pi \bar{r} A_e \bar{B}^T D \bar{B}$  ی هر جزء می توان بدست آورد:

$$K_1 = 10^7 \begin{bmatrix} 4.03 & -2.58 & -2.84 & 1.45 & -1.932 & 1.13 \\ & 8.45 & 1.37 & -7.89 & 1.93 & -0.565 \\ & & 2.3 & -0.24 & 0.16 & 1.13 \\ & & & 7.89 & -1.93 & 0 \\ sym. & & & & 2.25 & 0 \\ & & & & & 0.565 \end{bmatrix} \quad N/mm$$

$$K_2 = 10^7 \begin{bmatrix} 2.05 & 0 & -2.22 & 1.69 & -0.085 & -1.69 \\ & 0.645 & 1.29 & -0.645 & -1.29 & 0 \\ & & 5.11 & -3.46 & -2.42 & 2.17 \\ & & & 9.66 & 1.05 & -9.01 \\ sym. & & & & 2.62 & 0.241 \\ & & & & & 9.01 \end{bmatrix} \quad N/mm$$

با اعمال شرایط حدی تنها سطر و ستون مربوط به دو درجه آزادی 3، 1 باقیمانده و دستگاه معادلات حاصل بشکل زیر خواهد بود:

$$10^7 \begin{bmatrix} 4.03 & -2.034 \\ -2.034 & 4.35 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2514 \\ 2514 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.014 \times 10^{-2} \\ 0.0133 \times 10^{-2} \end{Bmatrix} \quad mm$$

محاسبه تنشها:

با بدست آمدن بردار تغییر شکل گره ها و کاربرد رابطه تنش شکل نسبی از رابطه زیر تنشها بدست می آیند.

$$\sigma = D \bar{B} \hat{\delta}^e$$

$\bar{B}$  مقدار متوسط  $B$  است که در مرکز قابل محاسبه می باشد. لازم به توضیح است که در میان تنشها  $\sigma_\theta$  تنش اصلی است و تنش دیگر یعنی  $\sigma_2, \sigma_3$  که در میدان  $\sigma_r, \sigma_z, \tau_{rz}$  می باشند را می توان با استفاده از روابط حاکم بر دایره موهر بدست آورد. تانسور تنشها در این حالت برای هر جزء بصورت زیر است:

$$\sigma^{eT} = \{\sigma_r, \sigma_z, \tau_{rz}, \sigma_\theta\}^T$$

## مثال ۲

تنشها را در مثال قبل محاسبه کنید.

$$\hat{\delta}_1^e = \{0.014, 0, 0.0133, 0, 0, 0\}^T \times 10^{-2} \text{ mm}$$

$$\hat{\delta}_2^e = \{0.0133, 0, 0, 0, 0, 0\}^T \times 10^{-2} \text{ mm}$$

$$\hat{\sigma}^e = D\bar{B}^e \hat{\delta}^e$$

با توجه به چگونگی ترتیب شماره گذاری گره ها می توان نوشت:

با بکارگیری ماتریس  $\hat{\delta}^e, DB^e$  تنشها قابل محاسبه می باشند:

$$\hat{\sigma}_1^e = \{-166, -58.2, 5.4, -28.4\}^T \times 10^{-2} \text{ Mpa}$$

$$\hat{\sigma}_2^e = \{-169.3, -66.9, 0, -54.1\}^T \times 10^{-2} \text{ Mpa}$$

## اثر تغییر درجه حرارت:

تغییر یکنواخت درجه حرارت به میزان همانند حالت های قبلی بصورت در نظر

گرفته می شود.

$$\varepsilon_0 = \{\alpha\Delta t, \alpha\Delta t, 0, \alpha\Delta t\}^T$$

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0)$$

رابطه تنش تغییر شکل نسبی :

$\varepsilon$  تغییر شکل نسبی کلی می باشد.

$$U = \frac{2\pi}{2} \int (\varepsilon - \varepsilon_0)^T D(\varepsilon - \varepsilon_0) r dA = \frac{2\pi}{2} \int_A (\varepsilon^T D\varepsilon - 2\varepsilon^T D\varepsilon_0 + \varepsilon_0^T D\varepsilon_0) r dA$$

در صورتیکه روابط اخیر در جمله انرژی ناشی از تغییر شکل نسبی قرار گیرد،

مانند حالت قبل دومین جمله بصورت خواهد بود:

$$2\pi \int_A \varepsilon^T D\varepsilon_0 r dA = \sum \hat{\delta}^{eT} (2\pi \bar{r} A_e \bar{B}^T D\bar{\varepsilon}_0)$$

تانسور  $\bar{\varepsilon}_0$  متوسط تغییر شکلهای نسبی اولیه در مرکز جزء است. بنابراین:

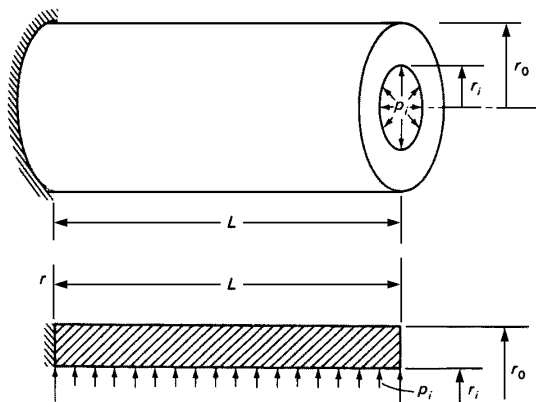
$$f_t^e = \{f_{t1}, f_{t2}, f_{t3}, f_{t4}, f_{t5}, f_{t6}\}^T$$

مدل نمودن مسائل و استفاده از تقارن و اعمال شرایط حدی

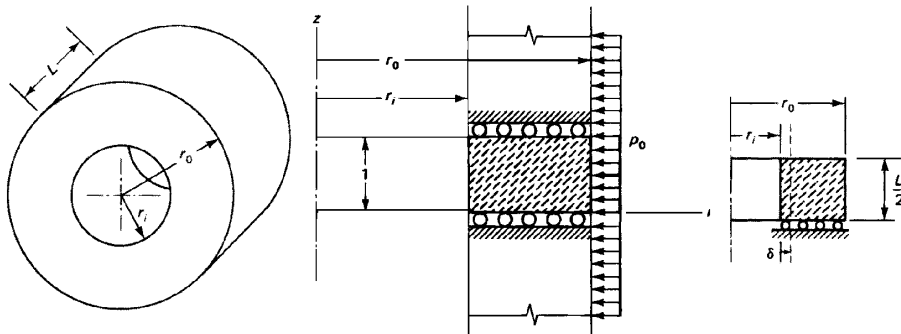
با توجه به امکان **تحلیل مسائل سه بعدی با تقارن محوری** بصورت **مسائل دو بعدی شرایط حدی تنها در مرزهای سطح دوران کننده** قابل اعمال خواهند بود. به عبارت دیگر این شرایط به دوران بستگی نخواهد داشت. همچنین در این حالت هر نقطه روی محور  $Z$  دارای شعاع ثابت صفر است.

## استوانه تو خالی تحت اثر فشار داخلی

برای مثال استوانه تو خالی بطول  $L$  تحت اثر فشارهای داخلی بوده و از یکطرف در تکیه گاه گیردار و از طرف دیگر آزاد است را می توان در نظر گرفت.

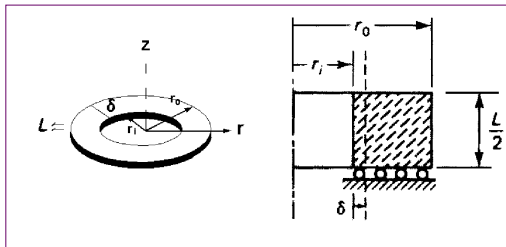


در صورتیکه مستطیلی که در اصل **مقطع جداره لوله** است، در نظر گرفته می‌شود. طول این مقطع  $L$  و ضخامت آن اختلاف  $r_i, r_o$  است. گره‌های انتخاب شده بر روی تکیه‌گاه در جهات  $r, z$  حرکتشان محدود شده و برابر صفر می‌باشند. در صورتیکه طول استوانه بلند بود و در معرض فشارهای خارجی قرار گرفته باشد، می‌توان مقطع زیر را بعنوان سطح دوران کننده در نظر گرفت. در این حالت واحد طول لوله در نظر گرفته شده و با صرف نظر کردن از تغییر طول لوله، مسأله به حالت **تغییر شکل‌های مسطح** تبدیل می‌گردد.



## واشر محدود بین دو سطح بصورت پرس شده

در صورتیکه حلقه‌ای بطول  $L$  و شعاع داخلی  $r_i$  و شعاع خارجی  $r_o$  مانند شکل زیر در نظر گرفته شود، تقارن محوری حول محور  $Z$  موجود است. در این حالت تغییر مکان گره‌ها در جهت  $Z$  بست بوده و تنها گره‌ها در جهت شعاعی تغییر شکل خواهند داد. در این حالت می‌توان نصف ضخامت واشر را در نظر گرفته و سطح مقطع حاصل را مطابق شکل مدل نمود:



یک راه ساده جهت حل این مسأله استفاده از **روش فنر توجیهی** و افزودن سیختی فنر  $C$  (یک مقدار نسبتاً بزرگ) به عناصر قطری مربوط به درجه آزادی شعاعی است. در بردار نیرو برای سطرها مذکور نیروی اضافه خواهد گردید. پس از انجام این کار مسأله قابل حل خواهد بود



## استوانه تو خالی پرس شده ارتجاعی در غلاف (بوش)

در صورتیکه یک غلاف ارتجاعی در معرض پرس شدن استوانه تو خالی ارتجاعی در داخلش قرار گیرد (قطرها تقریبا برابر باشند). هنگام انتخاب گره ها دو گره در مجاور هم در سطح تماس قرار خوان گرفت. هر یک از این جفت گره ها بصورت یک گره بر روی شفت و یک گره بر روی غلاف می باشند. در صورتیکه  $\delta_j, \delta_i$  تغییر مکانهای جفت گره مربوطه در جهت شعاعی باشند. لازم است شرط زیر ارضاء گردد.

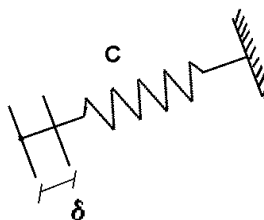
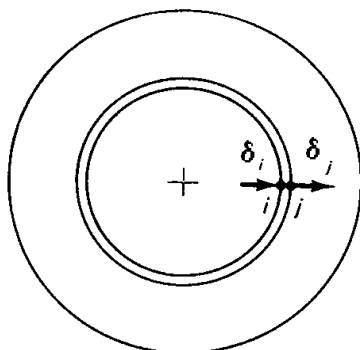
$$\delta_j - \delta_i = \delta$$

اثر این نوع تغییر مکان را می توان بصورت جمله انرژی پتانسیل اضافه نمود.

$$\frac{1}{2}c(\delta_j - \delta_i - \delta)^2 = \frac{1}{2}c\delta_i^2 + \frac{1}{2}c\delta_j^2 - c\delta_i\delta_j + c\delta_i\delta - c\delta_j\delta + \frac{1}{2}c\delta^2$$

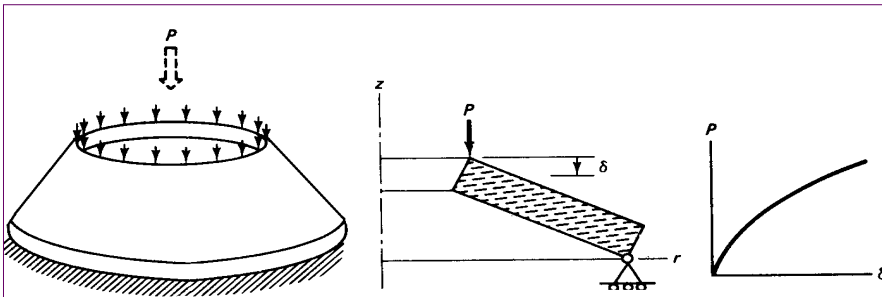
## اثر این تغییرات در ماتریس سختی و بردار نیرو

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} K_{ii} + c & K_{ij} - c \\ K_{ji} - c & K_{jj} + c \end{bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} F_i - c\delta \\ F_j + c\delta \end{Bmatrix}$$



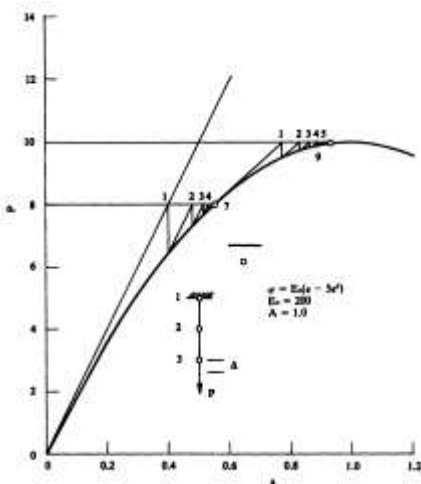
## واشر مخروطی

این واشرها دارای شکل **مخروط ناقص تو خالی و خاصیت فنری** می‌باشند. بارهای وارد شده از پایین به لبه دایره خارجی مقطع و در بالا به لبه دایره داخلی مقطع وارد می‌شوند با توجه به آنکه بارهای وارده و عکس‌العمل‌ها نسبت به محور  $Z$  متقارن هستند. این سیستم دارای **تقارن محوری** است. در اثر اعمال بار بر لبه‌های دایره محیط قاعده بصورت شعاعی حرکت می‌کند. در این صورت می‌توان **فقط سطح مقطع واشر** را مطابق شکل برای تحلیل کل واشر مخروطی انتخاب نمود. یک بار  $P$  در گوشه بالا بصورت متمرکز و بار دیگری بعنوان عکس‌العمل بر لبه قاعده پایین منظور می‌گردد. نقطه تکیه گاه بر روی قاعده در جهت  $Z$  بدون حرکت است.



## رفتار این واشر در برابر بار $P$ :

عموما رفتار این واشر در برابر بار  $P$  بصورت **غیر خطی** و مطابق شکل سمت راست در بالا نشان داده شده می‌باشد. به این ترتیب **ماتریس سختی بستگی به شکل هندسی واشر خواهد داشت**. در این حالت استفاده از **روش نموداری بارگذاری مناسب** است. در این صورت ماتریس سختی بصورت  $K(\delta)$  و



رابطه نیرو و تغییر مکان به شکل زیر خواهد بود:

افزایش تغییر مکان نیز دارای دو مؤلفه بصورت

می‌باشد. در این حالت لازم است  $\{\Delta u, \Delta w\}$

ماتریس سختی در هر مرحله از بارگذاری به

تدریج محاسبه گردیده تا در مرحله بعد به کار

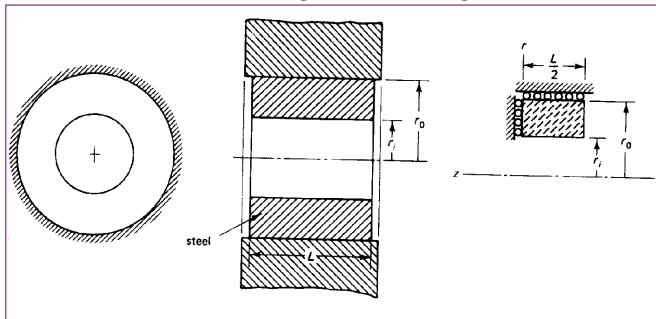
گرفته شود. به این ترتیب اعمال بار ادامه می‌یابد،

تا بار نهایی بصورت کامل به سازه اعمال گردد.

$$K(\delta)\Delta\delta = \Delta F$$

## تنشهای حرارتی:

مطابق شکل زیر یک استوانه تو خالی ارتجاعی در یک استوانه تو خالی صلب که قطر خارجی استوانه داخلی برابر قطعه داخلی استوانه صلب است قرار گرفته است. حال با افزایش درجه حرارت به میزان تنشهای حاصله در استوانه خارجی بخاطر جلوگیری از انبساط استوانه داخلی افزایش می یابد. سطح مقطع مورد نیاز در تحلیل این مسأله دارای طولی برابر  $L/2$  و شعاعی داخلی  $r_i$  و شعاع خارجی  $r_o$  می باشد، که در جهت  $r, z$  نیز از طرف خارج حرکتهای نقاط تماس بسته شده اند. با استفاده از روش فنی توجیهی می توان ماتریس سختی بخش ارتجاعی را بدست آورد.



و با تأثیر بردار نیرو  
معادلات  $K\delta = F$  را حل  
نمود و جوابهای مورد  
نیاز مسأله را بدست  
آورد.

## تیرها

مطابق تعریف تیر سازه ای است لاغر که برای نگهداری بارهای عمود بر محور آن (بارهای عرضی) بکار گرفته می شود. این سازه ها در ساختمانها، پلها، تکیه گاههای مختلف برای سایر سازه ها و غیره به کار گرفته می شوند، از اتصال تیرها با اتصالات صلب یا نیمه صلب قاب ساخته می شود. که می توان کاربرد این نوع سازه ها را در اتومبیل، هواپیما و سازه های ایستا و ... ، مثالهای فراوانی نام برد.

در حالت ساده می توان تیر و قاب را در صفحه مورد بحث در نظر گرفت. تئوری ساده تیر در حالت دو بعدی عموماً بصورت زیر نوشته می شود:

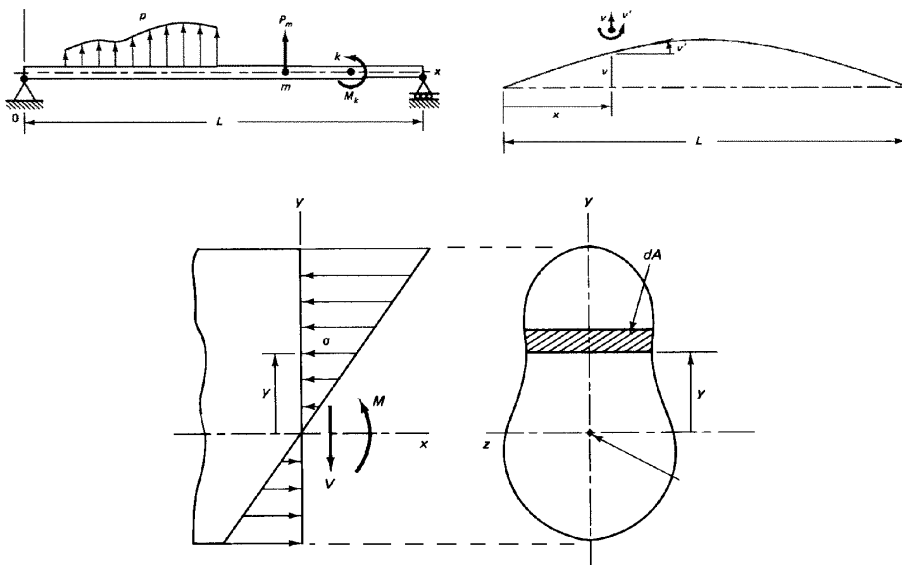
$$\sigma = -\frac{M}{I} y$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

سه رابطه فوق که روابط کلی برای تیر در صفحه را بیان می کنند، تنش در مقطع تیر تغییر شکلهای نسبی در جهت عمود بر سطح مقطع،  $M$  گشتاور خمشی در مقطع و  $y$  تغییر مکان جانبی محور طولی تیر که از مرکز سطح مقطع می گذرد و  $I$  گشتاور اینرسی سطح مقطه حول محور  $Z$  (که تار خنثی در سطح مقطع است) می باشند.

در صورتیکه انرژی در اثر کرنش در طول کوچک  $dx$  با  $dU$  معرفی شود:



جمله انتگرال که گشتاور ماند سطح مقطع است با / مشخص شده و می توان نوشت:

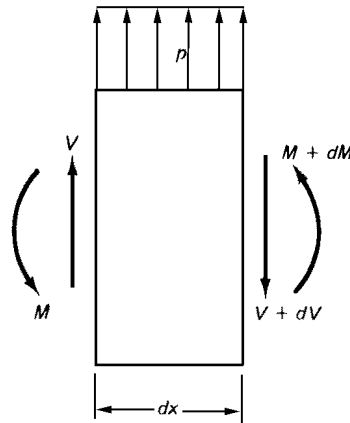
$$dU = \frac{1}{2} \int_A \varepsilon^T \sigma dA dx = \frac{1}{2} \left( \frac{M^2}{EI^2} \int_A y^2 dA \right) dx$$

$$dU = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx \Rightarrow U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx$$

به این ترتیب کل انرژی پتانسیل بصورت انرژیهای داخلی و خارجی در تیر بصورت زیر خواهد بود:

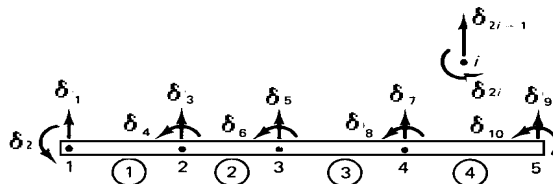
$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx - \int_0^L w y dx - \sum P_m y_m - \sum_k M_k y'_k$$

## تعداد و نیروهای وارد بر قطعه ای از تیر



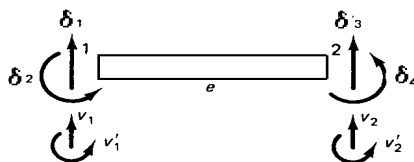
## تعریف اجزاء

به این منظور تیر به اجزاء متعددی، حداقل در امتداد طول آن تقسیم می‌گردد. در این حالت می‌توان برای هر گره دو درجه آزادی در نظر گرفت. با این تعریف می‌توان برای گره  $i$  درجات آزادی  $\delta_{2i}$ ،  $\delta_{2i-1}$  را در نظر گرفت. درجه آزادی  $\delta_{2i-1}$  تغییر مکان قائم و  $\delta_{2i}$  را می‌توان شیب تیر منظور نمود. بنابراین بردار تغییر مکان گره‌ها شکل عبارت خواهند بود از:



$$\delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{10}\}$$

$\delta$  بردار تغییر مکان گره‌ها در دستگاه مختصات کلی است.



## ارتباط شماره گره ها در دستگاه مختصات موضعی و کلی را

نشان می دهد:

شماره گره در دستگاه مختصات موضعی:

جزء	1	2
1	1	2
2	2	3
3	3	4
4	4	5

در صورتیکه یک جزء مثلا جزء ۱ در دستگاه مختصات موضعی در نظر گرفته شود، درجات آزادی مطابق آنچه در جزء نشان داده شده بوده و بردار تغییر مکان  $\hat{\delta}^e$  را می توان در دستگاه مختصات موضعی بصورت زیر

$$\hat{\delta}^e = \{\hat{\delta}_1^e, \hat{\delta}_2^e, \hat{\delta}_3^e, \hat{\delta}_4^e\}^T$$

بیان نمود:

دو درجه آزادی ۱ و ۲ بین تغییر مکان عرضی و درجات آزادی ۳ و ۴ چرخش گره ها را نشان می دهند.

از طرفی بردار  $\hat{\delta}^e$  در واقع همان  $\{y_1, y_1', y_2, y_2'\}^T$  است.

## توابع شکل هرमित [Hermite]

تابع شکل برای ساخت تابع  $y$  را می توان با فرض اینکه در دو سر جزء  $\xi \pm 1$

باشد، انتخاب نمود. اما لازم به توضیح است که تعریف تابع شکل برای

تیر در این حالت با حالت های تغییر شکل ساده انتقالی در هر گره بصورت  $\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$

فرق دارد. در این حالت لازم است، توابع شکل معرف تغییر مکان و تغییر

شیب در یک گره باشند. معمولا در اعضاء خمشی از توابع شکل هرमित

استفاده می شود. این توابع شکل ضمن حفظ استقلال عملکرد درجات

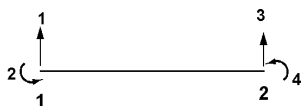
آزادی در یک گره، تطبیق بهتری از تغییر مکان و شیب را در گره ها

ارائه می نمایند. در حالت درجه ۳ این توابع در حالت چند جمله ای ساده

بشکل زیر تعریف می شوند:

$$N_i = a_i + b_i \xi + c_i \xi^2 + d_i \xi^3 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

تابع عمومی فوق لازم است شرایط جدول زیر را ارضاء نماید. یعنی:



	$N_1$	$N'_1$	$N_2$	$N'_2$	$N_3$	$N'_3$	$N_4$	$N'_4$
$\xi = -1$	1	0	0	1	0	0	0	0
$\xi = +1$	0	0	0	0	1	0	0	1

برای تعریف شیب در یک گره لازم است از تابع شکل مشتق گرفته شود:

$$\frac{dN_i}{d\xi} = b_i + 2c_i\xi + 3d_i\xi^2$$

توابع هر میت این شرایط را تأمین می کنند.

$$\begin{cases} b_i - 2c_i + 3d_i & \xi = -1 \\ b_i + 2c_i + 3d_i & \xi = 1 \end{cases}$$

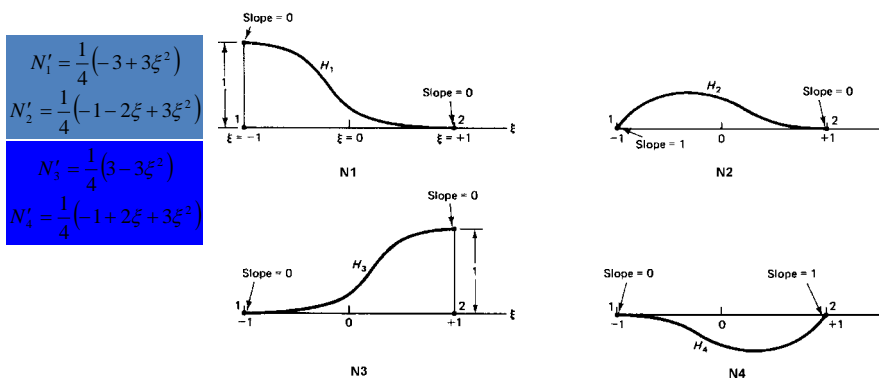
توابع شکل بایستی طوری باشند که استقلال درجات آزادی در هر گره حفظ گردد. به عبارتی مشتق تابع شکل تغییر مکان باعث دخالت در تابع شکل شیب نگردد و بالعکس. با استفاده از اطلاعات جدول ارائه شده ضرایب  $a_i, b_i, c_i, d_i$  را می توان بسادگی حاصل نمود.

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi) = \frac{1}{4}(2-3\xi+\xi^3)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi) = \frac{1}{4}(2+3\xi-\xi^3)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(1+\xi) = \frac{1}{4}(1-\xi-\xi^2+\xi^3)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(\xi-1) = \frac{1}{4}(-1-\xi+\xi^2+\xi^3)$$



با این تعریف می توان تابع  $y$  را بصورت زیر نوشت:

$$y(\xi) = N_1 y_1 + N_2 \left( \frac{dy}{d\xi} \right)_1 + N_3 y_3 + N_4 \left( \frac{dy}{d\xi} \right)_2$$

با توجه به یک محوری بودن تیر، انتقال از ایستگاه مختصات موضعی به مختصات کلی بصورت غیر هم گام را می توان با استفاده از توابع شکل درجه ۱ بصورت زیر در نظر گرفت.

$$x = \frac{1-\xi}{2} x_1 + \frac{1+\xi}{2} x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2} \xi$$

(زیرهم گام)

$$dx = \frac{l_e}{2} d\xi$$

با توجه به اینکه در تیر  $l_e = x_2 - x_1$  است، می توان نوشت:

$$\frac{dy}{d\xi} = \left( \frac{dy}{dx} \right) \left( \frac{dx}{d\xi} \right) = \frac{l_e}{2} \frac{dy}{dx}$$

با استفاده از قانون مشتق زنجیره ای می توان نوشت:

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{l_e}{2} \frac{dy}{dx} \quad \text{در گره های } 1, 2 \text{ بصورت } \hat{\delta}_4^e, \hat{\delta}_2^e$$

نامگذاری شده بودند، می توان نتیجه گرفت:

$$y(\xi) = N_1 \hat{\delta}_1^e + \frac{l_e}{2} N_2 \hat{\delta}_2^e + N_3 \hat{\delta}_3^e + \frac{l_e}{2} N_4 \hat{\delta}_4^e$$

این رابطه را می توان بشکل عمومی  $y = N \hat{\delta}^e$  بیان نمود. در نتیجه ماتریس توابع شکل بصورت زیر حاصل می شود:

$$N = \left\{ N_1, \frac{l_e}{2} N_2, N_3, \frac{l_e}{2} N_4 \right\}$$



## ماتریس سختی

مشابه حالات قبلی در جمله انرژی پتانسیل یک جزء از تیر، جمله اول که انرژی در اثر تغییر شکلهای نسبی است، بصورت زیر بیان می‌شود:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_A \varepsilon^T \sigma dA dx = \frac{1}{2} \left( \frac{M^2}{EI^2} \int_A y^2 dA \right) dx = \frac{1}{2} EI \int_e \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx \quad \sigma = -\frac{M}{I} y \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

مشتقات تابع لا بصورت زیر قابل ارائه است:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\ell_e} \frac{dy}{d\xi} \quad , \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{4}{\ell_e^2} \frac{d^2 y}{d\xi^2}$$

با توجه به رابطه  $y = N \hat{\delta}^e$  می‌توان نوشت:

$$\left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 = \hat{\delta}^{eT} \frac{16}{\ell_e^4} \left( \frac{d^2 N}{d\xi^2} \right)^T \left( \frac{d^2 N}{d\xi^2} \right) \hat{\delta}^e$$

$$dx = \left( \frac{\ell_e}{2} \right) d\xi \quad \text{با جایگزین کردن}$$

$$\frac{d^2 N}{d\xi^2} = \left\{ \frac{3}{2} \xi, \frac{-1+3\xi}{2} \frac{\ell_e}{2}, -\frac{3}{2} \xi, \frac{1+3\xi}{2} \frac{\ell_e}{2} \right\}$$

## انرژی کرنشی

$$U_e = \frac{1}{2} \hat{\delta}^{eT} \frac{8EI}{\ell_e^3} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \frac{9}{4} \xi^2 & \frac{3}{8} \xi(-1+\xi) \ell_e & -\frac{4}{9} \xi^2 & \frac{3}{8} \xi(1+3\xi) \ell_e \\ \left( \frac{-1+3\xi}{4} \right)^2 \ell_e^2 & -\frac{3}{8} \xi(-1+3\xi) & \frac{-1+9\xi^2}{16} \ell_e^2 & -\frac{3}{8} \xi(1+3\xi) \ell_e \\ \frac{4}{9} \xi^2 & & & \left( \frac{1+3\xi}{4} \right)^2 \ell_e^2 \end{bmatrix} d\xi \hat{\delta}^e$$

متقارن

با توجه به وجود علامت انتگرال در جلو ماتریس، از تمامی جملات ماتریس بایستی تک تک انتگرال گیری نمود. در این کار می‌توان از روابط زیر استفاده نمود:

$$\int_{-1}^{+1} \xi^2 d\xi = \frac{2}{3} \quad \int_{-1}^{+1} \xi d\xi = 0 \quad \int_{-1}^{+1} d\xi = 2$$

با مقایسه نتیجه حاصل از انتگرال گیری و مقایسه آن با جمله کلی  $U_e = 1/2 \delta^T K^e \delta^e$  ماتریس سختی جزء را بصورت زیر حاصل نمود:

$$K^e = \frac{EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} \text{خمش} & \text{برش} & \text{خمش} & \text{برش} \\ 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$

این عبارت نشانگر سختی برشی و خمشی یک جزء با دو گره و چهار درجه آزادی است که ماتریسی قرینه است.

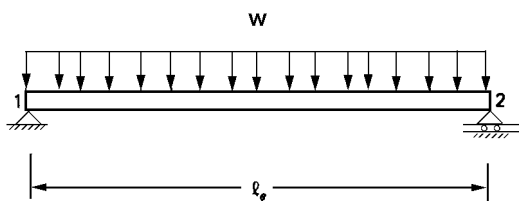
## بردار نیروها:

در مورد بار گسترده  $W$  وارد بر تیر، می توان با فرض یکنواخت بودن بار در طول جزء نوشت:

$$\int_{l_e} w y dx = \left( \frac{wl_e}{2} \int_{-1}^{+1} N d\xi \right) \hat{\delta}^e$$

در رابطه فوق می توان توابع شکل مختلف را در جمله انتگرال قرار داده و انتگرال گیری را انجام داد. در نتیجه می توان نوشت:

$$\int_{l_e} w y dx = f_s^{eT} \hat{\delta}^e \quad f_s^e = \left\{ \frac{wl_e}{2}, \frac{wl_e^2}{12}, \frac{wl_e}{2}, -\frac{wl_e^2}{12} \right\}^T$$



$$f_s^e = \left\{ \frac{wl_e}{2}, \frac{wl_e^2}{12}, \frac{wl_e}{2}, -\frac{wl_e^2}{12} \right\}^T$$

بردار فوق نیروهای معادل گرهی را در اثر نیروی گسترده  $w$  بر روی تیر مشخص نموده که دارای چهار مؤلفه است. بطور مشابه می توان این روش را در مورد بارهای متمرکز  $P_m$ ،  $M_k$  در صورتی که این بارها به گره وارد نشده باشند بکار گرفته و نیروهای معادل گرهی را بدست آورد.

با بدست آوردن نیروهای معادل گرهی و جایگذاری آنها در بردار  $F$  میتوان رابطه عمومی انرژی زیر را در دستگاه مختصات کلی نوشت:

$$\Pi = \frac{1}{2} \hat{\delta}^T K \hat{\delta} - \hat{\delta}^T F$$

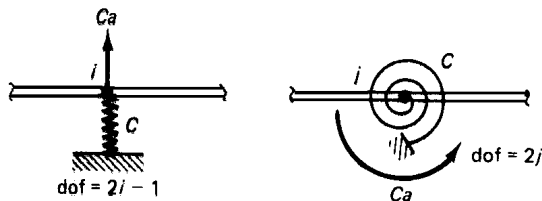
همانند حالات قبلی، برای استخراج شرط ایستایی، لازم است نمو انرژی پتانسیل کل نسبت به بردار تغییر مکان برابر صفر قرار داده شود. نتیجه این حالت برقراری رابطه زیر است:

$$K\delta = F$$

## اعمال شرایط حدی:

در صورتیکه در دامنه تغییر شکل حاصل برای سازه محدودیتی مانند مقدار  $a$  در درجه آزادی  $r$  وجود داشته باشد، می توان با استفاده از روش فنر فرضی [Penalty approach] این شرط حدی را اعمال نمود. در این صورت جمله به کل انرژی پتانسیل اضافه می شود.

در این روش با فرض بزرگ بودن سختی فنر فرضی، یعنی  $C$  نسبت به سایر سختی های مختلف سازه می باشد. با اجرای این روش، جمله  $C$  به جملات ماتریس سختی  $K_m$  و جمله  $Ca$  به جملات بردار نیروی  $F_r$  اضافه خواهند شد.



در دو شکل فوق  $a$  مقدار محدود در بردار تغییر شکل تعریف شده در شرایط حدی است. پس از اجرای روش فوق نهایتاً معادلات بصورت کلی  $K\delta = F$  قابل حل خواهند بود.

## نیروهای و گشتاورهای خمشی:

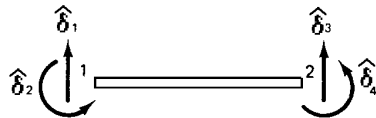
روابط نیروهای برشی و گشتاورهای خمشی در تئوری تیرها و همچنین رابطه تغییر شکل در پهنه جزء بشکل زیر می‌باشند:

$$M = EI \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad V = \frac{dM}{dx}, \quad y = N\hat{\delta}$$

با قرار دادن مقادیر بر حسب توابع شکل می‌توان نوشت:

$$M = \frac{EI}{\ell_e^2} \left[ 6\xi\hat{\delta}_1^e + (3\xi - 1)\ell_e\hat{\delta}_2^e - 6\xi\hat{\delta}_3^e + (3\xi + 1)\ell_e\hat{\delta}_4^e \right]$$

$$V = \frac{6EI}{\ell_e^3} \left[ 2\hat{\delta}_1^e + \ell_e\hat{\delta}_2^e - 2\hat{\delta}_3^e + \ell_e\hat{\delta}_4^e \right]$$



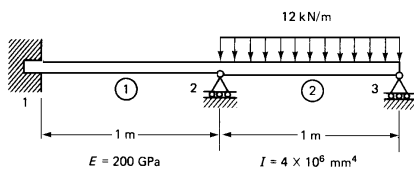
## بارهای تعادل (عکس‌العملها):

در صورتیکه بارهای تعادل (عکس‌العملها) در انتهای اجزاء با  $R$  نامگذاری شوند، رابطه تعادل نیروها بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$R = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{\ell_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell_e & -12 & 6\ell_e \\ 6\ell_e & 4\ell_e^2 & -6\ell_e & 2\ell_e^2 \\ -12 & -6\ell_e & 12 & -6\ell_e \\ 6\ell_e & 2\ell_e^2 & -6\ell_e & 4\ell_e^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\delta}_1^e \\ \hat{\delta}_2^e \\ \hat{\delta}_3^e \\ \hat{\delta}_4^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{w\ell_e}{2} \\ \frac{w\ell_e^2}{12} \\ -\frac{w\ell_e}{2} \\ \frac{w\ell_e^2}{12} \end{Bmatrix}$$

جمله اول سمت راست در اصل همان  $K^e \hat{\delta}^e$  است و دومین جمله بارهای معادل گرهی در اثر وجود بار گسترده  $W$  بر روی جزء می‌باشد. مسلماً در صورتی که روی جزء بار گسترده نباشد، جمله دوم حذف خواهد شد. در حالت ساده دو سرگیردار جملات موجود در بردار نیروهای معادل گرهی، همان نیروهای عکس‌العمل تیرگیردار بدست می‌آیند. برش در انتهای اجزاء در اصل همان  $V_2 = -R_3, V_1 = R_1$  و گشتاور نیز بصورت  $M_2 = R_4, M_1 = -R_2$  می‌باشند.

مثال ۱: برای تیر نشان داده شده در شکل زیر شیب در نقاط ۲ و ۳ و همچنین تغییر مکان را در وسط بار گسترده وارده بدست آورید.



طبق روابط بدست آمده نیروهای معادل گرهی بصورت زیر می‌باشند:

لازم به تذکر است که نیروهای معادل گرهی بصورت  $N - m$   $F_6 = 1000$  ,  $F_4 = -1000$   $N = m$  رابطه  $\frac{W\ell}{12}$  است آمده اند.

با توجه به شرایط حدی  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_5 = 0$  آنها  $\delta_4$  ,  $\delta_6$  بتی محاسبه شوند.

با توجه به یکسان بودن سطح مقطع و جنس تیر می‌توان نوشت:

$$\frac{EI}{\ell^3} = \frac{(200 \times 10^9)(4 \times 10^6)}{1^3} = 8 \times 10^5 \text{ N/m}$$

ماتریس سختی برای هر دو جزء بصورت زیر است:

$$k^1 = k^2 = 8 \times 10^5 \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

با حذف سطر و ستونهای زاید، باقیمانده ماتریس سختی کل سازه بصورت زیر است:

$$k = \begin{bmatrix} k_{44}^1 + k_{22}^2 & k_{24}^2 \\ k_{42}^2 & k_{44}^2 \end{bmatrix} = 8 \times 10^5 \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ N/m}$$

بنابراین معادلات بشکل زیر خواهند بود:

$$8 \times 10^5 \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_4 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1000 \\ 1000 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \delta_4 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.674 \times 10^{-4} \\ 4.464 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} \text{ m}$$

$$\hat{\delta}_1^e = 0, \hat{\delta}_2^e = \delta_4, \hat{\delta}_3^e = 0, \hat{\delta}_4^e = \delta_6$$

برای جزء ۲:

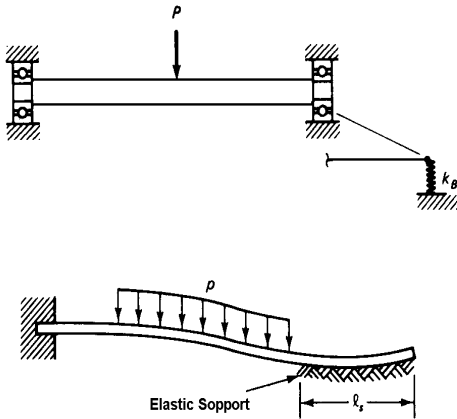
برای بدست آوردن تغییر شکل در وسط دهانه جزء ۲ می‌توان از رابطه  $y = N\hat{\delta}^e$  توجه  $\xi = 0$  استفاده نمود.

$$y = 0 + \frac{\ell_e}{2} N_2 \hat{\delta}_4^e + 0 + \frac{\ell_e}{2} N_4 \hat{\delta}_6^e$$

$$y = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} \right) (-2.679 \times 10^{-4}) + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{4} \right) (4.464 \times 10^{-4}) = -8.93 \times 10^{-5} \text{ m}$$

## تیر متکی بر بستر ارتجاعی

نمونه این موارد در صنعت فراوان می‌باشد. **تکیه تیر بر روی تکیه گاه**، **کلیه فنداسیونها** بخصوص **فنداسیونهای نواری متکی بر زمین** و **تکیه گاه شفتها** مانند **بلبرینگها** و **یاتاقانها** و ... از این قبیل می‌باشند.



در صورتیکه تکیه گاه بلبرینگ در

یک ردیف باشند، می‌توان یک نقطه

تکیه گاهی برای تکیه گاه ارتجاعی در

نظر گرفت و سختی تکیه گاه مربوطه

را  $K_B$  منظور و آنرا بر جملات قطری

ماتریس در ردیفهای مربوط به درجه

آزادیش افزود. شکل زیر این حالت

را نشان می‌دهد.

## سختی تکیه گاه:

در **یاتاقانهای عریض** و **فنداسیون ها** (در حالت دو بعدی) عموماً سختی تکیه گاه بصورت **سختی بر واحد طول (S)** بیان می‌شود. در این صورت جمله ای که بخاطر وجود این سختی بر انرژی پتانسیل کل اضافه می‌شود، بصورت زیر است:

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} s y^2 dx$$

در جمله فوق  $\gamma$  تغییر مکان تیر به بستر ارتجاعی

و  $S$  میزان سختی بر واحد طول بستر ارتجاعی است. با جایگذاری

می‌توان جمله انرژی ناشی از بستر ارتجاعی را بصورت زیر نوشت:

$$U_s = \frac{1}{2} \sum \delta^{eT} s \int_e N^T N dx \delta^e \quad \gamma = N \delta^e$$

در این صورت زیر ماتریس سختی ناشی از اثر

تکیه گاه ارتجاعی بصورت زیر بدست خواهد آمد.

با اجرای انتگرال گیری زیر ماتریس سختی

در اثر وجود بستر ارتجاعی بصورت زیر

خواهد بود.

$$dx = \frac{l_e}{2} d\xi$$

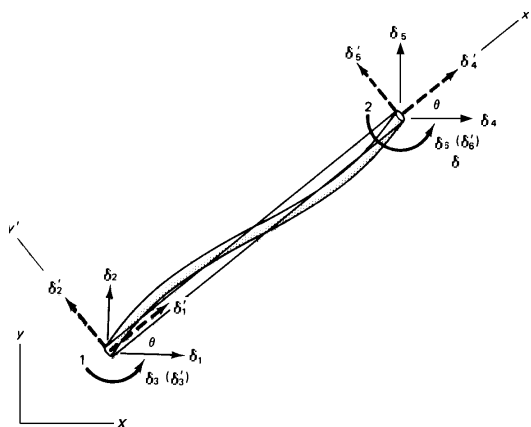
$$N_s^e = s \int N^T N dx = \frac{s l_e}{2} \int_{-1}^{+1} N^T N d\xi$$

$$K_s^e = \frac{s l_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22 l_e & 54 & -13 l_e \\ 22 l_e & 4 l_e^2 & 13 l_e & -3 l_e^2 \\ 54 & 13 l_e & 156 & -22 l_e \\ -13 l_e & -3 l_e^2 & -22 l_e & 4 l_e^2 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی بدست آمده بیانگر اثر تکیه گاه ارتجاعی است. این زیر ماتریس سختی حاصله می‌باید با رعایت درجات آزادی مربوطه به ماتریس سختی عمومی اجزاء تیر در نواحی تکیه گاه ارتجاعی اضافه شود. در این زیر ماتریس تنها اثر سختی ارتجاعی بستر در مقابل تغییر مکان  $\gamma$  تیر منظور شده است. در صورتیکه بستر ارتجاعی در مقابل سایر درجات آزادی سختی ایجاد نماید لازم است انرژیهای مربوطه در نظر گرفته شوند.

## قابهای صفحه ای:

این گونه سازه ها که از اتصال تیرها با اتصالات صلب یا نیمه صلب حاصل می‌شوند، مشابه تیرها می‌باشند. تنها اختلاف این سازه ها با تیر معمولی حضور نیروهای محوری و تغییر شکلهای محوری در اجزاء تیر می‌باشد. شکل نمونه ای از یک جزء قاب صفحه ای را در صفحه  $x - y$  نشان می‌دهد.



در این حالت برای هر گره دو تغییر مکان و یک چرخش بصورت درجات آزادی در نظر گرفته شده است. بنابراین بردار تغییر مکان بشکل زیر است:

$$\hat{\delta} = \{\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \hat{\delta}_3, \hat{\delta}_4, \hat{\delta}_5, \hat{\delta}_6\}$$

در صورتیکه دستگاه مختصات موضعی بصورت  $X'-Y'$  تعریف شده، بطوریکه  $X'$  در طول تیر باشد، کسینوسهای هادی امتداد طول جزء را می توان با

$$(\ell = \cos \theta, m = \sin \theta) \text{ م, } \ell$$

نمود. در این صورت بردار تغییر مکان در مختصات موضعی بصورت زیر است:

$$\hat{\delta}' = \{\hat{\delta}'_1, \hat{\delta}'_2, \hat{\delta}'_3, \hat{\delta}'_4, \hat{\delta}'_5, \hat{\delta}'_6\}$$

مؤلفه های تغییر شکلهای چرخشی در هر دو دستگاه مختصات موضعی و کلی یکسان هستند. یعنی  $\hat{\delta}'_3 = \hat{\delta}_3, \hat{\delta}'_6 = \hat{\delta}_6$  باشند، که این دو درجه آزادی مربوط به چرخشهای دو گره ابتدا و انتهای جزء در صفحه هستند.

بطور مشابه با حالت های قبلی رابطه دو دستگاه مختصات موضعی و کلی

$$\hat{\delta}' = L\hat{\delta}$$

بشکل زیر خواهد بود:

$$L = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مشابه در نظر گرفتن یک میله از خرپای صفحه ای

در صفحه  $x-y$ ، ماتریس  $L$  بشکل زیر است:

از میان درجات آزادی تعریف شده  $\hat{\delta}'_1, \hat{\delta}'_2, \hat{\delta}'_3, \hat{\delta}'_5, \hat{\delta}'_6$  درجات آزادی تیر و  $\hat{\delta}'_4, \hat{\delta}'_6$  تغییر مکانهای جزء میله ای است. با ترکیب سطر و ستونهای ماتریس سختی تیر و میله مطابق درجات آزادی فوق الذکر ماتریس سختی عضو قاب بشکل زیر خواهد بود:

$$k'^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell^2} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix}$$

انرژی ناشی این تغییر شکل نسبی که عددی اسکالر بوده و در دو دستگاه موضعی و کلی یکسان می باشد را مطابق رابطه کلی ارائه شده می توان بشکل زیر نوشت:

$$U_e = \frac{1}{2} \hat{\delta}'^T k'^e \hat{\delta}' = \frac{1}{2} \hat{\delta}'^T L^T k'^e L \hat{\delta}$$

$$U_e = \frac{1}{2} \hat{\delta}^T K^e \hat{\delta}$$

با مقایسه روابط فوق، ماتریس سختی جزء در دستگاه مختصات کلی را می توان بدست آورد:

$$K^e = L^T k'^e L$$



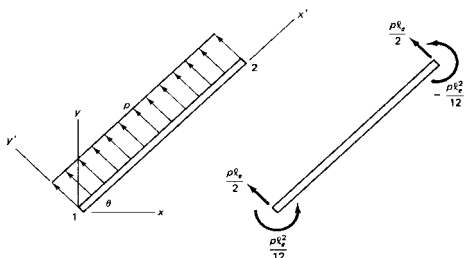
بطور مشابه در صورتیکه بار گسترده بر روی جزء اعمال شده باشد، می توان تساوی انرژیها را بصورت زیر نوشت:

$$\hat{\delta}^T f' = \hat{\delta}^T L^T f = \hat{\delta}^T f$$

بنابراین بردار نیروهای معادل گرهی در اثر بار گسترده از رابطه زیر حاصل می گردد.

$$f_s^{te} = \left\{ 0, \frac{wl_e}{2}, \frac{wl_e^2}{12}, 0, \frac{wl_e}{2}, \frac{wl_e^2}{12} \right\}^T$$

را می توان با توجه به ترتیب جملات و درجات آزادی مربوطه، به ماتریس نیروهای کلی  $F$  در دستگاه مختصات کلی اضافه نمود. لازم به تذکر است که در این حالت جهت مثبت  $w$  همان جهت مثبت  $y'$  (عمودبرامتدادتیر) است. در صورتیکه با متمرکز با گشتاور متمرکز بر گره ها وارد شده



باشند، مستقیما به محل خود در بردار

کلی نیرو افزود خواهند شد.

با انجام عملیات فوق بطور مشابه سیستم

معادلات  $K\delta = F$  تشکیل می شود که

به راحتی قابل حل خواهند بود.

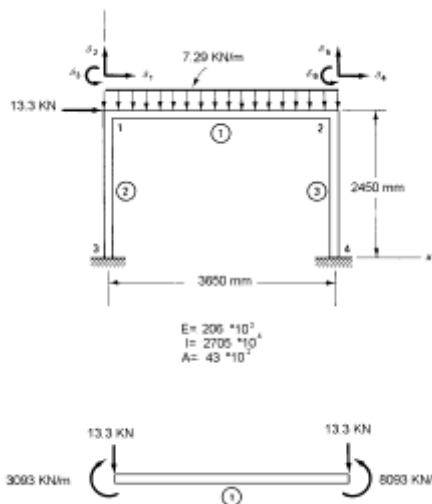
مثال ۲- تغییر مکان و چرخش در گره های قاب نشان داده شده را بدست آورید.

$$\begin{aligned} E &= 206 \times 10^3 \text{ KN/m}^2 \\ I &= 2705 \times 10^4 \text{ mm}^4 \\ A &= 43 \times 10^2 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

بارهای معادل گرهی بصورت زیر می باشند:

ماتریس سختی اعضاء:

$$k^{re} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$



عضو ۱: با استفاده از ماتریس داده شده و توجه به این مطلب که  $k^1 = k^2$  توان نوشت:

$$k'^1 = 206 \times 10^3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1.178 & 0 & 0 & -1.178 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00668 & 12.182 & 0 & -0.00668 & 12.182 \\ 0 & 12.182 & 29643.836 & 0 & -12.182 & 14821.918 \\ -1.178 & 0 & 0 & -1.178 & 0 & 0 \\ 0 & -0.00668 & -12.182 & 0 & 0.00668 & -12.182 \\ 0 & 12.182 & 14821.918 & 0 & -12.182 & 29643.836 \end{bmatrix}$$

برای جزء ۳: ۶

برای جزء ۲: ۳

$$k'^2 = 206 \times 10^3 \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 & 3 & 2 & 1 \\ 1.755 & 0 & 0 & -1.755 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02207 & 27.038 & 0 & -0.02207 & 27.038 \\ 0 & 27.038 & 44163.265 & 0 & -27.038 & 22081.63 \\ -1.755 & 0 & 0 & 1.755 & 0 & 0 \\ 0 & -0.02207 & -27.038 & 0 & 0.02207 & -27.038 \\ 0 & 27.038 & 22081.63 & 0 & -27.038 & 44163.265 \end{bmatrix}$$

ماتریس انتقال  $L$  برای اعضاء: مشاهده شد که در عضو ۱،  $k = k'$  است. در عضو ۲، ۳ که امتداد یکسانی را دارا می‌باشند، بر حسب محورهای  $x, y, z$  است،  $m = 1, l = 0$  است، بنابراین:

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و با توجه به اینکه  $k_2 = L^T k'_2 L$  است،

می‌توان نوشت:

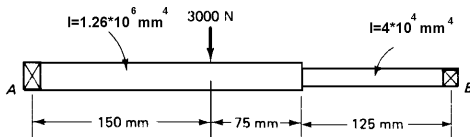
$$k_{2,3} = 206 \times 10^3 \begin{bmatrix} 0.02207 & 0 & -27.038 & -0.02207 & 0 & -27.038 \\ 0 & 1.755 & 0 & 0 & -1.755 & 0 \\ -27.038 & 0 & 44163.265 & 27.038 & 0 & 22081.63 \\ -0.02207 & 0 & 27.038 & 0.02207 & 0 & 27.038 \\ 0 & -1.755 & 0 & 0 & 1.755 & 0 \\ -27.038 & 0 & 22081.63 & 27.038 & 0 & 44163.265 \end{bmatrix}$$

همه عناصر ماتریس  $K$  در مختصات عمومی داده شده اند. بنابراین:

$$K = 206 \times 10^3 \begin{bmatrix} 1.20507 & 0 & 27.038 & -1.178 & 0 & 0 \\ 0 & 1.76168 & 12.182 & 0 & -0.0068 & 12.182 \\ 27.038 & 12.182 & 73807.101 & 0 & -12.182 & 14821.918 \\ -1.178 & 0 & 0 & 1.20507 & 0 & 27.038 \\ 0 & -0.00668 & -12.182 & 0 & 1.76168 & -12.182 \\ 0 & 12.182 & 14821.918 & 27.038 & -12.182 & 73807.101 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} 13.3 \\ -13.3 \\ -8093 \\ 0 \\ -13.3 \\ 8093 \end{bmatrix} \times 10^3 \quad K \tilde{\delta} = \tilde{F} \quad \tilde{\delta} = \begin{bmatrix} +2.3368 & mm \\ -0.02642 & mm \\ -0.00139 & Rad \\ -2.28854 & mm \\ -0.20574 & mm \\ -3.88 \times 10^{-5} & Rad \end{bmatrix}$$

مثال: در شکل داده شده، خیز در زیر بار، و شیب در دو انتها را پیدا کنید.  $A$ ،  $B$  تکیه گاه ساده می باشند.



$$K_1^e = 10^6 \begin{bmatrix} 0.896 & 67.2 & -0.896 & 67.2 & 1 \\ 67.2 & 6720 & -67.2 & 3360 & 2 \\ -0.896 & -67.2 & 0.896 & 067.2 & 3 \\ 67.2 & 3360 & -67.2 & 6720 & 4 \end{bmatrix}$$

$$K_2^e = 10^6 \begin{bmatrix} 7.16 & 268.8 & -7.168 & 268.8 & 3 \\ 268.8 & 13440 & 268.8 & 6720 & 4 \\ -7.168 & -268.8 & 7.168 & -268.8 & 5 \\ 268.8 & 6720 & -268.8 & 13440 & 6 \end{bmatrix}$$

$$K_3^e = 10^6 \begin{bmatrix} 0.049152 & 3.072 & -0.049152 & 3.072 & 5 \\ 3.072 & 256 & -3.072 & 128 & 6 \\ -0.049152 & -3.072 & 0.049152 & -3.072 & 7 \\ 3.072 & 128 & -3.072 & 256 & 8 \end{bmatrix}$$

$$10^6 \begin{bmatrix} 6720 & -67.2 & 3360 & 0 & 0 & 0 \\ -67.2 & 8.168 & 201.6 & -7.168 & 268.8 & 0 \\ 3360 & 201.6 & 201.60 & -268.8 & 6720 & 0 \\ 0 & -7.168 & -268.8 & 7.217125 & -265.728 & 3.072 \\ 0 & 268.8 & 6720 & -265.728 & 13696 & 128 \\ 0 & 0 & 0 & 3.072 & 128 & 256 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta}_2^e \\ \hat{\delta}_3^e \\ \hat{\delta}_4^e \\ \hat{\delta}_5^e \\ \hat{\delta}_6^e \\ \hat{\delta}_8^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta^e = [0 \quad -0.00038 \quad -0.05367 \quad -0.000306 \quad -0.074 \quad -0.000244 \quad 0 \quad 0.00101]^T \quad mm$$

## مسائل در فضای هندسی سه بعدی

همه مسائل مهندسی در واقع از این نوع می‌باشند. زیرا تمامی اجسام و سازه‌ها حجمی را در فضا اشغال می‌کنند. در قالب روش اجزاء محدود لازم است این حجم جزء بندی شود. ساده ترین نوع جزء در این حالت **جزء چهار وجهی با چهار گره** می‌باشد. در این حالت در صورتیکه **تنها تغییر مکانهای انتقالی هر گره** مورد نظر باشد، بردار تغییر مکان برای

$$\delta = \{u, v, w\}^T$$

هر گره بصورت زیر است:

$$\sigma = \left\{ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz} \right\}^T$$

تانسور تنش تغییر شکل نسبی

نیز بصورت زیر است:

$$\varepsilon = \left\{ \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \right\}^T$$

در این حالت نیز رابطه تنش و تغییر شکل

نسبی رفتار مکانیکی ماده بکار رفته در سازه را مشخص می‌نماید. در این رابطه ماتریس  $C$  یا  $D$  نیز هر کدام یک ماتریس  $(6 \times 6)$  خواهند بود. با توجه به تعریف تغییر شکل نسبی، رابطه آنرا

$$\varepsilon = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right\}^T$$

با تغییر مکانها میتوان بصورت زیر نوشت:

هر کدام از نیروهای جرمی و سطحی در حالت سه بعدی، می‌توانند دارای سه مؤلفه بصورت زیر باشند:

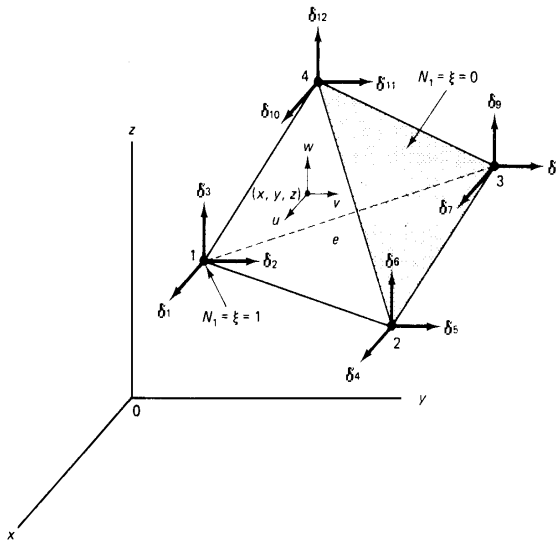
$$f_b = \{f_{bx}, f_{by}, f_{bz}\}^T$$

$$f_s = \{f_{sx}, f_{sy}, f_{sz}\}^T$$

روابط انرژی نیز مانند حالت دو بعدی است، انتگرالهای موجود و روابط، در سه جهت دامنه خود را می‌گسترانند.

## جزء سه بعدی چهار وجهی:

بین هر چهار گره موجود در فضا که در یک صفحه نباشند، می توان یک جزء چهار وجهی مطابق شکل زیر بنا نمود. موقعیت هر یک از گره ها با مختصات  $Z, X, Y$  آن نقطه مشخص می شود.



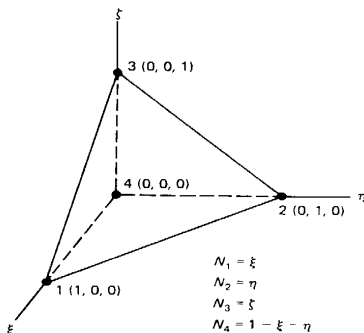
برای ساختن یک جزء می توان روش زیر را جهت ترتیب اتصال گره ها در نظر گرفت. هر گره  $i$  دارای درجات آزادی  $\delta_{3i-2}, \delta_{3i-1}, \delta_{3i}$  در مختصات موضعی خواهد بود. این حالت در مختصات کلی نیز برای گره  $i$  موجود است. یعنی درجات آزادی در این حالت بصورت  $\delta_{3i-2}, \delta_{3i-1}, \delta_{3i}$  می باشند. در این صورت بردار تغییر مکانهای جزء در دو دستگاه مختصات موضعی و کلی بصورت زیر می باشد.

$$\hat{\delta}^e = \{\hat{\delta}_1^e, \hat{\delta}_2^e, \hat{\delta}_3^e, \dots, \hat{\delta}_{12}^e\}^T$$

$$\delta = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_N\}^T$$

$N$  تعداد کل درجات آزادی در سازه می باشد. و هر سه جمله

بردار مربوط به یک گره خواهد بود. با در نظر گرفتن چنین جزئی چهار تابع شکل  $N_4, N_3, N_2, N_1$  مورد نیاز است. مطابق معمول مقدار این توابع شکل در گره مربوطه برابر واحد و در سایر گره ها برابر صفر خواهند بود. جهت ارضاء شرط یاد شده و مشابه با توابع شکل جزء مثلث  $CST$ ، توابع شکل خطی زیر را می توان در نظر گرفت:



$$N_1 = \xi, \quad N_2 = \eta, \quad N_3 = \zeta, \quad N_4 = 1 - \xi - \eta - \zeta$$

تغییر مکان هر نقطه در فضای جزء را می توان از رابطه زیر بدست آورد.

$$\delta = N\delta^e$$

در این رابطه  $N$  ماتریس توابع شکل بصورت زیر خواهد بود:

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

در صورت انتخاب جزء همگام (ایزوپارامتریک) می توان نوشت:

$$x = N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 + N_4x_4$$

$$y = N_1y_1 + N_2y_2 + N_3y_3 + N_4y_4$$

$$z = N_1z_1 + N_2z_2 + N_3z_3 + N_4z_4$$

در صورتیکه از توابع شکل خطی استفاده شده و

$$\text{همچنین مفروضات } x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j,$$

روابط فوق جایگزین شوند، نتیجه بصورت زیر است:

$$x = x_4 + x_{14}\xi + x_{24}\eta + x_{34}\zeta$$

$$y = y_4 + y_{14}\xi + y_{24}\eta + y_{34}\zeta$$

$$z = z_4 + z_{14}\xi + z_{24}\eta + z_{34}\zeta$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix}$$

با کار برد روش مشتق گیری زنجیره ای برای تغییر مکانها (مثلا  $u$ ) می توان نوشت:

مشتقات پاره ای بر حسب  $\xi, \eta, \zeta$  که بر حسب  $x, y, z$  حاصل خواهند شد. ماتریس  $J$  در رابطه فوق نیز بصورت

زیر می باشد:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{14} & y_{14} & z_{14} \\ x_{24} & y_{24} & z_{24} \\ x_{34} & y_{34} & z_{34} \end{bmatrix}$$

حجم جزء :

$$V_e = \left| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} \det J d\xi d\eta d\zeta \right|$$

$$\det J = x_{14}(y_{24}z_{34} - y_{34}z_{24}) + y_{14}(z_{24}x_{34} - z_{34}x_{24}) + z_{14}(x_{24}y_{34} - x_{34}y_{24})$$

با توجه به ثابت بودن  $\det J$  می توان نوشت:

$$V_e = |\det J| \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} d\xi d\eta d\zeta$$

این انتگرال را می توان استفاده از رابطه عمومی زیر بدست آورد:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} \xi^m \eta^n \zeta^p d\xi d\eta d\zeta = \frac{m! n! p!}{(m+n+p+3)!}$$

$$V_e = \frac{1}{6} |\det J|$$

ارتباط دیفرانسیلها در دو دستگاه مختصات موضعی و کلی را

می توان بشکل زیر در آورد:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

در این صورت:

$$A = J^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} y_{24}z_{34} - y_{34}z_{24} & y_{34}z_{14} - y_{14}z_{34} & y_{14}z_{24} - y_{24}z_{14} \\ z_{24}x_{34} - z_{34}x_{24} & z_{34}x_{14} - z_{14}x_{34} & z_{14}x_{24} - z_{24}x_{14} \\ x_{24}y_{34} - x_{34}y_{24} & x_{34}y_{14} - x_{14}y_{34} & x_{14}y_{24} - x_{24}y_{14} \end{bmatrix}$$

مشتقات تغییر مکانها در دو دستگاه مختصات  $z, x, y$  و همچنین  $\xi, \eta, \zeta$  می توان حاصل نموده و تغییر شکلهای نسبی را از رابطه  $\varepsilon = B\delta$  بدست آورد. در این صورت ماتریس  $B$  در اندازه  $(6 \times 12)$  بوده و می توان نوشت:

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & A_{12} & 0 & 0 & A_{13} & 0 & 0 & -\bar{A}_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_{21} & 0 & 0 & A_{22} & 0 & 0 & A_{23} & 0 & 0 & -A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_{31} & 0 & 0 & A_{32} & 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & -\bar{A}_3 \\ 0 & A_{31} & A_{21} & 0 & A_{32} & A_{22} & 0 & A_{33} & A_{23} & 0 & -\bar{A}_3 & -\bar{A}_2 \\ A_{31} & 0 & A_{11} & A_{32} & 0 & A_{12} & A_{33} & 0 & A_{13} & -\bar{A}_3 & 0 & -\bar{A}_1 \\ A_{21} & A_{11} & 0 & A_{22} & A_{12} & 0 & A_{23} & A_{13} & 0 & -\bar{A}_2 & -\bar{A}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

در صورتیکه:

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= A_{11} + A_{12} + A_{13} \\ \bar{A}_2 &= A_{21} + A_{22} + A_{23} \\ \bar{A}_3 &= A_{31} + A_{32} + A_{33} \end{aligned}$$

در این حالت تمامی جملات ماتریس  $B$  ثابت می باشند. در نتیجه تغییر شکل نسبی در فضای جزء ثابت خواهد بود.

## ماتریس سختی جزء:

مشابه حالات قبل، انرژی در اثر تغییر شکلهای نسبی در جزء (انرژی داخلی) را می‌توان بصورت زیر در نظر گرفت:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_e \varepsilon^T D \varepsilon dV$$

با توجه به ثابت بودن تغییر شکل نسبی و  $B$  در فضای جزء می‌توان انرژی فوق را بصورت زیر در نظر گرفت:

$$U_e = \frac{1}{2} \hat{\delta}^{eT} B^T DB \int_e dV \hat{\delta}^e = \frac{1}{2} \hat{\delta}^{eT} V_e B^T DB \hat{\delta}^e = \frac{1}{2} \hat{\delta}^{eT} k_e \hat{\delta}^e$$

در این صورت ماتریس سختی جزء بشکل زیر حاصل می‌شود:

$$k_e = V_e B^T DB$$

$V_e$  حجم جزء است که برابر  $| \det J | / 6$  می‌باشد.

## نیروهای جرمی :

جمله انرژی مربوط به نیروهای جرمی در رابطه انرژی پتانسیل کل بصورت زیر است:

$$\int_e \delta^T f_b dV = \hat{\delta}^{eT} \iiint N^T f_b \det J d\xi d\eta d\zeta = \hat{\delta}^{eT} f_b^e$$

با قرار دادن جملات ماتریس  $N$  و انتگرال گیری به کمک رابطه زیر:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} \int_0^{1-\xi-\eta} \xi^m \eta^n \zeta^p d\xi d\eta d\zeta = \frac{m! n! p!}{(m+n+p+3)!}$$

می‌توان نیروهای معادل گرهی را

$$f_b^e = \frac{V_e}{4} \{ f_{bx}, f_{by}, f_{bz}, f_{bu}, f_{bv}, f_{bw}, \dots, f_{bz} \}^T$$

برای  $f_b$  بشرح زیر بدست آورد:

بردار بدست آمده دارای اندازه  $12 \times 1$

می‌باشد. از طرفی می‌توان گفت  $V_e f_{bx}$  مؤلفه نیروهای معادل گرهی جرمی در امتداد  $x$

یعنی در امتداد درجه آزادی می‌باشند. استفاده از توابع شکل خطی منجر به تقسیم

مساوی کل نیروی جرمی به چهار گره جزء شده است.



## نیروهای سطحی:

در صورتیکه نیروهای سطحی بطور یکنواخت بر روی سطوح مثلث یعنی جوانب چهار وجهی اعمال شده باشند، با فرض  $A_e$  بعنوان مساحت یکی از مثلث های نامبرده می توان گره ها را در دستگاه مختصات موضعی بصورت ۱ و ۲ و ۳ شماره گذاری نمود. در این صورت جمله انرژی ناشی از نیروهای سطحی بصورت زیر خواهد بود:

$$\int_{A_e} \delta^T f_s dA = \hat{\delta}^{eT} \int_{A_e} N^T f_s dA = \hat{\delta}^{eT} f_s^e$$

بطور مشابه نیروهای معادل گرهی عبارت خواهند بود:

$$f_s^e = \frac{A_e}{3} \{f_{sx}, f_{sy}, f_{sz}, f_{sx}, f_{sy}, f_{sz}, f_{sx}, f_{sy}, f_{sz}, 0, 0, 0\}^T$$

می توان ماتریسهای سختی بدست آمده برای اجزاء را در ماتریس سختی کل و نیروهای گرهی اجزاء را در بردار نیروی کل جایگزین نمود.  
بدنبال ترکیب معادلات حاصله رابطه  $K\delta = F$  دست آمده که پس از اعمال شرایط حدی براحتی قابل حل می باشد.

## محاسبه تنشها در حالت سه بعدی:

با حل معادلات کلی و بدست آوردن بردار تغییر مکان  $\delta$  می توان با بکار بستن دو رابطه  $\sigma = D\varepsilon$  و  $\varepsilon = B\delta$  آنها را از رابطه زیر بدست آورد:

$$\sigma^e = DB\hat{\delta}^e$$

برای بدست آوردن تنشهای اصلی می توان مستقل های تنش Stress Invariants زیر را بدست آورد:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xy}^2$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xz} \tau_{yz} \tau_{xy} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$$

اگر ضرایب  $\theta, c, b, a$  صورت زیر تعریف شوند:

$$a = \frac{I_1^2}{3} - I_2$$

$$c = 2\sqrt{\frac{a}{3}}$$

$$b = -2\left(\frac{I_1}{3}\right)^3 + \frac{I_1 I_2}{3} - I_3$$

$$\theta = \frac{1}{3} \cos^{-1}\left(\frac{-3b}{ac}\right)$$

در این صورت تنشهای اصلی بصورت زیر محاسبه می گردند:

$$\sigma_1 = \frac{I_1}{3} + c. \cos \theta$$

$$\sigma_2 = \frac{I_1}{3} + c. \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\sigma_3 = \frac{I_1}{3} + c. \cos \left( \theta + \frac{4\pi}{3} \right)$$

## روش تهیه سلولهای اجزاء :

در صورتیکه فضای سه بعدی یک سازه به جزء بندی نیاز داشته باشد، می توان مشابه جزء بندی مثلثی یک صفحه، این کار را انجام داد.

سپس مشابه همین جزء بندی را در جهت عمود بر صفحه یادشده با شماره های جدید و هم فاز تکرار نمود.

البته در صورتیکه این کار با دست صورت گیرد، کاری پیچیده خواهد بود. یک روش ساده در این مورد آن است که ابتدا جسم را به

**بلوکهای مکعب مستطیل هشت**

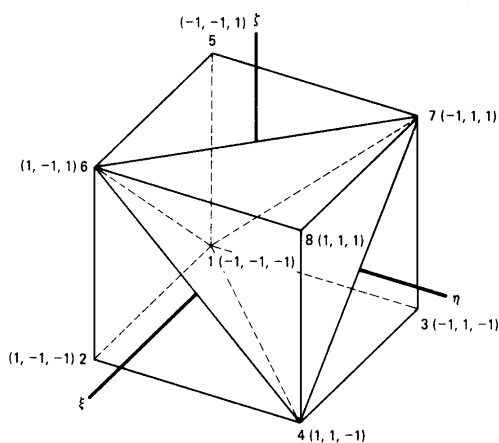
**گرهی** تقسیم نموده، هر مکعب

مستطیل را به **پنج چهار وجهی** مطابق

شکل زیر تقسیم نمود. تبدیل مکعب

مستطیل به پنج چهار وجهی با رسم

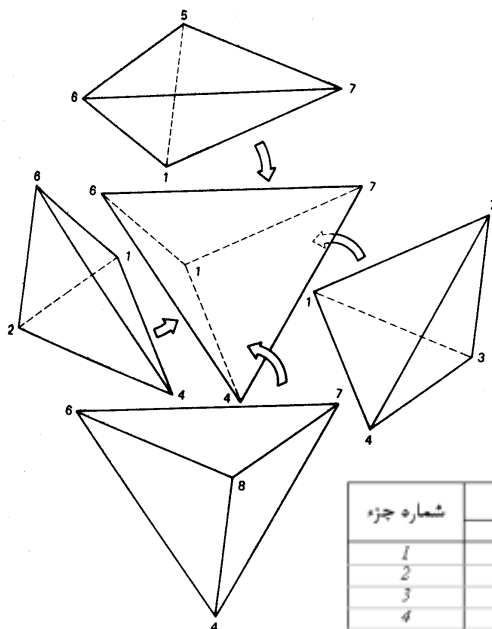
اقطار وجوه آن امکان پذیر است:



لازم به ذکر است که **تقسیم یک حجم به تعدادی شش وجهی** با رعایت روش زیر آسان است.

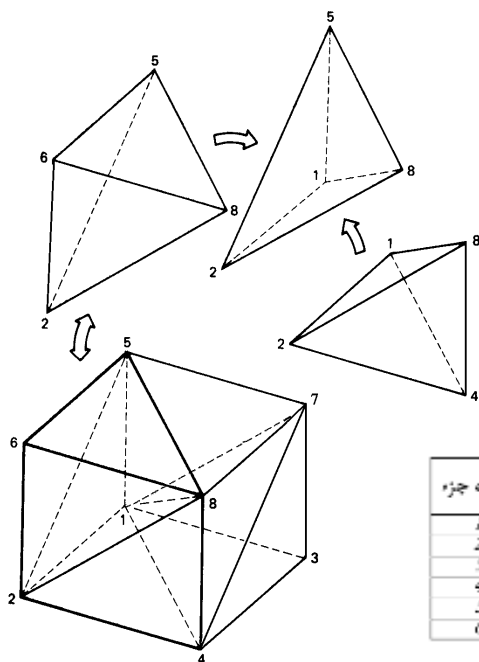
ابتدا بایستی **یک سطح مرجع** (تخت و یا دارای انحناء) انتخاب نموده و در شبکه ای روی آن بصورتی که **افزایش شماره گره های آن در جهت کوتاه تر بوده و تعداد گره ها در هر ردیف شبکه برابر باشد**، ایجاد نمود. سپس می توان سطوح مشابهی با فواصل مختلف و مشابه سطح مرجع در فضای سازه فرض نموده همانند سطح اول آنرا شبکه بندی نمود. **حال با وصل نمودن نقاط متناظر از هر سطح به سطح بعدی تمامی حجم سازه را به تعدادی شش وجهی تقسیم کرد.** با توجه به نظم موجود در افزایش شماره گره ها در هر سطح و مشابه بودن این روش در کلیه سطوح می توان جزء بندی را به کمک برنامه کامپیوتری تولید نمود.

## پنج چهار وجهی:



در این تقسیم بندی در صورتیکه **شش وجهی مبنا مکعب باشد، چهار جزء حاصله اولیه حجمی برابر خواهند داشت و جزء پنجم حجمی دو برابر سایر اجزاء را دارا خواهد بود.**

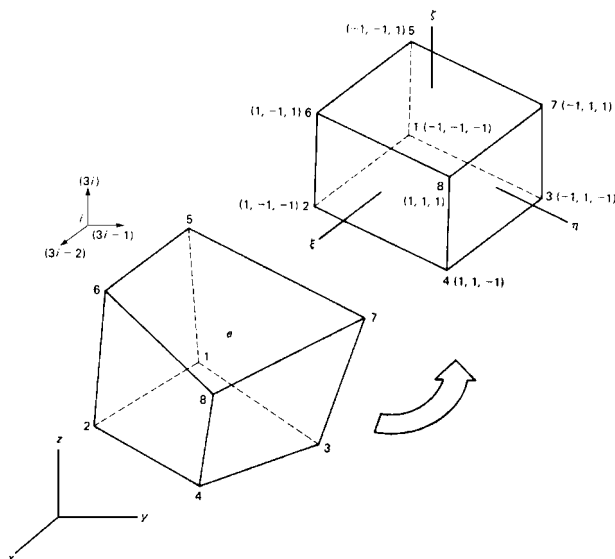
شماره جزء	گره ها در دستگاه مختصات موضعی			
	1	2	3	4
1	1	4	2	6
2	1	4	3	7
3	6	7	5	1
4	6	7	8	4
5	1	4	6	7



به روشی دیگر می توان یک مکعب را به شش عدد چهار وجهی با حجم های برابر تقسیم نمود. در این حالت علاوه بر رسم اقطار، وجوه جانبی، یک قطر مکعب نیز رسم گردیده است.

شماره جزء	گره ها در دستگاه مختصات موضعی			
	1	2	3	4
1	1	2	4	8
2	1	2	8	5
3	2	8	5	6
4	1	3	4	7
5	1	7	8	5
6	1	8	4	7

## جزء شش وجهی



در این گونه اجزاء ترتیب شماره گذاری از اهمیت خاصی برخوردار است. در مورد جزء شش وجهی با هشت گره می توان جهت سهولت مکعبی که هر لبه آن برابر دو واحد بوده و حول محورهای  $\xi, \eta, \zeta$  تقارن دارد را مطابق شکل زیر در نظر گرفت. چنین جزئی در دو جهت دارای اجزاء چهار ضلعی یا چهار گرهی خواهد بود.

با استفاده از توابع شکل خانواده لاگرانژ برای شش وجهی مورد نظر می توان رابطه کلی تابع شکل بفرم زیر را در نظر گرفت:

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta) \quad i = 1 \sim 8$$

در تابع شکل ارائه شده  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  مختصات گره  $i$  را در دستگاه مختصات  $(\xi, \eta, \zeta)$  می نمایند.

تغییر مکانهای جزء نیز بصورت بردار زیر می باشند:

$$\hat{\delta}^e = \left\{ \hat{\delta}_1^e, \hat{\delta}_2^e, \hat{\delta}_3^e, \dots, \hat{\delta}_{24}^e \right\}^T$$

جهت بدست آوردن مقادیر تغییر مکان در فضای جزء می توان از توابع شکل  $N_i$  استفاده نمود، یعنی:

$$u = N_1 \hat{\delta}_1^e + N_2 \hat{\delta}_4^e + \dots + N_8 \hat{\delta}_{22}^e$$

$$v = N_1 \hat{\delta}_2^e + N_2 \hat{\delta}_5^e + \dots + N_8 \hat{\delta}_{23}^e$$

$$w = N_1 \hat{\delta}_3^e + N_2 \hat{\delta}_6^e + \dots + N_8 \hat{\delta}_{24}^e$$

از طرف دیگر با استفاده از انتقال همگام (ایزوپارامتریک)

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + \dots + N_8 y_8 \quad \text{می توان نوشت:}$$

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + \dots + N_8 x_8$$

$$z = N_1 z_1 + N_2 z_2 + \dots + N_8 z_8$$

همانند حالت دو بعدی، تغییر شکلهای نسبی از رابطه زیر بدست

می آید:

$$\mathcal{E}^e = B \hat{\delta}^e \quad \text{همچنین بطور مشابه ماتریس سختی جزء که ماتریس در}$$

اندازه  $24 \times 24$  است، بفرم زیر حاصل می شود:

$$k_e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} B^T D B |\det J| d\xi d\eta d\zeta$$

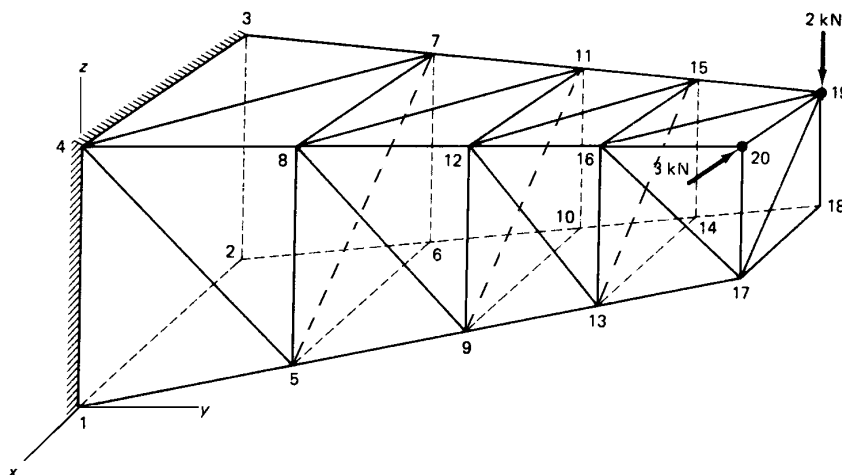
حجم جزء نیز از رابطه  $dV = |\det J| d\xi d\eta d\zeta$  بدست می آید. که  $J$  ماتریس یعقوبی و در اندازه  $3 \times 3$  می باشد.

## جزء بندی مسائل سه بعدی:

جهت دستیابی به نتیجه مناسب ابتدا بایستی **یکبار مسأله را با اجزاء بزرگ و گره های اصلی و کم** تحلیل قرار گردد. اطلاعات مورد نیاز در این مورد مختصات گره ها، اتصال گره ها، خواص مکانیکی مصالح، تغییر مکانهای محدود در گره ها و نیرو در گره ها می باشند. برای مثال، تحلیل تیر یک سرگیردار به شکل زیر نیاز به استفاده از تحلیل در فضای سه بعدی خواهد داشت. جهت جزء بندی، ابتدا می توان کل جسم را به **چهار بلوک شش وجهی** تقسیم نمود. بلوک در مجاورت تکیه گاه گیردار با گره های ۸-۷-۴-۳-۵-۶-۱-۲ شماره گذاری شده است. بلوک های بعدی با توجه به رعایت نظم در شماره گذاری گره ها، به ترتیب با افزایش عدد چهار به شماره گره مشابه در بلوک قبل حاصل خواهند شد. برای تعیین توابع شکل یک بلوک شش وجهی نیز می توان از فرم کلی: استفاده نمود.

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(1 + \zeta_i \zeta) \quad i = 1 \sim 8$$

در صورت تصمیم استفاده از جزء چهار وجهی می توان هر بلوک را به تعدادی چهار وجهی تقسیم نمود. در حالتی دیگر می توان هر بلوک را به شش چهار وجهی (مطابق آنچه قبلا عنوان شد) تقسیم نمود.



## اعمال محدودیت ها در تغییر مکان گره ها و شرایط حدی تکیه گاهها

جهت اعمال محدودیت ها در شرایط حدی مسأله **روش فنر توجیهی**، تعمیم یافته همان شرایط از حالت یک و دو بعدی به حالت سه بعدی است. در این حالت نقطه ای را که مطلقاً امکان جابجایی ندارد **[Restraint]**، می توان در اتصال با فنرهای فرضی با سختی بزرگ  $C$  که در جهات آزادی به گره مربوطه وصل هستند، در نظر گرفت. با این فرض مقدار  $C$  به جملات **قطری بخشی از ماتریس سختی که مربوط به درجات آزادی مورد نظر می باشند**، اضافه خواهد شد. در صورتیکه برای هر یک از درجات آزادی، **تغییر مکان محدود  $a$  تعریف شود**، جمله  $Ca$  به نیروی گرهی آن درجه آزادی اضافه خواهد گردید. به این ترتیب مسأله با وجود فنرهای فرضی مشابه حالت دو بعدی حل خواهند شد.

### تغییر ماتریس سختی در شرایط حدی فضایی خاص:

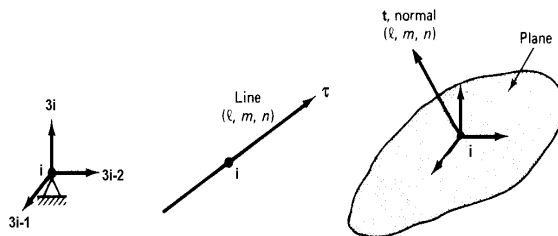
در صورتیکه یک گره تکیه گاهی تنها امکان حرکت در یک جهت بخصوص  $t$  با کسینوسهای هادی  $(l, m, n)$  را داشته باشد، اثر فنرهای فرضی در گره یاد شده بصورت افزودن یک ماتریس خواهد بود. در این صورت می توان حاصلضرب بردار تغییر مکان در جهات آزادی و بردار  $t$  برابر صفر قرار داد. یعنی:

$$\delta^T \times t = 0$$

$i$	$j$	$k$
$\delta_{3i-2}$	$\delta_{3i-1}$	$\delta_{3i}$
$l$	$m$	$n$

این رابطه بیانگر وابستگی سه درجه آزادی در گره  $i$  است، که مشابه با حالت دو بعدی است. از سوی دیگر مشابه حالات قبل می توان انرژی تغییر شکل فنرهای توجیهی را بصورت زیر در نظر گرفت:

$$\frac{1}{2} c (\delta_{3i-2}l + \delta_{3i-1}m + \delta_{3i}n)^2$$



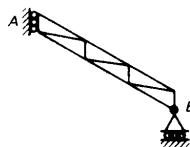
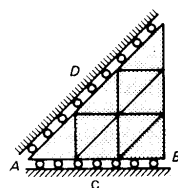
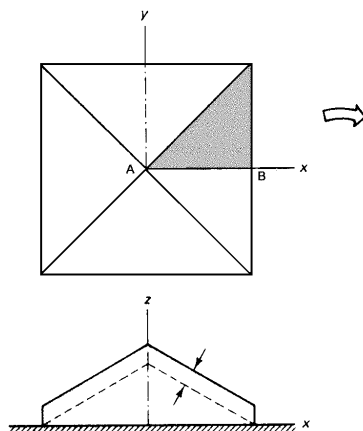
با افزودن جمله انرژی یاد شده، به جمله انرژی یاد شده به جمله کلی نمو انرژی پتانسیل سازه و انجام عملیات لازم، اثر فنرهای توجیهی به صورت یاد شده به شکل یک زیر ماتریس  $3 \times 3$  در جملات مربوط به درجات آزادی مربوط به ماتریس کلی اضافه خواهند شد.

$$3I - 2 \begin{bmatrix} cl^2 & clm & cln \\ & cm^2 & cmn \\ 3I & sym. & cn^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cl & cl & cl \\ & clm & cm \\ & & cn \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

در حالتی که حرکت یک گره تکیه گاهی در یک صفحه آزاد فرض شود و امتداد عمود بر صفحه با با کسینوسهای های  $(l, n, m)$  تعریف شود، اثر استفاده از فنرهای فرضی به صورت زیر ماتریس زیر خواهد بود.

$$3I - 2 \begin{bmatrix} c(1-l^2) & -clm & -cln \\ & c(1-m^2) & -cmn \\ 3I & sym. & c(1-n^2) \end{bmatrix}$$

## شرایط حدی پس از استفاده از تقارن:



در شکل زیر سقف هرم شکلی نشان داده شده است. در نقاط  $B, A$  تکیه گاهها محدود به حرکت بر روی یک خط می باشند. نقاط  $D, C$  نیز دارای محدودیت حرکت در صفحه هستند، با در نظر گرفتن شرایط حقیقی این تکیه گاهها، می توان مدل صحیح این مسأله را حاصل نمود:



# تحلیل سازه ها بروش اجزاء محدود

دکتر سیدامیرالدین صدرنژاد

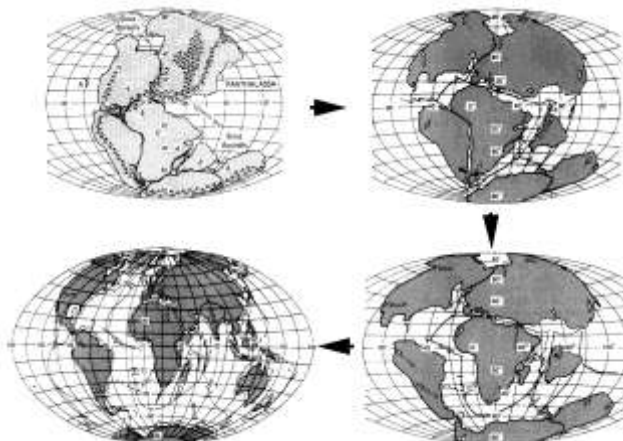
مراجع:

- **The Finite Element Method in Engineering science** zienkiewicz O. C. (1967) Mc Graw Hill, New York 4.
- **An Introduction to Finite Element Method** Desia, C. S. & Abel J. F. 1972 Van Nostrand Reinhold, New York.
- **The Finite Element Programming** Hinton E., & Owen D. R. j. Academic Press, London, New York, Toronto, Sidney, San Francisco.
- **Introduction to Finite Elements in Engineering** chandrupatla T. R. & Beleguindu (1991) A. D. Prentice Hall India
- **Finite Element Method** Rocky K. C. Evans H. R. Griffiths P. W. Nether cot D. A.
- **Finite Element Method** Thomas J. R. Hughes Prentice Hall Inc. Englewood Cliffas New Jersey.
- **Numerical Methods in Finite Element Analysis** (1976) K. J. Bathe & E. L. Wilson Prentice Hall, Inc. Englewnd cliffs, New Jersey.

- **Finite and Boundary Element Methods in Engineering** O. P. Gupta Bal kewa Rotterdam 1999.
- **Direct and indirect Boundary integral Equation Methods** Christian Constanda Chapman & Hall/CRC Boca Raton London 2000.
- **Finite Strip Method** Y. K. Cheung & L. G. tham Boca Raton London CRC Press 1998.
- **Free Boundary Problems Theory and applications** I. A. thanasopoulos G. makrakis Chapman & Hall/CRC Boca Ranta I. F. Rodrigues 1999.
- **Finite Element Analysis in geotechnical engineering** D. M. Potts & L. Zdravkovic Thomas teleford 1999.
- **Introduction to Finite Element Vibration analysis** Mavrice Petyt. Cambridge University press 1990.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

همه موجودات در عالم در حال تغییر و تحولند



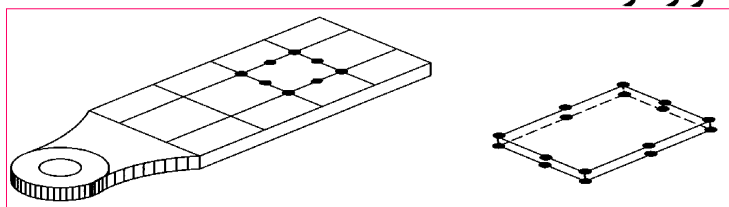
## انواع تحلیل سازه ها به کمک روش اجزاء محدود

- حل مسائل ایستا یا پایا (*Equilibrium Problems*)
- حل مسائل جواب ویژه (*Eigen Value Problems*)
- حل مسائل گسترش (*Propagation Problems*)

### مسائل ایستا یا پایا

#### *Equilibrium Problems*

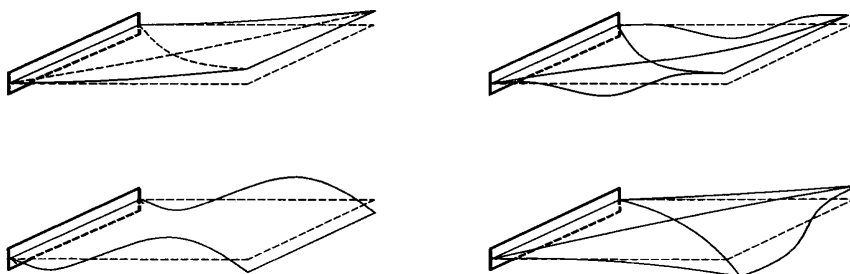
در اینگونه مسائل متغیر زمان در کار نیست. حل مسائل ارتجاعی خطی الکترواستاتیک الکترومغناطیس حالت‌های پایدار هدایت گرما و جریان سیالات در محیط‌های متخلخل رامی توان نام برد. در اینگونه مسائل شرایط ثابتی بر مساله حاکم است. کلیه سازه های ایستا و یا در حال حرکت با سرعت ثابت در این دسته قرار دارند



## مسائل جواب ویژه

### *Eigen Value Problems*

شرائط این گونه مسائل مشابه مسائل حالت ایستا است  
با این تفاوت که هدف بدست آوردن جواب ویژه مساله  
در یک حالت خاص است.

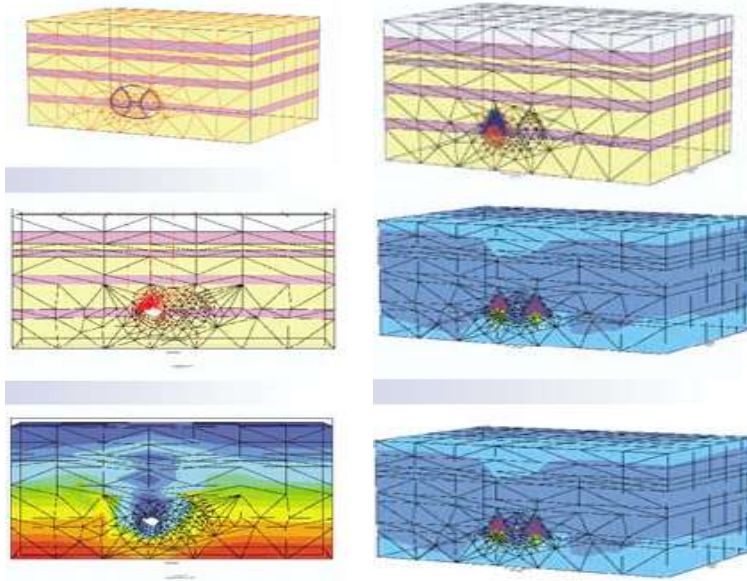


## مسائل گسترش

### ***Propagation Problems***

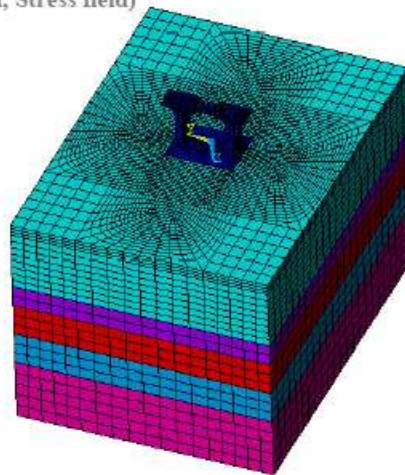
شرائط این مسائل وابسته به زمان است. کلیه مسائل پویا  
(دینامیک) اعم از هیدرودینامیک حالات گذرا درسازه ها  
و بررسی حرکات جذرومد سطح آب دریاها و..... در این  
دسته قرار می گیرند.

## تحلیل شکل پذیری محیط اطراف تونل در اثر حفاری



## تحلیل تنش در اثر حرکت موج در زمین چند لایه

(wave propagation, Stress field)

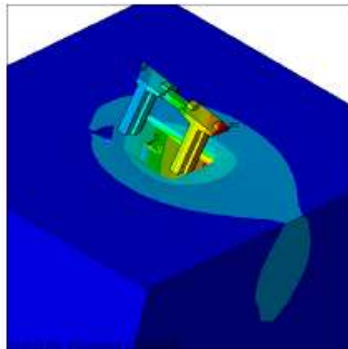


foundation profile

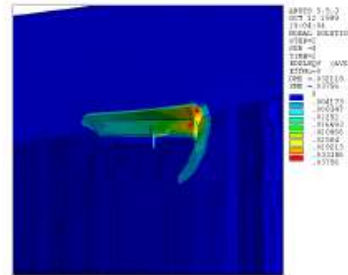
0-8 m Sand 1
8-10.5 m Sand 2
10.5-14.25 m Clay
14.25-18 m Coal
18-25 m dense Sand

## تحلیل ارتجاعی - خمیری محیط اطراف تونل در اثر عبور قطار

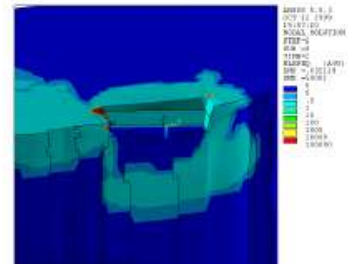
Non-linear coupled hydro-mechanical quasi static analysis of a transrapid train passage with elastic-plastic material models (Mohr Coulomb)



Total strain



Plastic strain

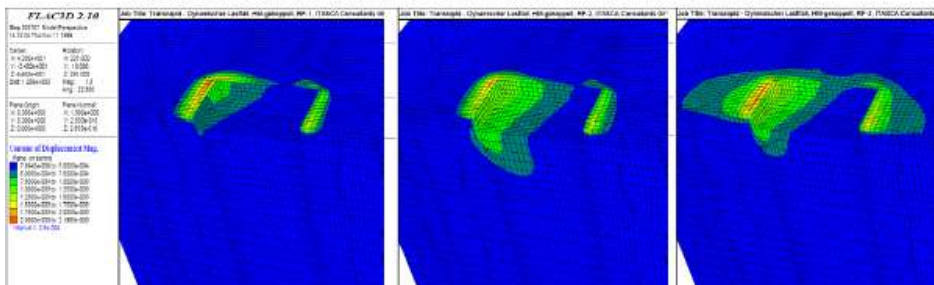


Failure of Yield criteria

## تحلیل دینامیکی فشار آب در محیط دوفازه زمین با الگوهای مختلف (موهر-کلمب)

dynamic non-linear coupled fluid flow mechanical analysis with FLAC<sup>3D</sup>

- dynamic non-linear (Mohr-Coulomb) with stationary pore pressure (PP)
- dynamic non-linear (Mohr-Coulomb) with in stationary pore pressure
- dynamic non-linear (Double Yield) with in stationary pore pressure



total plastic deformation

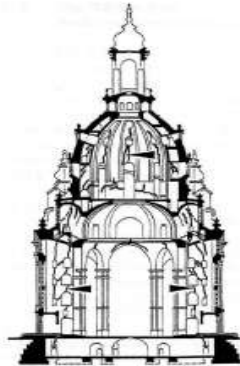
MC, stationary PP

MC instationary PP

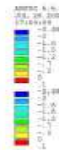
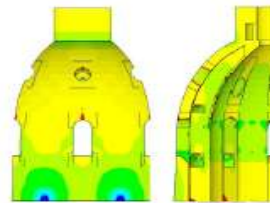
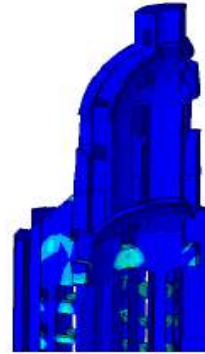
DY instationary PP

## کنترل محاسباتی تاب تحمل آثارباستانی

dynardo



crack pattern Rüth (1939)



elastic-plastic Masonry Analysis of the Church of our Lady in Dresden

## کنترل محاسباتی تاب تحمل پل‌های قدیمی

dynardo

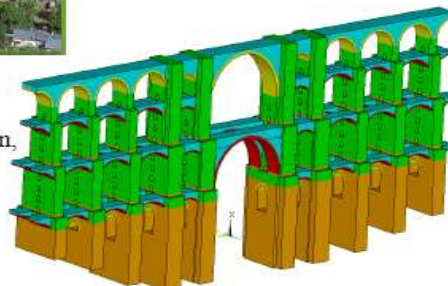
world largest masonry bridge Göltzschtal Gemany



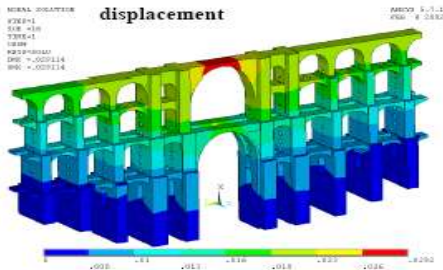
Göltzschthalbrücke  
größte Ziegelsteinbrücke der Welt

parameterized geometry model  
verification of loading (dead loads, traffic, temperature, wind)  
verification of masonry material model (GANZ Swiss masonry standard)

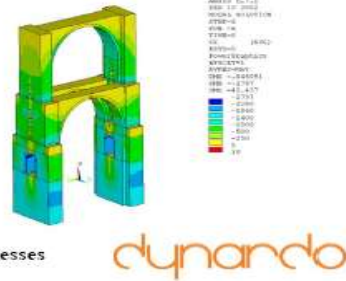
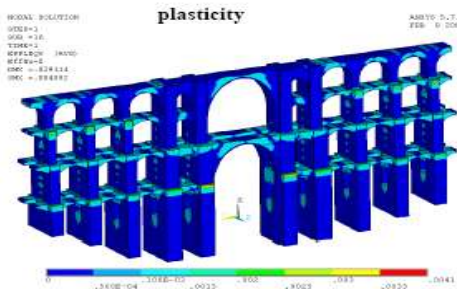
detailed geometry model with foundation, piles and arches made from granite, sandstone and masonry



## نتایج حاصل از کنترل محاسباتی تاب تحمل پلهای قدیمی



For the first time stability and survivability of the structure according to actual German standards (DIN/DS) was proven.



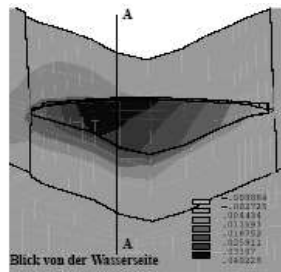
## کنترل محاسباتی تاب تحمل سد



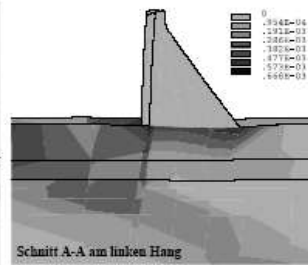
Geomechanics

2D/3D Stability analysis of dams

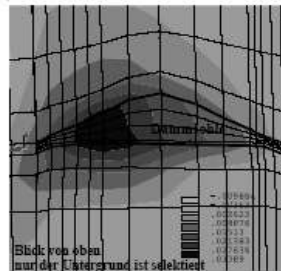
- non-linear mechanical analysis
- coupled fluid flow, thermal and mechanical analysis
- elastic-plastic material models of rock, jointed rock, masonry, concrete, soil



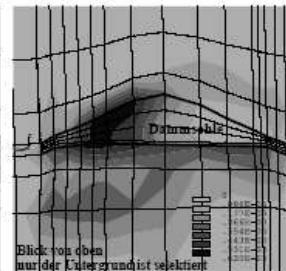
Verschiebungen in Talrichtung (cm)



Plastische Vergleichsdehnung (Elementwerte)



Verschiebungen in Talrichtung (cm)



Plastische Vergleichsdehnungen (Knotenwerte)

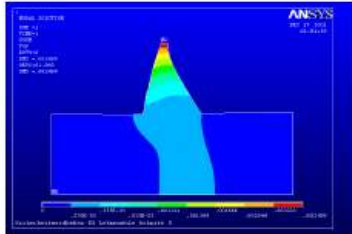


## نتایج حاصل از کنترل محاسباتی تاب تحمل سد

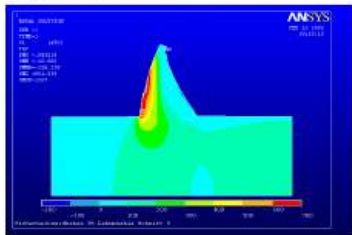
dynando

### Earthquake analysis of dams

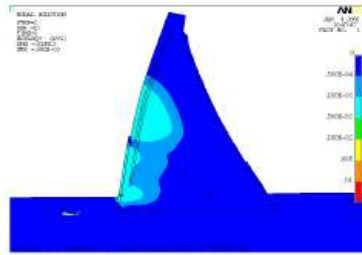
- often response spectra analysis is used
- then quasi-static elastic-plastic analysis with worst case modal superposition is performed
- with today's numerical power also non-linear transient analysis is possible



total deformation



tension stress



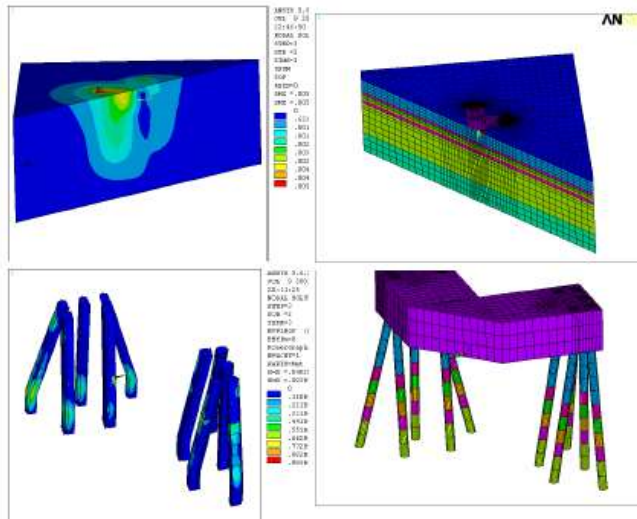
plastic strain

## نتایج حاصل از کنترل محاسباتی تاب تحمل پی شمع دار

### Geomechanics

#### Foundation Analysis

- non-linear load history
- non-linear static and dynamic analysis
- piles & plates

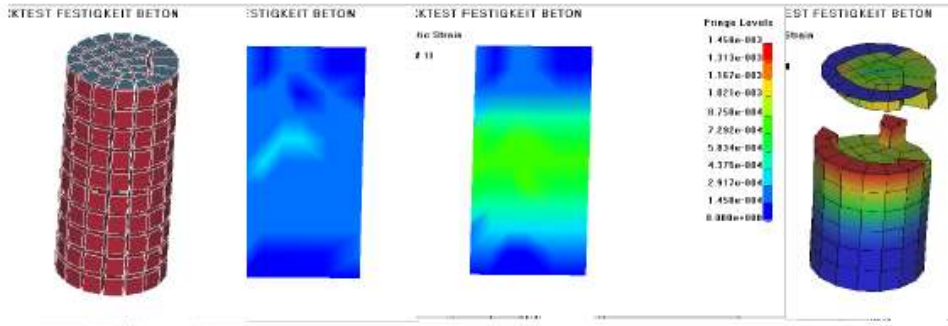




## نتایج حاصل از تحلیل تاب تحمل نمونه استوانه بتن

### verification of the concrete model (plasticity & damage)

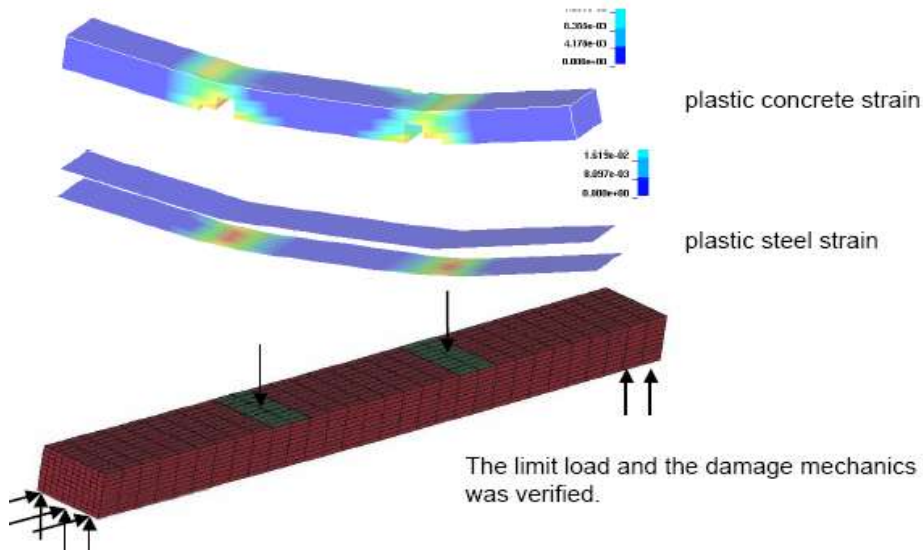
#### uniaxial compression test



The compression strength 0.045 KN/mm<sup>2</sup> and the damage mechanics was verified.

## نتایج حاصل از تحلیل تاب تحمل تیر بتن آرمه

### verification of reinforced concrete modeling (plasticity & damage)



The limit load and the damage mechanics was verified.

## بررسی چگونگی تمرکز صدمه در نمونه ماده متخلخل و مخزن عایق شده با باتیمان

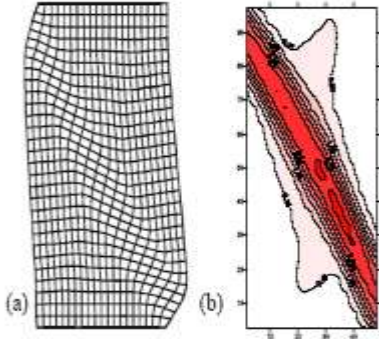


Fig. 1 Localization Simulation in a Test Specimen of a Porous Medium  
(a). deformation (b). damage distribution

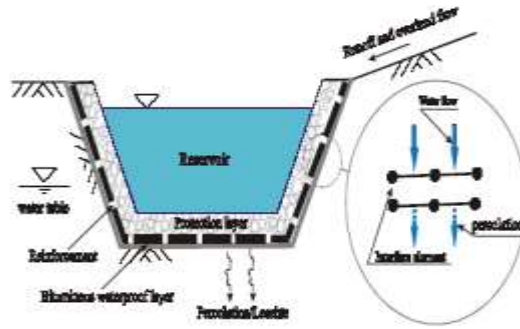


Fig. 2 Schematic of Bituminous Waterproof Lining System in a Reservoir



کاربریهایی  
دیگر روش  
اجزای  
محدود  
(تصاویر  
ماهواره ای)

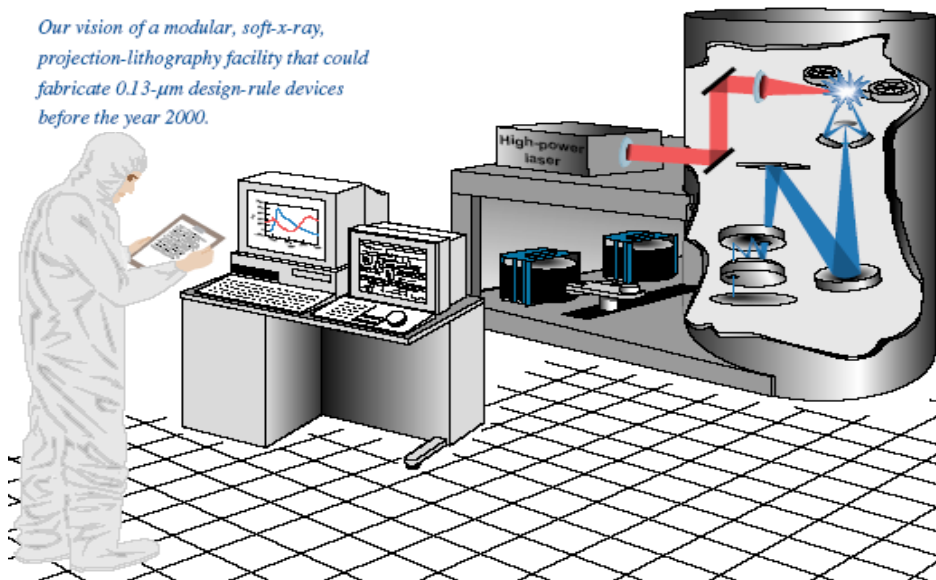
*The Clementine Satellite sent back more than 1.5 million images of the moon at resolutions never before attained. These images were taken with cameras designed by the Laboratory.*



کاربریهای  
دیگرروش  
اجزای محدود  
(پرتاب موشک)

## پیش بینی اثرات اشعه ایکس بر روی مواد

*Our vision of a modular, soft-x-ray,  
projection-lithography facility that could  
fabricate 0.13- $\mu\text{m}$  design-rule devices  
before the year 2000.*



## پیش بینی های آثارناگوار زلزله



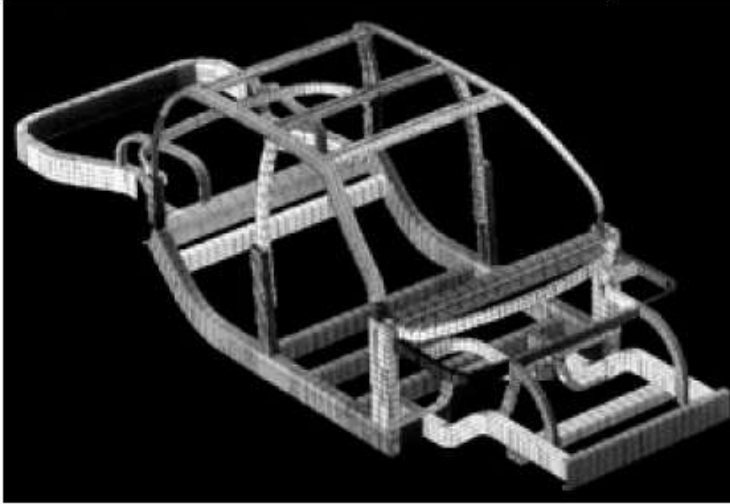
*Teams of LLNL scientists go into the field after major earthquakes to study how and why structures are damaged. Our investigations included damage done by the January 1994 earthquake in Northridge, CA.*



پیش بینی آثار  
الکتروسیسته برسیالات

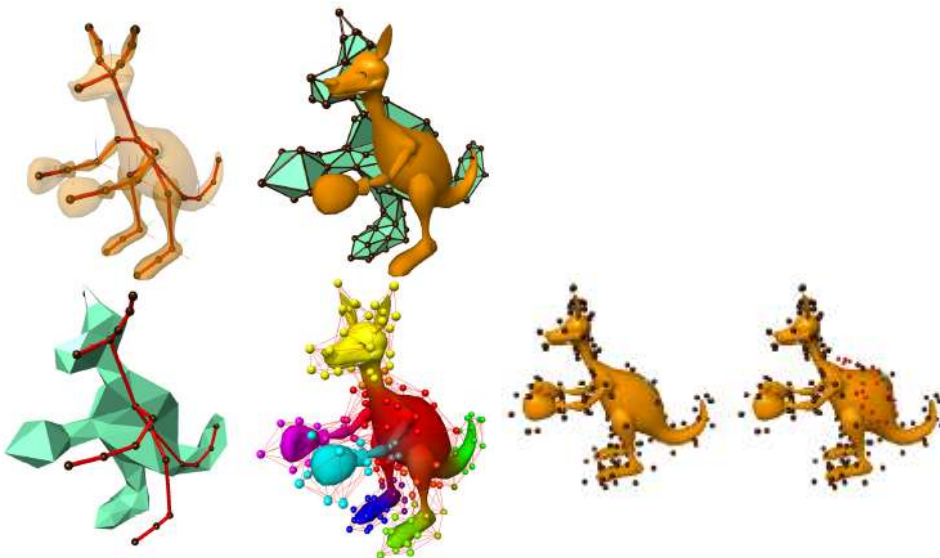
*With 1 to 2 volts of input power, this 400- $\mu$ m-long intravascular microtool from the Microtechnology Center will curl up and stretch out in liquid. The Center's ongoing research into microscale actuators includes their use in areas such as optics, biomedical instruments, and micropart packaging.*

## پیش بینی آثار مخرب بر سازه خودرو



*We are designing and analyzing a crashworthy aluminum frame that could be used for electric vehicles. We are working as part of the CALSTART consortium and in conjunction with Kaiser Aluminum and Chemical Corporation.*

## تحلیل حرکات حیوانات



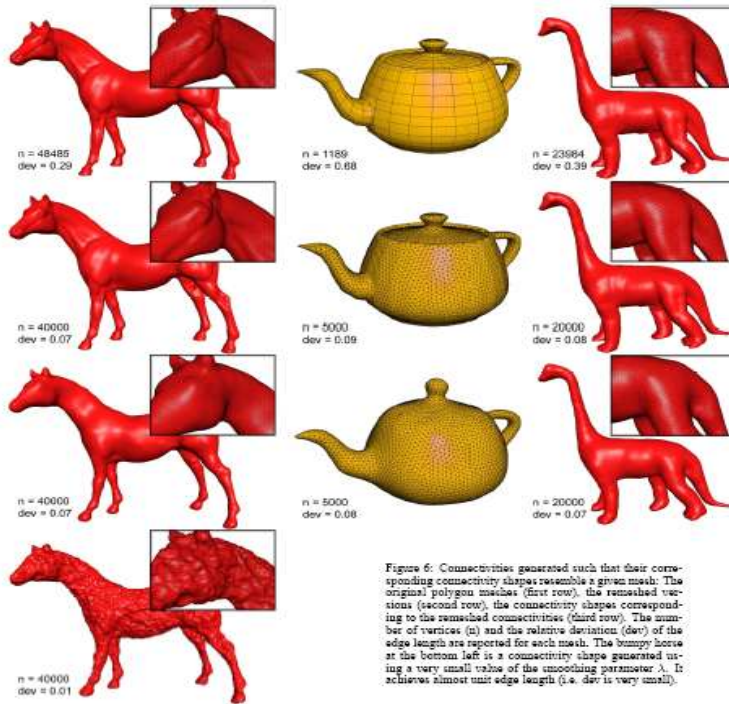
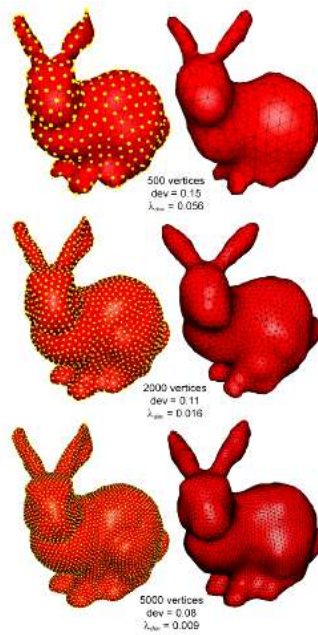


Figure 6: Connectivities generated such that their corresponding connectivity shape resembles a given mesh. The original polygon meshes (first row), the remeshed versions (second row), the connectivity shapes corresponding to the remeshed connectivities (third row). The number of vertices (n) and the relative deviation (dev) of the edge length are reported for each mesh. The bumpy horse at the bottom left is a connectivity shape generated using a very small value of the smoothing parameter  $\lambda$ . It achieves almost unit edge length (i.e. dev is very small).

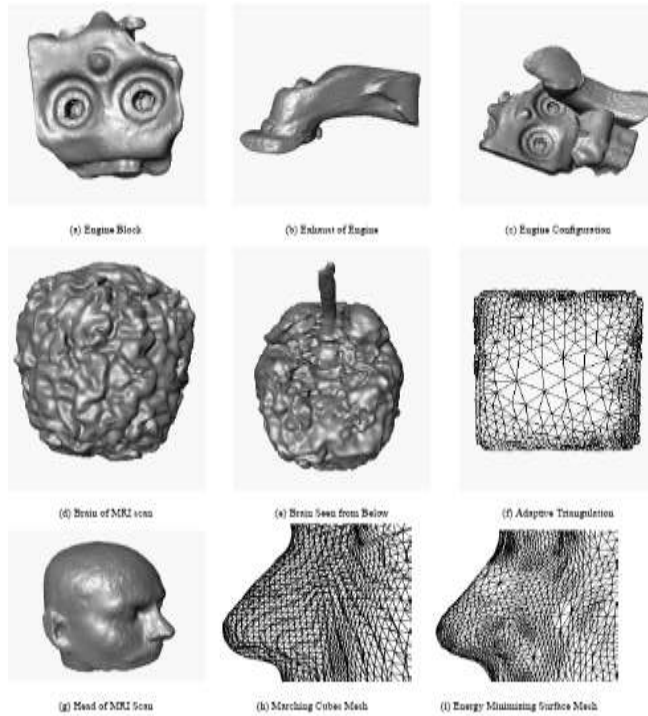
بررسی  
ویژگیهای:  
- حیاتی  
- جسمی  
- تخیلی



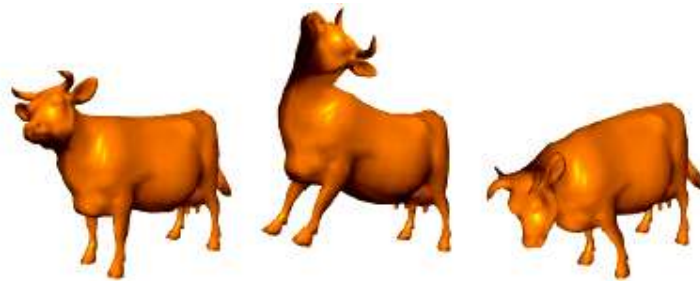
Three bunnies remeshed with 500, 2000, and 5000 vertices (left) and their corresponding connectivity shapes (right). Reported are the relative deviation in edge length dev after remeshing and the smoothing parameter  $\lambda_{dev}$ .

بررسی  
اشکالات  
اساسی در بکار  
گیری نظریه  
ها؟

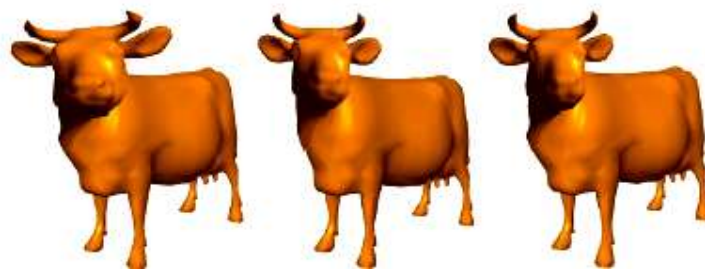




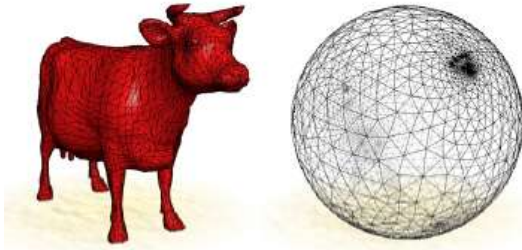
افزایش دقت  
در تحلیل  
قسمتها؟



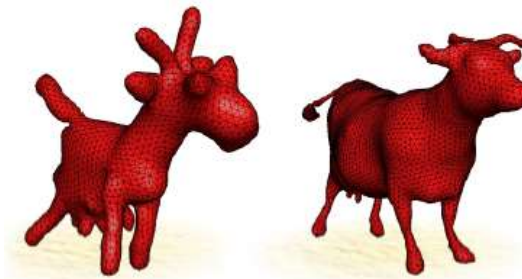
Frames from an interactive animation. There is no noticeable warping due to strain linearization, and the different materials (e.g., ears, horns) behave distinctly.



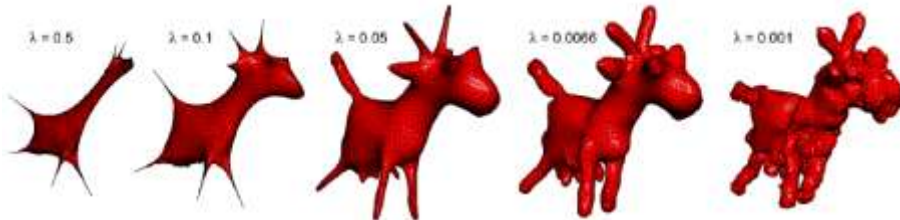
شناسایی  
کیفی  
اندر کنشها  
ونظریه  
پردازشی؟؟؟



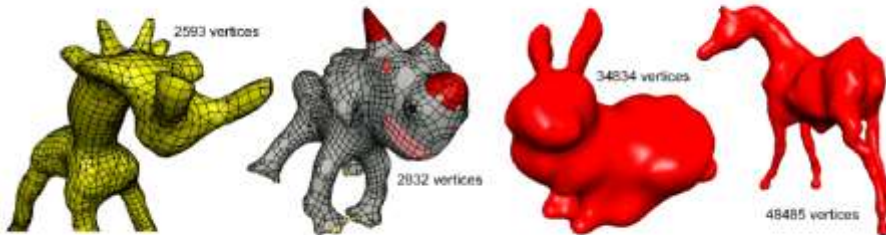
تعمیق  
درمیزان دقت  
نظریه ها؟؟؟



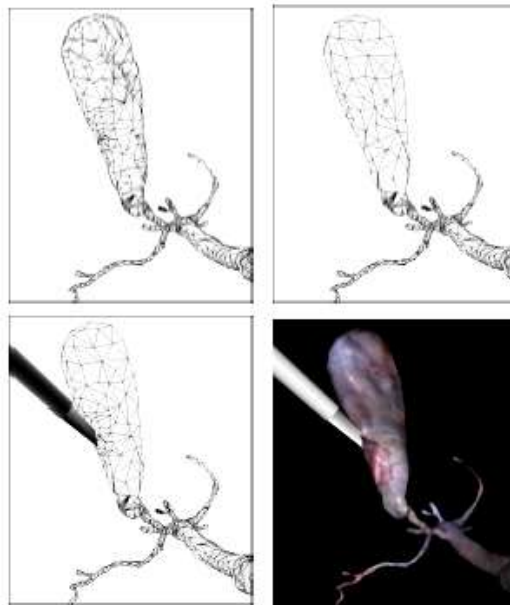
تطبيق نتایج نظریه ها با حقیقت؟؟؟



Family of connectivity shapes computed from the cow's connectivity with different smoothing parameters  $\lambda$ .



Connectivity shapes computed from the connectivity of (a) giraffe, (b) triceratops, (c) Stanford bunny, and (d) horse.

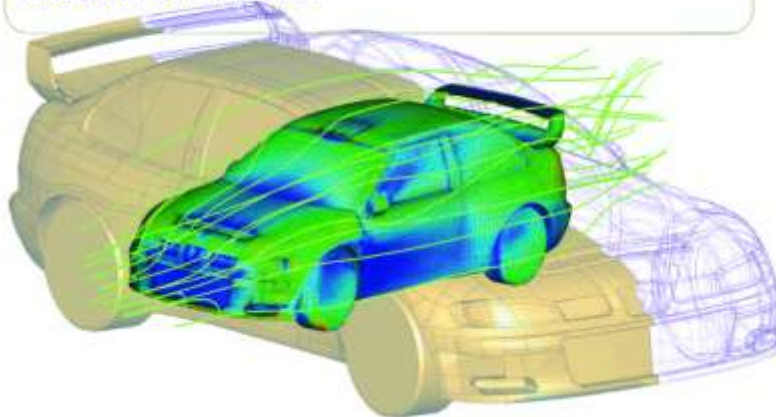


ضعفهای  
اجتناب ناپذیر؟  
(کیسه صفرا)

Upper left: A detailed mesh of the human gallbladder and bile ducts with 1900 vertices and 3772 faces. Upper right: The model with the gallbladder coarsened from 517 vertices to 117. Lower left: Where the instrument grasps the gallbladder, the mesh has been locally refined. Lower right: Texture mapped view of grasped gallbladder with local refinement.

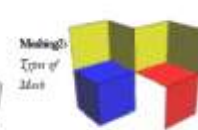
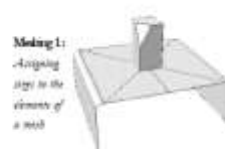
## شناسایی موارد عدم تطبیق

Issue's Photo



# شناسایی اجزای

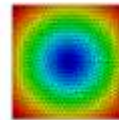
## GiD Tutorials



**Program 3:**  
Structural analysis using C4L-SEF and saving results to GiD

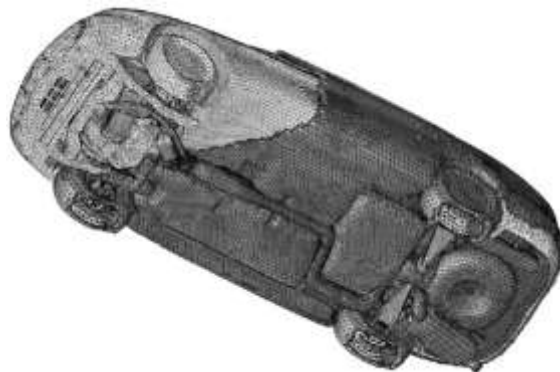


**Program 4:**  
Reading IGES file

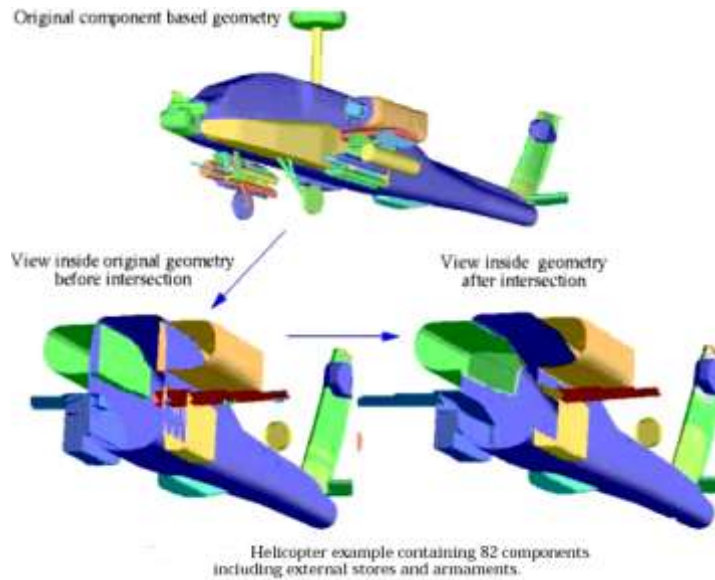


**Problem Type:**  
Configuring GiD  
for a  
particular type of  
analysis

## تحلیل با در نظر گرفتن اندرکنشها



## اجزای بالگرد

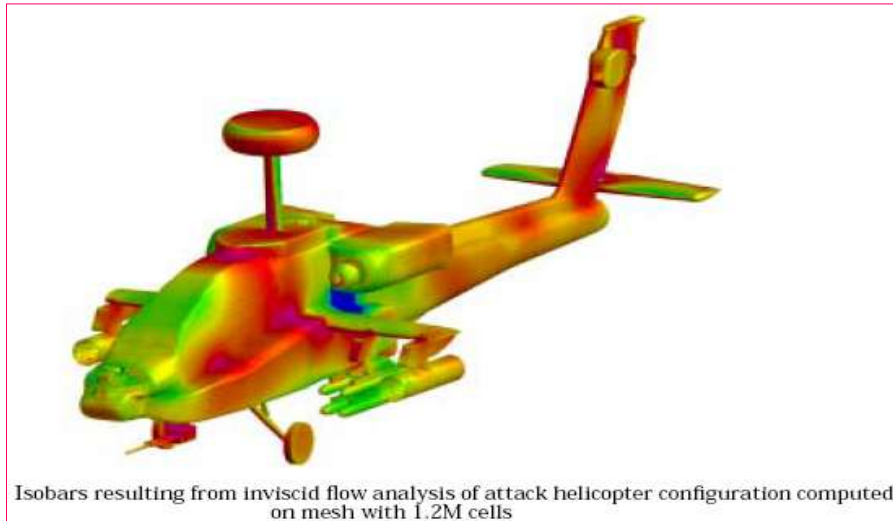


## شبکه تحلیل شرایط اطراف بالگرد

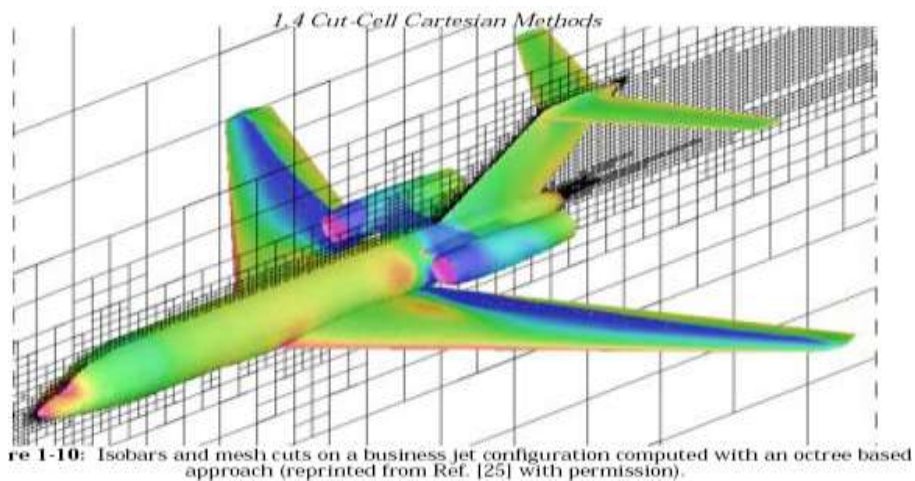


Upper: Cartesian mesh for attack helicopter configuration with 5.81M cells, Lower: Close-up of mesh through left wing and stores.

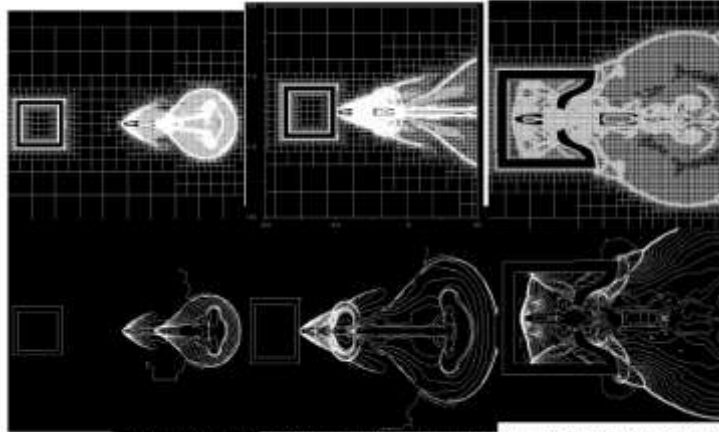
## نتایج تحلیل توزیع فشار روی بدنه بالگرد



## نتایج تحلیل توزیع فشار روی بدنه هواپیمای جت



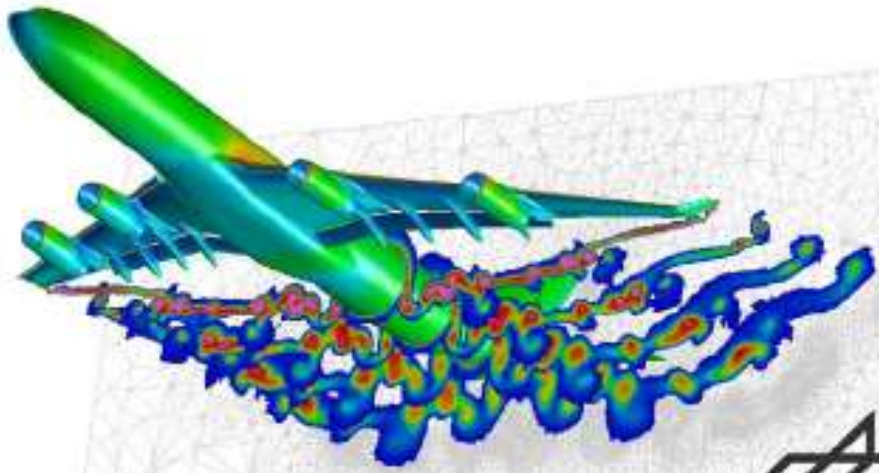
## نمایش خطوط همتراز چگالی اطراف پرتابه حین برخورد و نفوذ

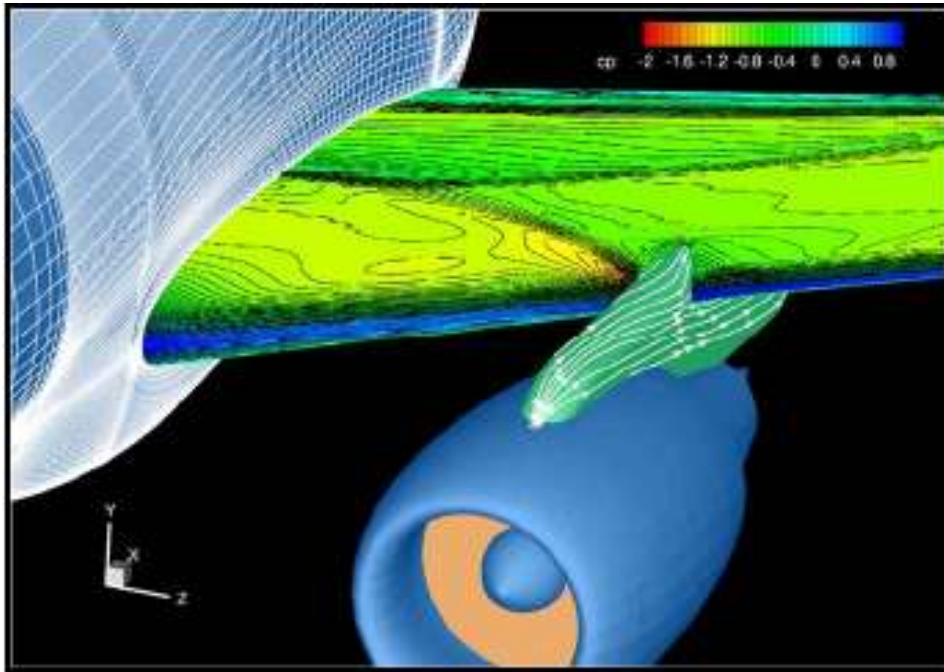


Density contours and adapted quadtree grids showing a time history of a projectile penetration problem (reprinted from Ref. [70] with permission).

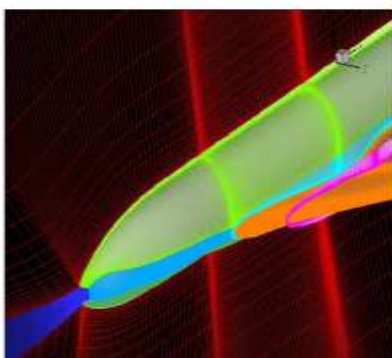
### Unstructured RANS solver TAU

- hybrid grids
- very complex configurations
- grid adaptation
- fully parallel software
- adjoint option

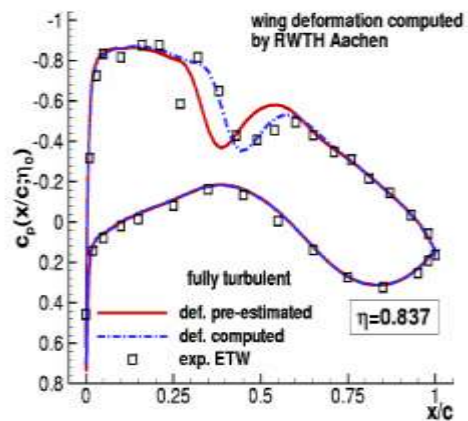




- $M_\infty=0.85$ ,  $Re=32.5 \times 10^6$
- coupled CFD/structural analysis for wing deformation at  $\alpha \approx 1.5^\circ$
- FLOWer,  $k\omega$  turbulence model, fully turbulent

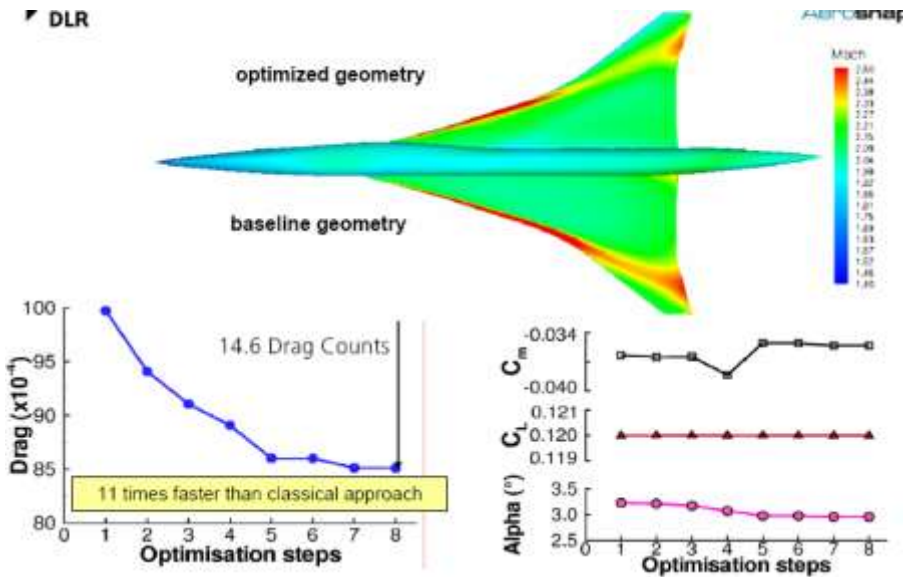
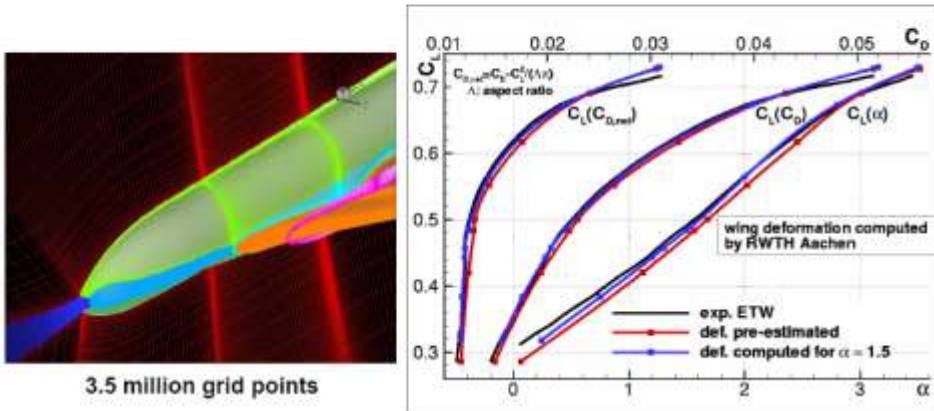


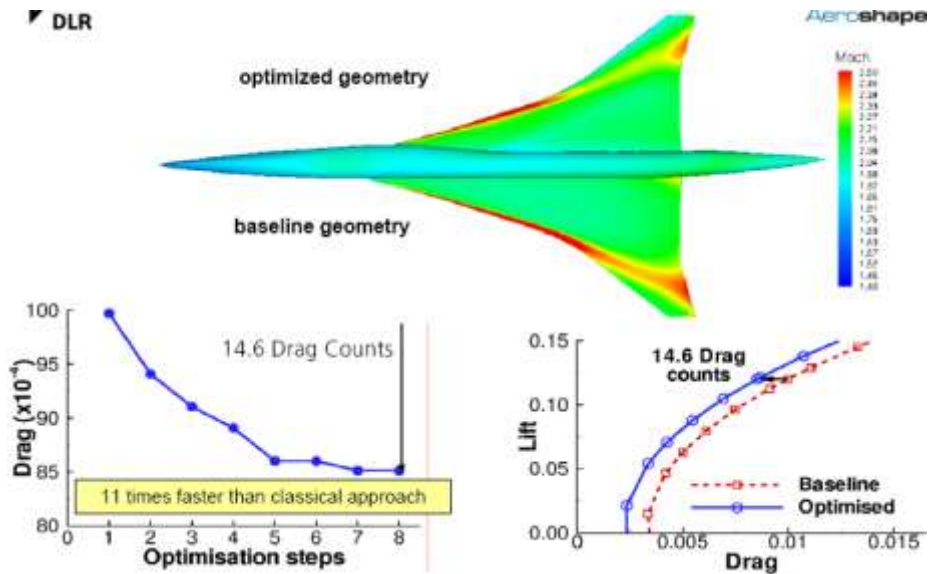
3.5 million grid points



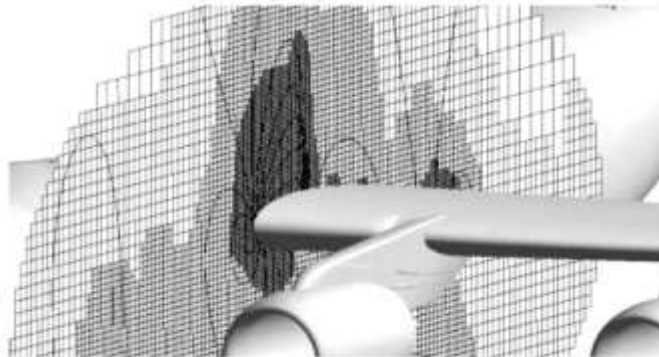


- $M_\infty=0.85$ ,  $Re=32.5 \times 10^6$
- coupled CFD/structural analysis for wing deformation at  $\alpha \approx 1.5^\circ$
- FLOWer,  $k\omega$  turbulence model, fully turbulent

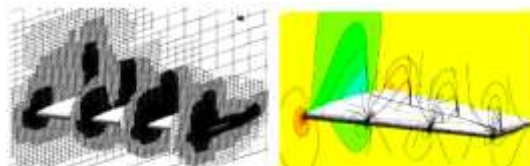




## نتایج تحلیل توزیع فشار روی بدنه هواپیمای جت

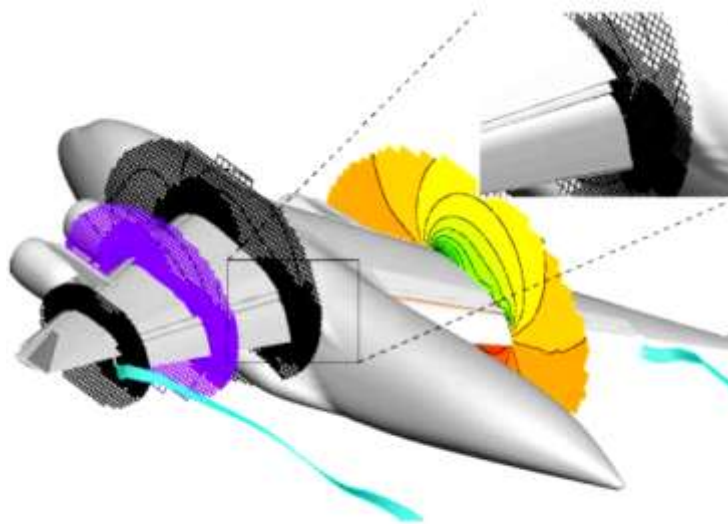


Adapted mesh, and computed isobars for inviscid flow over a High Wing Transport (HWT) configuration. The unstructured Cartesian mesh contained 2.9M cells with 10 adaptations.



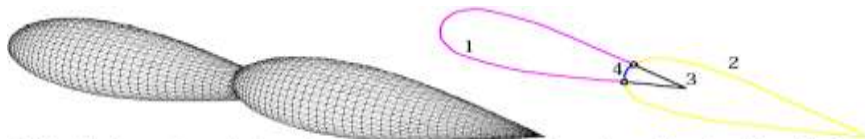
Adapted mesh, and computed isobars for inviscid flow over an ONERA M6 wing at  $\alpha = 3.00^\circ$ , and  $M_\infty = 0.84$ , computed using an unstructured representation of the Cartesian mesh.

## نتایج تحلیل توزیع فشار روی بدنه هواپیمای جت

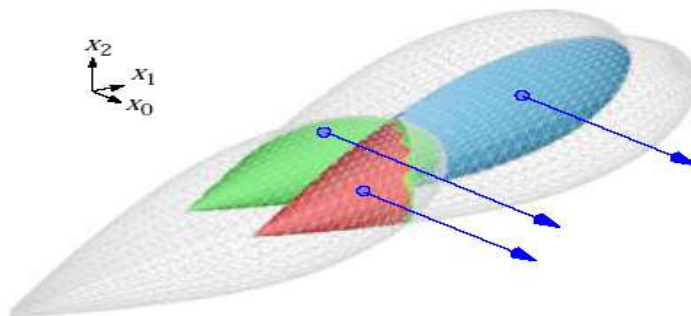


HWT example with high-lift system deployed. The mesh contains 1.65M cells at 10 levels of refinement. The mesh is presented by cutting planes at 3 spanwise locations and the cutting plane on the starboard wing is flooded by isobars of the discrete solution.

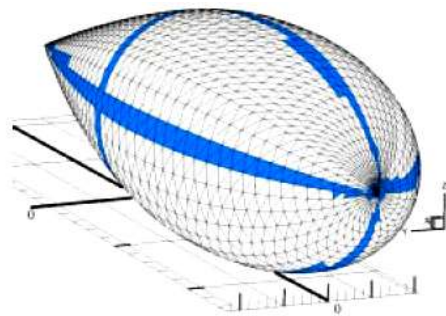
## نمایش شبکه اجزای در سطح و درون جسم



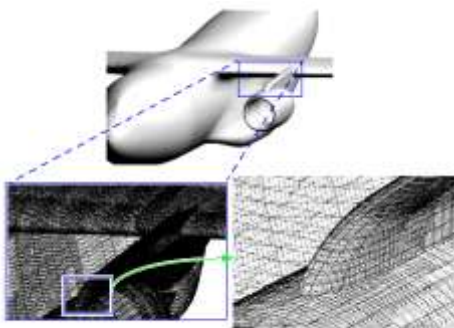
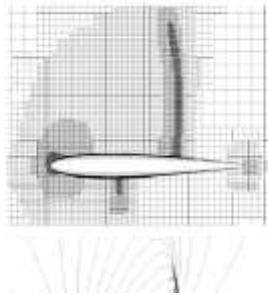
1-21: Surface triangulations for two intersecting teardrop shaped bodies. The labels on the sketch indicate regions painted by a single seed.



Example of ray-casting combined with mesh painting. The three internal regions shown were identified and painted using one ray per region

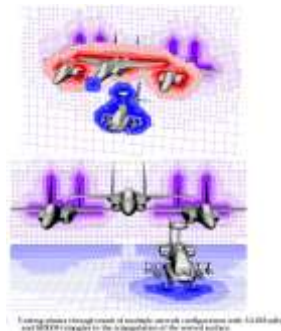
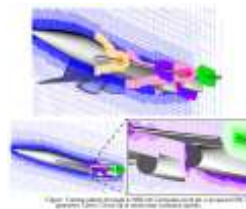


The unshaded triangles may use the  $3 \times 3$  form of the simplex determinant in eq. 2.3 without incurring round-off error due to the initial subtraction of coordinate data.



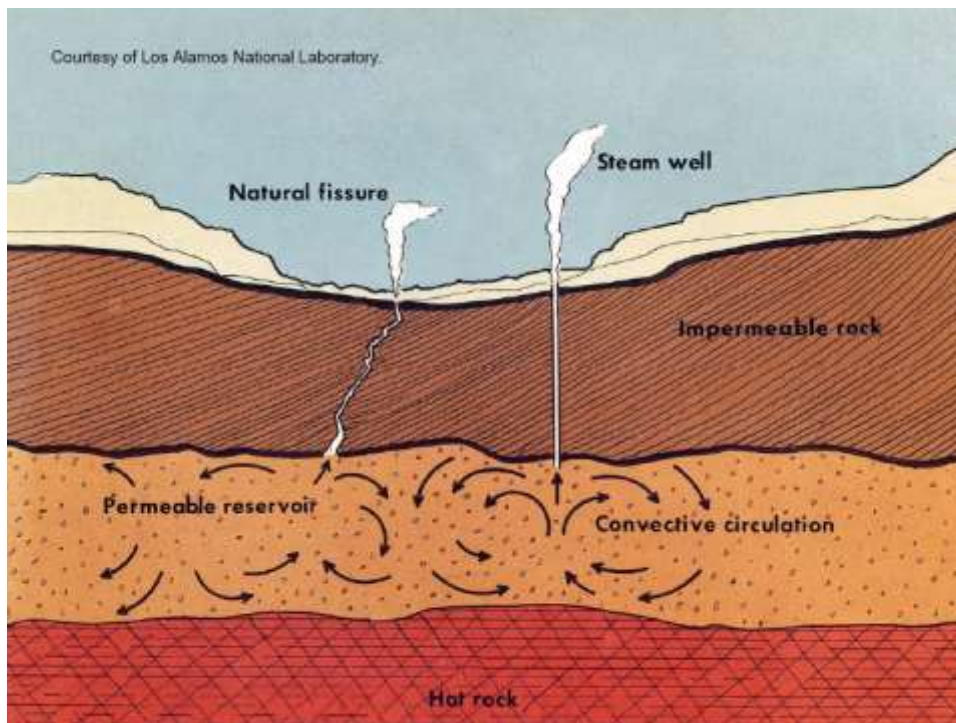
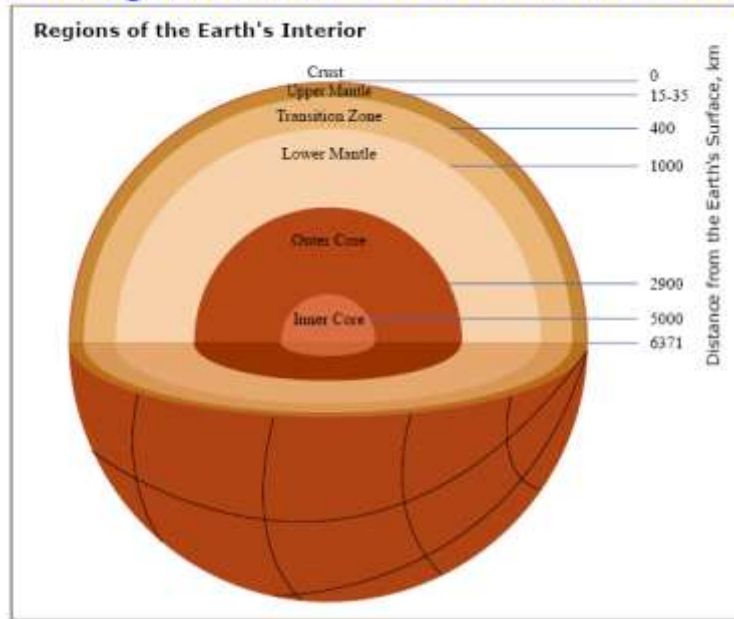
Triangle polygons on surface of High Wing Transport configuration resulting from conversion of body-cox Cartesian into body surface triangulation. The triangle polygons shown here have been (thrustwise) triangulated for plotting purposes. This example isolated approximately 50000 body-cox Cartesian cells.

## نمونه هایی از شبکه اجزای مختلف



Triangulation through mesh of multiple aircraft configurations with 60000 cells and 10000 triangles in the triangulation of the wing surface.

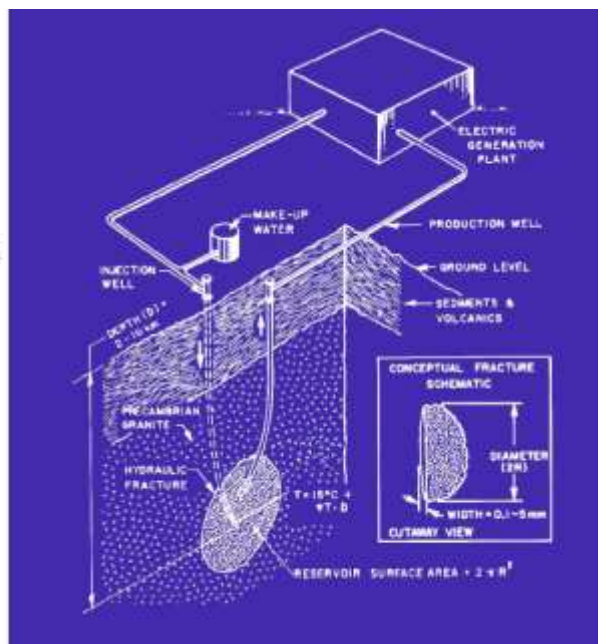
## Looking inward for Geothermal Energy



## Hot Dry Rock [HDR or EGS]

- Resource characteristics
- Reservoir properties
- Energy conversion and end use
- Economics

MIT



## Critical Elements for Heat Mining

### ❑ Resource quality

- average geothermal gradient --  $\nabla T$
- geotechnical "compliance" and stability of rock formations

### ❑ Reservoir performance

- size – active volume and/or surface area  $\langle V \rangle$  and/or  $\langle A \rangle$
- flow resistance or impedance  
 $I = (\Delta P - P_{buoyancy}) / (\text{mass flow rate})$
- temperature – availability and fluid quality

### ❑ Economic factors

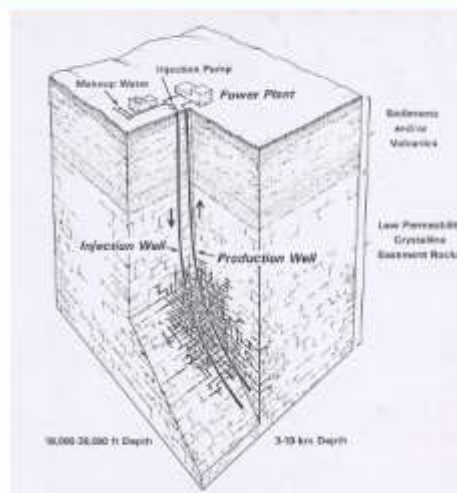
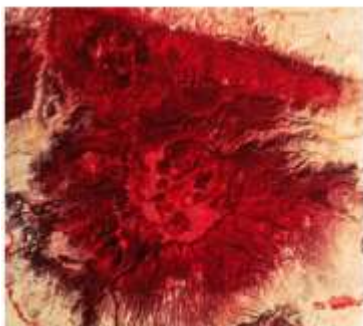
- Well drilling and completion costs
- Surface plant and distribution costs

## The "Laws" Geothermal Economics

- 1<sup>st</sup> Law** -- Completed well cost increases exponentially with depth
- 2<sup>nd</sup> Law** -- Power plant cost decreases linearly with temperature
- 3<sup>rd</sup> Law** --As resource quality decreases drilling costs dominate

## The Fenton Hill Los Alamos experiment

High grade, volcanic resource in crystalline rock

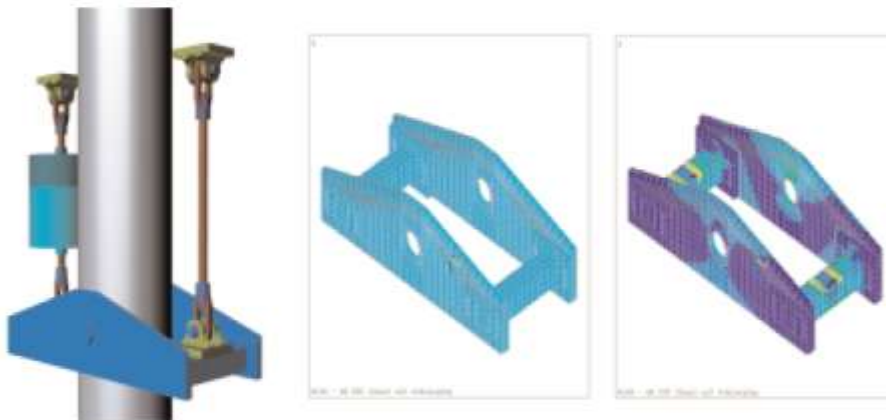


## Fenton Hill – a 25+ yr Los Alamos experiment

- ❑ HDR concept born at Los Alamos as a subcomponent of Subterrene - 1970
- ❑ Fenton Hill Test hole drilling GT1 – 1971
- ❑ Phase I field test - 1973 –1979
  - GT-2B – EE-1 , 2-well connected system
  - 3 km ( 10,000 ft), 200°C
  - prototype reservoir ca 10,000 m<sup>2</sup>
- ❑ Phase II field test - 1980 – 1990
  - EE-1 – EE-2 , 2-well connected system
  - 5 km (15000 ft), 300+ °C
- ❑ Post –phase II testing – 1991 – 1999
- ❑ Site decommissioning - 2000

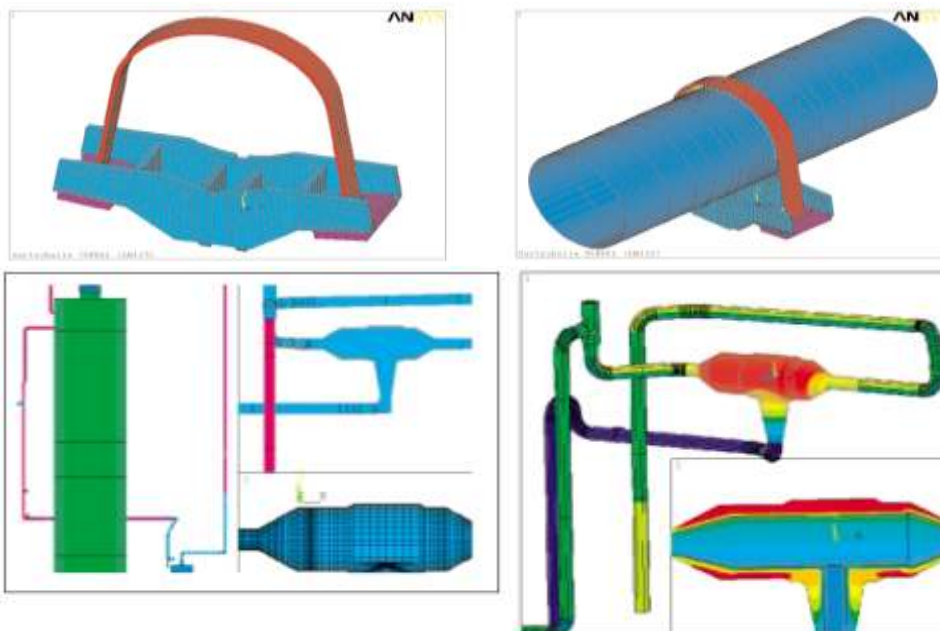
**\$180 million total about 50% on infrastructure**

نمونه هایی از شبکه اجزای مختلف

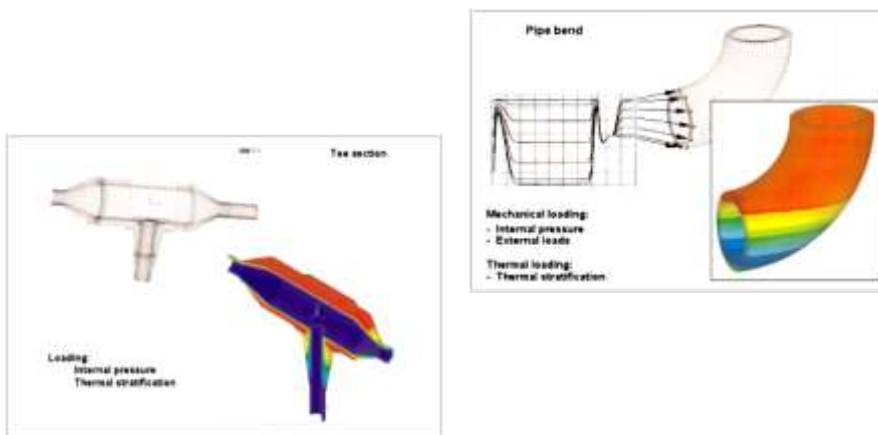




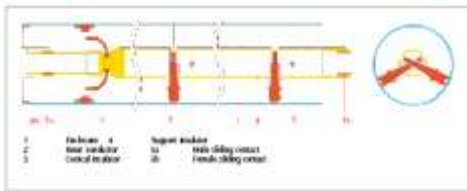
### نمونه هایی از شبکه اجزای مختلف



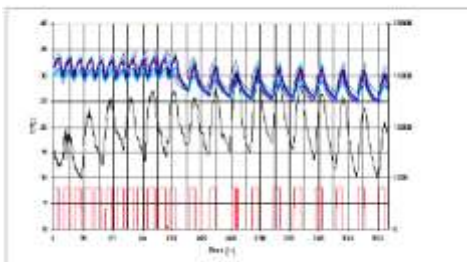
### نمونه هایی از شبکه اجزای مختلف



## شبیه سازی کارهای اجرایی



Comparison of identified one and a single construction



Comparison of calculated and experimental results of a railway track using of a railway track. The graph shows the results of the simulation and the experimental results.



Figure 1: Circuit board of a multi-phase.

## نمونه نتایج تحلیل

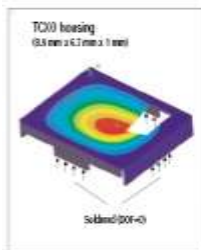


Figure 2: Mesh analysis of the housing delivers the natural frequency (F=15.4 kHz).

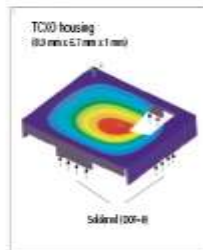


Figure 3: Mesh analysis of the housing with changed material properties (F=15.4 kHz).

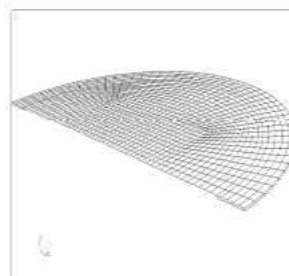
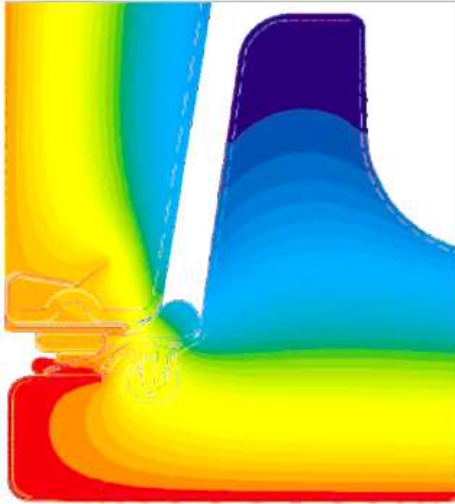


Figure 4: Cross-sectional view of the circuit board showing the maximum FEM result obtained is its mesh's size. The 50 mm square mesh is used for the 30 mm x 30 mm.

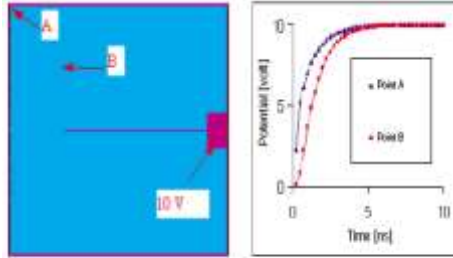


Figure 5: Comparison of local distortions (max. 10 mm) with the 10 mm per mesh size and 10 mm per mesh size. The effect of stress is calculated by averaging over the area.

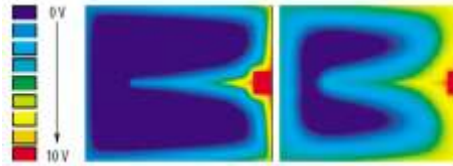
## نمونه نتایج تحلیل



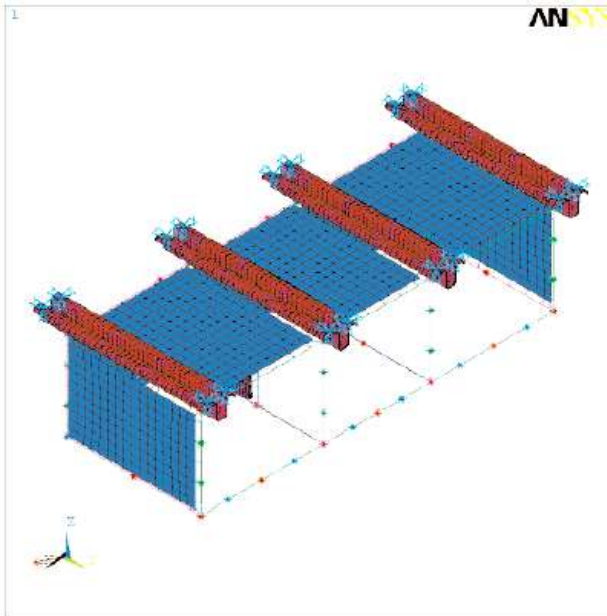
Temperature distribution across the sealing of a refrigerator.



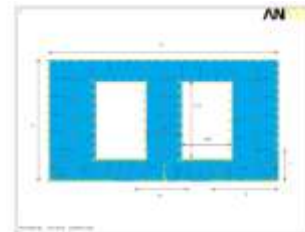
Transient 2-D finite element calculation of the potential at the gate of a power MOSFET after the turn-on pulse of the gate stimulus.



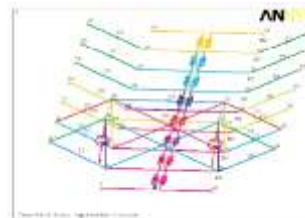
## نمونه شبکه



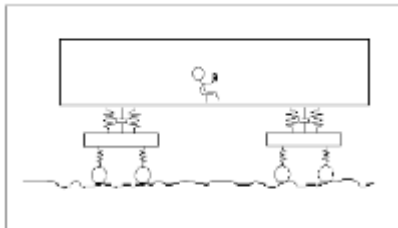
Finite element model of a container for the electrical components of a railway wagon.



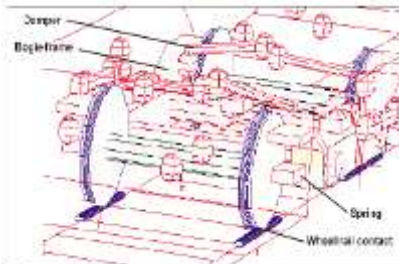
Meshing view



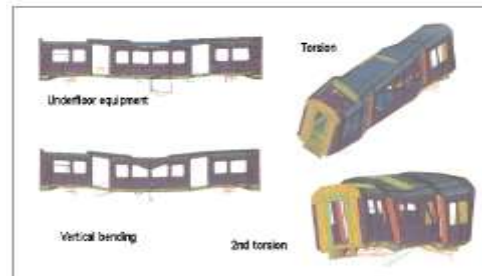
# مدلسازی اجزای قطار



Model of train car body



Detailed model of train car body

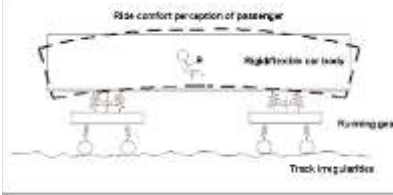


Model loads of car body created with ABAQUS

# مدلسازی اجزای قطار



Figure 1 Damper



Model of passenger perception



Figure 2 Spring

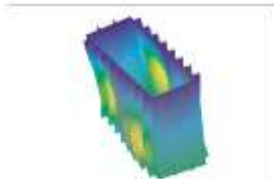
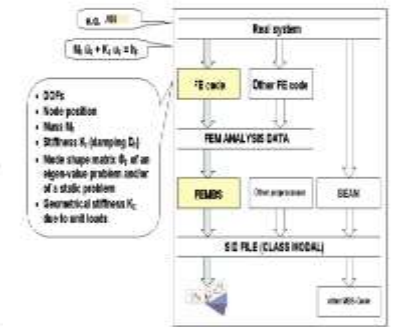


Figure 3 Bogie frame



Finite element between ABAQUS and SIMULIA



Figure 4 Wheel-rail contact



Figure 5 Stress distribution of spring

### نمونه نتایج تحلیل

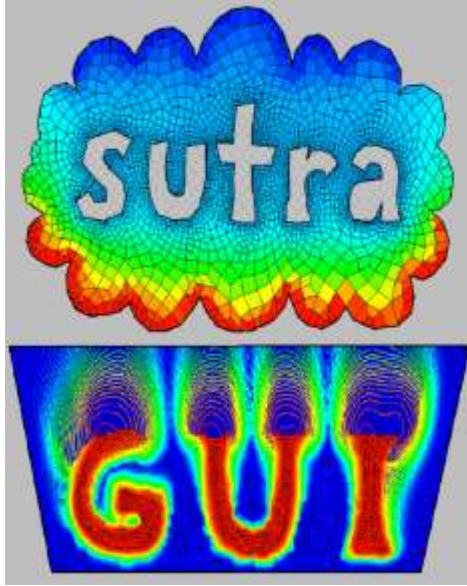


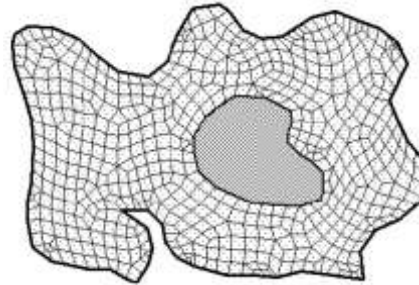
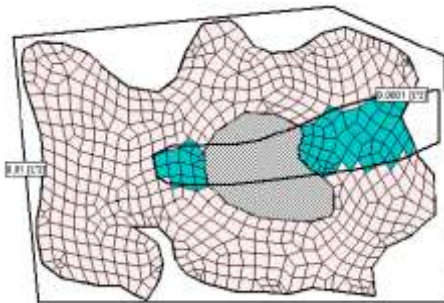
Figure 1  
Stress distribution in a cantilever beam



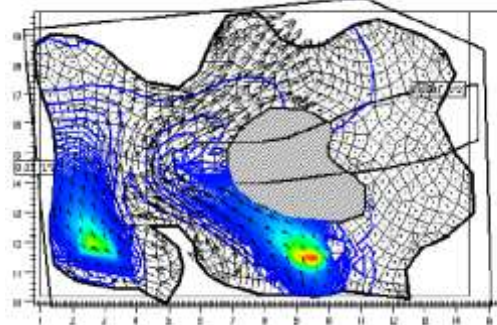
Figure 2  
Stress distribution in a cantilever beam with a hole



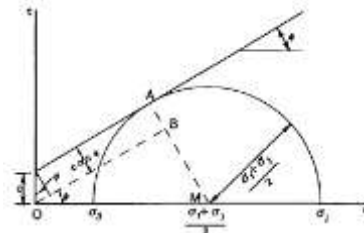
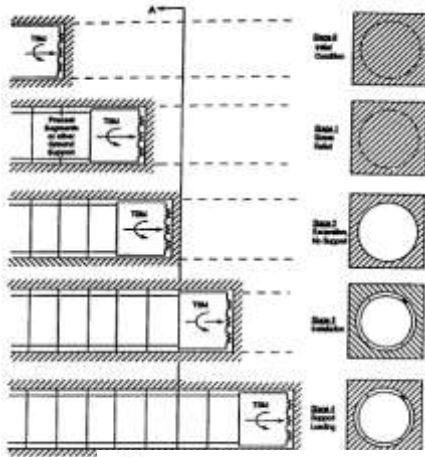
Figure 3  
View of the higher stress regions of the hot case



### Period 1 Concentration

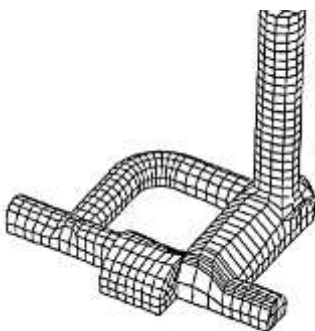
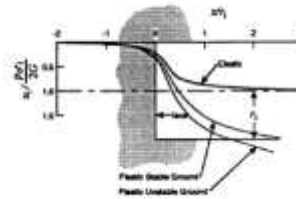
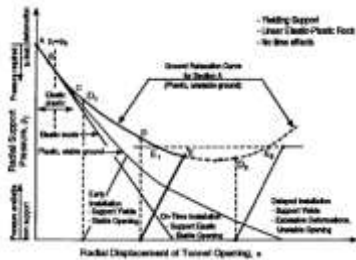


### مدلسازی مراحل ساخت تونل

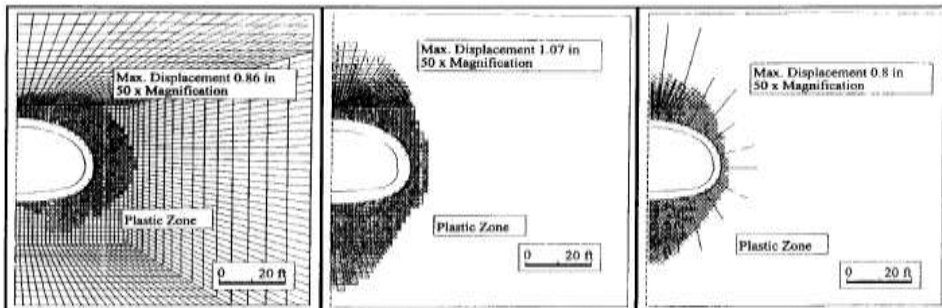


**Linear Failure Envelope Defined by the Equation:**  $\tau = c + \sigma \tan \phi$   
 The stress at a point in a state of incipient failure is represented by the circle through the points representing the minimum principal stress  $\sigma_3$  and the maximum principal stress  $\sigma_1$  at that point.  
 $c$  = cohesion of the rock  
 $\phi$  = angle of internal friction of the rock

### Rock-support interaction



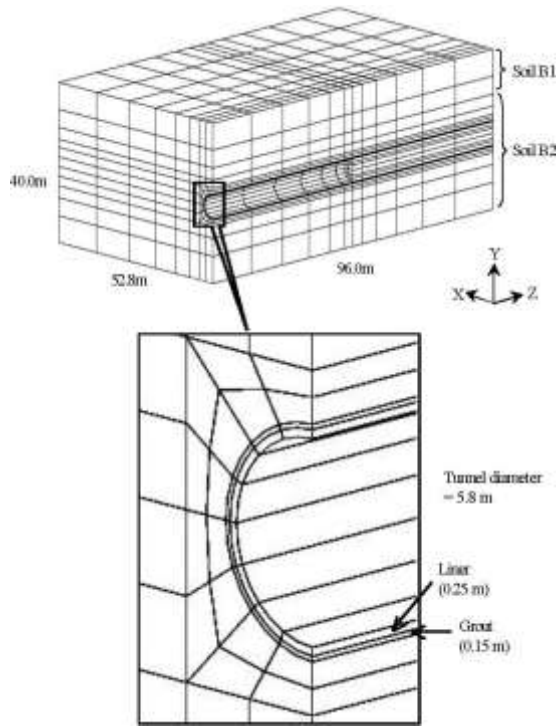
### مدلسازی و تحلیل تونل



Deformation and yielded zones,  $K_0 = 1$

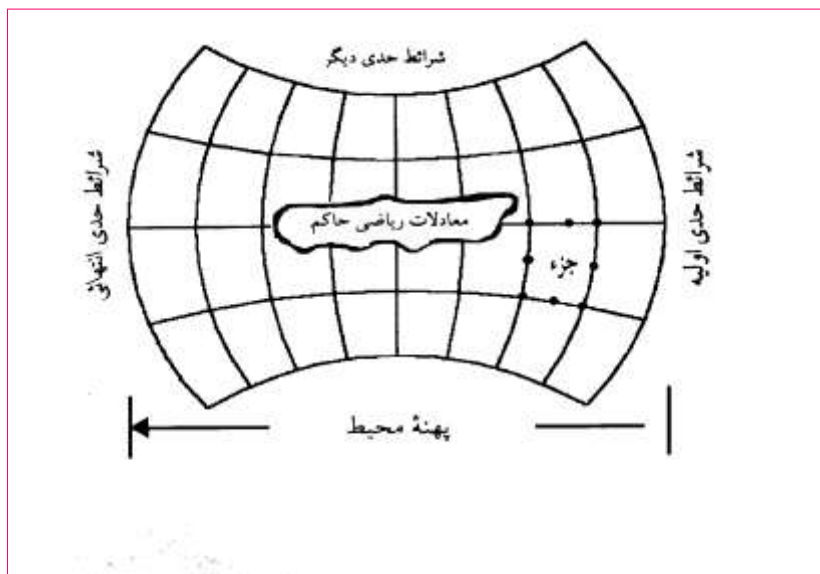
Deformation and yielded zones,  $K_0 = 1.5$

Deformation and yielded zones,  $K_0 = 1.5$



## شبکه اجزای تحلیل تونل

## نگرش ساده به عملکرد روش اجزای محدود



## پایه ها

- تعریف مساله
- شناسایی معلومات و مجهولات مساله وامكان تحليل
- شناخت نظريه های حاکم
- استخراج شرائط مورد نیاز حاکمیت قطعی نظریه ها
- شناسایی و تطبیق شرائط مرزی در مساله
- انتخاب شبکه مناسب برای اجزای
- تحلیل مساله و تنظیم خروجی ها
- انتخاب روش ارائه خروجیها جهت بهره وری مناسب



## روش تعادل نیروها

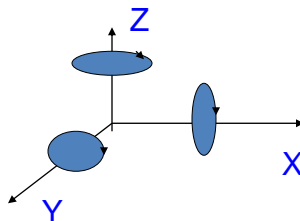
شاخصهای اصلی در این روش سه مورد است:

- تساوی جمع نیروهای همسو (تعادل نیروها)
- همسازی تغییر مکانها
- تاثیر رفتار مکانیکی ماده

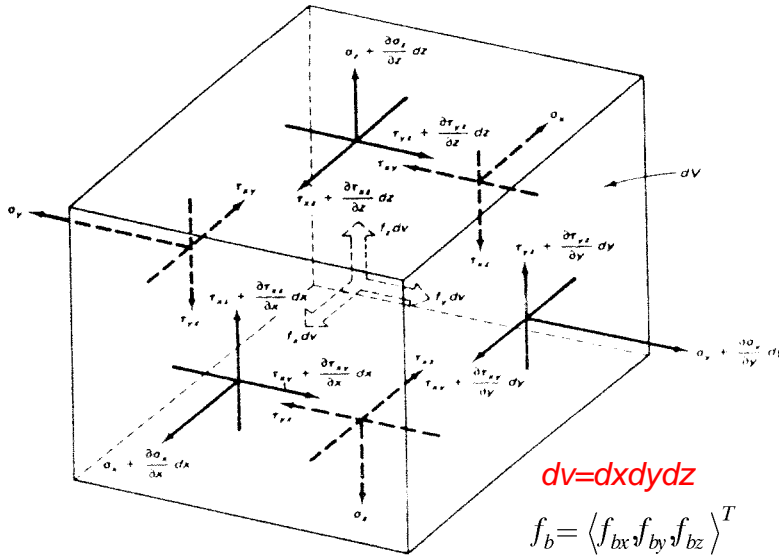
## تساوی جمع نیروهای همسو (تعادل نیروها)

- در یک محیط پیوسته پایا (ایستا) مجموع نیروها در هر امتداد چه بر روی کل محیط و یا هر ذره برابر صفر است. بنابراین در یک مختصات کارتزین  $X, Y, Z$  می توان نوشت:

- $\Sigma F_x = 0$
- $\Sigma F_y = 0$
- $\Sigma F_z = 0$
- $\Sigma M_{xx} = 0$
- $\Sigma M_{yy} = 0$
- $\Sigma M_{zz} = 0$



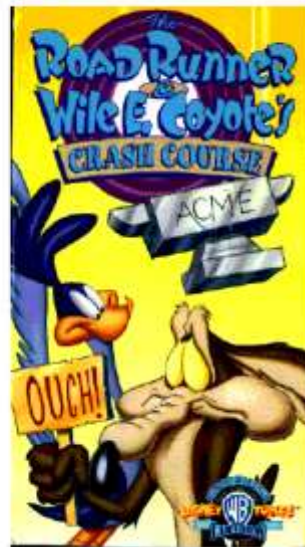
- برای در نظر گرفتن تعادل نیروها روی یک جزء  $dx, dy, dz$  ابتدا در قالب مهندسی لازم است تنشها روی چنین جزئی تعریف شود.



## Computer Animation

- Animation Methods
- Keyframing
- Interpolation
- Kinematics
- Inverse Kinematics

Slides courtesy of  
Leonard McMillan and  
Jovan Popovic



# Animation

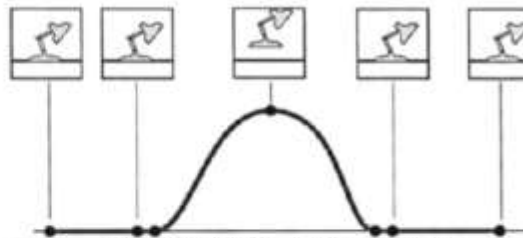
4 approaches to animation  
Pros ? Cons ?



## Computer-Assisted Animation

### Keyframing

- automate the inbetweening
- good control
- less tedious
- creating a good animation still requires considerable skill and talent



ACM © 1987 "Principles of traditional animation applied to 3D computer animation"

### Procedural animation

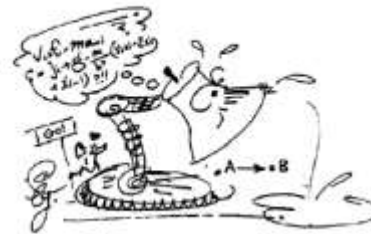
- describes the motion algorithmically
- express animation as a function of small number of parameters
- Example: a clock with second, minute and hour hands
  - hands should rotate together
  - express the clock motions in terms of a "seconds" variable
  - the clock is animated by varying the seconds parameter
- Example 2: A bouncing ball
  - $Abs(\sin(\omega t + \theta_0)) * e^{-kt}$



## Computer-Assisted Animation

### Physically Based Animation

- Assign physical properties to objects (masses, forces, inertial properties)
- Simulate physics by solving equations
- Realistic but difficult to control



ACM© 1988 "Spacetime Constraints"

### Motion Capture

- Captures style, subtle nuances and realism
- You must observe someone do something



## Overview

Keyframing and interpolation  
 Interpolation of rotations, quaternions  
 Kinematics, articulation



Particles



Rigid bodies



Deformable objects, clothes, fluids



## Kinematics vs. Dynamics

### **Kinematics**

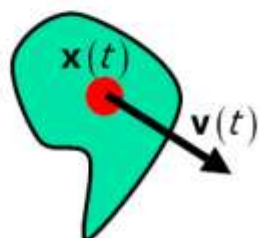
Describes the positions of the body parts as a function of the joint angles.

### **Dynamics**

Describes the positions of the body parts as a function of the applied forces.

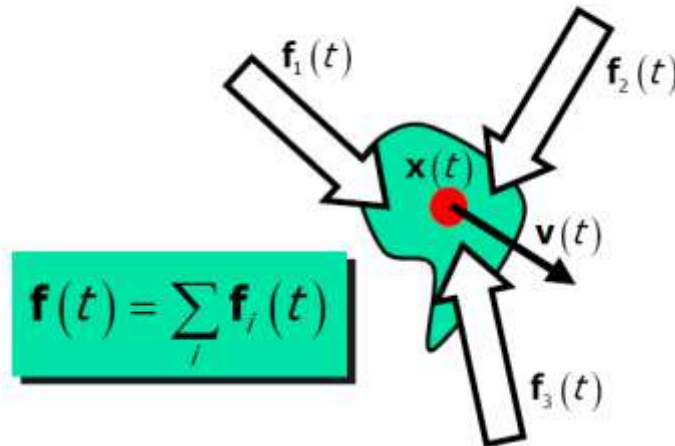
## Rigid-Body Dynamics

We could compute the motion of a rigid-body by computing the motion of all constituent particles. However, a rigid body does not deform and position of few of its particles is sufficient to determine the state of the body in a phase space. We'll start with a special particle located at the body's center of mass.

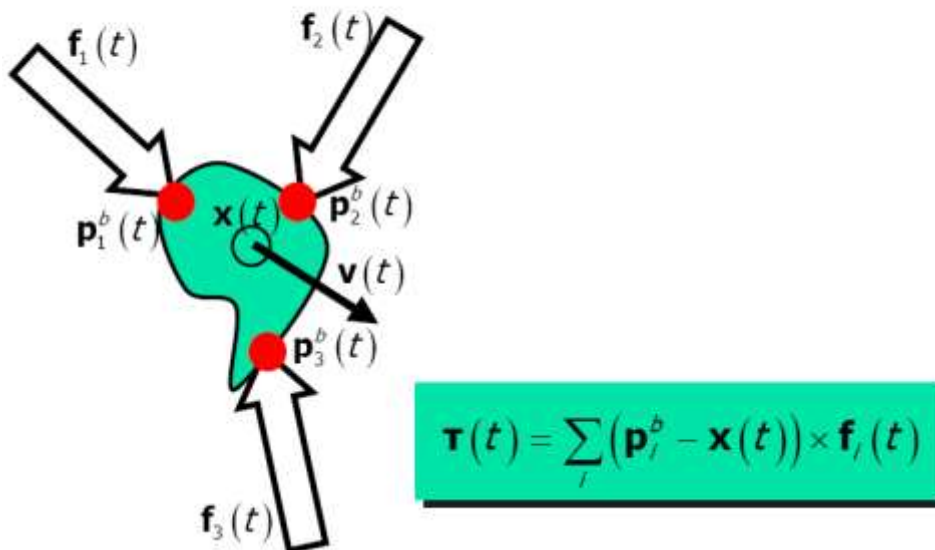


$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ ? \\ \mathbf{v}(t) \\ ? \end{bmatrix}$$

## Net Force



## Net Torque



## Rigid-Body Equation of Motion

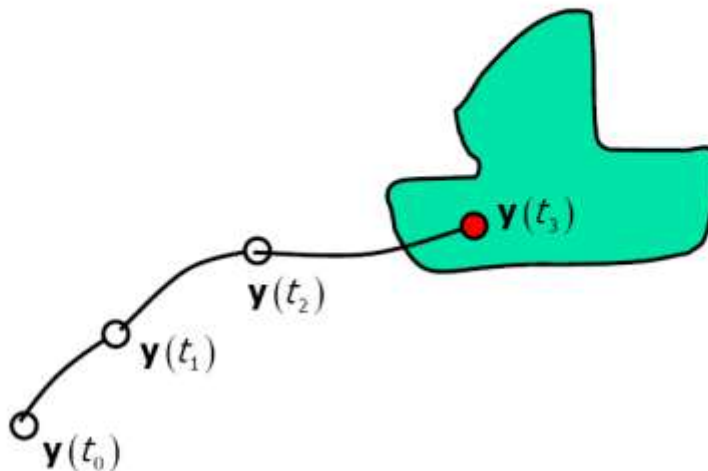
$$\frac{d}{dt} \mathbf{y}(t) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{R}(t) \\ M\mathbf{v}(t) \\ \mathbf{I}(t)\boldsymbol{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{R}(t) \\ \mathbf{f}(t) \\ \boldsymbol{\tau}(t) \end{bmatrix}$$

$M\mathbf{v}(t) \rightarrow$  linear momentum

$\mathbf{I}(t)\boldsymbol{\omega}(t) \rightarrow$  angular momentum

## Simulations with Collisions

Simulating motions with collisions requires that we detect them (collision detection) and fix them (collision response).

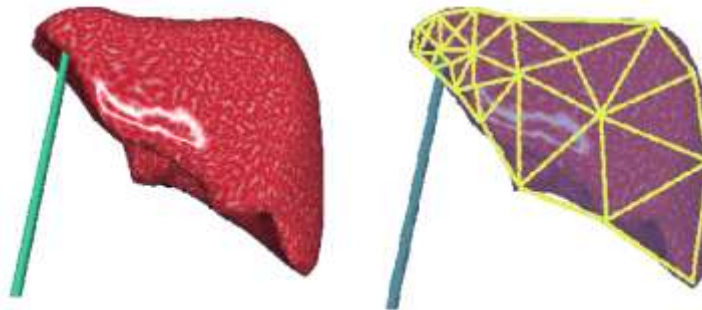


## Deformable models

Shape deforms due to contact

Discretize the problem

Animation runs with smaller time steps than rendering  
(between 1/10,000s and 1/100s)



Images from Debunne et al. 2001

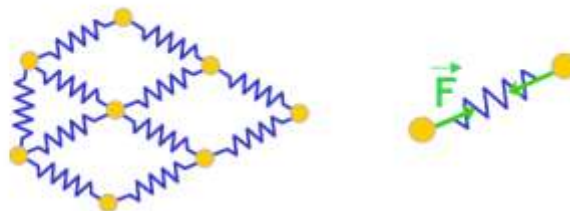
## Mass-Spring system

Network of masses and springs

Express forces

Integrate

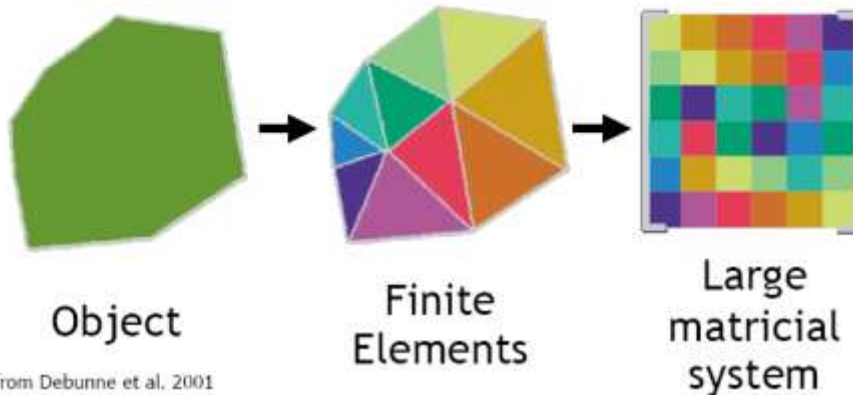
Deformation of springs simulates deformation of objects





## Implicit Finite Elements

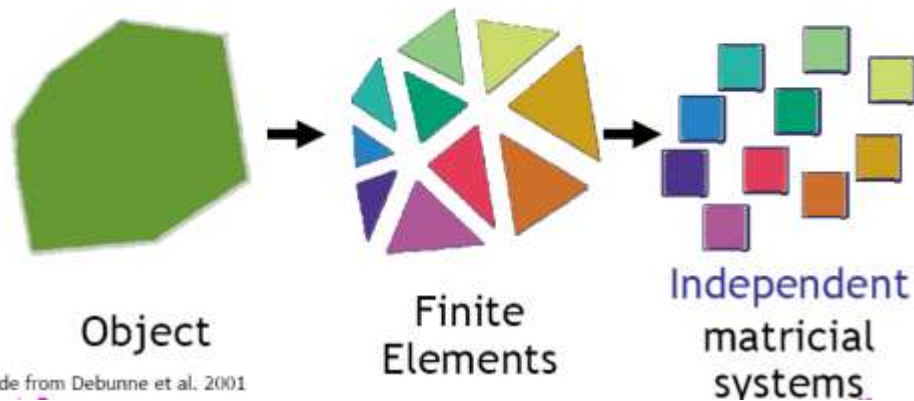
- Discretize the problem
- Express the interrelationship
- Solve a big system
- More principled than mass-spring



Slide from DeBunne et al. 2001

## Explicit Finite Elements

- Discretize the problem
- Solve locally
- Simpler but less stable than implicit



Slide from DeBunne et al. 2001

## Formally: Finite Elements

We are trying to solve a continuous problem

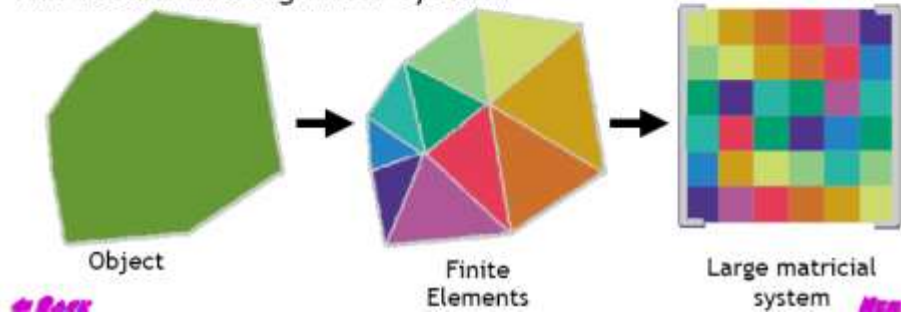
- Deformation of all points of the object
- Infinite space of functions

We project to a finite set of basis functions

- E.g. piecewise linear, piecewise constant

We project the equations governing the problem

This results in a big linear system



## Cloth animation

- Discretize cloth
- Write physical equations
- Integrate
- Collision detection

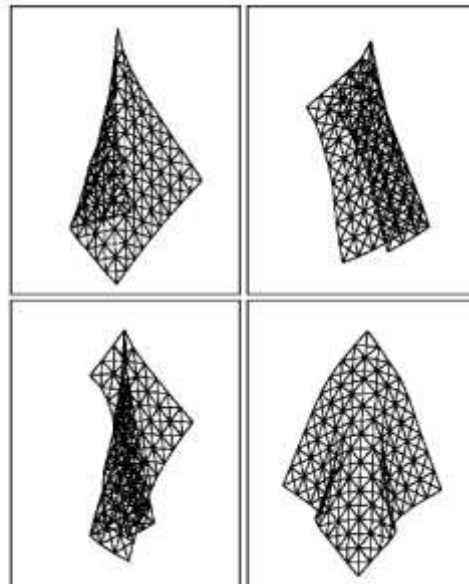


Image from Meyer et al. 2001.

# Fluid simulation

Discretize volume of fluid

- Exchanges and velocity at voxel boundary

Write Navier Stokes equations

- Incompressible, etc.

Numerical integration

- Finite elements, finite differences

Challenges:

- Robust integration, stability
- Speed
- Realistic surface

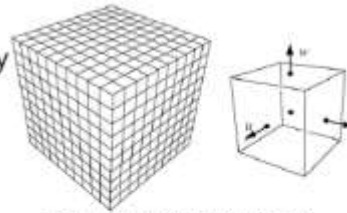


Figure from Fedkiw et al. 2001



Figure 1: Water being poured into a glass (85x120x55 grid cells).  
Figure from Enright et al. 2002

# Other physical animation

Aging of materials

- Metallic patina, rust
- Water flow
- Stone aging

[Dorsey 1996-1999]



← Back

Lecture 14



Slide 36

6.837 Fall 2002

## How do they animate movies?

Keyframing mostly

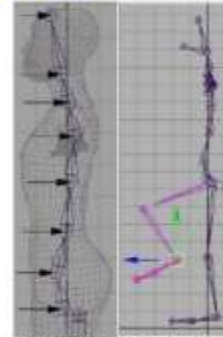
Articulated figures, inverse kinematics

Skinning

- Complex deformable skin
- Muscle, skin motion

Hierarchical controls

- Smile control, eye blinking, etc.
- Keyframes for these higher-level controls



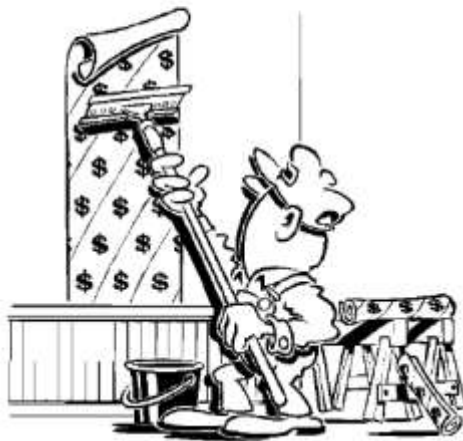
Images from the Maya tutorial

A huge time is spent building the 3D models, its skeleton and its controls

Physical simulation for secondary motion


- Hair, cloths, water
- Particle systems for "fuzzy" objects

## Next time: Texture mapping



## Earthquake Design

- 🌐 Earthquake ground motion
- 🌐 Damage estimation
- 🌐 Social & economic impact

**Lecture**


- Earthquake ground motion
- Earthquake engineering

**Practical**

- Damage estimation


**Previously (last term):**

- Specialist seminars, e.g., Arup, Paul Burton, Benfield



## Earthquake Ground Motion

- 🌐 Earthquake source
- 🌐 Intensity of earthquake
- 🌐 Attenuation of seismic waves
  - ✦ Geometric spreading
  - ✦ Anelastic attenuation
- 🌐 Local geology
  - ✦ Local geological setting
  - ✦ Soil / bedrock conditions
- 🌐 Effect on structures – infrastructure
  - ✦ Civil engineering c.f Arup
  - ✦ Building & planning codes



**Planning tools**

Seismic zoning maps

- Earthquake recurrence
- Ground accelerations

Shakemaps (GIS)

- Geology

Emergency response mapping

- Buildings/infrastructure

**SOIL AMPLIFICATION MEXICO CITY**

The graph plots Spectral Acceleration (g) on the y-axis (0 to 0.8) against Period (SECONDS) on the x-axis (0 to 4). Two curves are shown: a blue curve for 'Soft Clay' and a green curve for 'Rock and Hard Soil'. The 'Soft Clay' curve shows a significant peak at approximately 0.5 seconds, labeled 'SCT' and 'DRAIN'. The 'Rock and Hard Soil' curve is much lower and flatter. A note indicates 'Damping = 6%'. Source: Recorded Motions, Rume and Seed (1986).

**Conventional assessment of earthquake ground motion**

1985 Mexico City Earthquake:  
Railroad system

1989 Loma Prieta Earthquake

**Standard prediction techniques for strong ground motion**

<p><b>Geotechnical procedures</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Soil properties determination                     <ul style="list-style-type: none"> <li>Surface geology</li> <li>Drilling logs (stratigraphy)</li> <li>Borehole lateral loading (elastic mod)</li> <li>Caliper logging (borehole deformation)</li> <li>Electrical logging (moisture content)</li> </ul> </li> <li>• Velocity profiling                     <ul style="list-style-type: none"> <li>Downhole P &amp; S velocity logging</li> <li>Shallow seismic reflection</li> <li>Shallow seismic refraction (also Q)</li> </ul> </li> <li>• Laboratory tests                     <ul style="list-style-type: none"> <li>Specific gravity</li> <li>Grain size</li> <li>Moisture content</li> <li>Resonant column and torsion tests</li> <li>Rigidity and damping tests</li> <li>Triaxial ultrasonic wave velocities</li> </ul> </li> </ul> <p>Used in Japan and US for assessment</p>	<p><b>Mathematical approaches</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Equivalent linear estimation                     <ul style="list-style-type: none"> <li>Computer programs (SHAKE, LAYSOL)</li> <li>Linear viscoelastic methods</li> </ul> </li> <li>• Spectral methods                     <ul style="list-style-type: none"> <li>Semi-analytic</li> <li>Stochastic (Boore)</li> </ul> </li> <li>• Wave propagation                     <ul style="list-style-type: none"> <li>Finite difference</li> <li>Frequency / wavenumber</li> </ul> </li> <li>• 2-D methods                     <ul style="list-style-type: none"> <li>Finite-elements methods (elastic, viscoelastic, elastoplastic, non-linear)</li> <li>Boundary element methods</li> </ul> </li> <li>• 3-D methods                     <ul style="list-style-type: none"> <li>Wave propagation</li> </ul> </li> </ul>
--	--

### Theory of strong ground motion on soft ground

We saw in the Earth Materials topic that soils are highly non-linear – they are hybrids between solids and liquids

Rayleigh waves propagating through soils – Gilbert 1967

Retrograde elliptical motion

$L > 1$

Prograde elliptical motion

This is an elastic wave

Type of motion governed by dimensionless ratio:  $L = \rho g : 2\pi\mu/\lambda$

$\rho$  - density;  $g$  - accn due to gravity;  $\lambda$  - wavelength;  $\mu$  - rigidity

For short wavelengths, the larger is  $L$  and softer the material

### Propagation of Seismic Rayleigh Waves

Elastic surface waves – travel at velocities approaching shear wave speed, which is about 50 m/s in soft sediments

Wavelengths (1s period resonance for 7-15 stories) would be at least 50m. But collapsed buildings in Mexico City were 10-15m wide, implying speeds of only 5-10 m/s

So what is going on?

The energy for a Rayleigh propagating over a soil layer, with amplitude  $A$  and wavenumber  $k$ :

$$E = \int_{s=0}^{.Ak} \sigma d\varepsilon$$

Recall constitutive equation for soils

$$\sigma_s = G_0 \frac{\varepsilon_s \varepsilon_r}{\varepsilon_s + \varepsilon_r}$$

Integrating to get an energy per unit area:

$$W = G_0 \varepsilon_r^2 k^{-1} [\tau - \ln(1 + \tau)]$$

where  $\tau$  is the dimensionless peak strain

## Propagation of Gravity Waves

In fluid dynamics, **gravity waves** are those generated in a fluid medium or on an interface (e.g. the atmosphere or ocean) and having a restoring force of gravity or buoyancy.

An example is ocean surface. Longitudinal and transverse motions of the surface particles combine to undergo prograde elliptical motion. As the depth into the water increases, the amplitude decreases exponentially.

Energy per unit area of a gravity wave:

$$W = A^2 \rho g$$

when  $\tau > 1$  the energy of a gravity waves increases more rapidly with amplitude than the energy of an elastic Rayleigh wave.

So a gravity wave is more economic way to propagate a disturbance as for a given amount of energy the amplitude of the gravity wave is lower.



Frozen gravity wave from the 1987 Chiba earthquake



## Elastic Rayleigh Waves vs Gravity Waves

There is a phase transition from elastic Rayleigh waves. By continuing the above analysis we can show the transition depends on the parameter  $L = \rho g / \mu k$ .

As the strong motion begins, the soil is relatively rigid (rigidity  $\gg \mu$ ) and  $L$  is small.

But as the amplitude of the seismic motion rises, the shear velocity  $\beta = \sqrt{\mu/\rho}$  decays, since

$$L = g / (k \beta^2)$$

as  $L$  rises as  $\beta$  decreases. At a critical value of  $L$  the phase transition takes place. Elastic Rayleigh waves become gravity waves.

Conversely as the earthquake wanes,  $L$  traverses the critical value in the opposite direction and the gravity wave freezes.

The transition to gravity waves has profound implications for soils and buildings.



## Elastic Rayleigh Waves to Gravity Waves

Soils begin to lose their rigidity as soon as strong motion starts.

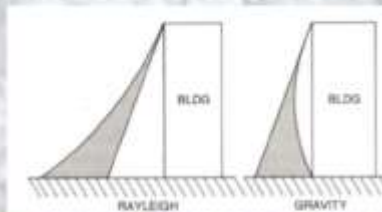
The shear velocity goes down and the wavelength of the surface waves decreases during the earthquake.

(Rotation is not measured!)

The destabilizing effect of gravity waves is familiar to anyone who has tried to stand up in a small boat.



1985 MEXICO EARTHQUAKE: NUEVA LEON APARTMENT BUILDINGS



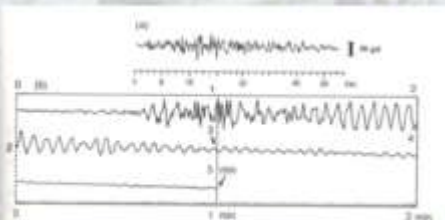
The rotational contribution (shaded) is either added or subtracted from the translation contribution. Retrograde motion tends to make a building behave as if it were broader at the base, while prograde motion decreases the base shear and increases the overturning moment.

## The Damping Effect

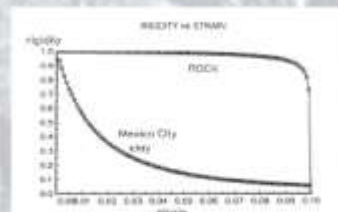
In civil engineering practice the *damping ratio*  $D$  (also known as the *damping factor*  $h$ ) is used. This is defined as the proportion of energy lost by internal dissipation to total wave energy:

$$D = D_{\max} \frac{\varepsilon_i \varepsilon_r}{\varepsilon_s + \varepsilon_r}$$

This is related to the seismologists' quality factor  $Q = 2\pi / D$ . A damping ratio of 4% (Mexico City clay) is equivalent to  $Q \sim 157$ . 5 mins duration is enough for clays to lose their shear rigidity.



Long duration strong motion accelerogram on soft ground for the Mexico City earthquake (> 5 mins)

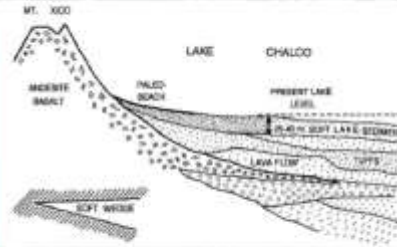
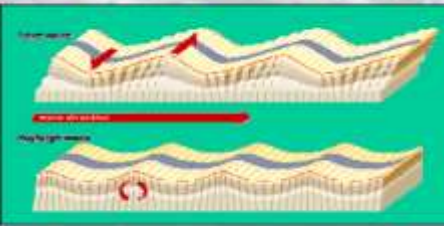


### The Effect of Rotation

The earth, the very emblem of solidity has moved beneath our feet like a thin crust over a fluid. *Voyage of the Beagle*

(Referring to the 1835 Chile earthquake experienced on deep sediments 300km from the epicentre.)

Soft sediments liquefy under due to rotations caused by the Rayleigh waves: peak ground acceleration is not the most important factor



Lake Chalco, a surviving outlier of the original lake that covered Mexico Valley during the Pleistocene. The top crust is of hardened soil due to seasonal wetting and drying. Seismic waves are trapped and amplified in the soft wedge



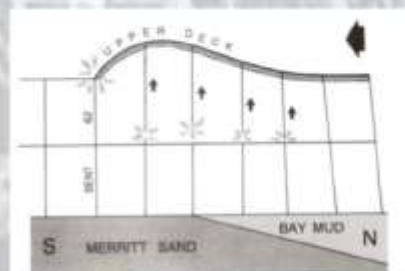
### The Cypress Structure: 1989 Loma Prieta Earthquake



Oakland, California

The Cypress Structure of Interstate Freeway 880 collapsed over a stretch of 50 bends. The upper deck fell on top of the lower deck.

Instant liquefaction occurred causing lifting-up and buckling of the freeway.



The upper deck of the freeway initially moved south and buckled against the "immovable object" (i.e., the section on the solid Merritt sand).



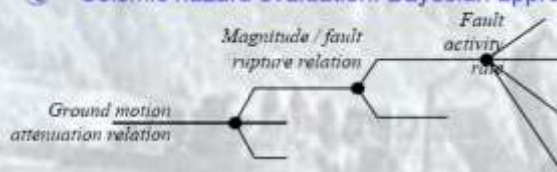
## Lomnitz's knowledge gap

- 🌐 **Gap between theory and practice**
- 🌐 **Strain not acceleration has long been suspected to be major control on damage**
  - Cyclic shear strains not the cyclic shear stresses control the pore fluid cycle and govern the associated reduction of soil stiffness during earthquakes
- 🌐 **Structures on soft soils are designed against seismic accelerations**
  - Assumes infinite wavelength, when actually the damage is done by surface waves of short wavelength
- 🌐 **Torsion and rocking are neglected in formal design as if they were the exception rather than the norm in causing damage**
  - Strong motion instruments are incapable of recording the rotational components of ground motion: so it is easy to forget
- 🌐 **The correlation between local geology and damage is striking**
  - But the link is not recognised buried beneath city tarmac. The damage to the Marina in 1989 SF, could have been predicted

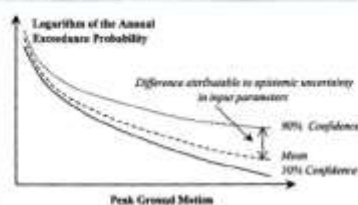


## Specific siting decisions

- 🌐 **Seismic hazard evaluation: Bayesian approach**



Logic-tree segment for a fault, showing three of its branches. The first corresponds to a choice of attenuation relations, the second to choice between event magnitude and fault rupture geometry and the third to a choice of four activity rates for the fault



Comparison of logic-tree seismic hazard curves. Disparities between the three curves result from epistemic uncertainty in hazard model parametrization. In contrast aleatory uncertainty is incorporated within each hazard curve

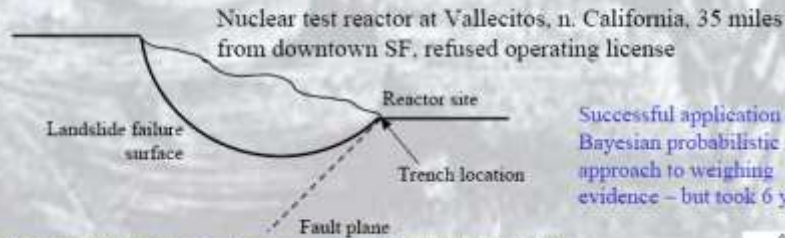


### Specific siting decisions

#### Guidelines from the International Atomic Energy Agency

A fault is considered *capable* if:

1. It shows evidence of past movement of a recurring nature, within such a period that it is reasonable to infer that further movement at or near the surface can occur
2. A structural relationship has been demonstrated to a known capable fault such that movement may cause movement of the other at or near the surface
3. The maximum potential earthquake associated with a seismogenic structure, as determined by its dimensions and geological and seismological history is sufficiently large and at such a depth that it is reasonable to infer that movement at or near the surface can occur

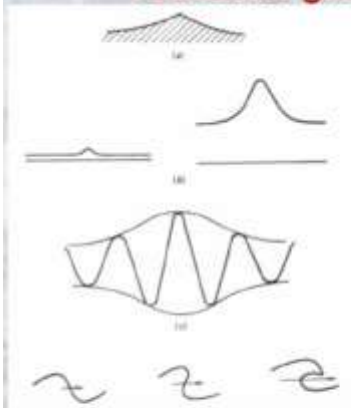


Successful application of Bayesian probabilistic approach to weighing evidence – but took 6 years

Ambiguity that can arise in the geological interpretation of the displacement observed in a trench



### Tsunami: gravity waves in water

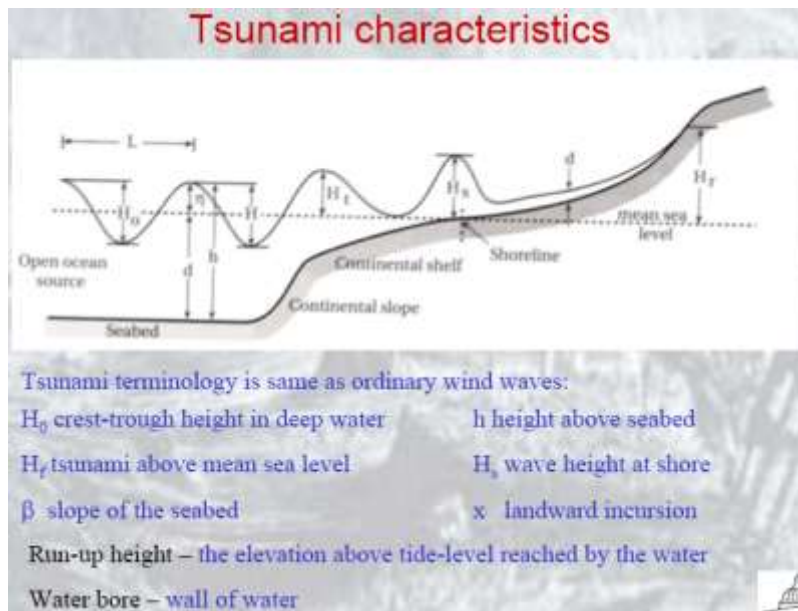
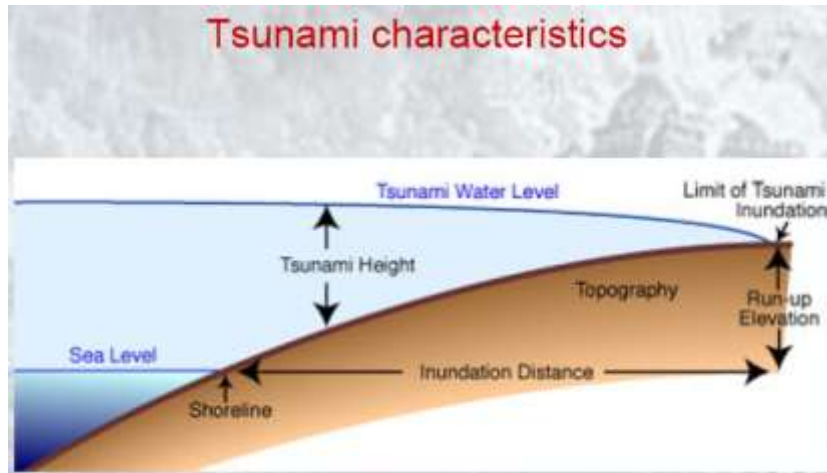


Hokusai: wind-generated wave, not tsunami wave. It has a special shape called an N-wave, characterized by a deep leading trough and a very peaked crest. Tsunami waves can take N-shape when shoaling and breaking

Nonlinear wave phenomena: solitary waves - solitons

Solitons are stable phenomena. A single soliton consists of one pulse that propagates with little dispersion. their amplitude in deep water may be 1m or less. In shallow water they can grow to heights of 30m or more.





## Tsunami characteristics

Tsunami wave characteristics are highly variable: in some cases the tsunami wave train consists of an initial peak that then tapers off in height exponentially over 4-6 hours, in other cases the tsunami wave train consists of a maximum peak well back in the sequence.

Tsunami typically have periods of 100-200s (1.6-33 mins) (referred to as the tsunami window) travelling at speeds ( $c$ ) of 160-250 m/s (600-900 km/hr) in the deepest part of the ocean (depth  $d$ ):

$$c = (gd)^{0.5}$$

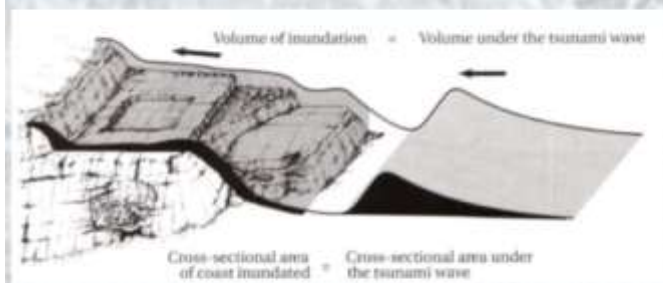
Because of the finite depth of the ocean and the mechanics of wave generation by earthquakes, a tsunami's wavelength is 10-500 km. These long wavelengths make tsunami profoundly different from swell or storm waves. Wave height to wavelength is very low.

As the wave propagates into shallow water (50m depths) we can use Airy wave theory (linear, trigonometric functions), but waves become dispersed.

## Run-up and inundation

The maximum run-up height of a solitary wave is approximately:

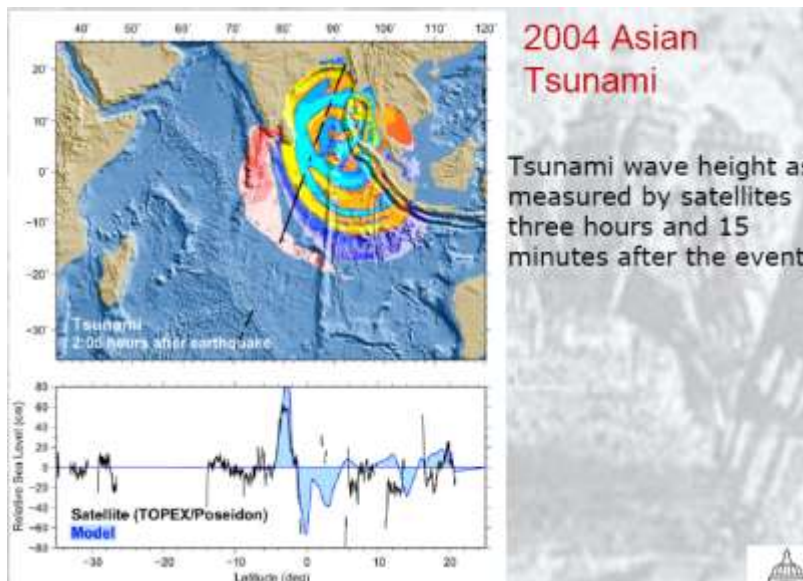
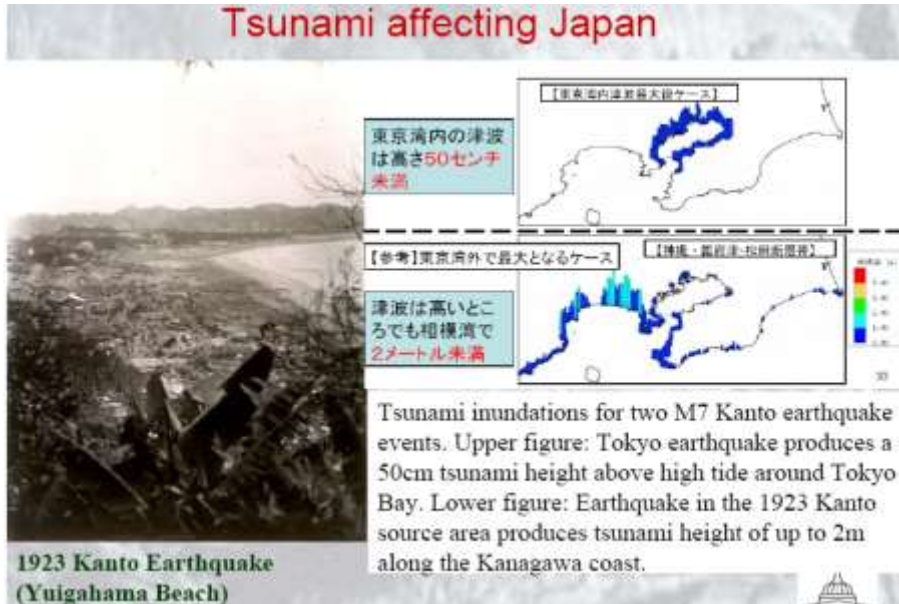
$$H_{r,max} = 2.83(\cot \beta)^{0.5} H_s^{1.25}$$



$n$  is the Manning parameter which describes the smoothness/roughness of the beach

Note the bigger the tsunami or the longer its period the greater the volume of water carried onshore. The maximum distance that run-up can penetrate inland is approximately:

$$x_{max} = H_s^{1.33} n^{-2} k \approx 1000 (0.5 H_0)^{1.33}$$



## Summary


- 🌐 Attenuation
  - ✦ Elastic attenuation: geometric spreading
  - ✦ Anelastic attenuation
- 🌐 Reduction of intensity with distance
  - ✦ Applications in the practical next week
  - ✦ Seismic hazard maps
- 🌐 Effect of local geology
  - ✦ Motion on soft ground
  - ✦ Shakemaps for building standards
  - ✦ Need to improve understanding still
- 🌐 Site specific assessment
  - ✦ Deterministic engineering approaches
  - ✦ Probabilistic approaches
- 🌐 To go further takes us into civil engineering





## Continuum -vs- Discontinuum

In **weak materials** such as highly weathered or closely fractured rock, and rock fills and soils, a strongly defined structural pattern **no longer exists**, and the shear failure surface develops along the line of least resistance. These slip surfaces generally take a **circular shape**.

→  ← 3 of 42 Dr. Erik Eberhardt EOOSC 433 (Term 2, 2005/06)


## Limit Equilibrium Analysis

The most widely applied analytical technique used in geotechnical analysis is that of **limit equilibrium**, whereby force or/and moment equilibrium conditions are examined on the basis of statics. These analyses require information about material strength, but **not** stress-strain behaviour.

The typical output from a limit equilibrium analysis is the "Factor of Safety":

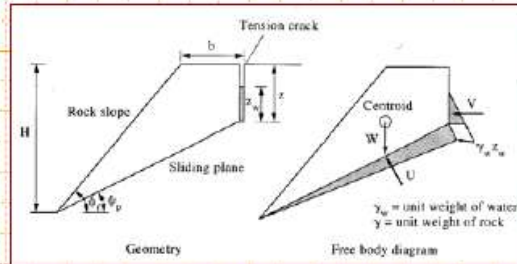
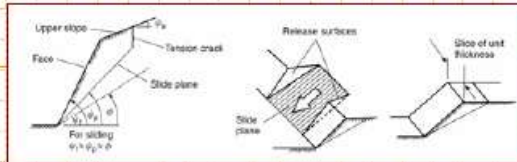
$$FS = \frac{\text{resisting forces}}{\text{driving forces}} = \frac{\text{shear strength}}{\text{shear stress}}$$

FS > 1.0 represents a stable situation  
FS < 1.0 denotes failure

→  ← 4 of 42 Dr. Erik Eberhardt EOOSC 433 (Term 2, 2005/06)

### Limit Equilibrium - Translational Sliding (Rock)

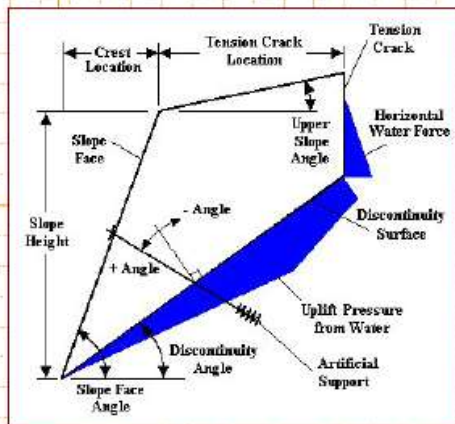
The solution for translational sliding requires that the strikes of the sliding plane and slope are parallel and that no end restraints are present. Furthermore, the solution incorporates the assumptions that the rock mass is impermeable, the sliding block is rigid, the strength of the slide plane is given by the Mohr-Coulomb shear criterion and that all forces pass through the centroid of the sliding block.



$$F = \frac{c'(H - z)\text{cosec}\psi_p + (W \cos \psi_p - U - V \sin \psi_p) \tan \phi'}{V \cos \psi_p + W \sin \psi_p}$$



### Limit Equilibrium - Translational Sliding (Rock)



Hoek & Bray (1981)

Factor of safety:

$$FS = \frac{[cA + (W(\cos\psi_p - a \sin\psi_p) - U - V \sin\psi_p + T \cos\theta) \tan\phi]}{[W(\sin\psi_p + a \cos\psi_p) + V \cos\psi_p - T \sin\theta]}$$

where

- H = height of slope face;
- $\psi_1$  = inclination of slope face;
- $\psi_2$  = inclination of upper slope face;
- $\psi_f$  = inclination of failure plane;
- b = distance of tension crack from slope crest;
- a = horizontal acceleration, blast or earthquake loading;
- T = tension in bolts or cables;
- $\theta$  = inclination of bolt or cable to normal to failure plane;
- c = cohesive strength of failure surface;
- $\phi$  = friction angle of failure surface;
- $\gamma$  = density of rock;
- $\gamma_w$  = density of water;
- $Z_w$  = height of water in tension crack;
- Z = depth of tension crack;
- U = uplift water force;
- V = driving water force;
- W = weight of sliding block; and
- A = area of failure surface.



## Effective Stress

High pore pressures may adversely affect the stability of a slope due to a decrease in effective stresses.

$$FS = \frac{\tau_f}{\tau} = \frac{(\sigma'_n \tan \phi + c)}{\tau} = W \sin \alpha$$

Factor of Safety

This intergranular stress, or **effective stress**, may be viewed as the sum of the contact forces divided by the total area.

12 of 42      Dr. Erik Eberhardt      EOSC 433 (Term 2, 2005/06)

## Effective Stress

High pore pressures may adversely affect the stability of a slope due to a decrease in effective stresses.

constant = Total Normal Stress,  $\sigma_n$

$$FS = \frac{\tau_f}{\tau} = \frac{(\sigma' \tan \phi + c)}{\tau}$$

$$\sigma' = \sigma_n - \mu$$

$$FS = \frac{\tau_f}{\tau} = \frac{([\sigma_n - \mu] \tan \phi + c)}{\tau}$$

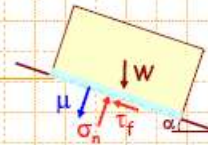
The **total normal stress** and **pore water pressure** may be calculated based on the overburden weight and location of the groundwater table.

The **effective stress** cannot be measured; it can only be calculated.

13 of 42      Dr. Erik Eberhardt      EOSC 433 (Term 2, 2005/06)

## Effective Stress

High pore pressures may adversely affect the stability of a slope due to a decrease in effective stresses.



$$FS = \frac{\int \tau_f}{\tau} = \frac{\int (\sigma_n - \mu \int \tau_f \tan \phi + c)}{\tau}$$

constant

The downslope and normal stress components remain relatively unchanged, but the increased pore pressure along any potential failure plane effectively decreases the effective normal stress component by acting against it (thereby decreasing the frictional strength component along the failure plane).



14 of 42

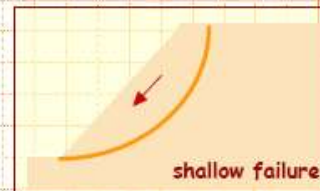
Dr. Erik Eberhardt

EOSC 433 (Term 2, 2005/06)

## Limit Equilibrium - Rotational Sliding

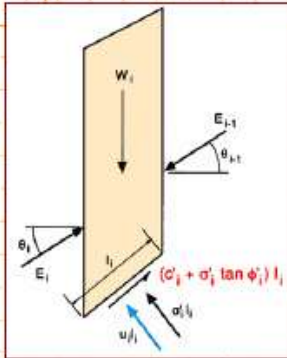
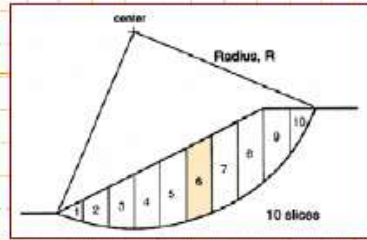
The fundamental concepts of the limit equilibrium method as applied to rotational/circular slip surfaces are (Morgenstern, 1995):

- ... slip mechanism results in slope failure;
- ... resisting forces required to equilibrate disturbing mechanisms are found from static solution;
- ... the shear resistance required for equilibrium is compared with available shear strength in terms of the Factor of Safety;
- ... the mechanism corresponding to the lowest FS is found by iteration;
- ... the Factor of Safety is assumed to be constant along the entire slip surface



## Limit Equilibrium - Method of Slices

The most commonly used solutions divide the mass above an assumed slip surface into vertical slices. This is to accommodate conditions where the soil properties and pore pressures vary with location throughout the slope.



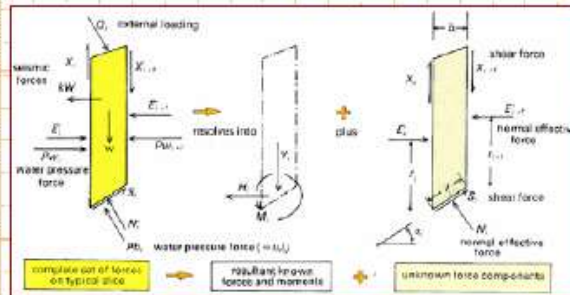
The forces acting on a typical slice,  $i$ , are:

- $W$  = weight of slice
- $c, \phi$  = mobilized shear forces at base of slice
- $\sigma' \cdot l$  = effective normal forces on base
- $u \cdot l$  = water pressure force on base
- $E$  = side forces exerted by neighboring slices.

## Method of Slices - Equations & Unknowns

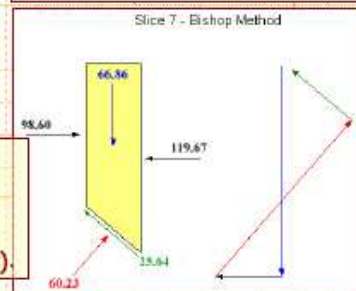
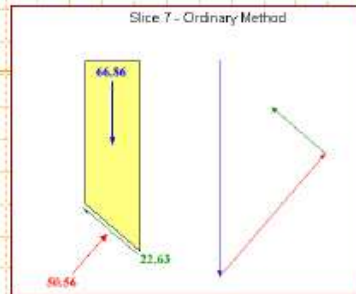
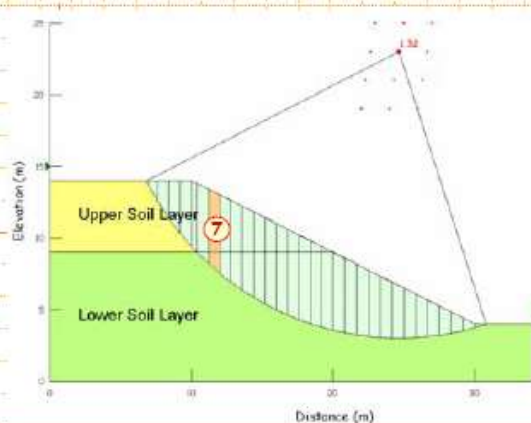
Analysing the summation of forces and/or moments for these slices (i.e.  $\Sigma M=0, \Sigma F_x=0, \Sigma F_y=0$ ), it is soon recognized that there are more unknowns than equations.

As such, the forces involved are statically indeterminate. Various methods have therefore been developed to make up the balance between the number of equilibrium equations and the number of unknowns in the problem.



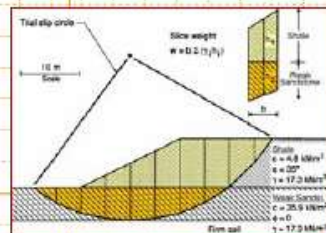
Equations	Condition
$n$	Moment equilibrium for each slice
$2n$	Force equilibrium in two directions (for each slice)
$n$	Mohr-Coulomb relationship between shear strength and normal effective stress
$4n$	Total number of equations
Unknowns	Variable
1	FOS
$n$	Normal force at base of each slice, $N'$
$n$	Location of normal force, $N'$
$n$	Shear force at base of each slice, $S_n$
$n-1$	Interslice force, $Z$
$n-1$	Inclination of interslice force, $\theta$
$n-1$	Location of interslice force (line of thrust)
$6n-2$	Total number of unknowns

## Method of Slices - Assumptions



Because different methods use different assumptions to make up the balance between equations and unknowns (to render the problem determinate), some methods do not satisfy all conditions of equilibrium (i.e. force and/or moment).

## Ordinary Method - Computation



Slide No.	W	l	$\alpha$	$\bar{c}$	$\bar{\phi}$	u	$N_1$	$N_2$
1	112	5.0	-92.6	25.9	0.0	0	-60	191
2	297	4.9	-22.6	35.0	0.0	0	-111	177
3	439	4.7	-13.6	35.9	0.0	0	-112	169
4	726	4.6	-4.0	35.0	0.0	0	-51	165
5	903	4.6	4.0	35.9	0.0	0	93	165
6	1,029	4.7	13.0	35.9	-0.9	0	231	169
7	1,003	4.9	22.0	35.5	0.0	0	376	177
8	818	5.3	32.0	35.9	0.0	0	433	191
9	687	6.7	43.0	4.8	35.0	0	400	333
10	129	5.6	95.0	4.8	35.0	0	105	79
11							0	0
12							0	0
13							0	0
14							0	0
15							0	0
$\Sigma =$							1274	1610

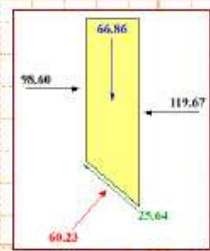
The "ordinary method" only resolves the forces acting at the base of the slice. This allows for the side forces to be neglected and for the problem to be easily solved.

$W$  = weight of slice - kNm  
 $c$  = cohesion intercept - kN/m<sup>2</sup>  
 $\phi$  = friction angle - degrees  
 $u$  = pore pressure - kN/m<sup>2</sup>  
 $\alpha$  = angle between base of slice and horizontal - degrees  
 $l$  = length of slip surface segments measured along base of slice - m  
 $N_1 = W \sin \alpha$   
 $N_2 = [W \cos \alpha - ul] \tan \phi + cl$   
 $F = \Sigma (N_2) / \Sigma (N_1) = 1.83$

## Bishop's Modified Method - Computation

Slice No.	W	l	α	c	φ	u	F <sub>a</sub> =								
							N <sub>1</sub>	N <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>				
1															
2															
3															
4															
5															
6															
7															
8															
9															
10															
11															
12															
13															
14															
15															
Σ =															
							F <sub>c</sub> =								

The "Bishop's Modified Method" includes interslice side forces, but requires an iterative procedure to determine the Factor of Safety.



W = weight of slice - kN/m  
 φ = friction angle - degrees  
 α = angle between base of slice and horizontal - degrees  
 l = length of slip surface segments measured along base of slice - m  
 F<sub>a</sub> = assumed F  
 F<sub>c</sub> = calculated F

c = cohesion intercept - kN/m<sup>2</sup>  
 u = pore pressure - kN/m<sup>2</sup>

N<sub>1</sub> = W sin α

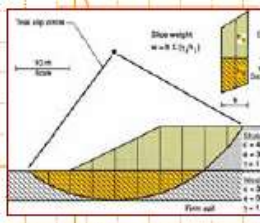
$$N_2 = \frac{\left[ \frac{W}{\cos \alpha} - ul \tan \phi + cl \right]}{1 + \tan \alpha \tan \phi}$$

$$F_c = \frac{\sum (N_2)}{\sum (N_1)} = \frac{F_a}{F_c}$$

Duncan (1996)

## Bishop's Modified Method - Computation

Slice No.	W	l	α	c	φ	u	F <sub>a</sub> =								
							N <sub>1</sub>	N <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>				
1	112	5.3	-32.0	35.9	0.0	0	-60	192	192	192					
2	297	4.9	-22.0	35.9	0.0	0	-111	177	177	177					
3	499	4.7	-13.0	35.9	0.0	0	-112	170	170	170					
4	725	4.5	-4.0	35.9	0.0	0	-51	165	165	165					
5	903	4.5	4.0	35.9	0.0	0	83	165	165	165					
6	1,026	4.7	13.0	35.9	0.0	0	231	170	170	170					
7	1,003	4.9	22.0	35.9	0.0	0	376	177	177	177					
8	818	5.3	32.0	35.9	0.0	0	433	192	192	192					
9	587	6.7	43.0	4.8	35.0	0	400	408	415	416					
10	128	5.6	55.0	4.8	35.0	0	105	108	111	111					
11															
12															
13															
14															
15															
Σ =							1,274	1,925	1,934	1,935					
							F <sub>c</sub> =								
								1.51	1.52	1.52					



W = weight of slice - kN/m  
 φ = friction angle - degrees  
 α = angle between base of slice and horizontal - degrees  
 l = length of slip surface segments measured along base of slice - m  
 F<sub>a</sub> = assumed F  
 F<sub>c</sub> = calculated F

c = cohesion intercept - kN/m<sup>2</sup>  
 u = pore pressure - kN/m<sup>2</sup>

N<sub>1</sub> = W sin α

$$N_2 = \frac{\left[ \frac{W}{\cos \alpha} - ul \tan \phi + cl \right]}{1 + \tan \alpha \tan \phi}$$

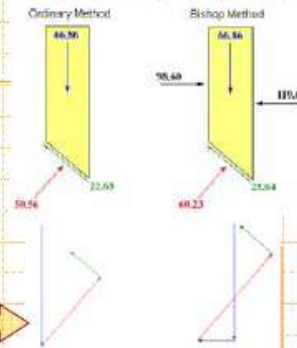
$$F_c = \frac{\sum (N_2)}{\sum (N_1)} = \frac{F_a}{F_c}$$

Duncan (1996)

## General Limit Equilibrium

1. Different methods use different assumptions to make up the balance between equations and unknowns to render the problem determinate; or
2. Some methods, such as the ordinary and Bishop's modified methods, do not satisfy all conditions of equilibrium (i.e. force and/or moment).

The degree to which the force polygon closes indicates whether force equilibrium is achieved.

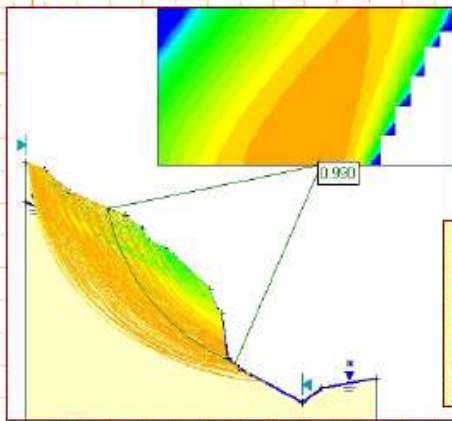


**General Limit Equilibrium (GLE):** Method that encompasses key elements of several Method of Slice solutions, calculating one Safety Factor based on moment equilibrium and one based on horizontal force equilibrium. The method also allows for a range of interslice shear-normal force conditions, making it the most rigorous of all the methods, satisfying both force and moment equilibrium, for circular and non-circular slip surfaces.

Krahn (2003)

## Computer-Aided Limit Equilibrium Analysis

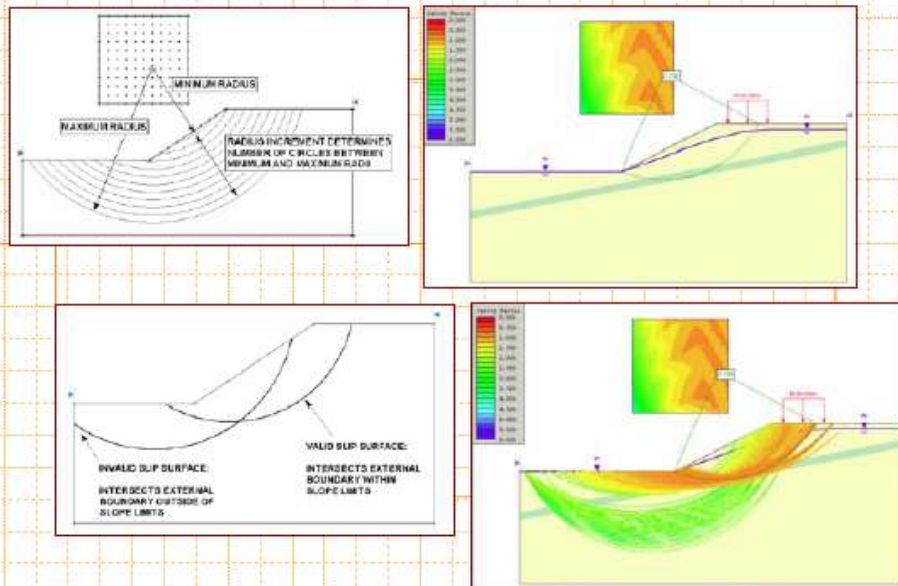
In cases where the shear failure surface is not known, its anticipated location can be found from analysis of the whole range of possible surfaces, and taking the actual surface to be that which gives the lowest factor of safety. This procedure can be quickly carried out using computer-based slip surface search routines.



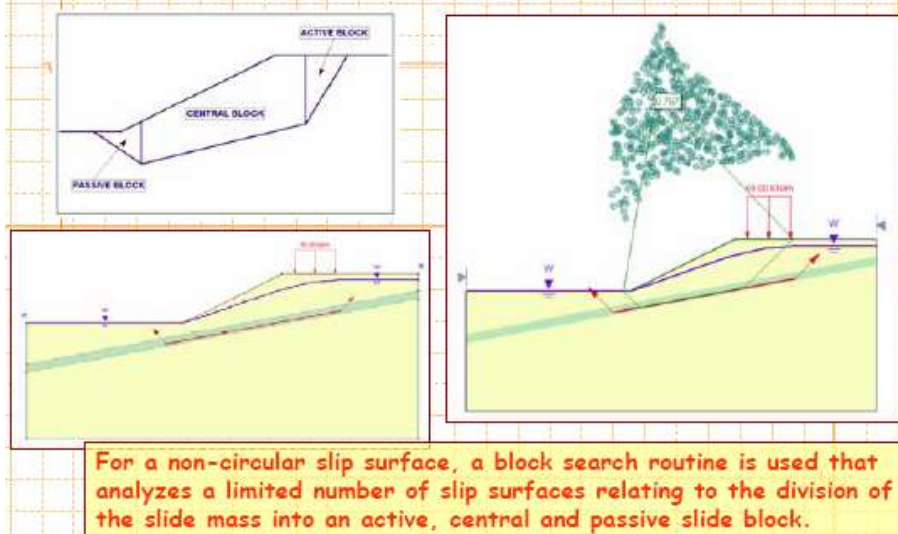
Hand or spreadsheet calculations can take hours to solve for a single slip surface, whereas a computer requires only seconds to solve for hundreds of potential slip surfaces.



## Critical Slip Surface Search



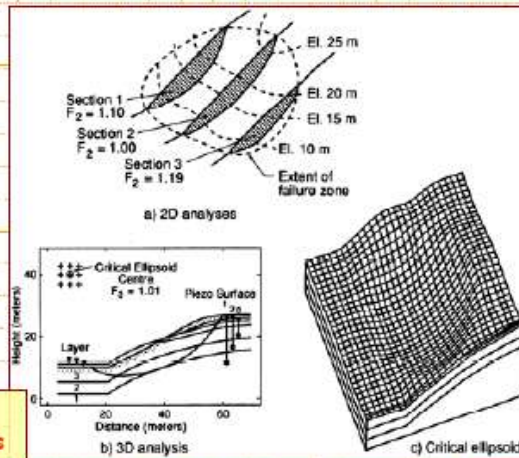
## Analysis of Non-Circular Slip Surface



## Advanced Limit Equilibrium Analysis - 3D

Most limit equilibrium formulations are two-dimensional even though actual slope failures are three-dimensional. However, there are a few 3-D limit equilibrium programs employing a "method of columns" approach.

The 3-D analysis program CLARA divides the sliding mass into columns, rather than slices as used in the 2-D analysis mode.



Hungre *et al.* (1989)

## Limit Equilibrium Analysis - Limitations

Although limit equilibrium methods are very useful in slope analysis, they do have their limitations and weaknesses:

1. The implicit assumptions of ductile stress-strain behaviour for the material (stress-strain relationships are neglected);
2. Most problems are statically indeterminate;
3. The factor of safety is assumed to be constant along the slip surface (an oversimplification, especially if the failure surface passes through different materials);
4. Computational accuracy may vary;
5. Allow only basic loading conditions (do not incorporate in situ stresses);
6. Provide little insight into slope failure mechanisms (do not consider stress state evolution or progressive failure).

## Uncertainty

Geotechnical engineers must deal with natural conditions that are largely unknown to the designer and must be inferred from limited and costly observations. The principal uncertainties have to do with the accuracy and completeness with which subsurface conditions are known and with the resistances that the materials will be able to mobilize (e.g. strength).

### Uncertainties

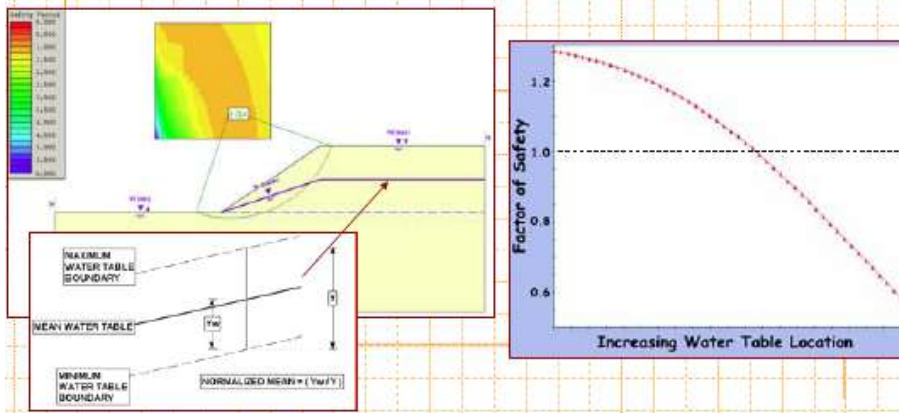
- Position of the critical slip surface
- Modeling of static and cyclic load history
- Strain-softening
- Progressive failure
- Testing procedures in reference tests
- Scale effect
- Rate of shear
- Stress conditions
- Redistribution of stresses
- Anisotropy
- Structure stiffness
- Model of soil profile
- Drainage assumptions
- Plane strain versus 3D analysis

The uncertainties in geotechnical engineering are largely inductive: starting from limited observations, judgment, knowledge of geology, and statistical reasoning are employed to infer the behavior of a poorly-defined universe.

In contrast, The uncertainties in structural and mechanical engineering are largely deductive: starting from reasonably well known conditions, models are employed to deduce the behavior of a reasonably well-specified universe.

## Sensitivity Analysis

Sensitivity analyses allow for the determination of the "sensitivity" of the safety factor to variation in the input data variables. This is done by varying one variable at a time, while keeping all other variables constant, and plotting a graph of safety factor versus the variable.

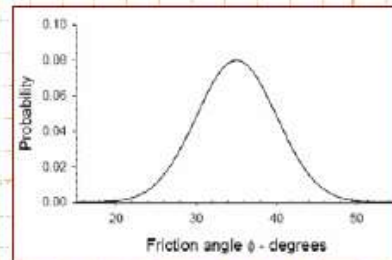


## Probability Analysis

Probabilistic analyses consider the variability of input parameters, and provide the probability of failure based on a given probability distribution function (defined through a known mean and standard deviations).

**Random variables:** Parameters like the angle of friction of rock joints, the uniaxial compressive strength of rock specimens, the inclination and orientation of discontinuities in a rock mass, etc. may not have a single fixed value in space but may assume any number of values. There is no way of predicting exactly what the value of one of these parameters will be at any given location. Hence these parameters are described as random variables.

**Probability distribution:** A probability density function (PDF) describes the relative likelihood that a random variable will assume a particular value. The area under the PDF is always unity.



## Probability Analysis

The **sample mean** (or expected value) indicates the centre of gravity of a probability distribution. A typical application would be the analysis of a set of results  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , from uniaxial strength tests carried out in the laboratory. Assuming that there are  $n$  individual test values  $x_i$ , the mean  $\bar{x}$  is given by:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

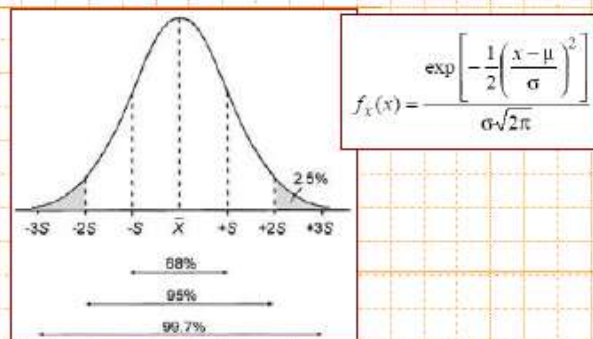
The **sample variance**  $s^2$  is defined as the mean of the square of the difference between the value of  $x_i$  and the mean value  $\bar{x}$ . Hence:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

The standard deviation  $s$  is the square root of the variance  $s^2$ . In the case of the commonly used normal distribution, 68% of the test values will fall within an interval defined by the mean  $\pm$  one standard deviation while 95% will fall within two standard deviations. A small standard deviation will indicate a tightly clustered data set while a large standard deviation will be found for a data set in which there is a large scatter about the mean.

## Probability Distribution Functions

The normal or Gaussian distribution is the most common type of probability distribution function and the distributions of many random variables conform to this distribution. It is generally used for probabilistic studies in geotechnical engineering unless there are good reasons for selecting a different distribution. Typically, variables which arise as a sum of a number of random effects, none of which dominate the total, are normally distributed.



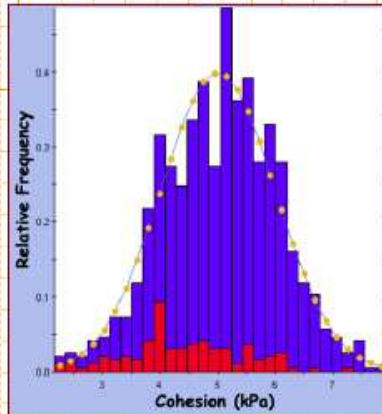
## Probability Distribution Functions

In addition to the commonly used normal distribution there are a number of alternative distributions which are used in probability analyses. Some of the most useful are:

- *Beta distributions* (Harr, 1987) are very versatile distributions which can be used to replace almost any of the common distributions and which do not suffer from the extreme value problems discussed above because the domain (range) is bounded by specified values.
- *Exponential distributions* are sometimes used to define events such as the occurrence of earthquakes or rockbursts or quantities such as the length of joints in a rock mass.
- *Lognormal distributions* are useful when considering processes such as the crushing of aggregates in which the final particle size results from a number of collisions of particles of many sizes moving in different directions with different velocities. Such multiplicative mechanisms tend to result in variables which are lognormally distributed as opposed to the normally distributed variables resulting from additive mechanisms.
- *Weibull distributions* are used to represent the lifetime of devices in reliability studies or the outcome of tests such as point load tests on rock core in which a few very high values may occur.

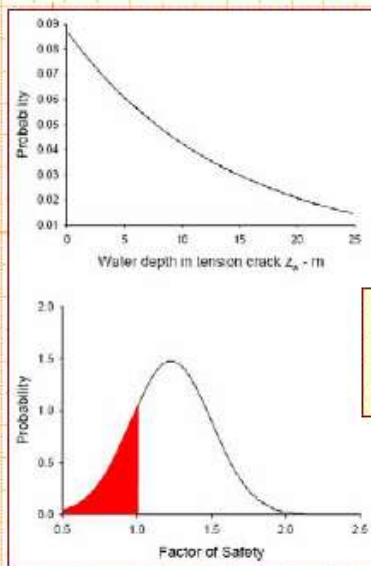
## Sampling - Monte Carlo Simulation

The Monte Carlo method uses random or pseudo-random numbers to sample from the probability distributions and, if sufficiently large numbers of samples are generated and used in a calculation such as that for a factor of safety, a distribution of values for the end product will be generated.



... Monte Carlo sampling (relative frequency) of cohesion taken as a random variable - 1000 samples, with those producing a factor of safety  $< 1$  highlighted in red.

## Probability of Failure



Remember that the PF and RI calculated for the Overall Slope, are not associated with a specific slip surface, but include the safety factors of all global minimum slip surfaces from the Probabilistic Analysis.

The Probability of Failure is simply equal to the number of analyses with safety factor less than 1, divided by the total Number of Samples.

The Reliability Index is an indication of the number of standard deviations which separate the Mean Safety Factor from the critical safety factor ( $= 1$ ).

## Case History - Usoi Rockslide Dam

In the winter of 1911, a massive 2.2 km<sup>3</sup> rockslide in the Pamir Mountains of southeastern Tajikistan was triggered by a magnitude 9.0 earthquake blocking the valley and damming the river running through it.



## Case History - Usoi Rockslide Dam



### Usoi Dam

volume = 2.2 km<sup>3</sup>  
length = 5 km  
average width = 3.2 km  
height from the lake bottom = 567 m

### Lake Sarez

length - 55.8 km  
maximum width - 3.3 km  
maximum depth - 500 m  
maximum water volume - 16,074 km<sup>3</sup>



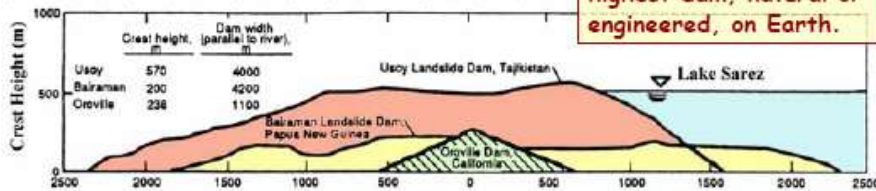
## Case History - Usoi Rockslide Dam

Practically immediately after the catastrophe, the question was raised whether Lake Sarez is dangerous or not :

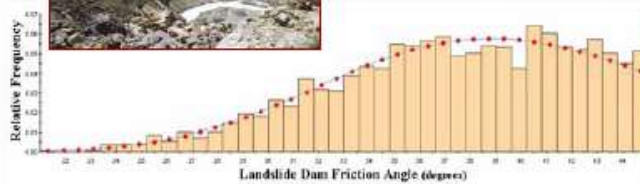
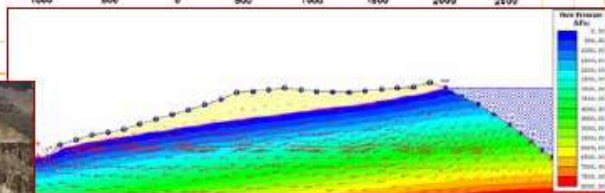
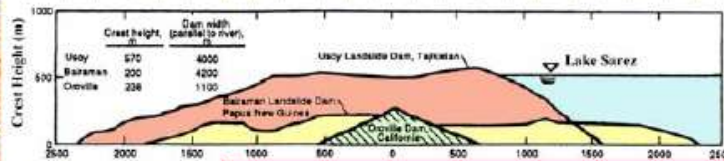
- will the accumulated water break through the dam, causing a catastrophic flood that would sweep 2000 km through the Amu Daryua River basin (inhabited by over 5 million people), demolishing everything on its way; or
- will the lake exist for a long time (several thousand years) in a normal regime of its evolutionary development.



The Usoi Dam is the highest dam, natural or engineered, on Earth.



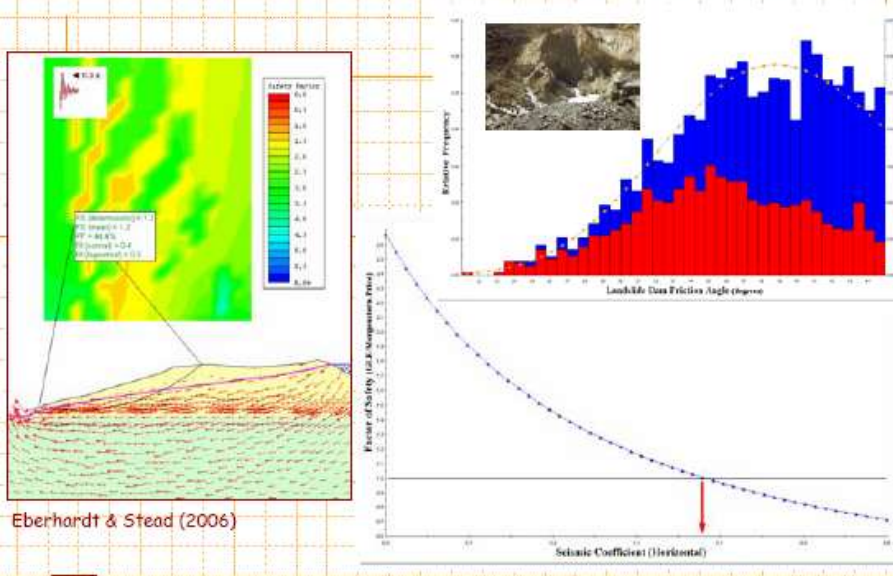
## Case History - Usoi Rockslide Dam



**Probabilistic analysis:**  
 'Gamma' distribution skewed towards lower values of  $\phi$ , with a mean value of  $40^\circ$ .



### Case History - Usui Rockslide Dam











## روش تعادل نیروها

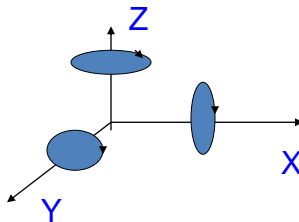
شاخصهای اصلی در این روش سه مورد است:

- تساوی جمع نیروهای همسو (تعادل نیروها)
- همسازی تغییر مکانها
- تاثیر رفتار مکانیکی ماده

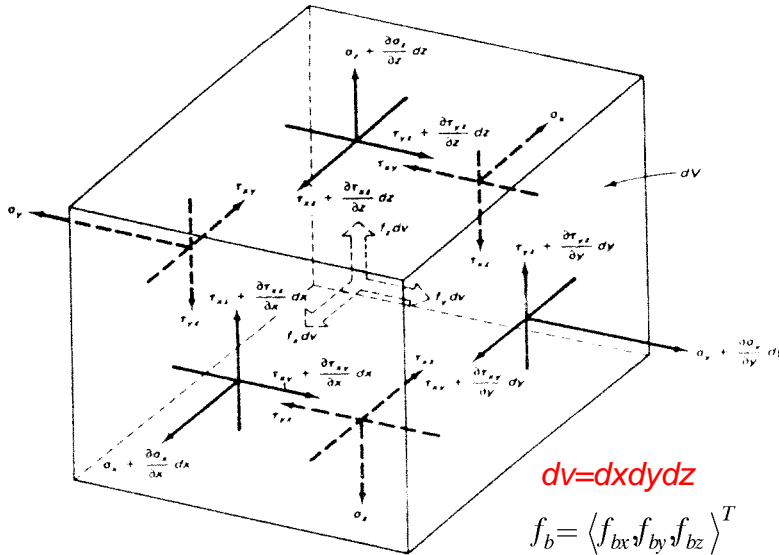
## تساوی جمع نیروهای همسو (تعادل نیروها)

- در یک محیط پیوسته پایا (ایستا) مجموع نیروها در هر امتداد چه بر روی کل محیط و یا هر ذره برابر صفر است. بنابراین در یک مختصات کارتزین  $X, Y, Z$  می توان نوشت:

- $\sum F_x = 0$
- $\sum F_y = 0$
- $\sum F_z = 0$
- $\sum M_{xx} = 0$
- $\sum M_{yy} = 0$
- $\sum M_{zz} = 0$



- برای در نظر گرفتن تعادل نیروها روی یک جزء  $dx, dy, dz$  ابتدا در قالب مهندسی لازم است تنشها روی چنین جزئی تعریف شود.



تعادل نیرو هادر جهت X:

$$-(\sigma_x dydz + \tau_{xy} dx dz + \tau_{xz} dx dy) + (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dydz + (\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy) dx dz + (\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz) dx dy + f_{bx} dx dy dz = 0$$

نتیجه معادلات تعادل در سه جهت :

ایستا

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_{bx} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_{by} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial y} + f_{bz} = 0$$

پویا

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_{bx} = a_x \rho$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_{by} = a_y \rho$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial y} + f_{bz} = a_z \rho$$

جرم مخصوص ماده:

## تبادل گشتاورها

حول سه محور مختصات گشتاورها بایستی برابر صفر شوند.

در صورتیکه گشتاور جرمی در جزء موجود باشد تانسور تنش نامتقارن و دارای نه مؤلفه می باشد.

در صورتیکه گشتاور جرمی در جزء موجود نباشد از صفر قرار دادن مجموعه گشتاورها تساوی های زیر حاصل می شود:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

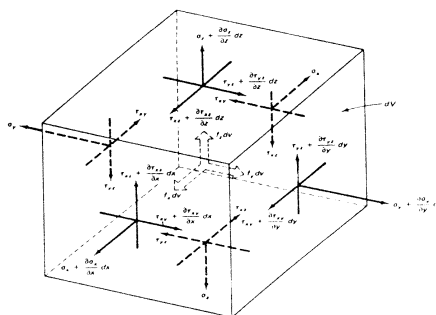
$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

در این صورت تانسور تنش متقارن و دارای شش مؤلفه می باشد.

## تانسور تنش

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$



در صورت عدم حضور گشتاورهای جرمی نه مؤلفه ماتریس فوق با استفاده از سه رابطه زیر به شش مؤلفه تقلیل پیدا می نماید.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$[\sigma] = \{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z + \tau_{xy} + \tau_{yz} + \tau_{zx}\}^T$$



## همسازی تغییر مکانها

ارضاء شرائط همسازی تغییر مکانها در یک محیط پیوسته بصورت پیدانشدن ترک - لغزش - جدایش یا شکست است.

به عبارتی یک ماده در پذیرش تغییر مکانها محدودیتی در خور تحمل خویش دارد.

محدودیت در تغییر مکانها را می توان بصورت وابستگی کرنشها بیان نمود.

### تانسور کرنش

در صورتی که تغییر مکان يك نقطه در فضاي سه بعدي با سه مؤلفه نسبتاً كوچك بصورت  $\{u, v, w\}^T$  تعريف شود، روابط بين کرنش مهندسي و تغيير مکانها بصورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.\end{aligned}$$

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\}$$

$$e_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\}$$

$$e_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\}$$

$$e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$$

$$e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y}$$

$$e_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$$

در صورتی که تغییرات کرنش از حدود 10٪ تجاوز نماید به هر یک از مؤلفه های فوق نمونه ای با مرتبه دوم بصورت زیر اضافه می شود. این تعاریف به **کرنشهای گرین (Green's strain)** موسوم بوده و در صورتیکه تغییر شکلهای سازه بزرگ

## معادلات ارضاء همسازی بر حسب کرنش

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}$$

$$\frac{2\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{2\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

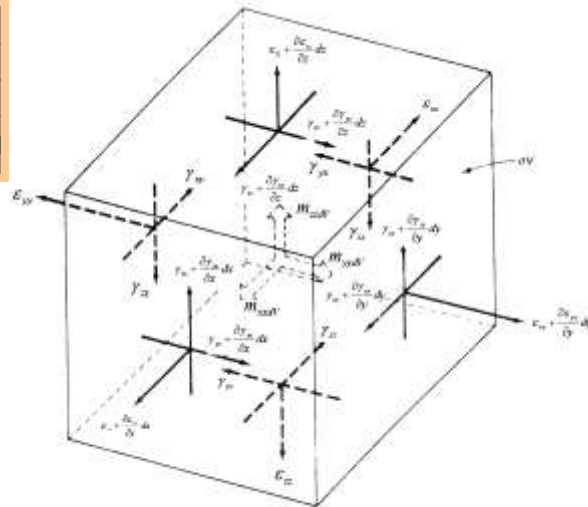
$$\frac{2\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

در صورتیکه سه مؤلفه نسبتاً کوچک  $u, v, w$  بین شش معادله تعریف کرنش حذف شود شش معادله بر حسب شش مؤلفه کرنش حاصل می شود که معادلات همسازی نامیده می شوند:

## تانسور کرنش

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

در صورت تقارن ماتریس تنش ماتریس کرنش نیز متقارن بوده و نه مؤلفه ماتریس فوق به شش مؤلفه تقلیل پیدا می نماید.



$$[\varepsilon] = \{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \gamma_{xy} + \gamma_{yz} + \gamma_{zx}\}^T$$

## رفتار مکانیکی ماده

رابطه تنش و کرنش نیازمند ماتریس رفتار مکانیکی ماده می باشد. این ماتریس به دو گونه زیر قابل تعریف است:

$$\{\sigma\} = [D^e] \{\varepsilon\}$$

$$\{\varepsilon\} = [C^e] \{\sigma\}$$

در صورتیکه ماتریس های تنش و کرنش دارای شش مؤلفه باشند اندازه ماتریسهای رفتار شش درشش است.

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ D_{51} & D_{52} & D_{53} & D_{54} & D_{55} & D_{56} \\ D_{61} & D_{62} & D_{63} & D_{64} & D_{65} & D_{66} \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix}$$

## رفتار ارتجاعی ماده

$[D^e]$  یک ماتریس قرینه بوده و برای یک ماده ناهمسان دارای 21- ضریب مستقل رفتاری ماده است. در صورتی که رفتار ماده همسان باشد این ماتریس بصورت زیر نوشته شده و تنها دارای 2 ضریب مستقل رفتاری می شود:

$$[D^e] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix}$$

## رفتار ارتجاعی خطی ماده

### اشکالات:

- در رفتار ارتجاعی خطی شکست ماده تعریف نشده است.
- در رفتار ارتجاعی خطی ماده خستگی وجود ندارد.
- در این حالت حلقه انرژی هیستریزس وجود ندارد.
- رفتار ماده به تاریخچه تنش ها و کرنش ها بستگی ندارد.

## رفتار ارتجاعی ماده ناهمسان

$$\{\sigma\} = [D^e] \{\varepsilon\}$$

$$\{\varepsilon\} = [C^e] \{\sigma\}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & \frac{\nu_{xy}}{E_y} & \frac{\nu_{xz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{yx}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & \frac{\nu_{yz}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{zx}}{E_x} & \frac{\nu_{zy}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} \end{bmatrix}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

## رفتار ارتجاعی ماده بر حسب مدول برش و تغییر حجم

$$\{\sigma\} = \{\sigma_V\} + \{\sigma_D\} = 3K\{\varepsilon_V\} + G\{\varepsilon_D\}$$

$$[D'] = \begin{bmatrix} k + \frac{4G}{3} & k - \frac{2G}{3} & k - \frac{2G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ k - \frac{2G}{3} & k + \frac{4G}{3} & k - \frac{2G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ k - \frac{2G}{3} & k - \frac{2G}{3} & k + \frac{4G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & k & k & 0 & 0 & 0 \\ k & k & k & 0 & 0 & 0 \\ k & k & k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4G}{3} & \frac{2G}{3} & \frac{2G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2G}{3} & \frac{4G}{3} & \frac{2G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2G}{3} & \frac{2G}{3} & \frac{4G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = [C^e]\{\sigma\}$$

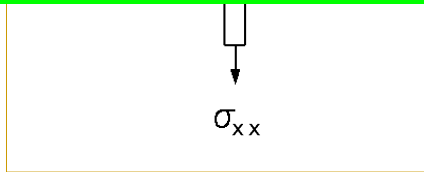
$$[C^e] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3G} + \frac{1}{9K} & \frac{1}{9K} & \frac{1}{6G} & \frac{1}{9K} & \frac{1}{6G} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9K} & \frac{1}{6G} & \frac{1}{3G} + \frac{1}{9K} & \frac{1}{9K} & \frac{1}{6G} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9K} & \frac{1}{6G} & \frac{1}{9K} & \frac{1}{6G} & \frac{1}{3G} + \frac{1}{9K} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{G} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{9K} & \frac{1}{6G} & \frac{1}{9K} & \frac{1}{6G} & \frac{1}{9K} & \frac{1}{6G} & 0 & 0 \\ \frac{1}{9K} & \frac{1}{6G} & \frac{1}{9K} & \frac{1}{6G} & \frac{1}{9K} & \frac{1}{6G} & 0 & 0 \\ \frac{1}{9K} & \frac{1}{6G} & \frac{1}{9K} & \frac{1}{6G} & \frac{1}{9K} & \frac{1}{6G} & 0 & 0 \\ \frac{1}{9K} & \frac{1}{6G} & \frac{1}{9K} & \frac{1}{6G} & \frac{1}{9K} & \frac{1}{6G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## حالت تنش یک محوری

$$\sigma_{xx} = \left(\frac{9KG}{3K+G}\right)\varepsilon_{xx} = E\varepsilon_{xx}$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\left(\frac{3K-2G}{6K+2G}\right)\varepsilon_{xx} = -\nu\varepsilon_{xx}$$

$$E = \frac{9KG}{3K+G}, \quad \nu = \frac{3K-2G}{6K+2G}$$



## حالت کرنش یک محوری

$$\sigma_{xx} = \left(K + \frac{4G}{3}\right)\varepsilon_{xx} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{xx}$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -\left(\frac{3K-2G}{3K+4G}\right)\sigma_{xx} = \left(\frac{\nu}{1-\nu}\right)\sigma_{xx}$$

$$\frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} = M = K + \frac{4G}{3} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} \neq 0$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 0$$

## حالت کرنش مسطح

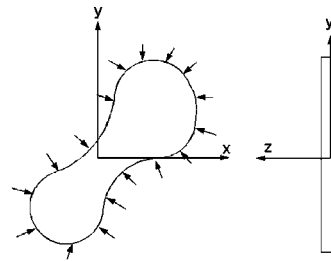
$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3K+4G}{3} & \frac{3K-2G}{3} & 0 \\ \frac{3K-2G}{3} & \frac{3K+4G}{3} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -\left(\frac{3K-2G}{3}\right)(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

يك لایه نازك از سازه طویل



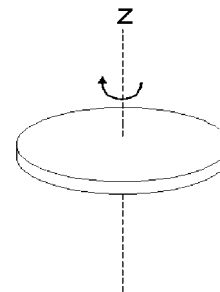
## حالت تنش مسطح

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9K} + \frac{1}{3G} & \frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} & 0 \\ \frac{1}{9K} - \frac{1}{6G} & \frac{1}{9K} + \frac{1}{3G} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

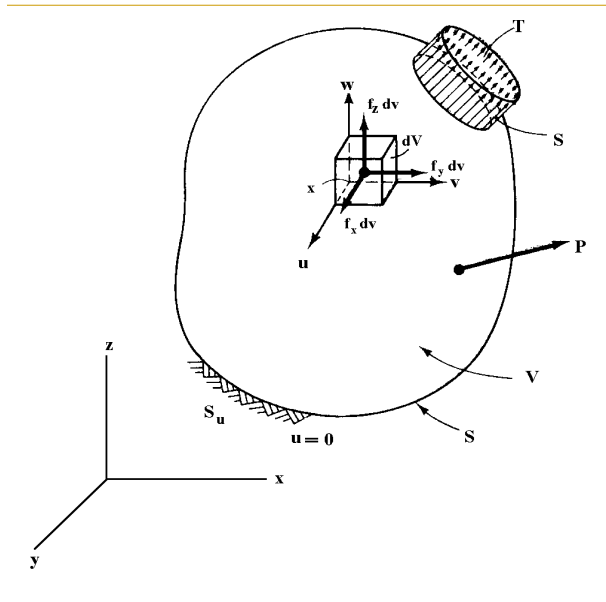
$$\varepsilon_{zz} = -\left(\frac{\nu}{1-\nu}\right)(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

دیسك چرخان



## سازه نوعی و بارهای عمومی



در صورتی که یک سازه عمومی سه بعدی جامد با حجم  $V$  و سطح جانبی  $S$  مطابق شکل در نظر گرفته شود، نیروهای جرمی، سطحی و متمرکز را می توان بصورت زیر برای آن در نظر گرفت:

## روش کمینه سطح انرژی

ارضای این روش در قالب عمومی سازه ها بصورت تساوی کار داخلی و خارجی مصطلح است.

$$\sum P \cdot \Delta = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} dV$$

**پایداری** یک سازه زمانی برقرار است که **کار خارجی** در اثر **نیروهای** اعمال شده و **تغییر شکلهای** حاصله با **انرژی** ناشی از **کرنشهای** همساز با آن **تغییر شکلهای** و همچنین **تنشهای** در تعادل با **نیروهای** اعمال شده برابری داشته باشند.



## روش انرژی

در این روش یک تغییر مجازی (در تغییر مکان یا نیرو) مورد نیاز است.

### 1- نظریه نیروهای مجازی:

در این روش در اثر اعمال **نیروهای مجازی** تغییر مکانها و کرنشهای واقعی محاسبه شده و در این سیستم مجازی معادله زیر صدق می کند:

$$\sum (\text{تغییر مکانهای واقعی}) \cdot (\text{نیروهای مجازی خارجی}) = \int_V dV (\text{کرنشهای واقعی}) \cdot (\text{تنشهای مجازی خارجی})$$

### 2- نظریه تغییر مکانهای مجازی:

در این روش در اثر اعمال **تغییر مکانهای مجازی** نیروها و تنشهای واقعی محاسبه شده و در این سیستم مجازی معادله زیر صدق می کند:

$$\sum (\text{تغییر مکانهای مجازی}) \cdot (\text{نیروهای واقعی خارجی}) = \int_V dV (\text{کرنشهای مجازی}) \cdot (\text{تنشهای واقعی})$$

(خ. ح.)

## انواع انرژی:

$$\Pi = \delta W_e + \delta Q - \delta U - \delta T \quad \Pi : \text{تغییر انرژی}$$

$$\Pi = \delta W_e - \delta U \quad \delta U : \text{پتانسیل}$$

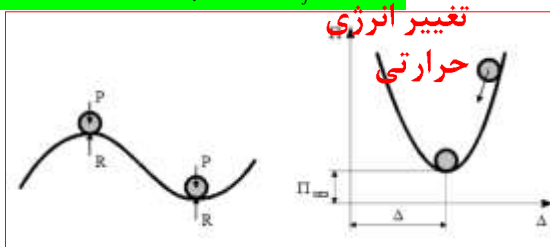
$$\delta U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T \cdot \sigma \, dV \quad \delta W_e : \text{تغییر انرژی داخلی}$$

$$\delta T = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{u})^2 \, dV \quad \delta T : \text{تغییر انرژی خارجی}$$

$$\delta Q : \text{تغییر انرژی جنبشی}$$

$\Pi - U - W$

$$\delta W_e = \int_V f_b \cdot u \, dV + \int_S f_s \cdot u \, dS + \sum_i P_i u_i + \sum_j M_j \theta_j$$



## شرط کمینه شدن سطح انرژی

تغییر در سطح انرژی پتانسیل در حالت عمومی بصورت زیر است:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \cdot \sigma \, dV - \int_V f_b \cdot u \, dV - \int_S f_s \cdot u \, dS - \sum_i P_i u_i - \sum_j M_j \theta_j$$

صفر شدن عبارت فوق نسبت به هریک از مجهولات سطح انرژی بهینه را ارائه نموده و دراصل معادل برابری کار داخلی و خارجی خواهد بود.

$$\Pi = \delta W_e - \delta U = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta W_e = \delta U$$

## کمینه شدن سطح انرژی در سیستم ایده آل

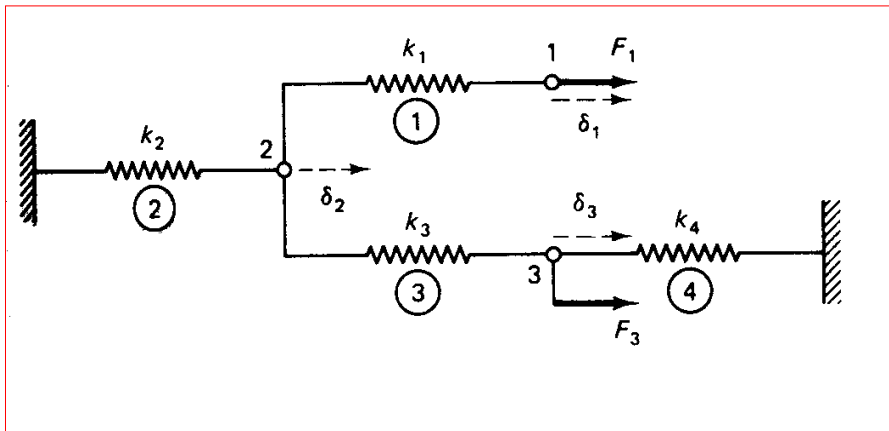
بافرض تشابه سازه بصورت مجموعه ای از فنر های گوناگون رابطه سطح انرژی بصورت زیر ارائه می شود:

$$\Pi = \frac{1}{2} \delta^T K \cdot \delta - \delta^T \cdot F$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta} = 0 \quad \Rightarrow \quad K \cdot \delta = F$$

## مثال : یگانگی پاسخ دو روش انرژی و تعادل

- یک مجموعه متشکل از فنربصورت زیر در حالت تعادل است. به دوروش یادشده معادلات حاکم برتعادل را بدست آورید.



## روش انرژی

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1\delta_1^2 + \frac{1}{2}k_2\delta_2^2 + \frac{1}{2}k_3\delta_3^2 + \frac{1}{2}k_4\delta_4^2 - F_1\hat{\delta}_1 - F_3\hat{\delta}_3$$

$$\delta_1 = \hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_2$$

$$\delta_3 = \hat{\delta}_3 - \hat{\delta}_2$$

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1 (\hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_2)^2 + \frac{1}{2}k_2\hat{\delta}_2^2 + \frac{1}{2}k_3 (\hat{\delta}_3 - \hat{\delta}_2)^2 + \frac{1}{2}k_4\hat{\delta}_4^2 - F_1\hat{\delta}_1 - F_3\hat{\delta}_3$$

شرط کمینه شدن سطح انرژی:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \hat{\delta}_i} = 0$$

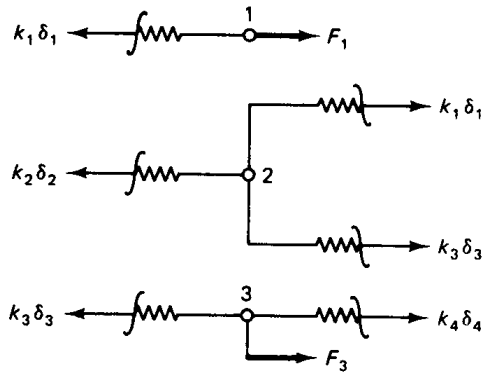
$$i=1,2$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \hat{\delta}_1} = k_1 (\hat{\delta}_1 - \hat{\delta}_2) - F_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\delta}_1 \\ \hat{\delta}_2 \\ \hat{\delta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

## روش تعادل

مجموعه فنرها را می توان بصورت زیر تجزیه نمود:



معادلات تعادل سه قسمت بصورت زیر است:

$$K_3 \cdot \delta_3 - K_4 \cdot \delta_4 = F_3$$

## قضیه ریلی-ریتز (Rayleigh-Ritz)

در این روش تغییر شکل یک سازه رامی توان حاصل از ترکیب یک سری از مولفه های ساده فرضی تغییر شکل دانست. با جمع درصدی از هریک از این تغییر شکلها می توان بطور تقریب به تغییر شکل واقعی سازه نزدیک شده و آن را در مهندسی بکار گرفت.

مولفه های تغییر شکل فرضی در طیف تغییر شکل بصورت زیر است:

$$u = \sum a_i \phi_i(x, y, z) \quad i = 1 \sim \ell$$

$$v = \sum a_j \phi_j(x, y, z) \quad j = \ell + 1 \sim m$$

$$w = \sum a_k \phi_k(x, y, z) \quad k = m + 1 \sim n$$

$$n > m > \ell$$

## استفاده از قضیه ریلی-ریتز در تحلیل سازه

ها

توابع را می توان درجهت سهولت از نوع چند جمله ای ساده (توابع مجاز و ممکن) در نظر گرفته جمله انرژی پتانسیل را برای آن بدست آورده و آنرا بر حسب مجهولات (درصد مشارکت مولفه های  $a_1, a_2, \dots, a_r$ ) آنرا کمینه نمود.

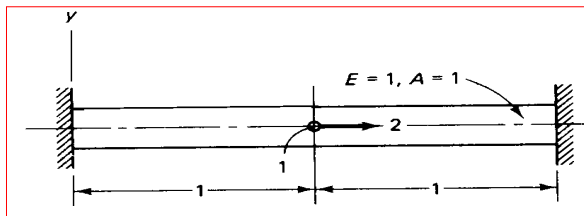
$$\Pi = \Pi(a_1, a_2, \dots, a_r)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, r$$

به این ترتیب به تعداد مجهولات مساوی  $(a_1, a_2, \dots, a_r)$  معادله حاصل می شود.

### مثال

- تیر ساده شکل زیر را بروش ریلی ریتز با استفاده از توابع پیشنهادی تحلیل



$$u = a_1 + a_2x + a_3x^2$$

$$a_1 = 0$$

$$a_1 + 2a_2 + 4a_3 = 0 \Rightarrow a_2 = -2a_3$$

$$u_1 = -a_3, \quad u = a_3(-2x + x^2)$$

$$\frac{du}{dx} = 2a_3(-1 + x)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T \cdot \sigma \, dV = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx = 2u_1$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^2 4a_3^2 (-1+x)^2 dx - 2(-a_3) = 2a_3^2 \int_0^2 (1-2x+x^2) dx + 2a_3 = 2a_3^2 \left( \frac{2}{3} \right) + 2a_3$$

شرایط حدی:

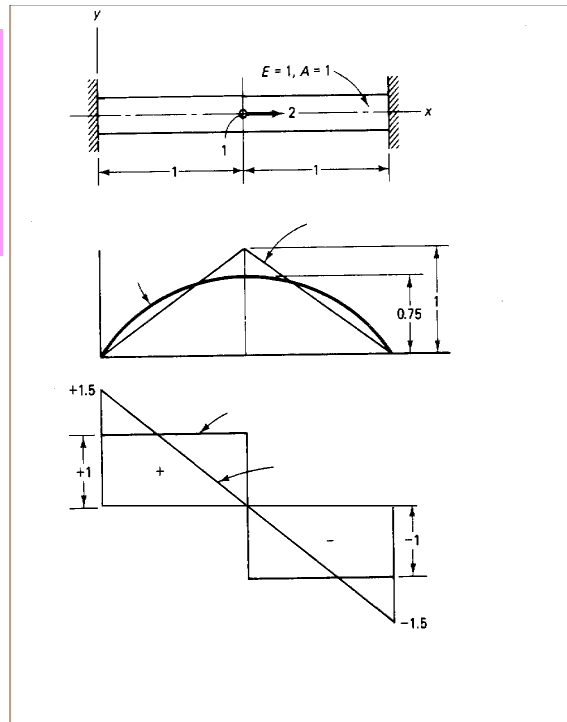
$$\begin{array}{|l} x=0 \\ u=0 \end{array}, \quad \begin{array}{|l} x=2 \\ u=0 \end{array}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_3} = 4a_3 \left(\frac{2}{3}\right) + 2 = 0$$

$$a_3 = -0.75, u_1 = -a_3 = 0.75$$

$$\sigma = E \frac{du}{dx} = 1.5(1-x)$$

مسئله برای رسیدن به  
جواب دقیق تر بستگی  
به چگونگی انتخاب  
تابع چند جمله ای  
داشته و در صورتی که  
این تابع نزدیک تر به  
تغییر شکل حقیقی  
سازه باشد جواب دقیق  
تر خواهد بود.



## روش اجزای محدود

### سازه های یک بعدی

#### حل مسائل یک بعدی به روش اجزای محدود

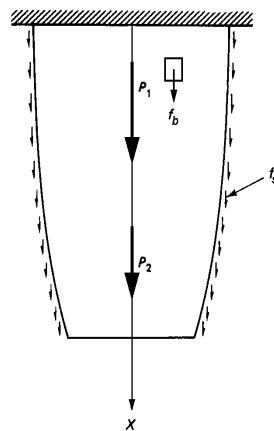
مسائلی یک بعدی تلقی می شوند که کلیه تغییرات درپهنه آنها تنها در یک جهت انجام گیرد. یعنی:

$$u = u(x), \sigma = \sigma(x), \varepsilon = \varepsilon(x), f_b = f_b(x)$$

$$f_s = f_s(x), p_i = p_i(x)$$

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{du}{dx}, \quad dV = Adx$$

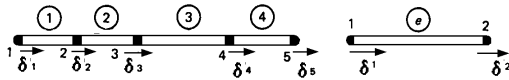
بافرض ضخامت واحد نیروهای جرمی برحسب  
نیروبرواحد سطح و نیروهای سطحی بر برحسب  
نیروبرواحد طول خواهد بود.



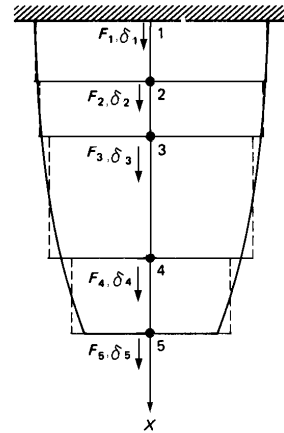
## تجزیه سازه یک بعدی به چهار جزئی

$$\delta = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5\}^T$$

$$F = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5\}^T$$



$$\hat{\delta}^e = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}$$



## شاخصها

جزئی	شماره گره در دستگاه مختصات موضعی		شماره گره در دستگاه مختصات کلی
e	1	2	
1	1	2	
2	2	3	
3	3	4	
4	4	5	

- درجات آزادی
- تغییر مکان گره ها
- نیروهای گرهی
- اتصال اجزای



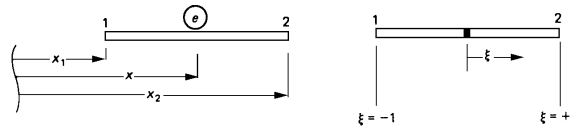
## مختصات

در مختصات کلی سازه  $x_1$  مختصات گره 1 و  $x_2$  مختصات گره 2 منظور می شود.

در جهت سهولت و حذف آثار اندازه جزئی برای محاسبات عمومی اجزای یک دستگاه مختصات نسبتی بر روی جزئی تعریف می شود.

برای جزئی بادوگره سروته رابطه زیر ارتباط دودستگاه مختصات تعریف شده را ارائه می کند:

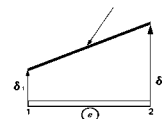
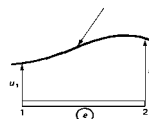
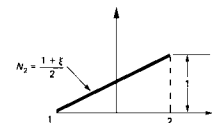
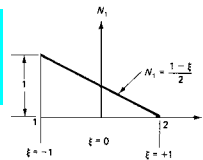
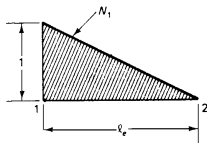
$$\xi = \frac{2}{x_2 - x_1} (x - x_1) - 1$$



## توابع شکل

ساده ترین تابع شکل قابل قبول یک چندجمله ای درجه یک است. با این انتخاب تغییر شکل جزئی با یک تغییرات خطی تقریب زده می شود.

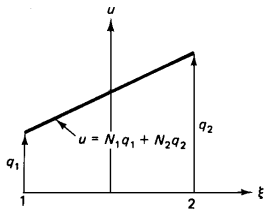
$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2}, \quad N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2}$$



در حالت عمومی دو شرط برای توابع شکل لازم به رعایت است:

- مشتق اول توابع شکل برای تغییر مکان (کرنش) بایستی وجود داشته باشد
- تغییر مکانهای حاصل از توابع شکل بایستی در مرزها و در طول جزئی پیوسته باشند.

## رابطه کلیدی روش اجزای محدود

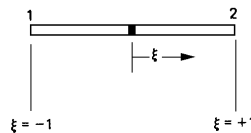
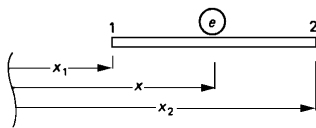


$$u = N \hat{\delta}^e \quad \hat{\delta}^e = \{\hat{\delta}_1^e, \hat{\delta}_2^e\}^T$$

$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2}, \quad N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2}$$

$$u = N_1 \hat{\delta}_1^e + N_2 \hat{\delta}_2^e = \begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{2} & \frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\delta}_1^e \\ \hat{\delta}_2^e \end{Bmatrix}$$

دستگاه مختصات کلی و موضعی:



رابطه بین دودستگاه  
مختصات:

$$\xi = \frac{2}{[X_2 - X_1]} [X - X_1] - 1$$

## جزئی همگام (Isoparametric)

در این گونه اجزای برای پیدا کردن مختصات هر نقطه در پهنه جزئی از توابع شکل یکسان در پیدا کردن مجهولات استفاده می شود.

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2$$

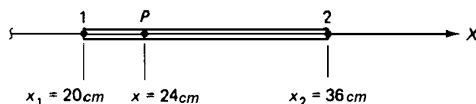
$$N_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2}, \quad N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2}$$

با بکارگیری توابع شکل خطی زیر رابطه معرفی شده بین دستگاههای مختصات کلی و موضعی بدست می آید.

$$\xi = \frac{2}{l_e} [X - X_1] - 1$$

## مثال ساده کاربرد توابع شکل

با توجه به شکل زیر مقادیر  $N_1$  و  $N_2$  را در نقطه  $P$  بدست آورده و اگر  $\delta_1 = 0.003$  و  $\delta_2 = -0.005$  مقادیر تغییر مکان را در نقطه  $P$  بدست آورید.



$$\xi = \frac{2}{x_2 - x_1} (x - x_1) - 1$$

$$\xi_p = \frac{2}{16} (24 - 20) - 1 = -0.5$$

$$N_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2}, \quad N_2(\xi) = \frac{1 + \xi}{2}$$

$$N_1 = 0.75, \quad N_2 = 0.25$$

$$u = N_1 \hat{\delta}_1^e + N_2 \hat{\delta}_2^e$$

$$u_p = 0.75(0.003) + 0.25(-0.005) = 0.001$$

## محاسبه کرنش

با توجه به تعریف کرنش مهندسی در حالت یک بعدی و روابط بدست آمده می توان نوشت:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad u = N_1 \hat{\delta}_1^e + N_2 \hat{\delta}_2^e = \left[ \frac{1 - \xi}{2} \quad \frac{1 + \xi}{2} \right] \begin{Bmatrix} \hat{\delta}_1^e \\ \hat{\delta}_2^e \end{Bmatrix} \quad \xi = \frac{2}{l_e} [X - X_1] - 1$$

$$\varepsilon = \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{l_e} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} \hat{\delta}_1^e \\ \hat{\delta}_2^e \end{Bmatrix}$$

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{x_2 - x_1}$$

$$\varepsilon = B \hat{\delta}^e$$

$$B = \frac{1}{x_2 - x_1} [-1 \quad 1]$$

همانگونه که مشاهده می شود با ثابت بودن مولفه های ماتریس  $B$  با کاربرد توابع شکل خطی کرنش ثابت در پهنه جزئی بدست می آید.

## محاسبه تنش

در صورت حاکمیت قانون هوک (نظریه ارتجاعی خطی) تنش از رابطه زیر بدست می آید:

$$\sigma = E\varepsilon = EB\delta^e$$

$$B = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

با ثابت بودن کرنش درپهنه جزئی تنش نیز ثابت خواهد بود.

## جمله انرژی پتانسیل وماتریس سختی

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^T \cdot \sigma \, dV - \int_V u^T \cdot f_b \, dV - \int_S u^T \cdot f_s \, dS - \sum_i u_i^T P_i$$

برای سازه:

$$\Pi = \sum_e \frac{1}{2} \int_e \varepsilon^T \cdot \sigma \, dV - \sum_e \int_e u^T f_b \, dV - \sum_e \int_e u^T f_s \, dS - \sum_i u_i^T P_i$$

برای اجزای:

$$U_e = \frac{1}{2} \int_e \varepsilon^T \sigma \, dx \quad \varepsilon = B\hat{\delta}^e, \sigma = EB\hat{\delta}^e \quad dx = \frac{x_2 - x_1}{2} d\xi \quad dx = \frac{\ell_e}{2} d\xi$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int_e \hat{\delta}^{eT} B^T EB\hat{\delta}^e \, dx = \frac{1}{2} \hat{\delta}^{eT} \int_e [B^T EBA \, dx] \hat{\delta}^e$$

$$U_e = \frac{1}{2} \hat{\delta}^{eT} \left[ A_e \frac{\ell_e}{2} E_e B^T B \int_{-1}^{+1} d\xi \right] \hat{\delta}^e \quad U_e = \frac{1}{2} \hat{\delta}^{eT} \times 2A_e \frac{L_e}{2} E_e \frac{1}{L_e^2} \begin{Bmatrix} -1 \\ +1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ +1 \end{Bmatrix} \hat{\delta}^e$$

$$U_e = \frac{1}{2} \hat{\delta}^T k_e \hat{\delta}^e \quad k_e = \frac{A_e E_e}{\ell_e} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$$

## بارمعادل گرهی

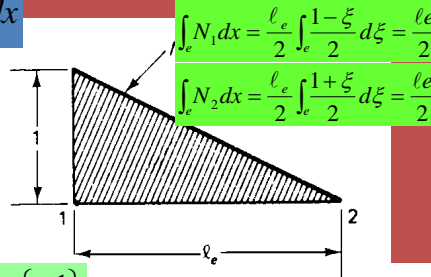
با توجه به محاسبه سختیها بطور متمرکز در گره ها لازم است نیروهای معادل گرهی ناشی از عملکرد هر یک از بارهای گسترده بادر نظر گرفتن تراز انرژی محاسبه شوند.

جمله انرژی بار جرمی:  $u = N_1 \hat{\delta}_1^e + N_2 \hat{\delta}_2^e$

$$\int_e u^T f_b A dx = A_e f_b \int_e (N_1 \hat{\delta}_1^e + N_2 \hat{\delta}_2^e) dx$$

$$\int_e u^T f_b A dx = \hat{\delta}^{eT} \begin{Bmatrix} A_e f_b \int_e N_1 dx \\ A_e f_b \int_e N_2 dx \end{Bmatrix}$$

$$\int_e u^T f_b A dx = \hat{\delta}^{eT} \frac{A_e \ell_e}{2} f_b \begin{Bmatrix} +1 \\ +1 \end{Bmatrix}$$



$$\int_e N_1 dx = \frac{\ell_e}{2} \int_e \frac{1-\xi}{2} d\xi = \frac{\ell_e}{2}$$

$$\int_e N_2 dx = \frac{\ell_e}{2} \int_e \frac{1+\xi}{2} d\xi = \frac{\ell_e}{2}$$

$$\int_e u^T f_b A dx = \hat{\delta}^{eT} f_b^e$$

$$f_b^e = \frac{A_e \ell_e}{2} f_b \begin{Bmatrix} +1 \\ +1 \end{Bmatrix}$$

جمله  $A_e \ell_e$  برابر حجم جزئی و  $f_b$  نیروی جرمی در واحد حجم است. بنابراین نیمی از نیروی جرمی جزئی به گره ابتدا و نیم دیگر به گره انتها وارد می شود.

## بارمعادل گرهی نیروهای سطحی

جمله انرژی بار سطحی:

$$\int_e u^T f_s dx = \hat{\delta}^{eT} \begin{Bmatrix} f_s \int_e N_1 dx \\ f_s \int_e N_2 dx \end{Bmatrix}$$

$$\int_e N_1 dx = \int_e N_2 dx = \frac{\ell_e}{2}$$

$$\int_e u^T f_s dx = \hat{\delta}^{eT} f_s^e$$

$$f_s^e = \frac{f_s \ell_e}{2} \begin{Bmatrix} +1 \\ +1 \end{Bmatrix}$$

جمله  $f_s \ell_e$  برابر کل بار سطحی بر روی جزئی و  $f_s$  نیروی سطحی در واحد طول است. بنابراین نیمی از نیروی کل بار سطحی بر روی جزئی به گره ابتدا و نیم دیگر به گره انتها وارد می شود.

## روش کمینه سطح انرژی

مولفه های ماتریس سختی  $k^e$  و نیروی  $f_b^e$  و  $f_s^e$  و  $P_i$  با توجه به شماره درجات آزادی شان در دستگاه مختصات کلی در ماتریس سختی کل سازه جمع شده و ماتریس سختی کل  $K$  و نیروی کلی  $F$  حاصل می شود.

$$\Pi = \sum \frac{1}{2} \hat{\delta}^T k_e \hat{\delta} - \sum \hat{\delta}^T f_b^e - \sum \hat{\delta}^T f_s^e - \sum \hat{\delta}_i^T P_i$$

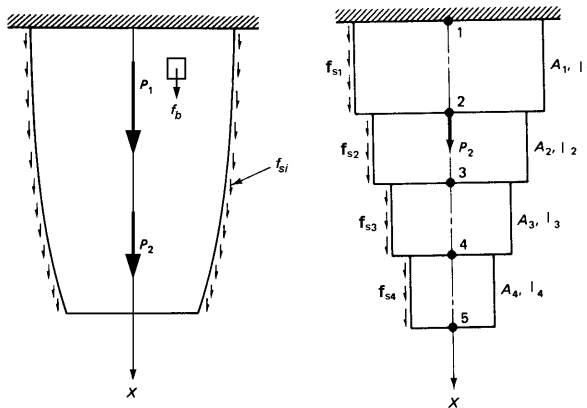
$$\Pi = \frac{1}{2} \delta^T K \delta - \delta^T F$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta} = K \delta - F = 0$$

شرط کمینه شدن سطح انرژی:

$$K \cdot \delta = F$$

## تجمیع ماتریس سختی اجزای



برای نشان دادن شرایط تجمیع در یک مثال ساده زیر تجمیع ماتریسها برای مثال زیر ارائه می شود.

$$\Pi = \sum_e \frac{1}{2} \int_e \epsilon^T \sigma dV - \sum_e \int_e u^T f_b dV - \sum_e \int_e u^T f_s dS - \sum_i u_i^T P_i$$

$$\Pi = \sum \frac{1}{2} \hat{\delta}^T k_e \hat{\delta} - \sum \hat{\delta}^T f_b^e - \sum \hat{\delta}^T f_s^e - \sum \hat{\delta}_i^T P_i$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \delta^T K \delta - \delta^T F$$

### ماتریس سختی جزئی 3 درمختصات کلی

$$U_3 = \frac{1}{2} \delta^{eT} k_3^e \delta^e \quad U_3 = \frac{1}{2} \{\delta_3^e, \delta_4^e\} \frac{E_3 A_3}{\ell_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_3^e \\ \delta_4^e \end{Bmatrix}$$

انرژی کرنشی  
جزئی 3:

$$U_3 = \{\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \hat{\delta}_3, \hat{\delta}_4, \hat{\delta}_5\} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_3 A_3}{\ell_3} & -\frac{E_3 A_3}{\ell_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E_3 A_3}{\ell_3} & \frac{E_3 A_3}{\ell_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\delta}_1 \\ \hat{\delta}_2 \\ \hat{\delta}_3 \\ \hat{\delta}_4 \\ \hat{\delta}_5 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3 \\ F_4 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

جمله انرژی  
در قالب  
ماتریس  
سختی کل  
سازه:

1 2 3 4 5

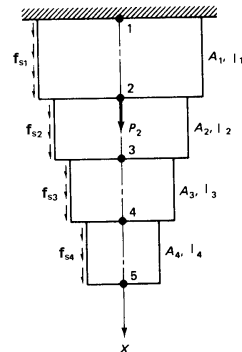
1  
2  
3  
4  
5

### تجميع ماتریس سختی اجزای

$$\sum_e k^e \rightarrow K$$

$$K = k_1^e + k_2^e + k_3^e + k_4^e$$

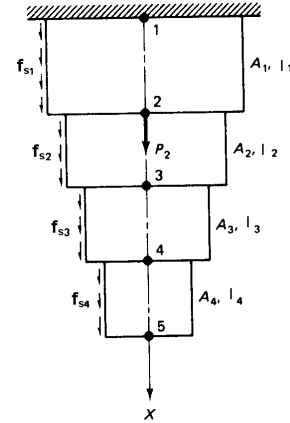
$$K = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{\ell_1} & -\frac{E_1 A_1}{\ell_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E_1 A_1}{\ell_1} & \frac{E_1 A_1}{\ell_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_2 A_2}{\ell_2} & -\frac{E_2 A_2}{\ell_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{E_2 A_2}{\ell_2} & \frac{E_2 A_2}{\ell_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_3 A_3}{\ell_3} & -\frac{E_3 A_3}{\ell_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{E_3 A_3}{\ell_3} & \frac{E_3 A_3}{\ell_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E_4 A_4}{\ell_4} & -\frac{E_4 A_4}{\ell_4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{E_4 A_4}{\ell_4} & \frac{E_4 A_4}{\ell_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



## تجمیع نیروهای اجزای

$$\sum_e (f_b^e + f_s^e) + P_i \longrightarrow F$$

$$F = \begin{Bmatrix} \left( \frac{A_1 l_1 f_{b1}}{2} + \frac{l_1 f_{s1}}{2} \right) \\ \left( \frac{A_1 l_1 f_{b1}}{2} + \frac{l_1 f_{s1}}{2} \right) + \left( \frac{A_2 l_2 f_{b2}}{2} + \frac{l_2 f_{s2}}{2} \right) \\ \left( \frac{A_2 l_2 f_{b2}}{2} + \frac{l_2 f_{s2}}{2} \right) + \left( \frac{A_3 l_3 f_{b3}}{2} + \frac{l_3 f_{s3}}{2} \right) \\ \left( \frac{A_3 l_3 f_{b3}}{2} + \frac{l_3 f_{s3}}{2} \right) + \left( \frac{A_4 l_4 f_{b4}}{2} + \frac{l_4 f_{s4}}{2} \right) \\ \left( \frac{A_4 l_4 f_{b4}}{2} + \frac{l_4 f_{s4}}{2} \right) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ P_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

خصوصیات ماتریس  $K$ 

- بزرگی ماتریس  $K$  در اندازه  $(N \times N)$  است.  $N$  تعداد گره هاست.  
(هر گره دارای یک درجه آزادی است.)

-  $K$  یک ماتریس قرینه و همچنین نواری است. یعنی برای ذخیره آن بصورت فشرده نیاز به یک ماتریس  $(N \times NBW)$  می باشد.

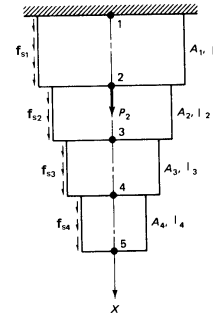
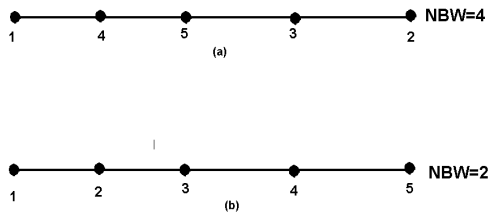
$$K_{comp.} = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{l_1} & -\frac{E_1 A_1}{l_1} \\ \frac{E_1 A_1}{l_1} + \frac{E_2 A_2}{l_2} & -\frac{E_2 A_2}{l_2} \\ \frac{E_2 A_2}{l_2} + \frac{E_3 A_3}{l_3} & -\frac{E_3 A_3}{l_3} \\ \frac{E_3 A_3}{l_3} + \frac{E_4 A_4}{l_4} & -\frac{E_4 A_4}{l_4} \\ \frac{E_4 A_4}{l_4} & 0 \end{bmatrix}$$

$NBW = \max(\text{بزرگترین اختلاف بین شماره درجات آزادی در اتصال جزئی}) + 1$



## مثال پهنای ماتریس فشرده (NBW)

برای سازه یک بعدی با چهارجزی:



$$NBW_{(a)} = \max(3-2, 5-3, 5-4, 4-1) + 1 = 4$$

$$NBW_{(b)} = \max(5-4, 4-3, 3-2, 2-1) + 1 = 2$$

به این ترتیب اهمیت شماره گذاری گره ها ازبابت اشغال فضای حافظه در کامپیوتر روشن می شود.

## شرایط حدی سازه

شرایط حدی بصورت محدودیت در تغییرمکان درحالت عمومی بصورت زیر است:

$$\delta_{P_1} = a_1, \quad \delta_{P_2} = a_2, \quad \delta_{P_3} = a_3, \quad \dots, \delta_{P_r} = a_r$$

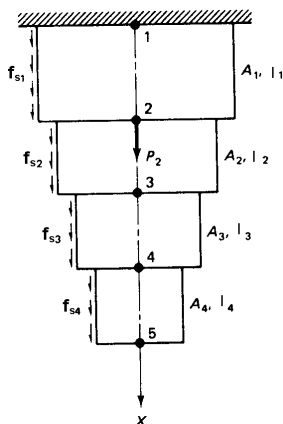
تغییرمکان در جهات آزادی  $P_1$  و  $P_2$  و  $P_3$  برابر  $a_1$  و  $a_2$  و  $a_3$  می باشند. در این صورت  $f$  عکس العمل تکیه گاهی

$$\delta_1 = 0$$

در سازه موجود است.

$$\delta_1 = 0 \text{ در مثال ارائه شده یک شرط حدی بصورت}$$

وجود دارد.



## چگونگی اعمال شرایط حدی سازه

برای مثال یک بعدی ارائه شده باشد با شرط حدی  $\delta_1=0$  با در نظر گرفتن  $N$  درجه آزادی می توان نوشت:

$$\delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N\}^T$$

$$F = \{F_1, F_2, \dots, F_N\}^T$$

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots & K_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{N1} & K_{N2} & K_{N3} & \dots & K_{NN} \end{bmatrix}$$

انرژی پتانسیل بصورت زیر خواهد بود:

$$\Pi = \frac{1}{2} \delta^T K \delta - \delta^T \cdot F$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta} = 0 \Rightarrow K \cdot \delta = F$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \{ \delta_1 K_{11} \cdot \delta_1 + \delta_1 K_{12} \cdot \delta_2 + \dots + \delta_1 K_{1N} \cdot \delta_N +$$

$$\delta_2 K_{21} \cdot \delta_1 + \delta_2 K_{22} \cdot \delta_2 + \dots + \delta_2 K_{2N} \cdot \delta_N +$$

$$\dots +$$

$$\delta_N K_{N1} \cdot \delta_1 + \delta_N K_{N2} \cdot \delta_2 + \dots + \delta_N K_{NN} \cdot \delta_N \} -$$

$$- \{ \delta_1 \cdot F_1 + \delta_2 \cdot F_2 + \dots + \delta_N \cdot F_N \}$$

### اعمال شرط حدی $\delta_1=0$

$$\Pi = \frac{1}{2} \{ a_1 K_{11} \cdot a_1 + a_1 K_{12} \cdot \delta_2 + \dots + a_1 K_{1N} \cdot \delta_N +$$

$$\delta_2 K_{21} \cdot a_1 + \delta_2 K_{22} \cdot \delta_2 + \dots + \delta_2 K_{2N} \cdot \delta_N +$$

$$\dots +$$

$$\delta_N K_{N1} \cdot a_1 + \delta_N K_{N2} \cdot \delta_2 + \dots + \delta_N K_{NN} \cdot \delta_N \} -$$

$$- \{ a_1 \cdot F_1 + \delta_2 \cdot F_2 + \dots + \delta_N \cdot F_N \}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta_i} = 0 \quad ; \quad i = 2, 3, \dots, N$$

جمله انرژی حذف شده است.

نتیجه مشتق گیری از جمله انرژی N-1 معادله ارائه می نماید.

معادلات حاصل:

$$\begin{cases} K_{22}\delta_2 + K_{23}\delta_3 + \dots + K_{2N}\delta_N = F_2 - K_{21}a_1 \\ K_{32}\delta_2 + K_{33}\delta_3 + \dots + K_{3N}\delta_N = F_3 - K_{31}a_1 \\ \dots \\ K_{N2}\delta_2 + K_{N3}\delta_3 + \dots + K_{NN}\delta_N = F_N - K_{N1}a_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & K_{24} & \dots & K_{2N} \\ K_{32} & K_{33} & K_{34} & \dots & K_{3N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{N2} & K_{N3} & K_{N4} & \dots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 - K_{21}a_1 \\ F_3 - K_{31}a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ F_N - K_{N1}a_1 \end{Bmatrix}$$

ماتریس ضرائب در معادلات فوق  $N-1 \times N-1$  بوده که در اصل همان ماتریس سختی  $N \times N$  اصلی است که سطر و ستون اول آن با شرط  $\delta_1 = 0$  حذف شده است.

## حل معادلات

معادلات بدست آمده بصورت  $F = K \cdot \delta$  قابل حل می باشند. ماتریس کوچک شده  $K$  یک ماتریس مثبت معین است. در صورتیکه با اعمال جواب  $\delta_1 = 0$  ماتریس اصلی تکین می باشد. با بدست آمدن  $\delta$  عکس العمل را در گره 1 می توان از تعادل در آن گره از رابطه زیر بدست آورد.

$$K_{11}\delta_1 + K_{12}\delta_2 + \dots + K_{1N}\delta_N = F_1 + R_1$$

در این معادله  $\delta_1$  و  $\delta_2$  و  $\dots$  و  $\delta_N$  معلوم و  $F_1$  برابر بار اعمال شده در تکیه گاه و معلوم می باشند. نتیجتاً عکس العمل  $R_1$  از رابطه زیر بدست می آید:

$$R_1 = K_{11}\delta_1 + K_{12}\delta_2 + \dots + K_{1N}\delta_N - F_1$$

مقادیر  $K_{11}$  و  $K_{12}$  و  $\dots$  و  $K_{1N}$  در جمله فوق در اصل سطر اول ماتریس  $K$  است که می بایست جداگانه ذخیره شود.

## خلاصه

در صورتیکه شرایط حدی بصورت زیر برقرار باشد:

$$\delta_{p_1} = a_1, \quad \delta_{p_2} = a_2, \quad \delta_{p_3} = a_3, \quad \dots, \delta_{p_r} = a_r$$

لازم است:

1- سطرهای  $p_1$  و  $p_2$  و .....  $p_r$  از ماتریس سختی کلی  $K$  و بردار کلی  $F$  را جداگانه ذخیره نمود.

2- سطرها و ستونهای هم شماره را از ماتریس  $K$  حذف و ذخیره نموده تا باقیمانده ماتریس سختی بصورت  $N-r \times N-r$  حاصل شده و همچنین بردار  $F$  نیز بصورت  $N-r \times 1$  در آیند. مولفه های بردار  $F$  بصورت زیر خواهد بود.

$$F_i = F_i - (K_{i,p_1} a_1 + K_{i,p_2} a_2 + \dots + K_{i,p_r} a_r)$$

برای هر درجه آزادی  $i$  که تکیه گاه نباشد می توان رابطه زیر را حل نمود:

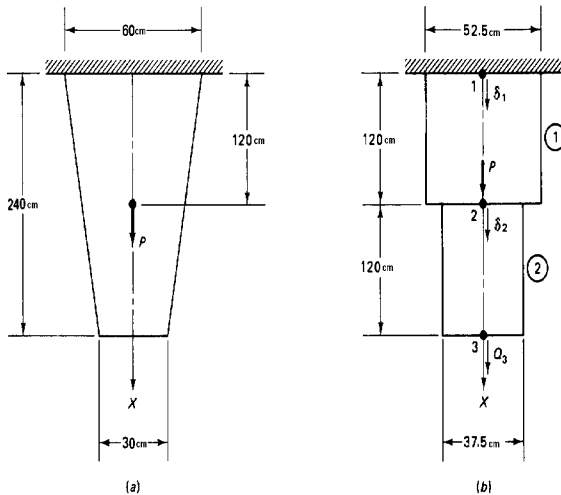
$$F = K \cdot \delta$$

3- برای هر جزئی بردار تغییر مکان را می توان از بردار کلی با توجه به شماره گره ها بدست آورده و در نتیجه تنش در اجزای را محاسبه نمود.

4- با توجه به سطرها و ستونهای ذخیره شده در بند 1 می توان عکس العمل تکیه گاهی را از روابط زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned} R_{p_1} &= K_{p_1 1} \delta_1 + K_{p_1 2} \delta_2 + \dots + K_{p_1 N} \delta_N - F_{p_1} \\ R_{p_2} &= K_{p_2 1} \delta_1 + K_{p_2 2} \delta_2 + \dots + K_{p_2 N} \delta_N - F_{p_2} \\ &\dots \\ &\dots \\ R_{p_r} &= K_{p_r 1} \delta_1 + K_{p_r 2} \delta_2 + \dots + K_{p_r N} \delta_N - F_{p_r} \end{aligned}$$

**مثال:** صفحه فلزی نازک مطابق شکل با ضخامت  $t=1\text{cm}$  و  $E=3\times 10^6\text{kg/cm}^2$  و  $\rho=2836\text{kg/m}^3$  می باشد. علاوه بر وزن صفحه نیروی  $P=100\text{kg}$  به میان صفحه وارد می شود.



- 1- صفحه را به دو جزئی تبدیل کنید.
- 2- ماتریسهای سختی اجزائی و بردار بار معادل گرهی را بدست آورید.
- 3- ماتریس سختی کل سازه  $K$  و بردار  $F$  را بدست آورید.
- 4- مساله را حل و  $\delta$  را بدست آورید.
- 5- تنش در هر جزئی را پیدا کنید.
- 6- نیروهای عکس العمل تکیه گاهی را محاسبه کنید.

$$w_1 = \frac{60+45}{2} = 52.5 \text{ cm}$$

$$w_2 = \frac{45+30}{2} = 37.5 \text{ cm}$$

شرط حدی بصورت  $\delta_1 = 0$  است. حل: عرض هر جزئی:

ماتریس سختی و بار معادل گرهی:

$$f_b^e = \frac{A_e \ell_e}{2} f_b \begin{Bmatrix} +1 \\ +1 \end{Bmatrix}$$

$$k_e = \frac{A_e E_e}{\ell_e} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \frac{3 \times 10^6 \times 52.5}{120} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}, \quad K_2 = \frac{3 \times 10^6 \times 37.5}{120} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$f_1 = \frac{52.5 \times 120 \times 0.002836}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}, \quad f_2 = \frac{37.5 \times 120 \times 0.002836}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$K = \frac{3 \times 10^6}{120} \begin{bmatrix} 52.5 & -52.5 & 0 \\ -52.5 & 52.5 + 37.5 & -37.5 \\ 0 & -37.5 & 37.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

$$\frac{3 \times 10^6}{120} \begin{bmatrix} 90 & -37.5 \\ -37.5 & 37.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 115.3144 \\ 6.3810 \end{Bmatrix}$$

$$\delta = \{0.9272 \times 10^{-4}, 0.9953 \times 10^{-4}\}^T \text{ cm}$$

$$\sigma = EB \hat{\delta}^e, \quad B = \frac{1}{\ell} [-1 \quad 1]$$

$$\sigma_1 = 3 \times 10^6 \times \frac{1}{120} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.9272 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} = 231.8 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_2 = 3 \times 10^6 \times \frac{1}{120} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} 0.9272 \times 10^{-4} \\ 0.9953 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} = 17.0 \text{ kg/cm}^2$$

$$R_{p1} = K_{p1} \delta_1 + K_{p2} \delta_2 + K_{p3} \delta_3 - F_{p1}$$

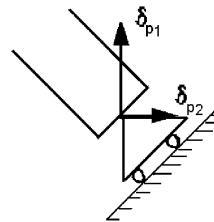
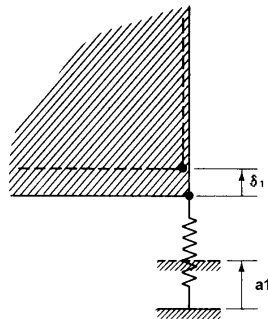
$$R_1 = \frac{3 \times 10^6}{120} [52.5 \quad -52.5 \quad 0] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.9272 \times 10^{-4} \\ 0.9953 \times 10^{-4} \end{Bmatrix} - 8.9334 = -130.6 \text{ kg}$$

نیرو بطرف پائین است.

## فرتوجیهی Penalty Approach

برای اعمال **شرایط حدی** روش دیگری بنام **فرتوجیهی** معرفی می شود.

اساسا **شرایط تکیه گاهی ایده آل** با توجه به انعطاف پذیری مصالح روشی تقریبی است. در این روش عملکرد تکیه گاه مانند یک فنر در نظر گرفته می شود. از محاسن این روش امکان ارائه شرایط حدی بخصوص به مساله است.

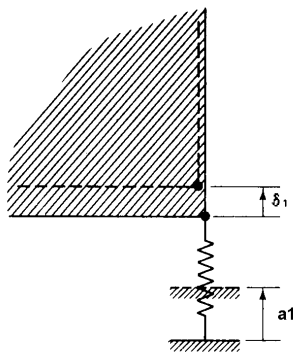


در صورتیکه شرط حدی  $\delta_1 = a_1$  در یک سازه یک بعدی تعریف شده و  $a_1$  میزان تغییر مکان گره 1 در امتداد درجه آزادی 1 باشد شکل زیر برای تکیه گاه در نظر گرفت. در این صورت میزان خالص

جابجایی فنر  $(\delta_1 - a_1)$  و انرژی جذب شده بوسیله

فنر برابر  $U_s = \frac{1}{2} C (\delta_1 - a_1)^2$  است که باید به کل انرژی

پتانسیل اضافه شود.



$$\Pi = \frac{1}{2} \delta^T K \delta + \frac{1}{2} C (\delta_1 - a_1)^2 - \delta^T F$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \delta_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, N$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} + C & K_{12} & K_{13} & \dots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots & K_{2N} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \dots & K_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & K_{N3} & \dots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \vdots \\ \delta_N \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1 + Ca_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{Bmatrix}$$

عکس العمل تکیه گاهی:

$$R_1 = -C(\delta_1 - a_1)$$

## خلاصه بکارگیری روش فنر توجیهی:

در صورتیکه شرائط حدی بصورت زیر باشد:

$$\delta_{p1} = a_1, \quad \delta_{p2} = a_2, \quad \delta_{p3} = a_3, \quad \dots, \delta_{pr} = a_r$$

ابتدا لازم است ماتریس سختی  $K$  را با افزودن مقادیر سختی بزرگ  $C$  به جملات قطری  $p_1$  و  $p_2$  و  $\dots$  و  $p_r$  این ماتریس و همچنین بردار  $F_1$  را با افزودن  $Ca_1$  به  $F_{p1}$  و  $Ca_2$  به  $F_{p2}$  و  $\dots$  و  $Ca_r$  به  $F_{pr}$  تغییر داد.

حال می توان سری معادلات حاصله بصورت  $K\delta = F$  را در جهت بدست آوردن  $\delta$  حل نمود.

در پایان با استفاده از معادلات زیر می توان عکس العمل تکیه گاهی را بدست آورد:

$$R_{pi} = -C(\delta_{pi} - a_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, r$$

## ویژگی های روش فنرتوجیهی

دراین روش عددی دقت راه حل ومقادیرعکس العمل تکیه گاهی به چگونگی انتخاب مقدار  $C$  بستگی دارد.

در صورتیکه اولین معادله مورد بررسی قرار گیرد:

$$(K_{11} + C)\delta_1 + K_{12}\delta_2 + K_{13}\delta_3 + \dots + K_{1N}\delta_N = F_1 + Ca_1$$

اگر طرفین بر  $C$  تقسیم شود:

$$\left(\frac{K_{11}}{C} + 1\right)\delta_1 + \frac{K_{12}}{C}\delta_2 + \frac{K_{13}}{C}\delta_3 + \dots + \frac{K_{1N}}{C}\delta_N = \frac{F_1}{C} + a_1$$

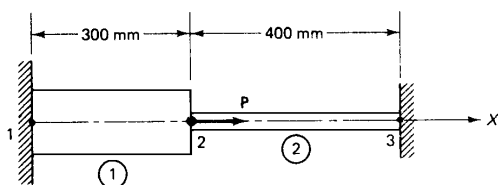
حال اگر مقدار  $C$  عدد بزرگی باشد می توان به رابطه  $\delta_1 = a_1$  رسید. بزرگ بودن مقدار  $C$  نسبت به مقادیر  $K_{12}, K_{13}, \dots, K_{1N}$  یا  $K_{11}$  است. مسلماً مقدار هم  $\frac{F_1}{C}$  مقدار کوچکی است.

در حالت عمومی مقدار زیر قابل قبول است:

$$C = \max |K_{ij}| \times 10^4 \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N$$

## مثال

میله شکل زیر برای تحمل بار  $P = 200 \times 10^3 \text{ N}$  مفروض است. با استفاده از روش فنرتوجیهی در مورد شرایط حدی موارد زیر ابدست آورید:



$$A_1 = 2400 \text{ mm}^2 \quad A_2 = 600 \text{ mm}^2 \\ E_1 = 70 \times 10^9 \text{ N/m}^2 \quad E_2 = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

الف- تغییر مکان گره ها

ب- تنش در هر ماده

ج- نیروهای عکس العمل تکیه گاهی

ماتریس سختی:

$$K^1 = \frac{70 \times 10^3 \times 2400}{300} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K^2 = \frac{200 \times 10^3 \times 600}{400} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = 10^6 \begin{bmatrix} 0.56 & -0.56 & 0 \\ -0.56 & 0.86 & -0.3 \\ 0 & -0.3 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$F = \{0, 2 \times 10^3, 0\}^T \text{ N}$$



$$C = [0.86 \times 10^6] \times 10^4 \quad N/m$$

$$K = 10^6 \begin{bmatrix} 8600.56 & -0.56 & 0 \\ -0.56 & 0.86 & -0.3 \\ 0 & -0.3 & 8600.3 \end{bmatrix} \quad N/mm$$

با استفاده از روش فنرتوجیهی:

$$10^6 \begin{bmatrix} 8600.56 & -0.56 & 0 \\ -0.56 & 0.86 & -0.3 \\ 0 & -0.3 & 8600.3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 200 \times 10^3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\delta = \{15.1432 \times 10^{-6}, 0.23257, 8.1127 \times 10^{-6}\}^T \quad mm$$

$$\sigma_1 = 70 \times 10^3 \times \frac{1}{300} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} 15.1432 \times 10^{-6} \\ 0.23257 \end{Bmatrix} = 54.27 \quad Mpa$$

$$\sigma = EB\delta$$

تنش:

$$\sigma_2 = 200 \times 10^3 \times \frac{1}{400} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} 0.23257 \\ 8.1127 \times 10^{-6} \end{Bmatrix} = -116.29 \quad Mpa$$

$$R_1 = -C\delta_1 = -[0.86 \times 10^{10}] \times 15.1432 \times 10^{-6} = -130.23 \times 10^3 \quad N$$

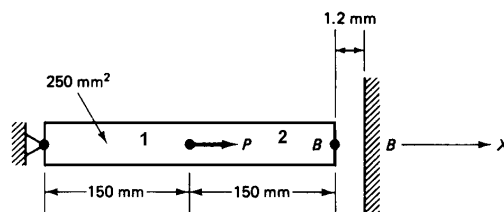
عکس العمل های تکیه گاهی:

$$R_2 = -C\delta_3 = -[0.86 \times 10^{10}] \times 8.1127 \times 10^{-6} = -69.77 \times 10^3 \quad N$$

## مثال

در شکل زیر  $P=60 \times 10^3 \text{ N}$  می باشد. با استفاده از روش فنرتوجیهی در مورد شرایط حدی تغییر مکان گره ها و تنش و نیروهای عکس العمل تکیه گاهی را بدست آورید:

ابتدا بایستی مطمئن شد که آیا نقطه  $B'$  به دیوار می رسد یا نه؟



$$\delta_{B'} = \frac{pl}{EA} = \frac{60 \times 10^3 \times 150}{20 \times 10^3 \times 250} = 1.8 \quad mm$$

$$K = \frac{20 \times 10^3 \times 250}{150} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی:

$$F = \{0, 60 \times 10^3, 0\}^T$$

بردار نیرو:

$$c = \left(\frac{2}{3}\right) \times 10^9$$

مقدار C:

$$\begin{array}{l|l} x=0 & x=300 \\ \delta_1=0 & \delta_3=1.2 \text{ mm} \end{array} \quad \text{شرایط حدی:}$$

## معادلات و حل آنها

$$\frac{10^5}{3} \begin{bmatrix} 20001 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 20001 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 60 \times 10^3 \\ 80 \times 10^7 \end{Bmatrix}$$

پس از اعمال C:

$$\delta = \{7.49985 \times 10^{-5}, 1.500045, 1.200015\}^T \text{ mm}$$

$$\sigma_1 = 20 \times 10^3 \times \frac{1}{150} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} 7.49985 \times 10^{-5} \\ 1.500045 \end{Bmatrix} = 199.996 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_2 = 20 \times 10^3 \times \frac{1}{150} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} 1.500045 \\ 1.200015 \end{Bmatrix} = -40.004 \text{ Mpa}$$

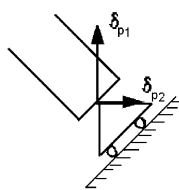
$$R_1 = -C \times 7.49985 \times 10^{-5} = -49.999 \times 10^3 \text{ N}$$

$$R_1 = -50 \times 10^3 \text{ N}$$

$$R_3 = -C \times (1.200015 - 1.2) = -10.001 \times 10^3 \text{ N}$$

$$R_3 = -10 \times 10^3 \text{ N}$$

## روش فرتوجیهی و محدودیت‌های بیشتر



در صورتیکه در تکیه گاه یک وابستگی

بین درجات آزادی باشد:

$$\beta_1 \delta P_1 + \beta_2 \delta P_2 = \beta_0$$

$$\beta_1 \delta P_1 + \beta_2 \delta P_2 - \beta_0 = 0$$

$$\Pi_m = \frac{1}{2} \delta^T K \delta + \frac{1}{2} C (\beta_1 \delta P_1 + \beta_2 \delta P_2 - \beta_0)^2 - \delta^T F$$

جمله انرژی:

تغییر در معادلات تعادل:

$$\begin{bmatrix} K_{p_1 p_1} & K_{p_1 p_2} \\ K_{p_2 p_1} & K_{p_2 p_2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} K_{p_1 p_1} + c \beta_1^2 & K_{p_1 p_2} + c \beta_1 \beta_2 \\ K_{p_2 p_1} + c \beta_1 \beta_2 & K_{p_2 p_2} + c \beta_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{p_1} \\ F_{p_2} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} F_{p_1} + c \beta_0 \beta_1 \\ F_{p_2} + c \beta_0 \beta_2 \end{Bmatrix}$$

## عکس العمل فنرتکیه گاهی

$$\frac{\partial \Pi_m}{\partial \delta_{p1}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi_m}{\partial \delta_{p2}} = 0$$

شرط کمینه انرژی نسبت به تغییر مکان فنر:

$$\sum_j K_{p1j} \delta_j - F_{p1} = R_{p1}$$

$$\sum_j K_{p2j} \delta_j - F_{p2} = R_{p2}$$

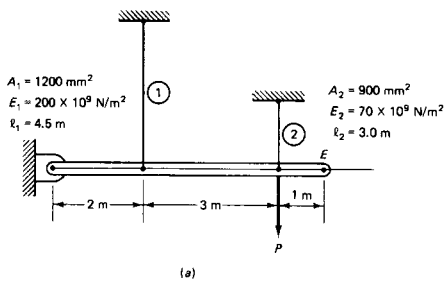
$$R_{p1} = \frac{\partial}{\partial \delta_{p1}} \left[ \frac{1}{2} c (\beta_1 \delta P_1 + \beta_2 \delta P_2 - \beta_0)^2 \right]$$

$$R_{p1} = c \beta_1 (\beta_1 \delta P_1 + \beta_2 \delta P_2 - \beta_0)$$

$$R_{p2} = \frac{\partial}{\partial \delta_{p2}} \left[ \frac{1}{2} c (\beta_1 \delta P_1 + \beta_2 \delta P_2 - \beta_0)^2 \right]$$

$$R_{p2} = c \beta_2 (\beta_1 \delta P_1 + \beta_2 \delta P_2 - \beta_0)$$

## مثال



میله صلب بدون جرم مورد نظر است. این میله توسط دومیله فولادی 1 و آلومینیومی 2 نگهداشته شده و نیرویی برابر  $P = 30 \times 10^3 \text{ N}$  را تحمل می کند.

1- سازه را با دو جزئی مدل نموده و شرایط حدی آنرا مشخص نمایید.

2- ماتریس سختی و بردار  $F$  را تعیین و مساله را حل نمایید.

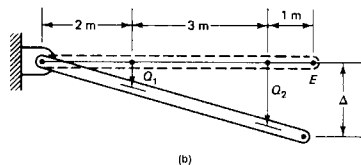
شرایط حدی:

$$\delta_3 = \delta_4 = 0$$

$$\frac{2}{5} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \Rightarrow \delta_1 - 0.4\delta_2 = 0$$

$$\beta_1 \delta P_1 + \beta_2 \delta P_2 = \beta_0$$

$$\beta_0 = 0, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = -0.4$$



ماتریس های  
سختی:

$$K^1 = \frac{200 \times 10^3 \times 1200}{4.5 \times 10^3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \quad K^2 = \frac{70 \times 10^3 \times 900}{3 \times 10^3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix}$$

$$K = 10^3 \begin{bmatrix} 53.33 & 0 & -53.33 & 0 \\ 0 & 21 & 0 & -21 \\ -53.33 & 0 & 53.33 & 0 \\ 0 & -21 & 0 & 21 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$10^3 \begin{bmatrix} 53.33533 \times 10^4 & -21.3320 \times 10^4 & -53.33 & 0 \\ -21.332 \times 10^4 & 8.5349 \times 10^4 & 0 & -21 \\ -53.33 & 0 & 53.33533 \times 10^4 & 0 \\ 0 & -21 & 0 & 53.3321 \times 10^4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 30 \times 10^3 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\delta = \{0.4206, 1.0517, 4.2059 \times 10^{-5}, 4.1411 \times 10^{-5}\}^T$$

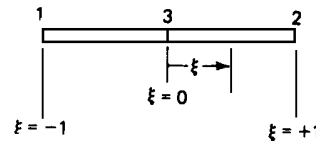
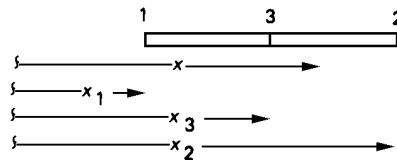
$$\sigma_1 = 200 \times 10^3 \times \frac{1}{4.5 \times 10^3} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4.2059 \\ 0.4206 \end{Bmatrix} \times 10^{-5} = 18.693 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_2 = 24.54 \text{ Mpa}$$

## تابع شکل درجه 2

تابع شکل درجه 2 می تواند جواب دقیق تری را ارائه دهد.

$$\hat{\delta}^e = \begin{Bmatrix} \hat{\delta}_1 \\ \hat{\delta}_2 \\ \hat{\delta}_3 \end{Bmatrix}$$



$$\xi = \frac{2(x - x_3)}{x_2 - x_1}$$

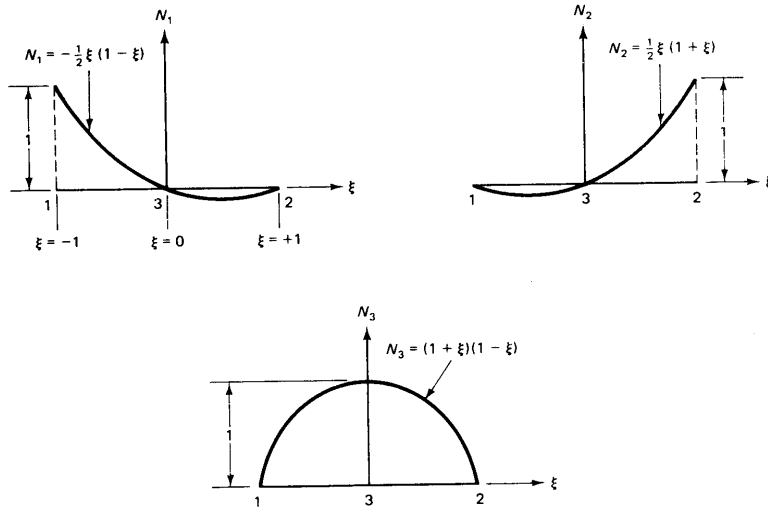
رابطه دستگاه مختصات موضعی و کلی:  
توابع شکل:

$$N_1(\xi) = -\frac{1}{2} \xi (1 - \xi)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2} \xi (1 + \xi)$$

$$N_3(\xi) = (1 + \xi)(1 - \xi)$$

## هندسه توابع شکل



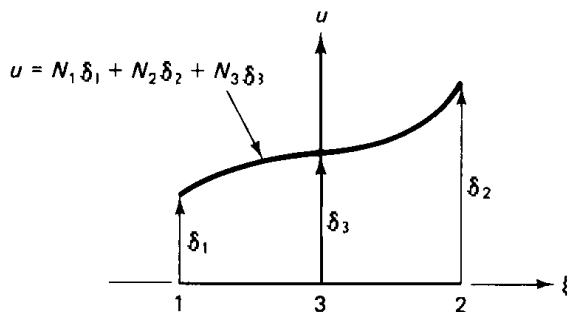
## رابطه کلیدی روش اجزای محدود

$$\underline{u} = \underline{N} \hat{\underline{\delta}}$$

$$u = N_1 \hat{\delta}_1 + N_2 \hat{\delta}_2 + N_3 \hat{\delta}_3$$

$$\underline{N} = \{N_1, N_2, N_3\}$$

ماتریس توابع شکل:



## کرنش و تنش:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}$$

$$\varepsilon = B \hat{\delta}^e$$

تعریف عمومی کرنش:

$$\xi = \frac{2(x-x_3)}{x_2-x_1} \Rightarrow \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{x_2-x_1}$$

$$\varepsilon = \frac{2}{x_2-x_1} \frac{du}{d\xi} = \frac{2}{x_2-x_1} \left[ \frac{dN_1}{d\xi}, \frac{dN_2}{d\xi}, \frac{dN_3}{d\xi} \right] \hat{\delta}^e$$

$$\varepsilon = \frac{2}{x_2-x_1} \left[ -\frac{1-2\xi}{2}, \frac{1+2\xi}{2}, -2\xi \right] \hat{\delta}^e$$

$$B = \frac{2}{x_2-x_1} \left[ -\frac{1-2\xi}{2}, \frac{1+2\xi}{2}, -2\xi \right]$$

$$\sigma = EB \hat{\delta}^e$$

با توجه به اینکه  $N_i$  از

درجه دو می باشد

نتیجتاً کرنش از درجه

یک بصورت خطی

بدست آمده است.

## جمله انرژی و ماتریس سختی

ماتریس سختی را بروش قبلی می توان از جمله انرژی بدست آورد:

$$\Pi = \sum_e \frac{1}{2} \int_e \varepsilon^T \sigma A dx - \sum_e \int_e u^T f_b A dx - \sum_e \int_e u^T f_s dx - \sum \delta_i^T p_i$$

$$\Pi = \sum_e \frac{1}{2} \hat{\delta}^{eT} \left( E_e A_e \frac{l_e}{2} \int_{-1}^{+1} [B^T B] d\xi \right) \hat{\delta}^e - \sum \hat{\delta}^e - \sum \hat{\delta}^{eT} \left( A_e \frac{l_e}{2} f_b \int_{-1}^{+1} N^T d\xi \right) - \sum \hat{\delta}^{eT} \left( \frac{l_e}{2} f_s - 1 \int_{-1}^{+1} N^T d\xi \right) - \sum \delta_i^T p_i$$

$$\Pi = \sum_e \frac{1}{2} \hat{\delta}^{eT} k^e \hat{\delta}^e - \sum \hat{\delta}^{eT} f_b^e - \sum \hat{\delta}^{eT} f_s^e - \sum \delta_i^T p_i$$

ماتریس سختی:

$$k^e = \frac{A_e l_e E_e}{2} \int_{-1}^{+1} [B^T B] d\xi$$

$$K = \frac{A_e E_e}{3l_e} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

## بارمعادل گرهی

$$f_b^e = \frac{A_e l_e f_b}{2} \int_{-1}^{+1} N^T d\xi$$

بارمعادل گرهی نیروهای جرمی:

$$f_b^e = A_e l_e f_b \begin{Bmatrix} 1/6 \\ 2/3 \\ 1/6 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}$$

بارمعادل گرهی نیروهای سطحی:

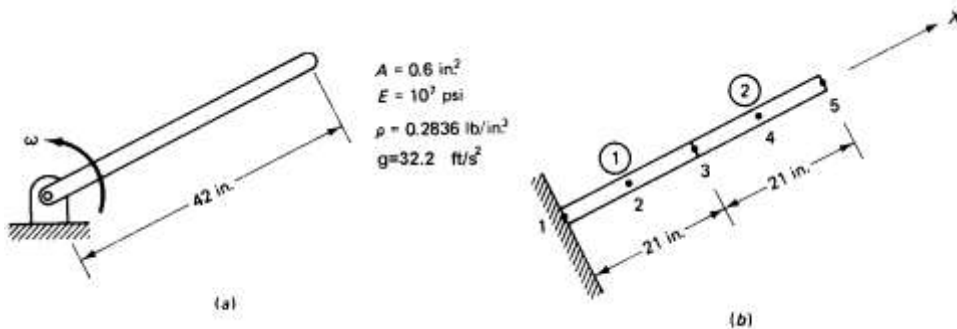
$$f_s^e = \frac{l_e f_s}{2} \int_{-1}^{+1} N^T d\xi = f_s l_e \begin{Bmatrix} 1/6 \\ 2/3 \\ 1/6 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{matrix}$$

## مثال

میله شکل زیر که با سرعت زاویه ای ثابت  $\omega = 30 \text{ rad/s}$  در حال چرخش است، مفروض می باشد. توزیع تنش محوری را با استفاده از تابع شکل درجه 2 بدست آورید.

از خمش در میله صرفنظر کنید و عامل مؤثر در تنش محوری را، نیروهای جذب به مرکز در نظر بگیرید.

$$A = 0.6 \text{ in}^2, E = 10^7 \text{ psi}, \rho = 0.2836 \text{ lb/in}^3, g = 32.2 \text{ ft/s}^2$$



## حل:

این مسأله درکل با در نظر گرفتن دو جزء و پنج گره، دارای پنج درجه آزادی است.

ماتریسهای سختی این اجزاء را مطابق زیر می توان بدست آورد.

$$k^1 = \frac{10^7 \times 0.6}{3 \times 21} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & -16 \end{bmatrix} \quad k^2 = \frac{10^7 \times 0.6}{3 \times 21} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & -16 \end{bmatrix}$$

ماتریس کلی به شکل زیر است :

$$K = \frac{10^7 \times 0.6}{3 \times 21} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & -8 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

نیروی جرمی جذب به مرکز بخاطر دوران ثابت، از رابطه  $f_b = \frac{p r \omega^2}{g}$  میگردد. اگر فرض شود  $g = 32.2 \text{ ft/s}$  با توجه به اینکه  $f_b$  متناسب با  $r$  (فاصله از محور دوران) است، میتوان برای سهولت مقدار متوسط روی  $f_b$  جزء را بصورت زیر بدست آورد.

$$f_{b1} = \frac{0.2836 \times 10.5 \times 30^2}{32.2 \times 12} = 6.94 \text{ lb} \quad f_{b2} = \frac{0.2836 \times 31.5 \times 30^2}{32.2 \times 12} = 20.81 \text{ lb}$$

$$f_b^1 = 0.6 \times 21 \times f_{b1} \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 2/3 \end{bmatrix} \quad f_b^2 = 0.6 \times 21 \times f_{b2} \begin{bmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

با استفاده از  $f_b^2, f_b^1$

$$F = \{14.57, 58.26, 58.26, 174.79, 43.7\}^T \text{ lb}$$

میتوان  $F$  را بدست آورد.

$$\frac{10^7 \times 0.6}{63} \begin{bmatrix} 16 & -8 & 0 & 0 \\ -8 & 14 & -8 & 1 \\ 0 & -8 & 16 & -8 \\ 0 & 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 58.26 \\ 58.26 \\ 174.79 \\ 43.7 \end{Bmatrix}$$

$$\delta = 10^{-3} \{0, 0.5735, 1.0706, 1.4147, 1.5294\}^T \text{ اینج}$$



## تنش:

با استفاده از معادله  $\sigma = EB \hat{\delta}^e$  میتوان تنش در گره ها را بدست آورد. جدول اتصال اجزاء

شماره گره در دستگاه موضعی	1	2	3	جزء شماره
شماره گره در دستگاه کلی	1	3	2	1
	2	3	5	4

بصورت زیر است.

$$\delta_1^e = \{\delta_1, \delta_3, \delta_2\}^T$$

$$\delta_4^e = \{\delta_3, \delta_5, \delta_4\}^T$$

$$\sigma_1 = 10^7 \times \frac{2}{21} \left\{ -\frac{1-2\xi}{2}, \frac{1+2\xi}{2}, -2\xi \right\} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_3 \\ \delta_2 \end{Bmatrix} \quad -1 \leq \xi \leq 1$$

برای جزء 1 و 2:

$$\sigma_{1|1} = 10^7 \times \frac{2 \times 10^{-3}}{21} \{-1.5, -0.5, 2\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.0706 \\ 0.5735 \end{Bmatrix} = 583 \text{ psi}$$

برای تنش در گره 2  $\xi = 0$

$$\sigma_{1|2} = 10^7 \times \frac{2 \times 10^{-3}}{21} \{-0.5, 0.5, 0\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.0706 \\ 0.5735 \end{Bmatrix} = 510 \text{ psi}$$

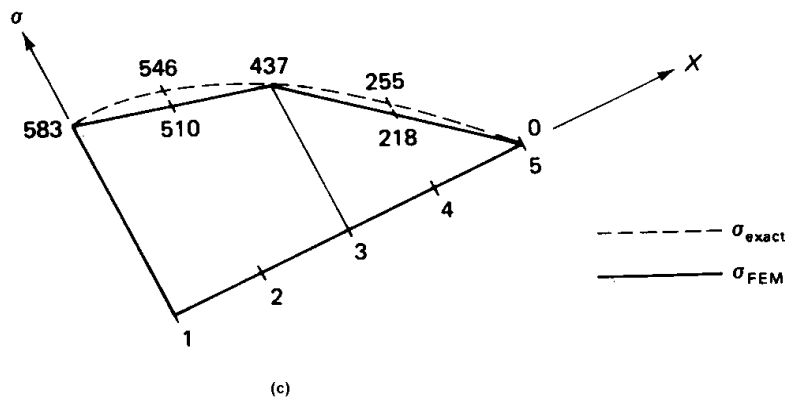
بطور مشابه  $\sigma_{2|3} = 0$  (تنش در جزء 2 و گره 3) و  $\sigma_{2|2} = 218 \text{ Psi}$

جواب تحلیلی مسأله را میتوان بدست آورده و با جوابهای

حاصله مقایسه نمود.

$$\sigma_{exact}(x) = \frac{\rho \omega^2}{2g} (L^2 - x^2)$$

مقادیر حقیقی و حاصل شده از روش اجزاء محدود در شکل نشان داده شده اند.



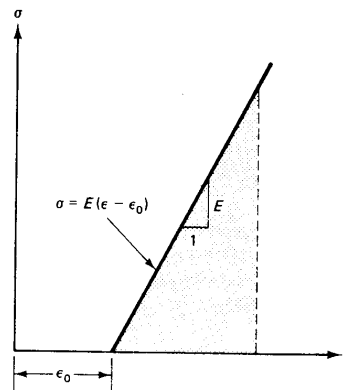
## اثر تغییر درجه حرارت

با داشتن تغییر درجه حرارت بصورت  $\Delta t(x)$  لازم است، تغییر شکل‌های نسبی حرارتی را بدست آورده و سپس آنها را مانند تغییر شکل‌های نسبی اولیه  $(\varepsilon_0)$  در حل مسأله منظور نمود.

$$\delta l = \alpha \Delta t \Rightarrow \varepsilon_0 = \alpha \cdot \Delta t$$

$\alpha$  ضریب انبساط حرارتی جسم است. عموماً در صورتی  $\Delta t$  نمایانگر افزایش درجه حرارت باشد، آنرا مثبت و در صورت عکس آنرا منفی در نظر می‌گیرند. در حالتی که  $\varepsilon_0$  در مسأله حضور داشته باشد، شکل نشان دهنده رفتار خطی جسم در مقابل وجود تغییر درجه حرارت است.

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_0)$$



## اثر تغییر درجه حرارت در جمله انرژی

انرژی در اثر تغییر شکل نسبی در واحد حجم  $(U_0)$  برابر سطح زیر منحنی است.

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma (\varepsilon - \varepsilon_0)$$

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_0)$$

$$U_0 = \frac{1}{2} \{\varepsilon - \varepsilon_0\}^T E \{\varepsilon - \varepsilon_0\}$$

$$U = \int_L \frac{1}{2} \{\varepsilon - \varepsilon_0\}^T E \{\varepsilon - \varepsilon_0\} A dx$$

$$U = \sum_e \frac{1}{2} A_e \frac{l_e}{2} \int_{-1}^{+1} \{\varepsilon - \varepsilon_0\}^T E \{\varepsilon - \varepsilon_0\} d\xi$$

$$U = \sum_e \frac{1}{2} \hat{\delta}^{eT} \left( E_e A_e \frac{l_e}{2} \int_{-1}^{+1} B^T B d\xi \right) \hat{\delta}^e - \sum \hat{\delta}^{eT} E_e A_e \frac{l_e}{2} \varepsilon_0 \int_{-1}^{+1} B^T d\xi + \sum_e \frac{1}{2} E_e A_e \frac{l_e}{2} \varepsilon_0^3$$

اولین جمله سمت راست معادله فوق در اصل معرف ماتریس سختی جزء است. جمله آخر معرف یک مقدار ثابت است، که نقشی در معادله اصلی تعادل و تغییراتش نخواهد داشت، زیرا معادلات تعادل از رابطه

$$\frac{d\Pi}{d\delta} = 0$$

بدست می‌آیند، و مشتق عدد ثابت صفر است.

جمله دوم رابطه مربوط به بردار بار وارد بر جزء است، که در اثر تغییر درجه حرارت حاصل می گردد. که با نشان داده می شود:

$$f_t^e = E_e A_e \frac{l_e}{2} \varepsilon_0 \int_{-1}^{+1} B^T d\xi$$

با جایگذاری رابطه  $B = [-1, 1]/(x_2 - x_1)$  ,  $\varepsilon_0 = \alpha \Delta t$  در معادله بدست آمده:

$$f_t^e = \frac{E_e A_e l_e \alpha \Delta t}{x_2 - x_1} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = E_e A_e \alpha \Delta t \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

در عبارت فوق  $\Delta t$  تغییر درجه حرارت متوسط در پهنه جزء است. بردار بارها در اثر تغییر درجه حرارت که در شکل فوق بدست آمده است را میتوان همانند بردار بارهای جرمی و بردار بارهای سطحی و بارهای متمرکز در بردار بار عمومی  $F$  مربوط به سازه به حساب آورد.

## حل معادلات کلی

با حل معادلات کلی بصورت  $K \hat{\delta} = F$  ، تنش در هر جزء از رابطه زیر بدست می آید.

$$F = \sum_e (f_b^e + f_s^e + f_t^e) + P$$

$$\sigma = E(B\delta - \alpha \cdot \Delta t)$$

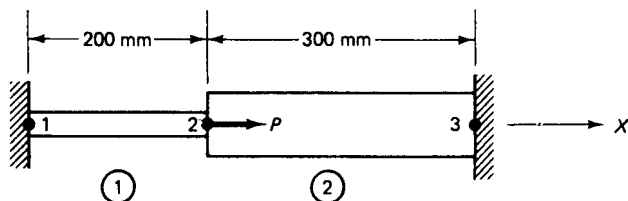
$$\sigma = \frac{E}{l} [-1 \quad 1] \delta - E \alpha \cdot \Delta t$$

تنش:

**مثال:** بار محوری  $P = 300 \times 10^3 \text{ N}$  در شرایط  $t_1 = 20^\circ\text{C}$  به میله ای مطابق

شکل زیر وارد می شود سپس درجه حرارت تا  $60^\circ\text{C}$  افزایش می یابد.

- ماتریس  $F, K$  در مختصات کلی را بدست آورید.
- تغییر شکل گرهها و تنش در اجزاء را محاسبه کنید.



$$E_1 = 70 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$A_1 = 900 \text{ mm}^2$$

$$\alpha_1 = 23 \times 10^{-6} \text{ per } ^\circ\text{C}$$

$$E_2 = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$A_2 = 1200 \text{ mm}^2$$

$$\alpha_2 = 11.7 \times 10^{-6} \text{ per } ^\circ\text{C}$$

ماتریس سختی اجزاء:

$$K_1 = \frac{70 \times 10^3 \times 900}{200} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ N/mm} \quad K_2 = \frac{200 \times 10^3 \times 1200}{300} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ N/mm}$$

$$K = 10^3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 315 & -315 & 0 \\ -315 & 1115 & -800 \\ -8 & -800 & 800 \end{bmatrix} \text{ N/mm}$$

جهت بدست آوردن بردار  $F$  لازم است، اثر تغییر درجه حرارت و بار متمرکز منظور گردد. نیروهای حاصله در جزء در اثر  $\Delta t = 40^\circ\text{C}$  را میتوان از رابطه

$$f_i^e = E_e A_e \alpha \Delta t \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

بدست آورد:

$$f_i^{e=1} = 70 \times 10^3 \times 900 \times 23 \times 10^{-6} \times 40 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ N}$$

$$f_i^{e=2} = 200 \times 10^3 \times 1200 \times 11.7 \times 10^{-6} \times 40 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ N}$$

$$F = 10^3 \begin{Bmatrix} -57.96 \\ 57.96 - 112.32 + 300 \\ 112.32 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{Bmatrix} -57.96 \\ 245.64 \\ 112.32 \end{Bmatrix} \quad N$$

با استفاده از روش حذف و با توجه به اینکه درجات آزادی 1 و 3 گیردار هستند و اولین و سومین ردیف و ستون ماتریس  $K$  حذف می گردند خواهیم داشت.

$$10^3(1115)\delta_2 = 10^3 \times 245.64$$

$$\delta_2 = 0.220 \text{ mm}$$

$$\delta = \{0 \quad 0.220 \quad 0\}^T \text{ mm}$$

برای بدست آوردن تنش در اجزاء:

$$\sigma_1 = \frac{70 \times 10^3}{200} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.220 \end{Bmatrix} - 70 \times 10^3 \times 23 \times 10^{-6} \times 40 = 12.60 \text{ MPa.}$$

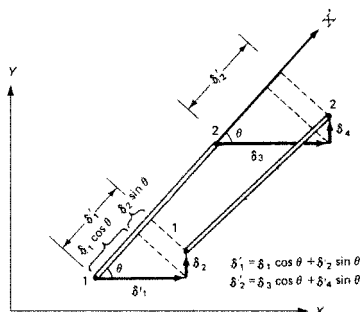
$$\sigma_2 = \frac{200 \times 10^3}{300} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} 0.220 \\ 0 \end{Bmatrix} - 200 \times 10^3 \times 11.7 \times 10^{-6} \times 40 = -240.27 \text{ MPa.}$$





## تحلیل خریاهای دو و سه بعدی (خرپای دوبعدی)

بر اساس تعریف خرپا سازه ای است که اعضاء آن تنها تحت کشش یا فشار باشد. بدین صورت اعضاء خرپا را اعضاء دو نیرویی می گویند. با توجه به فرض نیروهای خرپا تنها به مفصلها اعمال می شوند.



در قالب روش اجزاء محدود، تنها فرق خرپا با اعضاء یک محوری در آن است که اعضاء خرپا علیرغم آنکه اعضایی یک محوری هستند اما جهات مختلفی را دارا می باشند. بدین جهت برای حل یک خرپا در قالب روش اجزاء محدود ناگزیر بایستی دستگاه مختصات موضعی اعضاء و دستگاه مختصات کلی سیستم معرفی گردند. در شکل (4-1) یک عضو خرپا در دستگاه مختصات موضعی و کلی نشان داده شده است. شماره گذاری های این عضو که دارای دو گره است به ترتیب بصورت 1 و 2 می باشد در دستگاه مختصات موضعی جهت محور از نقطه 1 به سمت نقطه 2 می باشد. دستگاه مختصات کلی  $X-Y$  ثابت بوده و عموماً به جهت عضو بستگی ندارد. مطابق قانون دست راست در صورت وجود محور  $Z$ ، جهت آن عمود بر صفحه و از آن بطرف بالا فرض می گردد.

## تغییر دستگاه مختصات درجات آزادی

در دستگاه مختصات کلی، هر گره دارای دو درجه آزادی است. در این حالت شماره گره ها طوری انتخاب شده اند که برای گره  $i$  درجه آزادی  $\delta_{2i-1}$  و  $\delta_{2i}$  با آن مطابقت دارد. از طرف دیگر تغییر مکانهای گره در دستگاه مختصات کلی بصورت  $\delta_1$  و  $\delta_2$  می باشند و تغییر مکان گره های 1 و 2 در دستگاه مختصات موضعی فرض شده اند. بنابراین بردار تغییر مکان گره ها را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$\delta'_i = \{\delta'_1, \delta'_2\}^T \quad \text{در دستگاه موضعی:}$$

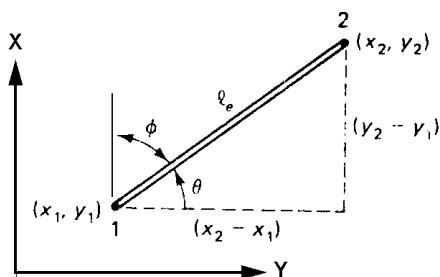
$$\delta = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}^T \quad \text{در دستگاه کلی:}$$

ارتباط دو در دستگاه مختصات:

$$\delta'_1 = \delta_1 \cos \theta + \delta_2 \sin \theta$$

$$\delta'_2 = \delta_3 \cos \theta + \delta_4 \sin \theta$$

$$\delta' = L \delta$$





## ارتباط دو در دستگاه مختصات

ارتباط بین  $\delta, \delta'$  را میتوان با توجه به اینکه  $\theta$  مجموعه تصاویر  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  محور است بدست می آید.

جهت سهولت کار لازم است، کسینوسهای هادی را برای یک عضو در دستگاه مختصات صفحه ای بصورت  $l, m$  یعنی  $l = \cos \theta$  ،  $m = \sin \theta$  تعریف نمود. کسینوسهای هادی بطور عام، کسینوس زوایایی می باشند که یک امتداد با محورهای مختصات می سازد. در حالت عمومی معادلات فوق را میتوان بصورت ماتریس زیر نوشت:

$$\hat{\delta}' = L\delta$$

$$L = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \delta'_1 \\ \delta'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix}$$

برای بدست آوردن مقادیر  $l, m$  میتوان از مختصات گره های ابتدا و انتهای عضو استفاده نمود.

$$l = \cos \theta = \frac{x_2 - x_1}{\ell_e}$$

$$m = \sin \theta = \frac{y_2 - y_1}{\ell_e}$$

$$\ell_e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

## ماتریس سختی

$$k'_e = \frac{A_e E_e}{\ell_e} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی در دستگاه مختصات موضعی :

در رابطه فوق  $A_e$  سطح مقطع و طول و  $E_e$  مدول الاستیسیته عضو است. برای تشکیل ماتریس سختی کل اعضاء در دستگاه مختصات کلی لازم است این ماتریس در صورتیکه جهات درجات آزادی آن منطبق بر جهات درجات آزادی در دستگاه مختصات کلی نباشد. به دستگاه یاد شده انتقال یابد. برای این منظور انرژی ناشی از تغییر شکلهای نسبی داخلی عضو را میتوان در نظر گرفت. این انرژی که یک مقدار عددی است، در دستگاه مختصات موضعی بصورت زیر است:

$$U_e = \frac{1}{2} \delta'^T k'_e \delta' \quad U_e = \frac{1}{2} \delta^T K_e \delta$$

انرژی ناشی از تغییر شکلهای نسبی در دستگاه مختصات کلی :

$$U_e = \frac{1}{2} \delta^T [L^T k'_e L] \delta$$

$$K_e = L^T k'_e L$$

$$K_e = \frac{A_e E_e}{\ell_e} \begin{bmatrix} l & 0 \\ m & 0 \\ 0 & l \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{A_e E_e}{\ell_e} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix}$$

در رابطه فوق  $K$  ماتریس سختی عضو در دستگاه مختصات کلی است .

## محاسبه تنشها:

$$\sigma = E_e \varepsilon$$

• با توجه به اینکه اعضاء خرپا اعضاء دو نیرویی می باشند.

در رابطه فوق را میتوان با توجه به تغییر طول میله نسبت به طول اولیه آن بدست آورد.

$$\sigma = E_e \frac{\delta'_2 - \delta'_1}{l} = \frac{E_e}{l_e} \{-1, +1\} \begin{Bmatrix} \delta'_1 \\ \delta'_2 \end{Bmatrix}$$

برای انتقال رابطه فوق به

دستگاه مختصات کلی :

$$\sigma = \frac{E_e}{l_e} \{-1, +1\} L \delta$$

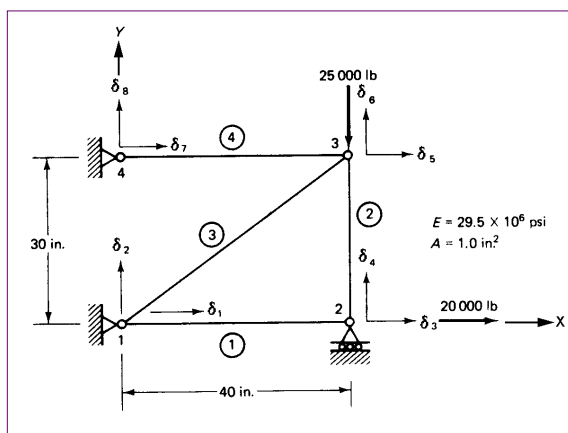
$$\sigma = \frac{E_e}{l_e} \{-l, -m, l, m\} \delta$$

با داشتن تغییر مکانهای گره ها میتوان از رابطه فوق تنشها را بدست آورد.

لازم به ذکر است که این رابطه با فرض مثبت بودن کشش و منفی بودن فشار حاصل شده

است.

**مثال :** خرپای شکل زیر مورد نظر است. در صورتیکه برای تمامی اعضاء  $E = 29.5 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$  و  $A = 1.0 \text{ in}^2$  باشد:



- 1- ماتریس سختی هر عضو را بدست آورید.
- 2- ماتریس سختی کل  $K$  را برای تمام خرپا بدست آورید.
- 3- تغییر مکان گره ها را بدست آورید.
- 4- تنش در هر عضو را پیدا کنید.
- 5- نیروهای عکس العمل تکیه گاهی را حساب کنید.

## مختصات نقاط :

گره	x	y
1	0	0
2	40	0
3	40	30
4	0	30

## جدول اتصال اعضاء :

عضو	$l$	$2$	$L_e$	$l$	$m$
1	1	2	40	1	0
2	3	2	30	0	-1
3	1	3	50	0.8	0.6
4	4	3	40	1	0

$$K^1 = \frac{A_1 E_1}{\ell_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad K^2 = \frac{A_2 E_2}{\ell_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی جزء 1 و به ترتیب  
ماتریسهای سختی برای اعضاء  
2 و 3 و 4 بدست می آیند:

$$K^3 = \frac{A_3 E_3}{\ell_3} \begin{bmatrix} .64 & .48 & -.64 & -.48 \\ .48 & .36 & -.48 & -.36 \\ -.64 & -.48 & .64 & .48 \\ -.48 & -.36 & .48 & .36 \end{bmatrix} \quad K^4 = \frac{A_4 E_4}{\ell_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{AE}{600} \begin{bmatrix} 22.68 & 5.76 & -15 & 0 & -7.69 & -5.76 & 0 & 0 \\ 5.76 & 4.32 & 0 & 0 & -5.76 & -4.32 & 0 & 0 \\ -15 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & -20 & 0 & 0 \\ -7.68 & -5.76 & 0 & 0 & 22.68 & 5.76 & -15 & 0 \\ -5.76 & -4.32 & 0 & -20 & 5.76 & 24.32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با اعمال شرایط حدی سطرها و ستونهای درجات  
آزادی تکیه گاهها حذف خواهند شد باقیمانده  
ماتریس  $K$  بصورت زیر است.

$$\frac{AE}{600} \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 22.68 & 5.76 \\ 0 & 5.76 & 24.32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_3 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20000 \\ 0 \\ -25000 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \delta_3 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 27.12 \times 10^{-3} \\ 5.65 \times 10^{-3} \\ -22.25 \times 10^{-3} \end{Bmatrix}$$

بردار تغییر مکان گره ها :

## تنش ها:

تنش در اعضاء خرپا را میتوان از معادله ارائه شده بدست آورد. با توجه به اینکه گره های جزء 1 بصورت 1 و 2 می  
باشند بردار تغییر مکان جزء 1 بصورت زیر خواهد بود:

$$\delta = \{0, 0, 27.12 \times 10^{-3}, 0\}^T \text{ in}$$

$$\sigma_1 = \frac{A_1 E_1}{\ell_{e1}} \{-1 \ 0 \ 1 \ 0\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 27.12 \times 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix} = 20000 \text{ psi}$$

برای عضو شماره 2 و بقیه:

$$\sigma_2 = \frac{A_2 E_2}{\ell_{e2}} \{0 \ 1 \ 0 \ -1\} \begin{Bmatrix} 5.65 \times 10^{-3} \\ -22.25 \times 10^{-3} \\ 27.12 \times 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix} = -21880 \text{ psi}$$

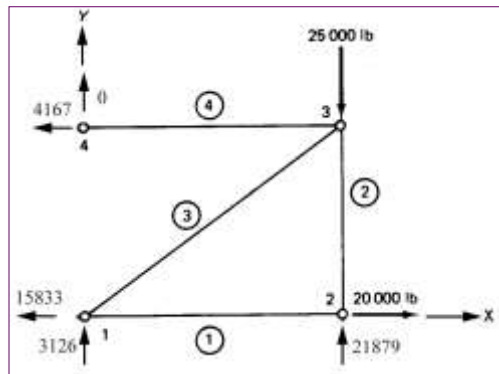
$$\sigma_3 = 5208 \text{ psi}, \quad \sigma_4 = 4167 \text{ psi}$$

برای یافتن عکس العمل تکیه گاهها لازم است نیروها در جهت درجات آزادی 1، 2، 4، 7، 8  
محاسبه گردند. برای این کار میتوان بردار را در معادلات کلی بدست آمده که بصورت کلی  
است، جایگذاری نمود. در این صورت تنها ردیفهایی از ماتریس  $K$  که متعلق به درجات آزادی  
یاد شده می باشند مورد نیاز هستند بنابراین بخش مورد استفاده اعضاء ماتریس بشکل زیر  
است:

## عکس العمل تکیه گاهها:

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_4 \\ R_7 \\ R_8 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{600} \begin{bmatrix} 22.68 & 5.76 & -15 & 0 & -7.68 & -5.76 & 0 & 0 \\ 5.76 & 4.32 & 0 & 0 & -5.76 & -4.32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 27.12 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 5.65 \times 10^{-3} \\ -22.25 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_4 \\ R_7 \\ R_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15833 \\ 3126 \\ 21879 \\ -4167 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ lb}$$



## اثر تغییر درجه حرارت

اثر تغییر درجه حرارت بر روی اعضای یک بعدی خرپا تنها بصورت بلند و کوتاه شدن میله ها است که در اثر این تغییر، تنشهایی در اعضاء خرپا حاصل خواهد گردید. در معادله تنش - کرنش اثر تغییر درجه حرارت را بصورت کرنشهای حرارتی میتوان در نظر گرفت. اساسا بخشی از کرنش که در مقابل سختی ماده تنش ایجاد می کند برابر تفاضل کرنش کل و کرنش حرارتی است. در دستگاه مختصات موضعی این تغییر را میتوان بصورت زیر در نظر گرفت:

انرژی در واحد حجم که در این حالت در واحد  $\sigma = E(\epsilon - \epsilon_0)$  میشود، در اثر تغییر بصورت می باشد که میتوان آنرا بشکل زیر نوشت:

$$U_{dv} = 1/2 \sigma \{\epsilon - \epsilon_0\}^T \sigma$$

$$U_{dv} = \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0)^T E (\epsilon - \epsilon_0) \quad U_L = \int_L \frac{1}{2} (\epsilon - \epsilon_0)^T E (\epsilon - \epsilon_0) A dx$$

کل انرژی حاصل از انتگرال گیری بر طول عضو

$$U = \sum_e \frac{1}{2} A_e \frac{\ell_e}{2} \int_{+1}^{-1} (\epsilon - \epsilon_0)^T E_e (\epsilon - \epsilon_0) d\xi$$

$$U = \sum \frac{1}{2} \delta^{\epsilon T} \left( E_e A_e \frac{\ell_e}{2} \int_{-1}^{+1} B^T B d\xi \right) \delta^{\epsilon} - \sum \delta^{\epsilon T} E_e A_e \ell_e \epsilon_0 \int_{-1}^{+1} B^T d\xi + \sum \frac{1}{2} E_e A_e \ell_e \epsilon_0^2$$

با توجه به رابطه

$$\epsilon = B \delta$$

با اعمال شرط حداقل شدن انرژی بر روی عضو، جمله آخر بی اثر بوده زیرا تنها یک مقدار ثابت را بدست میدهد. جمله اول سمت راست، ماتریس سختی را مشخص می کند و جمله دوم بردار نیرو بر روی جزء در اثر تغییر درجه حرارت را ارائه می نماید بطوریکه:

$$f_t^{ie} = E_e A_e \ell_e \epsilon_0 \int_{-1}^{+1} B^T d\xi$$

با توجه به رابطه  $B = [-1 \ 1]/(x_2 - x_1)$  عضو یک بعدی و اینکه  $\epsilon_0 = \alpha \Delta T$  است میتوان نوشت:

$$f_t^{ie} = E_e A_e \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ +1 \end{Bmatrix}$$

$\Delta T$  در رابطه فوق تغییر درجه حرارت در جزء بطور متوسط است.

$\alpha$  ضریب افزایش طول در اثر تغییر درجه حرارت و نیز  $\epsilon_0$  میر شکل نسبی در اثر تغییر درجه حرارت در عضو میباشد.

رابطه نیروی بدست آمده لازم است به مختصات کلی انتقال داده شود. قابل ذکر است که میزان انرژی حاصل شده در هر دو دستگاه مختصات کلی و موضعی

یکسان می باشد. بنابراین:

$$\delta^{\epsilon T} f_t^{ie} = \delta^T f_t^e$$

$f_t^e$  بردار نیرو در دستگاه مختصات کلی است.

$$\delta^{\epsilon} = L \delta$$

$$\delta^T L^T f_t^{ie} = \delta^T f_t^e \quad L^T f_t^{ie} = f_t^e$$

$$L = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix}$$

با استفاده از ماتریس انتقال  $L$ :

$$f_t^e = L^T f_t^{ie}$$

$$f_t^e = E_e A_e \epsilon_0 \begin{Bmatrix} -l \\ -m \\ l \\ m \end{Bmatrix}$$

بارهای ناشی از حرارت همراه با اثر بارهای اعمال شده خارجی را میتوان بطور مشابه در بردار اصلی  $F$  جایگذاری نمود. با بدست آمدن تغییر شکلها میتوان

با استفاده از رابطه  $\sigma = E \{\epsilon - \epsilon_0\}$  تنشها را بدست آورد یعنی:

$$\sigma = \frac{E_e}{\ell_e} \{-l \ -m \ l \ m\} \delta - E_e \alpha \Delta T$$

مثال:

خرپای نشان داده شده در شکل با چهار عضو مورد نظر است. با توجه به

$$\text{اینکه } \alpha = \frac{1}{150000} \frac{1}{^\circ F} E = 29.5 \times 10^6 \text{ Psi}$$

در صورتیکه در میله 2 و 3 درجه حرارت به میزان  $50^\circ F$  شش یافته و هیچگونه باری به خرپا وارد نشود تغییر مکان گره ها و تنش در اعضا را بدست آورید.

در صورتیکه تکیه گاه زیر گره شماره 2 نشست برابر  $0.12^\circ$  بهت قائم داشت باشد. علاوه بر آن دو بار  $25000 \text{ lb}$  و  $20000 \text{ lb}$  مطابق شکل به گره های 3 و 2 وارد شده باشد معادلات را  $K\hat{\delta} = \hat{F}$  بد.  $K$  ماتریس سختی و بردار نیروی کلی  $\hat{F}$  از آن است.

ماتریس سختی این خرپا قبلا در مثال 1 بدست آمده است تنها بردار کلی نیرو با توجه به اثر تغییر درجه حرارت بایستی بدست آید با توجه به افزایش درجه حرارت در اعضا 2 و 3 معادله کلی ارائه شده میتوان نوشت:

$$f_i^e = E_e A_e \varepsilon_0 \begin{Bmatrix} -l \\ -m \\ l \\ m \end{Bmatrix}$$

$$f_i^2 = \frac{29.5 \times 10^6 \times 50 \times 1}{150000} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ lb}$$

$$f_i^3 = \frac{29.5 \times 10^6 \times 50 \times 1}{150000} \begin{Bmatrix} -0.8 \\ -0.6 \\ 0.8 \\ 0.6 \end{Bmatrix} \text{ lb}$$

بردارهای نیروی بدست آمده را میتوان در بردار کلی  $\hat{F}$  جایگزین نمود.

با حذف سطرها و ستونهای درجات آزادی محدود شده:

$$\frac{29.5 \times 10^6}{600} \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 22.68 & 5.76 \\ 0 & 5.76 & 24.32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_3 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 7866.7 \\ 15733.3 \end{Bmatrix}$$

حال معادلات بصورت زیر است.

مقادیر تنش در اعضا را میتوان از

$$\begin{Bmatrix} \delta_3 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.003951 \\ 0.01222 \end{Bmatrix} \text{ in}$$

$$\sigma = \frac{E_e}{\ell_e} \{-l \quad -m \quad l \quad m\} \delta - E_e \alpha \Delta t$$

بدست آورد:

$$\sigma_2 = \frac{29.5 \times 10^6}{30} \{0 \quad 1 \quad 0 \quad 1\} \begin{Bmatrix} 0.003951 \\ 0.01222 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \frac{29.5 \times 10^6 \times 50}{150000} = 2183 \text{ Psi}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2183 \\ -3643 \\ 2914 \end{Bmatrix} \text{ Psi}$$

از طرفی تکیه گاه زیر گره 2 به میزان 0.12 اینچ بطور عمودی پایین تر اجرا شده و از طرف دیگر دو نیروی مورد نظر بر گره های 2 و 3 اعمال شده است. برای حل میتوان یک فنر با سختی  $C$  را در نظر گرفت و سختی آنرا به عناصر قطری ماتریس سختی در درجات آزادی که میزان آن تعریف شده است، اضافه نمود.  $C$  را میتوان یک مقدار بزرگ مثلا  $10^4$  برابر یکی از سختیهای قطری در ماتریس سختی اصلی سازه در نظر گرفت.

از طرف دیگر نیرویی که در اثر وجود این فنر فرضی و تغییر مکانهای تعریف شده در سیستم حاصل می شود برابر  $Ca$  می باشد که  $a$  تغییر مکان تعریف شده است. جمله  $Ca$  باید در بردار نیروی کلی جایگذاری شود. با توجه به تغییر مکان 0.12 اینچ، مقدار این نیرو برابر  $0.12C$  می باشد که به چهارمین عضو بردار نیروی اصلی اضافه خواهد گردید.

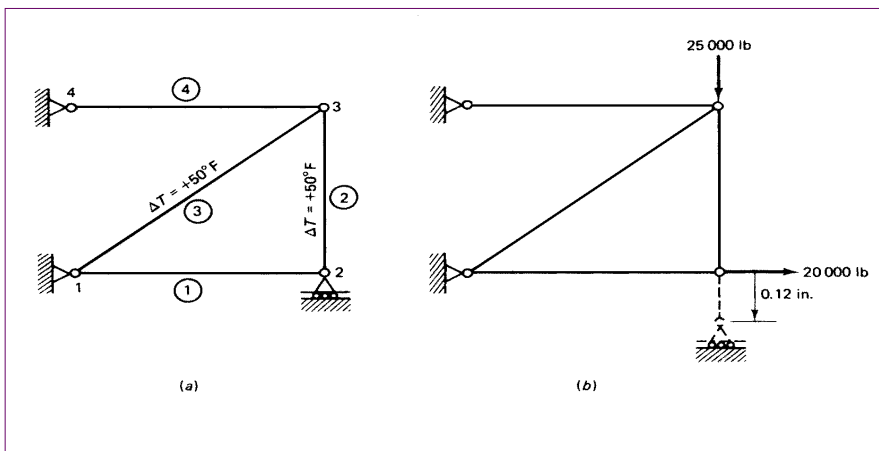
(جمله چهارم مربوط به نیروی قائم در گره 2 می باشد.) ماتریس سختی تغییر شکل یافته به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{array}{c}
 29.5 \times 10^6 \\
 600
 \end{array}
 \begin{array}{cccccccc}
 22.68 + C & 5.76 & -15 & 0 & -7.68 & -5.76 & 0 & 0 \\
 & 4.32 + C & 0 & 0 & -5.76 & -4.32 & 0 & 0 \\
 & & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 20 + C & 0 & -20 & 0 & 0 \\
 & & & & 22.68 & 5.76 & -15 & 0 \\
 & & & & & 24.32 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 15 + C & 0 \\
 & & & & & & & C
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \delta_1 \\
 \delta_2 \\
 \delta_3 \\
 \delta_4 \\
 \delta_5 \\
 \delta_6 \\
 \delta_7 \\
 \delta_8
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 20000 \\
 -0.12C \\
 0 \\
 -25000 \\
 0 \\
 0
 \end{array}$$

تقرینه

$$\begin{array}{c}
 \delta_3 \\
 \delta_4 \\
 \delta_5 \\
 \delta_6
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 0.0271200 \\
 -0.1200145 \\
 0.0323242 \\
 -0.1272606
 \end{array}
 \text{ in}
 \begin{array}{c}
 \sigma_1 \\
 \sigma_2 \\
 \sigma_3 \\
 \sigma_4
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 20000 \\
 -7125.3 \\
 -29791.7 \\
 23833.3
 \end{array}
 \text{ psi}$$

تنش ها:



مثال: مختصات دو گره عضو خریپای شکل زیر، در دستگاه دکارتی، نشان داده شده است.

اگر بردار تغییر مکان گره ها بصورت باشد. مطلوبست:

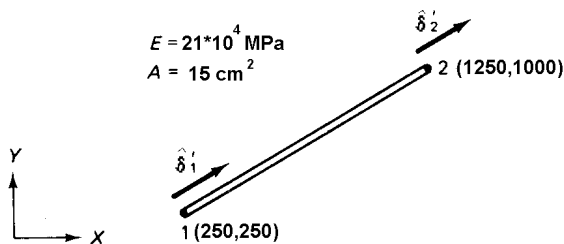
(الف) بردار

(ب) تنش در عضو

(ج) ماتریس سختی

(د) انرژی کرنشی در عضو

(الف)



$$l_e = \sqrt{(1250 - 250)^2 + (1000 - 250)^2} = 1250 \text{ mm}$$

$$l = \frac{x_2 - x_1}{l_e} = \frac{1250 - 250}{1250} = 0.8$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{l_e} = \frac{1000 - 250}{1250} = 0.6$$

$$\underline{\delta}^e = L \underline{\delta}^e = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1^e \\ \delta_2^e \\ \delta_3^e \\ \delta_4^e \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \delta_1^e \\ \delta_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 40 \\ 25 \\ 50 \\ 100 \end{Bmatrix} \times 10^{-2} = \begin{Bmatrix} 47 \\ 100 \end{Bmatrix} \times 10^{-2} \text{ mm}$$

$$\sigma^e = E_e \underline{B} L \underline{\delta}^e \quad (\text{ب})$$

$$\sigma^e = E_e \frac{1}{l_e} [-1 \quad +1] \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} \underline{\delta}^e$$

$$\sigma^e = \frac{E_e}{l_e} [-l \quad -m \quad l \quad m] \underline{\delta}^e$$

$$\sigma^e = \frac{21 \times 10^4}{1250} [-0.8 \quad -0.6 \quad 0.8 \quad 0.6] \begin{Bmatrix} 40 \\ 25 \\ 50 \\ 100 \end{Bmatrix} \times 10^{-2} = 89.04 \text{ N/mm}^2$$

(ج)

$$U = \frac{1}{2} \int_V \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} dv$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\underline{B} L \underline{\delta}^e)^T (E_e \underline{B} L \underline{\delta}^e) dv$$

$$k = \int_V \underline{L}^T \underline{B}^T E_e \underline{B} L dv$$

$$U = \frac{1}{2} \underline{\delta}^{eT} \int_V \underline{L}^T \underline{B}^T E_e \underline{B} L dv \underline{\delta}^e$$

$$k = \frac{l_e E_e A_e}{2} \int_{-1}^{+1} \underline{L}^T \underline{B}^T \underline{B} L d\xi$$



$$k_e = \frac{E_c A_c}{l_e} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ & m^2 & -lm & -m^2 \\ & & l^2 & lm \\ \text{قرینه} & & & m^2 \end{bmatrix} = \frac{(21 \times 10^4)(15 \times 10^2)}{1250} \begin{bmatrix} 0.64 & 0.48 & -0.64 & -0.48 \\ & 0.36 & -0.48 & -0.36 \\ & & 0.64 & 0.48 \\ \text{قرینه} & & & 0.36 \end{bmatrix}$$

$$U_e = \frac{1}{2} \hat{\delta}^T k' \hat{\delta} \quad (د)$$

$$U_e = \frac{752 \times 10^3}{2} [40 \ 25 \ 50 \ 100] \begin{bmatrix} 0.64 & 0.48 & -0.64 & -0.48 \\ & 0.36 & -0.48 & -0.36 \\ & & 0.64 & 0.48 \\ \text{قرینه} & & & 0.36 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 40 \\ 25 \\ 50 \\ 100 \end{Bmatrix}$$

$$U_e = \frac{252 \times 10^3}{2} (2809) = 353934 \times 10^3 \quad N - mm$$

## تعاریف و کلیات خرابای سه بعدی

اجزای خراباهای سه بعدی اصولاً مشابه میله های دو نیرویی در فضا می باشند. دستگاه مختصات موضعی تنها با محور در طول جزء مشخص می شود.

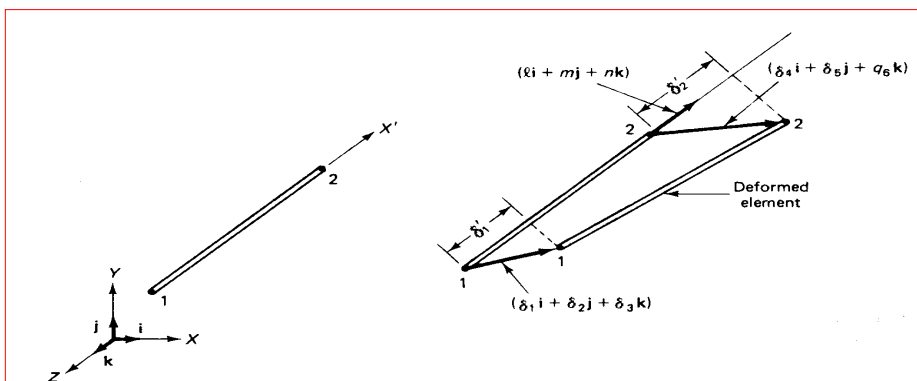
$$\hat{\delta}' = \{\hat{\delta}'_1, \hat{\delta}'_2\}^T$$

تغییر مکان دو سر یک عضو را در دستگاه مختصات موضعی :

در صورتیکه این تغییر مکان در دستگاه

$$\delta = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6\}^T$$

مختصات کلی دارای 6 جمله بصورت زیر است.



روابط زیر بین تغییر مکانها در دستگاه مختصات موضعی و کلی :

$$\hat{\delta}'_1 = l\delta_1 + m\delta_2 + n\delta_3$$

$$\hat{\delta}'_2 = l\delta_4 + m\delta_5 + n\delta_6$$

$$\hat{\delta}' = \underline{L}\delta$$

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{bmatrix}$$

$$K_e = \frac{E_e A_e}{\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ l^2 & lm & ln & -l^2 & -lm & -ln \\ lm & m^2 & mn & -lm & -m^2 & -mn \\ ln & mn & n^2 & -ln & -mn & -n^2 \\ -l^2 & -lm & -ln & l^2 & lm & ln \\ -lm & -m^2 & -mn & lm & m^2 & mn \\ -ln & -mn & -n^2 & ln & mn & n^2 \end{bmatrix}$$

$$\ell_e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$l = \cos(x', x) \quad m = \cos(x', y) \quad n = \cos(x', z)$$

$$l = \frac{x_2 - x_1}{\ell_e} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{\ell_e} \quad n = \frac{z_2 - z_1}{\ell_e}$$

این ارتباط را می توان با ماتریس انتقال  $L$  نشان داد :

در حالیکه  $n, m, l$  کسینوسهای هادی محور در دستگاه مختصات کلی نسبت به محورهای  $Z, X, Y$  می باشند. به این ترتیب ماتریس سختی یک عضو میله ای در دستگاه مختصات کلی را می توان بصورت زیر نشان داد.

طول یک میله را می توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$\sigma = E_e \varepsilon$$

محاسبه تنشها :

$$\sigma = E_e \frac{\hat{\delta}'_2 - \hat{\delta}'_1}{\ell} = \frac{E_e}{\ell_e} \{-1, +1\} \begin{Bmatrix} \hat{\delta}'_1 \\ \hat{\delta}'_2 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma = \frac{E_e}{\ell_e} \{-1, +1\} L \delta$$

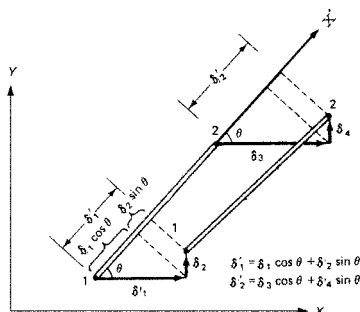
$$\sigma = \frac{E_e}{\ell_e} \{-l, -m, -n, l, m, n\} \delta$$





## تحلیل خریاهای دو و سه بعدی (خرپای دوبعدی)

بر اساس تعریف خرپا سازه ای است که اعضاء آن تنها تحت کشش یا فشار باشد. بدین صورت اعضاء خرپا را اعضاء دو نیرویی می گویند. با توجه به فرض نیروهای خرپا تنها به مفصلها اعمال می شوند.



در قالب روش اجزاء محدود، تنها فرق خرپا با اعضاء یک محوری در آن است که اعضاء خرپا علیرغم آنکه اعضایی یک محوری هستند اما جهات مختلفی را دارا می باشند. بدین جهت برای حل یک خرپا در قالب روش اجزاء محدود ناگزیر بایستی دستگاه مختصات موضعی اعضاء و دستگاه مختصات کلی سیستم معرفی گردند. در شکل (1-4) یک عضو خرپا در دستگاه مختصات موضعی و کلی نشان داده شده است. شماره گذاری های این عضو که دارای دو گره است به ترتیب بصورت 1 و 2 می باشد در دستگاه مختصات موضعی جهت محور از نقطه 1 به سمت نقطه 2 می باشد. دستگاه مختصات کلی  $X-Y$  ثابت بوده و عموماً به جهت عضو بستگی ندارد. مطابق قانون دست راست در صورت وجود محور  $Z$ ، جهت آن عمود بر صفحه و از آن بطرف بالا فرض می گردد.

## تغییر دستگاه مختصات درجات آزادی

در دستگاه مختصات کلی، هر گره دارای دو درجه آزادی است. در این حالت شماره گره ها طوری انتخاب شده اند که برای گره  $j$  درجه آزادی  $\delta_{2j-1}$  و  $\delta_{2j}$  مطابقت دارد. از طرف دیگر تغییر مکانهای گره در دستگاه مختصات کلی بصورت  $\delta_1$  و  $\delta_2$  باشند. و تغییر مکان گره های 1 و 2 در دستگاه مختصات موضعی فرض شده اند. بنابراین بردار تغییر مکان گره ها را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$\delta' = \{\delta'_1, \delta'_2\}^T \quad \text{در دستگاه موضعی:}$$

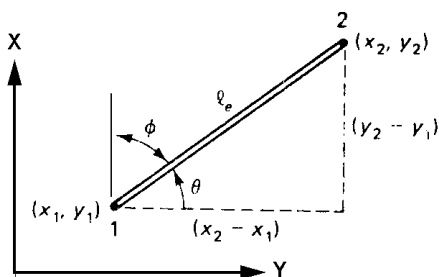
$$\delta = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}^T \quad \text{در دستگاه کلی:}$$

ارتباط دو در دستگاه مختصات:

$$\delta'_1 = \delta_1 \cos \theta + \delta_2 \sin \theta$$

$$\delta'_2 = \delta_3 \cos \theta + \delta_4 \sin \theta$$

$$\delta' = L \delta$$



## ارتباط دو در دستگاه مختصات

ارتباط بین  $\delta, \delta'$  را میتوان با توجه به اینکه  $\delta$  مجموعه تصاویر  $\delta_1, \delta_2$  روی محور است بدست می آید.

جهت سهولت کار لازم است، کسینوسهای هادی را برای یک عضو در دستگاه مختصات صفحه ای بصورت  $l, m$  یعنی  $l = \cos \theta$ ،  $m = \sin \theta$  تعریف نمود. کسینوسهای هادی بطور عام، کسینوس زوایایی می باشند که یک امتداد با محورهای مختصات می سازد. در حالت عمومی معادلات فوق را میتوان بصورت ماتریس زیر نوشت:

$$\delta' = L\delta$$

$$\begin{Bmatrix} \delta'_1 \\ \delta'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix}$$

برای بدست آوردن مقادیر  $l, m$  میتوان از مختصات گره های ابتدا و انتهای عضو استفاده نمود.

$$l = \cos \theta = \frac{x_2 - x_1}{\ell_e}$$

$$m = \sin \theta = \frac{y_2 - y_1}{\ell_e}$$

$$\ell_e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

## ماتریس سختی

$$k'_e = \frac{A_e E_e}{\ell_e} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی در دستگاه مختصات موضعی :

در رابطه فوق  $A_e$  سطح مقطع و طول و  $E_e$  مدول الاستیسیته عضو است. برای تشکیل ماتریس سختی کل اعضاء در دستگاه مختصات کلی لازم است این ماتریس در صورتیکه جهات درجات آزادی آن منطبق بر جهات درجات آزادی در دستگاه مختصات کلی نباشد. به دستگاه یاد شده انتقال یابد. برای این منظور انرژی ناشی از تغییر شکلهای نسبی داخلی عضو را میتوان در نظر گرفت. این انرژی که یک مقدار عددی است، در دستگاه مختصات موضعی بصورت زیر است:

$$U_e = \frac{1}{2} \delta'^T k'_e \delta' \quad U_e = \frac{1}{2} \delta^T K_e \delta$$

انرژی ناشی از تغییر شکلهای نسبی در دستگاه مختصات کلی :

$$U_e = \frac{1}{2} \delta^T [L^T k'_e L] \delta$$

$$K_e = L^T k'_e L$$

$$K_e = \frac{A_e E_e}{\ell_e} \begin{bmatrix} l & 0 \\ m & 0 \\ 0 & l \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{A_e E_e}{\ell_e} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix}$$

در رابطه فوق  $K$  ماتریس سختی عضو در دستگاه مختصات کلی است.

## محاسبه تنشها:

$$\sigma = E_e \varepsilon$$

• با توجه به اینکه اعضاء خرپا اعضاء دو نیرویی می باشند.

در رابطه فوق را میتوان با توجه به تغییر طول میله نسبت به طول اولیه آن بدست آورد.

$$\sigma = E_e \frac{\delta'_2 - \delta'_1}{l} = \frac{E_e}{l_e} \{-1, +1\} \begin{Bmatrix} \delta'_1 \\ \delta'_2 \end{Bmatrix}$$

برای انتقال رابطه فوق به

دستگاه مختصات کلی :

$$\sigma = \frac{E_e}{l_e} \{-1, +1\} L \delta$$

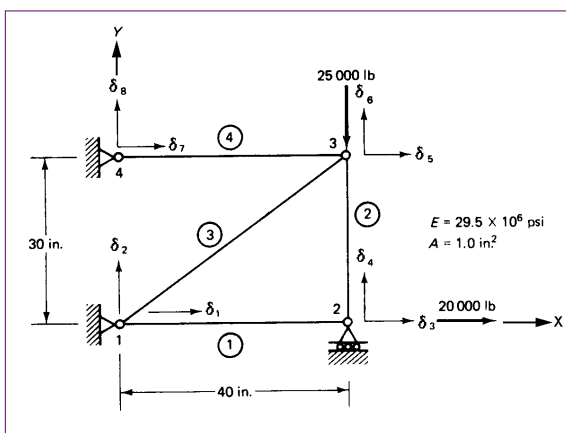
$$\sigma = \frac{E_e}{l_e} \{-l, -m, l, m\} \delta$$

با داشتن تغییر مکانهای گره ها میتوان از رابطه فوق تنشها را بدست آورد.

لازم به ذکر است که این رابطه با فرض مثبت بودن کشش و منفی بودن فشار حاصل شده

است.

**مثال :** خرپای شکل زیر مورد نظر است. در صورتیکه برای تمامی اعضاء  $E = 29.5 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$  و  $A = 1.0 \text{ in}^2$  باشد:



- 1- ماتریس سختی هر عضو را بدست آورید.
- 2- ماتریس سختی کل  $K$  را برای تمام خرپا بدست آورید.
- 3- تغییر مکان گره ها را بدست آورید.
- 4- تنش در هر عضو را پیدا کنید.
- 5- نیروهای عکس العمل تکیه گاهی را حساب کنید.

## مختصات نقاط :

گره	x	y
1	0	0
2	40	0
3	40	30
4	0	30

## جدول اتصال اعضاء :

عضو	l	2	$L_e$	l	m
1	1	2	40	1	0
2	3	2	30	0	-1
3	1	3	50	0.8	0.6
4	4	3	40	1	0

$$K^1 = \frac{A_1 E_1}{\ell_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad K^2 = \frac{A_2 E_2}{\ell_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی جزء 1 و به ترتیب  
ماتریسهای سختی برای اعضاء  
2 و 3 و 4 بدست می آیند:

$$K^3 = \frac{A_3 E_3}{\ell_3} \begin{bmatrix} .64 & .48 & -.64 & -.48 \\ .48 & .36 & -.48 & -.36 \\ -.64 & -.48 & .64 & .48 \\ -.48 & -.36 & .48 & .36 \end{bmatrix} \quad K^4 = \frac{A_4 E_4}{\ell_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{AE}{600} \begin{bmatrix} 22.68 & 5.76 & -15 & 0 & -7.69 & -5.76 & 0 & 0 \\ 5.76 & 4.32 & 0 & 0 & -5.76 & -4.32 & 0 & 0 \\ -15 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & -20 & 0 & 0 \\ -7.68 & -5.76 & 0 & 0 & 22.68 & 5.76 & -15 & 0 \\ -5.76 & -4.32 & 0 & -20 & 5.76 & 24.32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با اعمال شرایط حدى سطرها و ستونهای درجات  
آزادی تکیه گاهها حذف خواهند شد باقیمانده  
ماتریس  $K$  بصورت زیر است.

$$\frac{AE}{600} \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 22.68 & 5.76 \\ 0 & 5.76 & 24.32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_3 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20000 \\ 0 \\ -25000 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \delta_3 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 27.12 \times 10^{-3} \\ 5.65 \times 10^{-3} \\ -22.25 \times 10^{-3} \end{Bmatrix}$$

بردار تغییر مکان گره ها :

## تنش ها:

تنش در اعضاء خرپا را میتوان از معادله ارائه شده بدست آورد. با توجه به اینکه گره های جزء 1 بصورت 1 و 2 می  
باشند بردار تغییر مکان جزء 1 بصورت زیر خواهد بود:

$$\delta = \{0, 0, 27.12 \times 10^{-3}, 0\}^T \text{ in}$$

$$\sigma_1 = \frac{A_1 E_1}{\ell_{e1}} \{-1 \ 0 \ 1 \ 0\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 27.12 \times 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix} = 20000 \text{ psi}$$

برای عضو شماره 2 و بقیه:

$$\sigma_2 = \frac{A_2 E_2}{\ell_{e2}} \{0 \ 1 \ 0 \ -1\} \begin{Bmatrix} 5.65 \times 10^{-3} \\ -22.25 \times 10^{-3} \\ 27.12 \times 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix} = -21880 \text{ psi}$$

$$\sigma_3 = 5208 \text{ psi}, \quad \sigma_4 = 4167 \text{ psi}$$

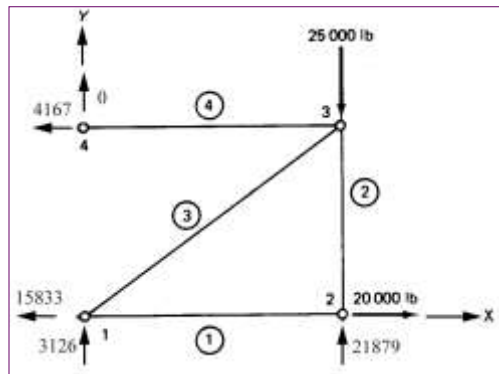
برای یافتن عکس العمل تکیه گاهها لازم است نیروها در جهت درجات آزادی 1، 2، 4، 7، 8  
محاسبه گردند. برای این کار میتوان بردار را در معادلات کلی بدست آمده که بصورت کلی  
است، جایگذاری نمود. در این صورت تنها ردیفهایی از ماتریس  $K$  که متعلق به درجات آزادی  
یاد شده می باشند مورد نیاز هستند بنابراین بخش مورد استفاده اعضاء ماتریس بشکل زیر  
است:



## عکس العمل تکیه گاهها:

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_4 \\ R_7 \\ R_8 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{600} \begin{bmatrix} 22.68 & 5.76 & -15 & 0 & -7.68 & -5.76 & 0 & 0 \\ 5.76 & 4.32 & 0 & 0 & -5.76 & -4.32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -15 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 27.12 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 5.65 \times 10^{-3} \\ -22.25 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_4 \\ R_7 \\ R_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -15833 \\ 3126 \\ 21879 \\ -4167 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ lb}$$



## اثر تغییر درجه حرارت

اثر تغییر درجه حرارت بر روی اعضای یک بعدی خریا تنها بصورت بلند و کوتاه شدن میله ها است که در اثر این تغییر، تنشهایی در اعضاء خریا حاصل خواهد گردید. در معادله تنش - کرنش اثر تغییر درجه حرارت را بصورت کرنشهای حرارتی میتوان در نظر گرفت. اساسا بخشی از کرنش که در مقابل سختی ماده تنش ایجاد می کند برابر تفاضل کرنش کل و کرنش حرارتی است. در دستگاه مختصات موضعی این تغییر را میتوان بصورت زیر در نظر گرفت:  $\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_0)$

انرژی در واحد حجم که در این حالت در واحد طول مطرح میشود، در اثر تغییر بصورت  $U_{dv} = 1/2 \sigma \{\varepsilon - \varepsilon_0\}^T \sigma$  می باشد که میتوان آنرا بشکل زیر نوشت:

$$U_{dv} = \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon_0)^T E (\varepsilon - \varepsilon_0)$$

$$U_L = \int_L \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon_0)^T E (\varepsilon - \varepsilon_0) A dx$$

کل انرژی حاصل از انتگرال گیری عبارت فوق روی جسم :

$$U = \sum_e \frac{1}{2} A_e \frac{\ell_e}{2} \int_{+1}^{-1} (\varepsilon - \varepsilon_0)^T E_e (\varepsilon - \varepsilon_0) d\xi$$

$$U = \sum \frac{1}{2} \delta^{eT} \left( E_e A_e \frac{\ell_e}{2} \int_{-1}^{+1} B^T B d\xi \right) \delta^e - \sum \delta^{eT} E_e A_e \ell_e \varepsilon_0 \int_{-1}^{+1} B^T d\xi + \sum \frac{1}{2} E_e A_e \ell_e \varepsilon_0^2$$

با توجه به رابطه  $\varepsilon = B \delta$

با اعمال شرط حداقل شدن انرژی بر روی عضو، جمله آخر بی اثر بوده زیرا تنها یک مقدار ثابت را بدست میدهد. جمله اول سمت راست، ماتریس سختی را مشخص می کند و جمله دوم بردار نیرو بر روی جزء در اثر تغییر درجه حرارت را ارائه می نماید بطوریکه:

$$f_i^{ve} = E_e A_e \ell_e \varepsilon_0 \int_{-1}^{+1} B^T d\xi$$

با توجه به رابطه  $B = [-1 \quad 1] / (x_2 - x_1)$  برای عضو یک بعدی و اینکه  $\varepsilon_0 = \alpha \Delta T$  است میتوان نوشت:

$$f_i^{ve} = E_e A_e \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ +1 \end{Bmatrix}$$

$\Delta T$  در رابطه فوق تغییر درجه حرارت در جزء بطور متوسط است.

$\alpha$  ضریب افزایش طول در اثر تغییر درجه حرارت و  $\varepsilon_0$  نیز تغییر شکل نسبی در اثر تغییر درجه حرارت در عضو میباشد.

رابطه نیروی بدست آمده لازم است به مختصات کلی انتقال داده شود. قابل ذکر است که میزان انرژی حاصل شده در هر دو دستگاه مختصات کلی و موضعی

یکسان می باشد. بنابراین:

$$\hat{\delta}^T = L \delta$$

$$\hat{\delta}^{eT} f_i^{ve} = \delta^{eT} f_i^e$$

$$\delta^{eT} L^T f_i^{ve} = \delta^{eT} f_i^e \quad L^T f_i^{ve} = f_i^e$$

$f_i^e$  بردار نیرو در دستگاه مختصات کلی است.

$$L = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix}$$

با استفاده از ماتریس انتقال  $L$ :

$$f_i^e = L^T f_i^{ve}$$

$$f_i^e = E_e A_e \varepsilon_0 \begin{Bmatrix} -l \\ -m \\ l \\ m \end{Bmatrix}$$

بارهای ناشی از حرارت همراه با اثر بارهای اعمال شده خارجی را میتوان بطور مشابه در بردار اصلی  $F$  جایگذاری نمود. با بدست آمدن تغییر شکلها میتوان

با استفاده از رابطه  $\sigma = E \{ \varepsilon - \varepsilon_0 \}$  تنشها را بدست آورد یعنی:

$$\sigma = \frac{E_e}{\ell_e} \{ -l \quad -m \quad l \quad m \} \delta - E_e \alpha \Delta T$$

مثال:

خرپای نشان داده شده در شکل با چهار عضو مورد نظر است. با توجه به

$$\text{اینکه } \alpha = \frac{1}{150000} \frac{1}{F} E = 29.5 \times 10^6 \text{ Psi} \text{ باشند:}$$

در صورتیکه در میله 2 و 3 درجه حرارت به میزان  $50^\circ F$  افزایش یافته و هیچگونه باری به خرپا وارد نشود تغییر مکان گره ها و تنش در اعضا را بدست آورید.

در صورتیکه تکیه گاه زیر گره شماره 2 نشست برابر  $0.12''$  در جهت قائم داشت باشد. علاوه بر آن دو بار  $25000 \text{ lb}$  و  $20000 \text{ lb}$  مطابق شکل به گره های 3 و 2 وارد شده باشد معادلات  $K\hat{\delta} = \hat{F}$  را بدست آورید.  $K$  ماتریس سختی و  $F$  بردار نیروی کلی سازه است.

$$f_t^e = E_e A_e \varepsilon_0 \begin{Bmatrix} -l \\ -m \\ l \\ m \end{Bmatrix}$$

ماتریس سختی این خرپا قبلا در مثال 1 بدست آمده است  
تنها بردار کلی نیرو با توجه به اثر تغییر درجه حرارت  
بایستی بدست آید با توجه به افزایش درجه حرارت در  
اعضاء 2 و 3 معادله کلی ارائه شده میتوان نوشت:

$$f_t^2 = \frac{29.5 \times 10^6 \times 50 \times 1}{150000} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{ lb}$$

$$f_t^3 = \frac{29.5 \times 10^6 \times 50 \times 1}{150000} \begin{Bmatrix} -0.8 \\ -0.6 \\ 0.8 \\ 0.6 \end{Bmatrix} \text{ lb}$$

بردارهای نیروی بدست آمده را میتوان در بردار کلی  $\hat{F}$  جایگزین نمود.

با حذف سطرها و ستونهای درجات آزادی محدود شده:

$$\frac{29.5 \times 10^6}{600} \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 22.68 & 5.76 \\ 0 & 5.76 & 24.32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_3 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 7866.7 \\ 15733.3 \end{Bmatrix}$$

حال معادلات بصورت زیر است.

مقادیر تنش در اعضا را میتوان از

$$\begin{Bmatrix} \delta_3 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.003951 \\ 0.01222 \end{Bmatrix} \text{ in}$$

$$\sigma = \frac{E_e}{\ell_e} \{-l \quad -m \quad l \quad m\} \delta - E_e \alpha \Delta t$$

معادله کلی زیر  
بدست آورد:

$$\sigma_2 = \frac{29.5 \times 10^6}{30} \{0 \quad 1 \quad 0 \quad 1\} \begin{Bmatrix} 0.003951 \\ 0.01222 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \frac{29.5 \times 10^6 \times 50}{150000} = 2183 \text{ Psi}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2183 \\ -3643 \\ 2914 \end{Bmatrix} \text{ Psi}$$

از طرفی تکیه گاه زیر گره 2 به میزان 0.12 اینچ بطور عمودی پایین تر اجرا شده و از طرف دیگر دو نیروی مورد نظر بر گره های 2 و 3 اعمال شده است. برای حل میتوان یک فنر با سختی C را در نظر گرفت و سختی آنرا به عناصر قطری ماتریس سختی در درجات آزادی که میزان آن تعریف شده است، اضافه نمود. C را میتوان یک مقدار بزرگ مثلا  $10^4$  برابر یکی از سختیهای قطری در ماتریس سختی اصلی سازه در نظر گرفت.

از طرف دیگر نیرویی که در اثر وجود این فنر فرضی و تغییر مکانهای تعریف شده در سیستم حاصل می شود برابر Ca می باشد که a تغییر مکان تعریف شده است. جمله Ca باید در بردار نیروی کلی جایگذاری شود. با توجه به تغییر مکان 0.12 اینچ، مقدار این نیرو برابر 0.12C می باشد که به چهارمین عضو بردار نیروی اصلی اضافه خواهد گردید.

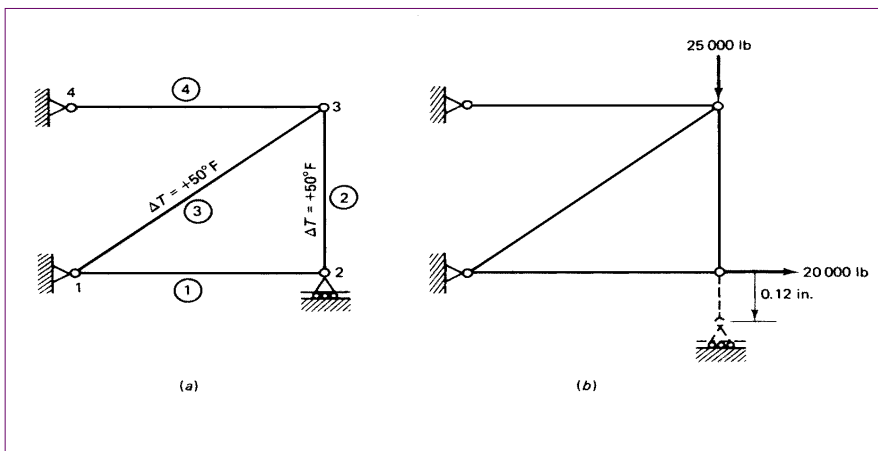
(جمله چهارم مربوط به نیروی قائم در گره 2 می باشد.) ماتریس سختی تغییر شکل یافته به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{array}{c}
 29.5 \times 10^6 \\
 600
 \end{array}
 \begin{array}{cccccccc}
 22.68 + C & 5.76 & -15 & 0 & -7.68 & -5.76 & 0 & 0 \\
 & 4.32 + C & 0 & 0 & -5.76 & -4.32 & 0 & 0 \\
 & & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & 20 + C & 0 & -20 & 0 & 0 \\
 & & & & 22.68 & 5.76 & -15 & 0 \\
 & & & & & 24.32 & 0 & 0 \\
 & & & & & & 15 + C & 0 \\
 & & & & & & & C
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \delta_1 \\
 \delta_2 \\
 \delta_3 \\
 \delta_4 \\
 \delta_5 \\
 \delta_6 \\
 \delta_7 \\
 \delta_8
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 20000 \\
 -0.12C \\
 0 \\
 -25000 \\
 0 \\
 0
 \end{array}$$

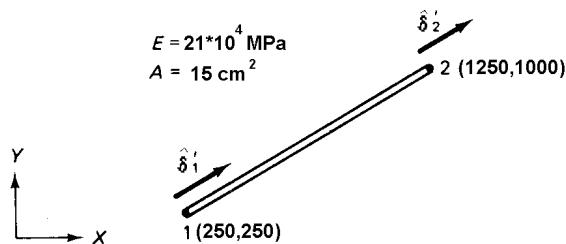
تقریبه

$$\begin{array}{c}
 \delta_3 \\
 \delta_4 \\
 \delta_5 \\
 \delta_6
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 0.0271200 \\
 -0.1200145 \\
 0.0323242 \\
 -0.1272606
 \end{array}
 \text{ in}
 \begin{array}{c}
 \sigma_1 \\
 \sigma_2 \\
 \sigma_3 \\
 \sigma_4
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 20000 \\
 -7125.3 \\
 -29791.7 \\
 23833.3
 \end{array}
 \text{ psi}$$

تنش ها:



**مثال:** مختصات دو گره عضو خرپای شکل زیر، در دستگاه دکارتی، نشان داده شده است. اگر بردار تغییر مکان گره ها بصورت باشد. مطلوبست:



- (الف) بردار  
(ب) تنش در عضو  
(ج) ماتریس سختی  
(د) انرژی کرنشی در عضو  
(الف)

$$l_e = \sqrt{(1250 - 250)^2 + (1000 - 250)^2} = 1250 \text{ mm}$$

$$l = \frac{x_2 - x_1}{l_e} = \frac{1250 - 250}{1250} = 0.8$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{l_e} = \frac{1000 - 250}{1250} = 0.6$$

$$\underline{\hat{\delta}}^e = \underline{L} \underline{\hat{\delta}}^e = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\delta}_1^e \\ \hat{\delta}_2^e \\ \hat{\delta}_3^e \\ \hat{\delta}_4^e \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{\delta}_1^e \\ \hat{\delta}_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 40 \\ 25 \\ 50 \\ 100 \end{Bmatrix} \times 10^{-2} = \begin{Bmatrix} 47 \\ 100 \end{Bmatrix} \times 10^{-2} \text{ mm}$$

$$\underline{\sigma}^e = E_e \underline{B} \underline{\hat{\delta}}^e \quad (\text{ب})$$

$$\underline{\sigma}^e = E_e \frac{1}{l_e} [-1 \quad +1] \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix} \underline{\hat{\delta}}^e$$

$$\underline{\sigma}^e = \frac{E_e}{l_e} [-l \quad -m \quad l \quad m] \underline{\hat{\delta}}^e$$

$$\underline{\sigma}^e = \frac{21 \times 10^4}{1250} [-0.8 \quad -0.6 \quad 0.8 \quad 0.6] \begin{Bmatrix} 40 \\ 25 \\ 50 \\ 100 \end{Bmatrix} \times 10^{-2} = 89.04 \text{ N/mm}^2$$

(ج)

$$U = \frac{1}{2} \int_V \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dv$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\underline{B} \underline{\hat{\delta}}^e)^T (E \underline{B} \underline{\hat{\delta}}^e) dv$$

$$k = \int_V \underline{L}^T \underline{B}^T E \underline{B} L dv$$

$$U = \frac{1}{2} \underline{\hat{\delta}}^{eT} \int_V \underline{L}^T \underline{B}^T E \underline{B} L dv \underline{\hat{\delta}}^e$$

$$k = \frac{l_e E_e A_e}{2} \int_{-1}^{+1} \underline{L}^T \underline{B}^T \underline{B} L d\xi$$

$$k_e = \frac{E_c A_c}{l_e} \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ & m^2 & -lm & -m^2 \\ & & l^2 & lm \\ \text{قرینه} & & & m^2 \end{bmatrix} = \frac{(21 \times 10^4)(15 \times 10^2)}{1250} \begin{bmatrix} 0.64 & 0.48 & -0.64 & -0.48 \\ & 0.36 & -0.48 & -0.36 \\ & & 0.64 & 0.48 \\ \text{قرینه} & & & 0.36 \end{bmatrix}$$

$$U_e = \frac{1}{2} \hat{\delta}^T k' \hat{\delta}$$

(د)

$$U_e = \frac{752 \times 10^3}{2} [40 \ 25 \ 50 \ 100] \begin{bmatrix} 0.64 & 0.48 & -0.64 & -0.48 \\ & 0.36 & -0.48 & -0.36 \\ & & 0.64 & 0.48 \\ \text{قرینه} & & & 0.36 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 40 \\ 25 \\ 50 \\ 100 \end{Bmatrix}$$

$$U_e = \frac{252 \times 10^3}{2} (2809) = 353934 \times 10^3 \quad N - mm$$

## تعاریف و کلیات خرابای سه بعدی

اجزای خراباهای سه بعدی اصولاً مشابه میله های دو نیرویی در فضا می باشند. دستگاه مختصات موضعی تنها با محور در طول جزء مشخص می شود.

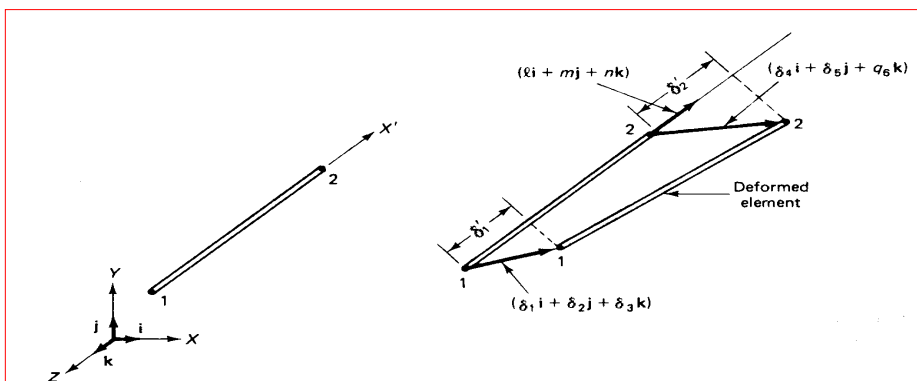
$$\hat{\delta}' = \{\hat{\delta}'_1, \hat{\delta}'_2\}^T$$

تغییر مکان دو سر یک عضو را در دستگاه مختصات موضعی :

در صورتیکه این تغییر مکان در دستگاه

$$\delta = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6\}^T$$

مختصات کلی دارای 6 جمله بصورت زیر است.



روابط زیر بین تغییر مکانها در دستگاه مختصات موضعی و کلی :

$$\hat{\delta}'_1 = l\delta_1 + m\delta_2 + n\delta_3$$

$$\hat{\delta}'_2 = l\delta_4 + m\delta_5 + n\delta_6$$

$$\hat{\delta}' = \underline{L}\delta$$

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} l & m & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & n \end{bmatrix}$$

$$K_e = \frac{E_e A_e}{\ell_e} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ l^2 & lm & ln & -l^2 & -lm & -ln \\ lm & m^2 & mn & -lm & -m^2 & -mn \\ ln & mn & n^2 & -ln & -mn & -n^2 \\ -l^2 & -lm & -ln & l^2 & lm & ln \\ -lm & -m^2 & -mn & lm & m^2 & mn \\ -ln & -mn & -n^2 & ln & mn & n^2 \end{bmatrix}$$

$$\ell_e = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$l = \cos(x', x) \quad m = \cos(x', y) \quad n = \cos(x', z)$$

$$l = \frac{x_2 - x_1}{\ell_e} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{\ell_e} \quad n = \frac{z_2 - z_1}{\ell_e}$$

این ارتباط را می توان با ماتریس انتقال  $L$  نشان داد :

در حالیکه  $n, m, l$  کسینوسهای هادی محور در دستگاه مختصات کلی نسبت به محورهای  $Z, X, Y$  می باشند. به این ترتیب ماتریس سختی یک عضو میله ای در دستگاه مختصات کلی را می توان بصورت زیر نشان داد.

طول یک میله را می توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$\sigma = E_e \varepsilon$$

محاسبه تنشها :

$$\sigma = E_e \frac{\hat{\delta}'_2 - \hat{\delta}'_1}{\ell} = \frac{E_e}{\ell_e} \{-1, +1\} \begin{Bmatrix} \hat{\delta}'_1 \\ \hat{\delta}'_2 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma = \frac{E_e}{\ell_e} \{-1, +1\} L \delta$$

$$\sigma = \frac{E_e}{\ell_e} \{-l, -m, -n, l, m, n\} \delta$$





