# فیزیک

جلد اول

(ویراست چهارم)

رابرت رزنیک، دیوید هالیدی، کِنِت اس. کرین



ترجمهٔ

جلال‌الدین پاشایی راد، محمد خرمی، محمدرضا بهاری

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

*Physics*
(4 th Edition)
Volume 1
Robert Resnick, David Halliday, Kenneth S. Krane
John Wiley & Sons, 1992

**فیزیک**
**(ویراست چهارم)**
**جلد اول**
**تألیف رابرت رزنیک، دیوید هالیدی، کِنِت اس. کرین**
**ترجمهٔ دکتر جلال‌الدین پاشایی راد، دکتر محمد خرمی، محمدرضا بهاری**

نسخه‌پرداز: زهرا دلاوری
حروفچین: پروین حاج‌اسماعیل زنجانی
مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۸۱
تعداد ۵۰۰۰
چاپ و صحافی: معراج


فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

رسنیک، رابرت، ۱۹۲۳ - م. Resnick, Robert
فیزیک / رابرت رزنیک، دیوید هالیدی، کنت اس. کرین؛ ترجمهٔ جلال‌الدین پاشایی‌راد، محمد خرمی، محمدرضا بهاری. ــ تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۱ـ .
ج.: مصور، جدول، نمودار. ـ (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۱۰۹۲. فیزیک؛ ۹۵)
ISBN 964-01-8176-5 (دوره)
ISBN 964-01-1092-2 (ج. ۱)

فهرست‌نویسی براساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی: Physics 4th ed, 1992.
در چاپهای قبلی دیوید هالیدی به‌عنوان نویسندهٔ اول ذکر شده است.
واژه‌نامه.
۱. فیزیک. الف. هالیدی، دیوید، ۱۹۱۶ - م. Halliday, David ب. کرین، کنت Krane, Kenneth S. ج. پاشایی‌راد، جلال‌الدین، ۱۳۲۴ - ، مترجم. د. خرمی، محمد، ۱۳۲۸ - ، مترجم. ه. بهاری، محمدرضا، ۱۳۲۷ - ، مترجم. و. مرکز نشر دانشگاهی. ز. عنوان.
۵۳۰ QC۲۱/۲/م۲ف۸۷
۱۳۸۱
کتابخانهٔ ملی ایران م۸۱-۳۷۸۵۹

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

# فهرست

# پیشگفتار

اولین ویراست این کتاب با عنوان فیزیک برای دانشجویان علوم و مهندسی در سال ۱۹۶۰، و سومین ویراست آن با عنوان فیزیک در سال ۱۹۷۷ منتشر شد. کتابی که در دست دارید ویراست چهارم (۱۹۹۲) است که همکار جدیدی هم به مؤلفان قبلی آن اضافه شده است.

کتاب را روزآمد کرده‌ایم و ملاحظات مربوط به پیشرفتهای جدید فیزیک و آموزش فیزیک را در آن گنجانده‌ایم. برای تغییراتی که در این ویراست اعمال شده است، علاوه بر مطالعات خودمان در بارهٔ مباحث متعدد، از نظریات بسیاری از خوانندگان ویراستهای قبلی هم استفاده کرده‌ایم، و توصیه‌های داوران و مرورکنندگان متعهد کتاب را هم به کار گرفته‌ایم. تغییرات و اصلاحاتی که در این ویراست اعمال کرده‌ایم از این قرارند:

۱. ملاحظات مربوط به انرژی را، از قضیهٔ کار و انرژی گرفته تا ترمودینامیک، در تمام کتاب یکدست کرده‌ایم. مثلاً، کار را همیشه کاری گرفته‌ایم که روی سیستم انجام می‌شود، و در نتیجه، چه در مکانیک و چه در ترمودینامیک، برای کار از علامت قراردادیِ یکسانی استفاده کرده‌ایم. توجه به این قبیل جزئیات، به دانشجویان در فهم مفاهیم مشترکی که در زمینه‌های مختلف فیزیک ظاهر می‌شوند کمک می‌کند.

۲. نسبیت خاص را، که در ویراستهای قبلی به‌صورت یک مبحث تکمیلی آورده می‌شد، در خودِ متن گنجانده‌ایم. دو فصل را به نسبیت خاص اختصاص داده‌ایم: یکی را بعد از امواج مکانیکی و دیگری را بعد از امواج الکترومغناطیسی آورده‌ایم. مفاهیم مربوط به نسبیت خاص (از قبیل حرکت نسبی، چارچوب مرجع، تکانه، و انرژی) را در ضمن بسیاری از مباحث کتاب، در فصلهای سینماتیک، دینامیک، و الکترومغناطیس بررسی کرده‌ایم. چنین رهیافتی را باید جزئی از فیزیک کلاسیک تلقی کرد. اما برای همراهی با مدرسانی که مایل‌اند نسبیت خاص را به پایانِ درس موکول کنند، مطالب مربوط به آن را در بخشهای مشخصی از هر فصل آورده‌ایم تا بشود فعلاً از کنارشان گذشت.

۳. در مقایسه با ویراست سوم، فصلهای ۲ و ۳ را جابه‌جا کرده‌ایم و در نتیجه سینماتیک یک‌بعدی قبل از بردارها آمده است. تمام مطالب مربوط به تکانهٔ زاویه‌ای را به فصل ۱۳ برده‌ایم (که بعد از سینماتیک دورانی و دینامیک دورانی می‌آید، و در نتیجه ترتیب ارائهٔ مطالب حرکت دورانی شبیه به ترتیب ارائهٔ مطالب حرکت انتقالی شده است). فصلهای مربوط به ترمودینامیک را قدری جابه‌جا و بازنویسی اساسی کرده‌ایم، و ضمن تأکیدِ بیشتر بر جنبه‌های آماری، رنگ و بوی جدیدی به موضوع داده‌ایم.

۴. در پاسخ به درخواستهای خوانندگان، چندین مبحث کلاسیکی جدید، از جمله تحلیل ابعادی، نیروی مقاومت شاره‌ها، کشسانی، کشش سطحی، چسبندگی (ویسکوزیته)، و آکوستیک موسیقیایی را (به مطالب ویراست قبلی) اضافه کرده‌ایم.

۵. مفاهیم جدیدتر را هم در تمام کتاب پراکنده‌ایم: از جمله کوانتش انرژی و تکانهٔ زاویه‌ای، واپاشی هسته‌ای و ذرات بنیادی، نظریهٔ آشوب، نسبیت عام، و آمارکوانتومی. منظورمان ازگنجاندن این مطالب، بررسی منسجم فیزیک جدید نبوده است (که مفاهیم آن را در ۸ فصل اضافی نسخهٔ مفصلِ جلد دوم آورده‌ایم)، بلکه می‌خواسته‌ایم مرزهای فیزیک کلاسیک و ارتباط آن با فیزیک جدید را به دانشجو نشان بدهیم.

۶. مسئله‌های آخر فصل را افزایش چشمگیری داده‌ایم. در این ویراست ۱۵۱۹ مسئله آورده‌ایم که در مقایسه با ۹۵۸ مسئله در ویراست قبلی، یک افزایش ۵۹ درصدی است. تعداد پرسشهای آخر فصل را هم‌از ۶۱۴ به ۸۲۱ رسانده‌ایم، یعنی۳۴ درصد زیاد کرده‌ایم.

۷. تعداد مثالهای داخل متن را از ۱۳۵ در ویراست قبلی، به۱۸۳ در ویراست فعلی رسانده‌ایم (۳۶ درصد)؛ در واقع افزایش از این هم بیشتر است، چون بعضی مثالهای ویراست قبلی به بهانهٔ معرفی مبحث جدیدی بود، در حالی‌که در این ویراست همهٔ مطالب جدید را فقط در متن آورده‌ایم و غرض از مثالها فقط تمرینِ کاربرد این مطالب است.

۸. روشهای کامپیوتری را، از طریق بعضی مثالها و تعدادی پروژه در آخر فصلها، معرفی کرده‌ایم. چند برنامهٔ کامپیوتری هم به صورت پیوست در انتهای کتاب آورده‌ایم تا دانشجویان به کاربردهای دیگر این روشها هم بپردازند.

۹. تعداد مراجع متن را افزایش داده‌ایم و بسیاری از مقالات این مراجع را روزآمد کرده‌ایم. منظور از بعضی مقالات (که اغلب از مجلات عمومی مثل ساینتیفیک آمریکن انتخاب شده‌اند) فراهم کردن زمینهٔ وسیعتری برای دانشجو از طریق مطالعهٔ کاربردهای جالبِ مباحثِ

مربوط است. در موارد دیگر، که معمولاً شامل موضوعاتی است که امیدواریم هم دانشجویان و هم مدرسان به اهمیت آموزشی آنها توجه کنند، به مقالاتی ارجاع داده‌ایم که از مجلاتی مانند آمریکن جورنال آو فیزیکس یا فیزیکس تودی انتخاب شده‌اند.

۱۰. شکلهای کتاب عموماً از نو ترسیم شده‌اند و تعداد آنها در جلد اول تقریباً دو برابر شده و از ۴۶۳ به ۸۹۹ رسیده است. درمواردی یک رنگِ دیگر هم به شکلها اضافه کرده‌ایم تا واضح‌تر و برای آموزش مفیدتر باشند.

۱۱. بسیاری از استنتاجها، اثباتها، و استدلالها را محکمتر کرده‌ایم، و هر جا که فرض یا تقریبی به کار گرفته باشیم آن‌را به وضوح اظهار کرده‌ایم. بنابراین، بی‌آنکه سطح کتاب را بالاتر برده باشیم، دقت و استحکام آن‌را بیشتر کرده‌ایم. نگران این بوده‌ایم که دانشجو قلمرو اعتبار هر استدلالی را بشناسد و می‌خواسته‌ایم او را ترغیب کنیم که چنین سؤالاتی را در نظر بگیرد که: آیا این یا آن نتیجهٔ خاص همیشه صدق می‌کند یا فقط گاهی صادق است؟ چه اتفاق می‌افتد وقتی به حد کوانتومی یا نسبیتی نزدیک می‌شویم؟

اگرچه سعی کرده‌ایم مطالبی را هم از ویراست قبلی حذف کنیم، اما اضافات ویراست جدید آنقدر زیاد بوده که در مجموع حجم کتاب را بیشتر کرده است. باید تأکید کنیم که کمتر مدرسی خواهد خواست یا خواهد توانست که به همهٔ مطالب کتاب، از اول تا آخر، بپردازد. ما تلاش کرده‌ایم کتابِ کامل و دقیقی از کلیات فیزیک تدوین کنیم، اما مدرس می‌تواند برای هر چه پربار کردنِ زحماتش، به‌راههای متعددی عمل کند. مدرسی که می‌خواهد مباحث محدودتری را در نظر بگیرد اما عمیق‌تر به آنها بپردازد (این روشی است که اخیراً به آن "کمتری که بیشتر است" می‌گویند)، می‌تواند راهِ مناسبی از میان این راهها انتخاب کند. بعضی بخشها را صریحاً "اختیاری" اعلام کرده‌ایم (که با حروف کوچکتر چاپ شده‌اند)؛ منظورمان این بوده است که می‌شود این بخشها را کنار گذاشت بی‌آنکه پیوستگی مطالب کتاب به‌هم بخورد. بسته به طرحِ درس و مدت کلاسها، می‌شود بخشهای دیگری را هم حذف کرد یا حتی کل بعضی فصلها را به اختصار برگزار کرد. [در "راهنمایِ مدرس"، که جزء ضمائم متن اصلی این کتاب است، پیشنهادهایی برای انتخاب مباحث مناسبتر برای دوره‌های کوتاهتر آمده است.] در چنین مواردی البته باید دانشجویانِ کنجکاو و علاقه‌مند را ترغیب کرد که خودشان مستقلاً بخشها و فصلهای حذف شده را مطالعه کنند و معلوماتشان را گسترش بدهند. برای مدرسانی که می‌خواهند مطالب را به‌طور کامل به دانشجویانِ رشتهٔ فیزیک ـــ مثلاً و دانشجویانِ ممتازِ رشته‌های دیگرِ علوم و مهندسی، یا به هر حال در دوره‌های سه ترمی ـــ تدریس کُنند، این کتاب به قدر کافی جامع و مفصل هست که تجربهٔ خوبی برای دانشجویان باشد. امیدواریم که این کتاب "نقشهٔ راههای" فیزیک باشد؛ می‌شود راههای مختلفی، مستقیم و غیر مستقیم، انتخاب کرد، و ضرورتی ندارد که در اولین سفر همهٔ راهها را طی کنیم. مسافرِ مشتاق را می‌شود دوباره به نقشه احاله کرد تا در آن بگردد و راههایی را که در سفرِ قبلی‌اش طی نکرده است امتحان کند.

از همهٔ همکاران و کسانی که در تهیهٔ این کتاب به ما کمک کرده‌اند صمیمانه سپاسگزاریم.

سپتامبر ۱۹۹۱

**دیوید هالیدی**
سیاتِل، واشنگتن

**رابرت رزنیک**
انستیتو پلی‌تکنیک رنسلر

**کنت کرین**
دانشگاه ایالتی اوهایو

# ۱

# اندازه‌گیری

فیزیک، با آن همه زیبایی ریاضیاتی بعضی از پیچیده‌ترین و مجردترین نظریه‌هایش، نهایتاً یک علم تجربی است. بنابراین، کسانی که اندازه‌گیریهای دقیق انجام می‌دهند باید استانداردهای مشترکی را بپذیرند تا بتوانند نتایج اندازه‌گیریهایشان را برحسب آنها بیان کنند. به‌این‌ترتیب، نتایج هر آزمایشگاه را می‌توان به آزمایشگاههای دیگر ارائه داد، و امکان تأیید این نتایج را فراهم کرد.

در این فصل به‌معرفی بعضی از یکاهای اصلی کمیتهای فیزیکی و استانداردهای پذیرفته شده برای سنجش آنها می‌پردازیم. روش درست بیان نتایج محاسبات و اندازه‌گیریها را از لحاظ مناسب بودن تعداد ارقام با معنی بررسی می‌کنیم و اهمیت توجه به‌ابعاد کمیتهای موجود در معادلات را نشان می‌دهیم. در فصلهای بعدی، هرجا لازم باشد، یکاهای اصلی دیگر و یکاهای مشتق از آنها را هم تعریف خواهیم کرد.

## ۱ـ۱ کمیتهای فیزیکی، استانداردها، و یکاها

واحدهای ساختاری فیزیک، همین کمیتهایی هستند که برای بیان قوانین این علم به‌کار می‌روند: طول، جرم، زمان، نیرو، سرعت، چگالی، مقاومت ویژه، دما، شدت روشنایی، شدت میدان مغناطیسی، و بسیاری کمیتهای دیگر. خیلی از این واژه‌ها، مثل طول و نیرو، در شمار واژه‌های روزمره‌اند. مثلاً ممکن است گفته شود: "او در طول زندگی‌اش فشار زیادی را تحمل کرده است." اما، در فیزیک نباید گولِ معنی روزمرهٔ این واژه‌ها را خورد. تعریف علمیِ دقیق طول و فشار، هیچ ربطی به معنی این دو واژه در جملهٔ بالا ندارد.

می‌توانیم، مثلاً، طول چیزی را با یک کمیت جبری دلبخواه مثل $L$ مشخص کنیم، و فرض کنیم که این کمیت دقیقاً معین است. اما اگر بخواهیم یکایی به‌مقدار خاصی از این کمیت نسبت بدهیم، ناچاریم یک استاندارد تعیین کنیم. به‌این‌ترتیب، کسانی که بخواهند طولهای مختلف را با هم مقایسه کنند، یکای یکسانی در اختیار خواهند داشت که طول را با آن می‌سنجند. زمانی یکای طول یارد بود، که از اندازهٔ دورِ کمرِ فرمانروا به‌دست می‌آمد. تصور مشکلات ناشی از چنین استانداردی بسیار آسان است: این استاندارد برای همه کسانی که بخواهند استانداردهای ثانویهٔ خودشان را با آن میزان کنند، به‌راحتی قابل وصول نیست، و دیگر اینکه با گذشتِ زمان، تغییرناپذیر هم نیست.

خوشبختانه لزومی به‌تعریف استاندارد برای همهٔ کمیتهای فیزیکی نیست. تعیین استاندارد برای بعضی از کمیتهای پایه ساده‌تر است. خیلی از کمیتهای پیچیده‌تر را می‌توان برحسب این کمیتهای پایه بیان کرد. مثلاً، تا مدتها دقت اندازه‌گیری طول و زمان از خیلی از کمیتهای فیزیکی دیگر بیشتر بود و این دو کمیت را عموماً برای تعیین استاندارد به‌کار می‌بردند. دقت اندازه‌گیری سرعت کمتر بود، و بنابراین به‌عنوان کمیتی مشتق (زمان/طول = سرعت) در نظرگرفته می‌شد. اما امروزه دقت سنجش سرعت نور، بیش از دقت استاندارد پیشین طول است؛ البته هنوز هم طول را کمیتی بنیادی می‌دانیم، اما استاندارد آن‌را از استاندارد سرعت و زمان به‌دست می‌آوریم.

به‌این ترتیب، مسئلهٔ اساسی آن است که کمترین تعداد ممکن کمیتهای فیزیکی را به‌عنوان کمیتهای اصلی انتخاب کنیم و استانداردهایی برای سنجش آنها تعریف کنیم. این استانداردها باید دست‌یافتنی و تغییرناپذیر باشند، که البته ممکن است تأمین هر دوی این ویژگیها با هم کارساده‌ای نباشد. مثلاً اگر قرار است استانداردِ کیلوگرم، یک جسمِ تغییرناپذیر باشد، باید این جسم دور از دسترس باشد، یعنی در چنان انزوایی نگهداری شود که از دستکاری، یا مثلاً خوردگی، مصون بماند.

توافقهای مربوط به استانداردها، حاصل یک رشته مذاکراتِ بین‌المللی در "کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها" بوده است. این مجمع جهانی درسال ۱۸۸۹ (۱۲۶۸ شمسی) تأسیس شد و نوزدهمین دور مذاکرات آن در سال۱۹۹۱ صورت گرفت. وقتی استانداردی پذیرفته شد، می‌توانیم آن‌را برای اندازه‌گیری درگسترهٔ

وسیعی به‌کار ببریم؛ مثلاً از ثانیه، یکای زمان، برای اندازه‌گیری زمانهایی از طول عمر پروتون (بیش از $۱۰^{۴۰}$ ثانیه) گرفته تا طول عمر ناپایدارترین ذرهٔ آزمایشگاهی (حدود $۱۰^{-۲۳}$ ثانیه) استفاده می‌کنیم. وقتی می‌گوییم عمر پروتون، برحسب یکای ثانیه، $۱۰^{۴۰}$ است، منظورمان این است که نسبت این کمیت به بازهٔ زمانی‌ای که به‌عنوان ثانیهٔ استاندارد اختیار شده است، $۱۰^{۴۰}$ است. برای انجام چنین سنجشی، باید به‌نحوی بتوان سنجه‌های آزمایشگاهی را با استاندارد مقایسه کرد. خیلی از این مقایسه‌ها غیرمستقیم است: هیچ سنجه‌ای نمی‌تواند در گسترهٔ ۴۰ مرتبهٔ بزرگی دقیق باشد. با وجود این، برای پیشرفت علم ضروری است که اگر پژوهشگری یک بازهٔ زمانی را با سنجه‌اش ثبت می‌کند، بتواند این مقدار را به‌نحوی به‌ثانیهٔ استاندارد مربوط کند.

جستجو برای استانداردهای دقیقتر یا دست‌یافتنی‌تر، به‌خودی‌خود یک مسئلهٔ مهم علمی است که فیزیکدانان و پژوهشگران دیگری در آزمایشگاههای سراسر جهان به‌آن می‌پردازند. در ایالات متحد امریکا، آزمایشگاههای "مؤسسهٔ ملی استانداردها و تکنولوژی" (که قبلاً دفتر ملی استانداردها نامیده می‌شد) وظیفهٔ نگهداری، تولید، و آزمودن استانداردهایی را‌که پژوهشگران علوم پایه و همچنین مهندسان و علم‌پیشگان در صنعت به‌کار می‌برند، به‌عهده دارد. بهبود استانداردها در سالهای اخیر، بسیارچشمگیر بوده است: دقت ثانیهٔ استاندارد، از زمان ویراست اول این کتاب (۱۹۶۰) تاکنون، بیش از ۱۰۰۰ برابر شده است.

## ۱ـ۲ سیستم بین‌المللی یکاها[۱]

کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها، در طیِ مذاکرات سالهای ۱۹۵۴ تا ۱۹۷۱ هفت کمیت را به‌عنوان کمیتهای اصلی انتخاب کرده است. سیستم بین‌المللی یکاها، SI[۲]، مبتنی بر همین کمیتهاست، که فهرستی از آنها هم درجدول ۱ آمده است.

در این کتاب با بسیاری از یکاهای فرعی SI ــ مثل یکای سرعت، نیرو، و مقاومت الکتریکی ــ سروکار خواهیم داشت. این یکاها از یکاهای جدول ۱ مشتق می‌شوند. مثلاً یکای نیرو نیوتون (N) است. این یکا، برحسب یکاهای اصلی SI، به‌صورت

$$۱\ \mathrm{N} = ۱\ \mathrm{kg}\cdot \mathrm{m/s}^{۲}$$

تعریف می‌شود. (در فصل ۵ خواهیم دید که چرا.)

اگر بخواهیم کمیتهایی مثل توان یک نیروگاه، یا زمان بین دو رویداد هسته‌ای را برحسب یکاهای SI بیان کنیم، با اعدادی بسیار بزرگ، یا بسیارکوچک، مواجه می‌شویم. برای ساده شدن بیان چنین کمیتهایی، کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها طی مذاکرات سالهای ۱۹۶۰ تا ۱۹۷۵ خود توصیه کرد که از پیشوندهایی که در جدول ۲ آمده است استفاده شود. به‌این‌ترتیب، می‌توانیم توانِ خروجی یک نیروگاه معمولی برق، $۱٫۳ \times ۱۰^{۹}$ وات، را به‌صورت ۱٫۳ گیگاوات یا ۱٫۳GW بیان کنیم. همچنین، یک بازهٔ زمانی معمول در فیزیک هسته‌ای، مثل $۲٫۳۵ \times ۱۰^{-۹}$ ثانیه، را می‌شود به‌صورت ۲٫۳۵

جدول ۱. یکاهای اصلی SI

| کمیت | یکای SI | |
|---|---|---|
| | نام | نماد |
| زمان | ثانیه | s |
| طول | متر | m |
| جرم | کیلوگرم | kg |
| مقدار ماده | مول | mol |
| دمای ترمودینامیکی | کلوین | K |
| جریان الکتریکی | آمپر | A |
| شدت نور | کاندلا | cd |

جدول ۲. پیشوندهای SI*

| ضریب | پیشوند | نماد | ضریب | پیشوند | نماد |
|---|---|---|---|---|---|
| $۱۰^{۱۸}$ | اگزا | E | $۱۰^{-۱}$ | دسی | d |
| $۱۰^{۱۵}$ | پتا | P | $۱۰^{-۲}$ | **سانتی** | c |
| $۱۰^{۱۲}$ | ترا | T | $۱۰^{-۳}$ | **میلی** | m |
| $۱۰^{۹}$ | **گیگا** | G | $۱۰^{-۶}$ | **میکرو** | μ |
| $۱۰^{۶}$ | **مگا** | M | $۱۰^{-۹}$ | **نانو** | n |
| $۱۰^{۳}$ | **کیلو** | k | $۱۰^{-۱۲}$ | **پیکو** | p |
| $۱۰^{۲}$ | هکتو | h | $۱۰^{-۱۵}$ | فمتو | f |
| $۱۰^{۱}$ | دکا | da | $۱۰^{-۱۸}$ | آتو | a |

* پیشوندهایی را که در این کتاب زیاد به‌کار می‌روند با حروف‌سیاه مشخص کرده‌ایم.

نوشت. پیشوندهای مربوط به ضریبهای بزرگتر از یک، ریشهٔ یونانی دارند و پیشوندهای مربوط به ضریبهای کوچکتر از یک، ریشهٔ لاتین (جز فمتو و آتو، که ریشهٔ دانمارکی دارند).[۱ ۲]

در تکمیل جدول ۱، باید هفت مجموعه دستورالعمل داشته باشیم تا بتوانیم یکاهای‌اصلی SI را در آزمایشگاه تولیدکنیم. دستورالعملهای مربوط به زمان، طول، و جرم را در سه بخشِ بعدی شرح می‌دهیم.

درکنار SI، دو سیستمِ مهم دیگر هم برای یکاها داریم. یکی‌سیستم گاؤسی است که درخیلیِ از منابع فیزیک مورد استفاده است. این سیستم را در این کتاب به‌کار نخواهیم برد. ضرایب تبدیل یکاهای این سیستم به سیستم SI، در پیوستِ ز آمده است.

سیستمِ دیگر، سیستم بریتانیایی است، که هنوز هم در بعضی کشورها واز جمله درایالات متحدِ امریکا کاربردهای روزمره دارد. کمیتها

۱. نگاه کنید به
Robert A. Nelson, "SI: The International System of Units", (American Association of Physics Teachers, 1981).

2. Le Système International d'Unités.

و یکاهای اصلی مکانیک در این سیستم، طول (فوت)، نیرو (پاوند)، و زمان (ثانیه)اند. ضریب تبدیل این یکاها به یکاهای SIهم در پیوست ز آمده است. ما در این کتاب عموماً یکاهای SI را به‌کار برده‌ایم (و در بعضی موارد به معادلهای بریتانیایی آنها هم اشاره کرده‌ایم). تنها در سه کشور (میانمار، لیبریا، و ایالات متحد امریکا) است که استانداردهای ملی اندازه‌گیری مبتنی بر سیستمی جز SI اند.

---

**مثال ۱.** هرکمیت فیزیکی را می‌شود در ۱ ضرب کرد (چون مقدارش را تغییر نمی‌دهد). مثلاً $1\text{min} = 60\text{s}$ است، پس $1 = 60\text{s}/1\text{min}$؛ به‌همین ترتیب، $1\text{ft} = 12\text{in}$، پس $1 = 1\text{ft}/12\text{in}$ است. با استفاده از ضرایب تبدیل مناسب، (الف) سرعت ۵۵ مایل بر ساعت را برحسب متر بر ثانیه، و (ب) حجم مخزنی راکه ۱۶ گالن بنزین می‌گیرد برحسب سانتی‌متر مکعب به‌دست بیاورید.

حل: (الف) برای ضرایب تبدیل، به روابط $1\text{mi}=1609\text{m}\,(1=1609\text{m}/1\text{mi})$ و $1\text{h}=3600\text{s}\,(1=1\text{h}/3600\text{s})$ نیاز داریم (نگاه کنید به پیوست ز). به‌این‌ترتیب

$$\text{سرعت} = 55\frac{\cancel{\text{mi}}}{\cancel{\text{h}}} \times \frac{1609\ \text{m}}{1\ \cancel{\text{mi}}} \times \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}} = 25\ \text{m/s}$$

(ب) یک گالن مایع ۲۳۱ اینچ مکعب، و $1\text{in} = 2{,}54\text{cm}$ است.

پس

$$\text{حجم} = 16\ \cancel{\text{gal}} \times \frac{231\ \text{in}^3}{1\ \cancel{\text{gal}}} \times \left(\frac{2{,}54\ \text{cm}}{1\ \cancel{\text{in}}}\right)^3 = 6{,}1 \times 10^4 \text{cm}^3$$

توجه کنید که در این دو محاسبه، ضرایب تبدیل را چنان به‌کار برده‌ایم که یکاهای ناخواسته در صورت یک کسر و مخرج کسر دیگر ظاهر شوند، و یکدیگر را حذف کنند.

---

## ۱ـ۳ استاندارد زمان[1]

سنجش زمان دو جنبه دارد. برای امور روزمره، و برای بعضی از مقاصد علمی، لازم است بدانیم چه وقت از روز است تا بتوانیم ترتیب وقایع را تعیین کنیم. در بسیاری ازکارهای علمی، می‌خواهیم بدانیم که فلان رویداد چقدر طول می‌کشد (بازهٔ زمانی چقدر است). پس هر استاندارد زمانی باید بتواند به‌این دو پرسش پاسخ بدهد. "فلان رویداد در چه زمانی وقوع یافته؟" و "چقدر طول کشیده است؟" جدول ۳ گسترهٔ بازه‌های زمانی سنجش‌پذیر را نشان می‌دهد. نسبت حدود بالا و پایین این گستره از مرتبهٔ $10^{63}$ است.

هر پدیدهٔ تکرارشونده‌ای را می‌شود به‌عنوان مقیاس زمان به‌کار برد. برای سنجش زمان با چنین پدیده‌ای، عدهٔ تکرارهای پدیده را (به‌اضافهٔ کسری از یک‌دور در صورت لزوم) می‌شماریم. به‌این منظور می‌توانیم مثلاً از آونگ، سیستم جرم‌ـفنر، یا بلور کوارتز استفاده کنیم.

**جدول ۳.** مقادیر اندازه‌گیری شدهٔ چند بازهٔ زمانی.*

| بازهٔ زمانی | ثانیه |
|---|---|
| طول عمر پروتون | $> 10^{40}$ |
| نیمه عمر واپاشی بتایی مضاعف $^{82}$Se | $3 \times 10^{27}$ |
| سنّ جهان | $5 \times 10^{17}$ |
| سن هرم خئوپس | $1 \times 10^{11}$ |
| میانگین عمر انسان (در ایالات متحد امریکا) | $2 \times 10^{9}$ |
| دورهٔ تناوب گردش زمین به‌دور خورشید (۱ سال) | $3 \times 10^{7}$ |
| دورهٔ تناوب چرخش زمین حول محور خودش (۱ روز) | $9 \times 10^{4}$ |
| دورهٔ تناوب گردش ماهوارهٔ کم ارتفاع نوعی به‌دور زمین | $5 \times 10^{3}$ |
| فاصلهٔ زمانی بین ضربانهای عادی قلب | $8 \times 10^{-1}$ |
| دورهٔ تناوب دیاپازون تولیدکنندهٔ نت لا(ی وسط) | $2 \times 10^{-3}$ |
| دورهٔ تناوب نوسانهای میکروموج ۳cm | $1 \times 10^{-10}$ |
| دورهٔ تناوب نوعی چرخشهای مولکولی | $1 \times 10^{-12}$ |
| کوتاهترین تپ نوری تولیدشده (تا سال ۱۹۹۰) | $6 \times 10^{-15}$ |
| طول عمر ناپایدارترین ذرات | $< 10^{-23}$ |

* مقادیر تقریبی‌اند.

قرنهای متمادی پدیدهٔ تکرارشوندهٔ چرخش زمین حول محور خودش، که مدت روز را تعیین می‌کند، به‌عنوان مقیاس زمان به‌کار می‌رفت. بعدها یک ثانیه (میانگین خورشیدی) برابر با ۱/۸۶۴۰۰ روز (میانگین خورشیدی) تعریف شد.

ساعتهای بلورکوارتز، که براساس اِبقای الکتریکی ارتعاشات دوره‌ای بلور کوارتز کار می‌کنند، به‌عنوان استاندارد ثانویهٔ زمان به‌کار می‌روند. ساعت کوارتز را می‌شود با استفاده از رصدهای نجومی، برحسب چرخش زمین مدرج کرد و برای سنجش زمان در آزمایشگاه به‌کار برد. خطای انباشتهٔ بهترین این ساعتها، در طول سال، حداکثر $5\ \mu s$ بوده است. اما حتی این دقت هم برای علوم و تکنولوژی جدید کافی نیست.

برای دستیابی به‌استاندارد زمانی بهتر، ساعتهای اتمی در چندین کشور ساخته شده است. شکل ۱ چنین ساعتی را نشان می‌دهد. کار این ساعت، براساس بسامد مشخصهٔ تابش میکروموجی است که از اتمهای عنصر سزیم گسیل می‌شود. این ساعت، که در مؤسسهٔ ملی استانداردها و تکنولوژی در ایالات متحد امریکا نگهداری می‌شود، مبنای تعیین زمان جهانیِ هماهنگ (UTC) در این کشور است.

شکل ۲ تغییرات دورهٔ تناوب چرخشی زمین را، نسبت به ساعت

---

۱. برای مطالعهٔ تاریخچهٔ زمان‌سنجی، نگاه کنید به

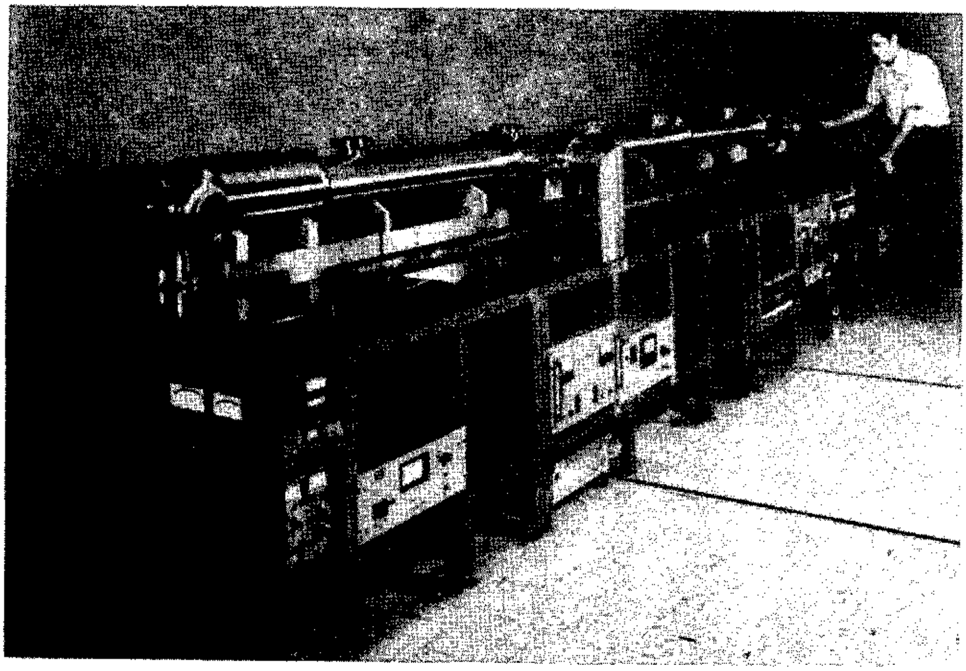
*Revolution in Time: Clocks and the Making of the Modern World*, David S. Landes (Harvard University Press, 1983).

برای پیشرفتهای اخیر در سنجش دقیق زمان به

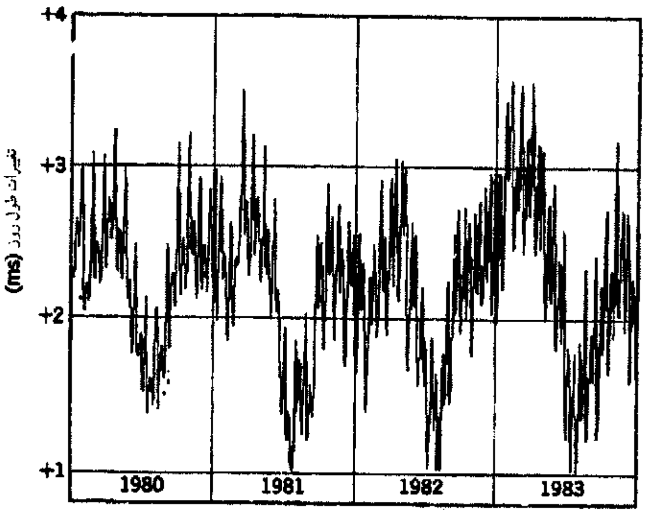
"Precise Measurement of Time," Norman F. Ramsey, *American Scientist*, January-February 1988, p. 42.

برای توضیح سیستمهای مختلف ثبت زمان به

"Time and the Amateur Astronomer," Alan M. MacRobert, *Sky and Telescope*, April 1989, p. 378.



شکل۱. استاندارد بسامد اتمی (سزیم) شمارهٔ NBS-۶ در مؤسسهٔ ملی استانداردها و تکنولوژی در بولدر کلرادو. این استاندارد اصلی یکای زمان در ایالات متحد امریکاست.




شکل۲. تغییرات طول روز در یک دورهٔ ۴ ساله. دقت کنید که مقیاس عمودی تنها $3\,ms = 0{,}003\,s$ است.[1]

سزیم، در یک دورهٔ ۴ ساله نشان می‌دهد. پس ببینید که دورهٔ تناوب چرخش زمین، برای کار دقیق، چه استاندارد ضعیفی برای زمان است. تغییراتی را که در شکل ۲ می‌بینیم می‌شود به اثرهای کشندی [جزر و مدی] ماه، و تغییرات فصلی بادهای جو زمین نسبت داد.

در سیزدهمین کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها در سال ۱۹۶۷، ثانیهٔ ساعت سزیم به‌عنوان استاندارد جهانی زمان پذیرفته شد. تعریف ثانیه این است:

یک ثانیه برابر است با مدت ۹۱۹۲۶۳۱۷۷۰ ارتعاش تابشی (با طول‌موج خاص) که از اتم سزیم گسیل می‌شود.

دو تا ساعت جدید سزیم، طی ۳۰۰۰۰۰ سال حداکثر ممکن است $1s$ با هم اختلاف پیدا کنند. ساعتهای میزر هیدروژن به‌دقت باورنکردنی $1s$ در ۳۰۰۰۰۰۰۰ سال رسیده‌اند. ساعتهایی که مبتنی بر یک تک اتم محبوس باشند شاید بتوانند این دقت را به‌اندازهٔ ۳ مرتبهٔ بزرگی زیاد کنند. شکل ۳ پیشرفت چشمگیر زمان‌سنجی را طی حدود ۳۰۰ سال نشان می‌دهد. این تاریخچه، با ساعت آونگی آغاز می‌شود، که کریستین هویگنس آن‌را در سال ۱۶۵۶ اختراع کرد، و با ساعتهای میزر هیدروژن امروزی به‌پایان می‌رسد.

## ۱-۴ استاندارد طول[2]

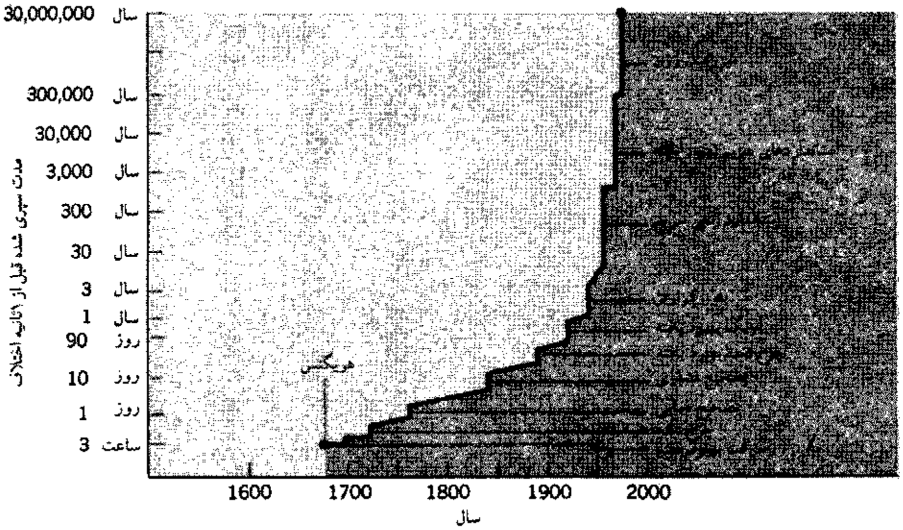
اولین استاندارد بین‌المللی طول، میله‌ای از جنس آلیاژ پلاتین-ایریدیم، به‌نام متر استاندارد، بود که در ادارهٔ بین‌المللی اوزان و مقیاسها، در نزدیکی پاریس، نگهداری می‌شد. یک متر، طبق تعریف، برابر بود با فاصلهٔ بین دو شیار باریک که نزدیک دو انتهای میله حک شده بود؛ در شرایطی که میله در دمای صفر درجهٔ کلاسیوس (سانتی‌گراد)، و در وضعیت مکانیکی معینی قرار داشت. به‌ملاحظات تاریخی، قرار بود این متر برابر با یک ده‌میلیونیم فاصلهٔ قطب شمال تا استوا، روی نصف‌النهاری که از پاریس می‌گذرد، باشد. اما اندازه‌گیری دقیق‌نشان داد که طول میلهٔ مترِ استاندارد، کمی (در حدود ۰٫۰۲۳ درصد) با این مقدار تفاوت دارد.

از آنجا که مترِ استاندارد، چندان در دسترس نیست، بَدلهای

---

۱. نگاه کنید به
"The Earth's Rotation Rate", John Wahr, *American Scientist* January-February 1985, p. 41.

۲. نگاه کنید به
"The New Definition of the Meter," P. Giacomo, *American Journal of Physics*, July 1984. p. 607.




**شکل۳.** پیشرفت زمان‌سنجی در طی قرون. ساعتهای آونگی اولیه، در هر چند ساعت یک ثانیه جلو یا عقب می‌افتادند؛ ساعتهای امروزی میزر هیدروژن، هر ۳۰۰۰۰۰۰۰ سال یک ثانیه اختلاف پیدا می‌کنند.

دقیقی از روی آن ساخته شد و به‌عنوان نمونه‌های اصلی در اختیار مؤسسات و آزمایشگاههای استانداردها در سراسر دنیا قرار گرفت. از این استانداردهای ثانویه، برای مدرج کردن میله‌های سنجش، که از استانداردهای ثانویه هم قابل وصولتر بودند، استفاده می‌شد. بنابراین، تا همین اواخر، مأخذ همهٔ وسایل و میله‌های سنجش طول ــ که طی مقایسه‌های پیچیده‌ای به‌کمک میکروسکوپ و ابزارهای تقسیم‌کننده تولید می‌شدند ــ متر استاندارد بود.

دقت فرایندهای مقایسهٔ خراشهای روی میله به‌وسیلهٔ میکروسکوپ، دیگر برای تکنولوژی و علوم جدید کافی نیست. در سال ۱۸۹۳، آلبرت مایکلسون، فیزیکدان امریکایی، متر استاندارد را با طول‌موج نور سرخی که از اتم کادمیم گسیل می‌شود مقایسه کرد و به‌این وسیله استانداردی دقیقتر و قابل وصولتر به‌دست آورد. مایکلسون طول میلهٔ متر را به‌دقت اندازه گرفت و دریافت که متر استاندارد، ۱۵۵۳۱۶۳٫۵ برابر این طول‌موج است. در هر آزمایشگاهی، به‌راحتی می‌شد لامپ کادمیم مشابهی تهیه کرد. به‌این‌ترتیب، مایکلسون روشی یافت که دانشمندان سراسر جهان می‌توانستند با آن استاندارد دقیقی از طول داشته باشند، بی‌آنکه به‌میلهٔ متر استاندارد رجوع کنند.

با وجود این پیشرفت تکنولوژیکی، میلهٔ فلزی تا سال ۱۹۶۰ همچنان استاندارد رسمی طول بود، تا آنکه در این سال، در یازدهمین کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها، یک استاندارد اتمی برای متر پذیرفته شد. این استاندارد، عبارت است از طول‌موج (در خلأ) نور سرخ‌ـنارنجی معینی که از یک ایزوتوپ خاص کریپتون[۱]، ۱ در $^{86}$Kr، در شرایط تخلیهٔ الکتریکی گسیل می‌شود (شکل ۴). به‌طور مشخص، یک متر برابر با ۱۶۵۰۷۶۳٫۷۳ طول‌موج این نور تعریف شد. با فراهم شدن امکان اندازه‌گیری طولهایی به‌اندازهٔ کسری از طول‌موج، دانشمندان با این استاندارد جدید می‌توانستند طولها را با خطایی کمتر از ۱ در $۱۰^۹$ با هم مقایسه کنند.

انتخاب استاندارد اتمی، علاوه بر افزایش دقت سنجش طول، مزایای دیگری هم دارد. اتمهای $^{86}$Kr همه‌جا پیدا می‌شوند، همسان‌اند، و نوری با طول‌موج یکسان گسیل می‌کنند، طول‌موج خاصی که انتخاب شده است، مشخصهٔ انحصاری $^{86}$Kr، و بسیار تیز و مشخص است. این ایزوتوپ را می‌شود به‌آسانی در شکل خالص‌اش فراهم کرد.

تا سال ۱۹۸۳، دقتهای مورد نیاز به‌حدی رسید که دیگر استاندارد $^{86}$Kr هم نمی‌توانست پاسخگوی آن باشد. در این سال، گام متهورانه‌ای برداشته شد. تعریف متر عوض شد؛ طبق تعریف جدید، متر فاصله‌ای است که نور در بازهٔ زمانی مشخصی می‌پیماید. به‌بیانِ هفدهمین کنفرانس عمومی اوزان مقیاسها:

> متر طول راهی است که نور در خلأ در بازهٔ زمانی ۱/۲۹۹۷۹۲۴۵۸ ثانیه می‌پیماید.

این، معادل آن است که بگوییم سرعت نور، $c$، اکنون طبق تعریف برابر است با

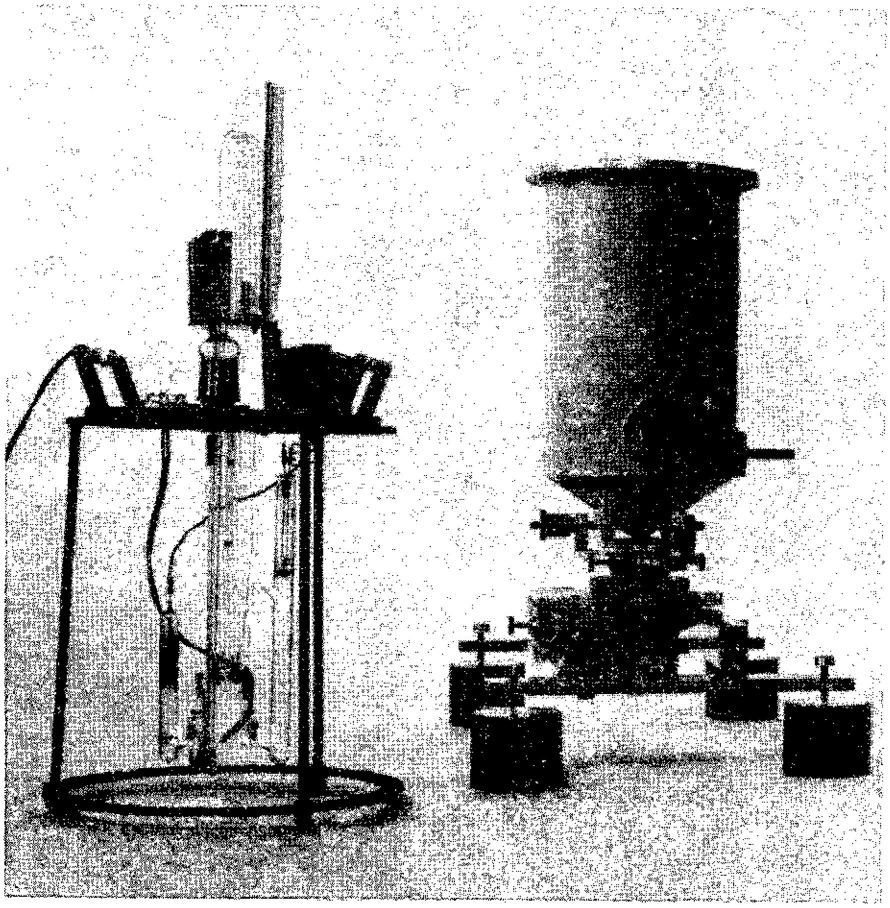
$$c = ۲۹۹۷۹۲۴۵۸ \text{ m/s} \qquad \text{(دقیقاً)}$$

این تعریفِ جدید لازم بود، زیرا سنجش سرعت نور چنان دقیق شده بود که صِرف تکرارپذیری تولید مترِ $^{86}$Kr، عاملی محدودکننده به‌حساب می‌آمد. بنابراین، معقول می‌نمود که سرعت نور را به‌عنوان کمیتی تعریف شده بپذیریم و آن‌را، همراه با استاندارد دقیقاً تعریف‌شدهٔ زمان (ثانیه)، برای تعریف جدید متر به‌کار ببریم.

جدول ۴، گسترهٔ طولهای مختلف را، برحسب استاندارد متر، نشان می‌دهد.

---

۱. شاخص ۸۶ در $^{86}$Kr، عدد جرمی (عدهٔ پروتونها به‌اضافهٔ عدهٔ نوترونهای هستهٔ) این ایزوتوپ کریپتون است. گاز کریپتون طبیعی، شامل ایزوتوپهای ۷۸، ۸۰، ۸۲، ۸۳، ۸۴ و ۸۶ است. طول‌موج تابش انتخاب شده در هر یک از این ایزوتوپها، در حدود ۱ در $۱۰^۵$ با ایزوتوپهای دیگر متفاوت است. این اختلاف از دقت استاندارد، در حدود ۱ در $۱۰^۹$، خیلی بیشتر است. در مورد ساعت سزیم، این عنصر تنها یک ایزوتوپ طبیعی دارد، که عدد جرمی آن ۱۳۳ است.



شکل۴. یک لامپ کریپتون در آزمایشگاههای ملی فیزیک، تدینگتون، انگلستان. لولهٔ شیشه‌ای در سیستم طرف چپ، حاوی گاز $^{86}Kr$ است. این گاز، در اثر تحریک با جریان الکتریکی، نورگسیل می‌کند. لامپ را در زمزای طرف راست می‌گذارند تا آن‌را در دمای نیتروژن مایع ($-۲۱۰°C$) نگه دارد. نور از سوراخ کوچک زمزا مشاهده می‌شود.

جدول ۴. مقادیر اندازه‌گیری‌شدهٔ بعضی طولها*

| طول | متر |
|---|---|
| فاصلهٔ دورترین اختروش رصد شده | $۲ \times ۱۰^{۲۶}$ |
| فاصلهٔ کهکشان امرأةالمسلسله از ما | $۲ \times ۱۰^{۲۲}$ |
| شعاع کهکشان ما | $۶ \times ۱۰^{۱۹}$ |
| فاصلهٔ نزدیکترین ستاره از ما (پروکسیماقنطورس) | $۴ \times ۱۰^{۱۶}$ |
| شعاع میانگین مدار دورترین سیاره (پلوتون) | $۶ \times ۱۰^{۱۲}$ |
| شعاع خورشید | $۷ \times ۱۰^{۸}$ |
| شعاع زمین | $۶ \times ۱۰^{۶}$ |
| ارتفاع قلهٔ اورست | $۹ \times ۱۰^{۳}$ |
| قد یک آدم معمولی | $۲ \times ۱۰^{۰}$ |
| ضخامت هر صفحه این کتاب | $۱ \times ۱۰^{-۴}$ |
| اندازهٔ یک ویروس معمولی | $۱ \times ۱۰^{-۶}$ |
| شعاع اتم هیدروژن | $۵ \times ۱۰^{-۱۱}$ |
| شعاع مؤثر پروتون | $۱ \times ۱۰^{-۱۵}$ |

* مقادیر تقریبی‌اند.

**مثال ۲.** سال نوری که یک مقیاس طول است (نه مقیاس زمان) برابر با مسافتی است که نور در یک سال می‌پیماید. ضریب تبدیل سال نوری به‌متر را حساب کنید، و تعیین کنید که فاصلهٔ ستارهٔ پروکسیماقنطورس از ما ($۴٫۰ \times ۱۰^{۱۶}m$) چند سال نوری است.

حل: ضریب تبدیل سال به ثانیه عبارت است از

$$۱\ y = ۱\ y \times \frac{۳۶۵٫۲۵\ d}{۱\ y} \times \frac{۲۴\ h}{۱\ d} \times \frac{۶۰\ min}{۱\ h} \times \frac{۶۰\ s}{۱\ min}$$
$$= ۳٫۱۶ \times ۱۰^{۷} s$$

سرعت نور، تا سه رقم با معنی $۳٫۰۰ \times ۱۰^{۸} m/s$ است. بنابراین، نور در یک سال، مسافت

$$(۳٫۰۰ \times ۱۰^{۸} m/s)(۳٫۱۶ \times ۱۰^{۷} s) = ۹٫۴۸ \times ۱۰^{۱۵} m$$

را می‌پیماید. پس

$$۱\ \text{سال نوری} = ۹٫۴۸ \times ۱۰^{۱۵} m$$

فاصلهٔ پروکسیماقنطورس از ما برابر است با

$$(۴٫۰ \times ۱۰^{۱۶} m) \times \frac{۱\ \text{سال نوری}}{۹٫۴۸ \times ۱۰^{۱۵} m} = ۴٫۲\ \ \text{سال نوری}$$

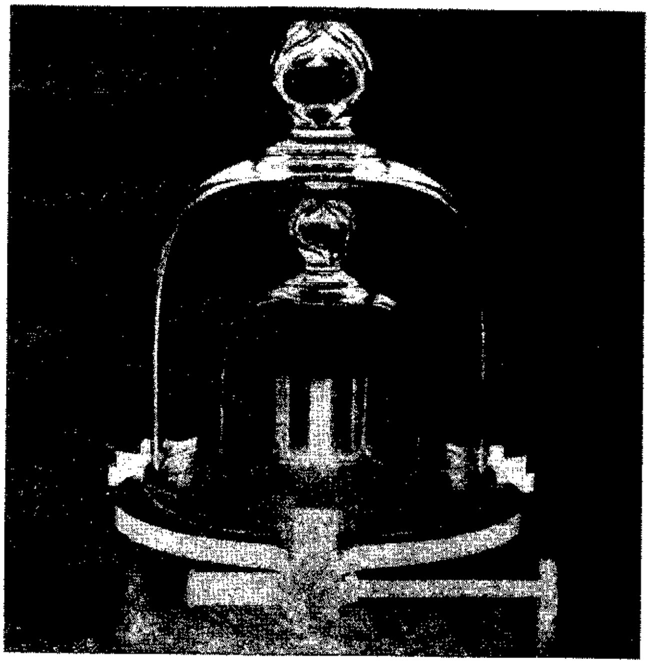
نزدیکترین ستاره از زمین در فاصلهٔ ۴٫۲ سال نوری قرار دارد.

## ۵ـ۱ استاندارد جرم

استاندارد SI جرم، استوانه‌ای از جنس پلاتین‌ـ‌ایریدیم است که در دفتر بین‌المللی اوزان و مقیاسها نگهداری می‌شود، و بنابر توافق بین‌المللی، جرم آن ۱ کیلوگرم تعیین شده است. استانداردهای ثانوی برای مؤسسات استاندارد به‌همهٔ کشورهای جهان فرستاده می‌شوند. جرم اجسام دیگر را می‌توان، با استفاده از ترازوهای دوکفه‌ای با بازوهای یکسان، با دقت ۱ در $۱۰^{۸}$ تعیین کرد.

نسخهٔ بدلی از استاندارد بین‌المللی جرم، به نام کیلوگرم سرنمونهٔ شمارهٔ ۲۰، در ایالات متحد امریکا در مؤسسهٔ ملی استانداردها و تکنولوژی، زیر یک سرپوش، نگهداری می‌شود (شکل ۵). این استاندارد را، حداکثر سالی یک‌بار، برای کنترل مقادیر استانداردهای سوم از زیر سرپوشها بیرون می‌آورند. سرنمونهٔ شمارهٔ ۲۰ را از سال ۱۸۸۹ تاکنون دوبار به‌فرانسه برده‌اند و با کیلوگرم اصلی مجدداً مقایسه کرده‌اند. هنگامی‌که این جسم را از زیر سرپوش خارج می‌کنند، همیشه دو نفر حضور دارند: یکی کیلوگرم را با پنس نگه می‌دارد، و دومی مراقب است که اگر کیلوگرم از دست اولی افتاد آن‌را بگیرد.

جدول ۵ اندازه‌های چند جرم را نشان می‌دهد. توجه کنید که حدود گسترهٔ این جرمها تا $۱۰^{۸۳}$ مرتبهٔ بزرگی با هم اختلاف دارند. بیشتر این جرمها را به‌طور غیرمستقیم با کیلوگرم استاندارد مقایسه کرده‌اند. مثلاً، برای تعیین جرم زمین می‌توان نیروی جاذبهٔ گرانشی بین دو کرهٔ سربی را در آزمایشگاه، سنجید و آن‌را با جاذبهٔ زمین بر یک جرم معین مقایسه کرد (بخش ۱۶ـ۳). جرم کره‌ها را باید با مقایسهٔ مستقیم با استاندارد کیلوگرم به‌دست آورد.



**شکل ۵.** استاندارد ملی سرنمونهٔ کیلوگرم شمارهٔ ۲۰، زیر سرپوش دوگانه‌اش در مؤسسهٔ ملی استانداردها و تکنولوژی ایالات متحد امریکا.

جدول ۵. مقادیر اندازه‌گیری شدهٔ بعضی از جرمها*.

| جسم | کیلوگرم |
|---|---|
| عالم شناخته‌شده (تخمین) | $۱۰^{۵۳}$ |
| کهکشان ما | $۲ \times ۱۰^{۴۳}$ |
| خورشید | $۲ \times ۱۰^{۳۰}$ |
| زمین | $۶ \times ۱۰^{۲۴}$ |
| ماه | $۷ \times ۱۰^{۲۲}$ |
| کشتی اقیانوس‌پیما | $۷ \times ۱۰^{۷}$ |
| فیل | $۴ \times ۱۰^{۳}$ |
| انسان | $۶ \times ۱۰^{۱}$ |
| دانهٔ انگور | $۳ \times ۱۰^{-۳}$ |
| ذرهٔ غبار | $۷ \times ۱۰^{-۱۰}$ |
| ویروس | $۱ \times ۱۰^{-۱۵}$ |
| مولکول پنی‌سیلین | $۵ \times ۱۰^{-۱۷}$ |
| اتم اورانیم | $۴ \times ۱۰^{-۲۶}$ |
| پروتون | $۲ \times ۱۰^{-۲۷}$ |
| الکترون | $۹ \times ۱۰^{-۳۱}$ |

* مقادیر تقریبی‌اند.

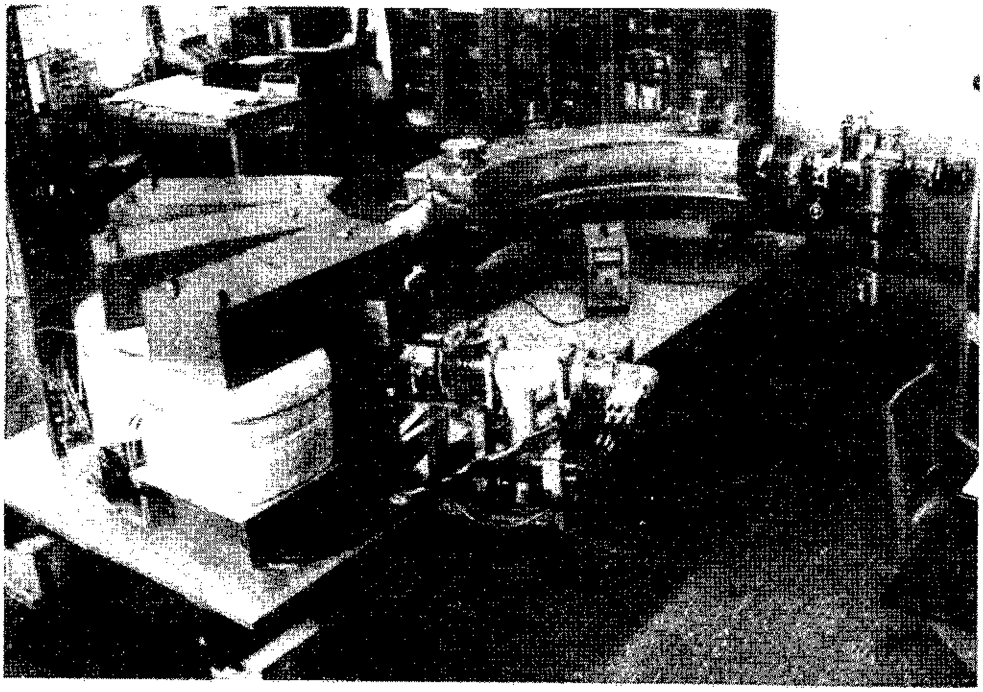
جدول ۶. نتایج اندازه‌گیری جرم چند اتم.

| ایزوتوپ | جرم (u) | خطا (u) |
|---|---|---|
| $^{1}H$ | ۱٫۰۰۷۸۲۵۰۴ | ۰٫۰۰۰۰۰۰۰۱ |
| $^{12}C$ | ۱۲٫۰۰۰۰۰۰۰۰ | (دقیق) |
| $^{64}Cu$ | ۶۳٫۹۲۹۷۶۵۶ | ۰٫۰۰۰۰۰۱۷ |
| $^{102}Ag$ | ۱۰۱٫۹۱۱۹۵ | ۰٫۰۰۰۱۲ |
| $^{137}Cs$ | ۱۳۶٫۹۰۷۰۷۳ | ۰٫۰۰۰۰۰۶ |
| $^{190}Pt$ | ۱۸۹٫۹۵۹۹۱۷ | ۰٫۰۰۰۰۰۷ |
| $^{238}Pu$ | ۲۳۸٫۰۴۹۵۵۴۶ | ۰٫۰۰۰۰۰۲۴ |

در مقیاس اتمی، استاندارد دیگری برای جرم وجود دارد که جزو یکاهای SI نیست. این استاندارد، جرم اتم $^{12}C$ است که، طبق توافق بین‌المللی، دقیقاً برابر با ۱۲ یکای جرم اتمی (u) تعریف می‌شود. جرم اتمهای دیگر را می‌توان، به‌کمک طیف‌سنج جرمی، با دقت خوبی تعیین کرد (شکل ۶؛ و بخش ۳۴ـ۲). جدول ۶ جرم چند اتم را، همراه با براورد خطاهای سنجش آنها، نشان می‌دهد. علت نیاز به‌چنین استانداردی برای جرم آن است که، به‌لطف روشهای آزمایشگاهی امروزی، دقت مقایسهٔ جرم اتمهای مختلف می‌تواند بیش از آنی باشد که با کیلوگرم استاندارد امکان دارد. به‌هرحال در جانشین کردن یک استاندارد اتمی جرم به‌جای استاندارد کیلوگرم پیشرفتهایی حاصل شده است. رابطهٔ تقریبی استاندارد اتمی فعلی و استاندارد اصلی چنین است

$$۱\ u = ۱٫۶۶۱ \times ۱۰^{-۲۷} kg$$

یکای دیگری در SI که به یکای بالا مربوط می‌شود مول است،



شکل۶. یک طیف‌سنج جرم با قدرت تفکیک زیاد در دانشگاه مانیتوبا در کانادا. از چنین ابزارهایی برای تعیین دقیق جرم اتمها، مانند آنهایی که در جدول ۶ آمده است، استفاده می‌شود.

که برای سنجش مقدار ماده به‌کار می‌رود. یک مول اتم $^{۱۲}C$، مقدار ماده‌ای است که دقیقاً ۱۲ گرم جرم دارد و تعداد اتمهای آن برابر با ثابت آووگادرو، $N_A$، است

$$N_A = ۶٫۰۲۲۱۳۶۷ \times ۱۰^{۲۳} \quad \text{ذره بر مول}$$

این عدد با آزمایش به‌دست می‌آید و خطای آن در حدود یک در میلیون است. یک مول از هر ماده‌ای شامل همین تعداد جزء بنیادی (اتم، مولکول، یا هر چیز دیگر) از آن ماده است. پس ۱ مول گاز هلیم $N_A$ اتم He دارد، ۱ مول اکسیژن شامل $N_A$ مولکول $O_2$ است، و ۱ مول آب $N_A$ مولکول $H_2O$ دارد.

برای ارتباط دادن یکاهای اتمی جرم به‌یکاهای بزرگ، باید از ثابت آووگادرو استفاده کرد. جانشین کردن استاندارد کیلوگرم با استانداردهای اتمی مستلزم آن خواهد بود که دقت سنجش مقدار $N_A$، حداقل دو مرتبهٔ بزرگی بیشتر شود تا بتوان جرم اجسام را با دقت ۱ در $۱۰^۸$ تعیین کرد.

## ۱ـ۶ دقت و رقمهای بامعنی

با بهتر شدن کیفیت سنجه‌ها و پیچیده‌تر شدن روشهای سنجش، می‌توان دقت آزمایشها را مدام بالا برد؛ یعنی می‌توان نتایجی با رقمهای بامعنی بیشتر به‌دست آورد و خطای اندازه‌گیری را کم کرد. هم تعداد رقمهای بامعنی، و هم خطا، نشانه‌هایی حاکی از براورد ما از دقتِ نتیجه‌اند. یعنی مثلاً $x = ۳\text{m}$ اطلاعات کمتری از $x = ۳٫۱۴۱۵۹\text{m}$ دربردارد. وقتی اظهار می‌کنیم $x = ۳\text{m}$ است، منظورمان این است که تا حدمعقولی مطمئنیم که $x$ بین ۲m و ۴m است. اما زمانی که می‌گوییم $x = ۳٫۱۴۱۵۹\text{m}$، منظوراین است که $x$ احتمالاً بین ۳٫۱۴۱۵۸m و ۳٫۱۴۱۶۰m است. اگر واقعاً مطمئن باشیم که $x$، ۳٫۱۴۱۵۹m است و بگوییم $x = ۳\text{m}$، اطلاعاتی را حذف کرده‌ایم که می‌تواند مهم باشد. اگر بیش از $x = ۳\text{m}$ چیزی ندانیم و بگوییم $x = ۳٫۱۴۱۵۹\text{m}$، اطلاعات اضافی داده‌ایم، اطلاعاتی که نمی‌دانیم درست است یا نه. دقت در تعداد رقمهای بامعنی، در بیان نتایج آزمایش و محاسبه، اهمیت دارد، و ارائهٔ رقمهای بامعنی به‌تعداد بیشتر یا کمتر از آنچه باید، هر دو به‌یک میزان نادرست است.

برای تعیین تعداد رقمهای بامعنی چند قاعدهٔ ساده وجود دارد.

قاعدهٔ ۱. از چپ شروع کنید و بدون در نظر گرفتن صفرهای سمت چپ عدد، تعداد رقمها را تا نخستین رقم مشکوک بشمارید. به‌این‌ترتیب $x = ۳\text{m}$ تنها یک رقم بامعنی دارد و نوشتن آن به‌شکل $x = ۰٫۰۰۳\text{km}$ نیز تعداد رقمهای بامعنی را تغییر نمی‌دهد. اما اگر بنویسیم $x = ۳٫۰\text{m}$ (یا $x = ۰٫۰۰۳۰\text{km}$، که هم‌ارز همان است)، معنی‌اش این است که مقدار $x$ را تا دو رقم بامعنی می‌دانیم. به‌ویژه به‌یاد داشته باشید که، اگر دقت داده‌های اولیه به‌شما اجازه نمی‌دهد، نباید همهٔ ۹ یا ۱۰ رقمی را که روی صفحهٔ ماشین حسابتان ظاهر می‌شود در نتیجه بنویسید! بیشتر محاسباتی که ما در این کتاب انجام می‌دهیم تا دو یا سه رقم بامعنی است.

مراقب نمادگذاریهای مبهم باشید: معلوم نیست که $x = ۳۰۰\text{m}$ یک رقم بامعنی، دو رقم بامعنی، یا سه رقم بامعنی دارد؛ نمی‌توان گفت که صفرهای این عبارت، اطلاعاتی در بر دارند یا صرفاً برای مشخص کردن مرتبهٔ رقم ۳ اند. در این مورد برای روشنترکردن وضعیت رقمهای بامعنی، باید بنویسیم $x = ۳ \times ۱۰^۲$ یا $x = ۳٫۰ \times ۱۰^۲$ یا $x = ۳٫۰۰ \times ۱۰^۲$.

قاعدهٔ ۲. هنگام ضرب و تقسیم، تعداد رقمهایی که در نتیجه نگه

می‌دارید نباید بیشتر از تعداد رقمهای بامعنی عددی باشد که کمترین دقت را دارد. پس

$$\text{۲٫۳} \times \text{۳٫۱۴۱۵۹} = \text{۷٫۲}$$

گاهی لازم است که این قاعده را با دقت بیشتری به‌کار ببریم. مثلاً

$$\text{۹٫۸} \times \text{۱٫۰۳} = \text{۱۰٫۱}$$

زیرا اگرچه ۹٫۸ به‌لحاظ فنی تنها دو رقم بامعنی دارد، اما خیلی نزدیک به‌عددی با سه رقم بامعنی است. بنابراین، حاصل‌ضرب را باید با سه رقم بامعنی بیان کرد.

قاعدهٔ ۳. هنگام جمع و تفریق، کم‌معنی‌ترین رقمهای حاصل در همان جای (نسبی)ای ظاهر می‌شوند که در اعداد اولیه بوده‌اند. در این موارد آنچه اهمیت دارد تعداد رقمهای بامعنی نیست، بلکه جای قرارگرفتن آنهاست. مثلاً

| | |
|---|---|
| ۱۰۳٫۹ | kg |
| ۲٫۱۰ | kg |
| ۰٫۳۱۹ | kg |
| ۱۰۶٫۳۱۹ | یا ۱۰۶٫۳ kg |

کم‌اهمیت‌ترین رقم، یا نخستین رقم مشکوک، را با حرف سیاه نشان داده‌ایم. طبق قاعدهٔ ۱، باید فقط یک رقم مشکوک داشته باشیم. پس نتیجه را باید به‌صورت ۱۰۶٫۳kg بیان کنیم، زیرا اگر "۳" مشکوک باشد، "۱۹"ای که بعد از آن آمده است اطلاعاتی دربرندارد و بی‌فایده است.

**مثال ۳.** شخصی می‌خواهد یک گربهٔ خانگی را وزن کند. تنها وسیله‌ای که در اختیار دارد یک ترازوی معمولی خانگی است. این ترازو رقمی است ونتیجه را به‌شکل عددی صحیح، برحسب پاوند، بیان می‌کند. بنابراین، شخص ابتدا خودش را وزن می‌کند: ۱۱۹ پاوند. سپس گربه را بغل می‌گیرد و وزن مجموع خودش وگربه را تعیین می‌کند: ۱۲۸ پاوند. خطای نسبی یا درصد خطای اندازه‌گیری وزن شخص و وزن گربه چقدراست؟

حل: کم‌معنی‌ترین رقم، رقم یکان است. بنابراین، خطای سنجش وزن شخص، در حدود یک پاوند است؛ یعنی ترازو همهٔ مقادیر بین ۱۱۸٫۵ lb و ۱۱۹٫۵ lb را ۱۱۹ lb نشان می‌دهد. بنابراین، خطای نسبی برابر است با

$$\frac{\text{۱ lb}}{\text{۱۱۹ lb}} = \text{۰٫۰۰۸} \quad \text{یا} \quad \text{٪۰٫۸}$$

وزن گربه ۱۲۸ lb − ۱۱۹ lb = ۹ lb است. اما خطای سنجش وزن گربه هم حدود ۱lb است. پس خطای نسبی در این مورد برابر است با

$$\frac{\text{۱ lb}}{\text{۹ lb}} = \text{۰٫۱۱} \quad \text{یا} \quad \text{٪۱۱}$$

خطای مطلق سنجش وزن شخص و گربه یکسان است (۱lb)، اما خطای نسبی سنجش وزن شخص، یک مرتبهٔ بزرگی از خطای نسبی سنجش وزن گربه کمتر است. اگر با این روش بخواهید یک بچه گربهٔ یک پاوندی را وزن کنید، خطای نسبی سنجش ۱۰۰٪ می‌شود. این نشان می‌دهد که تفریق دو عدد نزدیک به‌هم چه خطری دارد: خطای نسبی حاصل تفریق می‌تواند بسیار بزرگ باشد.

## ۷ـ۱ تحلیل ابعادی

به هرکمیتی که می‌سنجیم یا محاسبه می‌کنیم، معمولاً بُعدی وابسته است، مثلاً، مقدار جذب صوت در یک محیط بسته و احتمال وقوع واکنشهای هسته‌ای، هر دو بُعد مساحت دارند. هرکمیت را می‌توان برحسب یکاهای متفاوتی بیان کرد، اما این کار بعد کمیت را عوض نمی‌کند: مساحت را چه برحسب $m^2$ بیان کنند، چه برحسب $ft^2$، چه برحسب هکتار، چه برحسب سابین (برای جذب صوت)، و چه برحسب بارن (برای واکنشهای هسته‌ای)، به‌هر حال مساحت است و بعد مساحت دارد.

پیش از این، استانداردهای سنجش را به‌عنوان کمیتهای بنیادی تعریف کردیم. به‌همین‌ترتیب، می‌توانیم مجموعه‌ای از ابعاد بنیادی را، براساس استانداردهای مستقل، انتخاب کنیم. در میان کمیتهای مکانیکی، جرم، طول، و زمان، بنیادی و مستقل از یکدیگرند وکمیتهای دیگر را می‌توان برحسب آنها تعریف کرد. پس اینها را به‌عنوان ابعاد بنیادی می‌گیریم و، به‌ترتیب، با M، L، و T نشان می‌دهیم.

هر معادله‌ای باید از نظر ابعادی سازگار باشد؛ یعنی بعد کمیتهای دوطرف معادله باید یکی باشد. در خیلی از موارد، توجه به بعد کمیتها می‌تواند جلوی اشتباه را بگیرد. مثلاً، در فصل بعد نشان می‌دهیم که مسافت $x$، که متغیری با شروع از حالت سکون، و حرکت با شتاب ثابت $a$، طی زمان $t$ می‌پیماید، $x = \frac{1}{2}at^2$ است. یکای شتاب، چیزی مثل $m/s^2$ است. بعد هرکمیت را، با کروشه نشان می‌دهیم: $[x] = L$ و $[t] = T$. بنابراین، $[a] = L/T^2$ یا $[a] = LT^{-2}$. اگر به‌یکا و در نتیجه به بعد شتاب توجه داشته باشیم، هیچ‌وقت رابطه‌ای مثل $x = \frac{1}{2}at^3$ یا $x = \frac{1}{2}at$ نخواهیم نوشت.

تحلیل ابعادی خیلی وقتها می‌تواند در به‌دست آوردن معادلات هم مفید باشد. روش کار را در دو مثال زیر شرح می‌دهیم.

**مثال ۴.** برای اینکه جسمی را واداریم که با سرعت ثابت روی دایره حرکت کند، به نیرویی به‌نام "نیروی مرکزگرا" نیاز داریم. (حرکت دایره‌ای در فصل ۴ بررسی می‌شود.) نیروی مرکزگرا را تحلیل ابعادی کنید.

حل: اول از خودمان می‌پرسیم که "نیروی مرکزگرای $F$، به‌چند متغیرهای دینامیکی‌ای می‌تواند بستگی داشته باشد؟" این جسم

متحرک تنها سه‌ویژگی دارد که می‌توانند مهم باشند: جرم $m$، سرعت $v$، و شعاع مسیر دایره‌ای $r$. بنابراین، نیروی مرکزگرای $F$، صرفنظر از ثابتهای بی‌بعد، باید از چنین معادله‌ای به‌دست بیاید:

$$F \propto m^a v^b r^c$$

که در آن، $\propto$ یعنی "متناسب است با "، و $a$ و $b$ و $c$ نماهایی عددی‌اند که باید از تحلیل ابعادی به‌دست بیایند. چنانکه در بخش ۱ـ۲ گفتیم (و در فصل ۵ خواهیم دید)، یکای نیرو $\mathrm{kg\,m/s^2}$ است، یعنی بعد آن $[F] = \mathrm{MLT^{-2}}$ است. پس معادلهٔ ابعادی نیروی مرکزگرا را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$[F] = [m^a][v^b][r^c]$$

$$\mathrm{MLT^{-2}} = \mathrm{M}^a(\mathrm{L/T})^b\mathrm{L}^c = \mathrm{M}^a\mathrm{L}^{b+c}\mathrm{T}^{-b}$$

سازگاری ابعادی مستلزم آن است که ابعاد بنیادی دوطرف معادله یکسان باشد. پس نماها را در دو طرف برابر می‌گیریم. نتیجه می‌شود که

نمای M: $a = 1$

نمای T: $b = 2$

نمای L: $b + c = 1$ و از آنجا $c = -1$

بنابراین

$$F \propto \frac{mv^2}{r}$$

رابطهٔ واقعی نیروی مرکزگرا، که از قوانین نیوتون و هندسهٔ حرکت دایره‌ای به‌دست می‌آید، $F = mv^2/r$ است. می‌بینیم که تحلیل ابعادی، بستگی دقیق این نیرو با متغیرهای مکانیکی را به‌ما داده است! اما همیشه هم نتیجه به‌این خوبی نیست، چون تحلیل ابعادی چیزی در مورد ثابتهای بی‌بعد نمی‌گوید، در این موردِ خاص، ثابت موردنظر ۱ بوده است.

**مثال ۵.** یکی از مراحل مهم تحول جهان، بلافاصله پس از مهبانگ، زمان پلانک $t_P$ است. مقدار این کمیت به سه ثابت بنیادی بستگی دارد: (۱) سرعت نور (ثابت بنیادی نسبیت)، $c = 3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$؛ (۲) ثابت گرانش نیوتون (ثابت بنیادی گرانش)، $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3/s^2\,kg}$؛ و (۳) ثابت پلانک (ثابت بنیادی مکانیک کوانتومی)، $h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,\mathrm{kg\,m^2/s}$. مقدار زمان پلانک را، با استفاده از تحلیل ابعادی، به‌دست بیاورید.

حل: با توجه به‌یکاهای این سه کمیت، ابعاد آنها را می‌نویسیم

$$[c] = [\mathrm{m/s}] = \mathrm{LT^{-1}}$$

$$[G] = [\mathrm{m^3/s^2\,kg}] = \mathrm{L^3T^{-2}M^{-1}}$$

$$[h] = [\mathrm{kg\,m^2/s}] = \mathrm{ML^2T^{-1}}$$

فرض می‌کنیم بستگی زمان پلانک به‌این ثابتها به‌صورت زیر باشد

$$t_P \propto c^i G^j h^k$$

باید نماهای $i$، $j$، و $k$ را پیدا کنیم. معادلهٔ ابعادی رابطهٔ بالا عبارت است از

$$[t_P] = [c^i][G^j][h^k]$$

$$\mathrm{T} = (\mathrm{LT^{-1}})^i(\mathrm{L^3T^{-2}M^{-1}})^j(\mathrm{ML^2T^{-1}})^k = \mathrm{L}^{i+3j+2k}\mathrm{T}^{-i-2j-k}\mathrm{M}^{-j+k}$$

نماهای دوطرف را برابر می‌گذاریم، نتیجه می‌شود که

نمای L: $0 = i + 3j + 2k$

نمای T: $1 = -i - 2j - k$

نمای M: $0 = -j + k$

این سه معادله را حل می‌کنیم و سه مجهول را به‌دست می‌آوریم

$$i = -\frac{5}{2}, \quad j = \frac{1}{2}, \quad k = \frac{1}{2}$$

بنابراین

$$t_P \propto c^{-5/2}G^{1/2}h^{1/2} = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}}$$

$$= \sqrt{\frac{(6{,}67\times 10^{-11}\mathrm{m^3/s^2kg})(6{,}63\times 10^{-34}\mathrm{kg\,m^2/s})}{(3{,}00\times 10^8\mathrm{m/s})^5}}$$

$$= 1{,}35 \times 10^{-43}\mathrm{s}$$

ثابت پلانک، طبق تعریف معمول، با یک ضریب $(2\pi)^{-1/2}$ با عبارت بالا فرق می‌کند. چنین ضرایب بی‌بعدی را نمی‌توان با تحلیل ابعادی به‌دست آورد.

به‌همین‌ترتیب، می‌توانیم طول پلانک و جرم پلانک را هم به‌دست بیاوریم (مسائل ۴۱ و ۴۲). این کمیتها هم تعبیرهای بنیادی دارند.

## پرسشها

۱. این گفته را نقد کنید: "یک استاندارد، یکبارکه انتخاب شد، به صرف "استاندارد" بودنش، تغییرناپذیر است".

۲. به‌نظر شما یک استاندارد، به‌جز دسترس‌پذیری و تغییرناپذیری، چه خواص مطلوب دیگری باید داشته باشد؟

۳. آیا می‌توانیم سیستمی از یکاهای پایه (جدول ۱) داشته باشیم که زمان جزء آن نباشد؟

۴. از هفت یکای پایهٔ جدول ۱، تنها یکی ــ کیلوگرم ــ پیشوند دارد (جدول ۲). آیا معقولتر نیست که جرم استوانهٔ پلاتین‌ـ‌ایریدیم (در دفتر بین‌المللی اوزان و مقیاسها) را، به‌جای 1kg برابر با 1g تعریف کنند؟

۵. پیشوند "میکرو" در عبارت "اجاق میکروموج" نشانهٔ چیست؟ پیشنهاد شده است که به موادغذایی که با تابش پرتو گاما قابلیت نگهداری آن‌را زیاد کرده‌ایم، "پیکوموجیده" بگوییم. فکر می‌کنید معنی‌این اصطلاح چیست؟

۶. خیلی از پژوهشگران، براساس شواهدی، معتقدند که ادراکات فراحسی واقعیت دارند. با فرض اینکه چنین پدیده‌ای واقعاً در طبیعت وجود داشته باشد، برای توصیف کمّی آن دنبال کدام کمیت یا کمیتهای فیزیکی باید گشت؟

۷. عده‌ای از فیزیکدانها و فیلسوفها معتقدند که اگر نتوان روشی برای تعیین یک کمیت فیزیکی توصیف کرد، آن کمیت آشکارناپذیر است؛ کمیتی است که باید آن‌را رها کرد زیرا واقعیت فیزیکی ندارد. همهٔ دانشمندان چنین نظری ندارند. به‌نظر شما، نکات مثبت و منفی این دیدگاه چیست؟

۸. چند پدیدهٔ تکرارشوندهٔ طبیعی نام ببرید که بتواند استانداردهای مناسب زمان باشند.

۹. می‌شد "۱ ثانیه" را به‌عنوانِ زمانِ یک نبضِ رئیسِ وقتِ اتحادیهٔ معلمان فیزیک امریکا تعریف کرد. گالیله هم در بعضی کارهایش ضربان نبض خود را به‌عنوان زمان‌سنج به‌کار گرفت. چرا تعریفی که براساس ساعتهای اتمی باشد بهتر است؟

۱۰. ویژگیهای یک ساعت خوب چیست؟

۱۱. با توجه به‌آنچه دربارهٔ آونگ می‌دانید، بگویید که اشکالات استفاده از دورهٔ تناوب آونگ به‌عنوان استاندارد زمان چیست.

۱۲. در روز ۳۰ ژوئن سال ۱۹۸۱، دقیقهٔ بین ساعت ۵۹ : ۱۰ و ساعت ۰۰ : ۱۱ صبح را 61s گرفتند. همچنین، روز آخر سال ۱۹۸۹ را هم، به‌اندازه 1s، طولانیتر اختیار کردند. گاه‌به‌گاه، این یک ثانیهٔ اضافی (کبیسه) را وارد می‌کنند، چون سرعت چرخش زمین، براساس استاندارد اتمی، در حال کند شدن است. چرا این کار، یعنی تنظیم دوبارهٔ ساعتها به‌این شکل، کارِ خوبی است؟

۱۳. یک ایستگاه رادیویی "روی ۸۹٫۵ باند FM" برنامه پخش می‌کند. معنی این عدد چیست؟

۱۴. چرا در SI، یکای پایه‌ای برای مساحت یا حجم وجود ندارد؟

۱۵. در ابتدا متر را برابر با یک ده‌میلیونیم فاصلهٔ قطب شمال تا استوا، از طریق نصف‌النهاری که از پاریس می‌گذرد، تعریف کرده بودند. این تعریف، به مقدار ۰٫۰۲۳٪ با میلهٔ متر تفاوت دارد. آیا معنی‌اش این است که میلهٔ متر استاندارد تا این اندازه خطا دارد؟

۱۶. آیا می‌توان طول یک خط خمیده را اندازه گرفت؟ اگرمی‌شود، چگونه؟

۱۷. هنگامی که میلهٔ متر را به‌عنوان استاندارد طول برگزیدند، مشخص کردند که این تعریف، در چه دمایی است. آیا می‌توان طول را ویژگی بنیادی نامید در حالی‌که برای تعیین استاندارد آن باید کمیت فیزیکی دیگری، مثل دما، را مشخص کرد؟

۱۸. چرا شرکت‌کنندگان در کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها در سال ۱۹۸۳، سرعت نور را دقیقاً برابر با $3 \times 10^8 m/s$ تعریف نکردند؟ آیا این انتخاب، کار را ساده‌تر نمی‌کرد؟ چرا سرعت نور را دقیقاً 1m/s اختیار نکردند؟ آیا امکان هر دو انتخاب بالا برای آنها وجود داشت؟ اگر داشت، چرا هر دو را کنار گذاشتند؟

۱۹. روشی برای سنجش (الف) شعاع کرهٔ زمین، (ب) فاصلهٔ میان خورشید و زمین، و (ج) شعاع خورشید، پیشنهاد کنید.

۲۰. روشی برای سنجش (الف) ضخامت یک صفحهٔ کاغذ، (ب) ضخامت یک حباب صابون، و (ج) قطر اتم، پیشنهاد کنید.

۲۱. اگر کسی بگوید که ابعاد همهٔ اجسام، یک شبه نصف شده است، چگونه می‌توان ادعای او را رد کرد؟

۲۲. آیا استاندارد فعلی کیلوگرم برای جرم، قابل حصول، تغییرناپذیر، قابل بازسازی، و تخریب‌ناپذیر هست؟ آیا مقایسهٔ جرمهای مختلف با آن ساده است؟ آیا استانداردهای اتمی، از هر نظر بهتر نیستند؟ چرا برای جرم هم، مثل طول و زمان، استانداردِ اتمی اختیار نمی‌کنیم؟

۲۳. چرا داشتن دو استانداردِ جرم، یکی کیلوگرم و یکی جرم اتم $^{12}C$، مفید است؟

۲۴. رابطهٔ میان جرم کیلوگرم استاندارد و جرم اتم $^{12}C$ چگونه به‌دست می‌آید؟

۲۵. برای تعیین جرم اجسام جدول ۵، روشهایی عملی پیشنهاد کنید.

۲۶. اجسامی پیشنهاد کنید که جرم آنها در گسترهٔ وسیع بین جرم کشتی اقیانوس‌پیما و جرم ماه (جدول ۵) واقع باشد و این جرمها را تخمین بزنید.

۲۷. مخالفان سیستم متریک (در کشورهایی که این سیستم را نپذیرفته‌اند) اغلب سفسطه می‌کنند که، مثلاً، "به‌جای اینکه 1lb کره بخرید، باید 0.454kg کره بخرید." منظورشان این است که زندگی مشکلتر می‌شود. این نوع استدلالها را چگونه باید رد کرد؟

## مسئله‌ها

### بخش ۱ـ۲ سیستم بین‌المللی یکاها

۱. با استفاده از پیشوندهای جدول ۲، این عبارتها را بیان کنید. (الف) $10^6$ فون؛ (ب) $10^{-6}$ فون؛ (ج) $10^1$ کارت؛ (د) $10^9$ لو؛ (هـ) $10^{12}$ ورس؛ (و) $10^{-1}$ مال؛ (ز) $10^{-2}$ مانتال؛ (ح) $10^{-9}$ مسکن؛ (ط) $10^{-12}$ لو؛ (ی) $10^{-18}$ ماتیک؛ (ک) $2 \times 10^3$ مرغ. خودتان هم عبارتهای مشابهی بسازید.[1]

۲. بعضی از پیشوندهای یکاهای SI، وارد زندگی روزمره هم شده‌اند. (الف) حقوق سالانه 36K (یعنی 36k$) معادل هفته‌ای چقدر است؟ (ب) جایزهٔ بزرگ یک بخت‌آزمایی، ۱۰ مگادلار است که طی

۱. رجوع کنید به‌صفحهٔ ۶۱ کتابِ
*A Random Walk in Science*, compiled, R. L. Weber; Crane, Russak & Co., NewYork, 1974.

| ساعت | یکشنبه | دوشنبه | سه‌شنبه | چهارشنبه | پنجشنبه | جمعه | شنبه |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | ۱۲:۳۶:۴۰ | ۱۲:۳۶:۵۶ | ۱۲:۳۷:۱۲ | ۱۲:۳۷:۲۷ | ۱۲:۳۷:۴۴ | ۱۲:۳۷:۵۹ | ۱۲:۳۸:۱۴ |
| B | ۱۱:۵۹:۵۹ | ۱۲:۰۰:۰۲ | ۱۱:۵۹:۵۷ | ۱۲:۰۰:۰۷ | ۱۲:۰۰:۰۲ | ۱۱:۵۹:۵۶ | ۱۲:۰۰:۰۳ |
| C | ۱۵:۵۰:۴۵ | ۱۵:۵۱:۴۳ | ۱۵:۵۲:۴۱ | ۱۵:۵۳:۳۹ | ۱۵:۵۴:۳۷ | ۱۵:۵۵:۳۵ | ۱۵:۵۶:۳۳ |
| D | ۱۲:۰۳:۵۹ | ۱۲:۰۲:۵۲ | ۱۲:۰۱:۴۵ | ۱۲:۰۰:۳۸ | ۱۱:۵۹:۳۱ | ۱۱:۵۸:۲۴ | ۱۱:۵۷:۱۷ |
| E | ۱۲:۰۳:۵۹ | ۱۲:۰۲:۴۹ | ۱۲:۰۱:۵۴ | ۱۲:۰۱:۵۲ | ۱۲:۰۱:۳۲ | ۱۲:۰۱:۲۲ | ۱۲:۰۱:۱۲ |

۲۰ سال پرداخت می‌شود. برندهٔ جایزه، هرماه چقدر پول می‌گیرد؟ (ج) ظرفیت دیسک سخت یک کامپیوتر ۳۰MB است. اگر هر کلمه ۸ بایت را اشغال کند، این کامپیوتر چند کلمه گنجایش دارد؟ مقصود کامپیوتر کارها از کیلو، ۱۰۲۴ (یعنی $2^{10}$) است، نه ۱۰۰۰.

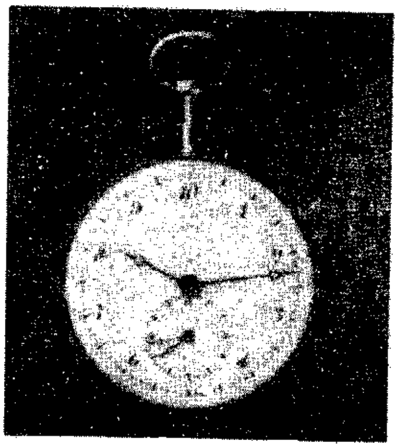
**بخش ۱ـ۳ استاندارد زمان**

۳. انریکو فرمی زمانی گفته بود که مدت استاندارد یک جلسه درس (۵۰min) نزدیک به یک میکروقرن است. هر میکروقرن چند دقیقه است و درصد اختلاف این رقم با تقریب فرمی چقدر است؟

۴. فاصلهٔ نیویورک و لوس‌آنجلس در حدود ۳۰۰۰mi است؛ اختلاف زمانی این شهرها، ۳h است. محیط زمین چقدر است؟

۵. یکی از ارقام معمول برای تعداد ثانیه‌های موجود در یک‌سال، $\pi \times 10^{7}$ است. این مقدار چند درصد خطا دارد؟

۶. کمی پس از انقلاب فرانسه، کنوانسیون ملی به‌عنوان بخشی از برنامهٔ معرفی سیستم‌متریک، تلاش کرد زمان را هم دهدهی کند. در این تلاش، که البته موفق نشد، هر شبانه‌روز که از نیمه‌شب آغاز می‌شد، به ۱۰ ساعت دهدهی تقسیم شده بود، و هرساعت برابر با ۱۰۰ دقیقهٔ دهدهی بود. عقربه‌های ساعتی که از آن دوران باقی‌مانده است، روی ساعت ۸ دهدهی و دقیقهٔ ۲۲٫۸ دهدهی متوقف شده‌اند. ساعت (به‌معیار خودمان) چند است؟ (شکل ۷).



شکل ۷. مسئلهٔ ۶

۷. (الف) شیک[1] یکی از واحدهای زمان است که، گاهی، در فیزیک میکروسکوپیکی به‌کار می‌رود. هر شیک $10^{-8}$s است. تعداد شیکهای یک ثانیه بیشتر است یا تعداد ثانیه‌های یک سال؟ (ب) قدمت انسان در حدود $10^{6}$ سال است، در حالی‌که سن جهان در حدود $10^{10}$ سال است. اگر سن جهان را ۱ روز بگیریم، قدمت انسان چند ثانیه می‌شود؟

۸. رکوردهایی که دو دونده در دو مسابقهٔ متفاوت دو به مسافت یک مایل به‌دست آورده‌اند؛ ۳ دقیقه و ۵۸٫۰۵ ثانیه، و ۳ دقیقه و ۵۸٫۲۰ ثانیه، است. حداکثر خطا در تعیین مسافت دو مسابقه برحسب فوت چقدر باید باشد تا بتوانیم نتیجه بگیریم که دونده‌ای که این مسافت را در زمان کمتری طی کرده، واقعاً سریعتر دویده است؟

۹. یک ساعت آونگی (با صفحهٔ ۱۲ ساعته) به‌اندازهٔ ۱min/day جلو می‌رود. اگر این‌ساعت را میزان کنیم چقدر طول می‌کشد تا دوباره زمان درست را نشان بدهد؟

۱۰. پنج دستگاه ساعت در آزمایشگاهی آزمایش می‌شوند. هر روز درست سر ظهر، که با ساعت اتمی معلوم می‌شود، رقمی که ساعتها نشان می‌دهند ثبت می‌شود. این‌کار به‌مدت یک هفته ادامه می‌یابد. نتایج آزمایش در جدول بالا آمده است. این ساعتها را به‌ترتیبِ بهتر بودن زمان‌سنجی آنها مرتب کنید. علت انتخاب خودتان را بیان کنید.

۱۱. سن جهان در حدود $5 \times 10^{17}$s است؛ دوام کوتاهترین تپ [پالس] نورکه (تا سال ۱۹۹۰) در آزمایشگاه تولید شده است، تنها $6 \times 10^{-15}$s بوده است (جدول ۳). یک‌بازهٔ زمانی فیزیکی ذکر کنید که، در مقیاس لگاریتمی، تقریباً وسط این دو عدد باشد.

۱۲. با این فرض که طول روز، به‌طور یکنواخت، به‌مقدار ۰٫۰۰۱s در قرن زیاد می‌شود، اثر تجمعی این پدیده بر سنجش زمان در طی ۲۰ قرن را حساب کنید. چنین کاهشی در سرعت چرخش زمین را از روی مشاهدات مربوط به‌کسوف در این دوره (۲۰ قرن) پیدا کرده‌اند.

۱۳. زمانی که طول می‌کشد تا ماه، نسبت به ستاره‌های ثابت، به‌مکان اولیهٔ خود برگردد، ۲۷٫۳ روز است و آن‌را ماه نجومی می‌نامند. بازهٔ زمانی بین دو وضعیت یکسان ماه را ماه قمری می‌نامند. ماه قمری از ماه نجومی طولانیتر است. چرا و چقدر؟

**بخش ۱ـ۴ استاندارد طول**

۱۴. قد شخصی ۱٫۹m است. این کمیت برحسب یکاهای بریتانیایی چقدر است؟

1. shake

۱۵. (الف) هم مسابقهٔ دو ۱۰۰ یارد داریم و هم مسابقهٔ دو ۱۰۰ متر. کدام‌یک طولانیتر است؟ چند متر؟ چند فوت؟ (ب) هم رکوردهای دو یک مایل را ثبت می‌کنند و هم رکوردهای دو یک مایل متریک (۱۵۰۰ متر) را. این دو مسافت را با هم مقایسه کنید.

۱۶. پایداری ساعتهای سزیومی که به‌عنوان استاندارد اتمی زمان به‌کار می‌روند، چنان است که دو ساعت سزیمی در طی حدود ۳۰۰۰۰۰ سال حداکثر 1s با هم اختلاف خواهند داشت. اگر فاصلهٔ میان نیویورک و سان‌فرانسیسکو (2572mi) هم با همین دقت تعیین شده باشد، اختلاف دوبار سنجش این مسافت چقدر خواهد بود؟

۱۷. جنوبگان تقریباً به‌شکل نیمدایره‌ای به‌شعاع 2000km است. ضخامت متوسط پوشش یخی آن 3000m است. جنوبگان چند سانتی‌متر مکعب یخ دارد؟ (خمیدگی زمین را در نظر نگیرید.)

۱۸. هکتار یکی از یکاهای مساحت است که معمولاً برای سنجش مساحت زمینها به‌کار می‌رود. هر هکتار طبق تعریف $10^4\,\mathrm{m}^2$ است. در یک معدن روباز زغال‌سنگ، هر سال ۷۷ هکتار زمین به‌عمق 26m حفاری می‌شود. چند کیلومتر مکعب خاک در سال از این معدن بیرون می‌آید؟

۱۹. زمین تقریباً به‌شکل کره‌ای است به‌شعاع $6{,}37 \times 10^6\,\mathrm{m}$. (الف) محیط آن چند کیلومتر است؟ (ب) مساحت سطح آن چند کیلومتر مربع است؟ (ج) حجم آن چند کیلومتر مکعب است؟

۲۰. مقدار تقریبی حداکثر سرعت چند جانور برحسب یکاهای متفاوت، در سطرهای پایین ذکر شده است. این سرعتها را به m/s تبدیل کنید و جانوران را به‌ترتیب صعودی حداکثر سرعتشان مرتب کنید: سنجاب، 19km/h؛ خرگوش، ۳۰ گره؛ حلزون، 0,030mi/h؛ عنکبوت، 1,8ft/s؛ چیتا، 1,9km/min؛ انسان، 1000cm/s؛ روباه، 1100m/min؛ شیر، 1900km/day.

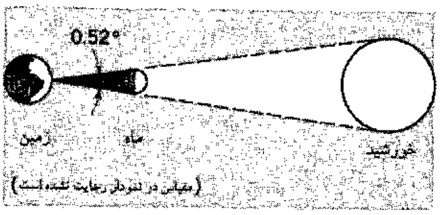
۲۱. سرعت یک سفینهٔ فضایی 19200mi/h است، این سرعت برحسب سالِ نوری بر قرن، چقدر است؟

۲۲. یک نوع اتومبیل جدید، مجهز به‌یک نمایشگر میزان مصرف سوخت است. راننده می‌تواند، با یک کلید، یکاهای بریتانیایی یا SI را انتخاب کند. اعداد نمایش بریتانیایی برحسب mi/galاند، اما نمایش SI برعکس آن، یعنی برحسب L/km است. نمایش SIبرای معادل 30,0mi/gal چه عددی است؟

۲۳. فاصله‌های نجومی در مقایسه با ابعاد زمینی آنقدر بزرگ‌اند که برای درک آسانتر فواصل نسبی اشیای نجومی از یکاهای طولی استفاده می‌شود که خیلی از یکاهای معمولی بزرگترند: یک یکای نجومی (AU) برابر است با فاصلهٔ متوسط زمین از خورشید، یعنی $1{,}50 \times 10^8\,\mathrm{km}$. یک پارسک (pc) مسافتی است که طول یک یکای نجومی از آن فاصله، تحت یک ثانیهٔ قوسی دیده شود، یک سال نوری (ly) مسافتی است که نور، با سرعت $3{,}00 \times 10^5\,\mathrm{km/s}$ در خلأ، طی یک سال می‌پیماید. (الف) فاصلهٔ زمین تا خورشید را برحسب پارسک و سال نوری بیان کنید. (ب) سال نوری و پارسک را برحسب کیلومتر بیان کنید. در نوشته‌های عامه‌خوان از سال‌نوری خیلی استفاده می‌شود، اما پارسک را عموماً اخترشناسان به‌کار می‌برند.

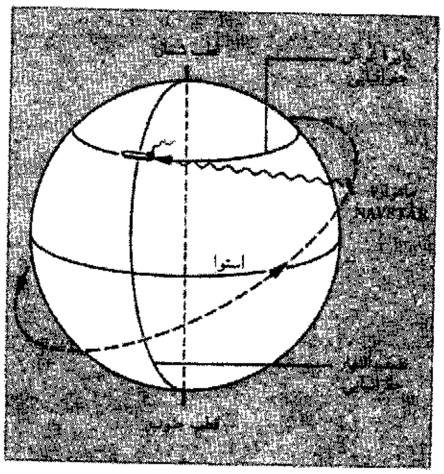
۲۴. شعاع مؤثر پروتون $1 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}$ است؛ شعاع جهان مشاهده‌پذیر (براساس فاصلهٔ دورترین اختروش مشاهده‌پذیر) $2 \times 10^{26}\,\mathrm{m}$ است (جدول ۴). یک مسافت فیزیکی ذکر کنید که مقدار آن، در مقیاس لگاریتمی، تقریباً در وسط این دو عدد باشد.

۲۵. فاصلهٔ متوسط خورشید از زمین، ۳۹۰ برابر فاصلهٔ متوسط ماه از زمین است. کسوف کامل را در نظر بگیرید (ماه بین زمین و خورشید؛ شکل ۸) و (الف) نسبت قطر خورشید به قطر ماه، و (ب) نسبت حجم خورشید به حجم ماه را حساب کنید. (ج) ماه از زمین تحت زاویهٔ $0{,}52°$ دیده می‌شود و فاصلهٔ زمین از ماه $3{,}82 \times 10^5\,\mathrm{km}$ است. قطر ماه را حساب کنید.




شکل ۸. مسئلهٔ ۲۵

۲۶. سیستم ناوبریِ یک نفتکش، با استفاده از ماهواره‌های سیستم جهانی تعیین موقعیت (GPS/NAVSTAR)، عرض و طول جغرافیایی مکان را به‌ترتیب برابر با 43°36′25,3″N و 77°31′48,2″W تعیین می‌کند (شکل ۹). اگر خطای این اعداد ″0,5± باشد، خطای سنجش موقعیت نفتکش در راستای (الف) شمال-جنوب (نصف‌النهاری که از آن نقطه می‌گذرد) و (ب) شرق-غرب (مداری که از آن نقطه می‌گذرد) چقدر است؟ (ج) نفتکش در کجاست؟




شکل ۹. مسئلهٔ ۲۶

**بخش ۱ـ۵ استاندارد جرم**

۲۷. با استفاده از ضرایب تبدیل و داده‌های این فصل، حساب کنید که در $۱٫۰۰\,\mathrm{kg}$ هیدروژن چند اتم هیدروژن وجود دارد؟

۲۸. مولکول آب ($H_2O$) دو اتم هیدروژن و یک اتم اکسیژن دارد. جرم اتم هیدروژن $۱٫۰\,\mathrm{u}$ و جرم اتم اکسیژن $۱۶\,\mathrm{u}$ است. (الف) جرم یک مولکول آب چند کیلوگرم است؟ (ب) در آب اقیانوسهای جهان چند مولکول آب وجود دارد؟ جرم کل اقیانوسهای جهان $۱٫۴ \times ۱۰^{۲۱}\,\mathrm{kg}$ است.

۲۹. در قارهٔ اروپا، یک "پاوند" نیم کیلوگرم است. کدام‌یک از این خریدها بصرفه‌تر است؟ یک پاوندِ پاریسی قهوه به‌قیمت ۳٫۰۰ دلار یا یک پاوندِ نیویورکی به‌قیمت ۲٫۴۰ دلار؟

۳۰. ابعاد یک اتاق $۲۱\,\mathrm{ft} \times ۱۳\,\mathrm{ft} \times ۱۲\,\mathrm{ft}$ است. جرم هوای موجود در آن چقدر است؟ چگالی هوا، در دمای اتاق و فشار عادی جو، $۱٫۲۱\,\mathrm{kg/m^۳}$ است.

۳۱. طول ضلع یک حبه قند معمولی $۱\,\mathrm{cm}$ است. طول ضلع جعبه‌ای که درست یک مول حبه قند در آن جا بگیرد چقدر است؟

۳۲. شخصی، با رژیم غذایی، هفته‌ای $۲٫۳\,\mathrm{kg}$ (حدود $۵\,\mathrm{lb}$) وزن کم می‌کند. آهنگ کاهش وزن این شخص برحسب میلی‌گرم بر ثانیه چقدر است؟

۳۳. فرض کنید $۱۲\,\mathrm{h}$ طول می‌کشد که مخزنی محتوی $۵۷۰۰\,\mathrm{m^۳}$ آب خالی شود. آهنگ خروج آب (برحسب $\mathrm{kg/s}$) از این مخزن چقدر است؟ چگالی آب $۱۰۰۰\,\mathrm{kg/m^۳}$ است.

۳۴. شعاع متوسط دانه‌های ماسه در ساحل کالیفرنیا $۵۰\,\mu\mathrm{m}$ است. مساحت کلِ چه جرمی از این ماسه‌ها برابر با مساحت سطح مکعبی به‌ضلع $۱\,\mathrm{m}$ است؟ ماسه از جنس سیلیسیم‌دیوکسید است، که جرم هر مترمکعب آن $۲۶۰۰\,\mathrm{kg}$ است.

۳۵. کیلوگرم استاندارد (شکل ۵) به‌شکل استوانه‌ای است که ارتفاع آن با قطرش برابر است. نشان بدهید که در میان استوانه‌هایی با حجم یکسان، استوانه‌ای‌که قطر و ارتفاعش برابر باشد کمترین مساحت سطح را دارد. به‌این‌ترتیب، آثار سایش و آلودگی سطحی استوانهٔ استاندارد به حداقل می‌رسد.

۳۶. برای تخمین فاصلهٔ بین دو اتم یا دو مولکول مجاور در یک مادهٔ جامد، می‌توان دو برابر شعاع کره‌ای را در نظر گرفت که حجم آن برابر با حجم بر اتم آنِ ماده باشد. فاصلهٔ بین اتمهای مجاور را (الف) در آهن و (ب) در سدیم حساب کنید. چگالی آهن و سدیم به‌ترتیب $۷۸۷۰\,\mathrm{kg/m^۳}$ و $۱۰۱۳\,\mathrm{kg/m^۳}$ است. جرم هر اتم آهن $۹٫۲۷ \times ۱۰^{-۲۶}\,\mathrm{kg}$، و جرم هر اتم سدیم $۳٫۸۲ \times ۱۰^{-۲۶}\,\mathrm{kg}$ است.

**بخش ۱ـ۶ دقت و ارقام بامعنی**

۳۷. طی سالهای ۱۹۶۰ تا ۱۹۸۳، متر برابر با ۱۶۵۰۷۶۳٫۷۳ طول‌موج نور قرمزـنارنجی خاصی که از اتمهای کریپتون گسیل می‌شود تعریف شده بود. یک طول‌موج این تابش، برحسب نانومتر، چقدر است؟ نتیجه را با تعداد مناسبی از رقمهای بامعنی بیان کنید.

۳۸. (الف) $۳۷٫۷۶ + ۰٫۱۳۲$ را، با تعداد درست رقمهای بامعنی، حساب کنید. (ب) $۱۶٫۲۶۴ - ۱۶٫۲۶۳۲۵$ را، با تعداد درست رقمهای بامعنی، حساب کنید.

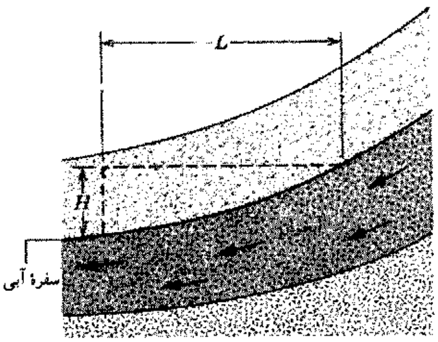
۳۹. (الف) طول یک صفحهٔ مستطیلی فلزی $۸٫۴۳\,\mathrm{cm}$ و عرض آن $۵٫۱۲\,\mathrm{cm}$ است. مساحت این صفحه را، با رقمهای بامعنی به‌تعدادِ درست حساب‌کنید. (ب) شعاع یک صفحهٔ فلزی گرد $۳٫۷\,\mathrm{cm}$ است. مساحت صفحه را، با تعداد درست رقمهای بامعنی، حساب کنید.

**بخش ۱ـ۷ تحلیل ابعادی**

۴۰. سنگهای متخلخل می‌توانند آب زیرزمینی را از خودشان عبور بدهند. حجم $V$ آب، که در زمان $t$ از سطح مقطعی به‌مساحت $A$ عبور می‌کند، از رابطهٔ

$$\frac{V}{t} = KA\frac{H}{L}$$

به‌دست می‌آید، که در آن $H$ برابر با مقدار کاهش ارتفاع سطح بستر نسبت به‌افق، در طی مسافت $L$ است (شکل ۱۰). این رابطه را قانون دارسی[1] می‌نامند. کمیت $K$ رسانندگی هیدرولیکی بستر است یکای SI کمیت $K$ چیست؟




شکل ۱۰. مسئلهٔ ۴۰

۴۱. در مثال ۵، ثابتهای $h$، $G$، و $c$ را ترکیب کردیم و کمیتی با بعد زمان به‌دست آوردیم. با تکرار همین کار کمیتی با بعد طول به‌دست بیاورید و مقدار عددی آن‌را محاسبه کنید. ثابتهای بی‌بعد را کنار بگذارید. این طول پلانک است؛ اندازهٔ جهان مشاهده‌پذیر در زمان پلانک.

۴۲. روش مسئلهٔ ۴۱ را تکرار کنید و کمیتی با بعد جرم به‌دست بیاورید. این کمیت جرم پلانک است، یعنی جرم جهان مشاهده‌پذیر در زمان پلانک.

1. Darcy

# ۲

# حرکت در یک بُعد

مکانیک، قدیمی‌ترین شاخهٔ علوم‌فیزیکی، علم بررسی حرکت اجسام است. از محاسبهٔ مسیر توپ بیسبال یا مسیر سفینهٔ فضایی‌ای که به مریخ می‌رود گرفته تا تحلیل ردّ حرکتهای ذرات بنیادی‌ای که از برخورد ذرات در بزرگترین شتابدهنده‌ها حاصل می‌شوند، همه جزو مسائل مکانیک‌اند. بخشی از مکانیک که به **توصیف** حرکت اختصاص دارد **سینماتیک** نامیده می‌شود (سینماتیک برگرفته از معادل واژهٔ حرکت در زبان یونانی است؛ "سینما" به معنی تصاویر **متحرک** را هم از همین واژه گرفته‌اند). به آن بخشی از مکانیک که به تحلیل **علل** حرکت مربوط می‌شود **دینامیک** می‌گویند، (برگرفته از معادل یونانی واژهٔ نیرو؛ دینامیت هم از همین واژه می‌آید). در این فصل، تنها به سینماتیک در یک بعد می‌پردازیم. در دو فصل بعدی این نتایج را به دو و سه بعد تعمیم می‌دهیم. مطالعهٔ دینامیک را در فصل ۵ آغاز خواهیم کرد.

## ۲ـ۱ سینماتیک ذره

برای شروع مطالعه، مورد ساده‌ای را در نظر می‌گیریم: ذره‌ای که روی خط راست حرکت می‌کند. حرکت راست‌خط خوبی‌اش این است که با آن می‌توانیم مفاهیم بنیادی سینماتیک، مثل سرعت و شتاب را بدون نیاز به ریاضیات مربوط به بردارها، که معمولاً برای تحلیل حرکتهای دوبعدی و سه‌بعدی به‌کار می‌رود، به‌سادگی معرفی کنیم. البته در همین شکل محدود حرکت هم می‌توانیم خیلی از وضعیتهای واقعی را بررسی کنیم: سنگ در حال سقوط، قطار شتابدار، اتومبیل در حال ترمز، گوی هاکی در حال لغزش، صندوقی که از شیبی بالا کشیده می‌شود، الکترونهای سریع لامپ پرتو x، و نظایر آنها نمونه‌هایی از این مواردند. در این موارد حالت حرکت می‌تواند تغییر کند (مثلاً ممکن است به گوی هاکی ضربه بزنیم تا شروع به حرکت کند)، جهت حرکت هم می‌تواند تغییر کند (مثلاً می‌شود سنگ را به هوا پرتاب کرد تا دوباره به زمین برگردد)، اما در هر حال این حرکت باید مقید به یک خط راست باشد.

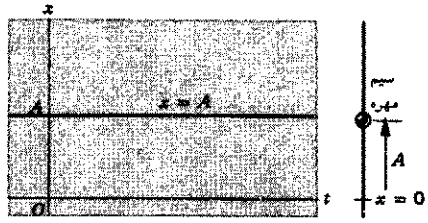
برای اینکه بحث را باز هم ساده‌تر کرده باشیم، فعلاً فقط به حرکت یک ذره می‌پردازیم. یعنی اجسام پیچیده را هم مثل یک نقطهٔ‌مادی فرض می‌کنیم. به این ترتیب، می‌توانیم از همهٔ حرکتهای درونی ممکن چشمپوشی کنیم ــ مثلاً از حرکت چرخشی (فصلهای ۱۱ تا ۱۳) یا از حرکت ارتعاشی اجزای جسم (فصل ۱۵). در این بحث مواردی را در نظر می‌گیریم که همهٔ اجزای جسم، دقیقاً در یک جهت حرکت می‌کنند. چرخ غلتان چنین خاصیتی ندارد زیرا حرکت نقاط روی لبهٔ آن، با حرکت نقاط روی محورش فرق می‌کند. (اما چرخ لغزان این خاصیت را دارد. بنابراین چرخ را هم مثل اجسام دیگر، می‌توانیم برای بعضی از محاسبات مانند ذره در نظر بگیریم و برای بعضی دیگر نمی‌توانیم.) تا جایی که تنها با متغیرهای سینماتیکی سروکار داریم، علتی وجود ندارد که حرکت قطار و الکترون را بر یک اساس بررسی نکنیم. هر دو نمونه‌هایی از حرکت ذره‌اند.

همهٔ انواع حرکت راست‌خط ذره را بررسی می‌کنیم. ذره ممکن است سرعت بگیرد، سرعت کم کند، و حتی بایستد و برگردد. به دنبال توصیفی می‌گردیم که همهٔ این امکانات را در برداشته باشد.

## ۲ـ۲ توصیف حرکت

حرکت ذره را به دو طریق توصیف می‌کنیم: با معادلات ریاضی و با نمودار. هر دو راه برای مطالعهٔ سینماتیک مفیدند، و ما هم از هر دو استفاده می‌کنیم. معمولاً روش ریاضی برای حل مسائل بهتر است، زیرا دقت بیشتری از روش نموداری دارد. روش نموداری از این جهت مفید است که خیلی وقتها بصیرت فیزیکی بیشتری، نسبت به معادلات ریاضی، به‌دست می‌دهد.

اگر بستگی ریاضی مکان $x$ ذره (نسبت به مبدأ یک چارچوب مرجع معین) به زمان $t$ را برای همهٔ زمانها داشته باشیم، توصیف کاملی از حرکت ذره به‌دست می‌آید. این همان تابع $x(t)$ است. در مثالهای زیر، چند نمونه از انواع ممکن حرکت را همراه با توابع و نمودارهای توصیف‌کنندهٔ آنها در نظر می‌گیریم:




شکل۱. مهره‌ای که می‌تواند آزادانه در یک‌بعد روی سیمی حرکت کند؛ راستای (ثابت) حرکت دلبخواه است و الزاماً قائم نیست. در این مورد، مهره در مختصهٔ $x$ برابر با $A$ ساکن است، و "حرکت" آن با خط راست افقی $x = A$ توصیف می‌شود.

۱. سکون. در این حالت ذره همیشه در نقطهٔ $A$ است:

$$x(t) = A \qquad (۱)$$

نمودار این "حرکت" در شکل ۱ آمده است. برای توضیح این نمودار، فرض می‌کنیم ذره مهره‌ای است که بدون اصطکاک روی سیم بلندی می‌لغزد. در این مورد، مهره در نقطهٔ $x = A$ در حالت سکون است. دقت کنید که در نمودار، $x$ را متغیر وابسته (روی محور قائم) و $t$ را متغیر مستقل (روی محور افقی) می‌گیریم.

۲. حرکت با سرعت ثابت. آهنگ حرکت ذره را با سرعت آن توصیف می‌کنیم. در حرکت یک‌بعدی، سرعت می‌تواند مثبت یا منفی باشد: ذره اگر در جهت افزایش $x$ حرکت کند سرعت مثبت است، و اگر در جهت کاهش $x$ حرکت کند سرعت منفی است. اندازهٔ سرعت هم معیار دیگری از آهنگ حرکت است. اندازهٔ سرعت همیشه مثبت است و اطلاعی در بارهٔ جهت حرکت در بر ندارد.

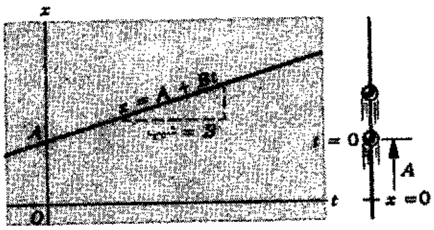
در حرکت با سرعت ثابت، نمودار مکان برحسب زمان خطی راست با شیب ثابت است. از حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌دانیم که شیب هرتابعی مشخص‌کنندهٔ آهنگ تغییر آن است. در اینجا، آهنگ تغییر مکان سرعت است، و هر چه شیب نمودار بیشتر باشد، سرعت بیشتر است. در شکل ریاضیاتی داریم

$$x(t) = A + Bt \qquad (۲)$$

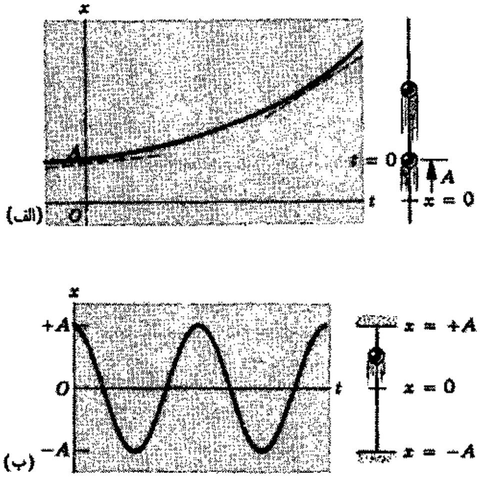
که نمایش معمول یک خط راست با شیب $B$ است (البته خط را اغلب با $y = mx + b$ نشان می‌دهند).

شکل ۲ حرکت ذره‌ای را نشان می‌دهد که در زمان $t = ۰$ در نقطهٔ $x = A$ است. این ذره با سرعت ثابت در جهت افزایش $x$ حرکت می‌کند. به این ترتیب، همان‌طور که از شیب مثبت نمودار برمی‌آید، سرعت آن مثبت است.

۳. حرکت شتابدار. در این مورد سرعت ذره تغییر می‌کند (شتاب، طبق تعریف، برابر است با آهنگ تغییر سرعت)؛ بنابراین، شیب نمودار هم متغیر است. پس نمودار چنین حرکتهایی منحنی است نه خط




شکل۲. مهره‌ای که در یک بعد با سرعت ثابت $B$ در جهت مثبت $x$ روی سیمی می‌لغزد؛ مهره در زمان صفر از $x = A$ شروع به حرکت می‌کند و حرکت آن با خط $x = A + Bt$ توصیف می‌شود.




شکل۳. (الف) مهره‌ای که در یک بعد با سرعت فزاینده در جهت مثبت در روی سیم می‌لغزد. سرعت مهره برابر است با شیب منحنی‌ای که حرکت آن‌را توصیف می‌کند؛ می‌توانید ببینید که چگونه شیب منحنی به‌طور پیوسته زیاد می‌شود. (ب) مهره‌ای در یک بعد روی سیم بین $x = +A$ و $x = -A$ نوسان می‌کند.

راست. دو نمونه از این نوع حرکت عبارت است از:

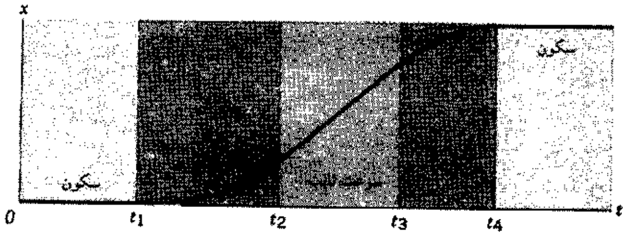
$$x(t) = A + Bt + Ct^۲ \qquad (۳)$$

$$x(t) = A\cos\omega t \qquad (۴)$$

در اولی با فرض $C > ۰$، شیب به‌طور پیوسته زیاد می‌شود و حرکت ذره مدام سریعتر می‌شود (شکل ۳الف). در دومی، ذره بین $x = +A$ و $x = -A$ نوسان می‌کند (شکل ۳ب)، و سرعت آن نیز همراه با تغییر علامت شیب منحنی در شکل ۳ب، تغییر علامت می‌دهد.

توصیف کامل حرکت، معمولاً پیچیده‌تر از آن است که تا به حال با مثالهای ساده نشان داده‌ایم. به این مثالها توجه کنید:

۴. اتومبیلی که شتاب می‌گیرد و ترمز می‌کند. اتومبیلی از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند، شتاب می‌گیرد، و به سرعت معینی می‌رسد. سپس مدتی با سرعت ثابت حرکت می‌کند، و سرانجام ترمز می‌کند و می‌ایستد. شکل ۴ این حرکت را نشان می‌دهد. این حرکت را نمی‌شود صرفاً با یک معادله توصیف کرد؛ برای حالتهای سکون باید رابطه‌ای از نوع معادلهٔ ۱ به‌کار ببریم؛ برای بخش شتابدار تندشونده



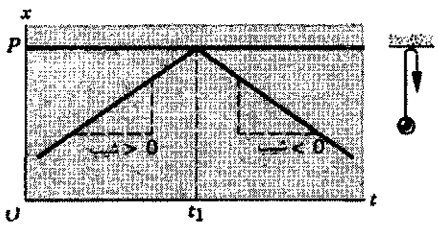

**شکل۴.** این منحنی اتومبیلی را توصیف می‌کند که از $t = 0$ تا $t = t_1$ در حالت سکون است، و از این لحظه شروع به شتاب گرفتن می‌کند. در $t = t_2$ شتاب خود را از دست می‌دهد و مدتی با سرعت ثابت حرکت می‌کند. در زمان $t = t_3$ ترمز می‌کند، و سرعتش به‌تدریج کم می‌شود تا آنکه در زمان $t = t_4$ به‌صفر می‌رسد.

رابطه‌ای از نوع معادلهٔ ۳، برای بخش سرعت ثابت رابطه‌ای از نوع معادلهٔ ۲، و برای بخش ترمز هم رابطه‌ای دیگر، باز هم از نوع معادلهٔ ۳.

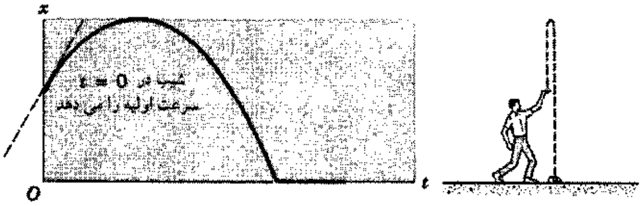
دقت کنید که نمودار این حرکت دو ویژگی دارد: $x(t)$ پیوسته است (نمودار پرشی ندارد) و شیب نیز پیوسته است (نمودار نقاط تیز ندارد). انتظار داریم که $x(t)$ همواره پیوسته باشد؛ در غیر این‌صورت، اتومبیل در نقطه‌ای ناپدید می‌شود و در نقطه‌ای دیگر ظاهر می‌شود. بعداً خواهیم دید که نقاط تیز نمودار، نقاطی‌اند که در آنها سرعت به‌طور آنی تغییر می‌کند. این البته گویای یک وضعیت کاملاً فیزیکی نیست، اما تقریب خوبی برای بعضی وضعیتهای فیزیکی است.

۵. جسمی که به مانع برمی‌خورد و بازمی‌گردد. یک "گوی" هاکی با سرعت ثابت روی یخ می‌لغزد، به دیوار برمی‌خورد، و در جهت مخالف و با همان اندازهٔ سرعت بازمی‌گردد. شکل ۵ این حرکت را نشان می‌دهد؛ در اینجا فرض شده است که برخورد آناً جهت حرکت را معکوس می‌کند. در واقع اگر "نقطهٔ" برخورد را دقیقاً بررسی کنیم، درمی‌یابیم که این نقطه تیز نیست بلکه کمی گرد است. این امر ناشی از کشسانی دیوار و گوی هاکی است.

۶. گلولهٔ خمیر چسبنده. دانشجویی یک گلولهٔ خمیر مدلسازی را به بالا پرتاب می‌کند؛ نقطهٔ رها کردن توپ بالای سر دانشجو است. توپ تا ارتفاع معینی بالا می‌رود، و سپس برمی‌گردد و به زمین می‌چسبد. شکل ۶ این حرکت را نشان می‌دهد. شیب منحنی در $t = 0$ سرعت




**شکل۵.** یک توپ هاکی با سرعت ثابت روی یخ حرکت می‌کند و در زمان $t_1$ در $x = P$ به یک دیوارهٔ صلب برمی‌خورد؛ پس از برخورد از دیواره برمی‌گردد و با سرعتی به‌همان اندازهٔ سرعت اولیه ولی در خلاف جهت آن حرکت می‌کند. حرکت توپ یک‌بعدی است. در مورد اجسام واجهندهٔ واقعی، نقطهٔ تیز در $x(t)$ به‌این تیزی نیست.




**شکل۶.** یک گلوله خمیر را به بالا پرتاب می‌کنیم؛ گلوله تا ارتفاع معینی بالا می‌رود، سپس برمی‌گردد و به زمین می‌افتد، و به محض برخورد به زمین ساکن می‌شود. این منحنی حرکت گلوله را توصیف می‌کند. درحرکت واقعی، نقطهٔ تیز در $x(t)$ کمی گرد است.

اولیهٔ گلوله‌ای است که به طرف بالا پرتاب شده است. سرعت در اوج مسیر (که در آنجا شیب صفر است) به‌صفر می‌رسد و پس از آن خمیر به طرف پایین حرکت می‌کند و اندازهٔ سرعت آن دائماً بیشتر می‌شود. هنگامی که خمیر به زمین می‌خورد، آناً به حالت سکون در می‌آید و سرعت آن صفر می‌شود.

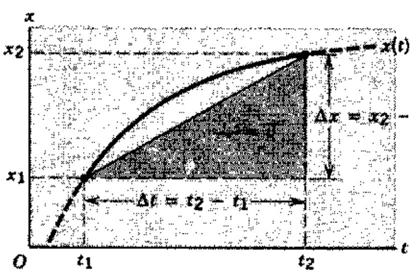
توجه داشته باشید که نمودارهای این بخش اگرچه حرکت را نمایش می‌دهند اما نشان‌دهندهٔ شکل مسیری نیستند که ذرات واقعاً می‌پیمایند. مثلاً در شکل ۶، ذره فقط روی یک خط به بالا و پایین حرکت می‌کند و مسیر آن شبیه به منحنی این شکل نیست.

## ۲ـ۳ سرعت متوسط

اگر حرکت ذره با نمودارهایی از نوع شکل ۱ یا ۲ توصیف شود، سرعت را می‌توانیم به سادگی در هر بازهٔ زمانی‌ای به‌دست بیاوریم: سرعت ثابت، و برابر با شیب خط است. در موارد پیچیده‌تر، مثل شکلهای ۳ تا ۶، که سرعت تغییر می‌کند، بهتر است که سرعت متوسط $(\overline{v})$ را تعریف کنیم. (پاره‌خط روی نماد هر کمیت فیزیکی برای نشان دادن متوسط آن کمیت است.)

در شکل ۷ ذره در زمان $t_1$ در نقطهٔ $x_1$ است، و درزمان $t_2$ به نقطهٔ $x_2$ می‌رسد. سرعت متوسط ذره در این بازهٔ زمانی، طبق تعریف، برابر است با

$$\overline{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (5)$$




**شکل۷.** سرعت متوسط در بازهٔ $\Delta t$ بین $t_1$ و $t_2$ از روی جابه‌جایی $\Delta x$ در این بازه به‌دست می‌آید، شکل واقعی منحنی $x(t)$ در این بازه، درتعیین سرعت متوسط نقشی ندارد.

که در آن

$$\Delta x = x_۲ - x_۱ \qquad (۶)$$

و

$$\Delta t = t_۲ - t_۱ \qquad (۷)$$

$\Delta x$ جابه‌جایی (یعنی تغییر در مکان ذره در بازهٔ زمانی $\Delta t$ است). از شکل ۷ می‌بینیم که $\overline{v}$ صرفاً همان شیب خط راستی است که نقاط انتهایی بازه را به هم وصل می‌کند.

سرعت متوسط معرف رفتار متوسط در بازهٔ زمانی $\Delta t$ است. رفتار واقعی ذره بین $x_۱$ و $x_۲$ برای محاسبهٔ سرعت متوسط اهمیتی ندارد. با متوسط‌گیری در واقع جزئیات حرکت بین $x_۱$ و $x_۲$ حذف می‌شود.

اگر فرض کنیم که ساعتها همیشه به جلو حرکت می‌کنند ($t_۲ > t_۱$)، علامت $\overline{v}$ را علامت $\Delta x = x_۲ - x_۱$ تعیین می‌کند. اگر $\overline{v}$ مثبت باشد، حرکت ذره به‌طور متوسط چنان است که $x$ با افزایش زمان زیاد می‌شود. (ممکن است ذره در ناحیه‌ای از این بازه به عقب هم برگردد. اما به هر حال مختصهٔ $x$ آن در انتهای بازه، بزرگتر از همین مختصه‌اش در ابتدای بازه است.) اگر $\overline{v}$ منفی باشد، ذره به‌طور متوسط رو به عقب حرکت می‌کند. به‌خصوص توجه کنید که طبق تعریف $\overline{v}$، در هر حرکتی که نقطهٔ انتهایی و ابتدایی یکی باشد، سرعت متوسط صفر است؛ فرقی هم نمی‌کند که قطعهٔ خاصی در بازهٔ مورد نظر، چقدر سریع طی شده باشد، زیرا جابه‌جایی صفر است. در مسابقات اتومبیلرانی‌ای که مسیر آنها بسته است، اگر بازهٔ زمانی را از ابتدا تا انتهای مسابقه بگیریم، سرعت متوسط صفر است!

---

مثال ۱. دارید اتومبیل خود را در یک جادهٔ مستقیم می‌رانید. سرعت اتومبیل ۴۳mi/h است و با این سرعت ۵٫۲mi را می‌پیمایید. اینجا بنزین اتومبیلتان تمام می‌شود و شما ناچار می‌شوید ۱٫۲mi دیگر تا نزدیکترین پمپ بنزین پیاده بروید. زمان این پیاده‌روی ۲۷min است. سرعت متوسط شما، از زمانی که اتومبیل به‌راه افتاد تا زمانی که به پمپ بنزین رسیدید، چقدر است؟

حل: برای اینکه سرعت متوسط را از معادلهٔ ۵ به‌دست بیاورید باید $\Delta x$ یعنی کل مسافتی را که پیموده‌اید (جابه‌جایی شما)، و $\Delta t$ یعنی زمان سپری شده را بدانید. این دو کمیت عبارت‌اند از

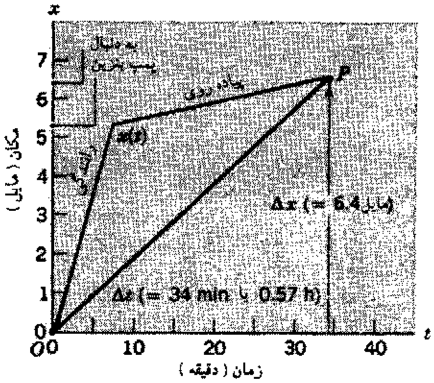
$$\Delta x = ۵٫۲\text{mi} + ۱٫۲\text{mi} = ۶٫۴\text{mi}$$

و

$$\Delta t = \frac{۵٫۲\text{mi}}{۴۳\text{mi/h}} + ۲۷\text{min}$$
$$= ۷٫۳\text{min} + ۲۷\text{min} = ۳۴\text{min} = ۰٫۵۷\text{h}$$

بنابراین، از معادلهٔ ۵، نتیجه می‌شود که

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۶٫۴\text{mi}}{۰٫۵۷\text{h}} = ۱۱٫۲\text{mi/h}$$




شکل۸. مثال ۱. خطهایی که با "رانندگی" و "پیاده‌روی" مشخص شده‌اند، حرکت با سرعتهای ثابت متفاوت با هم را، در دو بخش سفر، نشان می‌دهند. سرعت متوسط، شیب خط $OP$ است.

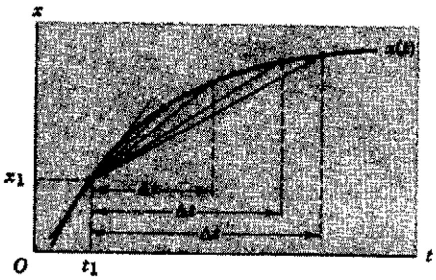
نمودار $x(t)$ در شکل ۸، به‌تصور مسئله کمک می‌کند. نقاط $O$ و $P$ بازه‌ای را مشخص می‌کنند که می‌خواهیم سرعت متوسط را در آن به‌دست بیاوریم. این کمیت، شیب خط راستی است که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند.

---

## ۲ـ۴ سرعت لحظه‌ای

سرعت متوسط برای بررسی رفتار کلی ذره در یک بازه مفید است، اما برای بررسی جزئیات حرکت کافی نیست. مناسب‌تر آن است که یک تابع ریاضی، $v(t)$، داشته باشیم که سرعت ذره را در هر زمان دلخواه به‌دست بدهد. این تابع، سرعت لحظه‌ای است؛ از این به بعد، همه جا منظورمان از "سرعت" همین سرعت لحظه‌ای است.

اگر سرعت متوسط را برای $\Delta t$هایی که دائماً کوچکتر می‌شوند حساب کنیم (شکل ۹)، در حالت حدی $\Delta t \to ۰$، خطی که نقاط انتهایی بازه را به هم وصل می‌کند به مماس بر منحنی $x(t)$ در آن نقطه میل می‌کند و سرعت متوسط نیز به سرعت لحظه‌ای در آن نقطه




شکل۹. بازهٔ $\Delta t$ را دائما کوچک می‌کنیم. در این مورد، $t_۱$ را ثابت نگه داشته‌ایم و سر دیگر بازه، $t_۲$، را به $t_۱$ نزدیک می‌کنیم. در حد، بازه به صفر ... می‌شود.

جدول ۱. فرایند حدگیری

| نقطهٔ ابتدایی | | نقطهٔ پایانی | | بازه‌ها | | سرعت متوسط |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$(m) | $t_1$(s) | $x_2$(m) | $t_2$(s) | $\Delta x$(m) | $\Delta t$(s) | (m/s) |
| ۶٫۰۰۰ | ۱٫۰۰۰ | ۱۳٫۰۰۰ | ۲٫۰۰۰ | ۷٫۰۰۰ | ۱٫۰۰۰ | ۷٫۰۰ |
| ۶٫۰۰۰ | ۱٫۰۰۰ | ۹٫۰۰۰ | ۱٫۵۰۰ | ۳٫۰۰۰ | ۰٫۵۰۰ | ۶٫۰۰ |
| ۶٫۰۰۰ | ۱٫۰۰۰ | ۸٫۳۲۰ | ۱٫۴۰۰ | ۲٫۳۲۰ | ۰٫۴۰۰ | ۵٫۸۰ |
| ۶٫۰۰۰ | ۱٫۰۰۰ | ۷٫۳۷۵ | ۱٫۲۵۰ | ۱٫۳۷۵ | ۰٫۲۵۰ | ۵٫۵۰ |
| ۶٫۰۰۰ | ۱٫۰۰۰ | ۷٫۰۸۰ | ۱٫۲۰۰ | ۱٫۰۸۰ | ۰٫۲۰۰ | ۵٫۴۰ |
| ۶٫۰۰۰ | ۱٫۰۰۰ | ۶٫۵۲۰ | ۱٫۱۰۰ | ۰٫۵۲۰ | ۰٫۱۰۰ | ۵٫۲۰ |
| ۶٫۰۰۰ | ۱٫۰۰۰ | ۶٫۲۵۵ | ۱٫۰۵۰ | ۰٫۲۵۵ | ۰٫۰۵۰ | ۵٫۱ |
| ۶٫۰۰۰ | ۱٫۰۰۰ | ۶٫۱۵۲ | ۱٫۰۳۰ | ۰٫۱۵۲ | ۰٫۰۳۰ | ۵٫۱ |
| ۶٫۰۰۰ | ۱٫۰۰۰ | ۶٫۰۵۰ | ۱٫۰۱۰ | ۰٫۰۵۰ | ۰٫۰۱۰ | ۵٫۰ |

تبدیل می‌شود.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (۸)$$

طرف راست معادلهٔ ۸ در واقع مشتق $x(t)$ نسبت به $t$، یا همان $dx/dt$ است. پس

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad (۹)$$

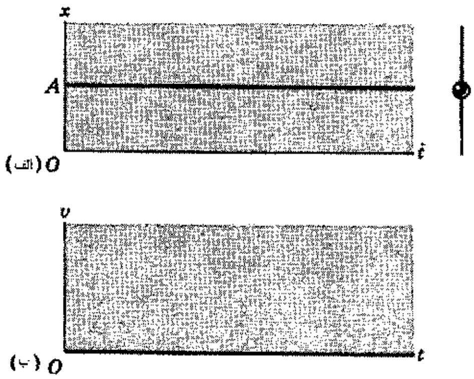
سرعت (لحظه‌ای) صرفاً آهنگ تغییر مکان نسبت به زمان است.

جدول ۱ مثالی است از این فرایند حدگیری، و نشان می‌دهد که چگونه مقدار متوسط به مقدار لحظه‌ای میل می‌کند. داده‌های جدول ۱ را با استفاده از تابع $x(t) = ۳٫۰۰۰ + ۱٫۰۰۰t + ۲٫۰۰۰t^۲$ محاسبه کرده‌ایم ($t$ برحسب s و $x$ برحسب متر است). نقطهٔ $(t_۱, x_۱)$ را ثابت گرفته‌ایم و نقطهٔ $(t_۲, x_۲)$ را به‌تدریج به $(t_۱, x_۱)$ نزدیکتر کرده‌ایم تا فرایند حدگیری را شبیه‌سازی کنیم. به‌نظر می‌رسد که حد سرعت متوسط در $t_۱ = ۱٫۰\,\mathrm{s}$ به $v = ۵٫۰\,\mathrm{m/s}$ میل کند؛ با مشتق‌گیری از تابع $x(t)$ عبارتی برای سرعت لحظه‌ای به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(۳٫۰۰۰ + ۱٫۰۰۰t + ۲٫۰۰۰t^۲) \\ &= ۰ + ۱٫۰۰۰ + ۲(۲٫۰۰۰t) = ۱٫۰۰۰ + ۴٫۰۰۰t \end{aligned}$$

این تابع هم به‌ازای $t = ۱٫۰۰۰\,\mathrm{s}$، همان مقدار $۵٫۰۰۰\,\mathrm{m/s}$ را می‌دهد. پس معلوم است که با کوچک شدن بازه، مقدار متوسط واقعاً به مقدار لحظه‌ای میل می‌کند.

بنابراین، اگر $x(t)$ را بدانیم، می‌توانیم $v(t)$ را با مشتق‌گیری به‌دست بیاوریم. در روش نموداری هم می‌توان شیب (نقاط مختلف) را به‌دست آورد و به کمک آن $v(t)$ را رسم کرد. حالا می‌خواهیم مثالهای بخش ۲ـ۲ را مرور کنیم. سه مثال اول، در مورد همان مهره‌ای است که روی یک سیم راست طویل می‌لغزد.




شکل ۱۰. (الف) مکان و (ب) سرعت مهره‌ای که در نقطه‌ای از سیم، $x = A$، در حالت سکون است.

۱. سکون. از معادلهٔ ۱ داریم $x(t) = A$، پس

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = ۰ \qquad (۱۰)$$

چون مشتق هر کمیت ثابتی صفر است. شکل ۱۰، $x(t)$ و $v(t)$ را نشان می‌دهد.

۲. حرکت با سرعت ثابت. از معادلهٔ ۲ داریم $x(t) = A + Bt$، پس

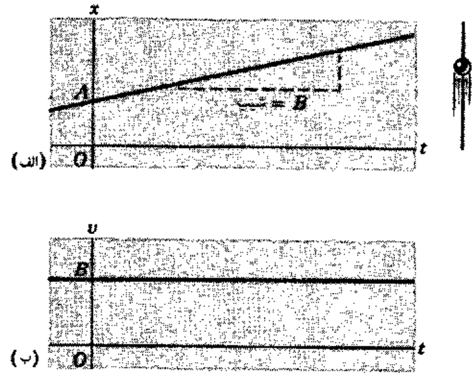
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A + Bt) = ۰ + B \qquad (۱۱)$$

سرعت لحظه‌ای (ثابت) $B$ است؛ (شکل ۱۱).

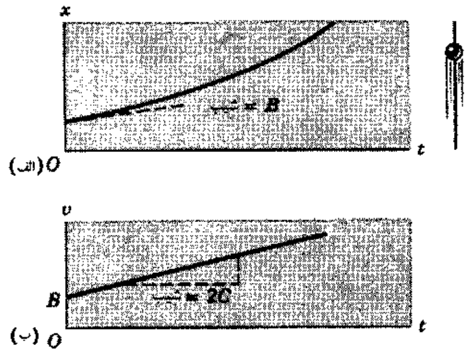
۳. حرکت شتابدار. با استفاده از معادلهٔ ۳، $x(t) = A + Bt + Ct^۲$، نتیجه می‌شود که

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A + Bt + Ct^۲) = ۰ + B + ۲Ct \qquad (۱۲)$$

سرعت با گذشت زمان تغییر می‌کند؛ اگر $C > ۰$ باشد، سرعت زیاد می‌شود. شکل ۱۲ منحنیهای $x(t)$ و $v(t)$ را نشان می‌دهد.




شکل۱۱. (الف) مکان و (ب) سرعت مهره‌ای که در یک بعد با سرعت ثابت روی سیمی می‌لغزد. سرعت برابر با شیب نمودار $x(t)$ یعنی $B$ است. نمودار $v(t)$ همان خط افقی $v = B$ است.

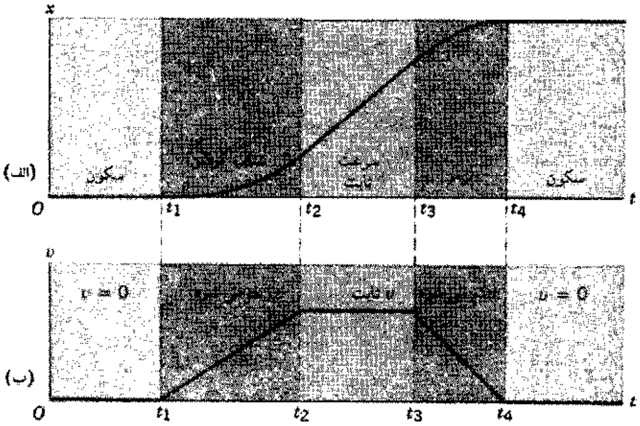



شکل۱۲. (الف) مکان و (ب) سرعت مهرهٔ شتابدار، که در یک بعد روی سیم می‌لغزد. از شیب فزایندهٔ $x(t)$، و همچنین از افزایش خطی $v(t)$ معلوم است که سرعت با گذشت زمان زیاد می‌شود.

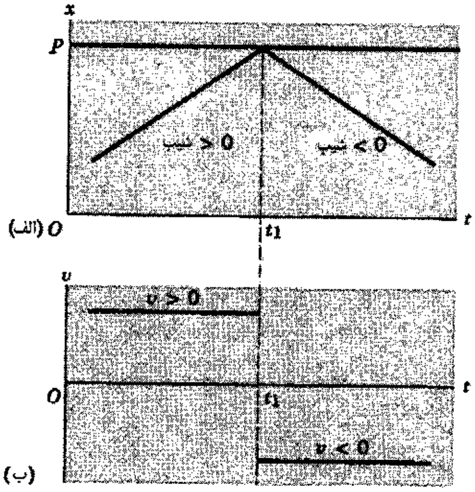
۴. اتومبیلی که شتاب می‌گیرد و ترمز می‌کند. منحنی $v(t)$ را می‌شود از روش شکل ۴، وبدون نوشتن $x(t)$، به‌دست آورد. در بازهٔ اول، اتومبیل در حال سکون و $v = 0$ است. در بازهٔ بعدی، اتومبیل شتاب می‌گیرد و $v(t)$ به شکل معادلهٔ ۱۲ است. در بازه‌ای که سرعت اتومبیل تغییر نمی‌کند، $v$ مقدار ثابتی است (برابر با سرعت در پایان بازه‌ای که اتومبیل شتاب دارد) و بنابراین، در این بازه $C$ صفر است. سرانجام، در مرحلهٔ ترمزگرفتن، $v(t)$ باز هم به شکل معادلهٔ ۱۲ است، اما در این مورد با $C < 0$ (شیب منفی). شکل ۱۳ نمودار این حرکت را نشان می‌دهد.

در عمل، نمی‌شود آناً از حالت سکون به حالت حرکت شتابدار، یا از حالت حرکت شتابدار به حالت حرکت یکنواخت (با سرعت ثابت) رسید. یعنی در شکل ۱۳، نقاط تیز منحنی $v(t)$ را باید برای اتومبیلهای واقعی کمی گرد کرد، و معادلهٔ حرکت هم پیچیده‌تر از معادلهٔ ۱۲ می‌شود. اینجا هم برای سادگی فرض کرده‌ایم که رفتار اتومبیل، همان رفتار ایده‌آلی است که در شکل ۱۳ می‌بینیم.

۵. گوی هاکی که به مانع برمی‌خورد و برمی‌گردد. گوی پیش از برخورد سرعت ثابتی دارد و پس از برخورد هم



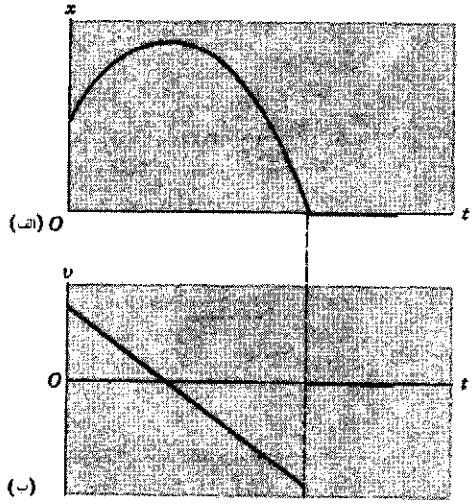

شکل۱۳. (الف) مکان و (ب) سرعت اتومبیلی که از حالت سکون شروع می‌کند، برای مدتی سرعتش زیاد می‌شود، مدتی با سرعت ثابت حرکت می‌کند، و آن وقت سرعتش کم می‌شود تا دوباره به حالت سکون برسد. نمودار پایین $v(t)$ را نشان می‌دهدکه دقیقاً متناظر با نمودار $x(t)$ در بالا (و نمودار شکل ۴) است. برای اتومبیلهای واقعی، تغییر سرعت باید هموار باشد نه ناگهانی، بنابراین نقاط تیز نمودار $v(t)$ گرد می‌شود.




شکل۱۴. (الف) مکان و (ب) سرعت یک "گوی" هاکی که به سطحی سخت برمی‌خورد و از آن وامی‌جهد. در این نمودار ایده‌آل، در $t = t_1$ علامت سرعت ناگهانی عوض می‌شود، اما برای گوی واقعی، تغییر سرعت در بازه‌ای کوچک (ولی غیر صفر) انجام می‌شود و نقطهٔ تیز نمودار $x(t)$ هم گرد می‌شود.

ولی درجهت مخالف (سرعت منفی) بازمی‌گردد. شکل ۱۴، $v(t)$ را نشان می‌دهد. دقت کنید که "نقطهٔ تیز" نمودار $x(t)$، موجب ناپیوستگی در نمودار $v(t)$ می‌شود. هیچ‌یک از این دو در واقعیت اتفاق نمی‌افتد.

۶. گلولهٔ خمیری چسبنده. در این مورد، شکل ۱۵، $v$ اولیهٔ توپ مثبت است (جهت رو به‌بالا را مثبت اختیار کرده‌ایم)، اما به‌تدریج کم می‌شود. حرکت با معادله‌ای شبیه به معادلهٔ ۱۲، اما با $C < 0$، ... در نقطهٔ اوج، $v = 0$ است، پس در این نقطه،




**شکل۱۵.** (الف) مکان و (ب) سرعت یک گلوله خمیر که به روش شکل ۶، به بالا پرتاب می‌شود. در دنیای واقعی، سرعت نمی‌تواند به‌طور ناگهانی از یک مقدار غیر صفر به صفر برسد، "پرش" قائم در نمودار $v(t)$ (در زمانی که گلوله به زمین می‌خورد) هم باید تدریجی‌تر باشد.

خط $v(t)$ محور را قطع می‌کند. هنگامی که خمیر به زمین می‌چسبد، $v$ آناً صفر می‌شود. (باز هم "نقطه‌ای تیز" در نمودار $x(t)$ که در $v(t)$ ناپیوستگی ایجاد می‌کند؛ در واقع امر، این نقطه گرد می‌شود و ناپیوستگی‌ای هم در کار نیست.)

## ۲ـ۵ حرکت شتابدار

دیدیم (شکلهای ۱۲، ۱۳، و ۱۵) که در طی حرکت، سرعت ذره می‌تواند با زمان تغییر کند، تغییر سرعت در زمان را شتاب می‌نامند. مشابه با معادلهٔ ۵ می‌توان شتاب متوسط را از روی تغییر سرعت، $\Delta v = v_2 - v_1$، در بازهٔ زمانی $\Delta t$ حساب کرد:

$$\overline{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (۱۳)$$

یکای شتاب، سرعت بر زمان است، مثلاً متر بر ثانیه بر ثانیه، $m/s^2$.

از شتاب متوسط $\overline{a}$ هم، درست مثل سرعت متوسط $\overline{v}$، نمی‌توان تغییر $v(t)$ را در زمانهای مختلف بازهٔ $\Delta t$ به‌دست آورد؛ $\overline{a}$ تنها به تفاضل سرعت در انتها و ابتدای بازه بستگی دارد. اگر $\overline{a}$ برای همهٔ چنین بازه‌هایی ثابت (منجمله صفر) باشد می‌توانیم نتیجه بگیریم که شتاب ثابت است. در این صورت، تغییر سرعت در همهٔ بازه‌هایی که مدتِ برابر دارند یکی است.مثلاً، چنانکه بعداً در همین فصل خواهیم دید، شتاب ناشی از ثقل زمین، در نزدیکی سطح آن تقریباً ثابت و برابر با $9.8 m/s^2$ است. سرعت اجسام افتان، هر ثانیه $9.8 m/s$ تغییر می‌کند؛ در ثانیه اول $9.8 m/s$ زیاد می‌شود، در ثانیه بعد $9.8 m/s$ دیگر، و به همین ترتیب.

اگر تغییر سرعت در بازه‌های یکسان متوالی یکی نباشد، شتاب متغیر است. در این مورد بهتر است که شتاب لحظه‌ای تعریف کنیم:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

یا

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad (۱۴)$$

این تعریف، مشابه معادلهٔ ۹ برای سرعت لحظه‌ای است.

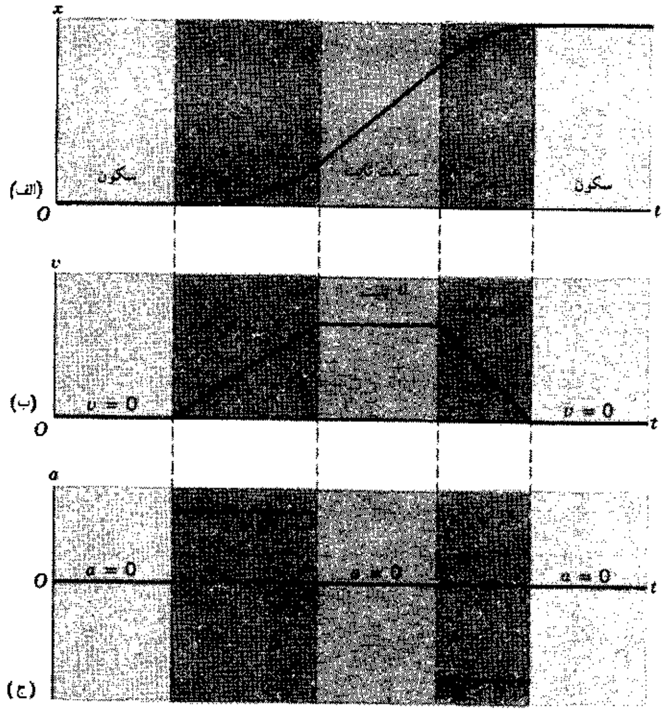
دقت کنید که مثبت و منفی بودن شتاب به مثبت و منفی بودن $v$ ربطی ندارد. مثلاً ممکن است که $a$ مثبت و $v$ منفی باشد: شتاب $a$، تغییر سرعت را می‌دهد؛ این تغییر، چه سرعت مثبت باشد چه منفی، می‌تواند افزایش یا کاهش باشد. مثلاً آسانسوری را در نظر بگیرید که به طرف بالا (که آن‌را جهت مثبت سرعت می‌گیریم). حرکت می‌کند. این آسانسور می‌تواند به طرف بالا شتاب بگیرد ($a > 0$) و سریعتر حرکت کند، یا به طرف پایین شتاب بگیرد ($a < 0$) و حرکتش کند شود (اما همچنان به طرف بالا باشد). آسانسوری که به طرف پایین حرکت می‌کند هم می‌تواند به طرف پایین شتاب بگیرد ($a < 0$) و سریعتر حرکت کند، یا به طرف بالا شتاب بگیرد ($a > 0$) و حرکتش کند شود. وقتی شتاب و سرعت در جهتهای مخالف باشند، یعنی مقدار سرعت در حال کاهش باشد، می‌گوییم که ذره شتابِ‌کاهنده دارد.

شتاب (معادلهٔ ۱۴) همان شیب نمودار $v(t)$ است. اگر $v(t)$ ثابت باشد، $a = 0$ است؛ اگر $v(t)$ خط ٔراست باشد، $a$ ثابت و برابر با شیب خط است. اگر $v(t)$ منحنی باشد، $a$ هم تابعی از $t$ خواهد بود که با مشتق‌گیری از $v(t)$ به‌دست می‌آید.

اکنون می‌توانیم شتاب را هم در نمودارهای شکل ۱۰ تا شکل ۱۵ وارد کنیم. برای مثال، نمودارهای مربوط به اتومبیلی را که شتاب می‌گیرد و ترمز می‌کند در شکل ۱۶ آورده‌ایم. بقیهٔ موارد را، به عنوان تمرین، به خواننده وامی‌گذاریم.

---

**مثال ۲.** شکل ۱۷الف، شش "عکس لحظه‌ای" از ذره‌ای را نشان می‌دهد که در راستای محور $x$ حرکت می‌کند. در $t = 0$، ذره در نقطهٔ $x = +1.00 m$ در طرف راست مبدأ است؛ در $t = 2.5 s$، ذره در $x = +5.00 m$ در حال سکون است؛ در $t = 4.0 s$، به $x = 1.4 m$ برگشته است. شکل ۱۷ب نمودار مکان $x$ برحسب زمان $t$ است. شکلهای ۱۷ج و ۱۷د هم به ترتیب سرعت و شتاب ذره را نشان می‌دهند. (الف) سرعت متوسط را در بازه‌های $AD$ و $DF$ پیدا کنید. (ب) شیب $x(t)$ را در نقاط $B$ و $F$ تخمین بزنید و با نقاط متناظر روی منحنی $v(t)$ مقایسه کنید. (ج) شتاب متوسط را در بازه‌های $AD$ و $DF$ پیدا کنید. (د) شیب $v(t)$ را در نقطهٔ $D$ تخمین بزنید و با مقدار $a(t)$ متناظر آن مقایسه کنید.




شکل۱۶. (الف) مکان و (ب) سرعت، و (ج) شتاب اتومبیلی که از حالت سکون به راه می‌افتد، برای مدتی شتاب می‌گیرد، مدتی با سرعت ثابت حرکت می‌کند، و سپس ترمز می‌کند و شتاب منفی می‌گیرد تا دوباره به حالت سکون برسد. در واقع نمی‌توان شتاب اتومبیل را به‌طور ناگهانی از مقداری به مقداری دیگر تغییرداد؛ هم $a(t)$ و $v(t)$ برای اتومبیلهای واقعی همواره پیوسته‌اند؛ منحنیهای هموارِ بخشهای تختِ $a(t)$ را به هم وصل می‌کنند و نقاط تیز $v(t)$ گرد می‌شوند.

حل: (الف) از معادلهٔ ۵

$$\bar{v}_{AD} = \frac{\Delta x_{AD}}{\Delta t_{AD}} = \frac{x_D - x_A}{t_D - t_A} = \frac{\text{۵٫۰m} - \text{۱٫۰m}}{\text{۲٫۵s} - \text{۰٫۰s}}$$

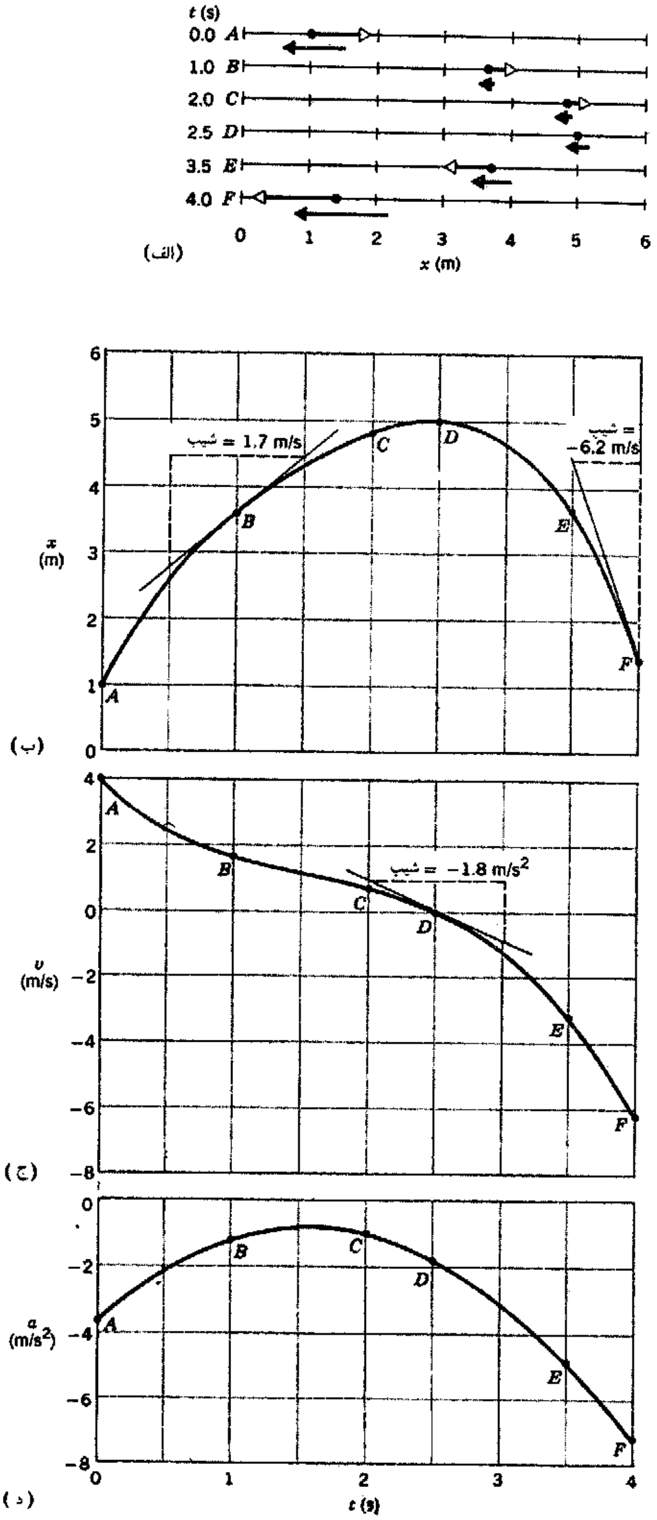
$$= \frac{\text{۴٫۰m}}{\text{۲٫۵s}} = +\text{۱٫۶m/s}$$

$$\bar{v}_{DF} = \frac{\Delta x_{DF}}{\Delta t_{DF}} = \frac{x_F - x_D}{t_F - t_D} = \frac{\text{۱٫۴m} - \text{۵٫۰m}}{\text{۴٫۰s} - \text{۲٫۵s}}$$

$$= \frac{-\text{۳٫۶m}}{\text{۱٫۵s}} = -\text{۲٫۴m/s}$$

علامت مثبت $\bar{v}_{AD}$ نشان می‌دهد که ذره در بازهٔ $AD$، به‌طور متوسط، در جهت افزایش $x$ حرکت می‌کند (یعنی به طرف راست در شکل ۱۷الف). علامت منفی $\bar{v}_{DF}$ نشان می‌دهد که ذره در بازهٔ $DF$، به‌طور متوسط، در جهت کاهش $x$ حرکت می‌کند (یعنی به طرف چپ در شکل ۱۷الف).

(ب) از مماسهای منحنی $x(t)$ در نقاط $B$ و $E$ در شکل ۱۷ب




شکل۱۷. (الف) شش "عکس لحظه‌ای" متوالی از ذره‌ای که در راستای محور $x$ حرکت می‌کند. پیکان روی ذره سرعت لحظه‌ای، و پیکان زیر ذره شتاب لحظه‌ای آن‌را نشان می‌دهد. (ب) نمودار $x(t)$ برای حرکت ذره. شش نقطهٔ $A$ تا $F$ متناظر با شش تصویر لحظه‌ای‌اند. (ج) نمودار $v(t)$. (د) نمودار $a(t)$.

می‌شود این کمیتها را براورد کرد:

$$\text{نقطهٔ } B: \quad \text{شیب} = \frac{۴٫۵\mathrm{m} - ۲٫۸\mathrm{m}}{۱٫۵\mathrm{s} - ۰٫۵\mathrm{s}} = \frac{۱٫۷\mathrm{m}}{۱٫۰\mathrm{s}} = +۱٫۷\mathrm{m/s}$$

$$\text{نقطهٔ } F: \quad \text{شیب} = \frac{۱٫۴\mathrm{m} - ۴٫۵\mathrm{m}}{۴٫۰\mathrm{s} - ۳٫۵\mathrm{s}} = \frac{-۳٫۱\mathrm{m}}{۰٫۵\mathrm{s}} = -۶٫۲\mathrm{m/s}$$

از منحنی $v(t)$ در نقاط $B$ و $F$ در شکل ۱۷ج هم $v_B = +۱٫۷\mathrm{m/s}$ و $v_F = -۶٫۲\mathrm{m/s}$ براورد می‌شود، که با شیب $x(t)$ سازگار است. همان‌طور که انتظار می‌رود، $v(t) = dx/dt$ است.

(ج) از معادلهٔ ۱۳،

$$\bar{a}_{AD} = \frac{\Delta v_{AD}}{\Delta t_{AD}} = \frac{v_D - v_A}{t_D - t_A} = \frac{۰٫۰\mathrm{m/s} - ۴٫۰\mathrm{m/s}}{۲٫۵\mathrm{s} - ۰٫۰\mathrm{s}}$$
$$= \frac{-۴٫۰\mathrm{m/s}}{۲٫۵\mathrm{s}} = +۱٫۶\mathrm{m/s^۲}$$

$$\bar{a}_{AF} = \frac{\Delta v_{AF}}{\Delta t_{AF}} = \frac{v_F - v_A}{t_F - t_A} = \frac{-۶٫۲\mathrm{m/s} - ۴٫۰\mathrm{m/s}}{۴٫۰\mathrm{s} - ۰٫۰\mathrm{s}}$$
$$= \frac{-۱۰٫۲\mathrm{m/s}}{۴٫۰\mathrm{s}} = -۲٫۶\mathrm{m/s^۲}$$

(د) از خط مماس بر $v(t)$ در نقطهٔ $D$ این کمیت را تخمین می‌زنیم.

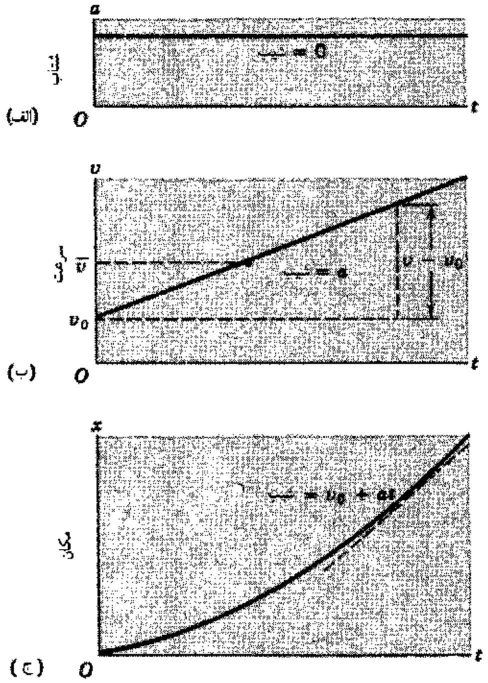
$$\text{شیب} = \frac{-۰٫۹\mathrm{m/s} - ۰٫۹\mathrm{m/s}}{۳٫۰\mathrm{s} - ۲٫۰\mathrm{s}} = \frac{-۱٫۸\mathrm{m/s}}{۱٫۰\mathrm{s}}$$
$$= -۱٫۸\mathrm{m/s^۲}$$

در نقطهٔ $D$ نمودار $a(t)$، دیده می‌شود که $a_D = -۱٫۸\mathrm{m/s^۲}$. بنابراین، $a = dv/dt$. از نمودار $v(t)$ شکل ۱۷ج، معلوم می‌شود که شیب $v(t)$ همواره منفی است. پس $a(t)$ هم باید منفی باشد. شکل ۱۷د، هم همین را نشان می‌دهد.

---

## ۲ـ۶ حرکت با شتاب ثابت

موارد حرکت با شتاب ثابت (یا تقریباً ثابت) کم نیست: دو نمونه‌ای که تا به حال دیده‌ایم، یکی سقوط اجسام در نزدیکی سطح زمین و دیگری حرکت اتومبیلی است که ترمز کرده است. در این بخش، چند نتیجهٔ مفید برای این حالت خاص به‌دست می‌آوریم. اما به‌خاطر داشته باشید که این حالت، خاص است. نتایج این بخش را نمی‌شود در مواردی که $a$ ثابت نیست به‌کار برد. از نمونه‌های حرکت با شتاب متغیر، می‌توان از حرکت وزنهٔ آونگ، حرکت موشکی که به طرف مدارش به دور زمین پرتاب می‌شود، و حرکت قطرهٔ بارانی که در هوا (در معرض مقاومت هوا) سقوط می‌کند نام برد.




شکل ۱۸. (الف) شتاب ثابت ذره، برابر با شیب (ثابت) $v(t)$. (ب) سرعت ذره $v(t)$، که در هر نقطه برابر با شیب منحنی $x(t)$ است. سرعت متوسط $\bar{v}$ هم، که در حالت شتاب ثابت برابر با میانگین $v$ و $v_\circ$ است، در شکل مشخص شده است. (ج) مکان $x(t)$ ذره‌ای که با شتاب ثابت حرکت می‌کند. مکان اولیهٔ ذره $x_\circ = ۰$ فرض شده است.

فرض کنید که شتاب ثابت حرکت، $a$ باشد (شکل ۱۸الف). (وقتی $a$ ثابت است، شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای با هم برابرند، و فرمولهایی را که برای این دو به‌دست آوردیم می‌شود در هر دو مورد به‌کار برد.) جسمی درزمان $t = ۰$، با سرعت $v_\circ$ حرکت می‌کند و درزمان بعدی $t$ سرعت آن به $v$ می‌رسد. معادلهٔ ۱۳، برای این بازه، به شکل زیر در می‌آید:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_\circ}{t - ۰}$$

یا

$$v = v_\circ + at \qquad (۱۵)$$

به کمک این نتیجهٔ مهم، می‌توان سرعت را در همهٔ زمانهای بعدی به‌دست آورد. معادلهٔ ۱۵، سرعت را به‌صورت تابعی از زمان به‌دست می‌دهد. این تابع را می‌شود با $v(t)$ نشان داد، اما ما معمولاً آن‌را با همان $v$ نشان می‌دهیم. دقت کنید که معادلهٔ ۱۵ به شکل $y = mx + b$ است، که یک خط راست را توصیف می‌کند. $a$، چنانکه قبلاً هم توضیح داده‌ایم، شیب است و $v_\circ$ محل تقاطع خط با محور سرعت (مقدار $v$ در $t = ۰$) است. شکل ۱۸ب این خط راست را نشان می‌دهد.

برای کامل کردن تحلیل سینماتیک شتاب ثابت، باید بستگی مکان به زمان را به دست بیاوریم. برای این منظور، به رابطه‌ای برای سرعت

جدول ۲. معادلات حرکت با شتاب ثابت[1].

| شمارهٔ معادله | معادله | شامل $x$ | $v_0$ | $v$ | $a$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱۵ | $v = v_0 + at$ | × | √ | √ | √ | √ |
| ۱۹ | $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ | √ | √ | × | √ | √ |
| ۲۰ | $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ | √ | √ | √ | √ | × |
| ۲۱ | $x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$ | √ | √ | √ | × | √ |
| ۲۲ | $x = x_0 + vt - \frac{1}{2}at^2$ | √ | × | √ | √ | √ |

۱. پیش از استفاده از معادلات این جدول باید مطمئن شوید که شتاب واقعاً ثابت است.

متوسط در بازهٔ زمانی ۰ تا $t$ نیاز داریم. اگر نمودار $v$ برحسب زمان خط راست باشد (شکل ۱۸ب)، مقدار متوسط $v$ بهازای زمانِ وسط این بازه بهدست می‌آید و برابر با میانگین سرعت در زمان ۰ و زمان $t$ است:

$$\bar{v} = \frac{1}{2}(v + v_0) \qquad (16)$$

با استفاده از معادلهٔ ۱۵ می‌شود $v$ را حذف کرد:

$$\bar{v} = v_0 + \frac{1}{2}at \qquad (17)$$

با استفاده از معادلهٔ ۵ (تعریف سرعت متوسط)، و با فرض اینکه ذره در زمان ۰ در نقطهٔ $x_0$ و درزمان $t$ در نقطهٔ $x$ است، سرعت متوسط را می‌توان چنین نوشت

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - 0} \qquad (18)$$

از ترکیب معادلات ۱۷ و ۱۸، این نتیجه برای $x(t)$ به‌دست می‌آید:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (19)$$

پس اگر $a$، و شرایط اولیه $x_0$ و $v_0$ (مکان و سرعت در $t = 0$) معلوم باشد، با استفاده از معادلهٔ ۱۹ می‌توانیم مکان $x$ را در هر زمان بعدی بهدست بیاوریم. هدف تحلیل سینماتیکی ما هم همین است. مسافت خالص پیموده شده از نقطهٔ شروع، $x - x_0$، را جابه‌جایی می‌نامند. اغلب، برای سادگی، مبدأ مختصات را چنان انتخاب می‌کنیم که $x_0 = 0$ باشد. شکل ۱۸ج نمودار $x$ برحسب $t$ را برای شتاب ثابت نشان می‌دهد.

دقت کنید که چهار متغیر $(x, v, a, t)$ و دو شرط اولیه $(x_0, v_0)$ داریم. معادلات ۱۵ و ۱۹ به‌همین شکل برای تحلیل سینماتیک مسئله، به عنوان مسئلهٔ مقدار اولیه، بهکار می‌روند: با داشتن شرایط فیزیکی (یعنی شتاب $a$) و شرایط اولیه ($x_0$ و $v_0$)، می‌توان $v$ و $x$ را در هر زمانی به‌دست آورد. اما در خیلی از موارد، مسئله به صورت متفاوتی مطرح می‌شود: مثلاً با معلوم بودن $a$ ذره چه مسافتی (و نه چه مدتی) باید حرکت کند تا سرعت آن از $v_0$ به $v$ برسد؟ در این موارد زمان ظاهر نمی‌شود. بنابراین می‌توانیم متغیر ناخواستهٔ $t$ را از بین معادلات ۱۵ و ۱۹ حذف کنیم:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \qquad (20)$$

از حذف کردن متغیرها یا پارامترهای دیگر، معادلات ۲۱ و ۲۲ حاصل می‌شوند. با این معادلات، که در جدول ۲ آمده‌اند، مجموعهٔ معادلات سینماتیکی حرکت با شتاب ثابت کامل می‌شود.

با مشتق‌گیری از معادلهٔ ۱۹، می‌توان دید که این معادله یک نتیجهٔ درست سینماتیکی است (مشتق این معادله، باید سرعت باشد):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2) = v_0 + at = v$$

و این همان عبارتی است که قبلاً برای سرعت به‌دست آوردیم.

در استفاده از معادلات جدول ۲ برای حل مسائل، مبدأ دستگاه مختصات را می‌توانید هر نقطه‌ای که راحت‌تر است بگیرید. چهار تا از معادلات جدول ۲ به $x$ بستگی دارند و در هر چهارمعادله $x_0$ هم ظاهر شده است. در واقع، هر چهار معادله به تفاضل $x - x_0$ بستگی دارند. معمولاً مبدأ را چنان می‌گیریم که $x_0 = 0$ شود. به این ترتیب، معادلات تا حدی ساده‌تر می‌شوند. هر یک از جهت‌های محور مختصات را می‌شود جهت مثبت گرفت. با انتخاب جهت مثبت، هر جابه‌جایی، سرعت، و شتابی اگر در آن جهت باشد مثبت، و اگر در خلاف آن جهت باشد منفی است. در همهٔ مراحل حل یک مسئلهٔ خاص، باید مبدأ و جهت محورهای مختصات ثابت بماند.

**مثال ۳.** رانندهای ترمز می‌کند و سرعت اتومبیلش را، در طی مسافت ۱۰۵m، از ۸۵km/h به ۴۵km/h می‌رساند. (الف) شتاب اتومبیل، که ثابت فرض می‌شود، چقدر است؟ (ب) این حرکت شتابدار چقدر طول کشیده است؟ (ج) اگر راننده بخواهد اتومبیل را با همین شتاب متوقف کند، چه مدت زمان بیشتری برای این کار لازم است و در این مدت، اتومبیل چه مسافت اضافی‌ای را می‌پیماید؟

حل: (الف) جهت مثبت را همان جهت سرعت می‌گیریم. مبدأ را نیز چنان می‌گیریم که نقطهٔ آغاز ترمز کردن، $x_\circ = \circ$ باشد. سرعت اولیهٔ، $v_\circ = +۸۵\mathrm{km/h}$ در $t = \circ$، و سرعت نهایی، $v = +۴۵\mathrm{km/h}$ در زمان (مجهول) $t$، یعنی وقتی که اتومبیل $+\circ٫۱\circ۵\mathrm{km}$ جابه‌جا شده، معلوم است. به معادله‌ای نیاز داریم که شامل شتاب (مجهول) باشد، اما شامل زمان نباشد. معادلهٔ ۲۰ چنین معادله‌ای است، که $a$ را از آن به‌دست می‌آوریم:

$$a = \frac{v^۲ - v_\circ^۲}{۲(x - x_\circ)} = \frac{(۴۵\mathrm{km/h})^۲ - (۸۵\mathrm{km/h})^۲}{۲(\circ٫۱\circ۵\mathrm{km})}$$
$$= -۲٫۴۸ \times ۱\circ^۴\mathrm{km/h}^۲ = -۱٫۹۱\mathrm{m/s}^۲$$

این شتاب کاهنده است و علامتش منفی است، یعنی در خلاف جهتی است که آن‌را مثبت اختیار کرده‌ایم.

(ب) معادله‌ای می‌خواهیم که شتاب در آن نباشد تا بتوانیم زمان را از داده‌های اولیه به‌دست بیاوریم. از جدول ۲ مشاهده می‌کنیم که معادلهٔ ۲۱ این ویژگی را دارد. از این معادله $t$ را به‌دست می‌آوریم:

$$t = \frac{۲(x - x_\circ)}{v_\circ + v} = \frac{۲(\circ٫۱\circ۵\mathrm{km})}{۸۵\mathrm{km/h} + ۴۵\mathrm{km/h}}$$
$$= ۱٫۶۲ \times ۱\circ^{-۳}\mathrm{h} = ۵٫۸\mathrm{s}$$

در حل این قسمت، می‌توانستیم معادله‌ای به‌کار ببریم که شامل شتاب هم باشد اما در آن صورت خطایی که ممکن است در حل قسمت (الف) به‌وجود آمده باشد، در قسمت (ب) هم وارد می‌شد. توجه کنید که درحل قسمتهای مستقل یک مسئله، در صورت امکان، همیشه بهتر است که به داده‌های اولیه برگردیم و مسئله را مستقیماً با آنها حل کنیم.

(ج) حالا که شتاب معلوم است، زمانی را حساب می‌کنیم که در آن سرعت اتومبیل از $v_\circ = ۸۵\mathrm{km/h}$ به $v = \circ$ می‌رسد. برای این کار معادلهٔ ۱۵ مناسب است، که از آن $t$ را به‌دست می‌آوریم:

$$t = \frac{v - v_\circ}{a} = \frac{\circ - ۸۵\mathrm{km/h}}{-۲٫۴۸ \times ۱\circ^۴\mathrm{km/h}^۲}$$
$$= ۳٫۴۳ \times ۱\circ^{-۳}\mathrm{h} = ۱۲٫۳\mathrm{s}$$

اتومبیل $۱۲٫۳\mathrm{s}$ پس از ترمز، یا $۶٫۵\mathrm{s}$(یعنی $۱۲٫۳\mathrm{s} - ۵٫۸\mathrm{s}$) پس از رسیدن به سرعت $۴۵\mathrm{km/h}$، متوقف می‌شود.

برای پیدا کردن مسافت، معادلهٔ ۲۰ را به‌کار می‌بریم:

$$x - x_\circ = \frac{v^۲ - v_\circ^۲}{۲a} = \frac{\circ - (۸۵\mathrm{km/h})^۲}{۲(-۲٫۴۸ \times ۱\circ^۴\mathrm{km/h}^۲)}$$
$$= \circ٫۱۴۶\mathrm{km} = ۱۴۶\mathrm{m}$$

مسافت اضافی‌ای که اتومبیل می‌پیماید تا سرعتش از $v = ۴۵\mathrm{km/h}$ به $v = \circ$ برسد برابر با $۱۴۶\mathrm{m} - ۱\circ۵\mathrm{m}$ یعنی $۴۱\mathrm{m}$ است.

**مثال ۴.** یک ذرهٔ آلفا (هستهٔ اتم هلیم) در لوله‌ای راست و توخالی به طول $۲٫\circ\mathrm{m}$ حرکت می‌کند. این لوله بخشی از یک شتابدهندهٔ ذرات است. (الف) اگر ذره با سرعت $۱٫\circ \times ۱\circ^۴\mathrm{m/s}$ به لوله وارد و با سرعت $۵٫\circ \times ۱\circ^۶\mathrm{m/s}$ از آن خارج شود، شتاب ذره (که ثابت فرض می‌شود) چقدر است؟ (ب) ذره چه مدت در لوله است؟

حل: (الف) محور $x$ را موازی با لوله، جهت مثبت را جهت حرکت ذره، و مبدأ را ورودی لوله می‌گیریم. $v_\circ$، $v$، و $x$ معلوم‌اند و $a$ مجهول است. معادلهٔ ۲۰ را، با $x_\circ = \circ$، به‌کار می‌بریم:

$$a = \frac{v^۲ - v_\circ^۲}{۲x}$$
$$= \frac{(۵٫\circ \times ۱\circ^۶\mathrm{m/s})^۲ - (۱٫\circ \times ۱\circ^۴\mathrm{m/s})^۲}{۲(۲٫\circ\mathrm{m})}$$
$$= +۶٫۳ \times ۱\circ^{۱۲}\mathrm{m/s}^۲$$

(ب) از معادلهٔ ۲۱، با $x_\circ = \circ$، $t$ را به‌دست می‌آوریم:

$$t = \frac{۲x}{v_\circ + v} = \frac{۲(۲٫\circ\mathrm{m})}{۱٫\circ \times ۱\circ^۴\mathrm{m/s} + ۵٫\circ \times ۱\circ^۶\mathrm{m/s}}$$
$$= ۸٫\circ \times ۱\circ^{-۷}\mathrm{s} = \circ٫۸\circ\mu\mathrm{s}$$

## ۲ـ۷ سقوط آزاد اجسام

یکی از آشناترین نمونه‌های حرکت با شتاب (تقریباً) ثابت، حرکت جسمی است که به طرف زمین سقوط می‌کند. اجسامی را در نظر بگیرید که در خلأ سقوط می‌کنند، یعنی مقاومت هوا بر حرکت آنها مؤثر نیست. از بررسی حرکت این اجسام، به واقعیت جالبی می‌رسیم: ⋆همهٔ اجسام، مستقل از اندازه، شکل، یا ترکیب‌شان، در نزدیکی سطح زمین با شتاب یکسانی سقوط می‌کنند. این شتاب، که آن‌را با $g$ نشان می‌دهیم، شتاب سقوط آزاد (یا گاهی شتاب ناشی از گرانی) نامیده می‌شود. البته این شتاب به فاصلهٔ جسم افتان از مرکز زمین بستگی دارد (فصل ۱۶)، اما اگر مسافتِ سقوط در مقایسه با شعاع زمین ($۶۴\circ\circ\mathrm{km}$) کوچک باشد، شتاب را می‌توان در مدت سقوط ثابت گرفت.

در نزدیکی سطح زمین، اندازهٔ $g$ تقریباً $۹٫۸\mathrm{m/s}^۲$ است. ما هم همه جای این کتاب همین مقدار را به‌کار می‌بریم، مگر آنکه صریحاً مقدار دقیق‌تری را ذکر کنیم. جهت شتاب سقوط آزاد در هرنقطه، جهت "پایین" را در آن نقطه مشخص می‌کند.

معمولاً از اجسام افتان صحبت می‌کنیم، اما به اجسامی که به طرف بالا حرکت می‌کنند هم همان شتاب سقوط آزاد (با همان اندازه و جهت) وارد می‌شود. یعنی سرعت ذره چه به طرف بالا باشد چه به طرف پایین، جهت شتاب آن، تحت تأثیر گرانش زمین، همیشه به طرف پایین است.

مقدار دقیق شتاب سقوط آزاد درهر نقطه تابع عرض جغرافیایی و ارتفاع آن نقطه از سطح زمین است. همچنین، یکسان نبودن چگالی نقاط مختلف پوستهٔ زمین هم باعث تفاوتهایی در شتاب سقوط آزاد در نقاط مختلف می‌شود که به هر حال قابل ملاحظه است. این اثرها را در فصل ۱۶ بررسی خواهیم کرد.

معادلات جدول ۲ (برای شتاب ثابت) را می‌شود در مورد سقوط آزاد هم به‌کار برد. تنها چند تغییر کوچک اعمال می‌کنیم: (۱) راستای سقوط آزاد را با $y$ مشخص می‌کنیم و جهت مثبت آن‌را رو به بالا می‌گیریم. بعداً، در فصل ۴، که حرکت دوبعدی را بررسی می‌کنیم، مختصهٔ $x$ را برای حرکت افقی به‌کار خواهیم برد. (۲) به‌جای شتاب ثابت $a$ در جدول ۲، $-g$ می‌گذاریم، چون جهت مثبت $y$ را رو به بالا گرفته‌ایم و شتاب در خلاف این جهت (منفی) است. توجه کنید که شتاب (رو به پایین) را $-g$ گرفته‌ایم، پس $g$ عددی مثبت است.

با این تغییرات کوچک، معادلات جدول ۲ به‌این شکل در می‌آیند:

$$v = v_\circ - gt \qquad (۲۱)$$

$$y = y_\circ + v_\circ t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (۲۲)$$

$$v^2 = v_\circ^2 - 2g(y - y_\circ) \qquad (۲۳)$$

$$y = y_\circ + \frac{1}{2}(v_\circ + v)t \qquad (۲۴)$$

و

$$y = y_\circ + vt + \frac{1}{2}gt^2 \qquad (۲۵)$$

**مثال ۵.** جسمی از حالت سکون شروع به سقوط آزاد می‌کند. مکان و سرعت جسم را پس از گذشت ۱٫۰s، ۲٫۰s، ۳٫۰s، و ۴٫۰s پیدا کنید.

حل: نقطهٔ شروع را مبدأ می‌گیریم. سرعت اولیه (صفر) و شتاب را می‌دانیم، و زمان هم معلوم است. برای یافتن مکان، معادلهٔ ۲۴ را با $y_\circ = 0$ و $v_\circ = 0$ به‌کار می‌بریم:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2$$

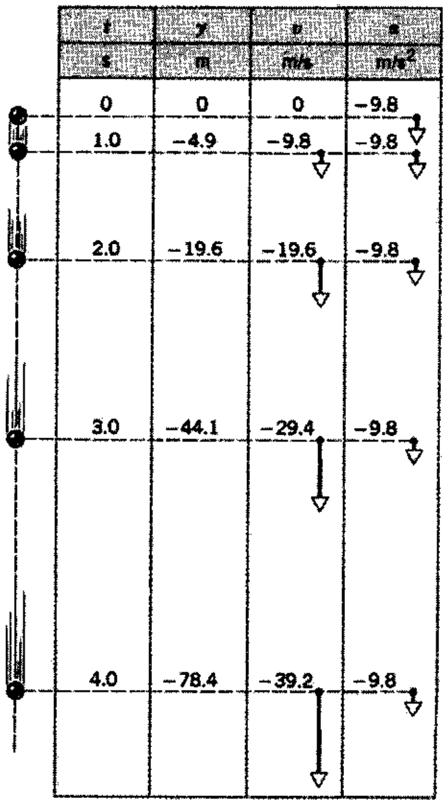
$t = ۱٫۰\,\mathrm{s}$ را در معادله بالا قرار می‌دهیم

$$y = -\frac{1}{2}(۹٫۸\,\mathrm{m/s^2})(۱٫۰\,\mathrm{s})^2 = -۴٫۹\,\mathrm{m}$$

برای یافتن سرعت، معادلهٔ ۲۳ را، باز هم با $v_\circ = 0$، به‌کار می‌بریم:

$$v = -gt = -(۹٫۸\,\mathrm{m/s^2})(۱٫۰\,\mathrm{s}) = -۹٫۸\,\mathrm{m/s}$$

۱٫۰s پس از شروع سقوط، جسم ۴٫۹m زیر ($y$ منفی است) نقطهٔ شروع است و با سرعت ۹٫۸m/s به طرف پایین ($v$ منفی است) حرکت می‌کند. به همین ترتیب می‌توانیم مکان و سرعت را در $t = ۲٫۰\,\mathrm{s}$، $t = ۳٫۰\,\mathrm{s}$، و $t = ۴٫۰\,\mathrm{s}$ به‌دست بیاوریم (شکل ۱۹).



| t (s) | y (m) | v (m/s) | a (m/s²) |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | −9.8 |
| 1.0 | −4.9 | −9.8 | −9.8 |
| 2.0 | −19.6 | −19.6 | −9.8 |
| 3.0 | −44.1 | −29.4 | −9.8 |
| 4.0 | −78.4 | −39.2 | −9.8 |

شکل۱۹. مثال ۵. ارتفاع، سرعت، و شتاب جسمی که در حال سقوط آزاد است.

**مثال ۶.** توپی را از زمین با سرعت ۲۵٫۲m/s در راستای عمودی به بالا پرتاب می‌کنیم. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا توپ به نقطهٔ اوج مسیر خود برسد؟ (ب) توپ تا کجا بالا می‌رود؟ (ج) در چه زمانهایی توپ در ارتفاع ۲۷٫۰m از سطح زمین واقع می‌شود؟

حل: (الف) سرعت توپ، در نقطهٔ اوج، صفر می‌شود. با داشتن $v_\circ$ و $v(=0)$، می‌خواهیم $t$ را حساب کنیم. $t$ از معادلهٔ ۲۳ به‌دست می‌آید:

$$t = \frac{v_\circ - v}{g} = \frac{۲۵٫۲\,\mathrm{m/s} - 0}{۹٫۸\,\mathrm{m/s^2}} = ۲٫۵۷\,\mathrm{s}$$

(ب) از داده‌های اولیه استفاده می‌کنیم تا خطای احتمالی قسمت (الف) وارد این قسمت نشود. از معادلهٔ ۲۵، با $y_\circ = 0$، می‌شود $y$ را به‌دست آورد:

$$y = \frac{v_\circ^2 - v^2}{2g} = \frac{(۲۵٫۲\,\mathrm{m/s})^2 - 0}{2(۹٫۸\,\mathrm{m/s^2})} = ۳۲٫۴\,\mathrm{m}$$

(ج) در این حالت معادلهٔ ۲۴ به‌کار می‌آید، زیرا $t$ تنها مجهول آن است. چون می‌خواهیم $t$ را به‌دست بیاوریم. معادلهٔ ۲۴ را، با

$y_\circ = \circ$، به شکل معمول معادلهٔ درجهٔ دوم می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{۲}gt^۲ - v_\circ t + y = \circ$$

$$\frac{۱}{۲}(۹٫۸\mathrm{m/s^۲})t^۲ - (۲۵٫۲\mathrm{m/s})t + ۲۷٫\circ\,\mathrm{m} = \circ$$

از حل این معادله جوابهای $t = ۱٫۵۲\mathrm{s}$ و $t = ۳٫۶۲\mathrm{s}$ به‌دست می‌آید. در $t = ۱٫۵۲\mathrm{s}$، سرعت توپ برابر است با

$$\begin{aligned} v = v_\circ - gt &= ۲۵٫۲\mathrm{m/s} - (۹٫۸\mathrm{m/s^۲})(۱٫۵۲\mathrm{s}) \\ &= ۱\circ٫۳\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

و در $t = ۳٫۶۲\mathrm{s}$،

$$\begin{aligned} v = v_\circ - gt &= ۲۵٫۲\mathrm{m/s} - (۹٫۸\mathrm{m/s^۲})(۳٫۶۲\mathrm{s}) \\ &= -۱\circ٫۳\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

این دو سرعت مقادیر مساوی ولی جهتهای مخالف دارند. باید بتوانید نشان بدهید که اگر مقاومت هوا نباشد، زمانی که طول می‌کشد تا توپ تا نقطهٔ اوج صعود کند، برابر با زمانی است که طول می‌کشد تا توپ همین مسافت را سقوط کند، و اندازهٔ سرعت توپ در هر نقطه، هنگام بالا رفتن و هنگام پایین آمدن، یکی است. دقت کنید که جواب قسمت (الف) برای لحظهٔ رسیدن توپ به نقطهٔ اوج ($۲٫۵۷\mathrm{s}$) درست در وسط دو زمانی است که در قسمت (ج) به‌دست آمد، آیا می‌توانید بگویید چرا؟ آیا می‌توانید به‌طور کیفی اثر مقاومت هوا را بر زمانهای صعود و سقوط پیش‌بینی کنید؟

**مثال ۷.** موشکی از عمق $۱۲۵\mathrm{m}$ در آب، از حالت سکون در راستای قائم به‌طرف بالا پرتاب می‌شود. مقدار شتاب این موشک، که آن‌را ثابت فرض می‌کنیم، مجهول است (این شتاب از برایند اثر موتورهای موشک، گرانش زمین، نیروی ارشمیدس، و مقاومت آب حاصل می‌شود). موشک در مدت $۲٫۱۵\mathrm{s}$ به سطح آب می‌رسد، و در لحظهٔ خروج از آب، موتورهای آن به طور خودکار خاموش می‌شوند (تا ردیابی آن آسان نباشد) و به صعود خود ادامه می‌دهد. این موشک تا چه ارتفاعی اوج می‌گیرد؟ (اثرهای مربوط به سطح آب را نادیده بگیرید).

حل: در اینجا هم، مثل مسئلهٔ سقوط آزاد، برای بررسی حرکت موشک در هوا باید سرعت اولیهٔ آن‌را در این بخش از حرکتش بدانیم. بنابراین، طرحِ مسئله به این شکل است که بخش زیرِ آب را بررسی کنیم، سرعتِ موشک را در سطح آب به‌دست بیاوریم، و این سرعت را به عنوان سرعت اولیهٔ بخش سقوط آزاد به‌کار ببریم. این دو بخش را باید جداگانه حل کرد، زیرا شتاب موشک در سطح آب تغییر می‌کند.

در زیر آب، تغییر مکان، زمان، و سرعت اولیه (صفر) معلوم‌اند. به شتاب نیاز نداریم، می‌خواهیم سرعت نهایی را به‌دست بیاوریم؛ معادلهٔ ۲۱ جدول ۲، همان رابطهٔ مناسب است:

$$v = \frac{۲(y - y_\circ)}{t} = \frac{۲(۱۲۵\mathrm{m})}{۲٫۱۵\mathrm{s}} = ۱۱۶\mathrm{m/s}$$

سرعت در سطح آب، $۱۱۶\mathrm{m/s}$ به‌طرف بالاست. حالا بخش سقوط آزاد حرکت رو به بالا را بررسی می‌کنیم. در اینجا سرعتی که در بالا به‌دست آمد، سرعت اولیه است. معادلهٔ ۲۵ برای سقوط آزاد را به‌کار می‌بریم. طبق معمول، نقطهٔ اوج نقطه‌ای است که سرعت ذره در آن صفر می‌شود:

$$y - y_\circ = \frac{v_\circ^۲ - v^۲}{۲g} = \frac{(۱۱۶\mathrm{m/s})^۲ - \circ}{۲(۹٫۸\mathrm{m/s^۲})} = ۶۸۷\mathrm{m}$$

برای اینکه مطمئن شوید که مسئله را فهمیده‌اید، نمودارهای $y(t)$، $v(t)$، و $a(t)$ را (مثل شکل ۱۶) رسم کنید. در این مسئلهٔ مهم توجه کنید که کدام متغیرها پیوسته‌اند و کدام ناپیوسته. رفتار یک موشک واقعی چه تفاوتی با این مسئلهٔ ایده‌آل دارد؟

## ۲ـ۸ گالیله و سقوط آزاد (اختیاری)

ماهیت حرکت اجسام افتان از مدتها پیش جزء مسائل مورد علاقه در فلسفهٔ طبیعی بوده است. ارسطو مدعی بود که "حرکت رو به پایین ... هر جسمی که وزنی دارد، متناسب با اندازه‌اش، تندتر است." یعنی اجسام سنگین‌تر، سریعتر سقوط می‌کنند. قرنها طول کشید تا گالیلئو گالیلئی [گالیله] (۱۵۶۴ تا ۱۶۴۲) حکم درست را صادر کرد: "اگر اثر مقاومت هوا حذف شود، همهٔ اجسام با سرعت یکسان سقوط می‌کنند." گالیله، در سالهای بعدی زندگی‌اش، رساله‌ای به نام گفتگوهایی دربارهٔ دو علم جدید نوشت و در آن به تفصیل مطالعات خودش دربارهٔ حرکت را بیان کرد.

این باورِ ارسطو که اجسام سنگین‌تر، سریعتر سقوط می‌کنند، دیدگاهی است که عمومِ آن‌را درست می‌پندارند. ظاهراً نمایش کلاسی مشهوری هم آن‌را تأیید می‌کند: اگر یک توپ و یک صفحهٔ کاغذ را با هم رها کنید، توپ خیلی زودتر به زمین می‌رسد. اما اگر اول کاغذ را مچاله کنید و نمایش را تکرار کنید، توپ و کاغذ تقریباً همزمان به زمین می‌رسند. در حالت اول، اثر مقاومت هواست که باعث می‌شود کاغذ کندتر از توپ حرکت کند. در حالت دوم، اثر مقاومت هوا بر کاغذ کاهش یافته و تقریباً با اثر مقاومت هوا بر توپ برابر شده است. بنابراین، دو جسم تقریباً با یک سرعت سقوط می‌کنند. البته می‌توان این را مستقیماً با بررسی سقوط اجسام در خلأ آزمایش کرد. حتی در خلأهای جزئی هم، که به سادگی قابل دسترسی‌اند، دیده می‌شود که یک پَر و یک توپ سربی که هزاران بار از پر سنگین‌تر است، با سرعتهایی سقوط می‌کنند که عملاً نمی‌توان اختلافی بین آنها مشاهده کرد. در سال ۱۹۷۱، یک فضانورد امریکایی (دیوید اسکات)، یک پر و یک چکش را در ارتفاعی در کرهٔ ماه (که هوا ندارد) رها کرد و دید که هر دو ــ در حد خطای مشاهدهٔ اوــ همزمان به سطح ماه رسیدند. اما در زمان گالیله روش مؤثری برای تولید خلأ جزئی در کار نبود

و همچنین، وسیله‌ای با دقت کافی برای تعیین زمان سقوط اجسام وجود نداشت تا بتوان اطلاعات عددی قابل اطمینانی به‌دست آورد. (داستان مشهوری که می‌گوید گالیله دو جسم را از بالای برج پیزا، رها کرد و مشاهده کرد که هر دو همزمان به زمین می‌رسند، به احتمال بسیار زیاد فقط افسانه است. با توجه به ارتفاع برج و اجسامی که گفته می‌شود گالیله به‌کار برده است، در صورت وقوع این آزمایش، به علت وجود مقاومت هوا، جسم سنگین‌تر و بزرگ‌تر می‌بایست چند متر جلوتر از جسم سبکتر به زمین رسیده باشد. در این صورت، گالیله ظاهراً ادعای ارسطو را تأیید کرده بوده است!) با این همه گالیله ادعای خود را با غلتاندن توپی روی سطح شیبدار ثابت کرد. ابتدا نشان داد که سینماتیکِ توپی که روی سطح شیبدار به پایین می‌غلتد شبیه سینماتیک توپی است که آزادانه سقوط می‌کند. سطح شیبدار فقط موجب می‌شود که اثر شتاب ناشی از گرانش زمین کم شود؛ به این ترتیب، حرکت کند می‌شود و سنجش آن ساده‌تر می‌شود. بعلاوه، در سرعتهای کم، اهمیت مقاومت هوا هم کمتر می‌شود.

گالیله از آزمایشهایش دریافت که مسافتهایی که در بازه‌های زمانی یکسانِ متوالی طی می‌شوند، متناسب با اعداد فرد ۱، ۳، ۵، ۷، ... و غیره‌اند. کل مسافتی که از زمان شروع حرکت تا انتهای هر یک از این بازه‌ها طی می‌شود متناسب است با ۱، (۴ =)۳ + ۱، (۹ =)۵+۳+۱، (۱۶ =)۷+۵+۳+۱، و ... یعنی برابر است با مجذور اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، و الی آخر. اما اگر مسافت طی شده متناسب با مجذور زمان باشد، تغییر سرعت مستقیماً متناسب با زمان است؛ نتیجه‌ای که خاص حرکت با شتاب ثابت است. سرانجام، گالیله دریافت که نتایج حاصل از حرکت بستگی به جرم توپ ندارند. به این ترتیب، به اصطلاح خودمان، شتاب سقوط آزاد مستقل از جرم جسم افتان است.

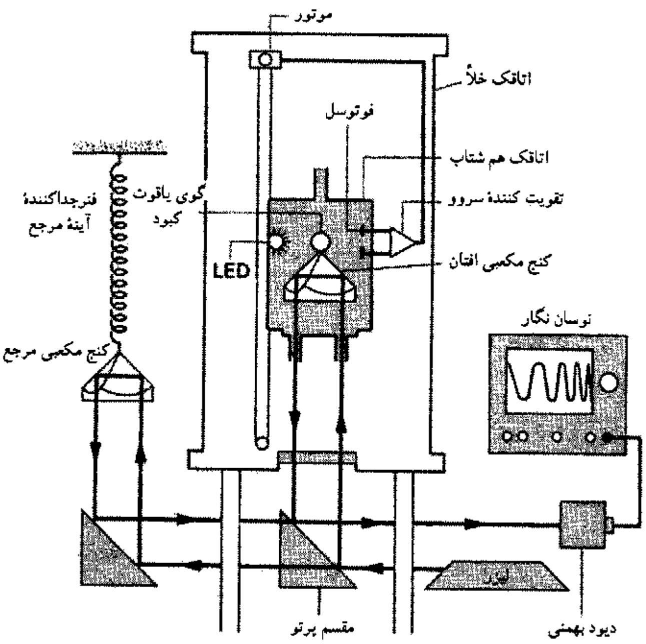
## ۲ـ۹ اندازه‌گیری شتابِ سقوط آزاد (اختیاری)

اندازه‌گیری $g$ یکی از آزمایشهای استاندارد در آزمایشگاه فیزیک پایه است. به این منظور مثلاً می‌توان زمانی را که طول می‌کشد تا ذره‌ای از حالت سکون مسافت معینی را سقوط کند اندازه گرفت و سپس، با استفاده از معادلهٔ ۲۴، $g$ را تعیین کرد. در این مورد به دستگاههای نه چندان دقیقِ آزمایشگاههای معمولی هم می‌شود به دقت حدود ۱٪ رسید. روشی بهتر وجود دارد و آن استفاده از آونگ است. نیروی محرک آونگ از جاذبهٔ زمین بر وزنهٔ آن تأمین می‌شود. در فصل ۱۵ خواهیم دید که مقدار $g$ را می‌توان با اندازه‌گیری دورهٔ تناوب نوسان آونگی به‌طول معین، به‌دست آورد. با اندازه‌گیری زمانِ لازم چندین نوسان، مقدار دقیقی برای دورهٔ تناوب به‌دست می‌آید. در این مورد با استفاده از دستگاههای معمولی آزمایشگاهها می‌توان به سادگی به دقتی در حدود ۰٫۱٪ رسید. چنین دقتی برای مشاهدهٔ اختلاف مقادیر $g$ درسطح دریا و در قلهٔ یک کوه (مثلاً به ارتفاع 3km یا 10000ft)، یا برای مشاهدهٔ اختلاف مقادیر $g$ در استوا و در قطب، کافی است.

به مدت چند قرن، دقیقترین روش سنجش $g$ همان روش آونگ بود. دقت این روش نهایتاً به حدود ۱ در $10^6$ رسید. این دقت برای تشخیص اختلاف مقادیر $g$ در دو طبقهٔ یک ساختمان کافی است. دقت روش آونگ به همین حد محدود می‌شود زیرا خطا در تعیین رفتار واقعی نقطهٔ لولایی آونگ نمی‌گذارد که دقت سنجش طول آونگ را از حد معینی بیشتر کنیم. اخیراً برای دقیقتر کردن اندازه‌گیری $g$، آزمایشگران دوباره به روش سقوط آزاد روی آورده‌اند. دقت این روش، با استفاده از تداخل‌سنجی لیزری، تقریباً به ۱ در $10^9$ رسیده است. با این دقت می‌شود تغییرات میدان گرانشی زمین را در مسافت قائمی به طول 1cm سنجید؛ چنین گرانی‌سنجی می‌تواند تغییر میدان گرانشی ناشی از خود آزمایشگری را که 1m آن طرفتر از دستگاه ایستاده است حس کند!

رسیدن به چنین دقتی، موفقیت بزرگی برای روشهای دقیق آزمایشگاهی است. مثلاً، شاید تصور کنید که برای حذف اثر مقاومت هوا بر سقوط آزاد، جسم را باید در خلأ رها کرد. این البته حرف درستی است، اما بهترین خلأهای آزمایشگاهی فعلی هم نمی‌توانند شرایطی را که برای دقت $10^{-9}$ در سنجش $g$ لازم است فراهم کنند. برای کاهش اثر مقادیرناچیز گازِ باقی‌مانده که حتی در خلأهای شدید هم حضور دارد، جسمی را که قرار است سقوط آزاد کند دریک جعبهٔ خلأ می‌گذاریم و جعبه را هم با جسم رها می‌کنند. گاز باقی‌مانده چون همراه جسم سقوط می‌کند، مقاومتی در برابر حرکت جسم نشان نمی‌دهد.

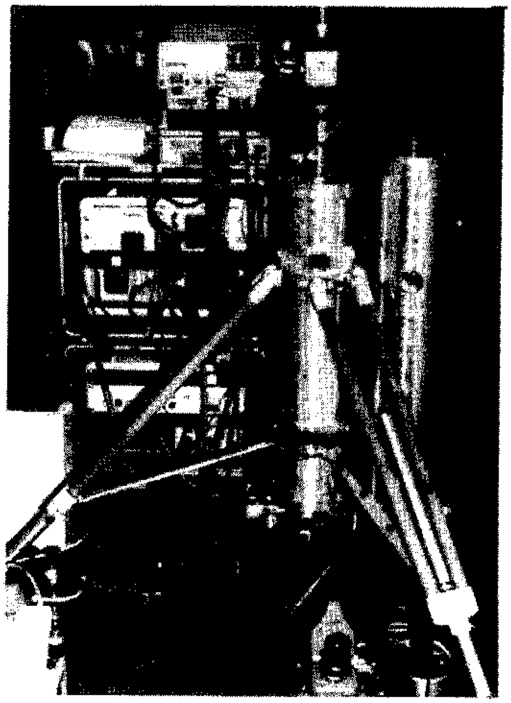
شکل ۲۰ طرحی از یک دستگاه سقوط آزاد را نشان می‌دهد که




شکل۲۰. نمودار دستگاه سنجش سقوط آزاد. نوسان‌نگار الگوی تداخلهای ویرانگر و سازنده را نشان می‌دهد. این تداخل ناشی از پرتو لیزری است که از کنج افتان بازتابیده می‌شود و با پرتو حاصل از کنج مرجع ترکیب می‌شود. اتاقکِ هم شتاب را موتوری به طرف پایین حرکت می‌دهد، چنان که همراه با کنج سقوط کند.

دکتر جیمز فالر و همکارانش آن‌را در "مؤسسهٔ مشترک اختر فیزیک آزمایشگاهی" در بولدر، کلرادو، طراحی کرده‌اند. جسم افتان، یک کنج بازتابنده است، در واقع کنجی است از یک مکعب شیشه‌ای که سه وجه آن با لایهٔ بازتابنده اندود شده است. ویژگی مفید این وسیله آن است که نور از هر جهتی که به داخل کنج بتابد، درست در جهت مخالف بازتابیده می‌شود. (فضانوردان آپولو آرایه‌ای از چنین بازتابنده‌هایی را در ماه نصب کرده‌اند؛ با تاباندن باریکهٔ لیزر از زمین به ماه و دریافت بازتاب این باریکه، می‌توان فاصلهٔ زمین تا ماه را به دقت سنجید.) یک باریکهٔ لیزر را از جسم افتان بازمی‌تابد و باریکه‌های فرودی و بازتابیده با هم تداخل می‌کنند و در حین سقوط جسم مرتباً یکدیگر را تقویت و تضعیف می‌کنند. مسافتی که جسم افتان می‌پیماید تا از یک تداخل ویرانگر به تداخل ویرانگر بعدی برسیم نصف طول‌موج نور است. بنابراین، کل مسافت سقوط آزاد را می‌توان، تنها با شمردن عدهٔ تداخلهای ویرانگر، با دقت کسری از طول‌موج نور به‌دست آورد. همزمان با فاصلهٔ زمانی بین دو تداخل ویرانگر با ساعت اتمی اندازه‌گیری می‌شود. به این ترتیب، مسافت و زمان هر دو با هم به‌دست می‌آیند، مثل همان روشهایی که خودتان ممکن است در آزمایشگاه فیزیک پایه به‌کار بگیرید. شکل ۲۱، تصویر این ابزار عالی را نشان می‌دهد.

ساختن گرانی‌سنجهای دقیقتر، نتایج عملی مهمی دارد. نگاشت میدان گرانشی زمین، به‌یافتن منابع نفت یا کانیهای دیگر کمک می‌کند (نگاه کنید به شکل ۵ در فصل ۱۶). تغییرات پوستهٔ زمین در طی زمان را می‌توان با اثری که این تغییرات بر $g$ می‌گذارند مشاهده کرد. به این ترتیب، می‌توان حرکت صفحات پوستهٔ زمین و فعالیتهای لرزه‌ای زمین را دنبال کرد. تغییرات کوچک در میدان گرانشی زمین می‌تواند بر مدار ماهواره‌ها و مسیر موشکهای قاره‌پیما تأثیر بگذارد، و در علم پایه، با اندازه‌گیریهای دقیق $g$ امکان آزمون جزئیات درکی که از نظریهٔ گرانشی داریم فراهم می‌شود؛ نظریه‌ای که بیش از سه قرن پیش، آیزاک نیوتون آن‌را پایه‌گذاری کرد.


شکل ۲۱. عکسی از دستگاه سقوط آزاد (که نمودار آن در شکل ۲۰ آمده است). این تجهیزات را می‌توان به‌راحتی حمل کرد و $g$ را در هر محلی که لازم است اندازه گرفت.

## پرسشها

۱. آیا اندازهٔ سرعت یک جسم می‌تواند منفی باشد؟ اگر می‌گویید بله، مثالی بیاورید؛ اگر می‌گویید نه، توضیح بدهید که چرا.

۲. خرگوشی در هر ثانیه نصف فاصلهٔ باقی‌مانده بین بینی‌خود و سر یک کاهو را می‌پیماید. آیا این خرگوش اصولاً می‌تواند به کاهو برسد؟ مقدار حدی سرعت متوسط خرگوش چقدر است؟ نمودارهای سرعت و مکان خرگوش را برحسب زمان رسم کنید.

۳. متوسط اندازهٔ سرعت، برابر است با طول مسیر پیموده شده تقسیم بر مدت حرکت. آیا این کمیت با اندازهٔ سرعت متوسط فرق دارد؟ مثالی بیاورید که نظرتان را تأیید کند.

۴. در یک میدان بخصوص مسابقات اتومبیلرانی، اتومبیلی دور اول از یک مسیر ۲ دوری را با سرعت متوسط $90\,\mathrm{mi/h}$ می‌پیماید. راننده می‌خواهد سرعت اتومبیل را در دور دوم چنان‌زیاد کند که‌سرعت متوسطش در کل مسابقه $180\,\mathrm{mi/h}$ باشد. نشان بدهید که این کار ممکن نیست.

۵. باب یک مسابقهٔ دو $100\,\mathrm{m}$ را با اختلاف $10\,\mathrm{m}$ از جودی می‌برد، و دفعهٔ بعد برای اینکه به جودی شانس بردن داده باشد، موقع شروع مسابقه $10\,\mathrm{m}$ از جودی عقبتر می‌ایستد. آیا این بار شانس باب و جودی برای برنده شدن واقعاً مساوی است؟

۶. اگر سرعت ثابت باشد، آیا ممکن است که سرعت متوسط در بازه‌ای با سرعت در یکی از لحظات آن بازه متفاوت باشد؟ اگر پاسختان مثبت است مثالی بزنید، اگر منفی است بگویید چرا.

۷. اگر شتاب حرکت یکنواخت نباشد، آیا هیچ وقت ممکن است که میانگین سرعت ذره‌ای که در راستای محور $x$ حرکت می‌کند $\frac{1}{2}(v_0 + v)$ باشد؟ جواب خودتان را با استفاده از نمودار ثابت کنید.

۸. آیا سرعت‌سنج ماشین همان اندازهٔ سرعتی را که تعریف کردیم می‌سنجد؟

۹. (الف) آیا ممکن است سرعت جسمی صفر باشد ولی شتاب آن غیرصفر باشد؟ (ب) آیا ممکن است سرعت جسمی ثابت باشد ولی اندازهٔ سرعت متغیر باشد؟ در هر مورد، اگر جواب مثبت است مثالی بیاورید؛ اگر منفی است بگویید چرا.

۱۰. آیا ممکن است جهت سرعت جسمی که شتاب ثابت دارد، معکوس شود؟ اگر می‌گویید بله، مثال بیاورید؛ اگر می‌گویید نه بگویید که چرا.

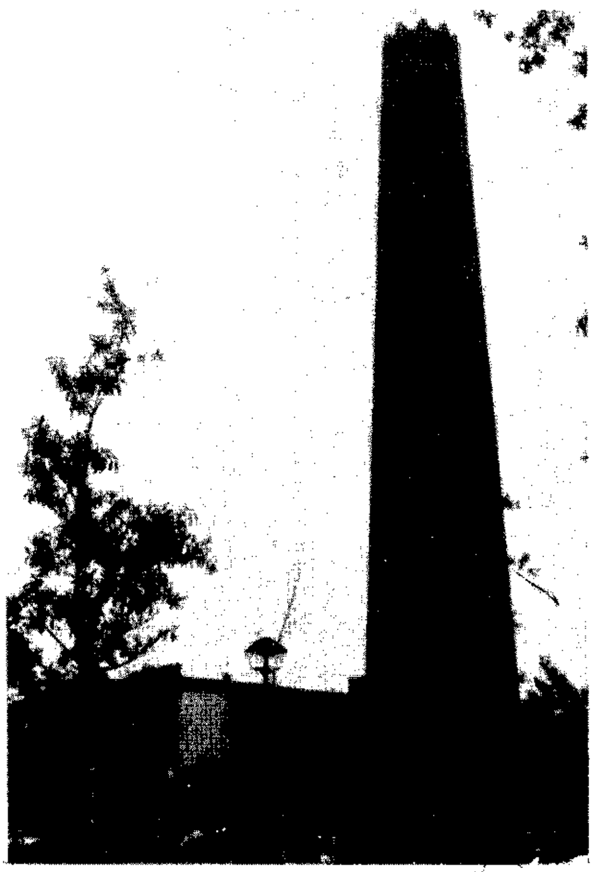
۱۱. شکل ۳۰، سرهنگ جان استپ را در سورتمهٔ موشکی خود که در حال ترمز است، نشان می‌دهد (نگاه کنید به مسئلهٔ ۳۴). (الف) بدن این فضانورد یک شتاب‌سنج است نه یک سرعت‌سنج. این موضوع را توضیح بدهید. (ب) آیا می‌توانید از روی شکل، جهت شتاب را تعیین کنید؟

۱۲. آیا ممکن است شتاب جسمی در حال کاهش و سرعت آن در حال افزایش باشد؟ اگر جوابتان بله است مثالی بیاورید؛ اگر نه، بگویید چرا؟

۱۳. کدام یک از اینها غیرممکن است؟ (الف) سرعت جسمی به طرف شرق و شتاب آن هم به طرف شرق است؛ (ب) سرعت جسمی به طرف شرق و شتاب آن به طرف غرب است؛ (ج) سرعت جسمی صفر و شتاب آن غیرصفر است؛ (د) شتاب جسمی ثابت، اما سرعت آن متغیر است؛ (ه) سرعت جسمی ثابت و شتاب آن متغیر است.

۱۴. چند مورد مثال بیاورید که در آنها نمی‌توان از مقاومت هوا در برابر سقوط اجسام چشم پوشید.

۱۵. شکل ۲۲ یک برجی را در بالتیمور، مریلند، نشان می‌دهد. این برج در سال ۱۸۲۹ بنا شد و از آن برای ساختن گلوله‌های سربی تفنگ استفاده می‌شد. برای این کار، سرب مذاب را در اندازه‌های لازم برای یک گلوله، از بالای برج به پایین می‌ریختند. گلوله‌های سربی در پایین برج به درون یک مخزن آب می‌افتادند و منجمد می‌شدند. ارتفاع برج، $230\,\mathrm{ft}$ است. این روش ساختن گلوله چه مزیتهایی می‌تواند داشته باشد؟



**شکل ۲۲.** پرسش ۱۵

۱۶. شخصی که بر لبهٔ صخره‌ای مرتفع ایستاده است، توپی را با سرعت اولیهٔ $v_0$ به‌طرف بالا و توپی دیگر را با سرعت اولیهٔ $v_0$ رو به پایین پرتاب می‌کند. کدام توپ در پای صخره با سرعت بیشتری به زمین برخورد می‌کند؟ مقاومت هوا را نادیده بگیرید.

۱۷. جسمی از موشکی که با شتاب $9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ رو به بالا حرکت می‌کند رها می‌شود. شتاب رو به پایین این جسم چقدر است؟

۱۸. ذره‌ای را در نظر بگیرید که از حالت سکون ($v_0 = 0$) از نقطهٔ $x_0 = 0$ و در زمان $t = 0$ با شتاب $a$ شروع به حرکت کند. از معادلهٔ ۱۹ برای حرکت با شتاب ثابت نتیجه‌می‌شود که ذره در دو زمان متفاوت $+\sqrt{2x/a}$ و $-\sqrt{2x/a}$، در نقطهٔ $x$ است. معنی ریشهٔ منفی این معادلهٔ درجه دو چیست؟

۱۹. مقدار $g$ در سیاره‌ای نصف مقدار آن در زمین است. زمان لازم برای سقوط اجسام از حالت سکون در این سیاره، چه ربطی با زمان مشابه در زمین دارد؟ مسافتهای سقوط را یکی بگیرید.

۲۰. (الف) سنگی با سرعت معینی در سیاره‌ای که شتاب سقوط آزاد در سطح آن دو برابر همین شتاب در سطح زمین است، به‌طرف بالا پرتاب می‌شود. ارتفاع اوج این سنگ را با ارتفاع مشابه در زمین مقایسه کنید. (ب) اگر سرعت اولیه را دو برابر کنیم، ارتفاع اوج چه تغییری می‌کند؟

۲۱. توپی را در راستای قائم به بالا پرتاب می‌کنیم. با در نظر گرفتن مقاومت هوا، فکر می‌کنید زمان صعود توپ بیشتر باشد یا زمان سقوط آن؟ چرا؟

۲۲. نمودار کیفی سرعت برحسب زمان را برای جسم افتانی که (الف) مقاومت هوا در برابر حرکت آن ناچیز است و (ب) مقاومت هوا در برابر حرکت آن قابل‌ملاحظه است، رسم کنید.

۲۳. دو توپ را به فاصلهٔ $1\,\mathrm{s}$ از هم رها می‌کنیم. (الف) فاصلهٔ بین دو توپ با گذشت زمان چه تغییری می‌کند؟ (ب) نسبت سرعت توپ اول به سرعت توپ دوم، $v_1/v_2$، با گذشت زمان چه تغییری می‌کند؟ از مقاومت هوا چشم بپوشید، و پاسخهای کیفی بدهید.

۲۴. پرسش ۲۳ را، با در نظرگرفتن مقاومت هوا، دوباره پاسخ بدهید؛ باز هم پاسخهای کیفی.

۲۵. اگر $m$ یک سنگ سبک و $M$ یک سنگ سنگین باشد، بنا به ادعای ارسطو، $M$ باید سریعتر از $m$ سقوط کند. گالیله سعی کرد نشان بدهد که این ادعای ارسطو با منطق سازگار نیست. استدلال گالیله چنین بود: $m$ و $M$ را به هم ببندید و سنگ بزرگتری بسازید. در این حالت، $m$ باید مزاحم سقوط $M$ شود زیرا کندتر از $M$ حرکت می‌کند. پس سنگ مرکب باید تندتر از $m$ و کندتر از $M$ سقوط کند؛ اما طبق ادعای ارسطو، سنگ جدید $(M+m)$ سنگینتر از $M$ است و باید تندتر از $M$ حرکت کند. آیا اگر استدلال گالیله را بپذیریم، می‌توان گفت که $M$ و $m$ باید با یک سرعت سقوط کنند؟ دراین صورت چه نیازی به آزمایش است؟ اگر فکر می‌کنید که استدلال گالیله نادرست است، بگویید چرا؟

۲۶. معادلات سینماتیکی حرکت (جدول ۲) تحت اثر وارونگی زمان، یعنی گذاشتن $-t$ به جای $t$، چه می‌شوند؟ توضیح بدهید.

۲۷. انتظار داریم روابطی که واقعاً کلی هستند، مثل روابط جدول ۲، مستقل از دستگاه مختصات، معتبر باشند. اگر معادلات کلی از نظر ابعادی هم سازگار باشند، آن‌وقت، مستقل از یکاهایی که به‌کار می‌بریم، معتبر خواهند بود. در این صورت، آیا اصولاً نیازی به یکاها و دستگاههای مختصات داریم؟

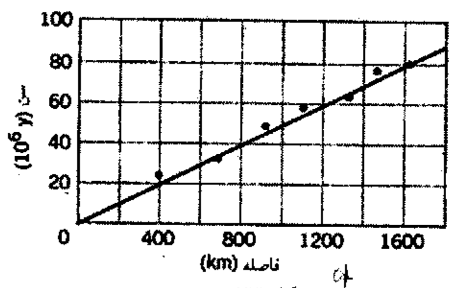
## مسئله‌ها

### بخش ۲ـ۳ سرعت متوسط

۱. اتومبیل شما با سرعت 88km/h (یعنی 55mi/h) در حرکت است. شما به مدت 1s به تصادفی که کنار جاده اتفاق افتاده است نگاه می‌کنید. در این مدت، اتومبیل شما چه مسافتی را می‌پیماید؟

۲. یک بازیکن بیسبال، توپی را با سرعت افقی 160km/h پرتاب می‌کند. بازیکنی که چوب بیسبال را در دست دارد، ۱۸٫۴m از محل پرتاب توپ فاصله دارد. چقدر طول می‌کشد تا توپ به چوب بیسبال برسد؟

۳. شکل ۲۳، رابطهٔ بین سن قدیمی‌ترین رسوبها در اقیانوس، و فاصلهٔ این رسوبها از یک پشتهٔ خاص را نشان می‌دهد. سن رسوبها برحسب میلیون سال و فاصله برحسب کیلومتر است. ماده، تقریباً با سرعت یکنواخت، از این پشته بیرون می‌زند و به اطراف حرکت می‌کند. سرعت حرکت رسوبها از این پشته را برحسب سانتی‌متر بر سال، پیدا کنید.



شکل ۲۳. مسئلهٔ ۳

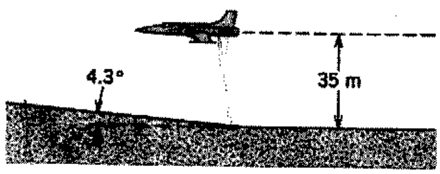
۴. کارل لویس، دو 100m را در زمانی در حدود 10s می‌دود؛ بیل راجرز، ماراتون (26mi، 385yd) را در زمانی در حدود 2h و 10min می‌دود. (الف) سرعت متوسط هر یک چقدر است؟ (ب) اگر کارل لویس می‌توانست سرعت دو 100m خود را در ماراتون حفظ کند، چه مدتی طول می‌کشید تا مسیر ماراتون را طی کند؟

۵. فیزیکدان مشهوری به مدت چند ماه، هر هفته یک بار از بوستون در ماساچوست به ژنو در سویس می‌رفت و برمی‌گشت؛ فاصلهٔ بین این دو شهر 4000mi است. متوسط اندازهٔ سرعت فیزیکدان در این مدت چقدر بوده است؟ آیا عجیب است که برای حل مسئله به سرعت هواپیما نیاز نداریم؟

۶. سرعت مجاز اتومبیلها در بزرگراهی از 55mi/h (یعنی ۸۸٫۵km/h) به 65mi/h (یعنی ۱۰۴٫۶km/h) افزایش داده شده است. فاصلهٔ بین بوفالو و نیویورک 435mi (یعنی 700km) است. اگر این مسافت را با بیشترین سرعت مجاز بپیماییم، در اثر این تغییر چقدر در وقتمان صرفه‌جویی می‌شود؟

۷. شخصی از سن‌آنتونیو به هوستون می‌رود؛ نصف مدت سفر را با سرعت 35mi/h (یعنی ۵۶٫۳km/h) و نصف دیگر را با سرعت 55mi/h (یعنی ۸۸٫۵km/h) می‌پیماید. در بازگشت، نصف مسافت را با سرعت 35mi/h و نصف دیگر را با سرعت 55mi/h طی می‌کند. سرعت متوسط در (الف) مسیر سن‌آنتونیو به هوستون، (ب) مسیر هوستون به سن‌آنتونیو، و (ج) در کل مسیر چقدر است؟

۸. یک هواپیمای جت پیشرفته در یک مانور مخفی شدن از دید رادار، در ارتفاع 35m از سطح زمین پرواز می‌کند. ناگهان هواپیما به یک شیب رو به بالای °۴٫۳ می‌رسد (که البته تشخیص این شیب کوچک چندان ساده نیست)؛ نگاه کنید به شکل ۲۴. خلبان چه مدت فرصت دارد که، قبل از برخورد با زمین، خط پرواز را تصحیح کند؟ سرعت پرواز 1300km/h است.



شکل ۲۴. مسئلهٔ ۸

۹. مکان ذره‌ای که روی خط راست حرکت می‌کند، از رابطهٔ $x = 3t - 4t^2 + t^3$ به‌دست می‌آید؛ $x$ برحسب متر و $t$ برحسب ثانیه است. (الف) مکان ذره در $t = 0$، $t = 1\text{s}$، $t = 2\text{s}$، $t = 3\text{s}$، و $t = 4\text{s}$ کجاست؟ (ب) جابه‌جایی ذره بین لحظات $t = 0$ تا $t = 2\text{s}$ چقدر است؟ از $t = 0$ تا $t = 4\text{s}$ چقدر؟ (ج) سرعت متوسط ذره در بازهٔ $t = 2\text{s}$ تا $t = 4\text{s}$ چقدر است؟ در بازهٔ $t = 0$ تا $t = 3\text{s}$ چقدر؟

۱۰. اتومبیلی با سرعت ثابت 40km/h از تپه‌ای بالا می‌رود و با سرعت ثابت 60km/h از همان تپه پایین می‌آید. متوسط اندازهٔ سرعت اتومبیل در کل مسیر چقدر است؟

۱۱. سرعت متوسط خودتان را در هر یک از این دو حالت حساب کنید. (الف) مسافت 240ft را با سرعت ۴٫۰ft/s راه می‌روید و سپس 240ft دیگر را با سرعت 10ft/s می‌دوید. (ب) به مدت ۱٫۰min با سرعت ۴٫۰ft/s راه می‌روید و سپس به مدت ۱٫۰min دیگر با سرعت 10ft/s می‌دوید.

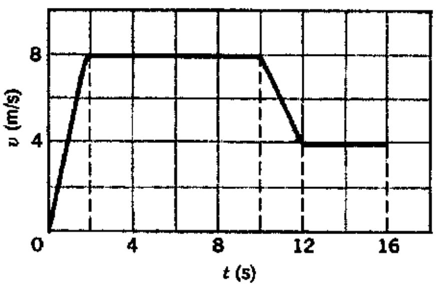
۱۲. دو قطار با سرعت 34km/h، روی یک ریل به طرف هم حرکت می‌کنند. هنگامی که فاصلهٔ آنها از یکدیگر 102km است، پرنده‌ای از سر یک قطار پرواز می‌کند تا به قطار دیگر برسد، و سپس دوباره به

طرف قطار اول برمی‌گردد و این کار را تا زمان برخورد دو قطار تکرار می‌کند. سرعت پرواز پرنده، $58\,\mathrm{km/h}$ است. (الف) پیش از برخورد، پرنده چند بار بین دو قطار رفت‌و آمد می‌کند؟ (ب) کل مسافتی که پرنده می‌پیماید چقدر است؟

**بخش ۲ـ۴ سرعت لحظه‌ای**

۱۳. مکان ذره‌ای که روی خط راست حرکت می‌کند، از رابطهٔ $x = 9{,}75 + 1{,}50t^3$ به‌دست می‌آید که در آن $x$ برحسب سانتی‌متر و $t$ برحسب ثانیه است. بازهٔ زمانی بین $t = 2\mathrm{s}$ و $t = 3\mathrm{s}$ را در نظر بگیرید: (الف) سرعت متوسط در این بازه چقدر است؟ (ب) سرعت لحظه‌ای در $t = 2\mathrm{s}$ چقدر است؟ (ج) سرعت لحظه‌ای در $t = 3\mathrm{s}$ چقدر است؟ (د) سرعت لحظه‌ای در $t = 2{,}5\mathrm{s}$ چقدر است؟ (ه) سرعت لحظه‌ای در زمانی که ذره در وسط فاصلهٔ مکانهای متناظر با $t = 2\mathrm{s}$ و $t = 3\mathrm{s}$ است چقدر است؟

۱۴. شکل ۲۵ نمودار سرعت زمان دونده‌ای را نشان می‌دهد. این دونده در مدت $16\mathrm{s}$ چه مسافتی را می‌پیماید؟



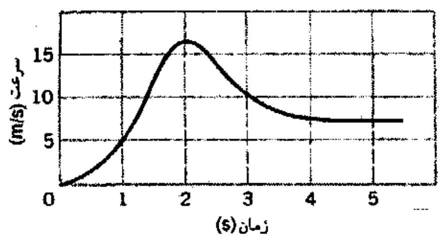

شکل ۲۵. مسئله‌های ۱۴ و ۱۵

**بخش ۲ـ۵ حرکت شتابدار**

۱۵. شتاب دوندهٔ مسئلهٔ ۱۴ در $t = 11\mathrm{s}$ چقدر است؟

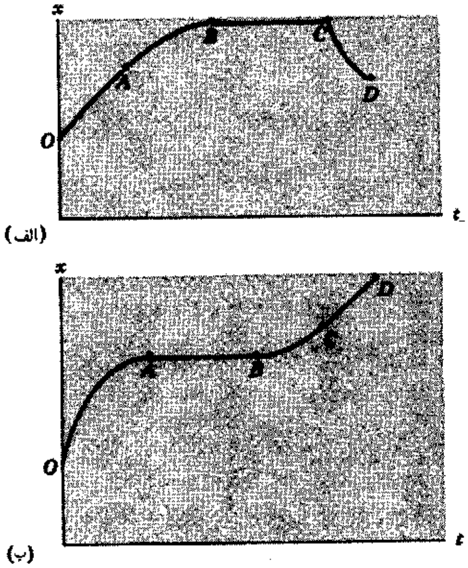
۱۶. سرعت ذره‌ای $18\,\mathrm{m/s}$ در جهت $+x$ است. $2{,}4\mathrm{s}$ بعد، سرعت آن $30\,\mathrm{m/s}$ در جهت مخالف است. شتاب متوسط ذره در این بازهٔ ۲٫۴ ثانیه‌ای چقدر است؟

۱۷. شکل ۲۶ نمودار سرعت‌ـزمان جسمی است که روی خط راست حرکت می‌کند. نمودار شتاب‌ـزمان این جسم را رسم کنید.




شکل ۲۶. مسئلهٔ ۱۷

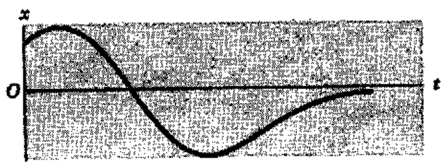
۱۸. شکل ۲۷الف نمودار $x$ برحسب $t$ ذره‌ای را نشان می‌دهد که روی خط راست حرکت می‌کند. (الف) در هر یک از بازه‌های $OA$، $AB$، $BC$ و $CD$، سرعت آیا مثبت است، منفی است، یا صفر است؟ همچنین تعیین کنید که در هر بازه شتاب $+$، $-$ یا $0$ است. (ب) در این نمودار آیا بازه‌ای وجود دارد که شتاب در آن به وضوح متغیر باشد؟ (از رفتار منحنی در نقاط مرزی بازه‌ها چشم بپوشید.)




شکل ۲۷. (الف) مسئلهٔ ۱۸ و (ب) مسئلهٔ ۱۹

۱۹. پرسشهای مسئلهٔ قبل را در مورد حرکت طبق نمودار شکل ۲۷ب، پاسخ بدهید.

۲۰. شکل ۲۸ نمودار مکان‌ـزمان ذره‌ای را نشان می‌دهد که در راستای محور $x$ حرکت می‌کند. به‌طور کیفی، منحنیهای سرعت‌ـزمان و شتاب‌ـزمان حرکت این ذره را رسم کنید.




شکل ۲۸. مسئلهٔ ۲۰

۲۱. در هر یک از حالتهای زیر، نموداری رسم کنید که نمایش ممکنی از مکان‌ـزمان ذره‌ای باشد که در راستای محور $x$ حرکت می‌کند: در $t = 1\mathrm{s}$، (الف) سرعت ذره صفر و شتاب آن مثبت است؛ (ب) سرعت ذره صفر و شتاب آن منفی است. (ج) سرعت ذره منفی و شتاب آن مثبت است؛ (د) سرعت ذرهٔ منفی و شتاب آن منفی است. (ه) درکدام یک از موارد بالا، اندازهٔ سرعت ذره، در $t = 1\mathrm{s}$ در حال افزایش است؟

۲۲. مکان ذره‌ای با رابطهٔ $x = 2t^3$ بیان می‌شود، که $x$ برحسب متر و $t$ برحسب ثانیه است. (الف) سرعت متوسط و شتاب متوسط ذره

بین $t = 1\text{s}$ و $t = 2\text{s}$ چقدر است؟ (ب) سرعت لحظه‌ای و شتاب لحظه‌ای ذره در $1\text{s} =$ و $t = 2\text{s}$ چقدر است؟ (ج) مقادیر لحظه‌ای و متوسط را با هم مقایسه کنید. در هر حالت کمیت بزرگتر را تعیین کنید و بگویید که چرا بزرگتر است؟

۲۳. ذره‌ای طبق رابطهٔ $x = 50t + 10t^2$ در راستای محور $x$ حرکت می‌کند؛ $x$ برحسب متر و $t$ برحسب ثانیه است. (الف) سرعت متوسط ذره را در $3\text{s}$ اول حرکت، (ب) سرعت لحظه‌ای ذره را در $t = 3\text{s}$، و (ج) شتاب لحظه‌ای ذره را در $t = 3\text{s}$ پیدا کنید.

۲۴. شخصی از $t = 0$ تا $t = 5\text{min}$ ایستاده است، از $t = 5\text{min}$ تا $t = 10\text{min}$، به عجله با سرعت $2.2\text{m/s}$ راه می‌رود. سرعت متوسط و شتاب متوسط او در بازه‌های زمانی (الف) از $2\text{min}$ تا $8\text{min}$ و (ب) از $3\text{min}$ تا $9\text{min}$ چقدر است؟

۲۵. در جدول زیر مکان ذره‌ای که در راستای محور $x$ حرکت می‌کند، در زمانهای مختلف فهرست شده است:

| $x(\text{m})$ | ۰٫۰۸۰ | ۰٫۰۵۰ | ۰٫۰۴۰ | ۰٫۰۵۰ | ۰٫۰۸۰ | ۰٫۱۳ | ۰٫۲۰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t(\text{s})$ | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ |

(الف) نمودار جابه‌جایی (نه مکان) برحسب زمان را رسم کنید. (ب) سرعت متوسط ذره را در بازه‌های ۰ تا $1\text{s}$، ۰ تا $2\text{s}$، ۰ تا $3\text{s}$، و ۰ تا $4\text{s}$ به‌دست بیاورید. (ج) شیب منحنی‌ای را که در قسمت (الف) رسم کردید، در $t = 0$، $t = 1\text{s}$، $t = 2\text{s}$، $t = 3\text{s}$، $t = 4\text{s}$، و $t = 5\text{s}$ به‌دست بیاورید. (د) نمودار شیب برحسب زمان را رسم کنید. (یکای شیب چیست؟) (ه) از روی منحنی قسمت (د) شتاب ذره را در زمانهای $t = 2\text{s}$، $t = 3\text{s}$، و $t = 4\text{s}$ به‌دست بیاورید.

۲۶. مکان ذره‌ای بر محور $x$، برحسب زمان، از رابطهٔ

$$x = At^2 - Bt^3$$

به‌دست می‌آید، که $x$ برحسب متر و $t$ برحسب ثانیه است. (الف) یکاهای SI برای $A$ و $B$ چه هستند؟ در بقیهٔ مسئله، فرض کنید مقادیر عددی $A$ و $B$، به‌ترتیب برابر با ۳ و ۱ یکای SI باشند. (ب) در چه زمانی ذره به بیشترین مقدار مثبت $x$ می‌رسد؟ (ج) کل طول مسیری که ذره در $4\text{s}$ اول حرکت می‌پیماید چقدر است؟ (د) جابه‌جایی ذره در $4\text{s}$ اول چقدر است؟ (ه) سرعت ذره در $t = 1\text{s}$، $t = 2\text{s}$، $t = 3\text{s}$، و $t = 4\text{s}$ چقدر است؟ (و) شتاب ذره در $t = 1\text{s}$، $t = 2\text{s}$، $t = 3\text{s}$، و $t = 4\text{s}$ چقدر است؟ (ز) سرعت متوسط ذره در بازهٔ زمانی $t = 2\text{s}$ تا $t = 4\text{s}$ چقدر است؟

۲۷. الکترونی از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند. شتاب این الکترون، به طور خطی با زمان زیاد می‌شود: $a = kt$، که در آن $k = (1.5\text{m/s}^2)/\text{s}$ یا $k = 1.5\text{m/s}^3$ است. (الف) نمودار $a$ برحسب $t$ را برای $10\text{s}$ اول حرکت رسم کنید. (ب) با استفاده از نمودار قسمت (الف)، نمودار $v$ برحسب $t$ را رسم کنید و سرعت الکترون را در $5\text{s}$ بعد از شروع حرکت تخمین بزنید. (ج) از روی منحنی $v$ برحسب $t$ قسمت (ب)، منحنی $x$ برحسب $t$ را رسم کنید و تخمین بزنید که الکترون در $5\text{s}$ اول حرکت چه مسافتی را می‌پیماید.

۲۸. در یک بازی کامپیوتری، لکه‌ای طبق رابطهٔ $x = 9.00t - 0.750t^3$ روی صفحهٔ نمایش [مانیتور] حرکت می‌کند. در این رابطه، $x$ فاصلهٔ لکه از لبهٔ چپ صفحه، برحسب سانتی‌متر، و $t$ زمان برحسب ثانیه است. اگر لکه به یکی از دو لبهٔ صفحه، $x = 0$ یا $x = 15\text{cm}$، برسد، دوباره از لبهٔ چپ شروع به حرکت می‌کند. (الف) چه مدت پس از شروع حرکت، لکه به حالت سکون لحظه‌ای می‌رسد؟ (ب) در این لحظه لکه کجاست؟ (ج) در این لحظه شتاب لکه چقدر است؟ (د) پس از سکون لحظه‌ای، لکه در چه جهتی حرکت می‌کند؟ (ه) لکه در چه زمانی از صفحه خارج می‌شود؟

## بخش ۲ـ۶ حرکت با شتاب ثابت

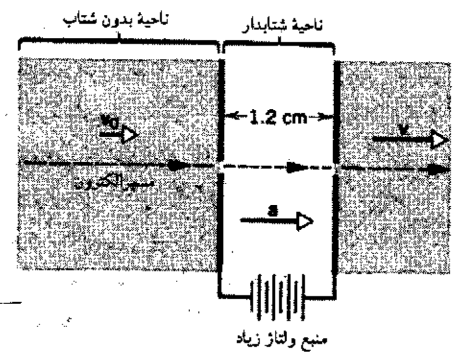
۲۹. جامبوجتی باید روی باند به سرعت $360\text{km/h}$ (یعنی $224\text{mi/h}$) برسد تا بتواند از زمین کنده شود. اگر طول باند $1.8\text{km}$ (یعنی $1.1\text{mi}$) باشد، حداقل شتاب (ثابت) لازم برای اینکه هواپیما در این باند از سکون به سرعت لازم برسد چقدر است؟

۳۰. فضاپیمایی در فضای تهی با شتاب ثابت $9.8\text{m/s}^2$ حرکت می‌کند. (الف) اگر فضاپیما از حالت سکون شروع به حرکت کند، چقدر طول می‌کشد تا سرعت آن به یک دهم سرعت نور برسد؟ (ب) در این مدت، فضاپیما چه مسافتی را می‌پیماید؟ (سرعت نور $3.0 \times 10^8\text{m/s}$ است.)

۳۱. مار زنگی می‌تواند سرش را با شتاب $50\text{m/s}^2$ به طرف قربانی‌اش حرکت بدهد. اگر اتومبیلی می‌توانست با این شتاب حرکت کند، چقدر طول می‌کشید تا سرعت آن از صفر به $100\text{km/h}$ برسد؟

۳۲. یک میون (که نوعی ذرهٔ بنیادی است) با سرعت $5.20 \times 10^6\text{m/s}$ به یک میدان الکتریکی پرتاب می‌شود. میدان الکتریکی به این ذره شتاب $1.30 \times 10^{14}\text{m/s}^2$ در خلاف جهت سرعت اولیه‌اش می‌دهد. میون چه مسافتی را قبل از متوقف شدن می‌پیماید؟

۳۳. الکترونی با سرعت اولیهٔ $v_0 = 1.50 \times 10^5\text{m/s}$ وارد ناحیه‌ای به طول $1.2\text{cm}$ می‌شود. در این ناحیه، الکترون در اثر میدان الکتریکی شتاب می‌گیرد (شکل ۲۹) و با سرعت $5.8 \times 10^6\text{m/s}$ از آن خارج می‌شود. شتاب الکترون، که ثابت فرض می‌شود، چقدر است؟ (این همان چیزی است که در بخش تفنگ الکترونی لامپ پرتو کاتد اتفاق




شکل ۲۹. مسئلهٔ ۳۳

می‌افتد. لامپ پرتو کاتدی در گیرندهٔ تلویزیون هم به کار می‌رود.)

۳۴. در ۱۹ مارس ۱۹۵۴، سرهنگ جان پی استاپ یک رکورد جهانی برای حرکت روی سطح زمین به جا گذاشت. او یک سورتمهٔ موشکی را با سرعت ۱۰۲۰km/h در مسیری رانده و سورتمه را طی زمان ۱٫۴s از این سرعت به حالت سکون رساند (شکل ۳۰. شتاب سرهنگ در این "ترمز" چقدر بوده است؟ پاسخ خود را برحسب $g$ (شتاب گرانشی) بیان کنید. (دقت کنید که بدن این شخص مثل شتاب‌سنج عمل می‌کند نه سرعت‌سنج.)

شکل ۳۰. مسئلهٔ ۳۴

۳۵. ترمزهای اتومبیل شما می‌توانند شتاب کندکنندهٔ ۱۷ft/s$^2$ تولید کنند. اگر در بزرگراهی با سرعت ۸۵mi/h در حرکت باشید و ناگهان با علامت بیشترین سرعت مجاز برابر با ۵۵mi/h مواجه شوید، حداقل چقدر طول می‌کشد که اتومبیل را به سرعت مجاز برسانید؟

۳۶. یک اتومبیل با لاستیکهای خوب، در یک جادهٔ خشک می‌تواند با شتاب کند کنندهٔ ۱۱٫۰mi/h.s (یعنی ۴٫۹۲m/s$^2$) ترمز کند. (الف) چقدر طول می‌کشد تا اتومبیلی که با سرعت ۵۵mi/h (یعنی ۲۴٫۶m/s) در حرکت است متوقف شود؟ (ب) در این مدت، اتومبیل چه مسافتی را می‌پیماید؟

۳۷. تیری را از کمان مستقیماً رو به بالا پرتاب می‌کنیم. تیر در بازگشت با سرعت ۲۶۰ft/s به زمین برخورد و به اندازهٔ ۹٫۰in در آن فرو می‌رود. (الف) شتاب (ثابت) توقف این تیر، و (ب) زمان‌لازم برای متوقف شدن آن در زمین چقدر است؟

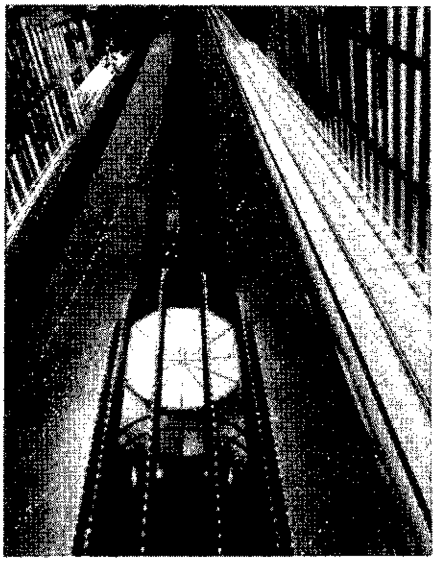
۳۸. وکیلی در مورد مسائل فیزیکی یکی از پرونده‌هایش با شما مشورت می‌کند: اتومبیلی در حال حرکت بوده است و راننده مجبور به توقف اضطراری می‌شود. ترمزها قفل می‌شوند، چرخهای اتومبیل روی جاده می‌لغزند و ردی به طول ۱۹٫۲ft روی جاده می‌ماند. مسئله این است که آیا سرعت اتومبیل، پیش از توقف، از حد مجاز ۳۰mi/h بیشتر بوده است یا نه. افسر پلیس، با فرض اینکه شتاب کند کنندهٔ ترمز از شتاب سقوط آزاد (یعنی ۳۲ft/s$^2$) بیشتر نبوده است، راننده را جریمه نمی‌کند. به نظر شما آیا سرعت راننده کمتر از حد مجاز بوده است؟ توضیح بدهید.

۳۹. قطاری از حالت سکون با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کند. سرعت قطار که در یک لحظه ۳۳٫۰m/s است، ۱۶۰m بعد به ۵۴٫۰m/s می‌رسد. (الف) شتاب قطار، (ب) زمان لازم برای طی این مسافت ۱۶۰m، (ج) زمان لازم برای اینکه قطار از سکون به سرعت ۳۳٫۰m/s برسد. و (د) مسافتی که قطار تا رسیدن به سرعت ۳۳٫۰m/s می‌پیماید چقدر است؟

۴۰. اتومبیلی با شتاب ثابت، مسافت ۵۸٫۰m بین دو نقطه را در ۶٫۲۰s می‌پیماید. سرعت اتومبیل در لحظهٔ عبور از نقطهٔ دوم ۱۵٫۰m/s است. (الف) سرعت اتومبیل در نقطهٔ اول چقدر است؟ (ب) شتاب اتومبیل چقدر است؟ (ج) در چه فاصله‌ای پیش از نقطهٔ اول، اتومبیل در حالت سکون بوده است؟

۴۱. یک قطار زیرزمینی از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و نیمهٔ اول مسافت بین دو ایستگاه را با شتاب ۱٫۲۰m/s$^2$+ طی می‌کند. نیمهٔ دوم را با شتاب ۱٫۲۰m/s$^2$− می‌پیماید تا در ایستگاه بعدی متوقف شود. فاصلهٔ دو ایستگاه از هم ۱٫۱۰km است. (الف) زمان طی فاصلهٔ دو ایستگاه، (ب) بیشترین مقدار سرعت قطار در این فاصله چقدر است؟

۴۲. طول مسیر یک آسانسور ۶۲۴ft است. بیشترین سرعت آسانسور ۱۰۰۰ft/min و شتاب (ثابت) آن ۴٫۰۰ft/s$^2$ است. (الف) آسانسور از حالت سکون تا رسیدن به بیشترین سرعتش چه مسافتی را می‌پیماید؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا آسانسور تمام مسیر را بپیماید؟ توجه کنید که آسانسور در انتهای مسیر باید متوقف شود.



شکل ۳۱. مسئلهٔ ۴۲

۴۳. راننده‌ای برای متوقف کردن اتومبیلش به‌شدت ترمز می‌کند. مسافت توقف را می‌توان حاصل‌جمع "مسافت واکنش" و "مسافت ترمز" در نظر گرفت. مسافت واکنش برابر است با حاصل‌ضرب سرعت اولیه در زمان واکنش، و مسافت ترمز فاصله‌ای است که اتومبیل پس از

ترمز کردن و قبل از توقف کامل می‌پیماید. جدول زیر، مقادیر نوعی این کمیتها را به‌دست می‌دهد.

| سرعت اولیه (m/s) | مسافت واکنش (m) | مسافت ترمز (m) | مسافت توقف (m) |
|---|---|---|---|
| ۱۰ | ۷٫۵ | ۵٫۰ | ۱۲٫۵ |
| ۲۰ | ۱۵ | ۲۰ | ۳۵ |
| ۳۰ | ۲۲٫۵ | ۴۵ | ۶۷٫۵ |

(الف) زمان واکنش این راننده چقدر است؟ (ب) مسافت توقف اتومبیل، با سرعت اولیهٔ $25\text{m/s}$ چقدر است؟

**۴۴.** "تلهٔ سرعت" که در بزرگراهها نصب می‌شود، متشکل از دو نوار به فاصلهٔ $110\text{m}$ از یکدیگر است که در اثر فشار فعال می‌شوند. راننده‌ای در بزرگراهی که سرعت مجاز در آن $90\text{km/h}$ است با سرعت $120\text{km/h}$ می‌راند. درست زمانی که از نوار اول می‌گذرد متوجه پلیس می‌شود و سرعت خود را کم می‌کند. چه شتاب کندکننده‌ای لازم است تا سرعت متوسط اتومبیل، بین دو نوار، کمتر از حد مجاز سرعت شود؟

**۴۵.** اتومبیلی به محض سبز شدن چراغ راهنما با شتاب $2{,}2\text{m/s}^2$ شروع به حرکت می‌کند. در همین لحظهٔ کامیونی که با سرعت ثابت $9{,}5\text{m/s}$ در حرکت است، از اتومبیل سبقت می‌گیرد. (الف) در چه فاصله‌ای پس از این نقطه، اتومبیل از کامیون جلو می‌زند؟ (ب) در این لحظه سرعت اتومبیل چقدر است؟ (خوب است که نمودار کیفی $x$ برحسب $t$ را برای هر یک از دو وسیله رسم کنید.)

**۴۶.** قطاری با سرعت $v_1$ حرکت می‌کند. لوکوموتیوران یک قطار باری را می‌بیند که به فاصلهٔ $d$ جلوتر از قطار خودش، با سرعت $v_2$ در همان جهت حرکت می‌کند. $v_2$ کوچکتر از $v_1$ است؛ بنابراین، لوکوموتیوران ترمز می‌کند تا به قطار جلویی نخورد. سرعت قطار با شتاب ثابت $a$ کم می‌شود. نشان بدهید که

اگر $d > (v_1 - v_2)^2/2a$ باشد، برخورد صورت نمی‌گیرد؛

اگر $d < (v_1 - v_2)^2/2a$ باشد، برخورد صورت می‌گیرد.

(خوب است که نمودار کیفی $x$ برحسب $t$ را برای هر قطار رسم کنید.)

**۴۷.** اتومبیلی با سرعت $35\text{mi/h}$ (یعنی $56\text{km/h}$) حرکت می‌کند. راننده متوجه می‌شود که $110\text{ft}$ (یعنی $34\text{m}$) جلوتر از او مانعی وجود دارد و ترمز می‌کند. چهار ثانیه بعد، اتومبیل به مانع برمی‌خورد. (الف) شتاب ثابت اتومبیل، پیش از برخورد چقدر بوده است؟ (ب) در لحظهٔ برخورد، سرعت اتومبیل چقدر بوده است؟

**۴۸.** دونده‌ای در مسابقهٔ دو $100\text{m}$، با شتاب $2{,}80\text{m/s}^2$ به سرعت بیشینهٔ خود می‌رسد و این سرعت را تا آخر مسیر حفظ می‌کند. اگر کل مسیر مسابقه در $12{,}2\text{s}$ طی شده باشد، (الف) زمان سپری شده و (ب) مسافت طی شده در بخش شتابدار حرکت را حساب کنید.

**۴۹.** در یک کتابچهٔ راهنمای اتومبیل آمده است که اتومبیلی (با ترمزهای خوب) که با سرعت $50\text{mi/h}$ در حرکت باشد می‌تواند در طی مسافت $186\text{ft}$ متوقف شود، و در سرعت $30\text{mi/h}$ در طی $80\text{ft}$. فرض کنید زمان واکنش راننده (که طی آن شتاب صفر است) و همچنین شتاب حاصل از ترمز، برای هر دو سرعت یکی است. (الف) زمان واکنش راننده و (ب) شتاب ترمز را حساب کنید.

## بخش ۲ـ۷ سقوط آزاد اجسام

**۵۰.** قطره‌های باران از ابری درارتفاع $1700\text{m}$ از سطح زمین، به زمین سقوط می‌کنند. اگر مقاومت هوا سرعت را کم نمی‌کرد، این قطره‌ها با چه سرعتی به زمین می‌رسیدند؟ در این صورت، آیا قدم زدن در زیر باران بی‌خطر بود؟

**۵۱.** تنها کابل نگهدارندهٔ یک آسانسور (خالی) مخصوص عملیات ساختمانی، که در بالاترین نقطهٔ ساختمان نیمه‌کاره‌ای به ارتفاع $120\text{m}$ توقف کرده است، ناگهان پاره می‌شود. (الف) آسانسور با چه سرعتی به زمین می‌خورد؟ (ب) زمان سقوط آن چقدر است؟ (ج) سرعت آن در نیمهٔ راه چقدر است؟ (د) چه مدتی طول می‌کشد تا به نیمهٔ راه برسد؟

**۵۲.** آچاری از دست کارگری رها می‌شود و با سرعت $24{,}0\text{m/s}$ به زمین می‌خورد. (الف) این آچار از چه ارتفاعی رها شده است؟ (ب) زمان سقوط آن چقدر بوده است؟

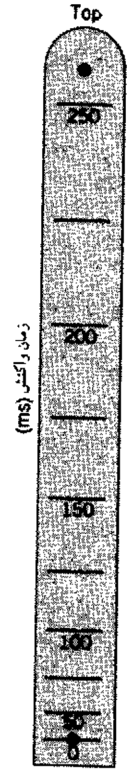
**۵۳.** توپی را به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. (الف) سرعت اولیهٔ آن باید چقدر باشد تا ارتفاع اوج آن $53{,}7\text{m}$ شود؟ (ب) در این شرایط توپ چه مدت در هوا می‌ماند؟

**۵۴.** سنگی از صخره‌ای به ارتفاع $100\text{m}$ پایین می‌افتد. چقدر طول می‌کشد تا (الف) $50{,}0\text{m}$ اول و (ب) $50{,}0\text{m}$ بعدی را طی کند؟

**۵۵.** فضانوردی که در یکی از سیاره‌های منظومهٔ شمسی فرود آمده است متوجه می‌شود که اگر سنگ کوچکی با سرعت $14{,}6\text{m/s}$ به‌طرف بالا پرتاب شود، $7{,}72\text{s}$ بعد به سطح سیاره بازمی‌گردد. این فضانورد روی کدام سیاره فرود آمده است؟ (راهنمایی: از اطلاعات مندرج در پیوست ج استفاده کنید.)

**۵۶.** توپی را با سرعت اولیهٔ $20{,}5\text{m/s}$، از ارتفاع $58{,}8\text{m}$ به طرف پایین پرتاب می‌کنیم. (الف) سرعت توپ در لحظهٔ برخورد با زمین چقدر است؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا توپ به زمین برسد؟ (ج) اگر توپ را از همان ارتفاع و با همان سرعت اولیه به طرف بالا پرتاب می‌کردیم، جواب قسمتهای (الف) و (ب) چه می‌شد؟

**۵۷.** شکل ۳۲ وسیلهٔ ساده‌ای برای اندازه‌گیری زمان واکنش را نشان می‌دهد. این وسیله، نواری مقوایی است که مقیاس‌بندی شده و ده نقطهٔ بزرگ هم روی آن مشخص شده است. دوست شما نوار را، با شست و انگشت اشاره‌اش، از نقطهٔ بالایی می‌گیرد. شست و انگشت اشارهٔ شما روی نقطهٔ پایینی است، اما مواظبید که نوار را لمس نکند. دوستتان نوار را رها می‌کند و شما سعی می‌کنید که، پس از دیدن این رویداد، هر چه سریعتر نوار را بگیرید. عدد مربوط به نقطه‌ای که شما نوار را در آن می‌گیرید، زمان واکنش شماست. فاصلهٔ نقطهٔ زیرین از شاخصهای $50\text{ms}$، $100\text{ms}$، $200\text{ms}$، و $250\text{ms}$ باید چقدر باشد؟



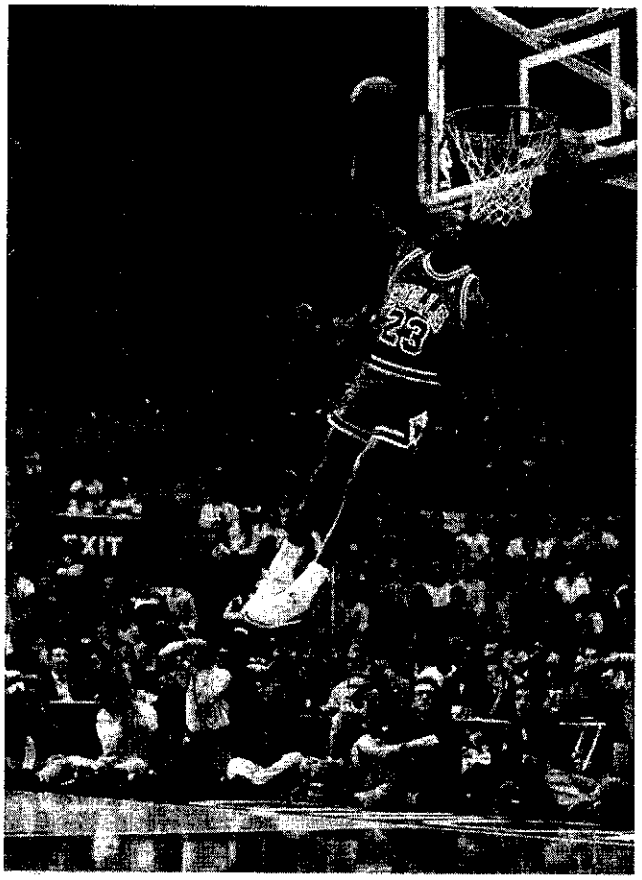

شکل ۳۲. مسئلهٔ ۵۷

**۵۸.** توپی را به بالا پرتاب می‌کنیم. ۲٫۲۵s طول می‌کشد تا توپ به ارتفاع ۳۶٫۸m برسد. (الف) سرعت اولیهٔ آن چقدر بوده است؟ (ب) سرعت آن در این ارتفاع چقدر است؟ (ج) توپ تا چه ارتفاعی بالاتر می‌رود؟

**۵۹.** شخصی روی پلی مشرف به یک بزرگراه ایستاده است و، در حالی که به آیزاک نیوتون فکر می‌کند، ناخودآگاه سیبی را از دستش رها می‌کند. سیب از لبهٔ پل می‌افتد و در همان لحظه لبهٔ جلویی کامیونی که از زیر پل می‌گذرد درست زیر لبهٔ پل است. سرعت کامیون ۵۵km/h (یعنی ۳۴mi/h) و طول آن ۱۲m (یعنی ۳۹ft) است. سیب درست مماس بر لبهٔ عقب کامیون به زمین می‌رسد. در این صورت، ارتفاع لبهٔ پل از زمین چقدر بوده است؟

**۶۰.** موشکی در راستای قائم از سطح زمین پرتاب می‌شود و به مدت ۱٫۰min با شتاب ثابت $۲۰\,m/s^۲$ به بالا حرکت می‌کند. در این لحظه سوخت موشک به کلی تمام می‌شود و حرکت آن به شکل سقوط آزاد ادامه می‌یابد. (الف) بیشترین ارتفاعی که موشک به آن می‌رسد چقدر است؟ (ب) از زمان برخاستن موشک، چقدر طول می‌کشد تا موشک دوباره به زمین برگردد؟ (از تغییرات $g$ در اثر تغییر ارتفاع چشم بپوشید.)

**۶۱.** یک بازیکن بسکتبال ۷۶cm به طرف بالا می‌پرد تا توپ را توی سبد "بکوبد". (الف) صعود ۱۵cm بالایی مسیر چقدر طول می‌کشد؟ (ب) صعود ۱۵cm پایینی مسیر چقدر؟ آیا به کمک این اعداد می‌توانید




شکل ۳۳. مسئلهٔ ۶۱

توضیح بدهید که چرا تعلیق بازیکنان در اوج پرش خیلی مشهورتر است؟ (شکل ۳۳).

**۶۲.** سنگی را در راستای قائم به بالا پرتاب می‌کنیم. سنگ با سرعت $v$ از نقطهٔ $A$، و با سرعت $v/۲$ از نقطهٔ $B$ می‌گذرد. نقطهٔ $B$ ۳٫۰۰m بالاتر از $A$ است. (الف) مقدار $v$، و (ب) ارتفاع اوج سنگ نسبت به نقطهٔ $B$ چقدر است؟

**۶۳.** آب از سوراخهای دوش به پایین چکه می‌کند. کف حمام، ۲۰۰cm زیر دوش است. قطره‌ها به فاصله‌های زمانی منظم به پایین می‌چکند، چنانکه وقتی قطرهٔ اول به زمین می‌رسد، قطرهٔ چهارم از دوش جدا می‌شود. در این لحظه هر یک از قطره‌های دیگر در چه مکانی است؟

**۶۴.** در "آزمایشگاه تحقیقات گرانشِ صفر" در مرکز تحقیقات لوئیس ناسا، یک برج سقوط، به ارتفاع ۱۴۵m، وجود دارد. این برج قائم و خلأ شده است. از جملهٔ تجهیزات این برج، کره‌ای به قطر ۱m است که می‌توان در آن وسایل آزمایشگاهی گذاشت و مجموعه را از برج رها کرد تا به صورت آزاد سقوط کند. (الف) این وسایل به چه مدت در حال سقوط آزادند؟ (ب) سرعت آنها در پایین برج چقدر بوده است؟ (ج) در پایین برج، شتاب $۲۵g$ به کره تحمیل می‌شود تا سرعت آن به صفر برسد.

در مدتی که این شتاب اعمال می‌شود، کره چه مسافتی را می‌پیماید؟

۶۵. توپی از ارتفاع ۲٫۲m رها می‌شود و پس از برخورد به زمین تا ارتفاع ۱٫۹m به بالا برمی‌گردد. اگر این توپ به مدت ۹۶ms با سطح زمین در تماس بوده باشد، در این مدت چه شتاب متوسطی (اندازه و جهت) داشته است؟

۶۶. چند سال پیش، زنی از بالای ساختمانی به ارتفاع ۱۴۴ft سقوط کرد و روی یک جعبهٔ هواکش افتاد. جعبه را ۱۸in در هم فرو برد و، بی‌هیچ جراحت شدیدی، زنده ماند. شتابی که این زن طی برخورد با جعبه متحمل شده (با فرض ثابت بودن این شتاب) چقدر بوده است؟ پاسخ را برحسب $g$ بیان کنید.

۶۷. جسمی از حالت سکون رها می‌شود و نیمی از کل مسیر خود را در آخرین ثانیهٔ سقوط آزادش می‌پیماید. (الف) زمان و (ب) ارتفاع این سقوط چقدر بوده است؟ دربارهٔ جواب غیرقابل قبول معادلهٔ درجهٔ دومی که به‌دست می‌آورید توضیح بدهید.

۶۸. دو جسم، از یک ارتفاع و از حالت سکون، به حالت آزاد سقوط می‌کنند. سقوط جسم دوم زمانی شروع می‌شود که اولی ۱٫۰۰s از آن جلوتر است. چه مدت پس از شروع سقوط جسم اول، فاصلهٔ دو جسم از یکدیگر به ۱۰٫۰m می‌رسد؟

۶۹. کلارا، و کمی پس از او جیم، از یک پل به پایین پریده‌اند؛ شکل ۳۴. جیم چه مدت بعد از کلارا پریده است؟ فرض کنید که قد جیم ۱۷۰cm است و سطح پرش را لبهٔ بالایی شکل بگیرید. فاصله‌ها را از روی شکل بسنجید.

شکل ۳۴. مسئلهٔ ۶۹

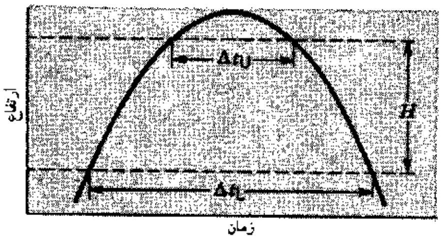
۷۰. بالونی با سرعت ۱۲٫۴m/s در ارتفاع ۸۱٫۳m از سطح زمین به طرف بالا حرکت می‌کند. در این لحظه، بسته‌ای از آن رها می‌شود. (الف) این بسته با چه سرعتی به زمین می‌خورد؟ و (ب) چقدر طول می‌کشد تا به زمین برسد؟

۷۱. چتربازی پس از پرش از هلی‌کوپتر، ۵۲٫۰m بدون اصطکاک سقوط می‌کند. سپس چترش را باز می‌کند و با شتاب کند کنندهٔ ۲٫۱۰m/s² به حرکتش ادامه می‌دهد، تا اینکه با سرعت ۲٫۹۰m/s به زمین می‌رسد. (الف) این چترباز چه مدت در هوا بوده و (ب) سقوط او از چه ارتفاعی شروع شده است؟

۷۲. یک توپ سربی از تختهٔ پرشی که ۲٫۶m بالاتر از سطح آب استخر قرار دارد به آب می‌افتد. توپ با سرعت معینی بر سطح آب می‌خورد و تمام مسافت زیر آب را با همین سرعت می‌پیماید. وقتی توپ به کف استخر می‌رسد ۰٫۹۷s از شروع سقوط گذشته است. (الف) عمق استخر چقدر است؟ (ب) فرض کنید استخر را از آب خالی کنیم و توپ را از همان تختهٔ پرش چنان پرتاب کنیم که باز هم ۰٫۹۷s بعد به کف استخر برسد. توپ با چه سرعت اولیه‌ای پرتاب شده است؟

۷۳. اندازه‌گیری شتاب $g$ در "آزمایشگاه ملی فیزیک" در انگلستان (که کارش تحقیق دربارهٔ استانداردهاست) به این ترتیب انجام شده است که یک گلولهٔ شیشه‌ای را در یک لولهٔ خلأ مستقیماً به بالا پرتاب می‌کنند. گلوله بالا می‌رود و برمی‌گردد؛ نگاه کنید به شکل ۳۵. فرض کنید $\Delta t_L$ زمان بین دو بار عبور گلوله از یک نقطه در پایین لوله، و $\Delta t_U$ زمان بین دو بار عبور گلوله از یک نقطه در بالای لوله باشد. فاصلهٔ بین این دو نقطه، $H$ است. نشان بدهید که

$$g = \frac{8H}{\Delta t_L^2 - \Delta t_U^2}$$




شکل ۳۵. مسئلهٔ ۷۳

۷۴. یک بولبرینگ فولادی از شیروانی ساختمانی (با سرعت اولیهٔ صفر) به پایین می‌افتد. ناظری که کنار پنجره‌ای به ارتفاع ۱۲۰cm ایستاده است، متوجه می‌شود که ۰٫۱۲۵s طول می‌کشد تا بولبرینگ از بالا تا پایین پنجره را طی کند. بولبرینگ به زمین می‌خورد، یک برخورد کاملاً کشسان با سطح پیاده‌رو انجام می‌دهد، و ۲٫۰s پس از اینکه از لبهٔ پایینی پنجره گذشته بود، دوباره به آنجا برمی‌گردد. ارتفاع ساختمان چقدر است؟ (اندازهٔ سرعت توپ، پس از برخورد کاملاً کشسان، همان اندازهٔ سرعت پیش از برخورد است.)

۷۵. شخصی که در انتهای اتاقی روبروی پنجره‌ای به ارتفاع ۱٫۱m ایستاده است مشاهده می‌کند که لنگه کفشی در نزدیکی سطح خارجی پنجره در راستای قائم صعود می‌کند و در مرز بالای پنجره از دید خارج می‌شود؛ سپس برمی‌گردد و در مرز پایین پنجره از دید خارج می‌شود. اگر کل زمانی که لنگه کفش در معرض دید است ۰٫۷۴s باشد، لنگه کفش تا چه ارتفاعی از لبهٔ بالایی پنجره بالاتر رفته است؟

# ۳

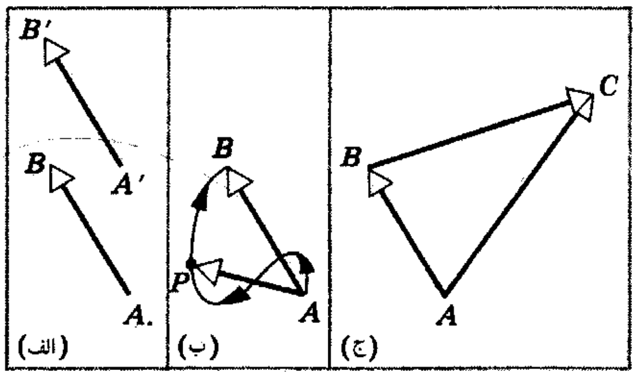
# بردارها

در خیلی از قوانین فیزیک، بین کمیتها نه تنها روابط جبری بلکه روابط هندسی هم ظاهر می‌شوند. مثلاً مجسم کنید فرفره‌ای را که دارد به سرعت حول محورش می‌چرخد و در همین حال خود محور دوران هم به کندی حول راستای قائم دِر گردش است. نمایش این ارتباطِ هندسی با معادلات جبری مشکل است. اما با استفاده از نمایش برداریِ متغیرهای فیزیکی، تنها یک معادله برای توصیف رفتار فرفره کافی است، به کمک بردارها می‌شود بسیاری از قوانین فیزیک را به‌صورت موجزتری بیان کرد. گاهی در شکل برداریِ قوانین فیزیکی می‌توانیم ارتباطها یا تقارنهایی را ببینیم که دیدنشان در معادلات جبری، به‌خاطر پیچیدگی ظاهر این معادلات، دشوار است.

در این فصل، بعضی از ویژگیها و کاربردهای بردار را مطالعه می‌کنیم و با عملیات ریاضی مربوط به بردارها آشنا می‌شویم. خواهیم دید که نمادهای آشنای حساب، مثل $+$، $-$، و $\times$، در مورد بردارها معنی متفاوتی پیدا می‌کنند.

## ۳ـ۱ بردار و اسکالر

تغییر مکان ذره را جابه‌جایی می‌نامند. اگر ذره از نقطهٔ $A$ به نقطهٔ $B$ برود (شکل ۱الف)، جابه‌جایی آن‌را می‌توانیم با کشیدن خطی از $A$ به $B$ نشان بدهیم. برای نمایش جهت این جابه‌جایی می‌توانیم در نقطهٔ $B$ یک علامت پیکان بگذاریم، تا معلوم شود که جابه‌جایی از $A$ به $B$ بوده است. لزومی ندارد که مسیر ذره از $A$ به $B$ خط راست بوده




شکل۱. بردارهای جابه‌جایی. (الف) بردارهای $AB$ و $A'B'$ یکسان‌اند زیرا طول و جهت آنها یکی است. (ب) مسیر واقعی ذره از $A$ به $B$ می‌تواند به شکل این منحنی باشد، اما جابه‌جایی، بردار $AB$ است. جابه‌جایی تا نقطهٔ میانی $P$، بردار $AP$ است. (ج) پس از جابه‌جایی $AB$، ذره یک جابه‌جایی دیگر، $BC$، هم پیدا می‌کند. اثر کلی این دو جابه‌جایی، بردار $AC$ است.

باشد؛ پیکان تنها اثر کلی و نهایی حرکت را نشان می‌دهد نه جزئیات حرکت واقعی را.

شکل ۱ب، مسیر واقعی یک ذره از $A$ تا $B$ را نشان می‌دهد. این مسیر با خط $AB$ فرق دارد. اگر می‌توانستیم از ذره درنقطهٔ $A$، و مدتی بعد در یکی از نقاط میانی مسیر مثل $P$ عکس بگیریم، بردار جابه‌جایی $AP$ را به‌دست می‌آوردیم که حرکت کلی را در این بازهٔ زمانی نشان می‌دهد، اگرچه دربارهٔ مسیر واقعی حرکت از $A$ تا $P$ چیزی نمی‌گوید. به‌علاوه، جابه‌جایی‌ای مثل $A'B'$ (شکل ۱الف) که موازی، هم‌جهت، و هم‌طول با $AB$ باشد نیز نمایندهٔ تغییر مکانی درست مثل $AB$ است. بین این دو جابه‌جایی تمایزی قائل نمی‌شویم. بنابراین، جابه‌جایی با طول و جهت مشخص می‌شود.

به‌همین ترتیب می‌توان جابه‌جایی بعدی ذره از $B$ به $C$ را نشان داد (شکل ۱ج). اثر کلی دو جابه‌جایی معادل با یک جابه‌جایی از $A$ به $C$ است. می‌گوییم که $AC$ جمع یا برایند دو جابه‌جایی $AB$ و $BC$ است. توجه کنید که این جمع، جمع جبری نیست و تنها با یک عدد مشخص نمی‌شود.

کمیتهایی را‌که مثل جابه‌جایی رفتار می‌کنند بردار می‌نامیم. بنابراین، بردارها کمیتهایی هستند که جهت و اندازه دارند و طبق قواعد معینی (که شرح خواهیم داد) با هم ترکیب می‌شوند. بردار جابه‌جایی نمونهٔ خوبی برای بردارهاست. کمیتهای فیزیکی دیگری هم هستند که آنها

را با بردار نشان می‌دهند: مثلاً نیرو، سرعت، شتاب، میدان الکتریکی، و میدان مغناطیسی. بسیاری از قوانین فیزیک را می‌توان، با استفاده از بردار، به شکل جمع‌وجور نوشت. نمایش برداری، عملیات شامل این قوانین را هم اغلب بسیار ساده‌تر می‌کند.

بعضی کمیتها را می‌توان با یک عدد و یک یکا به طور کامل مشخص کرد. چنین کمیتهایی را، که تنها مقدار دارند، اسکالر می‌نامند. از جملهٔ کمیتهای فیزیکی اسکالر، می‌توان از جرم، طول، زمان، چگالی، انرژی، و دما نام برد. با اسکالرها می‌توان طبق قوانین جبر معمولی کار کرد.

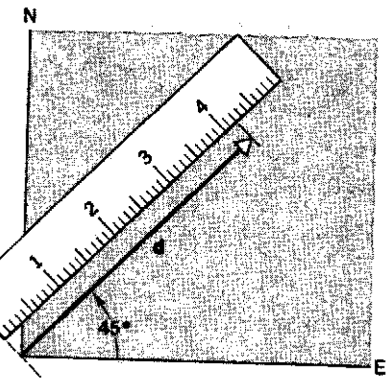
## ۲ـ۳ جمع بردارها: روش نموداری

برای نمایش بردار در نمودارها، یک پیکان می‌کشیم. طول پیکان باید متناسب با اندازهٔ بردار باشد (یعنی باید یک مقیاس انتخاب کنیم). راستای خط، راستای بردار است و جهت پیکان هم جهت بردار را مشخص می‌کند. مثلاً جابه‌جایی ۴۲m در جهت شمال شرقی را می‌توان در مقیاس ۱cm به‌ازای ۱۰m، با پیکانی به طول ۴٫۲cm نشان داد که با جهت شرق زاویهٔ °۴۵ به‌طرف بالا می‌سازد. نوک پیکان در انتهای بالای خط است (شکل ۲). بردارها را در متن‌های چاپی معمولاً با حروف سیاه نشان می‌دهند، مثلاً **d**. در دستنویسها برای مشخص کردن کمیتهای برداری معمولاً یک علامت پیکان بالای نماد آنها می‌گذارند. مثلاً $\vec{d}$.

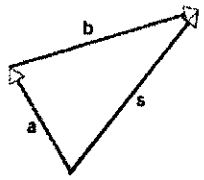
خیلی وقتها فقط اندازه (یا طول) بردار برای ما مهم است نه جهت آن. اندازهٔ **d** گاهی با $|\mathbf{d}|$ نشان داده می‌شود؛ ما در بیشتر موارد، اندازه را با شکل ایتالیک نماد، $d$، نشان می‌دهیم. نمادِ سیاه، هر دو ویژگی بردار، هم اندازه و هم جهت، را نشان می‌دهد. در متون دستنویس، اندازهٔ بردار را معمولاً با نماد بدون پیکان نشان می‌دهند.

اکنون شکل ۳ را در نظر بگیرید که در آن همان بردارهای شکل ۱ج را با اسامی دیگر آورده‌ایم. رابطهٔ بین این بردارها را می‌توان چنین نوشت

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{s} \qquad (۱)$$




شکل۲. بردار **d** نشاندهندهٔ یک جابه‌جایی به اندازهٔ ۴۲m (در مقیاس ۱cm = ۱۰m) در جهت °۴۵ شمالِ‌شرقی است.




شکل۳. جمع برداری $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{s}$. این شکل را با شکل ۱ج مقایسه کنید.

قواعد جمع برداری به روش نموداری اینها هستند: (۱) بردار **a** را، در مقیاس مناسب، در جهت مورد نظر نسبت به محورهای مختصات رسم می‌کنیم. (۲) بردار **b** را با همان مقیاس و در جهت مناسب طوری رسم می‌کنیم که دُم آن در سر **a** باشد (جهت بردارها گاهی ممکن است یکی باشد). (۳) از دم **a** خطی به سر **b** می‌کشیم. به این‌ترتیب، بردار برایند **s** (یعنی جمع دو بردار) به‌دست می‌آید. اگر **a** و **b** بردارهای جابه‌جایی باشند، **s** هم یک جابه‌جایی است که معادل با دو جابه‌جایی متوالی **a** و **b** است. با تعمیم این روش می‌توان جمع چند بردار را هم به‌دست آورد.

از آنجا که بردارها با اعداد معمولی فرق می‌کنند، انتظار داریم عملیاتِ مربوط به آنها هم قواعد متفاوتی داشته باشند. معنی علامت " + " درمعادلهٔ ۱، با معنی این علامت در حساب یا جبر اسکالرها متفاوت است؛ این علامت، در مورد بردارها، به معنی انجام عملیاتی است که با عملیات مربوط به اسکالرها تفاوت دارد.

از بررسی دقیق شکل ۴، دو ویژگی مهم جمع برداری معلوم می‌شود:

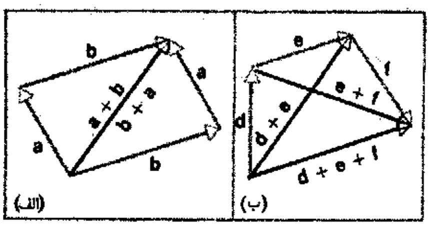
$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a} \quad \text{(قانون جابه‌جایی)} \qquad (۲)$$

و

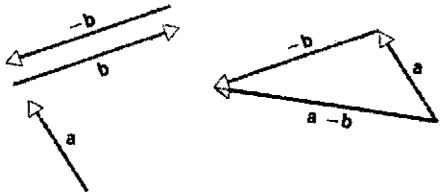
$$\mathbf{d}+(\mathbf{e}+\mathbf{f})=(\mathbf{d}+\mathbf{e})+\mathbf{f} \quad \text{(قانون شرکت‌پذیری)} \qquad (۳)$$

معنی این قوانین آن است که ترتیب یا نوع گروه‌بندی بردارها، اثری در نتیجهٔ جمع برداری ندارد. از این نظر، جمع برداری و جمع اسکالر شبیه به‌هم‌اند.

از شکل ۴ب، طرز استفاده از روش نموداری برای جمع بیش از دو بردار ـــ در این مورد $\mathbf{d}+\mathbf{e}+\mathbf{f}$، معلوم می‌شود: دم هر بردار را




شکل۴. (الف) قانون جابه‌جایی جمع برداری: $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$. (ب) قانون شرکت‌پذیری جمع برداری: $\mathbf{d}+(\mathbf{e}+\mathbf{f})=(\mathbf{d}+\mathbf{e})+\mathbf{f}$.



شکل۵. نمایش تفاضل دو بردار: $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$.

روی سر بردار قبلی می‌گذاریم. بردار مجموع، برداری است که از دم بردار اول به سر بردار آخر رسم می‌شود.

با تعریف قرینهٔ بردار (یا منفی بردار)، می‌توان عمل تفریق را هم وارد جبر برداری کرد. قرینهٔ هر بردار، بردار دیگری است با همان طول اما در جهت مخالف. در این صورت، تفاضل دو بردار را این‌طور تعریف می‌کنیم (شکل ۵):

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b}) \tag{۴}$$

$-\mathbf{b}$ برداری به اندازهٔ بردار $\mathbf{b}$ و در خلاف جهت آن است. از معادلهٔ ۴ معلوم می‌شود که $\mathbf{a}-\mathbf{a}=\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=0$.

ما برای نشان دادن این عملیات از جابه‌جایی استفاده کردیم، اما به‌یاد داشته باشید که، این قواعد برای همهٔ کمیتهای برداری ــ مثلاً سرعت، یا نیرو ــ به‌کارمی‌روند.

## ۳ـ۳ مؤلفه‌های بردار

جمع برداری را با روش نموداری معرفی کردیم، اما این روش برای بردارهای سه‌بعدی چندان مفید نیست و خیلی وقتها حتی در حالت دوبعدی هم مشکلاتی دارد. روش دیگر جمع برداری، روش تحلیلی است. در این روش باید بردار را به مؤلفه‌هایش، نسبت به یک دستگاه مختصات خاص، تجزیه کرد.

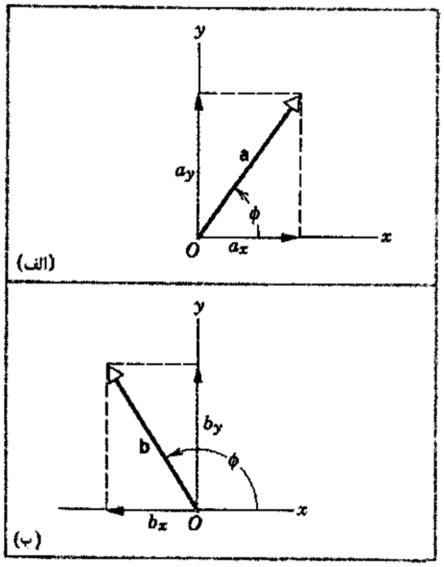
شکل ۶الف بردار $\mathbf{a}$ را نشان می‌دهد که دم آن روی مبدأ دستگاه مختصات دکارتی است. از سر $\mathbf{a}$ دو خط‌عمود بر محورهای مختصات می‌کشیم. کمیتهای $a_x$ و $a_y$ را، که به این ترتیب به‌دست می‌آیند، مؤلفه‌های (دکارتی) بردار $\mathbf{a}$ می‌نامند. هم این کار تجزیهٔ بردار به مؤلفه‌هایش است. این مؤلفه‌ها، بردار $\mathbf{a}$ را به‌طورکامل و یکتا مشخص می‌کنند: با داشتن $a_x$ و $a_y$، به‌راحتی می‌شود بردار $\mathbf{a}$ را بازسازی کرد.

مؤلفه‌های بردار می‌توانند مثبت، منفی، یا صفرباشند. شکل ۶ب بردار $\mathbf{b}$ را نشان می‌دهد که برای آن $b_x<0$ و $b_y>0$ است.

روشن است که $a_x$ و $a_y$ از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$a_y=a\ \sin\ \phi \quad \text{و} \quad a_x=a\ \cos\ \phi \tag{۵}$$

در این روابط، $\phi$ زاویه‌ای است که بردار $\mathbf{a}$ با جهت مثبت محور $x$ می‌سازد؛ این زاویه در جهت پاد ساعتگرد اندازه‌گیری می‌شود. چنانکه از شکل ۶ دیده می‌شود، علامت جبری مؤلفه‌های بردار بستگی به این دارد که زاویهٔ $\phi$ درکدام ربع صفحهٔ مختصات باشد. مثلاً اگر $\phi$ بین $90^\circ$ و $180^\circ$ باشد (شکل ۶ب)، مؤلفهٔ $x$ بردار منفی و مؤلفهٔ $y$ آن مثبت خواهد بود. مؤلفه‌های بردار شبیه کمیتهای اسکالرند: در هر دستگاهِ مختصات، هرمؤلفه تنها با یک عدد و یک علامت جبری مشخص می‌شود.



شکل۶. (الف) مؤلفهٔ بردار $\mathbf{a}$ در جهت محور $x$، $a_x$ و مؤلفهٔ آن در جهت محور $y$، $a_y$ است. (ب) مؤلفهٔ $x$ بردار $\mathbf{b}$ منفی است.

برداری را که به مؤلفه‌هایش تجزیه شده باشد می‌توانیم با استفاده از خود این مؤلفه‌ها هم مشخص کنیم. دراین صورت به جای دو عدد $a$ (اندازهٔ بردار) و $\phi$ (جهت بردار نسبت به محور $x$) دو عدد دیگر $a_x$ و $a_y$ را دراختیار داریم. می‌شود از توصیف بردار برحسب مؤلفه‌هایش ($a_x$ و $a_y$) به توصیف آن برحسب اندازه و جهت ($a$ و $\phi$) رسید و بالعکس. این دو توصیف با هم معادل‌اند. با توجه به شکل ۶الف، می‌توانیم $a$ و $\phi$ را برحسب $a_x$ و $a_y$ به‌دست بیاوریم:

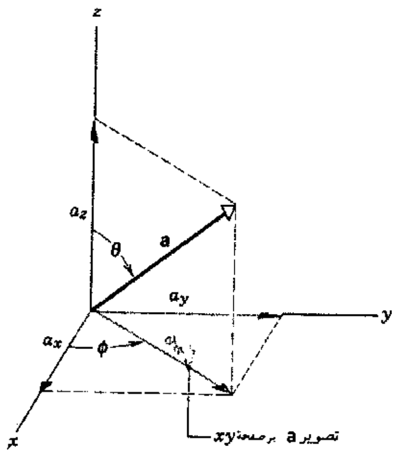
$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2} \tag{۶الف}$$

و

$$\tan\ \phi=a_y/a_x \tag{۶ب}$$

ربعی که $\phi$ در آن است از روی علامت $a_x$ و $a_y$ معین می‌شود.

در سه‌بعد هم، برای به‌دست آوردن مؤلفه‌ها همین کار را می‌کنیم: کافی است از سر بردار به هر یک از محورهای مختصات $x$، $y$، و $z$ خطی عمود کنیم. شکل ۷ نموداری است که به کمک آن تشخیص مؤلفه‌ها آسانتر می‌شود. ابتدا مؤلفه (یا تصویر) $\mathbf{a}$ را بر صفحهٔ $xy$ به‌دست می‌آوریم، و بعد مؤلفه‌های $a_x$ و $a_y$ را از تجزیهٔ این بردار تعیین می‌کنیم. البته می‌توانستیم به‌جای اینکه




شکل۷. بردار سه‌بعدی a، با مؤلفه‌های $a_x$، $a_y$، و $a_z$. مؤلفه‌های $x$ و $y$ را معمولاً از روی تصویر a بر صفحهٔ $xy$ به‌دست می‌آورند. زاویهٔ $\theta$ بین a و محور $z$ را زاویهٔ قطبی می‌نامند. زاویهٔ $\phi$ در صفحهٔ $xy$، بین تصویر a و محور $x$، زاویهٔ سمتی نامیده می‌شود. (زاویهٔ سمتی $\phi$ در اینجا هم همان مشخصاتی را دارد که در شکل ۶ داشت.)

با تصویر a در صفحهٔ $xy$ کار کنیم، مستقیماً خود a را روی سه محورتصویر کنیم، و دقیقاً همان مؤلفه‌ها را به‌دست بیاوریم، اما نمایش این کار درصفحه، به خوبی حالت قبل ممکن نیست. از روابط هندسی شکل ۷، مؤلفه‌های بردار a به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند

$$a_x = a \sin\theta \cos\phi, \qquad a_y = a \sin\theta \sin\phi, \qquad a_z = a \cos\theta \tag{۷}$$

در تجزیهٔ بردار به مؤلفه‌هایش، گاهی مفید است که برداری به طول یک در جهتی معین تعریف کنیم. اغلب راحت‌تر است که بردارهای یکه را در جهت محورهای دستگاه خاصی که به کار می‌بریم بگیریم. در دستگاه مختصات دکارتی، بردارهای یکه در جهت مثبت $x$، $y$، و $z$ را معمولاً، به‌ترتیب، با i، j، و k نمایش می‌دهند (شکل ۸). در نمادگذاری دستی، بردارهای یکه را معمولاً با "کلاه" مثل $\hat{\mathbf{i}}$، $\hat{\mathbf{j}}$، و $\hat{\mathbf{k}}$ مشخص می‌کنند.

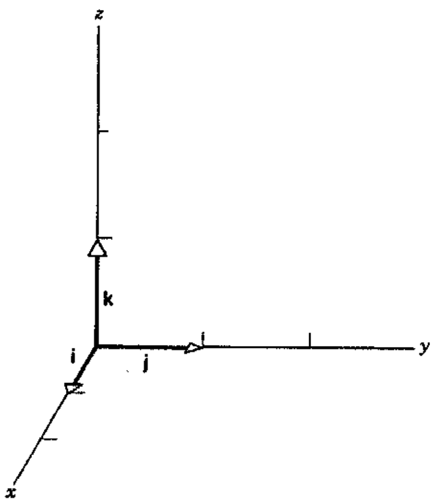
دقت کنید که لازم نیست i، j، و k در مبدأ باشند. اینها را هم، مثل بردارهای دیگر، می‌توانیم به هر کجای فضای مختصات که بخواهیم منتقل کنیم؛ تنها کافی است که جهتشان نسبت به محورهای مختصات تغییر نکند.

در حالت کلی، هر بردار a را در دستگاه مختصات سه‌بعدی می‌توان برحسب مؤلفه‌هایش و بردارهای یکه نوشت:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \tag{۸الف}$$

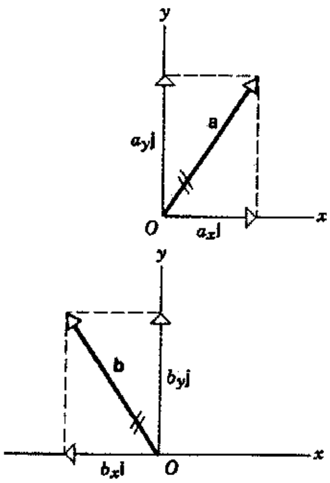
در دو بعد

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} \tag{۸ب}$$




شکل۸. بردارهای یکهٔ i، j، و k، که به ترتیب برای مشخص کردن جهت مثبت محورهای $x$، $y$، و $z$ به‌کارمی‌روند. این بردارها بدون بعدند و طولشان یک است.

معادلهٔ برداری ۸ب با روابط اسکالر معادلهٔ ۶ هم‌ارز است. هر دو معادله، بردار (a، یا $a$ و $\phi$) را به مؤلفه‌هایش ($a_x$ و $a_y$) مربوط می‌کنند. گاهی کمیتهای $a_x\mathbf{i}$ و $a_y\mathbf{j}$ در معادلهٔ ۸ب را مؤلفه‌های برداری a می‌نامیم. شکل ۹ بردارهای a و b شکل ۶ را برحسب مؤلفه‌های برداریشان نشان می‌دهد. با استفاده از مؤلفه‌های بردار به‌جای خود بردار، خیلی از مسائل فیزیک ساده می‌شوند. به این معنی که اثر یک کمیت برداری را می‌توان با اثر مؤلفه‌های برداری آن معادل گرفت. در آینده، هر جا لازم باشد، صریحاً به مؤلفه‌های برداری اشاره می‌کنیم؛ هر جا که واژهٔ مؤلفه را به



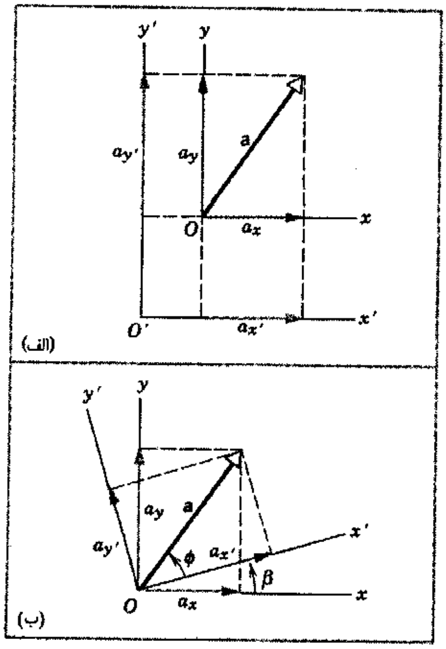

شکل۹. مؤلفه‌های‌برداری a و b. در همهٔ مسائل فیزیکی مربوط به بردارها، می‌توان خودِ بردار، مثلاً a، یا دو مؤلفهٔ برداری آن، $a_x\mathbf{i}$ و $a_y\mathbf{j}$ را به‌کار برد؛ نتیجه یکی است. اثر بردار a با اثر خالص دو بردار $a_x\mathbf{i}$ و $a_y\mathbf{j}$ معادل است. وقتی‌به‌جای یک بردار از مؤلفه‌هایش استفاده می‌کنیم، خوب است یک خط دوتایی روی خود بردار بزنیم تا یادمان باشد که دوباره آن‌را به‌حساب نیاوریم.

تنهایی به‌کار ببریم، منظورمان کمیتهای اسکالری از نوع $a_x$ و $a_y$ است.

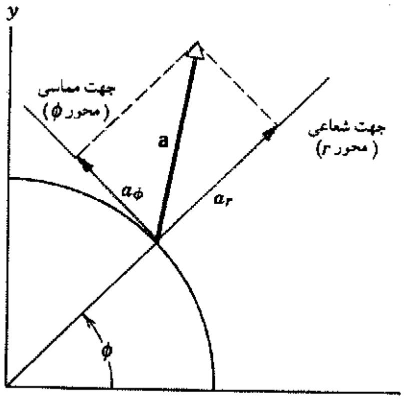
## دستگاههای مختصات دیگر (اختیاری)

دستگاههای مختصات دیگری هم هستند که ممکن است برای تحلیل شرایط فیزیکی معینی مفید باشند. مثلاً، دستگاه مختصات دوبعدی $xy$ را می‌توان به دو طریق تغییرداد: (۱) می‌توان مبدأ دستگاه مختصات را به محل دیگری در صفحهٔ $xy$ منتقل کرد که به این کار می‌گویند انتقال دستگاه مختصات، یا (۲) می‌توان محورهای $xy$ را حول مبدأ ثابت چرخاند، که عبارت است از دوران دستگاه مختصات. در هر مورد، بردار را ثابت نگه می‌داریم و محورهای مختصات را تغییر می‌دهیم. شکل ۱۰ اثر این دو تغییر را نشان می‌دهد. مؤلفه‌ها در مورد اول (شکل ۱۰الف) تغییر نمی‌کنند، اما در مورد دوم (شکل ۱۰ب) تغییر می‌کنند.

در شرایطی که وضعیت فیزیکی مورد نظر، تقارن خاصی دارد، شاید بهتر باشد دستگاه مختصات دیگری برای تجزیهٔ بردار به مؤلفه‌هایش انتخاب کنیم. مثلاً می‌شود جهتهای شعاعی و مماسی دستگاه مختصات قطبی را انتخاب کرد؛ شکل ۱۱. در این مورد هم، مؤلفه‌های روی هر محور را درست شبیه به دستگاه $xyz$ معمولی به‌دست می‌آوریم؛ یعنی از سر بردار به هر محور خطی عمود می‌کنیم.




شکل۱۰. (الف) مبدأ $O$ دستگاه مختصات شکل ۶الف به نقطهٔ $O'$ رفته یا منتقل شده است. مؤلفه‌های $x$ و $y$ بردار **a** با مؤلفه‌های $x'$ و $y'$ آن برابرند. (ب) محورهای $x$ و $y$ به‌اندازهٔ زاویهٔ $\beta$ چرخیده‌اند. مؤلفه‌های $x'$ و $y'$ با مؤلفه‌های $x$ و $y$ متفاوت‌اند (دقت کنید که مؤلفهٔ $y'$ در این مورد از مؤلفهٔ $x'$ کوچکتر است، در حالی‌که در شکل ۶الف مؤلفهٔ $y$ از مؤلفهٔ $x$ بزرگتر بود)، اما بردار **a** عوض نشده است. محورهای مختصات را به اندازهٔ چه زاویه‌ای باید چرخاند تا مؤلفهٔ $y'$ صفر شود؟




شکل۱۱. تجزیهٔ بردار **a** به مؤلفه‌های شعاعی و مماسی. این مؤلفه‌ها کاربرد زیادی در بررسی حرکت دایره‌ای (فصلهای ۴ و ۱۱) دارند.

تعمیمهای سه‌بعدی شکل ۱۱ (مختصات استوانه‌ای یا کروی)، در تحلیل بسیاری از موارد مهم فیزیکی، برتری چشمگیری بر دستگاه مختصات دکارتی دارند. مثلاً نیروی گرانشی زمین که بر اجسام دور وارد می‌شود تقارن کروی دارد. بنابراین، توصیف خواص آن در مختصات کروی بسیار ساده‌تراست. نیروی مغناطیسی حاصل از سیمهای بلند و راست حامل جریان تقارن استوانه‌ای دارد. پس، توصیف آن در مختصات استوانه‌ای ساده‌تر می‌شود.

## ۴ـ۳ جمع بردارها: روش مؤلفه‌ای

دیدیم که چگونه بردارها را به مؤلفه‌هایشان تجزیه می‌کنیم. اکنون جمع برداری را با یک روش تحلیلی بررسی می‌کنیم.

فرض کنید که **s** جمع بردارهای **a** و **b** باشد:

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \qquad (۹)$$

اگر دو بردار، مثل **s** و $\mathbf{a}+\mathbf{b}$، با هم برابر باشند، باید اندازه‌شان یکی باشد و در یک جهت باشند. چنین چیزی تنها وقتی ممکن است که مؤلفه‌های متناظر آنها یکسان باشد. بر این نتیجه‌گیری مهم تأکید می‌کنیم:

- دو بردار فقط به شرطی با هم برابرند که مؤلفه‌های نظیرشان با هم برابر باشند.

درمورد بردارهای معادلهٔ ۹، می‌توان چنین نوشت

$$\begin{aligned} s_x\mathbf{i} + s_y\mathbf{j} &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} \\ &= (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

از برابر گرفتن مؤلفه‌های $x$ در دو طرف معادلهٔ ۱۰ نتیجه می‌شود که

$$s_x = a_x + b_x \qquad (۱۱\text{الف})$$

و برای مؤلفه‌های $y$ نتیجه می‌شود که

$$s_y = a_y + b_y \qquad (۱۱\text{ب})$$

مجموعهٔ این دو معادلهٔ جبری با تک رابطهٔ برداری معادلهٔ ۹ هم‌ارز است.

به‌جای مشخص کردن مؤلفه‌های s، می‌توان طول وجهت آن‌را مشخص کرد:

$$s = \sqrt{s_x^{۲} + s_y^{۲}} = \sqrt{(a_x + b_x)^{۲} + (a_y + b_y)^{۲}} \qquad (۱۲\text{الف})$$

و

$$\tan\phi = \frac{s_y}{s_x} = \frac{a_y + b_y}{a_x + b_x} \qquad (۱۲\text{ب})$$

قاعدهٔ جمع برداری با این روش از این قرار است. (۱) هر بردار را به مؤلفه‌هایش تجزیه می‌کنیم و علامت جبری هر مؤلفه را هم در نظر می‌گیریم. (۲) مؤلفه‌های مربوط به هر محور را، با در نظرگرفتن علامت جبری‌شان، با هم جمع می‌کنیم. (۳) مجموعهایی که به این ترتیب حاصل می‌شوند، مؤلفه‌های بردار مجموع‌اند. با داشتن مؤلفه‌های بردارِ مجموع، به‌راحتی می‌شود آن‌را در فضا بازسازی کرد.

جمع‌کردن بردارها با روش تجزیه به مؤلفه‌ها (به‌جای جمع مستقیم خود بردار با استفاده از روابط مثلثاتی) این مزیت را دارد که در آن همیشه با مثلثهای قائم‌الزاویه سروکار داریم، و این محاسبات را ساده می‌کند.

در جمع برداری به روش مؤلفه‌ای، با انتخابِ به‌جای محورهای مختصات می‌توان کار را ساده‌تر کرد. بعضی وقتها، مؤلفه‌های بردار را نسبت به یک دسته محورهای خاص از همان ابتدا می‌دانیم؛ در این صورت، محورهایی که باید انتخاب کرد واضح است. در موارد دیگر با انتخاب معقول محورها می‌توانیم کار تجزیهٔ بردار به مؤلفه‌ها را بسیار راحت‌تر کنیم. مثلاً محورها را می‌توان چنان انتخاب کرد که لااقل یکی از بردارها با یک محور موازی باشد؛ در این صورت، مؤلفه‌های آن بردار در راستای محورهای دیگر صفر می‌شوند.

---

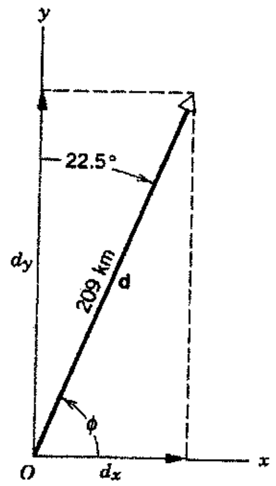
مثال ۱. هواپیمایی ۲۰۹km روی خط راستی در جهت ۲۲٫۵° شرقی نسبت به شمال می‌پیماید. این هواپیما از مبدأ خود چقدر به شمال و چقدر به شرق رفته است؟

حل: جهت مثبت محور $x$ را جهت شرق و جهت مثبت محور $y$ را جهت شمال اختیار می‌کنیم. بردار جابه‌جایی (شکل ۱۲) یا از مبدأ (نقطهٔ شروع)، با زاویهٔ ۲۲٫۵° نسبت به محور $y$ (شمال) متمایل به جهت مثبت محور $x$ (شرق) می‌کشیم. طول بردار، اندازهٔ ۲۰۹km را نشان می‌دهد. این بردار را $\mathbf{d}$ می‌نامیم؛ $d_x$ مسافت پیموده شده به طرف شرق و $d_y$ مسافت پیموده شده به طرف شمال است. داریم

$$\phi = ۹۰٫۰° - ۲۲٫۵° = ۶۷٫۵°$$

بنابراین (از معادلهٔ ۵)

$$d_x = d\cos\phi = (۲۰۹\text{km})(\cos ۶۷٫۵°) = ۸۰٫۰\text{km}$$




شکل۱۲. مثال ۱.

و

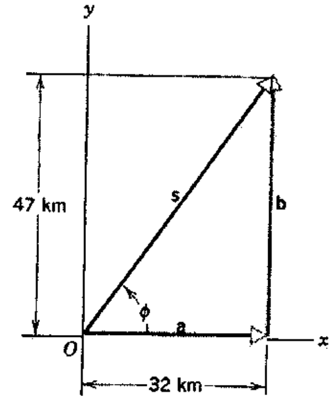
$$d_y = d\sin\phi = (۲۰۹\text{km})(\sin ۶۷٫۵°) = ۱۹۳\text{km}$$

در این مثال مؤلفه‌های دکارتی را به‌کار بردیم، گرچه سطح زمین خمیده است و نمی‌تواند دکارتی باشد. مثلاً، هواپیمایی که از استوا در جهت شمال شرقی شروع به پرواز کند، سرانجام به نقطه‌ای می‌رسد که در شمال نقطهٔ شروع حرکت است؛ چنین چیزی هرگز نمی‌تواند در دستگاههای مختصات تخت رخ بدهد. به همین ترتیب، دو هواپیما که از دو نقطهٔ متفاوت روی استوا، همزمان با سرعت یکسان، به طرف شمال (در مسیرهایی موازی با هم) پرواز کنند. سرانجام در قطب شمال به هم برمی‌خورند. این هم در دستگاههای مختصات تخت غیرممکن است. اما اگر محاسبات ما محدود به فواصلی باشد که در مقایسه با شعاع زمین (۶۴۰۰km) کوچک‌اند، با خیال آسوده می‌توانیم مختصات دکارتی را برای تحلیل جابه‌جاییهای روی سطح زمین به‌کار ببریم.

مثال ۲. اتومبیلی در یک جادهٔ تخت ۳۲km به طرف شرق می‌رود. سپس در یک تقاطع به سوی شمال می‌پیچد و ۴۷km در آن جهت طی می‌کند. جابه‌جایی کل این اتومبیل را پیدا کنید.

حل: یک دستگاه مختصات ثابت نسبت به زمین اختیار می‌کنیم. جهت مثبت $x$ آن‌را به طرف شرق، و جهت مثبت $y$ آن‌را به طرف شمال می‌گیریم. شکل ۱۳، دو جابه‌جایی متوالی $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را نشان می‌دهد. جابه‌جایی کل $\mathbf{s}$، از $\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ به‌دست می‌آید. چون $\mathbf{b}$ در راستای $x$ و $\mathbf{a}$ در راستای $y$ مؤلفه‌ای ندارند، از معادلات ۱۱ نتیجه می‌شود که

$$s_x = a_x + b_x = ۳۲\text{km} + ۰ = ۳۲\text{km}$$
$$s_y = a_y + b_y = ۰ + ۴۷\text{km} = ۴۷\text{km}$$




شکل۱۳. مثال ۲.

به‌این ترتیب، اندازه و جهت s (از معادلهٔ ۱۲) عبارت است از

$$s = \sqrt{s_x^۲ + s_y^۲} = \sqrt{(۳۲\text{km})^۲ + (۴۷\text{km})^۲} = ۵۷\text{km}$$

$$\tan\phi = \frac{s_y}{s_x} = \frac{۴۷\text{km}}{۳۲\text{km}} = ۱٫۴۷, \quad \phi = \tan^{-۱}(۱٫۴۷) = ۵۶^\circ$$

پس، اندازهٔ بردار جابه‌جایی کل برابر با ۵۷km، و جهت آن °۵۶ به‌طرف شمالِ شرق است.

مثال ۳. سه بردار که در یک صفحه واقع شده‌اند، در یک دستگاه مختصات دکارتی عبارت‌اند از

$$\mathbf{a} = ۴٫۳\mathbf{i} - ۱٫۷\mathbf{j}$$
$$\mathbf{b} = -۲٫۹\mathbf{i} + ۲٫۲\mathbf{j}$$

و

$$\mathbf{c} = -۳٫۶\mathbf{j}$$

یکای مؤلفه‌ها یکسان است. بردار برایند s، یعنی جمع این سه بردار را پیدا کنید.

حل: معادلات ۱۱ را به مورد سه بردار تعمیم می‌دهیم؛ نتیجه می‌شود که

$$s_x = a_x + b_x + c_x = ۴٫۳ - ۲٫۹ + ۰ = ۱٫۴$$

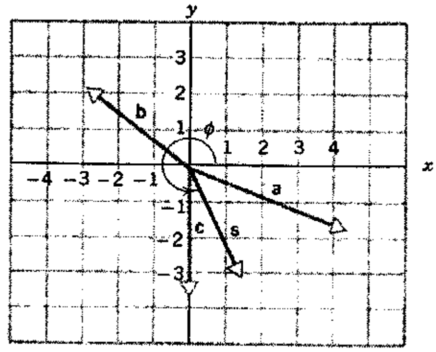
و

$$s_y = a_y + b_y + c_y = -۱٫۷ + ۲٫۲ - ۳٫۶ = -۳٫۱$$

بنابراین

$$\mathbf{s} = s_x\mathbf{i} + s_y\mathbf{j} = ۱٫۴\mathbf{i} - ۳٫۱\mathbf{j}$$

شکل ۱۴ همهٔ این بردارها را نشان می‌دهد. با استفاده از معادلات ۶




شکل۱۴. مثال ۳.

معلوم می‌شود که اندازهٔ s برابر با ۳٫۴ است و زاویهٔ $\phi$ که s با جهت مثبت $x$ می‌سازد عبارت است از

$$\phi = \tan^{-۱}(-۳٫۱/۱٫۴) = ۲۹۴^\circ$$

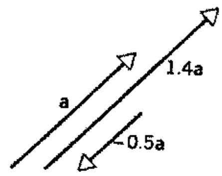
که پادساعتگرد از جهت $+x$ اندازه‌گیری می‌شود. خیلی از ماشین حسابهای جیبی، جواب arctan را بین °۹۰+ و °۹۰− می‌دهند. مثلاً در مورد این مثال °۶۶− (از ماشین حساب) به‌دست می‌آید که می‌دانیم با °۲۹۴ هم‌ارز است. اما توجه کنید که اگر می‌خواستیم $\tan^{-۱}(۳٫۱/-۱٫۴)$ را حساب کنیم باز هم همین جواب را می‌گرفتیم، در حالی که باید زاویه‌ای در ربع دوم به‌دست بیاوریم. در این نوع مسائل اگر شکلی نظیر شکل ۱۴ بکشیم جلوی اشتباه گرفته می‌شود، و در صورت لزوم می‌توانیم مقدار حاصل از ماشین حساب را، با استفاده از اتحاد $\tan(-\phi) = \tan(۱۸۰^\circ - \phi)$، به زاویه‌ای تبدیل کنیم که در ربع درست واقع شده است.

## ۳ـ۵ ضرب بردارها

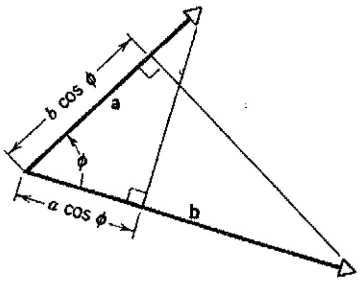
وقتی کمیتهای اسکالر را با هم جمع می‌کنیم، همهٔ آنها باید ابعاد یکسانی داشته باشند، و بعد حاصل‌جمع آنها هم همان خواهد بود. این قاعده در جمع برداری هم هست. اما می‌شود کمیتهای اسکالر با ابعاد متفاوت را در هم ضرب کرد، و حاصلی به‌دست آورد که ابعاد آن (یعنی حاصل‌ضربِ ابعاد عوامل ضرب) با ابعاد هر یک از عوامل اولیه تفاوت دارد؛ مثلاً فاصله = سرعت × زمان.

مثل اسکالرها، بردارهایی از انواع متفاوت را هم می‌توان در هم ضرب کرد وکمیتی با بعد جدید به‌دست آورد. چون بردار علاوه بر اندازهٔ جهت هم دارد، ضرب بردارها نمی‌تواند دقیقاً مثل ضرب اسکالرها باشد. برای ضرب بردارها باید قواعد دیگری داشته باشیم.

سه نوع عمل ضرب برای بردارها تعریف می‌کنیم: (۱) ضرب اسکالر در بردار، (۲) ضرب دو بردار در هم، چنانکه حاصل ضرب اسکالر باشد. و (۳) ضرب دو بردار درهم، چنانکه حاصل‌ضرب هم بردار باشد. امکانات دیگری هم وجود دارد که در اینجا بررسی نمی‌کنیم.




شکل۱۵. ضرب اسکالر $c$ در بردار **a**، بردار $c$**a** را می‌دهد که اندازهٔ آن $|c|$ برابر اندازهٔ **a** است. جهت $c$**a** همان جهت **a** است اگر $c$ مثبت باشد، و خلاف جهت **a** است اگر $c$ منفی باشد. در این شکل $c = +1{,}4$ و $c = -0{,}5$ مثال زده شده است.




شکل۱۶. حاصل‌ضرب اسکالر $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ (یعنی $ab\ \cos\ \phi$) درواقع حاصل‌ضرب اندازهٔ یک بردار (مثلاً $a$) و مؤلفهٔ بردار دیگر در جهت بردار اولی ($b\ \cos\ \phi$) است.

۱. ضرب اسکالر در بردار. معنی ضرب اسکالر در بردار ساده است: حاصل‌ضرب اسکالر $c$ در بردار **a**، که با $c$**a** نشانش می‌دهیم، طبق تعریف، برداری است که اندازهٔ آن $|c|$ برابر اندازهٔ بردار **a** است. جهت $c$**a** همان جهت **a** است اگر $c$ مثبت باشد، و در خلاف جهت **a** است اگر $c$ منفی باشد(شکل ۱۵). برای تقسیم بردار بر اسکالر، در واقع بردار را در معکوس آن اسکالر ضرب می‌کنیم. اغلب، اسکالر مورد نظر یک عدد خالص نیست، بلکه کمیتی فیزیکی است که بعد و یکا دارد.

۲. ضرب دو بردار با حاصلِ اسکالر. حاصل‌ضرب اسکالر[1] دو بردار **a** و **b**، که با $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ نشانش می‌دهیم، طبق تعریف برابر است با

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\ \cos\ \phi \qquad (۱۳)$$

که در آن، $a$ اندازهٔ بردار **a**، $b$ اندازهٔ بردار **b**، و $\cos\ \phi$ کسینوس زاویهٔ بین دو بردار است (شکل ۱۶). به‌خاطر نقطهٔ بین **a** و **b**، این ضرب را ضرب نقطه‌ای **a** و **b** نیز می‌نامند و آن‌را "**a** نقطه **b**" می‌خوانند. حاصل‌ضرب نقطه‌ای مستقل از دستگاه مختصاتی است که انتخاب می‌شوند.

چون $a$ و $b$ اسکالرند و $\cos\ \phi$ عددی خالص است، حاصل‌ضرب اسکالر دو بردار هم اسکالر است. حاصل‌ضرب اسکالر دو بردار را می‌توان حاصل‌ضرب اندازهٔ یک بردار در مؤلفهٔ بردار دوم در جهت اولی در نظر گرفت، شکل ۱۶؛ پس این حاصل‌ضرب را می‌توان به‌صورت $a(b\ \cos\ \phi)$ یا به‌صورت $b(a\ \cos\ \phi)$ بیان کرد.

می‌توانستیم $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ را هر چیزی تعریف کنیم، مثلاً $a^{1/3}b^{1/4}\tan(\phi/2)$، اما چنین چیزی در فیزیک به درد نمی‌خورد. با تعریف معمول ضرب اسکالر، خیلی از کمیتهای مهم فیزیکی را می‌توانیم برحسب حاصل‌ضرب اسکالر دو بردار بیان کنیم، از جمله کار مکانیکی، انرژی پتانسیل گرانشی، پتانسیل الکتریکی، توان الکتریکی، و چگالی انرژی الکترومغناطیسی را در فصلهای بعدی همین کتاب، این کمیتها را برحسب همین حاصل‌ضرب تعریف خواهیم کرد.

اگر دو بردار برهم عمود باشند، حاصل‌ضرب نقطه‌ای آنها صفر می‌شود. با استفاده از تعریف ضرب نقطه‌ای، می‌توان روابط زیر را برای بردارهای یکهٔ دکارتی **i**، **j**، و **k** به‌دست آورد:

$$\begin{aligned}\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} &= 1\\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} &= 0\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

با استفاده از این روابط، حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو بردار **a** و **b** را در دستگاه مختصات سه‌بعدی $xyz$ می‌توانیم برحسب مؤلفه‌های این دو بردار بنویسیم (مسئلهٔ ۳۵):

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (۱۵)$$

۳. ضرب دو بردار با حاصلِ بردار. حاصل‌ضرب برداری،[2] دو بردار **a** و **b**، که به‌صورت $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ نشان داده می‌شود، بردار **c** است، $(\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b})$ چنانکه اندازهٔ آن، طبق تعریف، برابر است با

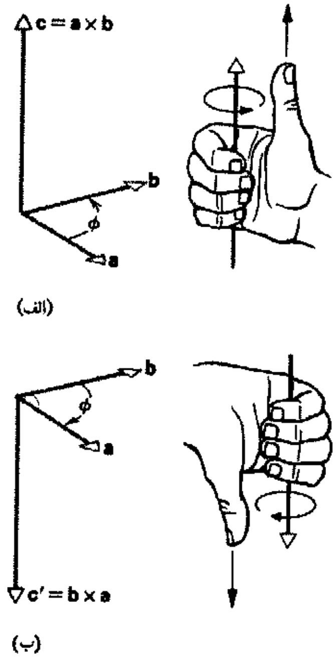
$$c = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = ab\ \sin\ \phi \qquad (۱۶)$$

که $\phi$ زاویهٔ (کوچک) بین **a** و **b** است. البته **a** و **b** با هم دو زاویهٔ متفاوت می‌سازند: یکی $\phi$ (شکل ۱۶) و دیگری $2\pi - \phi$، در عملیات برداری همیشه زاویهٔ کوچکتر را انتخاب می‌کنیم. برای حاصل‌ضرب اسکالر (معادلهٔ ۱۳) فرقی نمی‌کند که کدام بردار را انتخاب کنیم، چون $\cos(2\pi-\phi) = \cos\ \phi$ است. اما در معادلهٔ ۱۶ فرق می‌کند، چون $\sin(2\pi-\phi) = -\sin\ \phi$ است.

راستای **c**، حاصل‌ضرب برداری **a** و **b**، طبق تعریف بر صفحهٔ متشکل از **a** و **b** عمود است. برای تعیین جهت بردار **c** از "قاعدهٔ دست راست" (شکل ۱۷) استفاده می‌کنیم. دو بردار **a** و **b** بکشید که دم آنها روی هم باشد و محوری در نظر بگیرید که از مبدأ **a** و **b** بگذرد و بر صفحهٔ آنها عمود باشد. انگشتان دست راست را دور این محور بپیچید و بردار **a** را، از طریق زاویهٔ کوچکتر بین **a** و **b**، با نوک انگشتان به طرف بردار **b** بچرخانید؛ در این عمل شست را کشیده نگه دارید. جهت شست، جهت حاصل‌ضرب برداری $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ را نشان می‌دهد. این دستورالعمل، یک قرارداد است. دو بردار **a** و **b** یک صفحه تشکیل می‌دهند؛ دو جهت (مخالف) برای بردار **c** عمود بر این صفحه وجود دارد. انتخاب ما بر اساس قراردادِ دست راست

۱. به این ضرب "ضرب داخلی" هم می‌گویند. (و)

۲. به این ضرب "ضرب خارجی" هم می‌گویند. (و)




**شکل ۱۷.** قاعدۀ دست راست برای حاصل‌ضرب برداری. (الف) بردار $\mathbf{a}$ را با انگشتهای دست راست بچرخانید تا روی $\mathbf{b}$ بیفتد. شست شما جهت $\mathbf{c}$ را نشان می‌دهد. (ب) با عکس این عمل (چرخاندن $\mathbf{b}$ به سمت $\mathbf{a}$) معلوم می‌شود که $(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) = -(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

است. (قرارداد دست چپ، برای حاصل‌ضرب برداری جهتی مخالف جهت بالا می‌دهد.)

اگر $\phi$ برابر با $۹۰^\circ$ باشد، $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، و $\mathbf{c}$(یعنی $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$)، بر هم عمودند و جهتهای یک دستگاه مختصات قائم سه‌بعدی را مشخص می‌کنند.

دقت کنید که $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ با $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ فرق دارد، یعنی ترتیب عوامل در حاصل‌ضرب برداری مهم است. در حاصل‌ضرب اسکالر چنین نیست، زیرا ترتیب عوامل در جبر یا حساب اثری بر حاصل‌ضرب ندارد. در واقع، $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$ است (شکل ۱۷). این را از اینجا می‌توان فهمید که $ab\ \sin\ \phi$ با $ba\ \sin\ \phi$ برابر است، اما جهت $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ بر خلاف جهت $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ است. حاصل‌ضرب برداری هم، با توجه به تعریف بالا، مستقل از محورهای مختصاتی است که انتخاب می‌کنیم.

سه بردار یکۀ $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ در یک دستگاه مختصات راستگرد با رابطۀ $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$ به‌هم مربوط می‌شوند. (در واقع، به همین ترتیب است که مقصود از دستگاه راستگرد تعریف می‌شود. ما همواره از دستگاه مختصات راستگرد استفاده می‌کنیم، مگر آنکه خلاف آن را ذکر کنیم.) با حفظ ترتیب دوری $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$، می‌توانیم روابط $\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$ و $\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}$ را هم بنویسیم. اگر ترتیب دوری را عوض کنیم، یک علامت منفی وارد می‌شود، مثلاً $\mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k}$. حاصل‌ضرب برداری دو بردار یکۀ یکسال صفر است ($\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = ۰$)؛ در واقع، حاصل‌ضرب هر بردار درخودش صفر است ($\mathbf{a}\times\mathbf{a} = ۰$). با استفاده از این روابط برای حاصل‌ضرب برداری بردارهای یکۀ یکسان و متفاوت، می‌شود نشان داد (مسئلۀ ۳۶) که

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} = &(a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i}\\ &+ (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

علت اینکه حاصل‌ضرب برداری را این‌طور تعریف می‌کنیم آن است که چنین تعریفی در فیزیک مفید است. در فیزیک اغلب به کمیتهایی برمی‌خوریم که بردارند و حاصل‌ضرب برداری آنها، با تعریف بالا، معنی فیزیکی مهمی دارد. از جملۀ کمیتهایی که حاصل‌ضرب برداری‌اند می‌توانیم از گشتاور، تکانۀ زاویه‌ای، نیروی وارد بر بارهای متحرک در میدان مغناطیسی، و شار انرژی الکترومغناطیسی را نام ببریم. بعداً که این کمیتها را بررسی می‌کنیم، ارتباطشان با حاصل‌ضرب خارجی دو بردار را هم مشخص خواهیم کرد.

### حاصل‌ضربهای تعمیم‌یافتۀ بردارها (اختیاری)

حاصل‌ضرب اسکالر، ساده‌ترین حاصل‌ضرب دو بردار است. ترتیب عوامل بر این حاصل‌ضرب اثری ندارد. حاصل‌ضرب برداری در ردیف بعدی است. در این مورد ترتیب عوامل بر حاصل‌ضرب مؤثر است، اما این تأثیر تنها به‌صورت یک منهای یک است؛ اگر ترتیب عوامل را عوض کنیم، جهت حاصل‌ضرب هم عوض می‌شود. حاصل‌ضربهای مفید دیگری هم برای بردارها داریم که البته پیچیده‌ترند. مثلاً، با ضرب هر یک از سه مؤلفۀ یک بردار در سه مؤلفۀ برداری دیگر، می‌شود یک تانسور ساخت. به این ترتیب تانسور (از رتبۀ دو) با ۹ عنصر، بردار با سه عنصر، و اسکالر با یک عنصر مشخص می‌شوند. تنش مکانیکی، لختی دورانی، و کرنش از جمله کمیتهای فیزیکی‌اند که می‌توانیم آنها را با تانسور نمایش بدهیم. البته کمیتهای پیچیده‌تر از این هم می‌توانند در کار باشند، اما در این کتاب فقط با اسکالر و بردار سروکار خواهیم داشت.

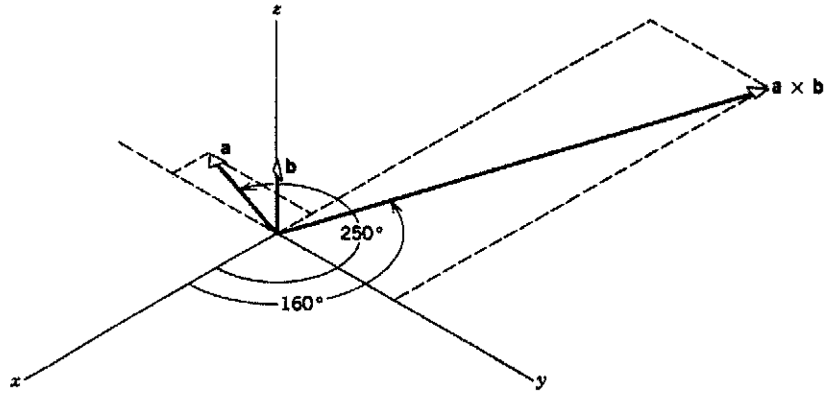
---

**مثال ۴.** بردار $\mathbf{a}$ درصفحۀ $xy$ در جهت $۲۵۰^\circ$ پادساعتگرد نسبت به جهت مثبت محور $x$ قرار دارد و اندازه آن ۷٫۴ واحد است. اندازۀ بردار $\mathbf{b}$ برابر با ۵٫۰ واحد، و جهت آن جهت مثبت محور $z$ است. (الف) حاصل‌ضرب اسکالر $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ و (ب) حاصل‌ضرب برداری $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ را به‌دست بیاورید.

حل: (الف) چون $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ برهم عمودند، زاویۀ $\phi$ بین آنها $۹۰^\circ$، و $\cos\ \phi = \cos ۹۰^\circ = ۰$ است. بنابراین، از معادلۀ ۱۳، حاصل‌ضرب اسکالر برابر است با

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\ \cos\ \phi = ab\ \cos\ ۹۰^\circ = (۷٫۴)(۵٫۰)(۰) = ۰$$

که با این امر که هیچ‌یک از این دو بردار، مؤلفه‌ای در راستای بردار دیگر ندارد.




شکل۱۸. مثال ۴.

(ب) اندازهٔ حاصل‌ضرب برداری از معادلهٔ ۱۶ به‌دست می‌آید:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \phi = (۷٫۴)(۵٫۰) \sin ۹۰^\circ = ۳۷$$

جهت حاصل‌ضرب برداری بر صفحهٔ متشکل از **a** و **b** عمود است. بنابراین، چنانکه در شکل ۱۸ نشان داده شده است، بردار حاصل‌ضرب در صفحهٔ $xy$ (عمود بر **b**)، و با زاویهٔ $۲۵۰^\circ - ۹۰^\circ = ۱۶۰^\circ$ نسبت به جهت مثبت محور $x$ واقع است (عمود بر **a** و طبق قاعدهٔ دست راست).

با استفاده از معادلهٔ ۱۷ می‌شود مؤلفه‌های $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ را به‌دست آورد. ابتدا باید مؤلفه‌های **a** و **b** را پیدا کنیم:

$$a_x = ۷٫۴ \cos ۲۵۰^\circ = -۲٫۵ \qquad b_x = ۰$$
$$a_y = ۷٫۴ \sin ۲۵۰^\circ = -۷٫۰ \qquad b_y = ۰$$
$$a_z = ۰ \qquad b_z = ۵٫۰$$

پس خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} =& [(-۷٫۰)(۵٫۰) - (۰)(۰)]\mathbf{i} \\ &+ [(۰)(۰) - (-۲٫۵)(۵٫۰)]\mathbf{j} \\ &+ [(-۲٫۵)(۰) - (-۷٫۰)(۰)]\mathbf{k} \\ =& -۳۵\mathbf{i} + ۱۳\mathbf{j} \end{aligned}$$

که با اندازه و جهت بردار حاصل‌ضرب در شکل ۱۸ سازگار است.

---

## ۳ـ۶ قوانین برداری در فیزیک[۱] (اختیاری)

شکل ۱۰ـب را در نظر بگیرید؛ می‌شود نشان داد (موضوع مسئلهٔ ۵۱) که رابطهٔ مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی **a** در دستگاه دوران‌یافته $(x'y')$ با مؤلفه‌های همین بردار در دستگاه اصلی $(xy)$ به‌صورت زیر است:

$$a_{x'} = a_x \cos \beta + a_y \sin \beta \qquad \text{(۱۸الف)}$$

$$a_{y'} = -a_x \sin \beta + a_y \cos \beta \qquad \text{(۱۸ب)}$$

در روابط بالا، $\beta$ زاویهٔ چرخش دستگاه جدید نسبت به دستگاه قدیم است.

معادلات ۱۸ مثالی از معادلات تبدیل‌اند، که مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی در یک دستگاه مختصات را به مؤلفه‌های آن در هر دستگاه دوران‌یافته تبدیل می‌کنند. با استفاده از این معادلات می‌شود تعریفی عامتر و دقیقتر برای بردار ارائه کرد. تا اینجا بردار را کمیتی فیزیکی تعریف کردیم که هم‌اندازه دارد و هم جهت، و عملیات با آن تابع قواعد خاصی است. اکنون، به‌جای این تعریف، تعریف مشخص‌تری ارائه می‌کنیم:

> هر کمیت فیزیکی (مثلاً سرعت یا نیرو) را می‌توان با بردار نشان داد اگر مؤلفه‌های آن، تحت دوران، طبق قواعد معادلات ۱۸ تبدیل شوند.

معادلات ۱۸ برای بردارهای فضای دوبعدی‌اند، اما می‌شود آنها را به سه‌بعد هم تعمیم داد. در هر حال همین مورد دوبعدی برای نشان دادن همهٔ مفاهیم اساسی کافی است.

چنانکه از شکل ۱۰ معلوم است، بردارها در اثر انتقال یا دوران محورهای مختصات تغییر نمی‌کنند یا ناوردا می‌مانند. کمیتهای فیزیکی معینی هستند که این خاصیت را دارند؛ مثلاً در مورد سرعت، شما و دوستتان، که در خانه‌ای در آن طرف خیابان است، هر دو یک سرعت برای اتومبیلی که از خیابان می‌گذرد به‌دست می‌آورید. (البته تا وقتی که خانه‌های شما نسبت به هم ساکن باشند!) کمیتهایی که چنین خواصی دارند، و از قواعد حساب برداری این فصل پیروی می‌کنند، با بردار نشان داده می‌شوند. از جملهٔ این کمیتها می‌توان از سرعت، شتاب، نیرو، تکانهٔ خطی، تکانهٔ زاویه‌ای، و میدانهای الکتریکی و مغناطیسی نام برد. معادلاتی که این کمیتها را به هم مربوط می‌کنند معادلات برداری‌اند؛ مثلاً $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = s$ ($s$ اسکالر است)، $\mathbf{a} + ۲\mathbf{b} = ۶\mathbf{c}$، $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$، و غیره. خیلی از کمیتهای فیزیکی هم با اسکالر و معادلات اسکالر توصیف می‌شوند، مثلاً دما، فشار، جرم، انرژی، و زمان. یکی از ویژگیهای معادلات برداری آن است که بین کمیتهای فیزیکی، نه تنها روابط ریاضی بلکه روابط هندسی هم برقرار می‌کنند.

---

۱. حذف این بخش لطمه‌ای به پیوستگی مطالب این فصل نمی‌زند.

حالا چند مثال می‌آوریم از معادلاتی که بعداً در همین کتاب به تفصیل بررسی‌شان خواهیم کرد؛ فعلاً این معادلات را تنها به عنوان مثالهایی از شکلهای اساسی مطرح می‌کنیم.

با قانون دوم نیوتون، $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$، شروع می‌کنیم (فصل ۵). این قانون، نیروی $\mathbf{F}$ لازم را، برای اینکه ذره‌ای به جرم $m$ شتاب $\mathbf{a}$ پیدا کند، به‌دست می‌دهد. طرف راست معادله عبارت است از اسکالرِ جرم ضرب در بردار شتاب؛ طرف چپ بردار نیرو است. این معادله ساده می‌نماید، اما بسیار غنی است. ضرب را انجام می‌دهیم و مؤلفه‌های دو طرف را مساوی می‌گیریم. پس در واقع سه معادلهٔ مستقل به‌دست می‌آید: $F_x = ma_x$، $F_y = ma_y$، و $F_z = ma_z$. در بررسی چگونگی پاسخ ذره به نیرو، هر یک از این سه معادله را می‌شود جداگانه حل کرد. به این ترتیب، مثلاً مؤلفهٔ $y$ نیرو هیچ اثری بر مؤلفهٔ $x$ یا $z$ شتاب ندارد؛ یا می‌توانیم بگوییم که جهت نیروی وارد بر سیستم، جهت شتاب آن‌را تعیین می‌کند (چون اگر برداری را در یک اسکالر مثبت ضرب کنیم، بردار دیگری در همان جهت به‌دست می‌آید). در فصل بعدی، که حرکت دوبعدی پرتابه تحت اثر گرانش را بررسی می‌کنیم، از این واقعیت استفاده خواهیم کرد.

قوانین شامل حاصل‌ضرب اسکالر در زمینه‌های متفاوتی پیش می‌آیند. نخستین مثالی که به آن برمی‌خوریم، تعریف کار مکانیکی $W$ است؛ کاری که نیروی $\mathbf{F}$ وارد بر سیستم انجام می‌دهد تا آن‌را به اندازهٔ $\mathbf{d}$ جابه‌جا کند. این کمیتِ اسکالر، حاصل‌ضرب اسکالر نیرو و جابه‌جایی است: $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = Fd \cos \phi$ (فصل ۷). لزومی ندارد که نیرو با جابه‌جایی موازی باشد؛ مثلاً تصور کنید سورتمه‌ای را با طنابی که از روی شانه‌تان رد کرده‌اید روی زمین می‌کشید. جابه‌جایی افقی است، اما نیرو (که در راستای طناب اعمال می‌شود) هم مؤلفهٔ افقی دارد و هم مؤلفهٔ عمودی. دقت کنید که، طبق رابطهٔ هندسی شکل ۱۷، فقط مؤلفهٔ $\mathbf{F}$ در راستای $\mathbf{d}$ (یعنی $F \cos \phi$) در انجام کار شرکت می‌کند. اینجا هم، معادلهٔ برداری اطلاعاتی دربارهٔ روابط هندسی دربر دارد.

مثالی از قوانین فیزیکی شامل حاصل‌ضرب برداری، معادلهٔ $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ است (فصل ۳۴). این معادلهٔ نیروی $\mathbf{F}$ وارد بر بار الکتریکی $q$ را که با سرعت $\mathbf{v}$ در میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ حرکت می‌کند به‌دست می‌دهد. شکل هندسی این نیرو (که از معادلهٔ برداری بالا به‌دست می‌آید) موجب می‌شود که مسیر ذرات باردار به‌صورت مدارهای دایره‌ای در بیاید؛ این همان چیزی است که در شتابدهنده‌های عظیم ذرات، مثل سیکلوترون، اتفاق می‌افتد. دقت کنید که نیرو همیشه هم بر سرعت و هم بر راستای میدان مغناطیسی عمود است. اگر این معادلهٔ برداری نبود، درک اینکه چرا نیرو چنین رفتاری دارد دشوار می‌شد.

قوانین فیزیکی‌ای که با معادلات برداری بیان می‌شوند جهانی‌اند و به دستگاه مختصات به‌کار رفته بستگی ندارند. مثلاً، اگر حرکت ذرات باردار در میدان مغناطیسی را در دو دستگاه مختصات بررسی کنیم، که یکی نسبت به دیگری چرخیده باشد، البته معلوم می‌شود که مؤلفه‌های بردارهای $\mathbf{F}$ (نیرو)، $\mathbf{v}$ (سرعت)، و $\mathbf{B}$ (میدان مغناطیسی) در دو دستگاه متفاوت‌اند (شکل ۱۰ب). اما ناظرهای هر دو دستگاه این قانون فیزیکی را به شکل واحدی می‌بینند. یعنی در دستگاه چرخیده هم، بردارهای تبدیل‌یافته در رابطهٔ $\mathbf{F}' = q\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'$ صدق می‌کنند.

این خواص تبدیل، برای طبیعت چنان بدیهی به‌نظر می‌رسند که اغلب پیش خودمان فرض می‌کنیم که طبیعت باید این‌طور رفتار کند. مثلاً، صرفنظر از آثار صرفاً موضعی، نیروی الکتریکی بین دو الکترون که به فاصلهٔ معینی از یکدیگرند، نباید به این بستگی داشته باشد که مکان نسبی این دو الکترون را در راستای شمال به جنوب می‌سنجیم یا در راستای شرق به غرب. تصور جهانی که چنین خوشرفتار نباشد چندان دشوار نیست؛ مثلاً، ممکن است که طول بردار، در اثر انتقال یا دوران عوض شود. فیزیکدانها و ریاضیدانها در این باره تأمل کرده‌اند که چرا جهان ما چنین تقارنهایی (مثلاً انتقال یا دوران) دارد، و دریافته‌اند که بین تقارنهای طبیعت و کمیتهای معینی که طی فرایندهای فیزیکی پایسته می‌مانند (یعنی مقدار کل آنها تغییر نمی‌کند)، روابط جالبی وجود دارد. مثلاً، ناوردایی قوانین فیزیک تحت تقارن انتقال زمان (یعنی اینکه قانونی که مثلاً دوشنبه برقرار باشد، سه‌شنبه هم برقرار است) مستقیماً به قانون پایستگی انرژی می‌انجامد.

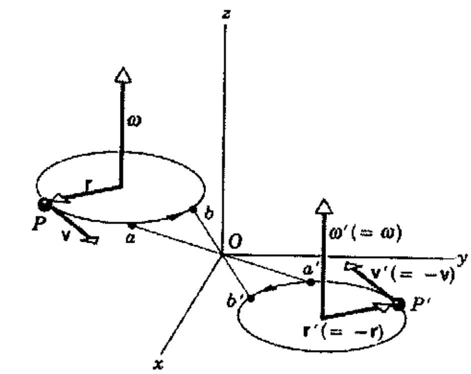
### تقارن انعکاسی، بردارهای قطبی، و بردارهای محوری

نوع دیگری از تبدیل وجود دارد که کاملاً با انتقال و دوران متفاوت است. این تبدیل، وارون کردن دستگاه مختصات است، یعنی $x \to -x$، $y \to -y$، و $z \to -z$. به‌این ترتیب کل سیستم، نسبت به مبدأ مختصات، وارون می‌شود.

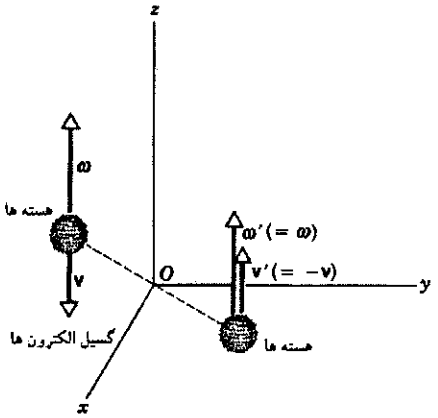
ممکن است تصور کنید که برای اعمال این تبدیل بر معادلات، کافی است که مؤلفه‌های هر بردار را منفی کنیم. (اسکالرها در اثر این تبدیل عوض نمی‌شوند). اگر جهت محور $x$ را معکوس کنیم و بردار $\mathbf{a}$ را عوض نکنیم، روشن است که $a_x \to -a_x$. بنابراین، به‌جای اینکه دستگاه مختصات وارون رسم کنیم می‌توانیم بردار $-\mathbf{a}$ را در همان دستگاه مختصات قدیم بکشیم. این تصور برای دستهٔ بزرگی از کمیتهای فیزیکی‌ای که با بردار نمایش داده می‌شوند درست است؛ سرعت، شتاب، نیرو، تکانهٔ خطی، و میدان الکتریکی از آن جمله‌اند. این بردارهای خوش‌رفتار را به‌طور کلی بردار قطبی می‌نامند.

گروه دیگری از بردارها هستند که تحت وارونی چنین رفتار نمی‌کنند. مثلاً، غالباً مفید است که ذره‌ای را که روی دایره حرکت می‌کند با بردار سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ مشخص کنیم (شکل ۱۹). اندازهٔ $\boldsymbol{\omega}$، عملاً می‌گوید که سرعت دوران ذره چقدر است؛ جهت $\boldsymbol{\omega}$ بر صفحهٔ دایره عمود است و با قاعدهٔ دست راست به‌دست می‌آید. (اگر انگشتان دست راستِ خود را در جهت حرکت ذره خم کنید، شست کشیدهٔ شما در جهت $\boldsymbol{\omega}$ است)

حالا فرض کنید مدار ذره را نسبت به مبدأ وارون کنیم، شکل ۱۹.




شکل۱۹. ذرهٔ $P$ که روی دایره حرکت می‌کند با بردار سرعت زاویه‌ای $\omega$ مشخص می‌شود. اگر همهٔ مختصات را نسبت به مبدأ $O$ وارون کنیم، ذرهٔ "وارونه" $P'$ هم روی دایره می‌گردد و با بردار سرعت زاویه‌ای $\omega'$ مشخص می‌شود.




شکل۲۰. مجموعه‌ای از هسته‌های چرخان، که با بردار سرعت زاویه‌ای $\omega$ مشخص می‌شوند، عمدتاً در جهت مخالف $\omega$ الکترون گسیل می‌کنند. در آزمایش وارونه، الکترونها در جهت $\omega'$ گسیل می‌شوند. آزمایش اصلی و آزمایش وارونه کاملاً با هم متفاوت‌اند. این نشان می‌دهد که تقارن وارونی در این واپاشیها نقض می‌شود.

بردار $\mathbf{r}$، محل ذرهٔ $P$ نسبت به مرکز دایره، به $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ تبدیل می‌شود. سرعت هم به $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$ تبدیل می‌شود. از آنجا که ذرهٔ اولیه از $a$ به $b$ می‌رود، ذرهٔ وارون شده از $a'$ به $b'$ می‌رود و جهت دوران (ساعتگرد یا پادساعتگرد) عوض نمی‌شود، پس $\omega' = \omega$ است. بنابراین سرعت زاویه‌ای، بر خلاف بردارهای قطبی $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$، تحت وارونی مختصات تغییر جهت نمی‌دهد. چنین برداری را بردار محوری یا شبه بردار می‌نامند: گشتاور و میدان مغناطیسی هم از این نوع بردارها هستند.

در فصل ۱۱، مبحث حرکت دورانی، خواهیم دید که بین بردارهای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$، و $\omega$ یک رابطهٔ حاصل‌ضرب برداری وجود دارد، $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$. اگر قرار بود که هر سه بردار تحت وارونی تغییر جهت بدهند، رابطهٔ بین سه بردار وارونه به شکل $-\mathbf{v} = (-\omega) \times (-\mathbf{r}) = \omega \times \mathbf{r}$ در می‌آمد. اما این تناقض است: $\omega \times \mathbf{r}$ نمی‌تواند هم با $-\mathbf{v}$ و هم با $\mathbf{v}$ برابر باشد (مگر اینکه $\mathbf{v}$ صفر باشد که اینجا چنین نیست). بنابراین، لازم است که رابطهٔ تبدیل $\omega$، حتماً به شکل $\omega' = \omega$ باشد تا رابطهٔ فیزیکی $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ در دستگاه وارونه هم شکل خود را حفظ کند، یعنی $\mathbf{v}' = \omega' \times \mathbf{r}'$. این همان چیزی است که از ناوردایی قوانین فیزیک تحت یک تبدیل خاص مختصات می‌فهمیم. یعنی، اگر یک قانون فیزیکی را به شکل معادله در یک دستگاه مختصات بنویسیم، بردارها را مطابق با تبدیل مختصات مورد نظر تبدیل کنیم، و بردارهای تبدیل‌یافته را در معادلهٔ مورد نظر بگذاریم، باید معادله‌ای به‌دست بیاید که با معادلهٔ اول هم‌ارز است.

تا حدود سال ۱۹۵۶ تصور بر این بود که قوانین فیزیک تحت وارونی از نوع شکل ۱۹، (و البته تحت انتقال و تحت دوران) تغییر نمی‌کنند. اما در سال ۱۹۵۶ کشف شد که تقارن وارونی، درنوع خاصی از واپاشیهای پرتوزا، واپاشی بتا، نقض می‌شود. در این واپاشیها، هستهٔ اتم الکترون گسیل می‌کند. هستهٔ اتم، مثل یک فرفرهٔ کوچک، حول محور خود می‌چرخد، و می‌شود به هرهسته برداری مانند $\omega$ نسبت داد که دوران آن‌را مشخص می‌کند. در آزمایش واپاشی بتا، جهت گسیل الکترون نسبت به جهت $\omega$ را بررسی می‌کردند (شکل ۲۰). اگر تعداد الکترونهایی که در جهت $\omega$ گسیل می‌شدند برابر با آنهایی بود که در خلاف جهت گسیل می‌شدند، آزمایش وارونه هم درست مثل آزمایش اصلی می‌بود و تقارن وارونی صدق می‌کرد. اما معلوم شد که بیشتر الکترونها در خلاف جهت $\omega$ گسیل می‌شوند. بنابراین، در آزمایش وارونه بیشتر الکترونها در جهت $\omega$ گسیل می‌شوند (زیرا در اثر وارونی علامت $\mathbf{v}$ عوض می‌شود اما علامت $\omega$ عوض نمی‌شود). آزمایش اصلی با تصویر آینه‌ای‌اش متفاوت است؛ بنابراین، تقارن وارونی و قانون پایستگی مربوط به آن، پایستگی پاریته، در این مورد معتبر نیست.[۱]

این آزمایش نحوهٔ تفکر فیزیکدانها را در بارهٔ فرایندهای بنیادی دگرگون کرد، و یک سر نخ اساسی درمورد ماهیت قانون فیزیکی‌ای که در پس واپاشی بتا وجود دارد، به‌دست داد. این قانون، یکی از چهار نیروی بنیادیی است که می‌شناسیم. این آزمایش پیشگام سلسله آزمایشهایی بود که روابط دیگری میان خواص تبدیل، اصول ناوردایی، و تقارن آشکار کرد.

## پرسشها

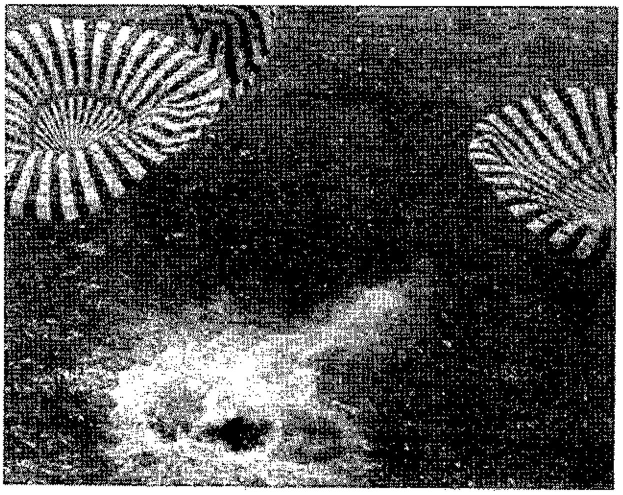
۱. در سال ۱۹۶۹، سه فضانورد آپولو از پایگاه کیپ کاناورال پرواز کردند، به ماه رفتند، برگشتند، و در نقطهٔ معینی در اقیانوس آرام فرود آمدند

---

۱. نگاه کنید به

*The New Ambidextrous Universe*, Martin Gardner (W. H. Freeman and Company, 1990).

(شکل ۲۱). یک افسر ارشد نیروی دریایی در پایگاه با آنها خداحافظی کرد و سپس با یک کشتی هواپیمابر به اقیانوس آرام رفت تا فضانوردان را از آب بگیرد. جابه‌جایی فضانوردان و این افسر را با هم مقایسه کنید.



**شکل ۲۱.** پرسش ۱

۲. سگی $100\,\mathrm{m}$ به‌طرف جنوب، سپس $100\,\mathrm{m}$ به طرف شرق، بعد $100\,\mathrm{m}$ به طرف شمال می‌دود و سرانجام به نقطهٔ شروع حرکت خود می‌رسد، یعنی جابه‌جایی کل او صفر می‌شود. نقطهٔ شروع کجاست؟ قطب شمال یک جواب بدیهی است اما جوابهای دیگر هم وجود دارند، که نزدیک قطب جنوب‌اند. این حرکت را توصیف کنید.

۳. آیا می‌توان دو بردار با اندازه‌های متفاوت داشت که برایندشان صفر شود؟ سه بردار چطور؟

۴. آیا ممکن است اندازهٔ برداری صفر باشد ولی یکی از مؤلفه‌های آن صفر نباشد؟

۵. آیا می‌شود که مجموع اندازه‌های دو بردار با اندازهٔ مجموع همان دو بردار یکی باشد؟

۶. آیا ممکن است که اندازهٔ تفاضل دو بردار بزرگتر از اندازهٔ هر یک از دو بردار باشد؟ آیا اندازهٔ تفاضل دو بردار می‌تواند بزرگتر از اندازهٔ مجموع همان دو بردار باشد؟ مثال بزنید.

۷. فرض کنید که $\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2$. آیا این به معنی آن است که باید $d \ge d_1$ یا $d \ge d_2$ باشد؟ اگر نه، توضیح بدهید که چرا؟

۸. اگر مجموع سه بردار صفر شود، این سه بردار الزاماً در یک صفحه‌اند. این گفته را توجیه کنید.

۹. آیا بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ یکا دارند؟

۱۰. توضیح بدهید که اطلاعات موجود در بردارها به چه معنی بیش از اطلاعات موجود در اسکالرهاست؟

۱۱. چند کمیت اسکالر نام ببرید. آیا مقدار یک کمیت اسکالر به دستگاه مختصاتی که انتخاب می‌کنید بستگی دارد؟

۱۲. رویدادها را می‌توان به ترتیب زمانی مرتب کرد. مثلاً، ممکن است که رویداد $b$ پیش از $c$ و پس از $a$ رخ داده باشد. به این ترتیب، ترتیب رویدادهای بالا $a$، $b$، $c$ است. پس زمان به نوعی جهت دارد، که به کمک آن می‌توان گذشته، حال، و آینده را از هم تشخیص داد. پس آیا زمان بردار است؟ اگر نه چرا؟

۱۳. آیا قوانین جابه‌جایی و شرکت‌پذیری برای تفریق بردارها هم صادق‌اند؟

۱۴. آیا حاصل‌ضرب اسکالر می‌تواند منفی شود؟

۱۵. (الف) آیا از $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ نتیجه می‌شود که $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بر هم عمودند؟
(ب) آیا از $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ نتیجه می‌شود که $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ است؟

۱۶. آیا اگر $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = 0$ باشد، $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ با هم موازی‌اند؟ آیا عکس این هم درست است؟

۱۷. بردار $\mathbf{a}$ موازی محور دوران زمین، و در جهتِ جنوب به شمال است. بردار $\mathbf{b}$ در راستای قائم رو به بالا، و در مکان شماست. جهت بردار $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ چیست؟ در چه نقاطی از سطح زمین، اندازهٔ بردار $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ بیشینه است؟ در چه نقاطی کمینه است؟

۱۸. در کدام یک از عملیات زیر لازم است که دستگاه مختصات را مشخص کنیم (الف) در جمع دو بردار، (ب) در ضرب اسکالرِ دو بردار، (ج) در ضرب برداری دو بردار، یا (د) در تعیین مؤلفه‌های دو بردار؟

۱۹. (الف) نشان بدهید که اگر همهٔ مؤلفه‌های یک بردار را وارونه کنیم، جهت خود بردار هم وارونه می‌شود. (ب) نشان بدهید که اگرمؤلفه‌های دو بردار را وارونه کنیم، حاصل‌ضرب برداری آنها عوض نمی‌شود. (ج) پس آیا حاصل‌ضرب برداری، بردار است؟

۲۰. در مورد جمع، تفریق، و ضرب بردارها صحبت کردیم. فکر می‌کنید چرا از تقسیم بردارها حرفی نزدیم؟ آیا می‌شود چنین عملی هم تعریف کرد؟

۲۱. قرارداد معمول در جبر برداری، قاعدهٔ دست راست است، که ماهم آن‌را به کار بردیم. به نظر شما اگر قرارداد دست چپ را به کار می‌بردیم چه تغییراتی لازم می‌بود؟

۲۲. (الف) خودتان را قانع کنید که حاصل‌ضرب برداری دو بردارِ قطبی، یک بردار محوری است. (ب) حاصل‌ضرب برداری یک بردار قطبی و یک بردار محوری چیست؟

## مسئله‌ها

**بخش ۳ـ۲ جمع برداری؛ روش نموداری**

۱. دو جابه‌جایی، به اندازه‌های $3\,\mathrm{m}$ و $4\,\mathrm{m}$، در نظر بگیرید. این جابه‌جاییها را چنان با هم ترکیب کنید که اندازهٔ جابه‌جایی برایند (الف) $7\,\mathrm{m}$، (ب) $1\,\mathrm{m}$، و (ج) $5\,\mathrm{m}$ شود.

۲. دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ چه خاصیتی داشته باشند تا (الف) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$ و $a+b=c$ باشد؛ (ب) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$ باشد؛ (ج) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$ و $a^2+b^2=c^2$ باشد؟

۳. شخصی $250\,\mathrm{m}$ در جهت $35°$ شرقِ شمال، و سپس $170\,\mathrm{m}$ مستقیماً به‌طرف شرق حرکت می‌کند. (الف) با استفاده از روش

نموداری، جابه‌جایی کل او را، نسبت به مبدأ پیدا کنید. (ب) اندازهٔ این جابه‌جایی را با مسافتی که پیموده است مقایسه کنید.

۴. شخصی ۳٫۱km به‌طرف شمال، سپس ۲٫۴km به‌طرف غرب، و سرانجام ۵٫۲km به‌طرف جنوب حرکت می‌کند. (الف) یک نمودار برداری برای این حرکت رسم کنید. (ب) پرنده‌ای را در نظر بگیرید که روی خط راست پرواز می‌کند. این پرنده باید چقدر و در چه جهتی پرواز کند تا به مقصد این شخص برسد؟

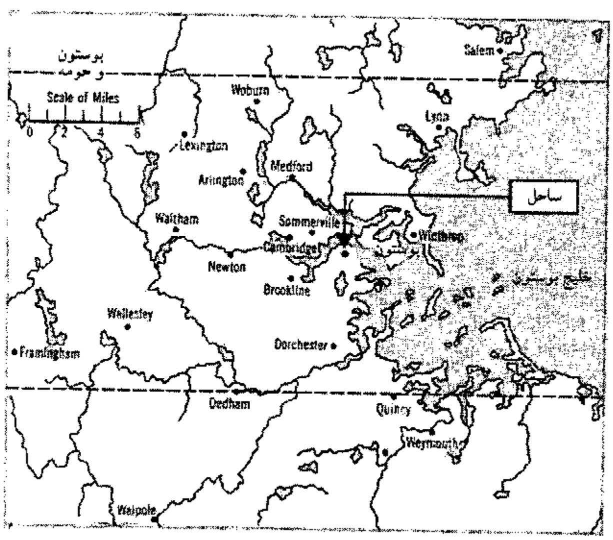
۵. دو بردار a و b را با هم جمع می‌کنیم. به روش تصویری و به کمک نمودارهای برداری نشان بدهید که اندازهٔ بردار برایند نمی‌تواند بزرگتر از $a+b$ یا کوچکتر از $|a-b|$ باشد. (خطهای قائم علامت قدرمطلق است.)

۶. اتومبیلی ۵۴km در جهت شرق، سپس ۳۲km در جهت شمال، و سرانجام ۲۷km در جهت °۲۸ شرقِ شمال حرکت می‌کند. نمودار برداری این حرکت را بکشید و جابه‌جایی کل اتومبیل را تعیین کنید.

۷. بردار a به اندازهٔ ۵٫۲ واحد، و در جهت شرق است. بردار b به اندازهٔ ۴٫۳ واحد، و درجهت °۳۵ غربِ شمال است. با استفاده از نمودار برداری، اندازه و جهت (الف) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$، و (ب) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ را پیدا کنید.

۸. گلف‌بازی توپ گلف را در سه مرحله به سوراخ می‌اندازد. در ضربهٔ اول، توپ ۱۲ft به طرف شمال می‌رود، در ضربهٔ دوم ۶٫۰ft به جنوب شرقی، و در ضربهٔ سوم ۳٫۰ft به جنوب غربی، چه جابه‌جایی‌ای لازم بود تا توپ فقط با یک ضربه به سوراخ برسد؟ نمودار بکشید.

۹. بانکی در مرکز شهر بوستون را دزد می‌زند (شکل ۲۲ نقشهٔ محل را نشان می‌دهد). دزدان، برای فرار از چنگ پلیس، این مسیر را با هلیکوپتر می‌پیمایند؛ اول ۲۰mi در جهت °۴۵ جنوبِ شرق، سپس ۳۳mi در جهت °۲۶ شمالِ غرب، و سرانجام ۱۶mi در جهت °۱۸ شرقِ جنوب. اینجاست که پلیس دزدها را دستگیر می‌کند. این محل کدام شهر است؟ (با استفاده از روش نموداری این جابه‌جاییها را روی نقشه با هم جمع کنید.)

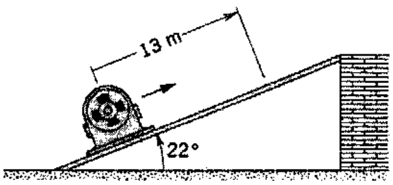



شکل ۲۲. مسئلهٔ ۹

## بخش ۳ـ۳ مؤلفه‌های بردار

۱۰. (الف) بردار a در صفحهٔ $xy$ و در جهت °۲۵۲ پادساعتگرد از جهت مثبت محور $x$ است. اندازهٔ a، ۷٫۳۴ واحد است. مؤلفه‌های این بردار را به‌دست بیاورید. (ب) مؤلفهٔ $x$ برداری ۲۵− واحد و مؤلفهٔ $y$ آن ۴۳+ واحد است. اندازهٔ این بردار و زاویهٔ آن‌را با جهت مثبت محور $x$ به‌دست بیاورید.

۱۱. یک دستگاه مکانیکی سنگین را روی سطح شیبداری که با افق زاویهٔ °۲۲ می‌سازد، به‌اندازهٔ ۱۳m به طرف بالای سطح هل می‌دهیم. (شکل ۲۳). (الف) ارتفاع دستگاه نسبت به مکان اولیه‌اش چقدر است؟ (ب) این دستگاه چقدر در جهت افقی حرکت کرده است؟




شکل ۲۳. مسئلهٔ ۱۱

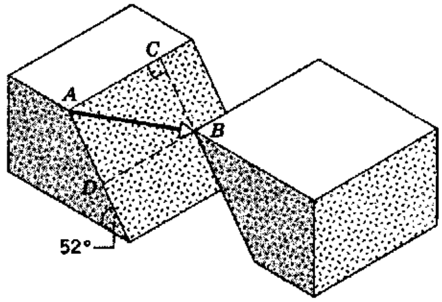
۱۲. طول عقربهٔ دقیقه‌شمار یک ساعت دیواری، از محور تا نوک، ۱۱٫۳cm است. بردار جابه‌جایی نوک عقربه را (الف) از یک ربع گذشته تا نیم ساعت، (ب) در نیم ساعت بعدی، و (ج) در مدت یک ساعت تعیین کنید.

۱۳. شخصی می‌خواهد به نقطه‌ای برسد که در فاصلهٔ ۳٫۴۲km و در جهت °۳۵٫۰ شمالِ شرق محل خودش واقع شده است؛ اما مجبور است که از راهِ خیابان برود. خیابانها هم یا شمالی‌ـ‌جنوبی‌اند یا شرقی‌ـ‌غربی، کمترین مسافتی که این شخص باید بپیماید تا به مقصد برسد چقدر است؟

۱۴. کشتی‌ای عازم نقطه‌ای درفاصلهٔ ۱۲۴km در جهت شمال است. توفانِ غیرمنتظره‌ای کشتی را به نقطه‌ای در۷۲٫۶km شمال و ۳۱٫۴km شرقِ مبدأ می‌راند. این کشتی باید چقدر و در چه جهتی حرکت کند تا به مقصد مورد نظر برسد؟

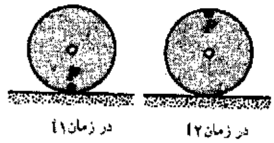
۱۵. گُسَل گسیختگی‌ای است در سنگ که سطوح متقابل سنگ در راستای آن، نسبت به هم و موازی با یکدیگر، جابه‌جا شده‌اند. این جابه‌جایی، اغلب با زمین لرزه همراه است. در شکل ۲۴، نقاط $A$ و $B$ پیش از گسیختگی روی هم بوده‌اند. مؤلفهٔ جابه‌جایی کل $AB$ در راستای محور افقی گسل را لغزش افقی می‌نامند ($AC$). مؤلفهٔ جابه‌جایی کل در راستای محور با تندترین شیب گسل را لغزش عمقی می‌نامند ($AD$). (الف) اگر لغزش افقی ۲۲m و لغزش عمقی ۱۷m باشد، جابه‌جایی کل چقدر است؟ (ب) اگر صفحهٔ گسل با افق زاویهٔ °۵۲ داشته باشد، جابه‌جایی عمودی خالص $B$ در اثر گسیختگی (الف) چقدر است؟




شکل ۲۴ مسئلهٔ ۱۵

۱۶. چرخی به شعاع ۴۵cm، روی سطحی افقی، بی‌لغزش، می‌غلتد(شکل ۲۵). $P$ نقطه‌ای است که روی چرخ علامتگذاری شده است. در زمان $t_1$، $P$ نقطهٔ تماس بین چرخ و سطح است. درزمان $t_2$، پس از $t_1$، چرخ نیم دور چرخیده است. جابه‌جایی $P$ در طی این حرکت چقدر است؟




شکل ۲۵. مسئلهٔ ۱۶

۱۷. ابعاد اتاقی ۱۴ft × ۱۲ft × ۱۰ft است. مگسی از یک گوشهٔ اتاق شروع به پرواز می‌کند و به سر دیگر قطری که از این گوشه می‌گذرد می‌رسد. (الف) بردار جابه‌جایی را در دستگاهی که محورهای مختصات آن با یالهای اتاق موازی‌اند پیدا کنید. (ب) اندازهٔ این جابه‌جایی چقدر است؟ (ج) آیا امکان دارد که مگس از یک مسیر کوتاهتر، به مقصد برسد؟ از یک مسیر بلندتر چطور؟ از مسیر دیگری با همان طول چطور؟ (د) اگر مگس، به جای پرواز کردن، راه برود، کوتاهترین مسیری که او را به مقصد می‌رساند کدام است؟

**بخش ۳ـ۴ جمع برداری؛ روش مؤلفه‌ای**

۱۸. (الف) جمع دو بردار $\mathbf{a} = ۵\mathbf{i} + ۳\mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = -۳\mathbf{i} + ۲\mathbf{j}$ را برحسب بردارهای یکه بنویسید. (ب) اندازه و جهت $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ را به‌دست بیاورید.

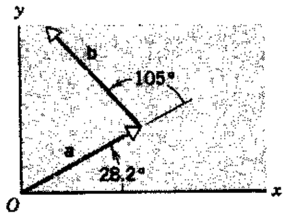
۱۹. دو بردار $\mathbf{a} = ۴\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + \mathbf{K}$ و $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۴\mathbf{k}$ را در نظر بگیرید. (الف) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$، و (ب) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ را پیدا کنید. (ب) بردار $\mathbf{c}$ را چنان تعیین کنید که $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c} = ۰$ باشد.

۲۰. دو بردار $\mathbf{a} = ۴\mathbf{i} - ۳\mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = ۶\mathbf{i} + ۸\mathbf{j}$ را در نظر بگیرید. اندازه و جهت هر یک از بردارهای زیر را (نسبت به جهت مثبت محور $x$) پیدا کنید. (الف) $\mathbf{a}$، (ب) $\mathbf{b}$، (ج) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$، (د) $\mathbf{b}-\mathbf{a}$، و (ه) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

۲۱. (الف) شخصی از در خانه‌اش ۱۴۰۰m به طرف شرق و ۲۱۰۰m به طرف شمال می‌رود. سپس سکه‌ای از جیبش در می‌آورد و آن‌را از تخته سنگی به ارتفاع ۴۸m پایین می‌اندازد. دستگاه مختصات را طوری بگیرید که مبدأ آن محل سکه، هنگامی که شخص جلوی خانه‌اش است، باشد و جهت مثبت محورهای $x$ و $y$، و $z$ آن‌را به‌ترتیب به طرف شرق، شمال، و بالا انتخاب کنید. (الف) جابه‌جایی سکه را برحسب بردارهای یکه بنویسید. (ب) این شخص، از راه دیگری، به در خانه‌اش برمی‌گردد. برایند جابه‌جاییهای او در کل حرکت چیست؟

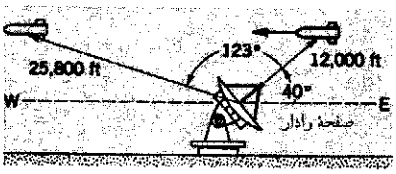
۲۲. ذره‌ای در سه مرحلهٔ متوالی در صفحه‌ای جابه‌جا می‌شود: ۴٫۱۳m به طرف جنوب غربی ۵٫۲۶m به طرف شرق، و ۵٫۹۴m در جهت ۶۴٫۰° شمالِ شرق. محور $x$ را درجهت شرق و محور $y$ را در جهت شمال بگیرید. (الف) مؤلفه‌های هر جابه‌جایی، (ب) مؤلفه‌های برایند جابه‌جاییها، (ج) اندازه و جهت جابه‌جایی برایند، و (د) جابه‌جایی‌ای که ذره را به مبدأ باز می‌گرداند پیدا کنید.

۲۳. دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هرکدام به اندازهٔ ۱۲٫۷ واحدند. جهت‌گیری آنها طبق شکل ۲۶، و مجموع برداری‌شان $\mathbf{r}$ است. (الف) مؤلفه‌های $x$ و $y$ بردار $\mathbf{r}$، (ب) اندازهٔ $\mathbf{r}$، و (ج) زاویهٔ $\mathbf{r}$ نسبت به جهت مثبت محور $x$ را پیداکنید.




شکل ۲۶. مسئلهٔ ۲۳

۲۴. ایستگاه راداری موشکی را که از شرق به آن نزدیک می‌شود "مشاهده" می‌کند. در ابتدا، موشک به فاصلهٔ ۱۲۰۰۰ft از ایستگاه و تحت زاویهٔ ۴۰٫۰° بر فراز افق است. رادار موشک را به اندازهٔ ۱۲۳° in دیگر در صفحهٔ شرق‌ـ‌غرب دنبال می‌کند (شکل ۲۷). در پایان، فاصلهٔ موشک از ایستگاه به ۲۵۸۰۰ft می‌رسد. جابه‌جایی موشک دراین مدت چیست؟




شکل ۲۷. مسئلهٔ ۲۴

۲۵. دو بردار به اندازه‌های $a$ و $b$ داریم که اگر دمشان را بر هم منطبق کنیم، با هم زاویهٔ $\theta$ می‌سازند. با محاسبهٔ مؤلفه‌های این دو بردار در راستای دو محور متعامد، ثابت کنید که اندازهٔ مجموع آنها برابر است با

$$r = \sqrt{a^۲ + b^۲ + ۲ab\cos\theta}$$

۲۶. ثابت کنید که اگر مجموع دو بردار بر تفاضل آنها عمود باشد، طول آن دو بردار یکی است.

۲۷. (الف) سه برداری که در راستای یالهای مکعبی به ضلع $a$ بگیرید و قطرهای مکعب را (که از مرکز مکعب می‌گذرند و دو رأس متقابل را به هم وصل می‌کنند) برحسب آنها و طول ضلع مکعب، بیان کنید. (ب) زاویهٔ قطر مکعب را با یالهای مجاورش پیدا کنید. (ج) طول قطر مکعب چقدر است؟

۲۸. مسافری از واشنگتن دی‌سی به مانیل پرواز می‌کند. (الف) بردار جابه‌جایی او را به‌دست بیاورید. (ب) اندازهٔ این بردار چقدر است؟ عرض و طول جغرافیایی این دو شهر به ترتیب °۳۹ شمال‌ـ°۷۷ غرب و °۱۵ شمال‌ـ°۱۲۱ شرق است. (راهنمایی: از شکل ۷ و معادلات ۷ استفاده کنید. محور$z$ را در راستای محور دوران زمین بگیرید. به این ترتیب، "عرض جغرافیایی $- ۹۰^\circ = \theta$" و "طول جغرافیایی $= \phi$" خواهد بود. شعاع زمین ۶۳۷۰km است.)

۲۹. فرض کنید که $N$ عدد صحیحی بزرگتر از ۱ است. در این صورت،

$$\cos ۰ + \cos \frac{۲\pi}{N} + \cos \frac{۴\pi}{N} + \cdots + \cos(N-۱)\frac{۲\pi}{N} = ۰$$

یعنی

$$\sum_{n=۰}^{n=N-۱} \cos \frac{۲\pi n}{N} = ۰$$

همچنین

$$\sum_{n=۰}^{n=N-۱} \sin \frac{۲\pi n}{N} = ۰$$

این دو رابطه را اثبات کنید. برای این کار جمع $N$ بردار به طول یکسان را در نظر بگیرید که هر یک با قبلی زاویهٔ $۲\pi/N$ می‌سازد.

## بخش ۳ـ۵ ضرب بردارها

۳۰. بردار $\mathbf{d}$ به اندازهٔ ۲٫۶m و در جهت شمال است. اندازه و جهت بردارهای (الف) $-\mathbf{d}$، (ب) $\mathbf{d}/۲٫۰$، (ج) $-۲٫۵\mathbf{d}$، و (د) $۵٫۰\mathbf{d}$ را به‌دست بیاورید.

۳۱. نشان بدهید که بردار $\mathbf{a}$ هر چه باشد، (الف) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a^۲$ و (ب) $\mathbf{a}\times\mathbf{a} = ۰$ است.

۳۲. اندازهٔ بردار $\mathbf{a}$، ۱۲ واحد و اندازهٔ بردار $\mathbf{b}$، ۵٫۸ واحد است. زاویهٔ میان این دو بردار °۵۵ است. (الف) حاصلضرب اسکالر و (ب) حاصلضرب برداری این دو بردار را پیدا کنید.

۳۳. دو بردار $\mathbf{r}$ و $\mathbf{s}$ در صفحهٔ $xy$اند. اندازهٔ این دو بردار، به ترتیب، ۴٫۵ و ۷٫۳ واحد است. جهت این دو بردار، به ترتیب، °۳۲۰ و °۸۵ پادساعتگرد نسبت به جهت مثبت محور $x$ است. (الف) $\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}$ و (ب) $\mathbf{r}\times\mathbf{s}$ را پیدا کنید.

۳۴. حاصلضربهای (الف) "شمال" ضربدر "غرب"، (ب) "پایین" نقطهٔ "جنوب" (ج) "شرق" ضربدر "بالا"، (د) "غرب"  "غرب"، و (ه) "جنوب" ضربدر "جنوب" را به‌دست بیاورید. همهٔ بردارها را یکه بگیرید.

۳۵. دو بردار $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید که $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$، برحسب مؤلفه‌های دو بردار، از معادلهٔ ۱۵ به‌دست می‌آید.

۳۶. دو بردار $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید که $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$، برحسب مؤلفه‌های دو بردار، از معادلهٔ ۱۷ به‌دست می‌آید.

۳۷. نشان بدهید که $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ را می‌شود با این دترمینان ۳ × ۳ نشان داد:

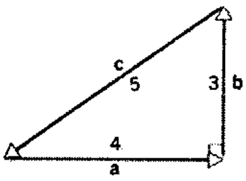
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

۳۸. با استفاده از معادلات ۱۳ و ۱۵، زاویهٔ میان دو بردار $\mathbf{a} = ۳\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = ۲\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۳\mathbf{k}$ را پیدا کنید.

۳۹. سه بردار $\mathbf{a} = ۳\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - ۲\mathbf{k}$، $\mathbf{b} = -\mathbf{i} - ۴\mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$، و $\mathbf{c} = ۲\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + \mathbf{k}$ را در نظر بگیرید. (الف) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$، (ب) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ و (ج) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ را حساب کنید.

۴۰. بردارهای $\mathbf{a} = ۵\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} - ۶\mathbf{k}$، $\mathbf{b} = -۲\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}$، و $\mathbf{c} = ۴\mathbf{i} + ۳\mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$ را در نظر بگیرید. (الف) $\mathbf{r} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$ را به‌دست بیاورید. (ب) زاویهٔ بین $\mathbf{r}$ و محور $+z$ و (ج) زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را محاسبه کنید.

۴۱. مجموع سه بردار صفر است، و این سه بردار یک مثلث قائم‌الزاویه می‌سازند (شکل ۲۸) (الف) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$، (ب) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$، و (ج) $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ را حساب کنید.




شکل ۲۸. مسئله‌های ۴۱ و ۴۲

۴۲. مجموع سه بردار صفر است، و این سه بردار یک مثلث قائم‌الزاویه می‌سازند. شکل ۲۸. (الف) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$، (ب) $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$، و (ج) $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ را حساب کنید.

۴۳. بردار $\mathbf{a}$ در صفحهٔ $yz$ است و با محور $+y$ زاویهٔ °۶۳٫۰ می‌سازد. مؤلفهٔ $z$ این بردار مثبت، و اندازهٔ آن ۳٫۲۰ واحد است. بردار $\mathbf{b}$ در صفحهٔ $xz$ است و با محور $+x$ زاویهٔ °۴۸٫۰ می‌سازد. مؤلفهٔ $z$ این بردار مثبت، و اندازهٔ آن ۱٫۴۰ واحد است. (الف) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$، (ب) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$، و (ج) زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را پیدا کنید.

۴۴. (الف) دیدیم که قانون جابه‌جایی در مورد حاصلضرب برداری صادق نیست، یعنی $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ با $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ برابر نیست. نشان بدهید که

قانون جابه‌جایی در مورد حاصل‌ضرب اسکالر درست است؛ یعنی، $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$. (ب) نشان بدهید که قانون پخشی، هم در مورد حاصل‌ضرب اسکالر و هم در مورد حاصل‌ضرب برداری درست است یعنی

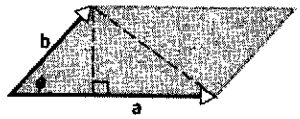
$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$$

و

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$$

(ج) آیا قانون شرکت‌پذیری در مورد حاصل‌ضرب برداری درست است؟ یعنی، آیا $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ با $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ برابر است؟ (د) آیا قانون شرکت‌پذیری در مورد حاصل‌ضرب اسکالر معنی دارد؟

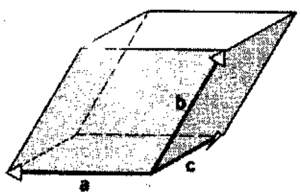
۴۵. نشان بدهید که مساحت مثلثی که با بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ساخته می‌شود (شکل ۲۹) برابر با $\frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ است. (خطوط قائم به معنی اندازهٔ بردار است.)



شکل ۲۹. مسئله‌های ۴۵ و ۴۶

۴۶. نشان بدهید که اندازهٔ حاصل‌ضرب برداری برابر با مساحت متوازی‌الاضلاعی است که اضلاع آن به اندازهٔ عوامل ضرب باشند (شکل ۲۹). به این ترتیب، آیا فکر نمی‌کنید که بتوانیم برای نمایش عنصرسطحی که جهتی در فضا دارد هم از بردار استفاده کنیم؟

۴۷. نشان بدهید که قدرمطلق $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ برابر با حجم متوازی‌السطوحی است که با سه بردار $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، و $\mathbf{c}$ ساخته می‌شود (شکل ۳۰).

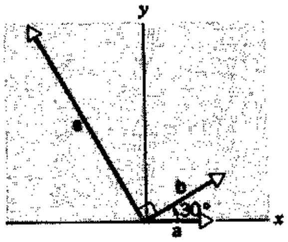


شکل ۳۰. مسئلهٔ ۴۷

۴۸. مؤلفه‌های دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$، برحسب یکای دلبخواه، $a_x=$ ۳٫۲، $a_y=$ ۱٫۶؛ $b_x=$ ۰٫۵۰، $b_y=$ ۴٫۵ است. (الف) زاویهٔ میان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ چقدر است؟ (ب) مؤلفه‌های بردار $\mathbf{c}$ را که عمود بر $\mathbf{a}$، در صفحهٔ $xy$، و به اندازهٔ ۵٫۰ واحد است، پیدا کنید.

۴۹. زاویهٔ میان قطرهای حجمی مکعب را محاسبه کنید. (مسئلهٔ ۲۷).

۵۰. سه بردار شکل ۳۱ به اندازه‌های $a=3$، $b=4$، و $c=10$اند. (الف) مؤلفه‌های $x$ و $y$ این سه بردار را پیدا کنید. (ب) اعداد $p$ و $q$ را چنان تعیین کنید که $\mathbf{c}=p\mathbf{a}+q\mathbf{b}$ باشد.

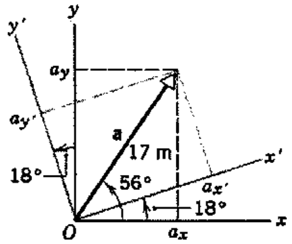


شکل ۳۱. مسئلهٔ ۵۰

### بخش ۳-۶ قوانین برداری در فیزیک

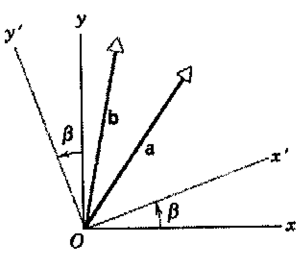
۵۱. با استفاده از شکل ۱۰ب، معادلات ۱۸ را به‌دست بیاورید.

۵۲. بردار $\mathbf{a}$ به اندازهٔ ۱۷m در جهت ۵۶° پادساعتگرد از محور $+x$ است (شکل ۳۲). (الف) مؤلفه‌های $a_x$ و $a_y$ این بردار را به‌دست بیاورید. (ب) دستگاه مختصات دیگری را در نظر بگیرید که ۱۸° نسبت به دستگاه اول چرخیده باشد. مؤلفه‌های $a_{x'}$ و $a_{y'}$ را در این دستگاه "پریم‌دار" پیدا کنید.



شکل ۳۲. مسئلهٔ ۵۲

۵۳. شکل ۳۳ دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و دو دستگاه مختصات را نشان می‌دهد که زاویهٔ بین محورهای "نظیر" آنها $\beta$ است. به‌طور تحلیلی ثابت کنید که اندازه و جهت $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ مستقل از دستگاه مختصاتی است که برای محاسبهٔ این بردار به‌کار می‌رود. (راهنمایی: معادلات ۱۸ را به‌کار بگیرید.)



شکل ۳۳. مسئلهٔ ۵۳

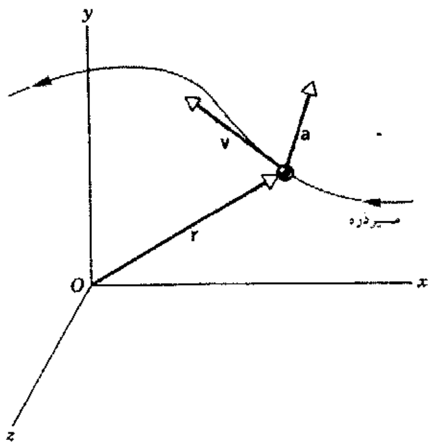
# ۴

# حرکت دوبُعدی و سه‌بُعدی

این فصل، ترکیبی از مفاهیم فصل ۲ و ۳ است. اینجا هم حرکت ذرات را برحسب مکان، سرعت، و شتاب آنها توصیف می‌کنیم؛ همان کاری که در فصل ۲ کردیم. اما دیگر مثل فصل ۲ ذرات را مقید نمی‌کنیم که روی خط راست حرکت کنند؛ در اینجا می‌گذاریم که ذره به هر جای دستگاه مختصات سه‌بعدی برود. استفاده از نمادگذاری برداری، بررسی مؤلفه‌های $x$، $y$، و $z$ حرکت را تا حد زیادی ساده می‌کند. خواهیم دید که معادلات سینماتیکی فصل ۲ را در حالت کلی هم می‌شود به‌کار برد؛ کافی است که به جای متغیر یک‌بعدی، بردار متناظر با آن‌را بگذاریم. به عنوان نمونه‌هایی از کاربرد روشهای برداری، دو حرکت آشنا را بررسی می‌کنیم: یکی حرکت پرتابه در میدان گرانشی زمین با سرعت اولیه‌ای که هم مؤلفهٔ افقی و هم مؤلفهٔ عمودی دارد، و دیگری حرکت ذره در مسیر دایره‌ای.

## ۴ـ۱ مکان، سرعت، و شتاب

شکل ۱ ذره‌ای را که روی مسیری منحنی در فضای سه‌بعدی حرکت می‌کند در زمان $t$ نشان می‌دهد. مکان، یا جابه‌جایی از مبدأ، ذره را با بردار $\mathbf{r}$ می‌سنجیم. سرعت را با بردار $\mathbf{v}$ نشان می‌دهیم. این بردار، چنانکه بعداً خواهیم دید، باید بر مسیر ذره مماس باشد. شتاب را با بردار $\mathbf{a}$ نشان می‌دهیم. جهت این بردار، چنانکه بعداً روشن خواهد شد، در حالت کلی رابطه‌ای با مکان ذره یا با جهت $\mathbf{v}$ ندارد.




شکل۱. بردارهای مکان، سرعت، و شتاب ذره‌ای که روی مسیری دلبخواه حرکت می‌کند. اندازه‌های این بردارها، و همین‌طور جهتهای آنها ارتباطی با هم ندارند.

در مختصات دکارتی، مکان ذره با $x$، $y$، و $z$ مشخص می‌شود. اینها مؤلفه‌های بردار $\mathbf{r}$، یعنی بردار مکان ذره‌اند:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \qquad (۱)$$

فرض کنید که ذره از نقطهٔ $\mathbf{r}_1$ در زمان $t_1$، به نقطهٔ $\mathbf{r}_2$ در زمان $t_2$ برود؛ شکل ۲الف جابه‌جایی (تغییر مکان) ذره در بازهٔ $\Delta t = t_2 - t_1$، بردار $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ است. سرعت متوسط $\overline{\mathbf{v}}$ در بازهٔ $\Delta t$ برابر است با

$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \qquad (۲)$$

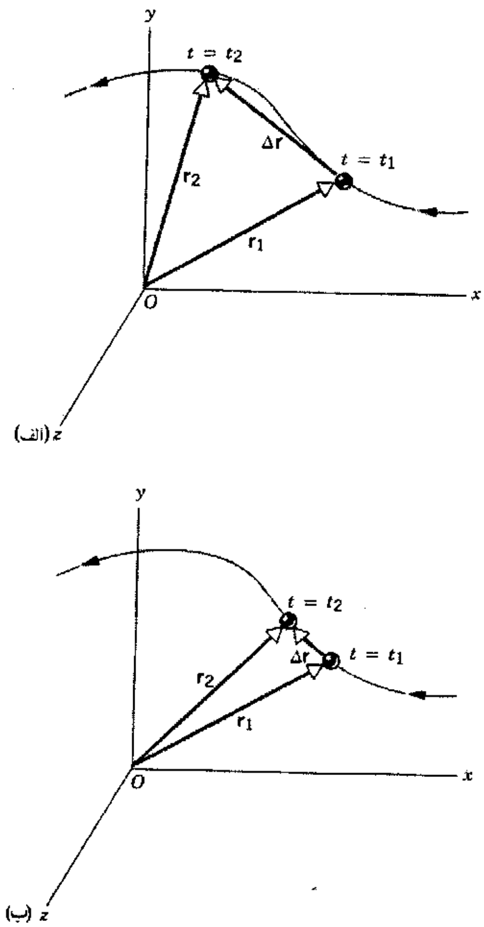
در معادلهٔ ۲، برای به‌دست آمدن $\overline{\mathbf{v}}$، بردار $\Delta\mathbf{r}$ در اسکالر $1/\Delta t$ ضرب شده است. پس جهت $\overline{\mathbf{v}}$ همان جهت $\Delta\mathbf{r}$ است.

دقت کنید که رابطهٔ سه بردار $\mathbf{r}_1$، $\Delta\mathbf{r}$، و $\mathbf{r}_2$ با هم، همان رابطهٔ سه بردار $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$، و $\mathbf{s}$ در شکل ۳ فصل ۳ است. یعنی، با استفاده از روش نموداریِ سر به دُم برای جمع برداری، برایند $\mathbf{r}_1$ و $\Delta\mathbf{r}$، بردار $\mathbf{r}_2$ است. پس $\mathbf{r}_2 = \Delta\mathbf{r} + \mathbf{r}_1$، یا $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

با کوچکتر کردن $\Delta t$، بردار $\Delta\mathbf{r}$ به مسیر واقعی نزدیک می‌شود (شکل ۲ب) و در حدِ $\Delta t \to 0$، به مماس بر مسیر میل می‌کند. در این حد، سرعت متوسط هم به سرعت لحظه‌ای $\mathbf{v}$ می‌گراید:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \qquad (۳)$$

با تعمیم معقولی از تعریف قبلی از مشتق (معادلهٔ ۸ فصل ۲)، کمیت ... معادلهٔ ۳ را به‌صورت مشتق بردار $\mathbf{r}$ نسبت به زمان نمایش




شکل۲. (الف) ذره در بازهٔ $\Delta t$، از $t_۱$ تا $t_۲$، از نقطهٔ $\mathbf{r}_۱$ به نقطهٔ $\mathbf{r}_۲$ می‌رود. جابه‌جایی ذره در این بازه، $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_۲ - \mathbf{r}_۱$ است. (ب) با کوچک شدن بازه، بردار جابه‌جایی به مسیر واقعی ذره نزدیک می‌شود.

می‌دهیم:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (۴)$$

بردار $\Delta\mathbf{r}$، در حد $\Delta t \to ۰$، بر مسیر مماس می‌شود. به همین ترتیب، بردار $\mathbf{v}$ هم در طی حرکت همه جا بر مسیر ذره مماس است.

معادلهٔ ۴ هم، مثل همهٔ معادلات برداری دیگر، با سه معادلهٔ اسکالر هم‌ارز است. برای درک این موضوع، بردار $\mathbf{v}$ را برحسب مؤلفه‌هایش می‌نویسیم و $\mathbf{r}$ را از معادلهٔ ۱ در معادلهٔ ۴ می‌گذاریم:

$$v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$
$$= \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \qquad (۵)$$

برای اینکه دو بردار با هم برابر باشند باید تک تکِ مؤلفه‌های متناظرشان با هم برابر باشند. پس، از مقایسهٔ طرفهای راست و چپ معادلهٔ ۵ معلوم می‌شود که

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \qquad (۶)$$

به‌طور خلاصه، رابطهٔ برداری معادلهٔ ۴ کاملاً با سه رابطهٔ برداری معادلهٔ ۶ هم‌ارز است.

تعمیم این مفاهیم به شتاب، مشابه بخش ۲ـ۵، سرراست است. شتاب متوسط از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} \qquad (۷)$$

و شتاب لحظه‌ای حد شتاب متوسط است وقتی که بازهٔ زمانی به سمت صفر میل می‌کند:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} \qquad (۸)$$

اینجا هم کمیت طرف راست عبارت از مشتق $\mathbf{v}$ نسبت به زمان است:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \qquad (۹)$$

و سرانجام با مساوی قرار دادن مؤلفه‌های متناظر در دو طرف معادلهٔ بالا خواهیم داشت

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} \qquad (۱۰)$$

توجه کنید که معادلات برداری، هم برای ساده کردن نمادگذاری به درد می‌خورند (مثلاً معادلهٔ ۹، به تنهایی، سه رابطهٔ معادلهٔ ۱۰ را دربر دارد) و هم برای جدا کردن مؤلفه‌ها از یکدیگر (مثلاً، $a_x$ اثری بر $v_y$ یا $v_z$ ندارد).

همچنین دقت کنید که چون بردار $\mathbf{v}$ هم جهت دارد و هم اندازه، از معادلهٔ ۹ معلوم می‌شود که تغییر جهت سرعت هم می‌تواند شتاب ایجاد کند، حتی اگر اندازهٔ سرعت تغییر نکند. در واقع حرکتی که اندازهٔ سرعت در آن ثابت است هم می‌تواند شتابدار باشد. یعنی، چون $v^۲ = v_x^۲ + v_y^۲ + v_z^۲$ است، مؤلفه‌ها می‌توانند چنان تغییر کنند که اندازهٔ $\mathbf{v}$ ثابت بماند. آشناترین مثال چنین حرکتی، حرکت دایره‌ای یکنواخت است، که آن‌را در بخش ۴ـ۴ بررسی خواهیم کرد.

---

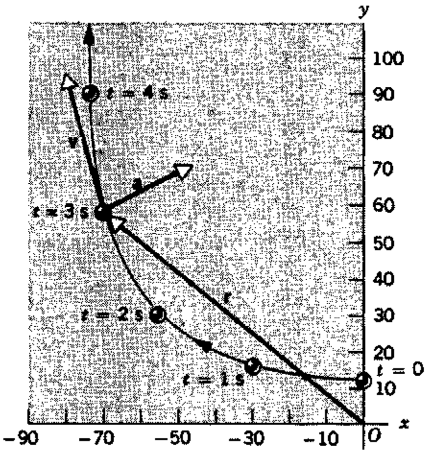
**مثال ۱.** ذره‌ای در صفحهٔ $xy$ حرکت می‌کند و مختصات $x$ و $y$ آن به‌صورت $x(t) = t^۳ - ۳۲t$ و $y(t) = ۵t^۲ + ۱۲$ به زمان بستگی دارند. $x$ و $y$ برحسب متر، و $t$ برحسب ثانیه است. مکان، سرعت، و شتاب ذره را در $t = ۳\text{s}$ تعیین کنید.

حل: مکان از معادلهٔ ۱ به‌دست می‌آید. با گذاشتن $x(t)$ و $y(t)$ از روابط بالا، نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (t^۳ - ۳۲t)\mathbf{i} + (۵t^۲ + ۱۲)\mathbf{j}$$

و با محاسبهٔ این عبارت به‌ازای $t = ۳\text{s}$،

$$\mathbf{r} = -۶۹\mathbf{i} + ۵۷\mathbf{j}$$




شکل۳. مثال ۱. مسیر ذره، و مکان ذره در $t = ۰\text{s}$، $t = ۱\text{s}$، $t = ۲\text{s}$، $t = ۳\text{s}$، و $t = ۴\text{s}$ روی شکل مشخص شده است. همچنین، بردارهای مکان، سرعت، و شتاب ذره در $t = ۳\text{s}$ روی شکل نشان داده شده‌اند. توجه کنید که ارتباط خاصی بین جهتهای $\mathbf{r}$، $\mathbf{v}$، و $\mathbf{a}$ وجود ندارد.

در این رابطه، یکای مؤلفه‌های $\mathbf{r}$، متر است

مؤلفه‌های سرعت از معادلهٔ ۶ به‌دست می‌آیند:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^۳ - ۳۲t) = ۳t^۲ - ۳۲$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(۵t^۲ + ۱۲) = ۱۰t$$

از معادلهٔ ۵ نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} = (۳t^۲ - ۳۲)\mathbf{i} + ۱۰t\mathbf{j}$$

و در $t = ۳\text{s}$

$$\mathbf{v} = -۵\mathbf{i} + ۳۰\mathbf{j}$$

که یکای آن $\text{m/s}$ است.

مؤلفه‌های شتاب عبارت‌اند از

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(۳t^۲ - ۳۲) = ۶t$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(۱۰t) = ۱۰$$

شتاب در $t = ۳\text{s}$ برابر است با

$$\mathbf{a} = ۱۸\mathbf{i} + ۱۰\mathbf{j}$$

شکل ۳ مسیر حرکت را از $t = ۰$ تا $t = ۴\text{s}$ نشان می‌دهد. بردارهای مکان، سرعت، و شتاب در $t = ۳\text{s}$، روی شکل مشخص شده‌اند. توجه کنید که $\mathbf{v}$ بر مسیر، در مکانِ متناظر با $t = ۳\text{s}$، مماس است. همچنین دقت کنید که جهت $\mathbf{a}$ ارتباط خاصی با جهت $\mathbf{r}$ یا جهت $\mathbf{v}$ ندارد.

---

## ۲ـ۴ حرکت با شتاب ثابت

حالا حرکت با شتاب ثابت را بررسی می‌کنیم. در این مورد خاص، طی حرکت ذره، اندازه و جهت شتاب $\mathbf{a}$ هیچ‌یک تغییر نمی‌کنند. بنابراین، مؤلفه‌های $\mathbf{a}$ هم تغییر نمی‌کنند. چنین وضعیتی را می‌توانیم به شکل جمع سه مؤلفهٔ حرکت با شتاب ثابت، که همزمان در سه راستای عمود بر هم انجام می‌شوند توصیف کنیم. در حالت کلی ذره روی مسیری منحنی حرکت می‌کند. حتی اگر یکی از مؤلفه‌های شتاب، مثلاً $a_x$، صفر باشد، مسیر حرکت می‌تواند منحنی باشد؛ زیرا در این حالت مؤلفهٔ سرعت متناظر با آن، $v_x$، مقداری ثابت است که می‌تواند صفر نباشد. مثالی از این مورد اخیر، حرکت پرتابه است. مسیر حرکت، یک منحنی در صفحهٔ قائم است و شتاب ذره با چشمپوشی از مقاومت هوا، شتاب ثابت $\mathbf{g}$ است، که تنها در راستای قائم مؤلفه دارد.

برای به‌دست آوردن شکل کلی معادلات حرکت با شتاب ثابت، کافی است بگذاریم

$$a_x = \text{const.} \qquad a_y = \text{const.} \qquad a_z = \text{const.}$$

پرتابه در $t = ۰$ از نقطهٔ اولیهٔ $\mathbf{r}_۰ = x_۰\mathbf{i} + y_۰\mathbf{j} + z_۰\mathbf{k}$، با سرعت اولیهٔ $\mathbf{v}_۰ = v_{x_۰}\mathbf{i} + v_{y_۰}\mathbf{j} + v_{z_۰}\mathbf{k}$ شروع به حرکت می‌کند. از اینجا به‌بعد، مثل بخش ۲ـ۶ عمل می‌کنیم و متناظر با معادلهٔ ۱۵ فصل ۲، سه معادلهٔ اسکالر به‌دست می‌آوریم: $v_x = v_{x_۰} + a_x t$، $v_y = v_{y_۰} + a_y t$، و $v_z = v_{z_۰} + a_z t$. این سه معادله را می‌شود به شکل یک معادلهٔ برداری نوشت:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_۰ + \mathbf{a}t \qquad (۱۱)$$

به‌یاد داشته باشید که این معادله، یا هر معادلهٔ برداری دیگری، سه معادلهٔ اسکالر مستقل از هم در بر دارد.

جملهٔ دوم طرف راست معادلهٔ ۱۱، حاصل‌ضرب یک بردار در یک اسکالر است. چنانکه در بخش ۳ـ۵ دیدیم، حاصل برداری به اندازهٔ $at$ و در جهت بردار $\mathbf{a}$ است.

با ادامهٔ کار به روش بخش ۲ـ۶، پنج معادله برای توصیف حرکت سه‌بعدی با شتاب ثابت به‌دست می‌آید. جدول ۱ این پنج معادله را نشان می‌دهد. اینها را با پنج معادلهٔ متناظر یک‌بعدی جدول ۲ فصل ۲ مقایسه کنید. به‌جز معادلهٔ ۱۳ که معادله‌ای اسکالر است (هرچند شاملِ بردار)، هر یک از معادلات جدول ۱ سه معادلهٔ اسکالر مستقل از هم دربر دارند. مؤلفهٔ $x$ معادلات ۱۱، ۱۲، ۱۴ و ۱۵، همان معادلات

جدول ۱. معادلات برداری حرکت با شتاب ثابت.

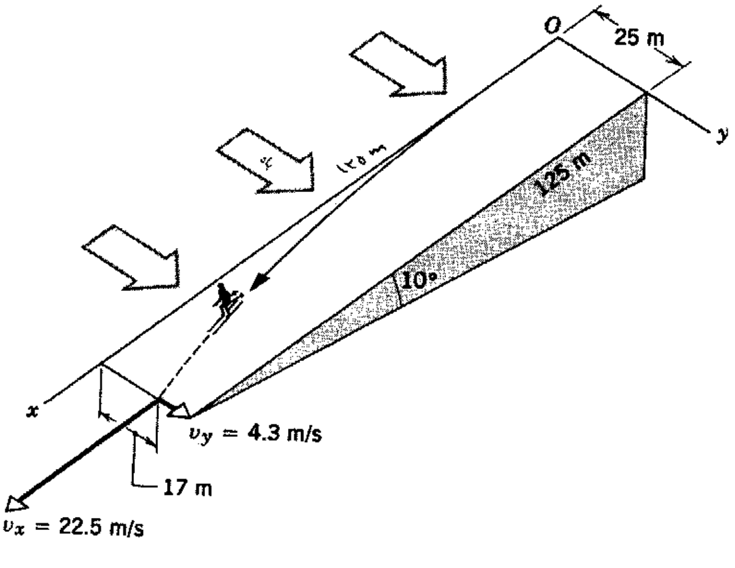
| شمارهٔ معادله | معادله | شامل r | $\mathbf{v}_۰$ | v | a | t |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۱۱ | $\mathbf{v}=\mathbf{v}_۰+\mathbf{a}t$ | × | √ | √ | √ | √ |
| ۱۲ | $\mathbf{r}=\mathbf{r}_۰+\mathbf{v}_۰t+\frac{۱}{۲}\mathbf{a}t^۲$ | √ | √ | × | √ | √ |
| ۱۳* | $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}_۰\cdot\mathbf{v}_۰+۲\mathbf{a}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_۰)$ | √ | √ | √ | √ | × |
| ۱۴ | $\mathbf{r}=\mathbf{r}_۰+\frac{۱}{۲}(\mathbf{v}_۰+\mathbf{v})t$ | √ | √ | √ | × | √ |
| ۱۵ | $\mathbf{r}=\mathbf{r}_۰+\mathbf{v}t-\frac{۱}{۲}\mathbf{a}t^۲$ | √ | × | √ | √ | √ |

* این معادله شامل ضرب اسکالر یا نقطه‌ای دو بردار است، که در بخش ۳ـ۵ تعریف شد.

متناظر در جدول ۲ فصل ۲اند. چون معادلهٔ ۱۳ اسکالر است، مؤلفهٔ $x$ (یا هر مؤلفهٔ دیگری) ندارد.

**مثال ۲.** اسکی‌بازی روی شیب همواری از دامنه کوه پایین می‌آید. زاویهٔ خط شیب به طرف پایین (شمال‌ـجنوب) با افق °۱۰ است. بادی از جهت غرب می‌وزد که به اسکی باز یک شتاب جانبی به‌اندازهٔ $۰٫۵۴\mathrm{m/s^۲}$ می‌دهد (شکل ۴). اسکی باز از گوشهٔ شمال‌غربی شیب شروع به حرکت می‌کند. مؤلفهٔ سرعت اولیه او در جهت شیب $۹٫۰\mathrm{m/s}$، و در جهت جانبی صفر، است. شیب بدون اصطکاک است و ۱۲۵m طول و ۲۵m عرض دارد. (الف) اسکی‌باز در کجای شیب از آن خارج می‌شود؟ (ب) سرعت او در آن نقطه چقدر است؟ (راهنمایی: شتاب گرانشی در راستای صفحه‌ای با زاویهٔ شیب $\theta$، برابر با $g\sin\theta$ است.)

حل: (الف) مبدأ را گوشهٔ شمال‌غربی، محور $x$ را رو به پایین شیب،




شکل۴. مثال ۲.

و محور $y$ را در جهت جانبی می‌گیریم. مؤلفه‌های شتاب برابرند با

$$a_x = g\ \sin\ ۱۰° = ۱٫۷۰\,\mathrm{m/s^۲}$$
$$a_y = ۰٫۵۴\,\mathrm{m/s^۲}$$

توجه کنید که این مؤلفه‌ها مستقل از هم‌اند. مؤلفهٔ $a_x$، ناشی از گرانش و به‌طرف پایین شیب است، و ربطی به وزیدن یا نوزیدن باد جانبی ندارد. $a_y$ هم شتاب جانبی است که از باد حاصل می‌شود، چه سطح شیبدار باشد و چه نباشد. امکان کاربرد مستقل این دو مؤلفه، گویای ماهیت حساب برداری است.

$t=۰$ را زمانی می‌گیریم که اسکی‌باز شروع به حرکت می‌کند. داریم $v_{x_۰}=۹٫۰\,\mathrm{m/s}$ و $v_{y_۰}=۰$. پس

$$v_x = v_{x_۰}+a_xt = ۹٫۰\,\mathrm{m/s}+(۱٫۷۰\,\mathrm{m/s^۲})t$$
$$v_y = v_{y_۰}+a_yt = ۰+(۰٫۵۴\,\mathrm{m/s^۲})t$$
$$x = x_۰+v_{x_۰}t+\frac{۱}{۲}a_xt^۲$$
$$= ۰+(۹٫۰\,\mathrm{m/s})t+(۰٫۸۵\,\mathrm{m/s^۲})t^۲$$
$$y = y_۰+v_{y_۰}t+\frac{۱}{۲}a_yt^۲ = ۰+۰+(۰٫۲۷\,\mathrm{m/s^۲})t^۲$$

فعلاً فرض می‌کنیم که اسکی‌باز، پیش از آنکه از لبهٔ جانبی شیب خارج شود، به پایین شیب می‌رسد. (بعداً می‌توانیم درستی این فرض را وارسی کنیم.) اول باید زمانی این رویداد (یعنی زمانی که $x=۱۲۵\mathrm{m}$ می‌شود) را به‌دست آوریم:

$$۱۲۵\mathrm{m} = (۹٫۰\,\mathrm{m/s})t+(۰٫۸۵\,\mathrm{m/s^۲})t^۲$$

از حل این معادلهٔ درجهٔ دو، دو جواب $t=۷٫۹۴\mathrm{s}$، و $t=-۱۸٫۵\mathrm{s}$ به‌دست می‌آید. فعلاً فقط جواب مثبت را در نظر می‌گیریم و با استفاده از آن، مختصهٔ $y$ متناظر با این زمان را حساب می‌کنیم:

$$y=(۰٫۲۷\,\mathrm{m/s^۲})t^۲=(۰٫۲۷\,\mathrm{m/s^۲})(۷٫۹۴\mathrm{s})^۲=۱۷٫۰\,\mathrm{m}$$

جابه‌جایی جانبی ۱۷٫۰m، کمتر از عرض شیب (۲۵m) است. پس فرض ما درست است، اسکی‌باز به فاصلهٔ ۱۷٫۰m از لبهٔ غربی شیب، از انتهای شیب خارج می‌شود.

(ب) مؤلفه‌های سرعت را می‌شود مستقیماً در $t = ۷٫۹۴\text{s}$ حساب کرد:

$$v_x = ۹٫۰\,\text{m/s} + (۱٫۷۰\,\text{m/s}^۲)(۷٫۹۴\text{s}) = ۲۲٫۵\,\text{m/s}$$
$$v_y = (۰٫۵۴\,\text{m/s}^۲)(۷٫۹۴\text{s}) = ۴٫۳\,\text{m/s}$$

دقت کنید که در حل این مسئله، محورهای $x$ و $y$ را در صفحهٔ شیب انتخاب کردیم. به این ترتیب، مسئلهٔ سه‌بعدی به مسئله‌ای دوبعدی تبدیل شده اگر از اول در دستگاه مختصاتی کار می‌کردیم که صفحهٔ $xy$ آن در سطح افقی، و محور $z$ آن در راستای قائم بود، شتاب سه مؤلفه پیدا می‌کرد و مسئله پیچیده‌تر می‌شد. معمولاً، در حل مسائل، آزادیم که جهت محورهای مختصات و محل مبدأ را به دلخواه انتخاب کنیم، به شرط آنکه این انتخاب را در تمام مراحل حل مسئله ثابت نگه داریم.

ریشهٔ منفی، $t = -۱۸٫۵\text{s}$، چه می‌شود؟ معادلات اولیهٔ حرکت را از زمان ۰ به بعد نوشتیم، پس زمان مثبت، حرکت بعدی اسکی‌باز روی شیب را توصیف می‌کند. زمان منفی باید مربوط به حرکت اسکی‌باز پیش از عبور از گوشهٔ شمال غربی شیب (مبدأ انتخابی ما) باشد. جواب منفی می‌گوید که اسکی‌باز می‌توانسته است پیش از رسیدن به مبدأ در $t = ۰$، یک مسیر محتمل قبلی را پیموده باشد و با سرعتِ درست (سرعت اولیهٔ مسئلهٔ ما) به نقطهٔ مبدأ رسیده باشد. طی این بخشِ قبلی حرکت، اسکی‌باز باید قبل از رسیدن به گوشهٔ شمال غربی، مسافت ۱۲۵m را (در جهت بالای شیب)! در ۱۸٫۵s پیموده باشد. مؤلفه‌های سرعت را در $t = -۱۸٫۵\text{s}$ به‌دست بیاورید و چگونگی حرکت اسکی‌باز را در آن زمان تعیین کنید. مختصهٔ $y$ متناظر، در $t = -۱۸٫۵\text{s}$ چه بوده است؟ آیا این جواب معقول است؟ بیشترین مقدار مختصات $x$ و $y$ در بازهٔ بین $t = ۱۸٫۵\text{s}$ و $t = ۰$ چقدر است؟

از حل ریاضی مسائل فیزیکی، خیلی وقتها نتایج غیرمنتظره‌ای به‌دست می‌آید؛ مثل همین زمان منفی در مثال بالا. اگر در این مسئله فرض کنیم که حرکت اسکی‌باز در $t = ۰$ شروع شده است، ریشهٔ منفی برایمان اهمیتی ندارد. اما بد نیست که هر وقت به چنین جوابهایی برخوردید، معنی فیزیکی آنها را بررسی کنید.

## ۴ـ۳ حرکت پرتابی

حرکت پرتابی، نمونه‌ای از حرکت با شتاب ثابت است. حرکتِ دوبعدی ذره‌ای است که به‌طور مایل در هوا پرتاب می‌شود. حرکت (ایده‌آل) عمومی بیسبال یا توپ گلف، مثالی از این نوع حرکت است. فعلاً فرض می‌کنیم که اثر هوا برحرکت پرتابی قابل اغماض است. در فصل ۶، اثر مقاومت هوا را (که اغلب قابل توجه است) بررسی خواهیم کرد.

حرکت پرتابی، حرکتی است با شتابِ ثابت $\mathbf{g}$؛ این شتاب به طرفِ پایین است. ممکن است سرعت این حرکت مؤلفهٔ افقی داشته باشد، اما شتاب آن مؤلفهٔ افقی ندارد. در دستگاه مختصاتی که جهت مثبت محور $y$ آن در امتداد قائم رو به بالا باشد، می‌شود گفت $a_y = -g$ (اینجا هم، مثل فصل ۲، $g$ همواره یک عدد مثبت است) و $a_x = ۰$. بعلاوه، فرض می‌کنیم $\mathbf{v}_۰$ در صفحهٔ $xy$ باشد، یعنی $v_{z_۰}$ است. چون $a_z$ هم صفر است، از مؤلفهٔ $z$ معادلهٔ ۱۱ معلوم می‌شود که $v_z$ همواره برابر با صفر است. پس کافی است که فقط رویدادهای صفحهٔ $xy$ را بررسی کنیم.

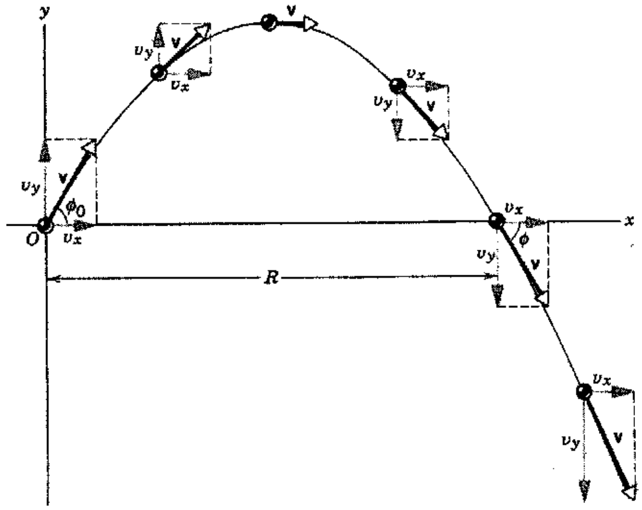
مبدأ مختصات را نقطه‌ای می‌گیریم که حرکت پرتابی از آن شروع می‌شود (شکل ۵)، مثلاً نقطه‌ای که در آن توپ از دست پرتاب‌کننده رها می‌شود. با این انتخاب، $x_۰ = y_۰ = ۰$ است. سرعت در $t = ۰$، زمان شروع حرکت پرتابه، $\mathbf{v}_۰$ است که با جهت مثبت محور $x$ زاویهٔ $\phi_۰$ می‌سازد. به این ترتیب، مؤلفه‌های $x$ و $y$ بردار $\mathbf{v}_۰$ (شکل ۵) عبارت‌اند از

$$v_{x_۰} = v_۰ \cos\phi_۰ \quad \text{و} \quad v_{y_۰} = v_۰ \sin\phi_۰ \qquad (۱۶)$$

چون شتاب مؤلفهٔ افقی ندارد، مؤلفهٔ افقی سرعت ثابت است. مقادیر $a_x = ۰$ و $v_{x_۰} = v_۰ \cos\phi_۰$ را در مؤلفهٔ $x$ معادلهٔ ۱۱ می‌گذاریم نتیجه می‌شود که

$$v_x = v_{x_۰} + a_x t = v_۰ \cos\phi_۰ \qquad (۱۷)$$

مؤلفهٔ افقی سرعت، در تمام مدت پرواز، برابر با مقدار اولیهٔ آن است.




شکل۵. مسیر پرتابه، سرعت اولیهٔ $\mathbf{v}_۰$ و مؤلفه‌های آن، و سرعت $\mathbf{v}$ با مؤلفه‌هایش در پنج لحظهٔ مختلف پس از پرتاب. دقت کنید که طی حرکت، $v_x = v_{x_۰}$ است. $R$، فاصلهٔ افقی، برد پرتابه است.

Ramin.samad@yahoo.com

مؤلفهٔ عمودی سرعت، در اثر شتاب ثابتِ رو به پایین، تغییر می‌کند. مقادیر $a_y = -g$ و $v_{y_0} = v_0 \sin \phi_0$ را در مؤلفهٔ $y$ معادلهٔ ۱۱ می‌گذاریم. خواهیم داشت

$$v_y = v_{y_0} + a_y t = v_0 \sin \phi_0 - gt \qquad (۱۸)$$

مؤلفهٔ قائم سرعت، درست مثلِ سرعت سقوط آزاد رفتار می‌کند. (در واقع اگر حرکت شکل ۵ را در دستگاه مرجعی بررسی کنیم که با سرعت $v_{x_0}$ به‌طرف راست حرکت می‌کند، حرکت ذره حرکت جسمی است که با سرعت اولیهٔ $v_0 \sin \phi_0$ در جهت عمودی به بالا پرتاب شده است.)

اندازهٔ بردار سرعت درهر لحظه برابر است با

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad (۱۹)$$

زاویهٔ بردار سرعت با افق در هر لحظه، زاویهٔ $\phi$، از این رابطه به‌دست می‌آید:

$$\tan \phi = \frac{v_y}{v_x} \qquad (۲۰)$$

بردار سرعت در هر نقطه بر مسیر ذره در آن نقطه مماس است (شکل ۵).

مختصهٔ $x$ مکان ذره در هر لحظه، از مؤلفهٔ $x$ معادلهٔ ۱۲ (جدول ۱) به‌دست می‌آید. اگر مقادیر $x_0 = 0$، $a_x = 0$، و $v_{x_0} = v_0 \cos \phi_0$ را در این معادله قرار بدهیم نتیجه می‌شود که

$$x = x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 = (v_0 \cos \phi_0) t \qquad (۲۱)$$

مختصهٔ $y$ هم از مؤلفهٔ $y$ معادلهٔ ۱۲ به‌دست می‌آید. با $y_0 = 0$، $a_y = -g$، و $v_{y_0} = v_0 \sin \phi_0$، خواهیم داشت

$$y = y_0 + v_{y_0} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = (v_0 \sin \phi_0) t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (۲۲)$$

معادلات ۲۱ و ۲۲، $x$ و $y$ را به‌صورت توابعی از پارامتر مشترک $t$، زمان پرواز، به‌دست می‌دهند. $t$ را بین این دو معادله حذف می‌کنیم. نتیجه می‌شود که

$$y = (\tan \phi_0) x - \frac{g}{2(v_0 \cos \phi_0)^2} x^2 \qquad (۲۳)$$

این معادله $y$ را به $x$ مربوط می‌کند و در واقع معادلهٔ مسیر پرتابه است. چون $v_0$، $\phi_0$، و $g$ ثابت‌اند، شکل کلی معادلهٔ بالا

$$y = bx - cx^2$$

است، که معادلهٔ سهمی است. پس مسیر پرتابه هم سهموی است (شکل ۵).

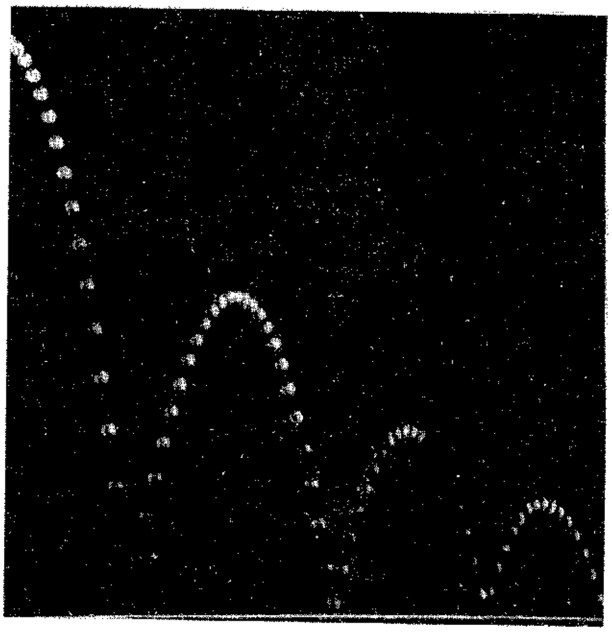
برد افقی $R$ پرتابه (شکل ۵) طبق تعریف، مسافتی است در راستای افقی که پرتابه می‌پیماید تا به سطحی برسد که از آن شروع به حرکت کرده بود. برای پیدا کردن برد کافی است در معادلهٔ ۲۳ بگذاریم $y = 0$. یک جواب این معادله $x = 0$ است؛ جواب دیگر، برد را می‌دهد:

$$R = \frac{2 v_0^2}{g} \sin \phi_0 \cos \phi_0 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\phi_0 \qquad (۲۴)$$

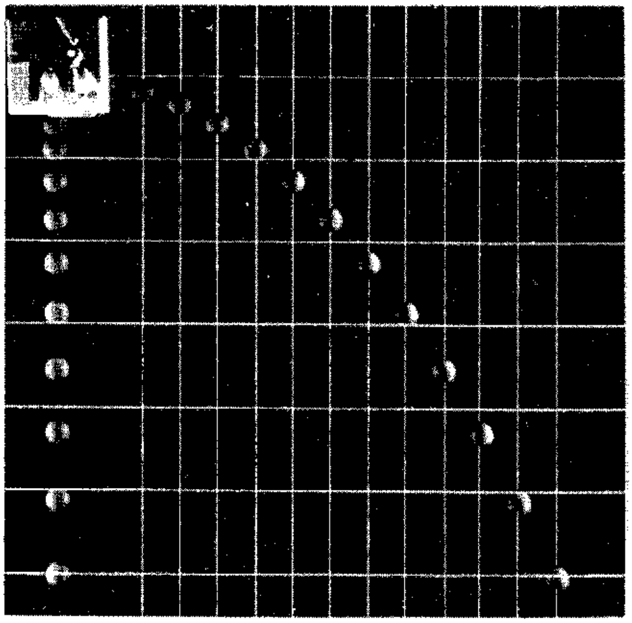
در این رابطه، از اتحاد مثلثاتی $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ استفاده کرده‌ایم. توجه کنید که اگر سرعت اولیه ثابت باشد، بیشترین مقدار برد به‌ازای $\phi_0 = 45^\circ$ به‌دست می‌آید. در این حالت، $\sin 2\phi_0 = 1$ است.

جوابهایی که به‌دست آوردیم، شکل ایده‌آل حرکت پرتابی بود. یک عامل مهم، یعنی گرانش را در نظر گرفتیم؛ اما عامل دیگری هم وجود دارد که می‌تواند بر حرکت پرتابه اثر کند و اغلب اهمیت دارد ــ مقاومت هوا. در سرعتهای کم، معمولاً می‌شود مقاومت هوا را نادیده گرفت، اما در سرعتهای زیاد، مسیر پرتابه دیگر به شکل سهمی معادلهٔ ۲۳ نیست، و برد پرتابه ممکن است خیلی کمتر از مقداری باشد که از معادلهٔ ۲۴ به‌دست می‌آید. در فصل ۶ آثار مقاومت هوا را بررسی خواهیم کرد؛ فعلاً فرض می‌کنیم که معادلات این بخش، حرکت پرتابی را به‌خوبی توصیف می‌کنند.

شکل ۶ مسیر پرتابه‌ای را نشان می‌دهد که اثر مقاومت هوا بر آن ناچیز است. مسیر کاملاً شبیه به سهمی است. در شکل ۷ حرکت



شکل۶. عکسی با فلاشهای پی‌درپی (استروبوسکوپیک) از توپ گلفی که از طرف چپ وارد عکس می‌شود و به سطح سختی برمی‌خورد، و از آن وامی‌جهد. حرکت توپ، بین دو برخورد، مسیرسهموی مشخصهٔ حرکت پرتابی را نشان می‌دهد. چرا فکر می‌کنید که ارتفاع جهشها به تدریج کم می‌شود؟ (پاسخ را در فصلهای ۸ و ۱۰ پیدا خواهید کرد.)



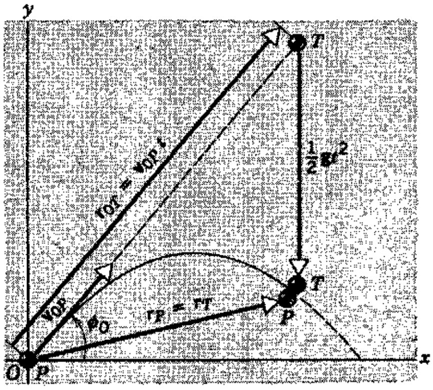
شکل۷. توپ I از حالت سکون رها می‌شود و در همان زمان، توپ II به طرف راست پرتاب می‌شود. توجه کنید که توپها در راستای قائم دقیقاً با یک سرعت سقوط می‌کنند؛ حرکت افقی توپ II بر سرعت سقوط قائم آن اثری ندارد. فاصلهٔ بین نوردهیهای متوالی این عکسِ استروبی ۱٫۳۰s بوده است. آیا سرعت افقی توپ II ثابت به نظر می‌رسد؟

پرتابه‌ای که به‌طور افقی پرتاب شده با حرکت جسمی که همزمان رها شده و سقوط آزاد می‌کند مقایسه شده است. در اینجا می‌توانید پیش‌بینیهای معادلات ۲۱ و ۲۲ را، به‌ازای $\phi_\circ = \circ$، مستقیماً تحقیق کنید. توجه کنید که (۱) حرکت افقی پرتابهٔ اول واقعاً همانی است که از معادلهٔ ۲۱ به‌دست می‌آید: مؤلفهٔ $x$، در بازه‌های زمانی یکسان افزایش یکسانی دارد، و این افزایش مستقل از حرکت در راستای $y$ است؛ و (۲) مؤلفهٔ $y$ حرکتهای دو پرتابه یکسان است: مسافت طی شده در بازه‌های یکسان برای هر دو پرتابه یکی است، و به حرکت افقی یکی از آنها بستگی ندارد.

## زدن هدفِ در حال سقوط

یکی از نمایشهای زیبای کلاسی این است که: با یک تفنگ بادی هدفی را که در ارتفاع بالاتری از تفنگ معلق است نشانه می‌گیریم و به آن شلیک می‌کنیم. ترتیبی داده شده است که هدف، همزمان با خروج "گلوله" از لولهٔ تفنگ، رها می‌شود و سقوط آزاد می‌کند. در این نمایش سرعت اولیهٔ گلوله هر چه باشد، گلوله همیشه به هدفِ در حال سقوط می‌خورد.

ساده‌ترین راهِ فهمیدن این موضوع این است: اگر شتاب گرانش نبود، هدف سقوط نمی‌کرد و گلوله درست در جهت خطی که آن‌را به هدف وصل می‌کند حرکت می‌کرد (شکل ۸). گرانش موجب می‌شود که هر دو جسم با سرعت یکسان، نسبت به نقطه‌ای که در صورت نبودن گرانش در آنجا می‌بودند سقوط کنند. بنابراین، در زمان $t$ گلوله




شکل۸. جابه‌جایی پرتابه نسبت به مبدا را، در هر زمان $t$، می‌شود مجموع دو بردار دانست: $\mathbf{v}_{\circ P}t$ در جهت $\mathbf{v}_{\circ P}$ و $۱/۲\mathbf{g}t^۲$ در راستای قائم رو به پایین است.

به اندازهٔ $\frac{۱}{۲}gt^۲$ نسبت به نقطهٔ تعلیق هدف (که اگر گرانش نبود به آن می‌رسید) سقوط کرده است. هدف هم در این مدت به همین اندازه از محل اولیهٔ خود سقوط کرده است. زمانی که گلوله به خطِ سقوط هدف می‌رسد، همان قدر پایین‌تر از مکان اولیهٔ هدف است که خودِ هدف پایین‌تر است. پس گلوله به هدف می‌خورد. گلوله اگر سریعتر از این حرکت کند ($v_\circ$ بزرگتر باشد)، برد بیشتری هم خواهد داشت و در نقطهٔ بالاتری به خط سقوط هدف می‌رسد؛ اما چون این رویداد، نسبت به حالت قبل، زودتر رخ می‌دهد، هدف هم در این مدت، کمتر سقوط کرده است و باز هم برخورد صورت می‌گیرد. برای سرعتهای کمتر هم، همین استدلال مشاهده را توضیح می‌دهد.

با استفاده از معادلهٔ ۱۲

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_\circ + \mathbf{v}_\circ t + \frac{۱}{۲}\mathbf{a}t^۲$$

می‌توانیم ماوقع را به‌طور تحلیلی هم نشان بدهیم. به کمک این معادله، مکان پرتابه و هدف را در زمان دلبخواه $t$ به‌دست می‌آوریم. برای پرتابهٔ $P$، $\mathbf{r}_\circ = \circ$ و $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ است، پس

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{v}_{\circ P}t + \frac{۱}{۲}\mathbf{g}t^۲$$

برای هدفِ $T$، $\mathbf{r}_\circ = \mathbf{r}_{\circ T}$، $\mathbf{v}_\circ = \circ$ و $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ است، پس

$$\mathbf{r}_T = \mathbf{r}_{\circ T} + \frac{۱}{۲}\mathbf{g}t^۲$$

اگر قرار باشد برخورد صورت بگیرد، $\mathbf{r}_P$ باید با $\mathbf{r}_T$ برابر شود. مقایسهٔ دو معادله نشان می‌دهد که این برخورد همیشه در زمانی اتفاق می‌افتد که $\mathbf{r}_{\circ T} = \mathbf{v}_{\circ P}t$ شود، یعنی در زمان $(r_{\circ T}/v_{\circ P})t$ که در غیابِ گرانش، پرتابهٔ بی‌شتاب می‌بایست در امتداد خط پرتاب به هدف ثابت می‌رسید. چون ضرب شدن بردار در یک اسکالر، جهت آن را تغییر نمی‌دهد، از معادلهٔ $\mathbf{r}_{\circ T} = \mathbf{v}_{\circ P}t$ نتیجه می‌شود که $\mathbf{r}_{\circ T}$ و

$\mathbf{v}_{\circ p}$ باید هم‌جهت باشند. یعنی تفنگ را باید درست به طرف مکان اولیهٔ هدف نشانه گرفت.

---

مثال ۳. می‌خواهیم بسته‌ای را از هواپیما روی هدف بیندازیم. هواپیما با سرعت ثابت افقی ۱۵۵km/h در ارتفاع ۲۲۵m از هدف پرواز می‌کند؛ جهت پرواز آن به طرف نقطه‌ای مستقیماً دربالای هدف است. زاویهٔ خط دید هدف از هواپیما، $\alpha$، در لحظهٔ رها کردن بسته چقدر باشد تا بسته به هدف برسد (شکل ۹)؟

حل: دستگاه مرجعی انتخاب می‌کنیم که نسبت به زمین ثابت، و مبدأ آن $O$، نقطهٔ رها شدن بسته باشد. حرکت بسته در لحظهٔ رها شدن، همان حرکت هواپیماست. پس سرعت اولیهٔ بسته، $\mathbf{v}_\circ$، در راستای افق و اندازهٔ آن ۱۵۵km/h است. زاویهٔ پرتاب $\phi_\circ$ صفر است.

زمان سقوط از معادلهٔ ۲۲ به‌دست می‌آید. با $\phi_\circ = \circ$ و $y = -۲۲۵\mathrm{m}$، نتیجه می‌شود که

$$t = \sqrt{-\frac{۲y}{g}} = \sqrt{-\frac{(۲)(-۲۲۵\mathrm{m})}{۹{,}۸\mathrm{m/s^۲}}} = ۶{,}۷۸\mathrm{s}$$

توجه کنید که زمان سقوط در پرتابِ افقی، به سرعت هواپیما بستگی ندارد. (در پرتابِ مایل چنین نیست؛ مسئلهٔ ۳۸.)

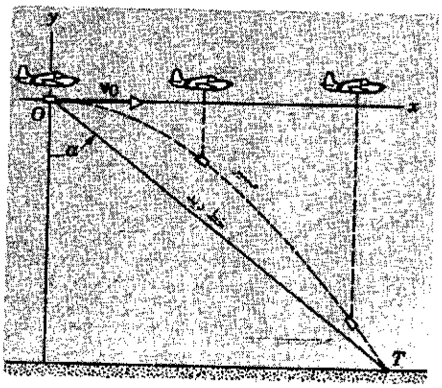
مسافت افقی‌ای که بسته در این مدت می‌پیماید از معادلهٔ ۲۱ به‌دست می‌آید:

$$x = v_{x_\circ}\, t = (۱۵۵\mathrm{km/h})(۱\mathrm{h}/۳۶۰۰\mathrm{s})(۶{,}۷۸\mathrm{s})$$
$$= ۰{,}۲۹۲\mathrm{km} = ۲۹۲\mathrm{m}$$

بنابراین، زاویهٔ دید (شکل ۹) باید برابر باشد با

$$\alpha = \tan^{-۱}\frac{x}{|y|} = \tan^{-۱}\frac{۲۹۲\mathrm{m}}{۲۲۵\mathrm{m}} = ۵۲^\circ$$

آیا مسیر حرکت بسته از دیدگاه دستگاه مرجعی که نسبت به هواپیما ساکن است، سهموی به نظر می‌رسد؟ (آیا تاکنون فیلمی از پرتاب بمب از هواپیما از چشم دوربینی در همان هواپیما، یا در هواپیمای دیگری که "پابه‌پای" اولی پرواز می‌کند، دیده‌اید؟)




شکل۹. مثال ۳.

مثال ۴. فوتبالیستی توپ را با سرعت اولیهٔ ۱۵٫۵m/s با زاویهٔ ۳۶° نسبت به افق شوت می‌کند. با فرض اینکه توپ در یک صفحهٔ قائم حرکت کند، (الف) زمان $t_۱$ برای اینکه توپ به نقطهٔ اوج مسیر خود برسد چقدر است؟ (ب) توپ تا چه ارتفاعی اوج می‌گیرد؟، (ج) برد توپ و زمان پرواز آن چقدر است؟ (د) سرعت توپ را در لحظهٔ برخورد به زمین پیدا کنید.

حل: (الف) در نقطهٔ اوج، مؤلفهٔ قائم سرعت صفر است. $t$ را از معادلهٔ ۱۸ به‌دست می‌آوریم:

$$t = \frac{v_\circ \sin\phi_\circ - v_y}{g}$$

در این معادله اگر مقادیر

$$v_y = \circ,\ v_\circ = ۱۵{,}۵\mathrm{m/s},\ \phi_\circ = ۳۶^\circ,\ g = ۹{,}۸\mathrm{m/s^۲}$$

را بگذاریم، نتیجه می‌گیریم

$$t_۱ = \frac{(۱۵{,}۵\mathrm{m/s})(\sin ۳۶^\circ)}{۹{,}۸\mathrm{m/s^۲}} = ۰{,}۹۳\mathrm{s}$$

(ب) توپ در $t = ۰{,}۹۳\mathrm{s}$ به نقطهٔ اوج می‌رسد از معادلهٔ ۲۲

$$y = (v_\circ \sin\phi_\circ)t - \frac{۱}{۲}gt^۲$$

معلوم می‌شود که

$$y_{\max} = (۱۵{,}۵\mathrm{m/s})(\sin ۳۶^\circ)(۰{,}۹۳\mathrm{s}) - $$
$$- \frac{۱}{۲}(۹{,}۸\mathrm{m/s^۲})(۰{,}۹۳\mathrm{s})^۲ = ۴{,}۲\mathrm{m}$$

(ج) برد $R$ از رابطهٔ ۲۴ به‌دست می‌آید

$$R = \frac{v_\circ^۲}{g}\sin ۲\phi_\circ = \frac{(۱۵{,}۵\mathrm{m/s})^۲}{۹{,}۸\mathrm{m/s^۲}}\sin ۷۲^\circ = ۲۳{,}۳\mathrm{m}$$

می‌توانیم در معادلهٔ ۲۲ بگذاریم $y = \circ$ و زمان $t_۲$ برای برگشت توپ به زمین را پیدا کنیم. نتیجه می‌شود که

$$t_۲ = \frac{۲v_\circ \sin\phi_\circ}{g} = \frac{۲(۱۵{,}۵\mathrm{m/s})(\sin ۳۶^\circ)}{۹{,}۸\mathrm{m/s^۲}} = ۱{,}۸۶\mathrm{s}$$

توجه کنید که $t_۲ = ۲t_۱$ است، که البته باید هم باشد چون زمان لازم برای بالا رفتن توپ (رسیدن آن از زمین به نقطهٔ اوج) با زمان لازم برای سقوط توپ (رسیدن آن از نقطهٔ اوج به زمین) برابر است.

می‌شود دید که این نتایج با معادلهٔ $x = x_0 + v_{x_0} t$ هم سازگارند. اگر بگذاریم $t = t_2$، $x$ باید برابر با $R$ شود. از معادلهٔ ۲۱

$$R = v_{x_0} t_2 = (v_0 \cos\phi_0) t_2 = 23.3\,\mathrm{m}$$

که همان مقداری است که قبلاً به‌دست آمد.

(د) برای پیدا کردن سرعت توپ در لحظهٔ برخورد با زمین، معادلهٔ ۱۷ را به‌کار می‌بریم و $v_x$ را به‌دست می‌آوریم. $v_x$ در طول حرکت ثابت می‌ماند:

$$v_x = v_0 \cos\phi_0 = (15.5\,\mathrm{m/s})(\cos 36^\circ) = 12.5\,\mathrm{m/s}$$

از معادلهٔ ۱۸ هم $v_y$ را در $t = t_2$ به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} v_y &= v_0 \sin\phi_0 - gt = (15.5\,\mathrm{m/s})(\sin 36^\circ) \\ &- (9.8\,\mathrm{m/s^2})(1.86\,\mathrm{s}) = -9.1\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

پس اندازهٔ سرعت برابر است با

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(12.5\,\mathrm{m/s})^2 + (-9.1\,\mathrm{m/s})^2} \\ &= 15.5\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

و جهت آن از این رابطه به‌دست می‌آید

$$\tan\phi = v_y/v_x = -9.1/12.5$$

بنابراین، $\phi = -36^\circ$، یا $36^\circ$ ساعتگرد نسبت به محور $x$ است. توجه کنید که $\phi = -\phi_0$ است، یعنی همان است که از تقارن مسئله انتظار می‌رود (شکل ۵).

اندازهٔ سرعت نهایی با اندازهٔ سرعت اولیه برابر از آب در آمد. می‌توانید بگویید چرا؟ آیا این صرفاً یک تصادف است؟

## ۴ـ۴ حرکت دایره‌ای یکنواخت

در حرکت پرتابی، هم اندازه و هم جهت شتاب ثابت است، اما اندازه و جهت سرعت هر دو تغییر می‌کنند. اکنون حالت خاصی را بررسی می‌کنیم که ذره روی دایره حرکت می‌کند و اندازهٔ سرعت آن ثابت است. چنانکه بعداً خواهیم دید، در این حرکت اندازهٔ سرعت و اندازهٔ شتاب، هر دو، ثابت‌اند اما جهت هر یک از این دو بردار به‌طور پیوسته تغییر می‌کند. این وضعیت را حرکت دایره‌ای یکنواخت می‌نامند. از نمونه‌های این نوع حرکت می‌توانیم از حرکت ماهواره‌های زمین و حرکت نقاط روی اجسام چرخانی مثل پره‌های پنکه، صفحهٔ گرامافون، و دیسک کامپیوتر نام ببریم. در واقع، اگر بتوانیم خودمان را ذره فرض کنیم، ما هم به خاطر چرخش زمین حرکت دایره‌ای یکنواخت داریم.

شکل ۱۰الف این حرکت را نشان می‌دهد. فرض کنید که $P_1$ مکان ذره در زمان $t_1$ و $P_2$ مکان آن در زمان $t_2 = t_1 + \Delta t$ باشد و سرعت در $P_1$ بردار $\mathbf{v}_1$ است که در این نقطه مماس بر منحنی است. سرعت در $P_2$ بردار $\mathbf{v}_2$ است. اندازهٔ $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ یکسان و برابر با $v$ است، اما جهت آنها یکی نیست. طول مسیری که طی زمان $\Delta t$ پیموده شده، همان طولِ قوس $P_1P_2$ است که برابر است با $r\theta$ (اگر $\theta$ را برحسب رادیان بسنجیم)، و همچنین برابر است با $v\Delta t$. پس،

$$r\theta = v\Delta t \qquad (25)$$

اکنون دو بردار $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ را به‌صورت شکل ۱۰ب، از یک نقطه رسم می‌کنیم. این کار مجاز است، به شرطی که اندازه و جهت بردارها، همان اندازه و جهتشان در شکل ۱۰الف باشد. به کمک شکل ۱۰ب، تغییر سرعت ذره از $P_1$ به $P_2$، کاملاً مشهود است. این تغییر، $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$، برداری است که باید به $\mathbf{v}_1$ اضافه کنیم تا $\mathbf{v}_2$ به‌دست بیاید. اگر این تغییر سرعت در بازهٔ $P_1P_2$ را از نقطهٔ وسط قوس $P_1P_2$ بکشیم، $\Delta\mathbf{v}$ به‌طرف مرکز دایره خواهد بود.

مثلث $OQ_1Q_2$ که متشکل از $\mathbf{v}_1$، $\mathbf{v}_2$، و $\Delta\mathbf{v}$ است با مثلث $CP_1P_2$ (شکل ۱۰ج)، که از وتر $P_1P_2$ و شعاعهای $CP_1$ و $CP_2$ ساخته می‌شود متشابه است چون‌که هر دو مثلث متساوی‌الساقین‌اند و زاویهٔ رأسشان با هم برابر است؛ زاویهٔ $\theta$ بین $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ همان زاویهٔ $P_1CP_2$ است زیرا $\mathbf{v}_1$ بر $CP_1$ و $\mathbf{v}_2$ بر $CP_2$ است. در شکل ۱۰ب، با توجه به نیمساز زاویهٔ $\theta$ می‌بینیم که

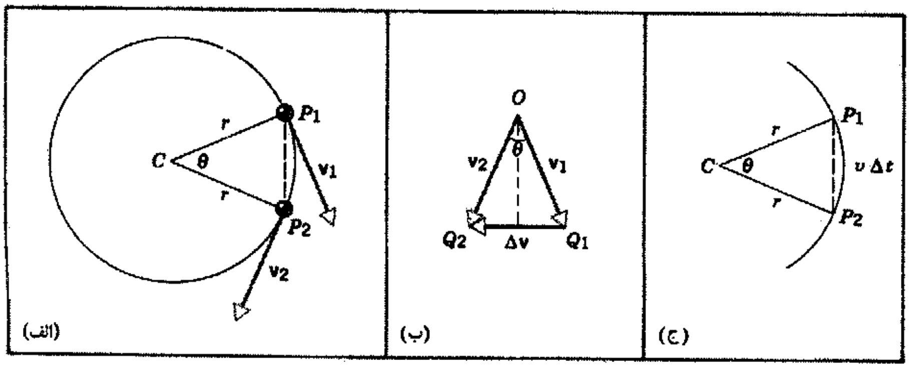
$$\frac{1}{2}\Delta v = v \sin\frac{\theta}{2} \qquad (26)$$

حالا با استفاده از نتایج معادلات ۲۵ و ۲۶ برای $\Delta v$ و $\Delta t$، اندازهٔ شتاب متوسط را در این بازهٔ زمانی به‌دست می‌آوریم:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2v\,\sin(\theta/2)}{r\theta/v} = \frac{v^2}{r}\,\frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2} \qquad (27)$$

برای به‌دست آوردن شتاب لحظه‌ای، حد این عبارت را در $\Delta t \to 0$ در نظر می‌گیریم. اگر $\Delta t$ کوچک باشد، زاویهٔ $\theta$ هم کوچک می‌شود. در این مورد می‌توانیم تقریب زاویهٔ کوچک، $\sin x \approx x$ را به‌کار ببریم. (این رابطه فقط وقتی درست است که زاویه برحسب رادیان بیان شود. مثلاً اگر $x = 5^\circ = 0.0873\,\mathrm{rad}$ باشد، $\sin x = 0.0872$ است.) پس برای زوایای کوچک $\sin(\theta/2) \approx \theta/2$ است و کسر دوم طرف راست معادلهٔ ۲۷ به ۱ می‌گراید. دقت کنید که در کسر اول طرف راست معادلهٔ ۲۷، نه $v$ و نه $r$ هیچ‌یک به $\Delta t$ بستگی ندارند. بنابراین مقدار این کسر در حدگیری تغییر نمی‌کند. به‌این ترتیب، اندازهٔ شتاب لحظه‌ای به‌دست می‌آید:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v^2}{r}\,\frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2} = \frac{v^2}{r} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2}$$




شکل ۱۰. حرکت دایره‌ای یکنواخت (الف) ذره روی دایره حرکت می‌کند و اندازهٔ سرعت آن ثابت می‌ماند. سرعت ذره در دو نقطهٔ $P_۱$ و $P_۲$ نشان داده شده است. (ب) تغییر سرعت ذره از $P_۱$ تا $P_۲$، $\Delta \mathbf{v}$ است. (ج) ذره در زمان $\Delta t$ قوس $P_۱P_۲$ را طی می‌کند.

با استفاده از تقریب زاویهٔ کوچک، به‌جای حد باقی‌مانده ۱ می‌گذاریم نتیجه می‌شود که

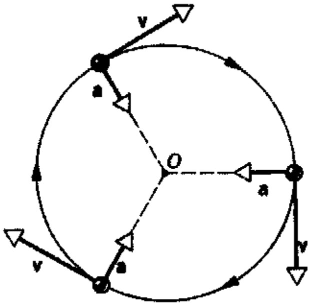
$$a = \frac{v^{۲}}{r} \qquad (۲۸)$$

چون جهت شتاب متوسط همان جهت $\Delta \mathbf{v}$ است، جهت $\mathbf{a}$ همیشه شعاعی و به طرف مرکز دایره، (یا هر قوس دایره‌ای از مسیر حرکت) است.

شکل ۱۱ رابطهٔ لحظه‌ای بین $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ را در نقاط مختلف مسیر نشان می‌دهد. اندازهٔ $\mathbf{v}$ ثابت است، اما جهت آن مدام تغییر می‌کند. این سرعت منجر به شتابی ($\mathbf{a}$) می‌شود که آن هم اندازه‌اش ثابت است ولی جهتش مدام تغییر می‌کند. سرعت $\mathbf{v}$ همواره مماس بر دایره و در جهتِ حرکت است؛ شتاب $\mathbf{a}$ همواره در راستای شعاع و به طرف داخل است. به همین علت، $\mathbf{a}$ را شتاب شعاعی، یا مرکزگرا می‌نامند. در بخش بعدی، معادلهٔ ۲۸ را با استفاده از بردارهای یکه به‌دست خواهیم آورد.

هم در سقوط آزاد و هم در حرکت پرتابی، جهت و اندازهٔ $\mathbf{a}$ ثابت است، و می‌توانیم معادلات مربوط به شتاب ثابت را به‌کار ببریم. این معادلات را نمی‌شود برای حرکت دایره‌ای یکنواخت به‌کار برد، زیرا $\mathbf{a}$ جهتش تغییر می‌کند و بنابراین ثابت نیست.

یکای شتاب مرکز گرا همان یکای شتاب ناشی از تغییر اندازهٔ




شکل ۱۱. در حرکت دایره‌ای یکنواخت، شتاب $\mathbf{a}$ همواره به طرف مرکز دایره است، و بنابراین همواره بر $\mathbf{v}$ عمود است.

سرعت است. از نظر ابعادی

$$[a] = \frac{[v^{۲}]}{[r]} = \frac{(\mathrm{L/T})^{۲}}{\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^{۲}}$$

که همان بعد معمول شتاب است. پس یکای این شتاب ممکن است $\mathrm{m/s^{۲}}$، $\mathrm{km/h^{۲}}$، یا هر یکای دیگری با بعد $\mathrm{L/T^{۲}}$ باشد.

شتاب ناشی از تغییر جهتِ سرعت همانقدر واقعی است و همانقدر، از هر نظر، "شتاب" است که شتاب ناشی از تغییر اندازهٔ سرعت. شتاب، طبق تعریف، آهنگِ تغییر زمانی سرعت است؛ سرعت هم بردار است، یعنی هم تغییر اندازهٔ آن می‌تواند منجر به شتاب شود هم تغییر جهتش. ویژگیهای جهتی کمیتهای فیزیکی برداری را نمی‌شود نادیده گرفت؛ تغییرات جهتی این کمیتها درست همانقدر اهمیت دارد که تغییرات مقداری آنها.

باید بر این نکته تأکید کرد که لزومی ندارد در جهت شتاب، حرکت داشته باشیم، و در حالت کلی هیچ رابطهٔ مشخصی بین جهتهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{v}$ وجود ندارد. شکل ۱۲ مثالهایی را نشان می‌دهد که در آنها زاویهٔ بین $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ از ۰ تا ۱۸۰° تغییرمی‌کند. تنها در یک مورد، که $\theta = ۰$ است، حرکت در جهت $\mathbf{a}$ است.

---

مثال ۵. ماه به دور زمین می‌گردد و زمان یک گردشِ کامل آن ۲۷٫۳ روز است. فرض کنید که مدار دایره‌ای، و شعاع آن ۲۳۸۰۰۰ مایل است. اندازهٔ شتاب ماه به طرف زمین چقدر است؟

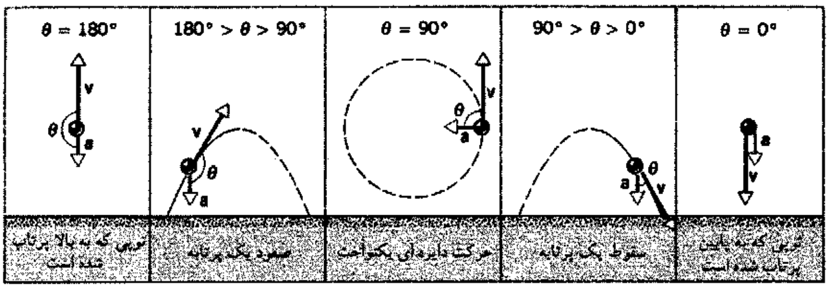
حل: $r = ۲۳۸۰۰۰\,\mathrm{mi} = ۳٫۸۲ \times ۱۰^{۸}\,\mathrm{m}$ است. زمان یک گردش کامل (زمان تناوب) $T = ۲۷٫۳\mathrm{d} = ۲٫۳۶ \times ۱۰^{۶}\,\mathrm{s}$ است. بنابراین اندازهٔ سرعت ماه (که آن‌را ثابت فرض می‌کنیم) برابر است با

$$v = \frac{۲\pi r}{T} = \frac{۲\pi(۳٫۸۲ \times ۱۰^{۸}\,\mathrm{m})}{۲٫۳۶ \times ۱۰^{۶}\,\mathrm{s}} = ۱۰۱۸\,\mathrm{m/s}$$

شتاب مرکزگرا برابر است با

$$a = \frac{v^{۲}}{r} = \frac{(۱۰۱۸\,\mathrm{m/s})^{۲}}{۳٫۸۲ \times ۱۰^{۸}\,\mathrm{m}}$$

$$= ۰٫۰۰۲۷۱\,\mathrm{m/s^{۲}} \quad \text{یا} \quad ۲٫۷۶ \times ۱۰^{-۴} g_n$$




شکل۱۲. رابطهٔ هندسی میان $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ برای حرکتهای مختلف.

$g_n$ (یعنی $9{,}80665\,\mathrm{m/s^2}$) مقدار استانداردِ بین‌المللی پذیرفته شده برای $g$ است. این مقدار استاندارد، که در واقع مقدار تقریبی شتاب سقوط آزاد در سطح دریا در عرض جغرافیایی $45°$ است، خیلی وقتها به عنوان مقیاسی برای شتاب به‌کار می‌رود. مثلاً، شتاب وارد بر خلبانهای جت، یا شتاب وارد بر مسافران ارابه‌های تفریحی بازیگاهها را معمولاً برحسب $g_n$ بیان می‌کنند.

مثال ۶. ماهواره‌ای در ارتفاع $h = 210\,\mathrm{km}$ از سطح زمین، به دور زمین می‌گردد. در این ارتفاع، $g = 9{,}2\,\mathrm{m/s^2}$ است. (این مقدار از $9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ کمتر است چون $g$ با زیاد شدن ارتفاع کم می‌شود، فصل ۱۶) سرعت این ماهواره را پیدا کنید. شعاع زمین $R = 6370\,\mathrm{km}$ است.

حل: ماهواره هم، مثل اجسام دیگر نزدیک به زمین، یک شتاب $g$ به طرف مرکز زمین دارد. این شتاب، همراه با سرعت مماسی ماهواره، موجب می‌شود که حرکت ماهواره دایره‌ای باشد. پس شتاب مرکزگرا همان شتاب گرانشیِ $g$ است، و از معادلهٔ ۲۸ $(a = v^2/r)$ به‌ازای $a = g$ و $r = R + h$ به‌دست می‌آید

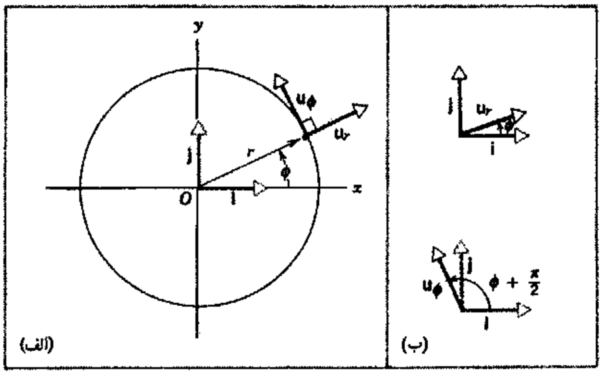
$$g = \frac{v^2}{R+h}$$

یا

$$v = \sqrt{(R+h)g} = \sqrt{(6580\,\mathrm{km})(9{,}2\,\mathrm{m/s^2})(10^3\,\mathrm{m/km})}$$

$$= 7780\,\mathrm{m/s} \quad \text{یا} \quad 17400\,\mathrm{mi/h}$$

با این سرعت، ماهواره در هر $1{,}48\,\mathrm{h}$ یک بار به دور زمین می‌گردد.




شکل۱۳. (الف) ذره‌ای که در جهت پادساعتگرد روی دایره‌ای به شعاع $r$ حرکت می‌کند. (ب) بردارهای یکهٔ $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\phi$ و رابطهٔ آنها با $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$.

می‌شود. با استفاده از روشهای برداری می‌توانیم ارتباط میان سرعت و شتاب، و جهت شتاب را تعیین کنیم.

ابتدا معادلهٔ ۲۸ برای شتاب مرکزگرا در سرعت ثابت را دوباره، این بار با روشهای برداری کلی‌تر، به‌دست می‌آوریم. شکل ۱۳ ذره‌ای را نشان می‌دهد که‌حول مبدأ $O$ یک دستگاه مرجع، حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد. برای این حرکت، مختصات قطبی $r$ و $\phi$ مفیدتر از مختصات دکارتی $x$ و $y$ است، زیرا $r$ در طی حرکت ثابت می‌ماند و $\phi$ با زمان به صورت خطی ساده‌ای افزایش می‌یابد؛ رفتار $x$ و $y$ طی این نوع حرکت پیچیده‌تر است. رابطهٔ این دو دسته مختصات با هم به شکل زیر است

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{و} \quad \phi = \tan^{-1}(y/x) \qquad (29)$$

یا (روابط معکوس)

$$x = r\cos\phi \quad \text{و} \quad y = r\sin\phi \qquad (30)$$

در دستگاه مختصات دکارتی، بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ را برای توصیف حرکت در صفحهٔ $xy$ به‌کار می‌بریم، اینجا بهتر است دو بردار یکهٔ جدید، $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\phi$، معرفی کنیم. طول این دو بردار هم، مثل $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$، یک است. اینها هم بی‌بعدند، و فقط جهت مشخص می‌کنند.

## ۴ـ۵ بردارهای سرعت و شتاب در حرکت دایره‌ای (اختیاری)[1]

چنانکه در بخش پیش دیدیم، ذره‌ای که با (مقدار) سرعت ثابت روی قوسی از دایره حرکت می‌کند شتاب مرکزگرا دارد. البته اگر اندازهٔ سرعت ثابت نباشد باز هم شتاب مرکزگرا در کار هست، اما در این حالت ذره یک شتاب مماسی هم دارد که موجب تغییر سرعت مماسی آن

۱. می‌توان از این بخش گذشت یا آن‌را تا بحث مربوط به حرکت دورانی در فصل ۱۱ به‌تعویق انداخت.

بردار یکهٔ $\mathbf{u}_r$ در هر نقطه در جهت افزایش $r$ در آن نقطه است. این بردار در راستای شعاع و به طرف خارج از مرکز است. بردار یکهٔ $\mathbf{u}_\phi$ در هر نقطه در جهت افزایش $\phi$ در آن نقطه است. این بردار در هر نقطه بر دایره‌ای به مرکز مبدأ که از آن نقطه می‌گذرد مماس، و در جهتِ پادساعتگرد است. چنانکه در شکل ۱۳الف می‌بینیم، $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\phi$ برهم عمودند. اختلاف $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\phi$ با بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ در این است که جهت $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\phi$، نقطه به نقطه عوض می‌شود؛ بردارهای یکهٔ $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\phi$ بردارهای ثابتی نیستند. بنابراین وقتی از عبارتهای شامل بردارهای یکه مشتق می‌گیریم، $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ را می‌توانیم ثابت بگیریم، اما $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\phi$ را نمی‌توانیم.

بردارهای یکهٔ $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\phi$ را می‌شود برحسب بردارهای یکهٔ $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$، به‌صورت زیر نوشت (شکل ۱۳ب):

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{i}\cos\phi + \mathbf{j}\sin\phi \qquad (۳۱)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_\phi &= \mathbf{i}\cos(\phi+\pi/۲) + \mathbf{j}\sin(\phi+\pi/۲)\\ &= -\mathbf{i}\sin\phi + \mathbf{j}\cos\phi\end{aligned} \qquad (۳۲)$$

در جملاتی از نوع $\mathbf{i}\cos\phi$ بردار را در اسکالر ضرب کرده‌ایم و ترتیبِ نوشتن عاملها مهم نیست؛ این جمله را به شکل $(\cos\phi)\mathbf{i}$ هم می‌شود نوشت.

اگر ذره با اندازهٔ سرعت ثابت روی دایره حرکت کند، بردار سرعت آن مؤلفهٔ شعاعی ندارد، و کلاً در جهت $\mathbf{u}_\phi$ است. به‌علاوه، اندازهٔ سرعت همان $v$ی ثابت است. پس،

$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_\phi \qquad (۳۳)$$

یعنی $\mathbf{v}$ بر دایره مماس است و اندازه‌اش ثابت است، اما جهتش تغییر می‌کند.

حالا می‌توانیم شتاب را به‌دست بیاوریم:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{u}_\phi) = v\frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt} \qquad (۳۴)$$

توجه کنید که سرعت ثابتِ $v$ از مشتق بیرون می‌آید. برای به‌دست آوردن مشتقِ بردار یکهٔ $\mathbf{u}_\phi$، معادلهٔ ۳۲ را به‌کار می‌بریم

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt} &= -\mathbf{i}\frac{d(\sin\phi)}{dt} + \mathbf{j}\frac{d(\cos\phi)}{dt}\\ &= -\mathbf{i}\cos\phi\frac{d\phi}{dt} - \mathbf{j}\sin\phi\frac{d\phi}{dt}\\ &= (-\mathbf{i}\cos\phi - \mathbf{j}\sin\phi)\frac{d\phi}{dt}\\ &= -\mathbf{u}_r\frac{d\phi}{dt}\end{aligned} \qquad (۳۵)$$

در آخرین مرحله، معادلهٔ ۳۱ را به‌کار برده‌ایم. به این ترتیب،

$$\mathbf{a} = -\mathbf{u}_r v\frac{d\phi}{dt} \qquad (۳۶)$$

ذره با سرعت ثابت روی دایره حرکت می‌کند، پس $d\phi/dt$ برابر است با زاویه‌ای که در یک دور طی می‌شود ($۲\pi$ رادیان) تقسیم بر زمانِ پیمودن یک دور (مسافت $۲\pi r$ تقسیم بر سرعت $v$):

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{۲\pi}{۲\pi r/v} = \frac{v}{r} \qquad (۳۷)$$

اکنون اگر معادلهٔ ۳۷ را در معادلهٔ ۳۶ بگذاریم، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= -\mathbf{u}_r v\frac{v}{r}\\ &= -\mathbf{u}_r\frac{v^۲}{r}\end{aligned} \qquad (۳۸)$$

می‌بینیم که اندازهٔ شتاب، ثابت و برابر با $v^۲/r$ است (همان‌طور که در معادلهٔ ۲۸ به‌دست آوردیم)، و جهت شتاب، شعاعی و به طرف داخل است (یعنی، برخلاف جهت $\mathbf{u}_r$). ضمن حرکت ذره روی دایره، جهت $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{a}$ نسبت به محورهای مختصات $x$ و $y$ تغییر می‌کند، زیرا جهت شعاعی تغییر می‌کند.

### شتاب مماسی در حرکت دایره‌ای

اکنون حالت کلی‌تری را بررسی می‌کنیم که در آن اندازهٔ سرعت $v$ ذره‌ای که روی دایره حرکت می‌کند ثابت نیست. در این مورد هم از روشهای برداری و مختصات قطبی استفاده می‌کنیم.

اینجا هم سرعت از معادلهٔ ۳۳ به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_\phi$$

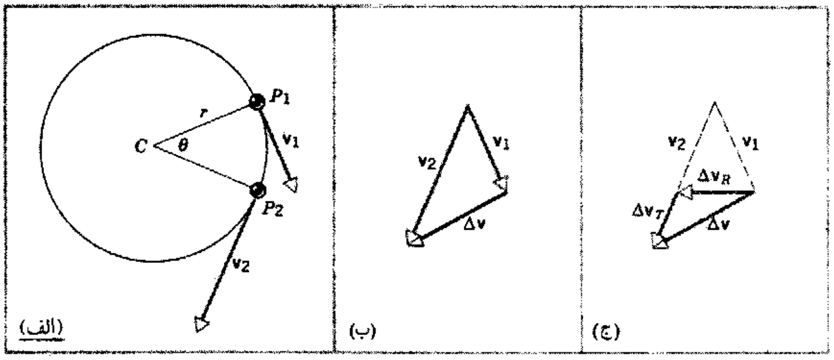
با این تفاوت که در این مورد نه تنها $\mathbf{u}_\phi$ بلکه $v$ (اندازهٔ سرعت) هم با زمان تغییر می‌کند. با استفاده از رابطهٔ مشتق حاصل‌ضرب، شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v\mathbf{u}_\phi)}{dt} = v\frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt} + \mathbf{u}_\phi\frac{dv}{dt} \qquad (۳۹)$$

در معادلهٔ ۳۴، جملهٔ دوم طرف راست معادلهٔ ۳۹ وجود نداشت، زیرا $v$ را ثابت فرض کرده بودیم. جملهٔ اول طرف راست معادلهٔ ۳۹، چنانکه قبلاً به‌دست آوردیم، $-\mathbf{u}_r(v^۲/r)$ است. به‌این ترتیب، معادلهٔ ۳۹ به‌صورت زیر در می‌آید

$$\mathbf{a} = -\mathbf{u}_r a_R + \mathbf{u}_\phi a_T \qquad (۴۰)$$

که در آن، $a_R = v^۲/r$ و $a_T = dv/dt$ است. جملهٔ اول، $-\mathbf{u}_r a_R$، مؤلفهٔ برداری $\mathbf{a}$ در راستای شعاعی به طرف مرکز دایره است، و ناشی از تغییر جهت سرعتِ حرکت دایره‌ای است (شکل ۱۴). بردار $\mathbf{a}_R$ و اندازهٔ آن، هر دو را شتاب مرکزگرا می‌نامند. جملهٔ دوم، $\mathbf{u}_\phi a_T$، مؤلفهٔ برداری $\mathbf{a}$ در جهت مماس بر مسیر ذره است، و ناشی از تغییر اندازهٔ سرعت حرکت دایره‌ای است (شکل ۱۴). بردار $\mathbf{a}_T$ و اندازهٔ آن $a_T$، هر دو، را شتاب مماسی می‌نامند.




**شکل ۱۴.** (الف) در حرکت دایره‌ای غیریکنواخت، اندازهٔ سرعت متغیر است. (ب) تغییر سرعت از $P_1$ تا $P_2$ (ج) $\Delta \mathbf{v}$ شامل دو بخش است: $\Delta \mathbf{v}_R$، ناشی از تغییر جهت $\mathbf{v}$، و $\Delta \mathbf{v}_T$، ناشی از تغییر اندازهٔ $\mathbf{v}$، در حد $\Delta t \to 0$، $\Delta \mathbf{v}_R$ به‌طرف مرکز دایره، و $\Delta \mathbf{v}_T$ مماس بر مسیر است.

اندازهٔ شتاب لحظه‌ای برابر است با

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_R^2} \qquad (41)$$

اگر اندازهٔ سرعت ثابت باشد، $a_T = dv/dt = 0$ است و معادلهٔ ۴۰ به معادلهٔ ۳۸ تبدیل می‌شود. اگر اندازهٔ سرعت ثابت نباشد، $a_T$ صفر نمی‌شود و $a_R$ هم، نقطه به نقطه تغییر می‌کند. اندازهٔ سرعت $v$ ممکن است چنان تغییر کند که $a_T$ ثابت نباشد؛ در این صورت، $a_T$ و $a_R$، هر دو، نقطه به نقطه تغییر می‌کنند.

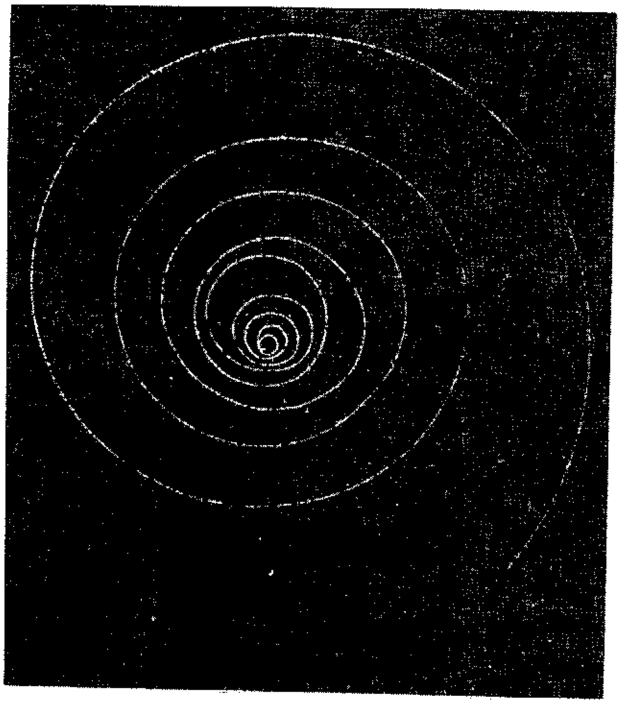
شکل ۱۵ رد یک الکترون پر انرژی است که به شکل مارپیچی به طرف داخل است. این رد در اتاقک حباب پر از هیدروژن مایع تشکیل شده است. حرکت الکترون، در اثر حرکت در مایع اتاقک طوری کند می‌شود که سرعت $v$ آن به‌طور منظم کاهش می‌یابد. بنابراین، الکترون در هر نقطه یک شتاب مماسی $a_T$ دارد که از $dv/dt$ به‌دست می‌آید. البته الکترون روی دایره حرکت نمی‌کند ولی قوسهای کوچک مارپیچ کاملاً شبیه قوسهای دایره‌ای به شعاع $r$اند. پس شتاب مرکزگرای $a_R$ در هر نقطه $v^2/r$ است، که در آن $r$ شعاع مسیر در آن نقطه است. با کاهش انرژی ذره، $r$ و $v$، هر دو، کوچک می‌شوند. شتاب شعاعی الکترون ناشی از میدان مغناطیسی‌ای است که در اتاقک حباب حضور دارد. این میدان بر صفحهٔ شکل ۱۵ عمود است (فصل ۳۴).

## ۴ـ۶ حرکت نسبی

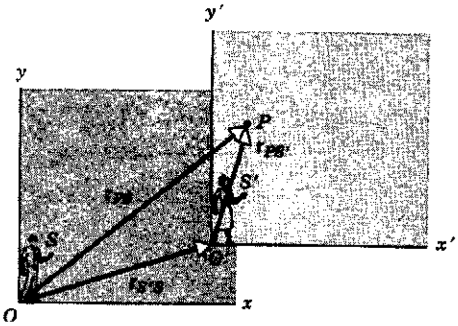
فرض کنید در اتومبیلی نشسته‌اید که با سرعت ثابت $55 \text{mi/h}$ حرکت می‌کند. اجسام دیگر موجود در اتومبیل هم با همان سرعت حرکت می‌کنند؛ سرعت آنها نسبت به زمین $55 \text{mi/h}$ است، اما نسبت به شما صفر است. در این اتومبیل می‌توان یک دسته آزمایش معمولی فیزیک انجام داد؛ نتیجهٔ این آزمایشها از حرکت یکنواخت اتومبیل متأثر نمی‌شود. مثلاً می‌توانید توپی را (در دستگاه مرجع خودتان) به بالا پرتاب کنید؛ خواهید دید که توپ مستقیماً به پایین سقوط می‌کند. توپ (به خاطر حرکت اتومبیل) حرکت افقی دارد، اما شما هم همان حرکت افقی را دارید، در حرکت افقی نسبی صفر است.

اما نتیجه از دید ناظر زمینی فرق می‌کند. توپ یک مؤلفهٔ افقی سرعت دارد که $55 \text{mi/h}$ است، و یک مؤلفهٔ عمودی که ناشی از حرکتی است که شما به آن می‌دهید. می‌دانیم که پرتابه‌ای با این سرعت، مسیر سهموی دارد. بنابراین، معادلاتی که شما و ناظر زمینی برای توصیف حرکت به‌کار می‌برید، با هم متفاوت‌اند، اما قوانین فیزیکی‌ای که بر حرکت توپ حاکم‌اند از نظر هر دو ناظر یکی است؛ مثلاً هر دو شما یک مقدار برای شتاب سقوط آزاد به‌دست می‌آورید.

اتومبیل دیگری که با سرعت $57 \text{mi/h}$ از شما سبقت بگیرد، از نظر شما (نسبت به چارچوب مرجع شما) به آهستگی با سرعت $2 \text{mi/h}$ (یعنی $57 \text{mi/h} - 55 \text{mi/h}$) در حرکت است. اگر شواهد خارجی مثل ناظرهایی که از کنار شما می‌گذرند، هوایی که از اطراف



**شکل ۱۵.** رد یک الکترون دراتاقک حباب هیدروژن مایع. الکترون یک شتاب شعاعی دارد، که ناشی از میدان مغناطیسی است. این شتاب می‌خواهد که مسیر حرکت را دایره‌ای کند. اما الکترون، در اثر برخورد با اتمهای هیدروژن، کند می‌شود. بنابراین، یک شتاب مماسی هم دارد. مسیر حاصل از این دو شتاب، مارپیچ است.




شکل۱۶. ناظرهای $S$ و $S'$، که نسبت به هم حرکت می‌کنند، ذرهٔ $P$ را مشاهده می‌کنند. این دو ناظر، در لحظهٔ مشاهده، مکان ذره را نسبت به دستگاه مختصاتِ خودشان، به‌ترتیب با $\mathbf{r}_{PS}$ و $\mathbf{r}_{PS'}$ می‌سنجند. در همین لحظه ناظر $S$ مکان $S'$ را نسبت به مبدأ $O$، با $\mathbf{r}_{S'S}$ می‌سنجد.

اتومبیل به عقب هجوم می‌برد، دست‌انداز جاده، و صدای موتور— را کنار بگذارید و فقط به "اتومبیل" توجه کنید، هیچ راهی ندارید برای اینکه "واقعاً" تعیین کنید که کدام اتومبیل دارد حرکت می‌کند. مثلاً اگر اتومبیل دیگر ساکن باشد و اتومبیل شما با سرعت ۲mi/h به عقب برود، باز هم نتیجهٔ مشاهدات شما همین خواهد بود.

در این بخش، توصیف حرکت یک ذره را از دید دو ناظر، که نسبت به هم حرکت یکنواخت دارند، بررسی می‌کنیم. دو نفر را در نظر بگیرید که یکی در اتومبیلی که با سرعت ثابت در جاده‌ای مستقیم حرکت می‌کند نشسته و دیگری کنار جاده ایستاده است. ذره‌ای که هر دو ناظر مشاهده می‌کنند ممکن است مثلاً توپی باشد که از یک اتومبیل به هوا یا به طرف اتومبیل دیگر پرتاب می‌شود.

دو ناظر را $S$ و $S'$ می‌نامیم. هر ناظر، چارچوب مرجعی دارد که یک دستگاه مختصات دکارتی به آن متصل است. برای سادگی فرض می‌کنیم که هر ناظر در مبدأ دستگاه مختصات مربوط به خودش واقع شده است. تنها یک قید روی حرکت نسبی دو دستگاه می‌گذاریم: سرعت نسبی میان $S$ و $S'$ باید ثابت باشد. منظور این است که هم اندازه و هم جهت سرعت ثابت باشد. دقت کنید که این محدودیت روی سرعتِ ذره‌ای که ناظرهای $S$ و $S'$ مشاهده می‌کنند نیست. لزومی ندارد که ذره با سرعت ثابت حرکت کند؛ ذره می‌تواند شتاب داشته باشد.

شکل ۱۶ دو دستگاه مختصات مربوط به $S$ و $S'$ را در زمان $t$ نشان می‌دهد. برای سادگی، فقط حرکت دوبعدی را بررسی می‌کنیم. شکل ۱۶ دو صفحهٔ $xy$ و $x'y'$ را، که در واقع یک صفحه‌اند، نشان می‌دهد. مبدأ دستگاه $S'$، نسبت به مبدأ دستگاه $S$، با بردار $\mathbf{r}_{S'S}$ مشخص می‌شود. به ترتیب شاخصهای پایین بردار خوب توجه کنید: شاخص اول نقطه‌ای را که محل آن مورد نظر است مشخص می‌کند (در این مورد، مبدأ دستگاه مختصات $S'$) و شاخص دوم دستگاهی را که محل نقطه نسبت به آن مورد نظر است (در این مورد، دستگاه مختصات $S$).

در شکل ۱۶ یک ذره ($P$) هم در صفحهٔ مشترک $xy$ و $x'y'$ نشان داده شده است، $S$ و $S'$، هر یک، مکان ذره را نسبت به دستگاه مختصات خودشان تعیین می‌کنند. ذرهٔ $P$، از دید $S$ در نقطهٔ متناظر با بردار $\mathbf{r}_{PS}$، و از دید $S'$ در نقطهٔ متناظر با بردار $\mathbf{r}_{PS'}$ است. از شکل ۱۶ می‌بینیم که رابطهٔ میان این سه بردار به‌صورت زیر است

$$\mathbf{r}_{PS} = \mathbf{r}_{S'S} + \mathbf{r}_{PS'} = \mathbf{r}_{PS'} + \mathbf{r}_{S'S} \qquad (۴۲)$$

در رابطهٔ بالا، برای عوض کردن ترتیب بردارها، از قانون جابه‌جایی‌پذیری جمع برداری استفاده کرده‌ایم و باز هم به‌ترتیبِ شاخصها دقت کنید. رابطهٔ ۴۲، به زبان غیر ریاضی، می‌گوید که: "مکان $P$ از دید $S$ برابر است با مکان $P$ از دید $S'$ به اضافهٔ مکان $S'$ از دید $S$."

فرض کنید ذرهٔ $P$ با سرعت $\mathbf{v}_{PS'}$ نسبت به $S'$ حرکت می‌کند. $S$ چه سرعتی برای این ذره اندازه‌گیری می‌کند؟ برای پاسخ به این سؤال کافی است که از معادلهٔ ۴۲ نسبت به زمان مشتق بگیریم. نتیجه می‌شود

$$\frac{d\mathbf{r}_{PS}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{PS'}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{S'S}}{dt}$$

آهنگ تغییر هر بردار مکان، سرعت متناظر با آن برداراست. پس،

$$\mathbf{v}_{PS} = \mathbf{v}_{PS'} + \mathbf{v}_{S'S} \qquad (۴۳)$$

بنابراین، سرعت $P$ نسبت به $S$ در هر لحظه برابر است با سرعت $P$ نسبت به $S'$ به اضافهٔ سرعت $S'$ نسبت به $S$. معادلات ۴۲ و ۴۳، که برای حرکت دوبعدی به‌دست آورده‌ایم، برای حرکت سه‌بعدی هم کاملاً معتبرند.

معادلهٔ ۴۳ یک قانون تبدیل سرعت است. به کمک این قانون می‌توانیم سرعتی را که ناظر یک چارچوب مرجع، مثلاً $S'$، می‌سنجد، به سرعتی که ناظر دیگری، ، مثلاً $S$ می‌سنجد تبدیل کنیم. کافی است که سرعت نسبی دو چارچوب مرجع را بدانیم. این قانون تبدیل سرعت با مشاهدات روزمره و مفاهیم بنیادی فضا و زمان در فیزیک کلاسیکِ گالیله و نیوتون، به‌خوبی سازگار است. در واقع، معادلهٔ ۴۳ را اغلب شکل گالیله‌ای قانون تبدیل سرعتها می‌نامند.

در اینجا تنها حالت خاص بسیار مهمی را بررسی می‌کنیم که سرعت دو چارچوب مرجع نسبت به هم ثابت است؛ یعنی هم‌جهت و هم‌اندازهٔ $\mathbf{v}_{S'S}$ ثابت است. $\mathbf{v}_{PS}$ و $\mathbf{v}_{PS'}$، یعنی سرعتهای ذره از $S$ و $S'$، می‌توانند ثابت نباشند، و البته در حالت کلی با هم برابر نیستند. اما اگر یکی از ناظرها، مثلاً $S'$، سرعت $P$ را ثابت ببیند، هر دو جملهٔ طرف راست معادلهٔ ۴۳ مستقل از زمان می‌شود، و به این ترتیب طرف چپ این معادله هم باید مستقل از زمان باشد. بنابراین، اگر ناظری سرعت ذره‌ای را ثابت ببیند، همهٔ ناظرهای دیگری هم که نسبت به این ناظر با سرعت ثابت حرکت می‌کنند، سرعت آن ذره را ثابت خواهند دید.

با مشتق‌گیری از معادلهٔ ۴۳ نتیجهٔ مهم‌تری به‌دست می‌آید:

$$\frac{d\mathbf{v}_{PS}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{PS'}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{S'S}}{dt} \qquad (۴۴)$$

جملهٔ آخر معادلهٔ ۴۴ صفر است، چون فرض کرده‌ایم که سرعت نسبی دو چارچوب مرجع ثابت است. پس

$$\frac{d\mathbf{v}_{PS}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{PS'}}{dt}$$

اگر در دو طرف این معادله، به‌جای مشتق سرعت، شتاب متناظر با آن‌را قرار بدهیم می‌بینیم که

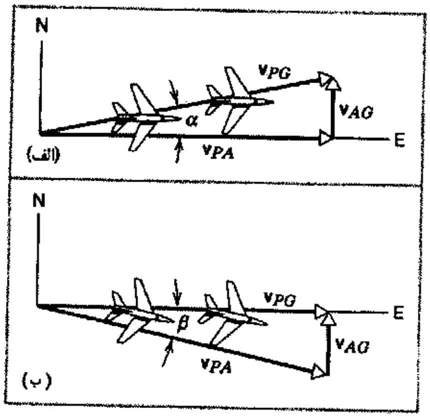
$$\mathbf{a}_{PS} = \mathbf{a}_{PS'} \qquad (۴۵)$$

یعنی، شتاب $P$ از دید دو ناظر یکی است!

در فصل بعدی خواهیم دید که شتاب کمیتی بنیادی در رفتار دینامیکی اجسام است: قانون دوم نیوتون $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$، نیروی $\mathbf{F}$، جرم $m$، و شتاب $\mathbf{a}$ را به هم مربوط می‌کند. معادلهٔ ۴۵ در شرایط خاصی که چارچوبهای مرجع $S$ و $S'$ نسبت به هم با سرعت ثابت (هم از نظر جهت و هم از نظر اندازه) درحرکت باشند به‌دست آمد. چنین چارچوبهایی را، که ممکن است نسبت به هم در حرکت باشند اما ناظرهای آنها برای یک جسم معین، شتاب یکسانی مشاهده می‌کنند، چارچوب مرجع لَخت می‌نامند. در فصل بعد خواهیم دید که این چارچوبها، به ویژه از این نظر مهم‌اند که قوانین نیوتون تنها در آنها برقرار است.

در اینجا مثالی از یک قانون فیزیکی می‌آوریم که می‌شود آن‌را برای تعیین لخت بودن یا نبودن چارچوبهای مرجع به‌کار برد. جرمی را به یک سر نخی ببندید و سر دیگر نخ را در دست بگیرید تا جرم آویزان شود. جاذبهٔ گرانشی زمین بر جرم، آن‌را به طرف مرکز زمین می‌کشد؛ راستای نخ را می‌شود برای تعریف محور قائم به‌کار برد. اکنون همین آزمایش را در اتومبیلی که با سرعت ثابت ۵۵mi/h بر خط مستقیم حرکت می‌کند تکرار کنید. نتیجه عوض نمی‌شود: نخ در همان راستای قائم آویزان می‌ماند. این اتومبیل هم، مثل زمین، یک چارچوب مرجع لَخت است. اگر این آزمایش را در اتومبیلی که در حال سرعت‌گرفتن، ترمزکردن، یا دور زدن باشد انجام بدهید، نخ از راستای قائم منحرف می‌شود. چارچوبهای شتابدار (حتی اگر شتابشان شتابِ مرکزگرا باشد) چارچوب نالخت‌اند.

در واقع زمین هم فقط به‌طور تقریبی یک چارچوب لخت است. به خاطر چرخش زمین به دور محورخودش، دو ناظر درعرضهای جغرافیایی متفاوت، نسبت به هم یک سرعت مماسی دارند که جهت آن با چرخش زمین تغییر می‌کند. البته این اثر کوچک و در بسیاری از موارد قابل چشمپوشی است؛ اما درکارهای بسیاردقیق باید آن‌را در نظر گرفت. ضمناً در مقیاس بزرگ، این پدیده می‌تواند آثار چشمگیری داشته باشد. مثلاً، نالخت بودن چارچوب مرجع سطح زمین باعث چرخش باد حول مراکز پر فشار یا کم فشار می‌شود. این چرخش می‌تواند توفانهایی شدید و مخرب به‌بار بیاورد. در بخش ۶ـ۸، آثار دیگری را که در چارچوبهای نالخت مشاهده می‌شود بررسی خواهیم کرد.




شکل۱۷. (الف) هواپیمایی که جهت‌گیری آن به طرف شرق است و بادی به طرف شمال به آن می‌وزد. (ب) برای حرکت به طرف شرق، هواپیما باید قدری به درون باد جهت‌گیری کند.

**مثال ۷.** قطب‌نمای هواپیمایی نشان می‌دهد که سر هواپیما به طرف شرق است؛ سرعت‌سنج، آن که سرعت را نسبت به هوا می‌سنجد، مقدار ۲۱۵km/h را نشان می‌دهد. باد ثابتی با سرعت ۶۵km/h به‌طرف شمال می‌وزد. (الف) اندازهٔ سرعت هواپیما نسبت به‌زمین چقدر است؟ (ب) اگر خلبان بخواهد به‌طرف شرق برود، هواپیما را باید در چه جهتی هدایت کند، یعنی قطب‌نما چه جهتی را باید نشان بدهد؟

حل: (الف) در این مسئله، "ذره"، متحرک، هواپیمای $P$ است. دو چارچوب مرجع داریم، زمین $(G)$ و هوا $(A)$. زمین را دستگاه $S$ و هوا را دستگاه $S'$ می‌گیریم. معادلهٔ ۴۳ را، با تغییر ساده‌ای در نمادگذاری، چنین می‌نویسیم

$$\mathbf{v}_{PG} = \mathbf{v}_{PA} + \mathbf{v}_{AG}$$

شکل ۱۷الف این بردارها را نشان می‌دهد، که یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهند. جمله‌های این رابطه، به‌ترتیب عبارت‌اند از سرعت هواپیما نسبت به زمین، سرعت هواپیما نسبت به هوا، و سرعت هوا نسبت به زمین (یعنی سرعت باد). توجه کنید که جهت‌گیری هواپیما به‌طرف شرق است، همان چیزی که قطب‌نما نشان می‌دهد.

اندازهٔ سرعت هواپیما نسبت به زمین برابر است با

$$v_{PG} = \sqrt{v_{PA}^۲ + v_{AG}^۲} = \sqrt{(۲۱۵\mathrm{km/h})^۲ + (۶۵\mathrm{km/h})^۲} = ۲۲۵\mathrm{km/h}$$

زاویهٔ $\alpha$، از شکل ۱۷الف، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\alpha = \tan^{-۱}\frac{v_{AG}}{v_{PA}} = \tan^{-۱}\frac{۶۵\mathrm{km/h}}{۲۱۵\mathrm{km/h}} = ۱۶{,}۸^\circ$$

بنابراین، هواپیما نسبت به زمین با سرعت ۲۲۵km/h در جهت ۱۶٫۸° شمالی نسبت به شرق پرواز می‌کند. توجه کنید که سرعت هواپیما نسبت به زمین، از سرعت آن نسبت به باد بیشتر است.

(ب) به این منظور، هواپیما باید طوری در مقابل باد جهت‌گیری کند که سرعت هواپیما نسبت به زمین به طرف شرق باشد. سرعت باد همان است که بود، و نمودار برداری معادلهٔ ۴۳ به‌صورت شکل ۱۷ب است. توجه کنید که در این مورد هم این سه بردار یک مثلث قائم‌الزاویه می‌سازند، با این تفاوت (نسبت به شکل ۱۷الف) که این بار وتر مثلث $v_{PA}$ است نه $v_{PG}$.

در این مورد، سرعت هواپیما نسبت به زمین برابر است با

$$v_{PG} = \sqrt{v_{PA}^2 - v_{AG}^2} = \sqrt{(215\,\mathrm{km/h})^2 - (65\,\mathrm{km/h})^2} = 205\,\mathrm{km/h}$$

چنانکه جهت‌گیری هواپیما در شکل ۱۷ب نشان می‌دهد، هواپیما باید به اندازهٔ زاویهٔ $\beta$ به درون باد هدایت شود. این زاویه برابر است با

$$\beta = \sin^{-1}\frac{v_{AG}}{v_{PA}} = \sin^{-1}\frac{65\,\mathrm{km/h}}{215\,\mathrm{km/h}} = 17.6^\circ$$

همان‌طور که می‌بینید، در این حالت سرعت هواپیما نسبت به زمین کمتر از سرعت آن نسبت به هواست.

### حرکت نسبی در سرعتهای زیاد (اختیاری)

مطالبی که در مورد حرکت نسبی گفته شد، مبنای مکانیک نیوتونی است، که بررسی آن‌را از فصل ۵ شروع خواهیم کرد. در اینجا هیچ محدودیتی روی سرعت نسبی چارچوبهای مرجع، یا روی سرعت ذراتی که بررسی می‌شوند وجود ندارد (تنها کافی است که سرعت نسبی چارچوبهای مرجع ثابت باشد). دو قرن پس از نیوتون، آلبرت اینشتین سعی کرد نتیجهٔ کاربرد معادلهٔ ۴۳ را برای پرتو نوری که با سرعت $c = 299792458\,\mathrm{m/s}$ در خلأ حرکت می‌کند، مجسم کند. فرض کنید ناظر $S'$ پرتو نوری را مشاهده می‌کند که با سرعت $c$ در جهت مثبت $x'$ در حرکت است. باز فرض کنید خودِ $S'$ هم نسبت به $S$ با سرعت $v_{S'S} = 1\,\mathrm{m/s}$ در همان جهت $x'$ حرکت می‌کند. ناظر $S$ چه سرعتی برای پرتو نور می‌سنجد؟ مکانیک نیوتونی طبق معادلهٔ ۴۳ جواب می‌دهد:

$$v_{PS} = 299792458\,\mathrm{m/s} + 1\,\mathrm{m/s} = 299792459\,\mathrm{m/s}$$

اینشتین البته کتابهای درسی‌اش را خوانده بود و می‌دانست که مکانیک نیوتونی دربارهٔ مشاهدهٔ سرعت توسط ناظرهای متحرک نسبت به یکدیگر، چه می‌گوید؛ این را هم می‌دانست که نور یک شیئ متحرک عادی نیست. پرتوهای نور به شکل خاصی حرکت می‌کنند. نور تابش الکترومغناطیسی است، و می‌شود آن‌را برحسب میدانهای الکتریکی و مغناطیسی سازنده‌اش تحلیل کرد. میدان الکتریکی متحرک میدان مغناطیسی تولید می‌کنند، و میدان مغناطیسی متحرک میدان الکتریکی تولید می‌کنند. بنابراین، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متحرک نور، عملاً طی حرکت پرتو نور خودشان را باز تولید می‌کنند. اینشتین استدلال کرد که اگر معادلهٔ ۴۳ درست باشد، ناظر $S$ می‌تواند پرتو نوری با سرعت $c$ در جهت $x$ بفرستد، و ناظر $S'$ می‌تواند با $v_{S'S} = c$ در جهت $x$ نسبت به $S$ حرکت کند و پرتو نور را بگیرد. درست مثل اتومبیلی که با همان سرعت اتومبیل شما، کنار اتومبیلتان حرکت کند. در این صورت، پرتو نور، از دید ناظر $S'$، ساکن به‌نظر می‌رسد. این، از نظر اینشتین، تناقض شدیدی بود؛ چطور ممکن است پرتو نوری را، که اصولاً میدان الکترومغناطیسی متحرک است، "ساکن" ببینیم؟

اینشتین برای حل این مشکل راهی پیشنهاد کرد که به نظر خودش بدیهی بود: هیچ پرتو نوری را نمی‌توان "ساکن" دید. پس حتماً باید نتیجه گرفت که معادلهٔ ۴۳، برای سرعتهای نزدیک به $c$، غلط است. اینشتین یک گام از این هم جلوتر رفت: اظهار کرد که هر دو ناظر $S$ و $S'$ باید دقیقاً یک مقدار برای سرعت نور به‌دست بیاورند، سرعت نسبی‌شان هر چه می‌خواهد باشد! این حکم با عقل متعارف و با پیش‌بینی معادلهٔ ۴۳، مغایر به‌نظر می‌رسد؛ اگر دو ناظر با سرعت $0.9999999c$ نسبت به هم حرکت کنند، چطور ممکن است که نتیجهٔ اندازه‌گیری هر دویشان از سرعت پرتو نوری که یکی از آنها گسیل کرده است یکسان و برابر با $c$ باشد؟

توصیف ریاضی کامل این مسئله را به فصل ۲۱ موکول می‌کنیم؛ اینجا فقط مختصری در مورد حالت خاصی که همهٔ سرعتها در راستای $x$ (یا $x'$) باشند صحبت می‌کنیم. در این حالت، نتیجهٔ اینشتین برای تبدیل سرعتها چنین است:

$$v_{PS} = \frac{v_{PS'} + v_{S'S}}{1 + v_{PS'}v_{S'S}/c^2} \qquad (46)$$

ببینید که چه نتیجهٔ زیبایی است. اگر $v_{PS'}$ و $v_{S'S}$ (نسبت به $c$) کوچک باشند، مخرج معادلهٔ ۴۶ خیلی نزدیک به ۱ می‌شود، و معادلهٔ ۴۶ به معادلهٔ ۴۳ تبدیل می‌شود. در سرعتهای کم، تبدیل گالیله‌ای سرعت جواب قابل قبولی می‌دهد. اگر $v_{PS'} = c$ باشد ($S'$ پرتو نور را مشاهده می‌کند)، از معادلهٔ ۴۶ نتیجه می‌شود که $v_{PS} = c$، و فرقی هم نمی‌کند که مقدار $v_{S'S}$ چه باشد. همهٔ ناظرها سرعت نور را یکسان می‌سنجند؛ یعنی مقداری که می‌سنجند به سرعت نسبی‌شان بستگی ندارد.

فرض اینشتین، و سینماتیک و مکانیکی که به دنبال آن می‌آید، لازم نمی‌دارد که فیزیک نیوتونی را کنار بگذاریم؛ تنها می‌گوید که محاسبات نیوتونی را به سرعتهای بسیار کوچک، در مقایسه با $c$، محدود کنیم. برای اجسام متحرکی که معمولاً با آنها سروکار داریم، این محدودیت به‌خوبی برقرار است. حتی سرعت سریعترین موشکهایی که بشر ساخته است ($v = 10^4\,\mathrm{m/s}$)، آنقدر کمتر از سرعت نور $3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$ است، که فرمول گالیله را با اطمینان به‌کار ببریم، بی‌آنکه مرتکب خطای قابل‌توجهی شده باشیم. اما ذراتی مثل الکترون یا پروتون را می‌شود به‌راحتی تا سرعتهای خیلی نزدیک به $c$ شتاب داد. دراین سرعتهای زیاد باید از یک فیزیک جدید، با معادلات جدید سینماتیکی

و دینامیکی، استفاده کرد. این فیزیک جدید، اساس نظریهٔ نسبیت خاص است، که آن را به تفصیل بیشتر در فصل ۲۱ مطالعه خواهیم کرد.

## پرسشها

۱. آیا ممکن است جهت شتاب جسمی تغییر کند، بی‌آنکه جهت سرعت آن تغییر کند؟

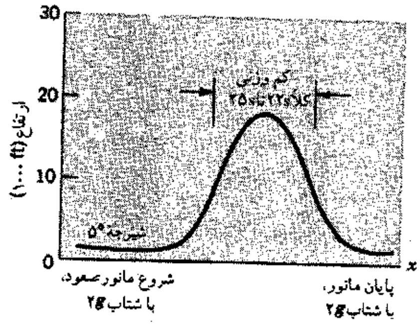
۲. اگر $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ به‌ترتیب نمایندهٔ سرعت و شتاب اتومبیلی باشد، وضعیت حرکت درهر یک از این حالتها چگونه است؟ (الف) $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ موازی و هم‌جهت‌اند؛ (ب) $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ موازی و در جهتهای مخالف‌اند؛ (ج) $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ برهم عمودند؛ (د) $\mathbf{v}$ صفر و $\mathbf{a}$ مخالف صفر است؛ (ه) $\mathbf{a}$ صفر و $\mathbf{v}$ مخالف صفر است.

۳. آیا در پرش طول، ارتفاعی هم که ورزشکار به آن می‌رسد اهمیت دارد؟ چه عواملی برد پرش را تعیین می‌کنند؟

۴. الکترونهای باریکه‌ای را که از تفنگ الکترونی خارج می‌شود، و نیز مولکولهای جریان آبی را که از لوله بیرون می‌زند در نظر بگیرید. چرا، در اثر گرانش، الکترون به‌اندازهٔ مولکول آب سقوط نمی‌کند؟ فرض کنید که حرکت اولیه ذرات، در هر دو مورد، افقی است.

۵. سرعت پرتابه در کدام نقطه یا نقاطِ مسیر کمینه است؟ در کجا بیشینه است؟

۶. شکل ۱۸ مسیر پرواز یکی از هواپیماهای جت ناسا را نشان می‌دهد. هدف از این پرواز، شبیه‌سازی شرایط کم‌وزنی برای مدتی کوتاه است. استدلال کنید که اگر مسیر هواپیما، سهمی خاصی باشد، مسافران آن احساس بی‌وزنی خواهند کرد.

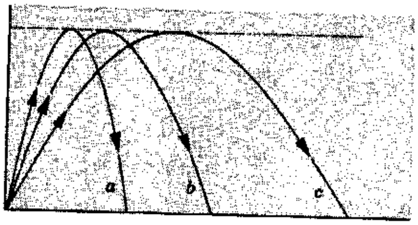



شکل ۱۸. پرسش ۶

۷. پرتابه‌ای از نقطه‌ای بالاتر از سطح زمین پرتاب می‌شود. زاویهٔ پرتاب متناظر با بیشترین برد کمتر از $45°$ است. آیا می‌توانید این مشاهده را توضیح بدهید؟

۸. پرتابه‌ای را در اوج مسیرش در نظر بگیرید. در این نقطه (الف) سرعت پرتابه، برحسب $v_0$ و $\phi_0$، چقدر است؟ (ب) شتاب آن چقدر و درکدام جهت است؟ (ج) جهت شتاب پرتابه چه ارتباطی با جهت سرعت آن دارد؟

۹. شکل ۱۹، مسیر سه توپ فوتبال را نشان می‌دهد. (الف) کوتاهترین مدت پرواز، (ب) بزرگترین مؤلفهٔ قائم سرعت در زمان شروع حرکت، (ج) بزرگترین مؤلفهٔ افقی سرعت در زمان شروع حرکت، و (د) کمترین سرعت در زمان شروع حرکت، مربوط به کدام‌یک از این مسیرهاست؟ (مقاومت هوا را ناچیز بگیرید.)




شکل ۱۹. پرسش ۹

۱۰. تفنگی، وقتی به‌طرف هدفی هم تراز با خودش نشانه برود، به هدف می‌زند. نشان بدهید که اگر این تفنگ به طرف هدفهای بالاتر یا پایین‌تر از خودش نشانه‌روی شود، به شرط آنکه فاصلهٔ هدف عوض نشود، همیشه "بالا می‌زند".[۱]

۱۱. پیتر برانکازیو درکتاب "دانشِ ورزش" در مورد پرتابه‌هایی مثل گوی بیسبال یا گوی گلف می‌نویسد: "با فرض اینکه بقیهٔ شرایط یکسان باشد، برد پرتابه‌ها در روزهای گرم بیشتر است تا در روزهای سرد، در سطوح مرتفع بیشتر است تا در سطح دریا، و در هوای مرطوب بیشتر است تا در هوای خشک". آیا می‌توانید درستی این گفته‌ها را توضیح بدهید؟

۱۲. نمودار ارتفاع-زمان پرتابه‌ای که در راستای قائم به بالا پرتاب شود، سهمی است. مسیر پرتابه‌ای هم که به‌طور مایل به بالا پرتاب شود سهمی است. آیا این شباهت تصادفی است؟ جواب خودتان را توجیه کنید.

۱۳. توپهای بلندبرد را در زاویهٔ "برد بیشینهٔ" $45°$ تنظیم نمی‌کنند، بلکه در زاویه‌های بزرگتر، درگسترهٔ $55°$ تا $65°$، تنظیم می‌کنند. زاویهٔ $45°$ چه اشکالی دارد؟

۱۴. آیا در حرکت پرتابه، اگر مقاومت هوا قابل چشمپوشی باشد، هیچ وقت لازم می‌شود که حرکت را، به‌جای دوبعدی، سه‌بعدی درنظر بگیریم؟

۱۵. آیا ممکن است که اندازهٔ سرعت ثابت باشد ولی حرکت شتابدار باشد؟ آیا می‌شود با شتاب صفر روی یک مسیر منحنی حرکت کرد؟ با شتابِ ثابت چطور؟

۱۶. مهره‌ای را در نظر بگیرید که در امتدادِ سیم بدون اصطکاکی به شکل مارپیچ با سرعت ثابت می‌لغزد و حلقه‌هایی را که به تدریج کوچکتر می‌شوند طی می‌کند. شتاب این مهره را به‌طور کیفی توصیف کنید.

۱۷. نشان بدهید که اگر هم چرخش و هم گردش زمین را به‌حساب

---

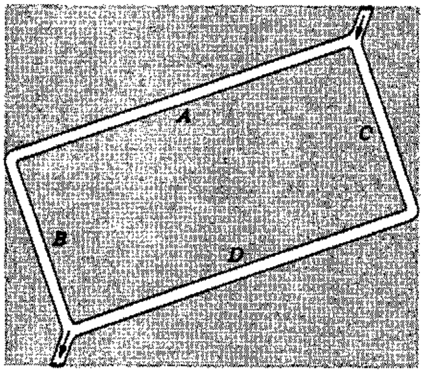
۱. در این باره می‌توانید رجوع کنید به
"A Puzzle in Elementary Ballistics," Ole Anton Haugland, *The Physics Teacher*, April 1983, p. 246.

بیاوریم، کتابی که روی میزتان است، شبها تندتر از روزها حرکت می‌کند. این گفته در کدام چارچوب مرجع درست است؟

۱۸. هوانوردی در پایان یک شیرجه، روی قوسی از دایره حرکت می‌کند. گفته می‌شود که هوانورد، با شتاب $3g$ از حالت شیرجه خارج شده است. معنی این عبارت را توضیح دهید.

۱۹. آیا می‌شود شتاب یک پرتابه را برحسب مؤلفه‌های شعاعی و مماسی آن در هر نقطه از مسیر حرکت نشان داد؟ اگر چنین است، آیا این نمایش مزیتی هم دارد؟

۲۰. لوله‌ای به شکل مستطیلی با گوشه‌های گرد در صفحهٔ قائم قرار دارد (شکل ۲۰). دو بلبرینگ را درگوشهٔ بالای سمت راست، یکی را در مسیر $AB$ و دیگری را در مسیر $CD$ رها می‌کنیم. کدام‌یک زودتر به گوشهٔ پایینِ سمت چپ می‌رسد؟




**شکل ۲۰.** پرسش ۲۰

۲۱. آیا اگر شتاب جسمی در یک چارچوب مرجع خاص ثابت باشد، در چارچوبهای مرجع دیگر هم الزاماً ثابت است؟

۲۲. کودکی در قطاری که با سرعت ثابت حرکت می‌کند نشسته است. این کودک توپی را مستقیماً به بالا پرتاب می‌کند. آیا توپ پشت سرش می‌افتد، جلویش می‌افتد، یا توی دستهایش؟ اگر در مدتی که توپ در هواست، قطار به طرف جلو شتاب بگیرد، یا روی ریل منحنی حرکت کند، توپ در برگشت چه وضعیتی خواهد داشت؟

۲۳. شخصی روی سکوی عقبی قطاری که سرعت ثابت دارد ایستاده است. این شخص در حالی‌که روی ریل خم شده است، سکه‌ای را رها می‌کند. مسیر حرکت سکه را از دید این ناظرها بررسی کنید: (الف) خودِ شخص، (ب) شخصی که نزدیک ریل ایستاده است، و (ج) شخصی که در قطار دیگری است که روی ریلی موازی با ریل قطار اول، و در جهت مخالف این قطار حرکت می‌کند.

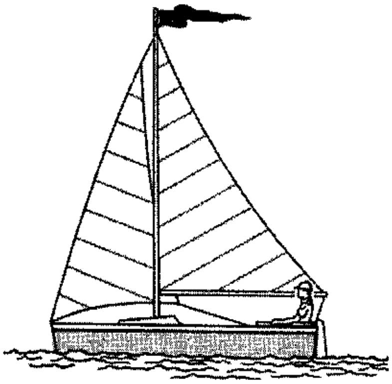
۲۴. آسانسوری با سرعت ثابت پایین می‌آید. شخصی در این آسانسور، سکه‌ای را رها می‌کند. شتاب سکهٔ افتان (الف) از دید این شخص و (ب) از دید شخصی که نسبت به چاه آسانسور ساکن است چقدر است؟

۲۵. سطلی زیر باران است. باران به‌طور یکنواخت می‌بارد و در سطل جمع می‌شود. آیا اگر باد افقی ثابتی بوزد، آهنگ جمع شدن آب در سطل تغییر می‌کند؟

۲۶. شیشهٔ جلوی اتوبوسی در صفحهٔ قائم است. این اتوبوس زیر باران شدید با سرعت $v_b$ حرکت می‌کند قطرات باران با سرعت حد $v_r$ در راستای قائم سقوط می‌کنند. این قطره‌ها با چه زاویه‌ای به شیشهٔ جلو می‌خورند؟

۲۷. فرض کنید بارانی با قطره‌های منظم و عمود بر زمین می‌بارد و شما می‌خواهید در زیر این باران مسافت معینی را طوری طی کنید که حتی‌الامکان کمتر خیس بشوید (یعنی قطره‌های کمتری به شما اصابت کند). آیا باید خیلی تند بدوید؟ خیلی آهسته راه بروید؟ یا یک سرعت میانی مناسب انتخاب کنید؟[1]

۲۸. شکل ۲۱ چه ایرادی دارد؟ قایق دارد با نیروی باد حرکت می‌کند.



**شکل ۲۱.** پرسش ۲۸

۲۹. تبدیل گالیله‌ای سرعت (معادلهٔ ۴۳) از تجربیات روزمره چنان به ذهن ما آشناست که گاهی ادعا می‌شود که "صحت آن بدیهی است و نیاز به اثبات ندارد." بسیاری از (به‌اصطلاح) ابطالهای نظریهٔ نسبیت هم در واقع مبتنی بر همین ادعاست. چگونه می‌شود این ادعا را رد کرد؟

## مسئله‌ها

**بخش ۴ـ۱ مکان، سرعت، و شتاب**

۱. هواپیمایی از شهر $A$، $410\,\mathrm{mi}$ به‌طرف شرق پرواز می‌کند و در مدت $45\mathrm{min}$ به شهر $B$ می‌رسد. سپس $820\,\mathrm{mi}$ به طرف جنوب پرواز می‌کند و در مدت $1\mathrm{h}30\mathrm{min}$ به شهر $C$ می‌رسد. (الف) اندازه و جهت بردار جابه‌جایی مربوط به کل مسیر را به‌دست بیاورید.

---

۱. نگاه کنید به
"An Optimal Speed for Traversing a Constant Rain", S. A. Stern, *American Journal of Physics*, September 1983, p. 815.

(ب) بردار سرعت متوسط و (ج) متوسط اندازهٔ سرعت را پیدا کنید.

۲. مکان ذره‌ای در صفحهٔ $xy$ با رابطهٔ $\mathbf{r} = (2t^3 - 5t)\mathbf{i} + (6 - 7t^4)\mathbf{j}$ بیان می‌شود، که در آن $r$ برحسب متر و $t$ برحسب ثانیه است. (الف) $\mathbf{r}$، (ب) $\mathbf{v}$، و (ج) $\mathbf{a}$ را در $t = 2\,\mathrm{s}$ حساب کنید.

۳. بالونی در مدت $3\,\mathrm{h}\,24\,\mathrm{min}$، از نقطهٔ رهاشدنش در سطح زمین، $8.7\,\mathrm{km}$ به شمال، $9.7\,\mathrm{km}$ به‌شرق، و $2.9\,\mathrm{km}$ به طرف بالا می‌رود. (الف) اندازهٔ سرعت متوسط بالون و (ب) زاویهٔ بردار سرعت متوسط با سطح افقی را پیدا کنید.

۴. سرعت ذره‌ای درصفحهٔ $xy$ از رابطهٔ $\mathbf{v} = (6t - 4t^2)\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ به‌دست می‌آید، که در آن $v$ برحسب متر بر ثانیه و $t(> 0)$ برحسب ثانیه است. (الف) شتاب ذره را در $t = 3\,\mathrm{s}$ پیدا کنید. (ب) شتاب در چه زمانی صفر می‌شود (اگر اصولاً صفر شود)؟ (ج) سرعت در چه زمانی صفر می‌شود (اگر اصولاً صفر شود)؟ (د) سرعت در چه زمانی $10\,\mathrm{m/s}$ می‌شود (اگر اصولاً چنین زمانی در کار باشد)؟

### بخش ۴ـ۲ حرکت با شتاب ثابت

۵. در یک لامپ پرتو کاتدی، باریکه‌ای از الکترونها با سرعت $9.6 \times 10^8\,\mathrm{cm/s}$ به‌طور افقی وارد ناحیه‌ای به‌طول $2.3\,\mathrm{cm}$ میان دو صفحهٔ افقی می‌شود. بین این دو صفحه یک میدان الکتریکی وجود دارد که به الکترونها شتاب رو به پایین $9.4 \times 10^{16}\,\mathrm{cm/s^2}$ می‌دهد. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا الکترونها از ناحیهٔ میان صفحات بگذرند؟ (ب) جابه‌جایی عمودی باریکه طی این مدت چقدر است؟ (ج) مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت باریکه، هنگام خروج از این ناحیه چقدر است؟

۶. یک قایق بادبانی یخ‌نوردی، با شتاب ثابت حاصل از باد، روی سطح دریاچهٔ یخزده‌ای حرکت می‌کند. سرعت آن در زمان معینی $6.30\mathbf{i} - 8.42\mathbf{j}$ (برحسب $\mathrm{m/s}$) است. سه ثانیه بعد، قایق به‌حالت سکون لحظه‌ای می‌رسد. شتاب قایق در این مدت چه بوده است؟

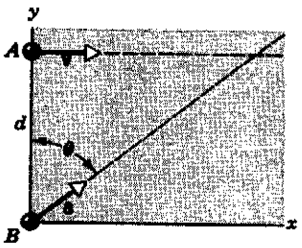
۷. ذره‌ای چنان حرکت می‌کند که مکان آن برحسب زمان به‌صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

(الف) سرعت و (ب) شتاب آن‌را برحسب زمان بنویسید. (ج) مسیر ذره به چه شکلی است؟

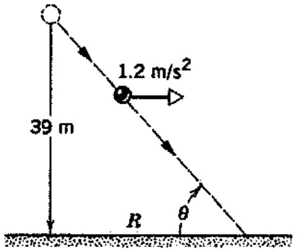
۸. ذره‌ای در $t = 0$، با سرعت اولیهٔ $\mathbf{v}_0 = 3.6\mathbf{i}$، برحسب $\mathrm{m/s}$، از مبدأ حرکت می‌کند. شتاب این ذره ثابت و برابر با $\mathbf{a} = -1.2\mathbf{i} - 1.4\mathbf{j}$، برحسب $\mathrm{m/s^2}$ است. (الف) ذره در چه زمانی به بیشترین مختصهٔ $x$ خود می‌رسد؟ (ب) سرعت ذره در این زمان چقدر است؟ (ج) در این زمان، ذره کجاست؟

۹. ذرهٔ $A$ در راستای خط $y = d(30\,\mathrm{m})$، با سرعت ثابت $\mathbf{v}(v = 3.0\,\mathrm{m/s})$ در جهت مثبت محور $x$ حرکت می‌کند (شکل ۲۲). ذرهٔ $B$، هنگامی که $A$ از محور $y$ می‌گذرد، با سرعت صفر و شتاب ثابت $\mathbf{a}(a = 0.40\,\mathrm{m/s^2})$ از مبدأ شروع به حرکت می‌کند. زاویهٔ $\theta$ بین $\mathbf{a}$ و جهتِ مثبت محور $y$ چقدر باشد تا دو ذره با هم برخورد کنند؟



شکل ۲۲. مسئلهٔ ۹

۱۰. توپی از ارتفاع $39.0\,\mathrm{m}$ رها می‌شود. باد، افقی می‌وزد و به توپ شتاب $1.20\,\mathrm{m/s^2}$ می‌دهد. (الف) نشان بدهید که توپ روی یک خط راست حرکت می‌کند و مقادیر $R$ و $\theta$ در شکل ۲۳ را پیدا کنید. (ب) چه مدتی طول می‌کشد تا توپ به زمین برسد؟ (ج) توپ با چه سرعتی به زمین می‌خورد؟



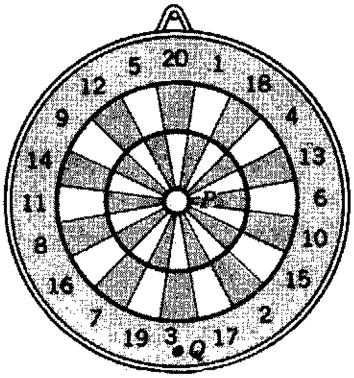
شکل ۲۳. مسئلهٔ ۱۰

### بخش ۴ـ۳ حرکت پرتابی

۱۱. توپی روی میزی افقی به ارتفاع $4.23\,\mathrm{ft}$ می‌غلتد و از آن به زمین می‌افتد. نقطهٔ برخورد توپ به زمین در فاصلهٔ افقی $5.11\,\mathrm{ft}$ از لبهٔ میز است. (الف) توپ چه مدتی در هوا بوده است؟ (ب) سرعت آن هنگام افتادن از میز چقدر بوده است؟

۱۲. الکترون هم، مثل همهٔ انواع دیگر ماده، تحت تأثیر گرانش سقوط می‌کند. الکترونی با سرعت $3.0 \times 10^7\,\mathrm{m/s}$ (یک دهم سرعت نور) به‌طور افقی پرتاب می‌شود. این الکترون، طی مسافت افقی $1\,\mathrm{m}$، چقدر سقوط می‌کند؟

۱۳. پیکانی با سرعت اولیهٔ $10\,\mathrm{m/s}$ به طرف مرکز تختهٔ هدف، نقطهٔ $P$ پرتاب می‌شود و $0.19\,\mathrm{s}$ بعد در نقطهٔ $Q$ که در امتداد قائم زیر $P$ است فرو می‌رود؛ شکل ۲۴. (الف) فاصلهٔ $PQ$ چقدر است؟ (ب) فاصلهٔ پرتاب‌کننده از هدف چقدر بوده است؟




شکل ۲۴. مسئلهٔ ۱۳

۱۴. تفنگی به‌طور افقی به طرف هدفی به فاصلهٔ ۱۳۰ft نشانه رفته است. گلوله ۰ر۷۵in زیر هدف می‌خورد. (الف) زمان پرواز گلوله چقدر بوده است؟ (ب) سرعت خروج گلوله چقدر بوده است؟

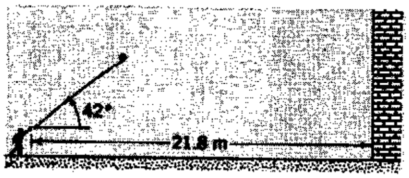
۱۵. گلوله‌ای با سرعت ۲۵۰m/s در راستای افق از تفنگی در ارتفاع ۴۵ر۰m از سطح زمین شلیک می‌شود. (الف) گلوله چه مدتی در هوا می‌ماند؟ (ب) فاصلهٔ افقی نقطهٔ برخورد گلوله به زمین از نقطهٔ شلیک چقدر است؟ (ج) مؤلفهٔ قائم سرعت گلوله، هنگام برخورد با زمین، چقدر است؟

۱۶. یک بازیکن بیسبال، توپ را با سرعت ۹۲ر۰mi/h به‌طور افقی پرتاب می‌کند. فاصلهٔ پرتاب‌کننده تا بازیکنی که چوب بیسبال را در دست دارد، ۶۰ر۰ft است. (الف) چقدر طول می‌کشد تا توپ ۳۰ر۰ft افقی اول مسیر را بپیماید؟ چقدر طول می‌کشد تا ۳۰ر۰ft دوم را بپیماید؟ (ب) در طی ۳۰ر۰ft افقی اول، توپ تحت تأثیر گرانش چقدر سقوط می‌کند؟ (ج) در ۳۰ر۰ft دوم چقدر؟ (د) چرا این دو مقدار با هم برابر نیستند؟ مقاومت هوا را ناچیز بگیرید.

۱۷. در یک داستان پلیسی، جسدی به فاصلهٔ ۱۵ft از دیوار ساختمانی، و زیر پنجره‌ای باز به ارتفاع ۸۰ft پیدا می‌شود. حدس می‌زنند که مرگ تصادفی بوده است یا خیر؟ چرا؟

۱۸. گلوله‌ای را با سرعت اولیهٔ ۱۵m/s و با زاویهٔ °۲۰ زیر سطح افق، از بالای صخره‌ای پرتاب می‌کنیم. (الف) جابه‌جایی افقی و (ب) جابه‌جایی عمودی گلوله ۲ر۳s بعد از پرتاب چقدر است؟

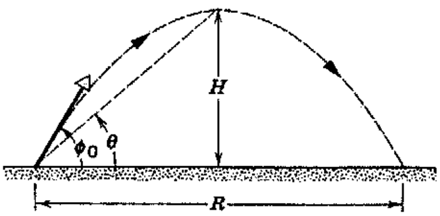
۱۹. توپ کوچکی را با سرعت ۲۵ر۳m/s با زاویهٔ °۴۲ر۰ بالاتر از سطح افق، مستقیماً به‌طرف دیواری پرتاب می‌کنیم (شکل ۲۵). دیوار ۲۱ر۸m از نقطهٔ پرتاب توپ فاصله دارد. (الف) چقدر طول می‌کشد تا توپ به دیوار برخورد کند؟ (ب) توپ چقدر بالاتر از نقطهٔ پرتاب به دیوار می‌خورد؟ (ج) مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت توپ در لحظهٔ برخورد به دیوار چقدر است؟ (د) آیا توپ، پس از گذشتن از نقطهٔ اوج مسیرش به دیوار می‌خورد؟




شکل ۲۵. مسئلهٔ ۱۹

۲۰. نشان بدهید که ارتفاع نقطهٔ اوج پرتابه، $y_{\max} = (v_0 \sin \phi_0)^2/2g$ است.

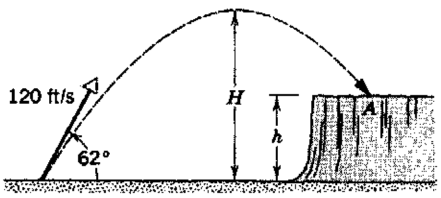
۲۱. (الف) پرتابه‌ای را در نظر بگیرید که از سطح زمین با زاویهٔ $\phi_0$ بالاتر از سطح افقی پرتاب می‌شود. نشان بدهید که نسبت ارتفاع نقطهٔ اوج $H$ به برد $R$ برابر است با $H/R = 1/4 \tan\phi_0$. (ب) زاویهٔ پرتاب چقدر باشد تا ارتفاع اوج با برد افقی برابر شود؟ (شکل ۲۶).




شکل ۲۶. مسئله‌های ۲۱ و ۲۲

۲۲. پرتابه‌ای را در نظر بگیرید که از سطح زمین با زاویهٔ $\phi_0$ بالاتر از سطح افقی پرتاب می‌شود. (الف) نشان بدهید که رابطهٔ زاویهٔ فرازِ نقطهٔ اوج نسبت به نقطهٔ پرتاب ($\theta$ در شکل ۲۶)، با $\phi_0$ چنین به صورت $\tan \theta = 1/2 \tan \phi_0$ است. (ب) $\theta$ را به‌ازای $\phi_0 = 45°$ حساب کنید.

۲۳. سنگی را از سطح زمین با سرعت اولیهٔ ۱۲۰ft/s در جهت °۶۲ بالاتر از سطح افق به طرف صخره‌ای به ارتفاع $h$ پرتاب می‌کنند (شکل ۲۷). این سنگ ۵ر۵s پس از پرتاب در نقطهٔ $A$ به‌زمین می‌خورد. (الف) ارتفاع صخرهٔ ($h$)، (ب) سرعت سنگ درست پیش از برخورد در نقطهٔ $A$، و (ج) ارتفاع اوج سنگ نسبت به زمین ($H$) را پیدا کنید.

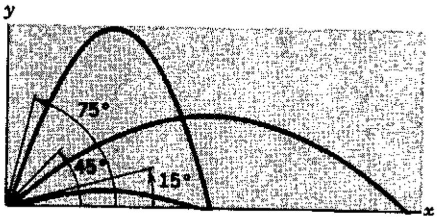



شکل ۲۷. مسئلهٔ ۲۳

۲۴. در المپیک ۱۹۶۸ مکزیکوسیتی، باب بیمون رکورد ۸٫۹۰m را برای پرش طول به‌جا گذاشت. فرض کنید سرعت اولیهٔ او درلحظهٔ آغاز پرش ۹٫۵۰m/s (تقریباً برابر با سرعت دونده‌های سرعت) بوده باشد، اختلاف این رکورد با رکوردی که در همین شرایط و در غیاب مقاومت هوا به‌دست می‌آمد چقدر است؟ مقدار $g$ در مکزیکوسیتی ۹٫۷۸m/s$^2$ است.

۲۵. در مثال ۳، (الف) اندازهٔ سرعت بسته در موقع برخورد با هدف و (ب) زاویهٔ برخورد نسبت به راستای قائم چقدر است؟ (ج) چرا زاویهٔ برخورد با زاویهٔ دیدِ هدف از نقطهٔ پرتاب برابر نیست؟

۲۶. (الف) گالیله درکتاب دو علم جدید می‌نویسد که "برای زاویه‌های پرتابی که به یک اندازه از ۴۵° بیشتر یا کمتر باشند، برد یکسان است" این گفته را اثبات کنید (شکل ۲۸). (ب) دو زاویهٔ پرتابی را پیدا کنید که بردشان به‌ازای سرعت اولیهٔ ۳۰٫۰m/s برابر با ۲۰٫۰m باشد.



شکل ۲۸. مسئلهٔ ۲۶

۲۷. تردستی می‌تواند پنج توپ را در حرکت نگه دارد. او توپها را پشت سر هم تا ارتفاع ۳٫۰m به هوا پرتاب می‌کند. (الف) مدت بین دو پرتاب متوالی چقدر است؟ (ب) وقتی که یکی از توپها به‌دست تردست می‌رسد، بقیهٔ توپها کجاها هستند؟ (از زمان لازم برای اینکه تردست توپ را از یک دستش به‌دست دیگر بدهد صرفنظر کنید.)

۲۸. گلوله‌های تفنگی با سرعت ۱۵۰۰ft/s از لوله خارج می‌شوند. هدف در فاصلهٔ ۱۵۰ft از تفنگ است. چقدر بالاتر از هدف را باید نشانه گرفت تا گلوله به هدف بخورد؟

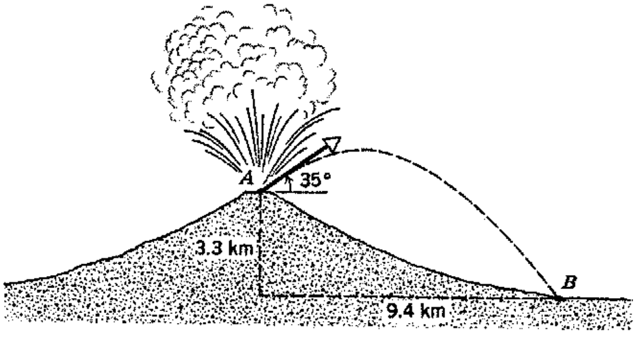
۲۹. توپی از بالاترین پلهٔ پلکانی قل می‌خورد و با سرعت افقی ۵٫۰ft/s از لبهٔ آن رها می‌شود. ارتفاع هر پله ۸٫۰in، و عرض هر پله هم ۸٫۰in است. اولین پله‌ای که توپ روی آن می‌افتد پلهٔ چندم است؟

۳۰. توپی را از زمین به هوا پرتاب می‌کنیم. سرعت توپ در ارتفاع ۹٫۱m به‌صورت $\mathbf{v}$ = ۷٫۶$\mathbf{i}$ + ۶٫۱$\mathbf{j}$، برحسب m/s، است ($x$ محور افقی است و $y$ محور قائم به طرف بالا). (الف) ارتفاع اوج توپ چقدر است؟ (ب) کل مسافت افقی‌ای که توپ می‌پیماید چقدر است؟ (ج) (اندازه و جهت) سرعت توپ را در لحظهٔ پیش از برخورد به زمین به‌دست بیاورید.

۳۱. منطقهٔ پرتاب توپ در زمین بیسبال، ۱٫۲۵ft بالاتر از زمین بازی است. آیا پرتاب‌کننده می‌تواند توپی سریع را به‌طور افقی با سرعت ۹۲٫۰mi/h پرتاب کند. چنانکه توپ در منطقهٔ ضربه قابل زدن باشد؟ منطقهٔ ضربه ۶۰٫۵ft با منطقهٔ پرتاب فاصله دارد، فرض کنید که توپ، برای اینکه قابل زدن باشد، باید حداقل ۱٫۳۰ft و حداکثر ۳٫۶۰ft از نقطهٔ پرتاب پایین‌تر باشد.

۳۲. طبق معادلهٔ ۲۴، برد پرتابه‌ها نه تنها به $v_0$ و $\phi_0$، بلکه به مقدار شتاب گرانشی $g$ هم بستگی دارد. این شتاب، در نقاط مختلف زمین فرق می‌کند. در سال ۱۹۳۶، جسی اونس در بازیهای المپیک برلن ($g$ = ۹٫۸۱۲۸m/s$^2$) رکورد جهانی ۸٫۰۹m را برای پرش طول به‌جا گذاشت. اگر او، با همان مقدار $v_0$ و $\phi_0$، در المپیک ۱۹۵۶ ملبورن ($g$ = ۹٫۷۹۹۹m/s$^2$) شرکت می‌کرد، رکوردش چقدر تغییرمی‌کرد؟[1]

۳۳. هنگام فوران آتشفشان، ممکن است قطعات سنگ جامد هم از دهانهٔ آتشفشان به بیرون پرتاب شوند؛ این پرتابه‌ها را پاره‌های آتشفشانی می‌نامند. شکل ۲۹ مقطع کوه فوجی (در ژاپن) را نشان می‌دهد. (الف) پاره‌ای که با زاویهٔ ۳۵° نسبت به سطح افقی از دهانهٔ $A$ خارج می‌شود سرعتش چقدر باشد تا در نقطهٔ $B$ در پای کوه آتشفشان به زمین برسد؟ (ب) زمان حرکت این پاره در هوا چقدر است؟

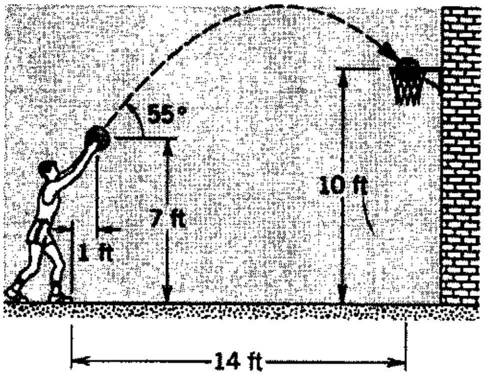


شکل ۲۹. مسئلهٔ ۳۳

۳۴. یک بازیکن بیسبال می‌خواهد توپ را به نقطه‌ای در فاصلهٔ ۱۲۷ft پرتاب کند. بیشترین سرعتی که او می‌تواند به توپ بدهد ۸۵mi/h است. (الف) اگر توپ را به‌طور افقی و از فاصلهٔ ۳٫۰ft بالاتر از سطح زمین پرتاب کند، چه بر سر توپ می‌آید؟ (ب) توپ را با چه زاویه‌ای به طرف بالا پرتاب کند تا بازیکن دیگری که در نقطهٔ فرود توپ ایستاده است بتواند آن‌را بگیرد؟ فرض کنید گیرندهٔ توپ هم آن‌را ۳٫۰ft بالاتر از سطح زمین می‌گیرد. (ج) مدت پرواز توپ در این مورد چقدر است؟

۳۵. بازیکنی توپ بسکتبال را با زاویهٔ ۵۵° بالاتر از سطح افقی به طرف حلقه پرتاب می‌کند؛ شکل ۳۰. سرعت اولیهٔ توپ چقدر باشد تا توپ مستقیماً وارد حلقه شود؟ قطر حلقه ۱۸in است. اطلاعات دیگر را از شکل ۳۰ بخوانید.

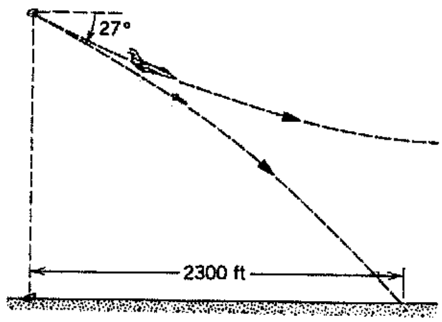
۱. رجوع کنید به
"The Earth's Gravity", Weikko A. Heiskanen, *Scientific American*, September 1955, p. 164.



شکل ۳۰. مسئلهٔ ۳۵

۳۶. فوتبالیستی توپ را چنان شوت می‌کند که زمان پرواز آن یعنی ۴٫۵۰s و برد آن ۵۰yd(یعنی ۴۵٫۸m) است. توپ در ارتفاع ۵٫۰ft(یعنی ۱٫۵۲m) از سطح زمین، از پای بازیکن جدا می‌شود. (اندازه و جهت) سرعت اولیهٔ توپ چقدر بوده است؟

۳۷. هواپیمایی با سرعت ۱۸۰mi/h و با زاویهٔ °۲۷ پایین‌تر از افق در حال شیرجه است که یک "گول‌زنک" رادار از آن رها می‌شود. فاصلهٔ افقی میان نقطهٔ رها شدن گول‌زنک و نقطهٔ برخورد آن با زمین ۲۳۰۰ft است. گول‌زنک (الف) چه مدتی در هوا بوده؟ و (ب) در چه ارتفاعی از هواپیما رها شده است؟ (شکل ۳۱)



شکل ۳۱. مسئلهٔ ۳۷

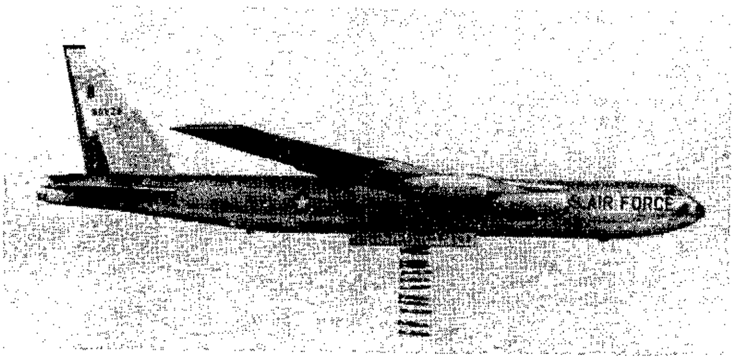
۳۸. بمب‌افکنی با زاویهٔ °۵۶٫۰ نسبت به راستای قائم شیرجه می‌رود و بمبی را در ارتفاع ۷۳۰m رها می‌کند. بمب ۵٫۱۰s بعد به زمین می‌رسد، اما به هدف برنمی‌خورد. (الف) سرعت بمب‌افکن، موقع رها کردن بمب، چقدر بوده است؟ (ب) بمب، در طی پروازش، چه مسافت افقی‌ای پیموده است؟ (ج) مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت بمب، درست پیش از برخورد به زمین، چقدر بوده‌اند؟ (د) اندازهٔ سرعت، و زاویهٔ برخورد بمب نسبت به محور قائم، در زمان برخورد بمب با زمین چقدر بوده است؟

۳۹. طول هواپیمای B-۵۲ (شکل ۳۲) ۴۹m است. این هواپیما دارد با سرعت ۸۲۰km/h(یعنی ۵۱۰mi/h) بر فراز منطقه‌ای که قرار است بمباران شود پرواز می‌کند. فاصلهٔ حفره‌هایی که بمبها روی زمین ایجاد می‌کنند از یکدیگر چقدر خواهد بود؟ هرکمیت دیگری را که لازم دارید مستقیماً روی شکل اندازه‌گیری کنید، فرض کنید باد نمی‌وزد و مقاومت هوا را هم ناچیز بگیرید. مقاومت هوا چه تأثیری بر جواب شما خواهد داشت؟

۴۰. فوتبالیستی توپ را با سرعت اولیهٔ ۶۴ft/s با زاویهٔ °۴۲ بالاتر از سطح افقی شوت می‌کند. در همان لحظه بازیکن دیگری که به فاصلهٔ ۶۵yd از قبلی در جهت حرکت افقی توپ ایستاده است شروع به دویدن می‌کند تا توپ را بگیرد. سرعت متوسط این بازیکن چقدر باشد تا بتواند درست پیش از برخورد توپ به زمین به آن برسد؟ از مقاومت هوا چشمپوشی کنید.

۴۱. (الف) تنیس‌بازی در یک مسابقه، چنان "سِرو می‌زند" که به توپ سرعت ۲۳٫۶m/s می‌دهد (این مقدار توسط رادار ثبت می‌شود). اگر توپ ۲٫۳۷m بالاتر از سطح زمین و در راستای افق از راکت جدا شده باشد، در چه فاصله‌ای از بالای تور عبور می‌کند؟ تور در فاصلهٔ ۱۲m از محل سرویس است و ۰٫۹۰m ارتفاع دارد. (ب) فرض کنید تنیس‌باز به همان ترتیب سرو بزند، اما توپ با زاویهٔ °۵٫۰۰ پایین‌تر از سطح افقی از راکت جدا شود. آیا این بار هم توپ از تور می‌گذرد؟

۴۲. یک بازیکن بیسبال، توپ را با چوب بیسبال در ارتفاع ۴٫۰ft از سطح زمین چنان می‌زند که زاویهٔ پرتاب توپ °۴۵ و بُرد افقی آن

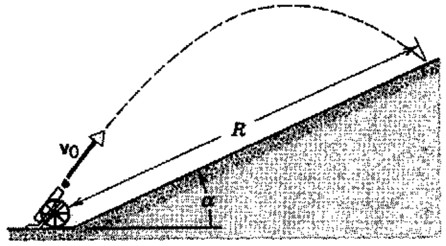


شکل ۳۲. مسئلهٔ ۳۹

۳۵۰ft می‌شود. توپ از زمین خارج می‌شود و به نرده‌ای به ارتفاع ۲۴ft می‌رسد که ۳۲۰ft از نقطهٔ پرتاب فاصله دارد. آیا توپ از بالای نرده می‌گذرد؟ اگر می‌گذرد، در چه فاصله‌ای؟

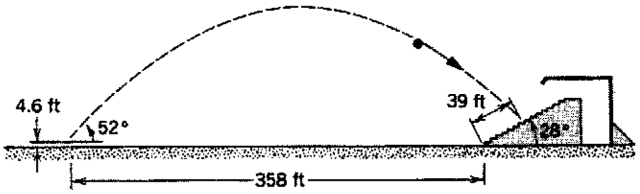
۴۳. بازیکنی می‌تواند توپ فوتبال را با سرعت ۲۵m/s شوت کند. زاویهٔ شوت نسبت به سطح زمین در چه گستره‌ای باشد تا توپ درست از زیر تیر افقی وارد دروازه شود؟ دروازه ۵۰m دورتر است و ارتفاع تیر افقی آن از سطح زمین ۳٫۴۴m است.

۴۴. توپی گلوله‌هایش را با سرعت $v_0$ پرتاب می‌کند. این توپ در پای تپه‌ای به زاویهٔ شیب $\alpha$ قرار دارد؛ شکل ۳۳. زاویهٔ پرتاب گلوله نسبت به سطح افقی چقدر باشد تا برد گلوله‌ها روی تپه بیشینه شود؟



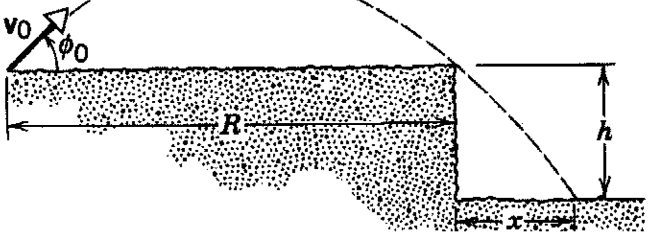
شکل ۳۳. مسئلهٔ ۴۴

۴۵. در یک بازی بیسبال، بازیکنی توپ را با چوب خود در ارتفاع ۴٫۶۰ft از سطح زمین می‌زند. زاویهٔ پرتاب توپ نسبت به سطح افقی ۵۲٫۰° است. توپ در جایگاه تماشاگران، و به فاصلهٔ ۳۹٫۰ft از پایین آن، فرود می‌آید؛ شکل ۳۴. شیب جایگاه ۲۸٫۰° است و پایین‌ترین نیمکتهای آن ۳۵۸ft از محل ضربه فاصله دارند. توپ با چه سرعتی از چوب بازیکن جدا شده است؟ (مقاومت هوا ناچیز است.)



شکل ۳۴. مسئلهٔ ۴۵

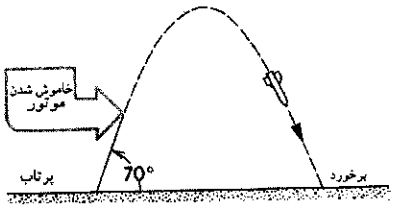
۴۶. پرتابه‌هایی را از فاصلهٔ $R$ از لبهٔ صخره‌ای به ارتفاع $h$ چنان پرتاب می‌کنیم که در نقطه‌ای به فاصلهٔ افقی $x$ از پای صخره فرود بیایند؛ شکل ۳۵. $\phi_0$ و $v_0$ را چنان تعیین کنید که $x$ کمینه شود. فرض کنید می‌توانیم $v_0$ را از صفر تا مقدار بیشینهٔ متناهی $v_{max}$ تغییر بدهیم و $\phi_0$ را هم به دلخواه تنظیم کنیم. شرط مسئله این است که پرتابه باید تنها یک بار به زمین بخورد.



شکل ۳۵. مسئلهٔ ۴۶

۴۷. متصدی رادار، از زمین پرتابه‌ای را "مشاهده می‌کند" که دارد نزدیک می‌شود. در یک لحظهٔ معین، اطلاعات دریافتی از حرکت پرتابه این است: پرتابه در نقطهٔ اوج است و با سرعت $v$ به‌طور افقی حرکت می‌کند؛ فاصلهٔ مستقیم پرتابه از محل $L$ است؛ پرتابه تحت زاویهٔ $\theta$، بالاتر از سطح افقی، دیده می‌شود. (الف) فاصلهٔ $D$ بین ناظر و نقطهٔ برخورد پرتابه به زمین چقدر است؟ $D$ را برحسب مقادیر مشاهده شدهٔ $v$، $L$، $\theta$، و مقدار معلوم $g$ به‌دست بیاورید. فرض کنید زمین مسطح است و ناظر در صفحهٔ مسیر پرتابه است. (ب) آیا پرتابه از ناظر می‌گذرد یا جلوی او به زمین می‌خورد؟

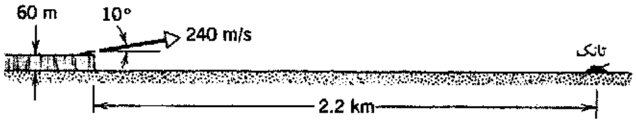
۴۸. موشکی از حالت سکون، با شتاب ۴۶٫۰m/s² و روی خط راستی با زاویهٔ ۷۰٫۰° نسبت به سطح افقی، شروع به حرکت می‌کند. مدت پرواز تحت تأثیر نیروی پیشران، ۳۰٫۰s است. پس از این مدت، موتور خاموش می‌شود و موشک در مسیری سهموی به زمین برمی‌گردد؛ شکل ۳۶. (الف) زمان پرواز، از لحظهٔ پرتاب تا لحظهٔ برخورد، چقدر است؟ (ب) ارتفاع اوج موشک چقدر است؟ (ج) فاصلهٔ نقطهٔ پرتاب از نقطهٔ برخورد چقدر است؟ از تغییر $g$ با ارتفاع صرفنظر کنید.



شکل ۳۶. مسئلهٔ ۴۸

۴۹. سلاح ضد تانکی روی لبهٔ سطحی است که ۶۰٫۰m بالاتر از دشتِ اطراف است؛ شکل ۳۷. خدمهٔ سلاح، یکی از تانکهای دشمن را در دشت در فاصلهٔ افقی ۲٫۲۰km از سلاح می‌بینند که ساکن است. در همین لحظه، خدمهٔ تانک متوجه سلاح ضد تانک می‌شوند و با شتاب ۰٫۹۰۰m/s² شروع به حرکت در جهت مخالف می‌کنند و از سلاح دور می‌شوند. سلاح ضد تانک می‌تواند گلوله‌ای با سرعت ۲۴۰m/s و با زاویهٔ ۱۰٫۰° بالاتر از سطح افقی شلیک کند. خدمهٔ سلاح باید چه

مدتی بعد از شروع حرکت تانک شلیک کنند تا گلوله به تانک بخورد؟



شکل ۳۷. مسئلهٔ ۴۹

۵۰. بازیکنی می‌تواندتوپ بیسبال را حداکثر تا فاصلهٔ ۶۰٫۰m پرتاب کند. همین بازیکن توپ را حداکثر تا چه ارتفاعی می‌تواند پرتاب کند؟ فرض کنید که توپ، در هر دو حالت، از ارتفاع ۱٫۶۰m و با سرعت اولیهٔ یکسان رها می‌شود.

### بخش ۴-۴ حرکت دایره‌ای یکنواخت

۵۱. در مدل بور برای اتم هیدروژن، الکترون روی مداری دایره‌ای به شعاع $۵٫۲۹ \times ۱۰^{-۱۱}\,\mathrm{m}$ و با سرعت $۲٫۱۸ \times ۱۰^{۶}\,\mathrm{m/s}$ به‌دور پروتون می‌گردد. شتاب الکترون در این مدل چقدر است؟

۵۲. فضانوردی در یک دستگاه گریز از مرکز (سانتریفوژ) به شعاع ۵٫۲m چرخانده می‌شود. (الف) به‌ازای چه سرعتی، شتاب فضانورد $۶٫۸g$ می‌شود؟ (ب) این سرعت متناظر با چند دور بردقیقه است؟

۵۳. ماهواره‌ای در یک مدار دایره‌ای به ارتفاع ۶۴۰km از سطح زمین حرکت می‌کند. زمان یک دور چرخش ماهواره ۹۸٫۰min است. (الف) سرعت ماهواره چقدر است؟ (ب) شتاب سقوط آزاد در مدار ماهواره چقدر است؟

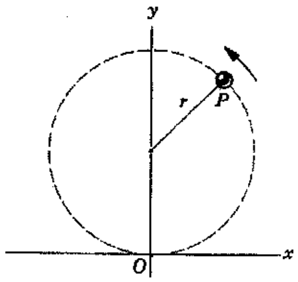
۵۴. شعاع چرخ وفلکی ۱۵m است. این چرخ و فلک، هر دقیقه پنج بار به دور محور افقی‌اش می‌گردد. (الف) (اندازه و جهت) شتاب مسافران را در بالاترین نقطهٔ چرخ و فلک پیدا کنید. (ب) شتاب مسافران را در پایین‌ترین نقطهٔ چرخ و فلک پیدا کنید.

۵۵. پنکه‌ای در هر دقیقه ۱۲۰۰ دور می‌زند. نقطه‌ای در بالای پره را در نظر بگیرید که ۰٫۱۵m از محور فاصله دارد. (الف) در هر دور، این نقطه چه مسافتی را می‌پیماید؟ (ب) سرعت این نقطه چقدر است؟ (ج) شتاب این نقطه چقدر است؟

۵۶. قطار سریع‌السیر TGV آتلانتیک، در مسیر بین پاریس و لمان در فرانسه کار می‌کند. بیشترین سرعت این قطار ۳۱۰km/h است. (الف) اگر قرار باشد این قطار با همین سرعت از پیچی بگذرد، و اگر شتاب مجاز مسافران $۰٫۰۵g$ باشد، شعاع پیچ حداقل چقدر باید باشد؟ (ب) اگر شعاع پیچی ۰٫۹۴km باشد، سرعت قطار در آن پیچ حداکثر چقدر می‌تواند باشد؟

۵۷. فرض بر این است که بعضی از ستاره‌های نوترونی (ستاره‌هایی فوق‌العاده چگال) با آهنگِ حدود ۱rev/s به‌دور خود می‌چرخند. اگر شعاع چنین ستاره‌ای ۲۰km باشد (که نوعاً چنین است)، (الف) سرعت نقاط واقع بر استوای این ستاره چقدر است؟ (ب) شتاب مرکزگرای این نقاط چقدر است؟

۵۸. ذرهٔ $P$ با سرعت ثابت روی دایره‌ای به شعاع ۳٫۰m حرکت می‌کند و هر ۲۰s یک دور می‌زند؛ شکل ۳۸. ذره در $t = ۰$ از $O$ می‌گذرد. (الف) اندازه و جهت بردار مکان ذره در زمانهای ۵٫۰s، ۷٫۵s، و ۱۰s (نسبت به $O$)؛ (ب) اندازه و جهت بردار جابه‌جایی در بازهٔ ۵٫۰ ثانیه‌ای از پایان ثانیهٔ پنجم تا پایان ثانیهٔ دهم؛ (ج) بردار سرعت متوسط در این بازه؛ (د) بردار سرعت لحظه‌ای در آغاز و پایان این بازه؛ و (ه) بردار شتاب لحظه‌ای در آغاز و پایان این بازه را پیدا کنید. زاویه‌ها را در جهت پادساعتگرد نسبت به محور $x$ بسنجید.

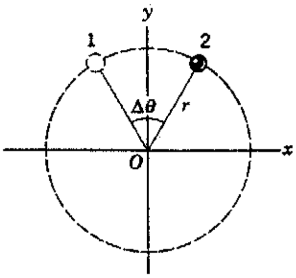


شکل ۳۸. مسئلهٔ ۵۸

۵۹. ذره‌ای روی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات $O$، با سرعت $v$ به‌طور یکنواخت حرکت می‌کند. (الف) نشان بدهید که زمان $\Delta t$ لازم برای جابه‌جایی زاویه‌ای ذره به اندازهٔ $\Delta\theta$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\Delta t = \frac{۲\pi r}{v}\,\frac{\Delta\theta}{۳۶۰^\circ}$$

که در آن $\Delta\theta$ برحسب درجه و $r$ شعاع دایره است. (ب) در شکل ۳۹، مؤلفه‌های $x$ و $y$ سرعت در نقاط ۱ و ۲ را در نظر بگیرید. نشان بدهید که برای دو نقطهٔ متقارن نسبت به محور $y$، و به‌ازای $\Delta\theta = ۹۰^\circ$ خواهیم داشت $\overline{a}_x = ۰$ و $\overline{a}_y = -۰٫۹v^۲/r$. (ج) نشان بدهید که اگر $\Delta\theta = ۳۰^\circ$ باشد، $\overline{a}_x = ۰$ و $\overline{a}_y = -۰٫۹۹v^۲/r$ است. (د) نشان بدهید که در حد $\Delta\theta \to ۰$، $\overline{a}_y \to -v^۲/r$، و اینکه تقارن دورانی ایجاب می‌کند که این نتیجه برای همهٔ نقاط روی دایره درست باشد.



شکل ۳۹. مسئلهٔ ۵۹

۶۰. کودکی سنگی را که به نخی بسته است روی دایره‌ای افقی به شعاع ۱٫۴m و در ارتفاع ۱٫۹m از سطح زمین می‌گرداند. نخ پاره می‌شود و سنگ به‌طور افقی پرتاب می‌شود و ۱۱m دورتر به زمین می‌خورد. شتاب مرکزگرای سنگ در حرکت دایره‌ای چقدر بوده است؟

۶۱. (الف) با استفاده از داده‌های پیوست ج، نسبت شتابهای مرکزگرای زمین و زحل را، در گردش به دور خورشید، به‌دست بیاورید. فرض کنید که هر دو سیاره با سرعت ثابت در مدار دایره‌ای به دور خورشید می‌گردند. (ب) نسبت فاصلهٔ این دو سیاره از خورشید چقدر است؟ (ج) جوابهای دو قسمت (الف) و (ب) را با هم مقایسه کنید و رابطهٔ ساده‌ای بین شتاب مرکزگرا و فاصله از خورشید پیشنهاد کنید. فرضیهٔ خودتان را با محاسبهٔ همین نسبت برای دو سیارهٔ دیگر بیازمایید.

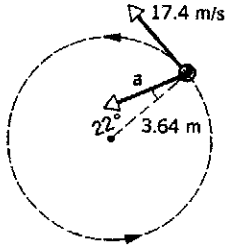
۶۲. (الف) شتاب مرکزگرای اجسام واقع بر استوای زمین (به علت چرخش زمین به دور خودش) چقدر است؟ (ب) دورهٔ تناوب چرخش زمین باید چقدر می‌بود تا شتاب مرکزگرای اجسام روی استوا $۹٫۸ \mathrm{m/s^2}$ باشد؟

۶۳. شتاب ناشی از چرخش زمینِ شخصی که در عرض جغرافیایی $۴۰°$ است، چقدر است؟

۶۴. فرض کنید شخصی با $۱٫۶\mathrm{m}$ قد به مدت $۲۴\mathrm{h}$ در عرض جغرافیایی $۵۰°$، صاف ایستاده باشد. (الف) در این مدت، مسافتی که "نوک" سر او می‌پیماید چقدر بیشتر از مسافتی است که نوک پایش می‌پیماید؟ (ب) شتاب نوک سر او چقدر بزرگتر از شتاب نوک پاهایش است؟ فقط آثار ناشی از چرخش زمین را در نظر بگیرید.

## بخش ۴ـ۵ بردارهای سرعت و شتاب در حرکت دایره‌ای

۶۵. ذره‌ای در مسیری دایره‌ای به شعاع $۳٫۶۴\mathrm{m}$ حرکت می‌کند. در یک لحظهٔ معین، سرعت ذره $۱۷٫۴\mathrm{m/s}$، و شتاب آن در جهت $۲۲٫۰°$ نسبت به جهت مرکز دایره است؛ شکل ۴۰. (الف) آهنگ افزایش اندازهٔ سرعت ذره چقدر است؟ (ب) اندازهٔ شتاب ذره چقدر است؟



شکل ۴۰. مسئلهٔ ۶۵

۶۶. ذره‌ای طبق معادلات

$$x = R \sin \omega t + \omega R t$$
$$y = R \cos \omega t + R$$

در صفحه حرکت می‌کند؛ $\omega$ و $R$ ثابت‌اند. مسیر حرکت این ذره را چرخزاد می‌نامند. این منحنی، مسیر نقطه‌ای است بر محیط چرخی که بدون لغزش در راستای محور $x$ می‌غلتد. (الف) مسیر را رسم کنید. (ب) سرعت و شتاب لحظه‌ای ذره را، در حالتی که در بیشترین و کمترین مقدار $y$ است، به‌دست بیاورید.

## بخش ۴ـ۶ حرکت نسبی

۶۷. شخصی پلهٔ برقی ساکنی به طول $۱۵\mathrm{m}$ را در $۹۰\mathrm{s}$ می‌پیماید. اگر شخصی روی همین پلهٔ برقی بایستد و پلهٔ برقی حرکت کند، همان مسیر در $۶۰\mathrm{s}$ طی می‌شود. اگر شخصی از پله برقی بالا برود و پله هم در حرکت باشد، پیمودن این مسیر چقدر طول می‌کشد؟ آیا جواب به طول پله برقی بستگی دارد؟

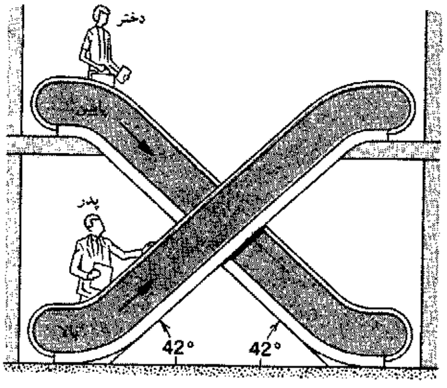
۶۸. پایانهٔ فرودگاه ژنو در سویس، یک "پیاده‌روی متحرک" دارد که حرکت مسافر را در یک راهرو طویل سریع می‌کند. پیتر از این پیاده‌رو استفاده نمی‌کند و راهرو را در $۱۵۰\mathrm{s}$ می‌پیماید. پل فقط روی پیاده‌رو می‌ایستد و راهرو را در $۷۰\mathrm{s}$ می‌پیماید. مری ضمن استفاده از پیاده‌رو، روی آن راه هم می‌رود. با فرض اینکه سرعت راه رفتن مری و پیتر یکسان باشد، چقدر طول می‌کشد تا مری راهرو را بپیماید؟

۶۹. زمان برنامه‌ریزی شدهٔ یک پرواز بین قاره‌ای به مسافت $۲۷۰۰\mathrm{mi}$، در جهت غرب $۵۰\mathrm{min}$ بیشتر است تا در جهت شرق. سرعت هواپیما نسبت به هوا $۶۰۰\mathrm{mi/h}$ است. در تعیین این برنامه، چه فرضی دربارهٔ سرعت وزش باد شده است؟ باد را شرقی غربی در نظر بگیرید.

۷۰. برف در راستای قائم با سرعت ثابت $۷٫۸\mathrm{m/s}$ می‌بارد. راننده‌ای اتومبیل‌اش را روی جاده‌ای مسطح با سرعت $۵۵\mathrm{km/h}$ می‌راند. از دید راننده، دانه‌های برف (الف) با چه زاویه‌ای نسبت به راستای قائم، و (ب) با چه سرعتی سقوط می‌کنند؟

۷۱. قطاری با سرعت $۲۸\mathrm{m/s}$ (نسبت به زمین) به طرف جنوب در حرکت است. در مسیر باران می‌بارد و باد باران را به طرف جنوب کج می‌کند. مسیر قطره‌های باران، از دید ناظرِ ساکن بر زمین، با راستای قائم زاویهٔ $۶۴°$ می‌سازد. اما ناظر سوار بر قطار، بارش باران را دقیقاً عمود به سطح زمین می‌بیند. سرعت قطره‌های باران نسبت به زمین چقدر است؟

۷۲. در یک فروشگاه بزرگ، شخصی روی پله برقی‌ای با زاویهٔ شیب $۴۲°$ که با سرعت $۰٫۷۵\mathrm{m/s}$ به بالا می‌رود ایستاده است. این شخص از کنار دخترش می‌گذرد که روی پله برقی مشابهی ایستاده است و دارد از طبقهٔ بالا به پایین می‌آید؛ شکل ۴۱. بردار سرعت شخص را نسبت به دخترش پیدا کنید.



شکل ۴۱. مسئلهٔ ۷۲

۷۳. خلبانی باید در جهت شرق از $A$ به $B$ برود. بعد در جهت غرب به $A$ برگردد. سرعت هواپیما نسبت به هوا $\mathbf{v}$، و سرعت هوا نسبت به زمین $\mathbf{u}$ است. فاصلهٔ $A$ تا $B$ برابر با $l$ است، و سرعت هواپیما نسبت به هوا ثابت می‌ماند. (الف) نشان بدهید که اگر $u = 0$ باشد (هوای ساکن)، زمان رفت و برگشت $t_0 = 2l/v$ است. (ب) فرض کنید که سرعت باد در جهت شرق (یا غرب) است. نشان بدهید که زمان رفت و برگشت برابر است با

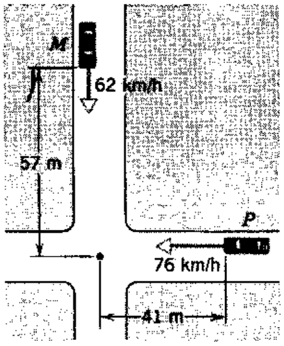
$$t_{\mathrm{E}} = \frac{t_0}{1 - u^2/v^2}$$

(ج) فرض کنید که سرعت باد در جهت شمال (یا جنوب) است. نشان بدهید که زمان رفت و برگشت برابر است با

$$t_{\mathrm{N}} = \frac{t_0}{\sqrt{1 - u^2/v^2}}$$

(د) در قسمتهای (ب) و (ج) باید فرض کرد که $u < v$ است. چرا؟

۷۴. دو بزرگراه یکدیگر را قطع می‌کنند؛ شکل ۴۲. در لحظه‌ای که در شکل نشان داده شده است، اتومبیل پلیس $(P)$ در فاصلهٔ ۴۱m از تقاطع است و با سرعت ۷۶km/h حرکت می‌کند. اتومبیل سواری $(M)$ ۵۷m از تقاطع فاصله دارد و با سرعت ۶۲km/h در حرکت است. سرعت (اندازه و زاویهٔ بردار سرعت نسبت به خط دید) اتومبیل $M$ را نسبت به اتومبیل پلیس پیدا کنید.



شکل ۴۲. مسئلهٔ ۷۴

۷۵. هلی‌کوپتری بر فراز یک دشت مسطح، روی خط راست پرواز می‌کند. سرعت هلی‌کوپتر ثابت، و برابر با ۶٫۲m/s است. ارتفاع پرواز هم ثابت، و برابر با ۹٫۵m است، بسته‌ای با سرعت افقی ۱۲m/s نسبت به هلی‌کوپتر، و در خلاف جهت حرکت هلی‌کوپتر، از آن رها می‌شود. (الف) سرعت اولیهٔ بسته نسبت به زمین چقدر است؟ (ب) فاصلهٔ افقی بین هلی‌کوپتر و بسته، در لحظهٔ برخورد بسته به زمین چقدر است؟ (ج) زاویهٔ بردار سرعت بسته با زمین، درست پیش از برخورد، از دید ناظر زمین چقدر است؟ (د) این زاویه از دید خلبان هلی‌کوپتر چقدر است؟

۷۶. آسانسوری با شتاب $4.0\,\mathrm{ft/s^2}$ بالا می‌رود. در لحظه‌ای که سرعت آن ۸٫۰ft/s به طرف بالاست، پیچ لقی از سقف آسانسور رها می‌شود. بلندی اتاقک آسانسور ۹٫۰ft است. (الف) زمان حرکت پیچ از سقف تا کف آسانسور، و (ب) مسافت سقوط پیچ از دید ناظر زمین چقدر است؟

۷۷. هواپیمای سبکی با سرعت ۴۸۰km/h نسبت به هوا پرواز می‌کند. مقصد خلبان نقطه‌ای در فاصلهٔ ۸۱۰km به طرف شمال است. خلبان متوجه می‌شود که هواپیما را باید به اندازهٔ °۲۱ از شمال به طرف شرق هدایت کند تا به مقصد برسد. هواپیما در مدت ۱٫۹h به مقصد می‌رسد. اندازه و جهت سرعت باد را پیدا کنید.

۷۸. پلیس ایالت نیوهمپشایر، برای پاییدن سرعت اتومبیلها در بزرگراهها، از هواپیما استفاده می‌کند. فرض کنید سرعت یکی از این هواپیماها، در هوای ساکن، ۱۳۵mi/h باشد. هواپیما مستقیماً به طرف شمال پرواز می‌کند تا همواره بر فراز یک بزرگراه شمالی-جنوبی باشد. یک ناظر زمینی با رادیو به خلبان خبر می‌دهد که بادی با سرعت ۷۰mi/h جریان دارد، اما فراموش می‌کند جهت باد را بگوید. خلبان مشاهده می‌کند که با وجود باد، باز هم هواپیمایش می‌تواند ۱۳۵mi بر فراز بزرگراه را طی ۱h بپیماید. یعنی اندازهٔ سرعت هواپیما نسبت به زمین، همان است که در هوای آرام بود. (الف) باد در چه جهتی می‌وزد؟ (ب) سر هواپیما در چه جهتی است، یعنی زاویهٔ بین محور هواپیما و بزرگراه چقدر است؟

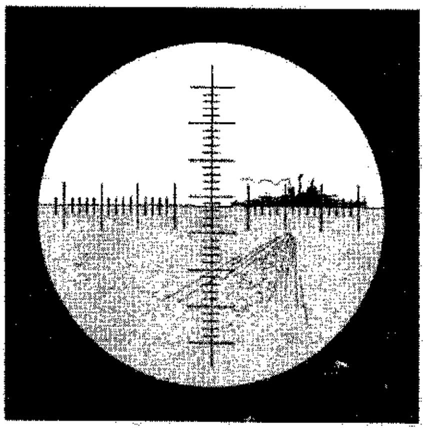
۷۹. شخصی می‌تواند قایقی را با سرعت ۴٫۰mi/h در آب ساکن براند. (الف) اگر او بخواهد از عرض رودخانه‌ای بگذرد که سرعت جریان آن ۲٫۰mi/h است، قایقش را باید در چه جهتی هدایت کند تا درست به نقطهٔ مقابل برسد؟ (ب) اگر عرض رودخانه ۴٫۰mi باشد، چقدر طول می‌کشد تا از رودخانه بگذرد؟ (ج) چه مدتی طول می‌کشد تا به نقطه‌ای ۲٫۰mi پایین‌تر برود و برگردد؟ (د) چه مدتی طول می‌کشد تا به نقطه‌ای ۲٫۰mi بالاتر برود و برگردد؟ (ه) قایق را در چه جهتی براند تا در کوتاهترین زمان ممکن از رودخانه بگذرد؟ این زمان چقدر است؟

۸۰. واگنی چوبی روی ریل مستقیمی با سرعت $v_1$ حرکت می‌کند. راهزنی با تفنگ پرقدرتی به آن شلیک می‌کند سرعت اولیهٔ گلوله $v_2$ است. گلوله از هر دو دیوارهٔ جانبی واگن می‌گذرد و دو سوراخ ایجاد می‌کند. این سوراخها، از دید ناظر واگن، درست روبه روی هم‌اند. گلوله در چه جهتی، نسبت به واگن شلیک شده است؟ فرض کنید که گلوله هنگام ورود به واگن منحرف نشده، اما سرعتش به اندازهٔ ۲۰٪ کم شده است. فرض کنید $v_1 = 85\,\mathrm{km/h}$ و $v_2 = 650\,\mathrm{m/s}$ است. (تعجب می‌کنید که برای حل مسئله لازم نیست که عرض واگن معلوم باشد؟)

۸۱. مردی می‌خواهد با قایق از رودی به عرض ۵۰۰m بگذرد. سرعت حاصل از پاروزنی او (نسبت به آب) ۳٫۰km/h، سرعت جریان آب ۲٫۰km/h، و سرعت پیاده‌روی مرد در ساحل ۵٫۰km/h است. (الف) مسیری را پیدا کنید که این شخص بتواند از طریق آن در

کوتاهترین زمانِ ممکن درست به نقطهٔ مقابل در آن طرف رودخانه برسد. (حرکت می‌تواند ترکیبی از قایق‌رانی و پیاده‌روی باشد.) (ب) این زمان چقدر است؟

۸۲. رزم‌ناوی با سرعت $24\,\mathrm{km/h}$ به طرف شرق می‌رود. از یک زیردریایی درفاصلهٔ $4.0\,\mathrm{km}$ اژدری با سرعت $50\,\mathrm{km/h}$ به طرف آن شلیک می‌شود؛ شکل ۴۳. ناو از زیردریایی، در جهت $20^\circ$ شرقِ شمال مشاهده می‌شود. (الف) اژدر در چه جهتی شلیک شود تا به ناو اصابت کند؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا اژدر به ناو برسد؟



شکل ۴۳. مسئلهٔ ۸۲

۸۳. الکترونی با سرعت $0.42c$ نسبت به ناظر $B$ حرکت می‌کند. ناظر $B$ با سرعت $0.63c$، در همان جهت حرکت الکترون، نسبت به ناظر $A$ در حرکت است. سرعت الکترون از دید ناظر $A$ چقدر است؟

۸۴. رصد نشان می‌دهد که کهکشان آلفا با سرعت $0.350c$ از ما دور می‌شود. کهکشان بتا هم، که درست در نقطهٔ مقابل کهکشان آلفاست، با همین سرعت از ما دور می‌شود. از دید ناظر آلفا (الف) کهکشان ما و (ب) کهکشان بتا با چه سرعتی از کهکشان خودش دور می‌شوند؟

## پروژه‌های کامپیوتری

۸۵. کامپیوتر می‌تواند جدولی از مختصات، مؤلفه‌های سرعت، و مؤلفه‌های شتاب یک جسم در زمانهای معین را تهیه کند. به کمک این جدول می‌توانیم کمیتهای مورد نظر، مثلاً اوج مسیر، زمان برگشت به زمین، و غیره را جستجو کنیم. برنامه‌ای بنویسید، یا الگوریتمی طرح کنید، که مختصات و مؤلفه‌های سرعت یک پرتابه را در پایان بازه‌های زمانی $\Delta t$ از زمان $t_1$ تا زمان $t_2$ محاسبه کند. فرض کنید پرتابه در $t = 0$ از مبدأ شروع به حرکت می‌کند. کامپیوتر باید $x = v_0 t \cos\theta_0$، $y = v_0 t \sin\theta_0 - \frac{1}{2}gt^2$، $v_x = v_0 \cos\theta_0$، و $v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt$ را به ازای $t = t_1$، $t = t_1 + \Delta t$، $t = t_1 + 2\Delta t$، ...، $t = t_1 + N\Delta t$ حساب کند. ابتدا مقادیر $v_0$، $\theta_0$، $t_1$، $\Delta t$، و $N$ را به کامپیوتر بدهید. برنامه را چنان تنظیم کنید که در هر اجرا به راحتی بشود $t_1$، $\Delta t$، و $N$ را تغییر داد بی‌آنکه نیاز به تغییر بقیهٔ مقادیر باشد. برنامه را با مسئلهٔ زیر آزمایش کنید. نتایج کامپیوتری را با نتایج حاصل از عبارتهای جبری مناسب مقایسه کنید.

پرتابه‌ای با سرعت $v_0 = 50\,\mathrm{m/s}$ و با زاویهٔ $25^\circ$ بالاتر از افق، از زمین شلیک می‌شود. (الف) $x(t)$، $y(t)$، $v_x(t)$، و $v_y(t)$ را در هر $0.1\,\mathrm{s}$، از $t = 0$ تا $t = 4.5\,\mathrm{s}$، به‌دست بیاورید. (ب) دو زمان متوالی را که لحظهٔ رسیدن پرتابه به نقطهٔ اوج بین آن دو است پیدا کنید. حالا برنامه را دوباره اجرا کنید. این بار $t_1$ را زمان کوچکتر دو زمان بالا، و $\Delta t$ را $0.005\,\mathrm{s}$ بگیرید. با استفاده از جدول، مختصات نقطهٔ اوج را تا ۲ رقم با معنی به‌دست بیاورید. (ج) با استفاده از همین روش، زمان، مختصات، و مؤلفه‌های سرعت پرتابه را در موقعی که به ارتفاع نقطهٔ شلیک برگشته است پیدا کنید.

۸۶. ذره‌ای با شتاب $a_x = -1.7$ و $a_y = -0.45$ در صفحهٔ $xy$ حرکت می‌کند. (در این مسئله، همهٔ طولها برحسب سانتی‌متر و همهٔ زمانها برحسب ثانیه‌اند.) در $t = 0$، ذره با سرعت $v_x = 10$ و $v_y = 2$ از نقطهٔ $x = 1$، $y = 10$ می‌گذرد. برنامه‌ای بنویسید که متغیرهای زیر را، که حرکت ذره را توصیف می‌کنند، تنها برای مواقعی که ذره در ربع اول (طرف راستِ بالا) دستگاه مختصات است جدول‌بندی کند. $t$، $x$، $y$، $r$، $\phi$(یعنی $\tan^{-1}y/x$)، $v_x$، $v_y$، $v$، $\theta$(یعنی $\tan^{-1}v_y/v_x$). با استفاده از جدولی که حاصل می‌شود، به این پرسشها پاسخ بدهید. (الف) ذره در چه زمانی و درکدام نقطه از ربع اول خارج می‌شود؟ (ب) بیشترین فاصلهٔ ذره از مبدأ چقدر است، و در این نقطه چه سرعتی دارد؟ (ج) ذره، در لحظه‌ای که سرعت آن $2.00$ است، در چه جهتی حرکت می‌کند؟ (د) ذره در چه نقطه‌ای خط $45^\circ$ (نیمساز ربع اول) را قطع می‌کند؟

۸۷. مختصات جسمی که روی دایره به شعاع $R$ به‌طور یکنواخت حرکت می‌کند، $x = R\cos\omega t$ و $y = R\sin\omega t$ است؛ $\omega$ ثابت و زاویهٔ $\omega t$ برحسب رادیان است. برنامه‌ای بنویسید یا الگوریتمی طرح کنید، که بردار سرعت متوسط را در بازهٔ زمانی $t_0$ تا $t_0 + \Delta t$ محاسبه کند. به ازای $R = 1.5\,\mathrm{m}$ و $\omega = 5.0\,\mathrm{rad/s}$، حساب کنید که $\bar{v}_x = [x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)]/\Delta t$ و $\bar{v}_y = [y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)]/\Delta t$ چقدر است. برنامه را چنان تنظیم کنید که بشود در هر اجرا مقادیر $t_0$ و $\Delta t$ را به‌راحتی تغییر داد. اگر همهٔ متغیرها را با دقت مضاعف بگیرید، افت دقت در محاسبات کم می‌شود. (الف) به‌ازای $t_0 = 1\,\mathrm{s}$، $x$، $y$، $\bar{v}_x$، $\bar{v}_y$، و $x\bar{v}_x + y\bar{v}_y$ را حساب کنید. عبارت اخیر برابر است با حاصلضرب اسکالر بردارهای مکان و سرعت متوسط که صفر است اگر این دو بردار بر هم عمود باشند. حالا این محاسبه را به‌ازای $\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$، $\Delta t = 0.01\,\mathrm{s}$، $\Delta t = 0.001\,\mathrm{s}$، و $\Delta t = 0.0001\,\mathrm{s}$ تکرار کنید. دقت کنید که مؤلفه‌های $\bar{v}$ ، مرتباً به مقادیر حدی خودشان، که مؤلفه‌های سرعت لحظه‌ای $\mathbf{v}$ اند، نزدیکتر می‌شوند، و خود $\bar{\mathbf{v}}$ هم مرتباً به جهت بردار مکان (یعنی مماس بر دایره) نزدیکتر می‌شود.

چنانکه مستقیماً با مشتق‌گیری می‌شود نشان داد، مؤلفه‌های **v** عبارت‌اند از $v_x = -\omega R\sin\,\omega t$ و $v_y = \omega R\cos\,\omega t$. این مقادیر را به‌دست بیاورید و به کمک آن ببینید که برنامهٔ شما با چه دقتی **v** را تخمین زده است. (ب) حالا برنامه را تغییر بدهید و مؤلفه‌های شتاب متوسط، $\overline{a}_x = [v_x(t_\circ + \Delta t) - v_x(t_\circ)]/\Delta t$ و $\overline{a}_y = [v_y(t_\circ + \Delta t) - v_y(t_\circ)]/\Delta t$ را حساب کنید. برای این کار عبارت $v_x(t) = -\omega R\sin\,\omega t$ و $v_y(t) = \omega R\cos\,\omega t$ را به‌کار ببرید. $x\overline{a}_y - y\overline{a}_x$ را هم حساب کنید. قدرمطلق این مقدار، اندازهٔ حاصل‌ضرب برداری بردارهای مکان و شتاب است، که اگر این دو بردار با هم موازی باشند، صفر است. محاسبه را به‌ازای $t_\circ = 1\,\mathrm{s}$ و $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$، $\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$، $\Delta t = 0.01\,\mathrm{s}$، و $\Delta t = 0.001\,\mathrm{s}$ انجام بدهید. توجه کنید که $\overline{\mathbf{a}}$ مدام به مقدار حدی‌اش، که شتاب لحظه‌ای **a** است، نزدیکتر می‌شود، و خود **a** هم به جهت بردار مکان نزدیکتر می‌شود. مؤلفه‌های **a** عبارت‌اند از $a_x = -\omega^2 R\cos\,\omega t$ و $a_y = -\omega^2 R\sin\,\omega t$. این مقادیر را به‌دست بیاورید و با نتایج حاصل از برنامهٔ خودتان مقایسه کنید. همچنین تحقیق کنید که نتایج حاصل از برنامهٔ شما هم مقدار $a = v^2/R$ را برای اندازهٔ شتاب به‌دست می‌دهد.

# ۵

# نیرو و قوانین نیوتون

در فصلهای ۲ و ۴، حرکت ذرات را بررسی کردیم. نپرسیدیم که چه چیزی "باعث" حرکت می‌شود؛ صرفاً به توصیف حرکت برحسب بردارهای $\mathbf{r}$، $\mathbf{v}$، و $\mathbf{a}$ پرداختیم. در این فصل و فصل بعدی، علت حرکت را بررسی می‌کنیم. این بخش از مکانیک را **دینامیک** می‌نامند.

رهیافتی به دینامیک که ما دراین فصل و فصل بعدی اختیار کرده‌ایم عموماً **مکانیک کلاسیک** نامیده می‌شود. این رهیافت در قرنهای هفدهم و هیجدهم فرمولبندی و با موفقیت آزموده شد. در قرن ما نظریه‌های جدیدی (نسبیت خاص و عام و مکانیک کوانتومی) ظهور کرده‌اند که واقعیتهایی فراتر از تجربیات روزمره را آشکار می‌کنند؛ این واقعیتها در حوزه‌هایی بروز می‌کنند که در آنها مکانیک کلاسیک نمی‌تواند پیش‌بینیهای سازگار با تجربه ارائه کند. اما همین نظریه‌ها هم در حد اجسام معمولی به مکانیک کلاسیک تحویل می‌شوند.

بدون نیاز به نسبیت خاص و عام یا مکانیک کوانتومی هم می‌شود آسمانخراش‌های عظیم ساخت و خواص مواد سازندهٔ آنها را بررسی کرد؛ می‌شود هواپیماهایی ساخت که صدها نفر را جابه‌جا کنند و نیمی از کره زمین را یکسره بپیمایند؛ و می‌شود فضاپیماهایی ساخت که مأموریتهای مشکلی به سوی دنباله‌دارها، سیاره‌ها، و جز آنها انجام بدهند. اینها همه در قلمرو مکانیک کلاسیک‌اند.

## ۱ـ۵ مکانیک کلاسیک

مطالعه را به حرکت یک جسم معین معطوف می‌کنیم. این جسم با اجسام اطراف خودش (یعنی با محیط خودش) برهم‌کنش می‌کند، و به این ترتیب سرعتش تغییر می‌کند: شتاب تولید می‌شود. در جدول ۱، چند حرکت شتابدار معمولی و همچنین در هر مورد مؤثرترین عامل در تولید شتاب آمده است. مسئلهٔ اساسی مکانیک کلاسیک این است: ۱. جسمی داریم که مشخصات آن (از قبیل جرم، حجم، و بار الکتریکی) را می‌دانیم. ۲. این جسم را، در مکان اولیهٔ مشخص و با سرعت اولیهٔ مشخص، در محیطی که کاملاً می‌شناسیم رها می‌کنیم. ۳. حرکت بعدی این جسم چگونه است؟

در فصلهای قبلی، اجسام فیزیکی را ذره در نظر گرفتیم، یعنی اجسامی که ساختار یا حرکات درونی‌شان قابل اغماض است و همهٔ اجزائشان دقیقاً یک جور حرکت می‌کنند. در بررسی برهم‌کنشی اجسام با محیط، اغلب باید اجسام گسترده‌ای را در نظر گرفت که بخشهای متفاوتشان به طرق مختلفی با محیط برهم‌کنش دارند. مثلاً، کارگری را در نظر بگیرید که یک صندوق سنگین را روی یک سطح ناهموار

**جدول ۱.** چند حرکت شتابدار و علت آنها.

| جسم | تغییر حرکت | علت اصلی (محیط) |
|---|---|---|
| سیب | افتادن از درخت | گرانش (زمین) |
| گوی بیلیارد | واجهیدن از یک گوی دیگر | گوی دیگر، میز، گرانش (زمین) |
| اسکی‌باز | لغزیدن از تپه به پایین | گرانش (زمین)، اصطکاک (برف)، مقاومت هوا |
| پرتو الکترون (در تلویزیون) | کانونی شدن و انحراف | میدان الکترومغناطیسی (آهنربا و اختلاف ولتاژ) |
| دنباله‌دار هالی | گردش در منظومهٔ شمسی | گرانش (خورشید) |

هل می‌دهد. کارگر به یکی از وجوه قائم صندوق نیرو وارد می‌کند؛ در همین حال، به کف افقی صندوق نیروی بازدارندهٔ اصطکاک وارد می‌شود. همچنین ممکن است وجه جلویی صندوق تحت اثر مقاومت هوا قرار بگیرد.

در قسمتهای بعدی همین کتاب، مکانیک اجسام گسترده را هم به تفصیل بررسی خواهیم کرد. فعلاً همچنان فرض می‌کنیم که همهٔ قسمتهای جسم یک نوع حرکت دارند و در نتیجه می‌توانیم جسم را ذره در نظر بگیریم. در این شرایط، مهم نیست که محیط به کجای جسم اثر می‌کند؛ هدف اصلی ما فعلاً بررسی اثر خالص محیط است.

ایزاک نیوتون (۱۶۴۲ تا ۱۷۲۷) با ارائهٔ قوانین حرکت و قانون گرانش جهانی خود، این مسئلهٔ مکانیک کلاسیک را، لااقل برای بسیاری از محیطها، حل کرد. برنامهٔ حل این‌مسئله، در چارچوب مکانیک کلاسیک، چنین است: ۱. از مفهوم نیرو ($\mathbf{F}$) را ــ که فعلاً به‌صورت هل دادن یا کشیدن در نظر می‌گیریم ــ معرفی می‌کنیم و آن‌را برحسب شتابی ($\mathbf{a}$) که به یک‌جسم استانداردِ معین می‌دهد تعریف می‌کنیم. ۲. روشی برای نسبت دادنِ جرم ($m$) به اجسام اختیار می‌کنیم؛ به‌این ترتیب می‌توانیم بفهمیم که اجسام با جرمهای متفاوت در محیطهای یکسان شتابهای مختلفی می‌گیرند. ۳. سرانجام، سعی می‌کنیم راهی برای محاسبهٔ نیروهای وارد براجسام، برحسب خواص اجسام و محیط آنها، پیدا کنیم؛ یعنی دنبال قوانین نیرو می‌گردیم. نیرو، که اساساً واسطهٔ محیط با حرکت جسم است، هم در قوانین حرکت (که می‌گوید یک جسم معین تحت تأثیر نیرویی معین چه شتابی دارد) ظاهر می‌شود و هم در قوانین نیرو (که می‌گوید چگونه می‌توان نیروی وارد بر جسمی معین در محیطی معین را حساب کرد). قوانین حرکت و قوانین نیرو، با هم، قوانین مکانیک را تشکیل می‌دهند (شکل ۱).

بخشهای مختلف این برنامهٔ مکانیک را نمی‌شود جداگانه آزمود. باید آن‌را به‌صورت واحد در نظر گرفت، و این برنامه وقتی موفق است که بتوانیم به این دو پرسش پاسخ مثبت بدهیم: ۱. آیا نتایج حاصل از برنامه با تجربه سازگار است؟ ۲. آیا شکل قوانین نیرو شکل ساده‌ای دارند؟ تاج افتخار مکانیک نیوتونی این است که واقعاً می‌شود به هر دو پرسش پاسخ مثبت داد.


شکل۱. برنامهٔ ما در مکانیک. سه جعبهٔ سمت چپ نشان می‌دهند که نیرو برهم‌کنش جسم و محیط آن است. سه جعبهٔ سمت راست نشان می‌دهند که نیروی وارد بر جسم، به آن شتاب می‌دهد.

## ۵ـ۲ قانون اول نیوتون

مسئلهٔ حرکت و علل آن، قرنها یکی از موضوعات مهم فلسفهٔ طبیعی (آنچه امروز فیزیک می‌نامیم) بود. اما تازه در زمان گالیله و نیوتون بود که پیشرفت چشمگیری به‌دست آمد. ایزاک نیوتون، که در همان سال مرگ گالیله در انگلستان به دنیا آمد، معمار اصلی مکانیک کلاسیک است. او بود که تفکرات گالیله و پیشینیانش را کاملاً به ثمر رساند. سه قانون حرکت نیوتون، ابتدا (در سال ۱۶۸۶) در کتابش، اصول ریاضی فلسفهٔ طبیعی، منتشر شد. این کتاب را اغلب به‌نام اصلی‌اش "پرینکیپیا" می‌نامند.

پیش از گالیله، بیشتر فلاسفه می‌پنداشتند که نوعی اثر یا "نیرو" لازم است تا جسمی در حال حرکت بماند. آنها فکر می‌کردند اجسام زمانی در "حالت طبیعی" خودشان هستند که ساکن باشند. مثلاً گمان می‌کردند برای اینکه جسمی با سرعت ثابت روی خط راست حرکت کند، یک عامل خارجی لازم است تا پیوسته آن‌را براند؛ در غیر این‌صورت به گمان آنها، جسم "طبیعتاً" می‌ایستاد.

کسی که بخواهد این افکار را تجربه کند، اول باید راهی بیابد که همهٔ آثار محیطی یا همهٔ نیروها را، برای جسم مورد بررسی حذف کند. این کار خیلی سخت است، اما در موارد خاصی می‌شود نیروها را فوق‌العاده کوچک کرد. اگر حرکت اجسام را، هنگامی که نیروها را کوچک و کوچکتر می‌کنیم، بررسی کنیم، می‌توانیم تصوری از حالتی که نیروهای خارجی واقعاً صفر شده‌اند به‌دست بیاوریم.

فرض کنید جسم آزمونی، مثلاً یک قالب، را روی سطح افقی زبری بگذاریم. اگر قالب را روی صفحه بلغزانیم، خواهیم دید که حرکتش به تدریج کند می‌شود و می‌ایستد. در واقع همین قبیل مشاهدات بود که توقف حرکت در غیاب عامل خارجی را تأیید می‌کرد. در این مورد، عامل خارجی فشار دست است، که با برداشتن آن جسم متوقف می‌شود. اما می‌توانیم برای مردود شمردن این فکر، چنین استدلال کنیم: فرض کنید آزمایش را تکرار می‌کنیم، اما این بار با قالبی صافتر و سطحی صافتر، خواهیم دید که سرعت جسم آهسته‌تر از حالت پیش کم می‌شود. قالب و سطح را باز هم صیقلی‌تر می‌کنیم و این بار روان‌کننده هم به‌کار می‌بریم. خواهیم دید که آهنگ کاهش سرعت قطعه مرتباً کمتر می‌شود و قطعه هر بار مسافت بیشتری را تا زمان توقف می‌پیماید. شاید خودتان با ریل هوا هم آزمایش کرده باشید: می‌شود اجسام را برریل هوا روی لایهٔ نازکی از هوا شناورکرد. با چنین ابزاری به حد بدون اصطکاک نزدیک می‌شویم: حتی ضربهٔ کوچکی به جسم کافی است تا آن‌را، با سرعت کم و تقریباً ثابت، روی ریل براند. حالا می‌توانیم برونیابی کنیم و بگوییم که اگرمی‌شد اصطکاک را کاملاً حذف کرد، اجسام به‌طور نامحدود با سرعت ثابت روی خط راست حرکت می‌کردند. برای به حرکت درآوردن اجسام نیرو لازم است، اما برای اینکه جسمی به حرکت با سرعت ثابت ادامه بدهد نیروی خارجی لازم نیست.

دستیابی به شرایطی که هیچ نیروی خارجی‌ای برجسم اثر نکند

دشوار است. نیروی گرانش بر همهٔ اجسامی که روی زمین، یا نزدیک آن، واقع شده‌اند اثر می‌کند؛ نیروهای بازدارنده‌ای مثل اصطکاک یا مقاومت هوا هم با حرکت اجسام بر سطح زمین یا در هوا مقابله می‌کنند. خوشبختانه لازم نیست به خلأ فضاهای دور برویم تا بتوانیم حرکت اجسام را به دور از نیروهای خارجی بررسی کنیم چون، تا آنجا که تنها حرکت انتقالی کلی جسم مطرح است، بین جسمی که هیچ نیروی خارجی به آن وارد نمی‌شود، و جسمی که مجموع یا برایند نیروهای خارجی وارد بر آن صفر است، تفاوتی وجود ندارد. معمولاً برایند همهٔ نیروهای وارد بر جسم را نیروی "خالص" می‌نامیم. مثلاً، نیروی وارد از دست به قالب لغزنده، می‌تواند با نیروی اصطکاک وارد بر قالب مقابله کند و نیروی رو به بالای سطح افقی می‌تواند با نیروی گرانش مقابله کند. به این ترتیب، نیروی خالص وارد بر قالب می‌تواند صفر شود، و قطعه می‌تواند با سرعت ثابت حرکت کند.

نیوتون این اصل را به عنوان نخستین قانون از قوانین سه‌گانه‌اش برگزید:

> جسمی را در نظر بگیرید که هیچ نیروی خالصی بر آن وارد نمی‌شود. اگر این جسم ساکن باشد، درحالت سکون باقی خواهد ماند. اگر درحال حرکت باشد، با سرعت ثابت به حرکتش ادامه خواهد داد.

قانون اول نیوتون در واقع گزاره‌ای دربارهٔ چارچوبهای مرجع است. به‌طور کلی، شتاب اجسام بستگی به چارچوب مرجعی دارد که این شتاب نسبت به آن سنجیده می‌شود. اما قوانین مکانیک کلاسیک تنها در چارچوبهای مرجع خاصی درست‌اند، در آنهایی که ناظرهایشان همگی شتاب یکسانی برای جسم متحرک می‌سنجند. به کمک قانون اول نیوتون می‌شود این گروه چارچوبهای مرجع را مشخص کرد. به این منظور، قانون اول را چنین بیان می‌کنیم:

> می‌توان دسته‌ای از چارچوبهای مرجع یافت که اگر نیروی خالص وارد بر جسمی صفر باشد، شتاب جسم در این چارچوبها صفر باشد.

تمایل اجسام برای باقی ماندن در حالت سکون یا در حرکت راستخط یکنواخت را لختی، و قانون اول نیوتون را اغلب قانون لختی می‌نامند. چارچوبهایی هم که این قانون در آنها برقرار است چارچوبهای لخت نامیده می‌شوند. قبلاً در بخش ۴ـ۶ در بارهٔ این چارچوبها صحبت کردیم؛ به خاطر دارید که ناظرهای چارچوبهای مرجع لخت متفاوت (که با سرعت ثابت نسبت به هم حرکت می‌کنند) همه یک شتاب می‌سنجند. بنابراین، فقط یک چارچوب نیست که شتاب در آن صفر است: مجموعه‌ای از چارچوبهای مرجع هست که همگی چنین خاصیتی دارند.

برای اینکه ببینیم یک چارچوب مرجع خاص لخت هست یا نه، جسم آزمونی را به حالت سکون در آن رها می‌کنیم و مطمئن می‌شویم که هیچ نیروی خالصی بر آن وارد نمی‌شود. اگر جسم درحالت سکون نماند، چارچوب لخت نیست. به همین ترتیب می‌شود جسم متحرکی را (که باز هم نیروی خالصی بر آن وارد نشود) در این چارچوب گذاشت؛ اگر (اندازه یا جهت) سرعت تغییر کند، چارچوب لخت نیست. چارچوبی که به این آزمون در همهٔ نقاط مختلف پاسخ مثبت بدهد (جسم ساکن همچنان ساکن بماند و سرعت جسم متحرک ثابت بماند) یک چارچوب لخت است. همین‌که یک چارچوب لخت پیدا کردیم، به سادگی می‌توانیم بسیاری چارچوبهای لخت دیگر هم پیدا کنیم، چون، هر چارچوب مرجعی که نسبت به چارچوب اول با سرعت ثابت حرکت کند هم یک چارچوب لخت است.

در این کتاب، تقریباً همیشه قوانین مکانیک کلاسیک را از دیدگاه ناظرهای چارچوبهای لخت به‌کار می‌بریم. گاهگاهی هم مسائلی را از دید ناظرهای چارچوبهای نالخت ــ مثلاً اتومبیل شتابدار، صفحهٔ دوار، یا ماهواره‌های گردان در مدار ــ بررسی می‌کنیم. اگرچه زمین در حال چرخش است، می‌توانیم چارچوب مرجع وابسته به آن‌را، در اکثر موارد عملی، یک چارچوب تقریباً لخت در نظر بگیریم، اما در کاربردهای بزرگ مقیاس، مثلاً در تحلیل حرکت موشکهای قاره‌پیما یا بررسی باد و جریانهای اقیانوس، نالخت بودن زمین چرخان اهمیت پیدا می‌کند.

توجه کنید که قانون اول فرقی میان اجسام ساکن و اجسام متحرک با سرعت ثابت قائل نمی‌شود. اگر نیروی خالص وارد بر جسم صفر باشد، هر دو حرکت "طبیعی"اند. اگر جسمی را که نسبت به یک چارچوب مرجع ساکن است از دید چارچوب مرجع دیگری، که با سرعت ثابت نسبت به اولی حرکت می‌کند، بررسی کنیم، این موضوع روشنتر می‌شود. ناظر چارچوب اول جسم را ساکن می‌بیند؛ ناظر چارچوب دوم همان جسم را در حال حرکت با سرعت ثابت می‌بیند. هر دو ناظر در می‌یابند که جسم شتاب ندارد، یعنی سرعت آن تغییر نمی‌کند، و هر دو از قانون اول نتیجه می‌گیرند که نیروی خالصی بر جسم اثر نمی‌کند.

اگر برهم‌کنش خالصی بین جسم و اشیای محیط وجود داشته باشد، این اثر ممکن است حالت "طبیعی" حرکت جسم را تغییر بدهد. برای تحقیق این موضوع باید مفهوم نیرو را به‌دقت بررسی کنیم.

## ۵ـ۳ نیرو

برای پروراندن مفهوم نیرو، آن‌را به‌طور عملیاتی تعریف می‌کنیم. در زبان روزمره، نیرو همان هل دادن یا کشیدن است. برای سنجش کمی چنین نیروهایی، آنها را برحسب شتابی که به یک جسم استاندارد می‌دهند تعریف می‌کنیم.

به عنوان جسم‌استاندارد، کیلوگرم استاندارد را به‌کار می‌بریم (یا فرض می‌کنیم که داریم به‌کارمی‌بریم!). به این جسم، طبق تعریف، جرم $m_0$ دقیقاً برابر با $1\mathrm{kg}$ نسبت داده شده است (شکل ۵ در فصل ۱). بعداً توضیح خواهیم داد که چگونه به هر جسم دیگری جرم نسبت می‌دهیم.

برای اینکه محیطی داشته باشیم که نیرو وارد کند، جسم استاندارد را روی یک میز افقی با اصطکاک ناچیز می‌گذاریم و یک فنر به آن می‌بندیم و سر دیگر فنر را در دست می‌گیریم؛ شکل ۲الف. سپس فنر را به راست می‌کشیم، چنانکه با آزمون خطا به حالتی برسیم که شتاب جسم استاندارد دقیقاً برابر با مقدار ثابت $1\text{m/s}^2$ باشد. در این حالت می‌گوییم که فنر (که جسم با اهمیت محیط است) طبق تعریف هرکیلوگرم استاندارد نیروی ثابتی به اندازهٔ "۱ نیوتون" (به‌اختصار ۱N) وارد می‌کند. متوجه می‌شویم که فنر، در حالتی که این نیرو را وارد می‌کند، به اندازهٔ $\Delta L$، نسبت به طول معمولی‌اش، کشیده شده است (شکل ۲ب).

می‌شود آزمایش را تکرار کرد، و این بار فنر سخت‌تری به‌کار برد یا فنر را بیشتر کشید، تا شتابی که برای جسم استاندارد اندازه می‌گیریم برابر با $2\text{m/s}^2$ بشود. در این حالت می‌گوییم که فنر نیروی ۲N به جسم استاندارد وارد می‌کند. به‌طور کلی، اگر مشاهده کنیم که این جسم در یک محیط معین شتاب $a$ دارد، می‌گوییم که محیط بر جسم ۱kg استاندارد نیروی $F$ وارد می‌کند. که در آن $F$ (برحسب نیوتون) از لحاظ عددی برابر با $a$ (برحسب متر بر مجذور ثانیه) است.

حالا ببینیم که آیا نیرو، که به شکل بالا تعریف کردیم، یک کمیت برداری است یا نه. در شکل ۲ب به نیروی $F$ اندازه نسبت دادیم. به راحتی می‌توانیم به آن جهت هم نسبت بدهیم، که این جهت همان جهت شتابی است که همین نیرو ایجاد کرده است. اما برای اینکه کمیتی بردار باشد کافی نیست که اندازه و جهت داشته باشد؛ این کمیت باید از قوانین جمع برداری فصل ۳ هم تبعیت کند. تنها با آزمایش می‌شود فهمید که نیرو، که به روش بالا تعریف شد، واقعاً طبق این قوانین رفتار می‌کند یا خیر.

یک نیروی ۴N در راستای محور $x$ و یک نیروی ۳N در راستای محور $y$ اعمال می‌کنیم. این نیروها را یکبار جداگانه و بعد با هم به جسم استاندارد، که همچنان روی سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد، وارد می‌کنیم. شتاب جسم چه خواهد بود؟ از آزمایش نتیجه می‌شود که نیروی ۴N در جهت محور $x$، شتاب $4\text{m/s}^2$ در جهت محور $x$ تولید می‌کند، و نیروی ۳N در جهت محور $y$ هم شتاب $3\text{m/s}^2$ در جهت محور $y$ به جسم می‌دهد؛ شکل ۳الف. اگر دو نیرو را با هم اعمال کنیم؛ شکل ۳ب، خواهیم دید که شتاب جسم $5\text{m/s}^2$ و در جهت خطی است که با محور $x$ زاویهٔ $37^\circ$ می‌سازد. اگر به جسم نیروی ۵N در این جهت وارد می‌شد هم همین شتاب به‌دست می‌آمد. برای به‌دست آوردن این نتیجه، می‌توانستیم اول دو نیروی ۴N و ۳N را جمع برداری کنیم (شکل ۳ج) تا برایند ۵N در جهت $37^\circ$ از محور $x$ به‌دست بیاید، و بعد این نیروی خالص را به جسم اعمال کنیم. با آزمایشهایی از این نوع معلوم می‌شود که نیرو بردار است: یعنی اندازه و جهت دارد، و طبق قانونِ جمع برداری جمع می‌شود.

توجه کنید که دو روشِ تحلیل داریم که هر دو باید به یک نتیجه بینجامند. ۱. می‌توانیم شتاب حاصل از هر نیرو را پیدا کنیم و شتابها را با هم جمع برداری کنیم. ۲. می‌توانیم نیروها را جمع برداری کنیم، برایند حاصل را به جسم اعمال کنیم و شتاب را به‌دست بیاوریم.

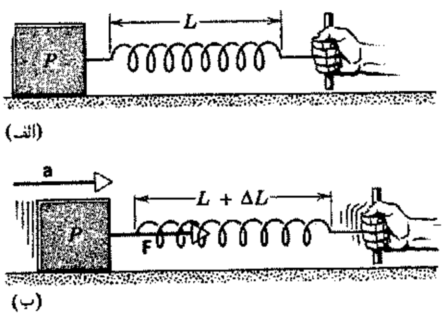
## ۴ـ۵ جرم

در بخش ۵ـ۳، فقط شتابهای یک جسم خاص، یعنی کیلوگرم استاندارد را بررسی کردیم. از اینجا توانستیم نیرو را به طور کمّی تعریف کنیم. اما ببینیم نیرو بر اجسام دیگر چه اثری می‌گذارد؟ چون جسم استاندارد را دلبخواه انتخاب کرده بودیم، طبیعی است که برای هر جسمی، شتاب مستقیماً متناسب با نیرویی باشد که بر آن وارد می‌شود. پرسش مهمی که باقی می‌ماند این است: اثر یک نیروی یکسان بر اجسام متفاوت چگونه است؟

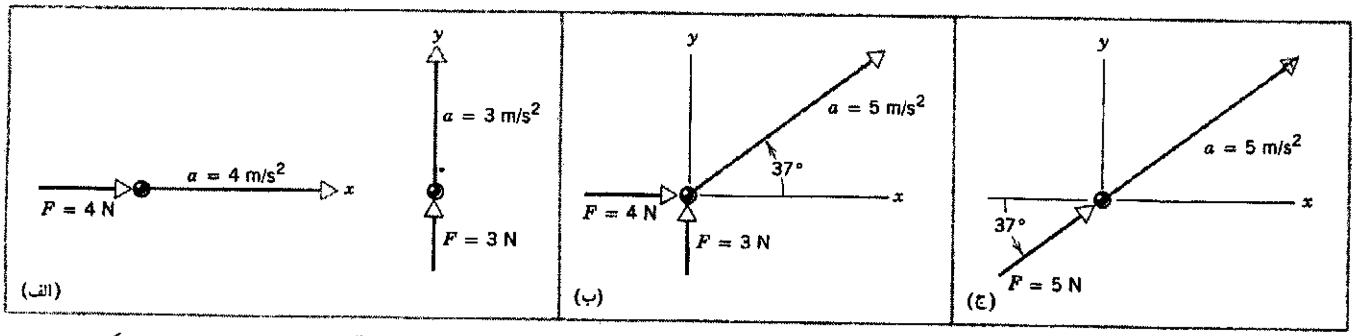
پاسخ کیفی این سؤال از تجربیات روزمره حاصل می‌شود. نیروهای یکسان، شتابهای متفاوتی به اجسام متفاوت می‌دهند. یک نیروی معین، به توپ بیسبال شتاب بیشتری می‌دهد تا به یک اتومبیل. برای به‌دست آوردن پاسخ کمّی به این پرسش، به روشی برای اندازه‌گیری جرم نیاز داریم، یعنی به روشی برای سنجش خاصیتی از جسم که مقاومت آن را در برابر تغییر حرکتش تعیین می‌کند.

فرض کنید که فنری به جسم استانداردمان (کیلوگرم استاندارد، که خودمان به آن جرم $m_0$، دقیقاً برابر با ۱kg نسبت دادیم) ببندیم و آن را، به روش شکل ۲ب، چنان بکشیم که شتاب آن $a_0$، مثلاً $2{,}00\text{m/s}^2$، شود. تغییر طول $\Delta L$ فنر را، که متناظر با نیرویی است که از فنر بر جسم وارد می‌شود، دقیقاً اندازه می‌گیریم.

اکنون دو جسم استاندارد یکسان را به فنر می‌بندیم و همان نیروی سابق را به آنها وارد می‌کنیم (یعنی فنر را آنقدر می‌کشیم تا افزایش طول آن به همان اندازهٔ $\Delta L$ باشد. شتاب مجموعهٔ دو جسم را اندازه می‌گیریم، و می‌بینیم $1{,}00\text{m/s}^2$ را می‌شود. اگر سه جسم استاندارد به‌کار برده بودیم و همان نیرو را اعمال می‌کردیم، شتاب مجموعه را برابر $0{,}667\text{m/s}^2$ را به‌دست می‌آوردیم.




شکل۲. (الف) "ذرهٔ" $P$ (کیلوگرم استاندارد) در حالت سکون روی یک سطح افقی بدون اصطکاک. (ب) جسم، با کشیدن فنر به طرف راست، شتاب گرفته است.




**شکل۳.** (الف) نیروی $۴\mathrm{N}$ در جهت $x$، شتاب $۴\mathrm{m/s^۲}$ در جهت $x$ تولید می‌کند، و نیروی $۳\mathrm{N}$ در جهت $y$ شتاب $۳\mathrm{m/s^۲}$ در جهت $y$. (ب) اگر دو نیرو با هم اعمال شوند، شتاب برایند برابر با $۵\mathrm{m/s^۲}$ در جهتی است که نشان داده شده است. (ج) این شتاب را می‌شود با یک نیروی $۵\mathrm{N}$ در جهت مشخص شده تولید کرد.

از این مشاهدات معلوم می‌شود که به‌ازای نیروی ثابت، هر چه جرم بزرگتر باشد شتاب کوچکتر می‌شود. از این آزمایش و آزمایشهای مشابه دیگر، نتیجه می‌گیریم که شتابی که یک نیروی معین تولید می‌کند، تناسب معکوس با جرم جسمی دارد که شتاب می‌گیرد. به بیان دیگر: جرم اجسام متناسب با عکس شتابی است که از یک نیروی معین می‌گیرند. به این ترتیب، جرم جسم را می‌توانیم معیاری کمّی از مقاومت آن در برابر یک نیروی معین در نظر بگیریم.

با این مشاهده، روش مستقیمی برای مقایسهٔ جرم اجسام مختلف به‌دست می‌آید: کافی است شتاب اجسام تحت تأثیر یک نیروی معین را بسنجیم و با هم مقایسه کنیم. نسبت جرمهای دو جسم برابر با عکس نسبت شتابهایی است که در اثر آن نیرو کسب می‌کنند، یعنی

$$\frac{m_۱}{m_۰} = \frac{a_۰}{a_۱} \qquad \text{(به‌ازای نیروی یکسان)}$$

اینجا در واقع داریم شتاب $a_۱$ جسمی به جرم مجهول $m_۱$ را با شتاب $a_۰$ جسم استاندارد به جرم $m_۰$ مقایسه می‌کنیم.

مثلاً، فرض کنید نیرویی اعمال کنیم که به جرمِ استاندارد شتاب $۲٫۰۰\mathrm{m/s^۲}$ بدهد. همان نیرو را به جسمی به جرم مجهول $m_۱$ وارد می‌کنیم (برای این کار فنر را به همان اندازه $\Delta L$ می‌کشیم)، و شتاب $a_۱$ را می‌سنجیم، که مثلاً برابر با $۰٫۵۰\mathrm{m/s^۲}$ می‌شود. حالا می‌توانیم $m_۱$ را از رابطهٔ بالا بیاوریم. نتیجه می‌شود که

$$m_۱ = m_۰\left(\frac{a_۰}{a_۱}\right) = (۱٫۰۰\mathrm{kg})\left(\frac{۲٫۰۰\mathrm{m/s^۲}}{۰٫۵۰\mathrm{m/s^۲}}\right) = ۴٫۰۰\mathrm{kg}$$

شتاب جسم دوم، در اثر همان نیروی وارد بر جسم اول، یک چهارم شتابِ جسم اول است؛ بنابراین، جرم آن چهار برابر جرم جسم اول است. این مثال رابطهٔ معکوس میان جرم و شتاب را به‌ازای نیروی معین، نشان می‌دهد.

آزمایش بالا را برای همین دو جسم تکرار می‌کنیم، اما این بار به هر دو نیروی $F'$ وارد می‌کنیم، که با $F$ متفاوت است. این نیرو به جسم استاندارد شتاب $a'_۰$ و به جسم مجهول شتاب $a'_۱$ می‌دهد. خواهیم دید که نسبت شتابها، $a'_۰/a'_۱$، برابر با همان نسبت آزمایش قبلی است؛ یعنی

$$\frac{m_۱}{m_۰} = \frac{a_۰}{a_۱} = \frac{a'_۰}{a'_۱}$$

مثلاً فرض کنید نیروی بزرگتری اعمال کنیم، چنانکه فنر به اندازهٔ $۱٫۵\Delta L$ کشیده شود. در این حالت خواهیم دید که جرم $m_۰$ شتاب $۳٫۰۰\mathrm{m/s^۲}$، و جرم مجهول $m_۱$ شتاب $۰٫۷۵\mathrm{m/s^۲}$ می‌گیرد. از اینجا جرم مجهول چنین به‌دست می‌آید:

$$m_۱ = m_۰\left(\frac{a'_۰}{a'_۱}\right) = (۱٫۰۰\mathrm{kg})\left(\frac{۳٫۰۰\mathrm{m/s^۲}}{۰٫۷۵\mathrm{m/s^۲}}\right) = ۴٫۰۰\mathrm{kg}$$

که همان مقداری است که در آزمایش قبل به‌دست آمد. مهم نیست که مقدار نیروی مشترکی که به کار می‌بریم چقدر باشد، در هر حال مقداری که برای $m_۱$ حاصل می‌شود یکی است. نسبت جرم $m_۱/m_۰$ مستقل از نیروی مشترکی است که اعمال شده است؛ جرم از خواص بنیادی جسم است و بستگی به مقدار نیرویی که برای مقایسهٔ جرم مجهول با جرم استاندارد به کار رفته است ندارد. پس به کمک این روش می‌توانیم جرم اجسام را از مقایسه با کیلوگرم استاندارد به‌دست بیاوریم.

این روش را می‌شود به مقایسهٔ مستقیم جرم هر دو جسمی تعمیم داد. مثلاً، فرض کنید که ابتدا جسم دلبخواه دیگری را به همان روش قبلی با جسم استاندارد مقایسه و جرم آن، مثلاً $m_۲$، را تعیین کنیم. اکنون می‌توانیم دو جسم $m_۲$ و $m_۱$ را مستقیماً با هم مقایسه کنیم: در اثر نیروی $F''$، شتابهای $a''_۲$ و $a''_۱$ به دست می‌آیند. نسبت جرمها که طبق معمول از رابطهٔ

$$\frac{m_۲}{m_۱} = \frac{a''_۱}{a''_۲} \qquad \text{(به‌ازای نیروی یکسان)}$$

تعریف می‌شود، برابر با همان نسبتی است که از دو جرم $m_۲$ و $m_۱$ که مستقیماً از مقایسه با جرم استاندارد به‌دست آمده باشند، حاصل می‌شود.

با آزمایش دیگری از همین نوع، می‌شود نشان داد که اگر دو جسم به جرمهای $m_1$ و $m_2$ را به هم ببندیم، جسمی به‌دست می‌آید که از نظر مکانیکی مثل جسمی به جرم $m_1+m_2$ رفتار می‌کند. به عبارت دیگر، جرم مانند کمیتهای اسکالر جمع می‌شود (اسکالر هم هست).

یکی از کاربردهای عملی این روش ــ تعیین جرم اجسام از راه مقایسهٔ شتاب نسبی آنها در اثر نیروی یکسان ــ اندازه‌گیری دقیق جرم اتمهاست. در این مورد، نیرو نیروی منحرف‌کنندهٔ مغناطیسی، و شتاب شتابِ مرکزگراست، اما اصول کار دقیقاً همان است که دیدیم. اگر نیروی مغناطیسی وارد بر دو اتم یکسان باشد، نسبت جرمهای دو اتم برابر با عکس نسبت شتابهای آنهاست. با اندازه‌گیری مقدار انحراف، مثلاً در طیف‌سنج جرمی (شکل ۶ در فصل ۱)، می‌شود نسبت دقیق جرم اتمهای مختلف را سنجید، و با تعریف $^{12}\text{C}$ به عنوان استاندارد، می‌شود مقادیر دقیق برای جرمها به‌دست آورد (مثل مقادیر جدول ۶ در فصل ۱).

## ۵ـ۵ قانون دوم نیوتون

حالا می‌توانیم همهٔ آزمایشها و تعریفهای قبلی را در یک معادله، معادلهٔ بنیادی مکانیک کلاسیک، خلاصه کنیم:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad (۱)$$

در این معادله، $\sum \mathbf{F}$ جمع (برداری) همهٔ نیروهایی است که بر جسم اثر می‌کنند، $m$ جرم جسم، و $\mathbf{a}$ (بردار) شتاب آن است. معمولاً $\sum \mathbf{F}$ را نیروی برایند یا نیروی خالص می‌نامند.

معادلهٔ ۱ بیانی از قانون دوم نیوتون است. اگر آن‌را به شکل $\mathbf{a} = (\sum \mathbf{F})/m$ بنویسیم، به سادگی دیده می‌شود که اندازهٔ شتاب جسم مستقیماً متناسب با اندازهٔ نیروی برایند وارد بر آن است، و جهت شتاب هم با جهت نیرو موازی است. همچنین دیده می‌شود که شتاب حاصل از یک نیروی معین، با جرم جسم نسبت عکس دارد.

توجه کنید که قانون اول نیوتون را می‌شود حالت خاصی از قانون دوم تلقی کرد، چون اگر $\sum \mathbf{F} = ۰$ باشد $\mathbf{a} = ۰$ است. به بیان دیگر، اگر نیروی برایند وارد بر جسمی صفر باشد، شتاب جسم صفر می‌شود و جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند، و این همان است که قانون اول نیوتون می‌گوید. اما قانون اول یک نقش مهم و مستقل از قانون دوم هم دارد، و آن تعریف چارچوبهای مرجع لخت است. بدون چنین تعریفی، نمی‌شود چارچوبهایی را که قانون دوم نیوتون در آنها معتبر است مشخص کرد. بنابراین هر دو قانون را لازم داریم تا سیستم مکانیکی کاملی داشته باشیم.

معادلهٔ ۱ معادله‌ای برداری است. این معادله را هم، مثل همهٔ معادلات برداری دیگر، می‌توانیم به شکل سه معادلهٔ اسکالر بنویسیم:

$$\sum F_x = ma_x,\ \sum F_y = ma_y,\ \text{و}\ \sum F_z = ma_z \qquad (۲)$$

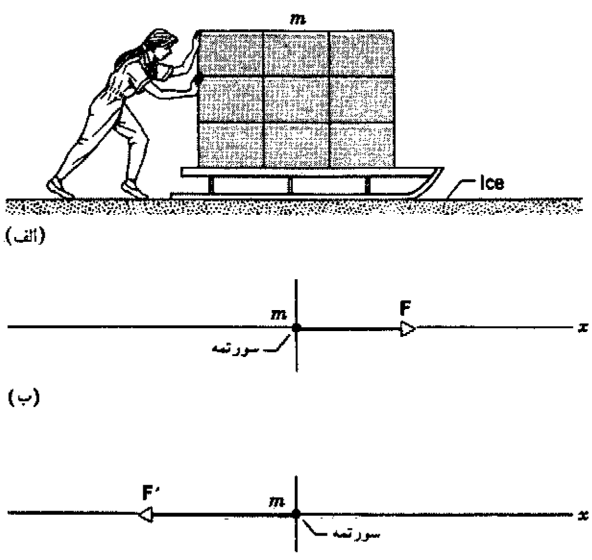
این سه معادله، مؤلفه‌های $x$، $y$، و $z$ نیروی برایند ($\sum F_x$، $\sum F_y$، و $\sum F_z$) را به مؤلفه‌های شتاب ($a_x$، $a_y$، و $a_z$) جسم به جرم $m$ مربوط می‌کنند. لازم است تأکید کنیم که $\sum F_x$ جمع جبری مؤلفه‌های $x$ همهٔ نیروها، $\sum F_y$ جمع جبری مؤلفه‌های $y$ همهٔ نیروها، و $\sum F_z$ جمع جبری مؤلفه‌های $z$ همهٔ نیروهای وارد بر $m$ است. در به‌دست آوردن جمع جبری، باید علامت مؤلفه‌ها (یعنی جهت نیروها نسبت به همدیگر) را در نظر گرفت.

در تحلیل مسائل به کمک قانون دوم نیوتون، خوب است نموداری رسم کنیم که جسم مورد نظر را به شکل یک نقطه، و نیروهای وارد بر آن‌را به شکل بردارهایی که بر آن اثر می‌کنند نشان بدهد. چنین نمایشی را نمودار جسم آزاد می‌نامند؛ این نمایش یک گام اولیهٔ اساسی، هم در تحلیل مسئله و هم در تجسم وضعیت فیزیکی، است.

---

مثال ۱. دانشجویی سورتمهٔ بارشده‌ای به جرم $m = ۲۴۰\text{kg}$ را تا مسافت $d = ۲٫۳\text{m}$ روی سطح بدون اصطکاک دریاچهٔ یخزده‌ای با نیروی افقی ثابت $F = ۱۳۰\text{N}$ (یعنی ۲۹lb) هل می‌دهد؛ شکل ۴الف. اگر سورتمه از حالت سکون شروع به حرکت کند، سرعت نهایی آن چه خواهد بود؟

حل: یک محور $x$ افقی می‌کشیم (شکل ۴ب)، جهت افزایش $x$ را به‌طرف راست می‌گیریم، و سورتمه را ذره در نظر می‌گیریم. شکل ۴ب یک نمودار جسم آزاد جزئی است. درکشیدن نمودار جسم آزاد، مهم است که همهٔ نیروهای وارد بر ذره را در نظر بگیریم، اما در اینجا دو نیروی عمودی را حذف کرده‌ایم. این دو نیرو را ــ که تأثیری بر حل مسئلهٔ ما ندارند ــ بعداً در همین فصل بررسی خواهیم کرد.




شکل ۴. مثالهای ۱ و ۲. (الف) دانشجویی سورتمه‌ای بارشده را روی سطحی بدون اصطکاک هل می‌دهد. (ب) نمودار جسم آزادی که سورتمه را به شکل "ذره"، همراه با نیروی وارد بر آن، نشان می‌دهد. (ج) نمودار جسم آزاد دیگری که نیروی وارد بر جسم را، وقتی که دانشجو آن‌را در جهت مخالف هل می‌دهد، نشان می‌دهد.

فرض می‌کنیم که تنها نیروی افقی وارد بر سورتمه، نیروی $F$ است که دانشجو وارد می‌کند. حالا می‌توانیم شتاب سورتمه را از قانون دوم نیوتون به‌دست بیاوریم:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{۱۳۰\text{N}}{۲۴۰\text{kg}} = ۰{,}۵۴\text{m/s}^۲$$

چون شتاب ثابت است، می‌شود معادلهٔ ۲۰ فصل دوم $[v^۲ = v_۰^۲ + ۲a(x - x_۰)]$ را به‌کار برد و سرعت نهایی را به دست آورد. می‌گذاریم $v_۰ = ۰$ و $x - x_۰ = d$ و $v$ را حساب می‌کنیم؛ نتیجه می‌شود که

$$v = \sqrt{۲ad} = \sqrt{(۲)(۰{,}۵۴\text{m/s}^۲)(۲{,}۳\text{m})} = ۱{,}۶\text{m/s}$$

نیرو، شتاب، جابه‌جایی، و سرعت نهایی سورتمه، همه مثبت‌اند: یعنی جهت آنها، در شکل ۴ب به طرف راست است.

توجه کنید که دانشجو، برای اینکه بتواند همین نیروی ثابت را مدام اعمال کند، باید پیوسته تندتر و تندتر حرکت کند تا از سورتمهٔ شتابدار عقب نماند. سرانجام، سرعت سورتمه از بیشترین مقدار سرعت دویدن دانشجو بیشتر می‌شود، و از آن پس دانشجو دیگر نمی‌تواند به سورتمه نیرو وارد کند. از این پس (اگر اصطکاک نباشد) سورتمه با سرعت ثابت به لغزش خود ادامه خواهد داد.

**مثال ۲.** دانشجوی مثال ۱ می‌خواهد جهت سرعت سورتمه را در مدت ۴٫۵s برعکس کند. به این منظور چه نیروی ثابتی باید بر سورتمه وارد کند؟

حل: با استفاده از معادلهٔ ۱۵ فصل ۲ $(v = v_۰ + at)$، شتاب (ثابت) جسم را پیدا می‌کنیم:

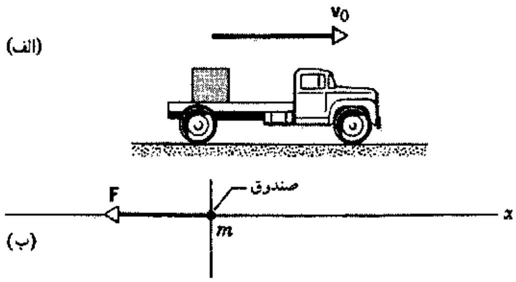
$$a = \frac{v - v_۰}{t} = \frac{(-۱{,}۶\text{m/s}) - (۱{,}۶\text{m/s})}{۴{,}۵\text{s}} = -۰{,}۷۱\text{m/s}^۲$$

اندازهٔ این شتاب، بزرگتر از اندازهٔ شتاب مثال ۱ $(۰{,}۵۴\text{m/s}^۲)$ است؛ پس در این حالت دانشجو قاعدتاً باید سورتمه را شدیدتر هل بدهد. این نیروی (ثابت) $F'$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$F' = ma = (۲۴۰\text{kg})(-۰{,}۷۱\text{m/s}^۲)$$
$$= -۱۷۰\text{N}(= -۳۸\text{lb})$$

علامت منفی نشان می‌دهد که دانشجو سورتمه را در جهت کاهش $x$، یعنی به طرف چپ در نمودار جسم آزاد شکل ۴ج، هل می‌دهد.

**مثال ۳.** صندوقی به جرم $m$ برابر با ۳۶۰kg روی کفهٔ کامیونی که با سرعت $v_۰$ برابر با ۱۲۰km/h در حرکت است قرار دارد، و نسبت به کامیون ساکن است (شکل ۵الف). راننده ترمز می‌کند و طی ۱۷s سرعت را به ۶۲km/h می‌رساند. طی این مدت چه نیرویی




شکل۵. مثال ۳. (الف) صندوقی درکامیونی که سرعتش در حال کم شدن است. (ب) نمودار جسم آزاد صندوق.

(که فرض می‌کنیم ثابت است) بر صندوق وارد می‌شود؟ فرض کنید صندوق روی کفه نمی‌لغزد.

حل: ابتدا شتاب (ثابت) صندوق را پیدا می‌کنیم. به این منظور از معادلهٔ ۱۵ فصل ۲ $(v = v_۰ + at)$ استفاده می‌کنیم:

$$a = \frac{v - v_۰}{t} = \frac{(۶۲\text{km/h}) - (۱۲۰\text{km/h})}{۱۷\text{s}}$$
$$= \left(-۳{,}۴۱\frac{\text{km}}{\text{h}\cdot\text{s}}\right)\left(\frac{۱\text{h}}{۳۶۰۰\text{s}}\right)\left(\frac{۱۰۰۰\text{m}}{۱\text{km}}\right) = -۰{,}۹۵\text{m/s}^۲$$

جهت مثبت راستای افقی را به طرف راست گرفته‌ایم. پس بردار شتاب به طرف چپ است.

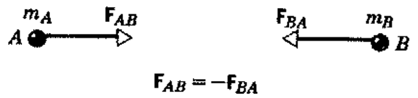
نیروی وارد بر صندوق از قانون دوم نیوتون به‌دست می‌آید:

$$F = ma$$
$$= (۳۶۰\text{kg})(-۰{,}۹۵\text{m/s}^۲) = -۳۴۰\text{N}$$

نیرو هم در همان جهت شتاب، یعنی به طرف چپ شکل ۵ب، است. این نیرو از طریق یک عامل خارجی به صندوق وارد می‌شود، مثلاً از طریق تسمه‌ها یا وسایل دیگری که برای محکم نگه‌داشتن صندوق به کار رفته است. اگر صندوق را نبسته باشند، نیرو باید از اصطکاک بین صندوق و کفه تأمین شود. اگر این اصطکاک برای تأمین ۳۴۰N نیرو کافی نباشد، صندوق روی کفه می‌لغزد و، از دید ناظر ساکن نسبت به زمین، سرعتش با آهنگ کمتری (ازکامیون) کند می‌شود.

## ۵ـ۶ قانون سوم نیوتون

نیروهای وارد بر یک جسم از اجسامی ناشی می‌شوند که محیط آن جسم را تشکیل می‌دهند. اگر نیروهای وارد بر جسم دیگری را که قبلاً جزء محیط جسم اول بوده است بررسی کنیم، خود جسم اول هم جزئی از محیط جسم دوم و منشأ بخشی از نیروهای وارد بر جسم دوم خواهد بود. بنابراین، هر تک نیرویی در واقع بخشی از برهم‌کنش متقابل میان دو جسم است. آزمایش نشان می‌دهد که اگر جسمی




**شکل۶.** قانون سوم نیوتون. جسم $A$ نیروی $\mathbf{F}_{BA}$ را بر جسم $B$ وارد می‌کند. در این حال، جسم $B$ هم باید نیروی $\mathbf{F}_{AB}$ را بر جسم $A$ وارد کند، و $\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$ است.

بر جسم دیگری نیرو وارد کند، همیشه جسم دوم هم نیرویی بر جسم اول وارد می‌کند. به‌علاوه، معلوم می‌شود که همواره اندازهٔ این دو نیرو یکسان و جهت آنها مخالف هم است. پس هیچ نیرویی به‌صورت تک نیروی مجزا نمی‌تواند وجود داشته باشد.

فرض کنید که چنین نمی‌بود. دو جسم $A$ و $B$ را در نظر بگیرید که از محیط منزوی‌اند، و فرض کنید که $A$ نیرویی بر $B$ وارد می‌کند اما $B$ نیرویی بر $A$ وارد نمی‌کند. در این صورت نیروی کل وارد بر مجموعهٔ $A + B$ غیر صفر می‌شد و جسم مرکب می‌بایست شتاب می‌گرفت. اگرچنین چیزی در کار بود، چشمهٔ بی‌پایانی از انرژی می‌داشتیم که می‌توانست $A + B$ را، بی‌هیچ هزینه‌ای در فضا حرکت بدهد: قایقهای بادبانی می‌توانستند با دمیدن نفس مسافران به بادبانهایشان حرکت کنند، و سفینه‌های فضایی می‌توانستند با فشاری که فضانوردان بر دیواره‌هایشان وارد می‌کردند شتاب بگیرند. ناممکن بودن این چیزها نتیجه‌ای از قانون سوم نیوتون است.

به دلخواه، یکی از نیروهای برهم‌کنش بین دو جسم را نیروی "عمل" و دیگری را نیروی "عکس‌العمل" می‌نامیم. قانون سوم نیوتون، در شکلی که از قدیم رایج بوده است، چنین بیان می‌شود:

> هر عملی، عکس‌العملی به همان اندازه و در خلاف جهت عمل دارد.

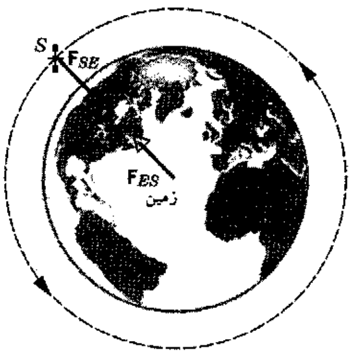
در روایت جدیدتری از قانون سوم، به نیروی متقابلی که دو جسم به هم وارد می‌کنند پرداخته می‌شود:

> وقتی دو جسم به یکدیگر نیرو وارد کنند، این دو نیرو هم‌اندازه و در جهتهای مخالف هم‌اند.

برای صورتبندی ریاضی این تعریف، فرض کنید ــ در شکل ۶ ــ جسم $A$ نیروی $\mathbf{F}_{BA}$ را به جسم $B$ وارد می‌کند؛ آزمایش نشان می‌دهد که جسم $B$ هم نیروی $\mathbf{F}_{AB}$ را به جسم $A$ وارد می‌کند. (به‌ترتیب زیروندها توجه کنید؛ نیرو بر جسمی وارد می‌شود که با زیروند اول مشخص شده است، و این نیرو را جسمی وارد می‌کند که با زیروند دوم مشخص شده است.) این را می‌شود به شکل یک معادلهٔ برداری نوشت:

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA} \qquad (۳)$$

توجه کنید که عمل و عکس‌العمل همواره بر دو جسم مختلف اثر می‌کنند؛ تفاوت زیروندهای اول در دو طرف معادله هم یادآور




**شکل۷.** ماهواره‌ای در مدار زمین. نیروهایی که در شکل می‌بینید یک زوج عمل‌ـعکس‌العمل‌اند. توجه کنید که این دو نیرو بر دو جسم مختلف اثر می‌کنند.

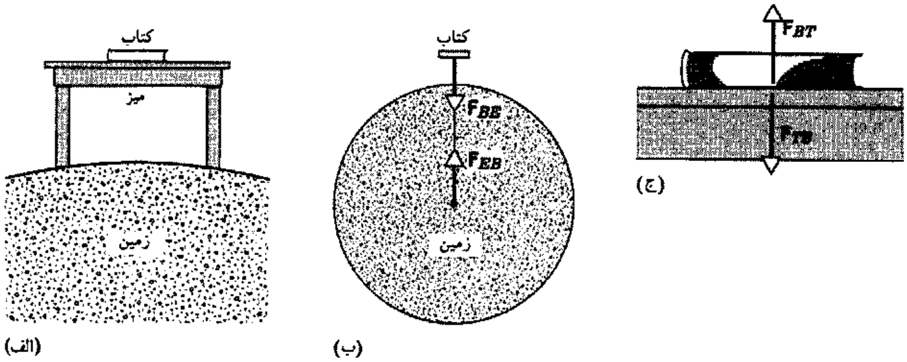
همین است. اگر این دو نیرو بر یک جسم اثر می‌کردند، نیروی خالص وارد بر آن جسم صفر می‌شود و حرکت شتابداری وجود نمی‌داشت.

هنگامی‌که چوب بیسبال به توپ می‌خورد، چوب نیرویی بر توپ وارد می‌کند. (عمل) و توپ هم نیرویی هم‌اندازه و در خلاف جهت بر چوب وارد می‌کند. هنگامی‌که فوتبالیستی توپ را شوت می‌کند، پا نیرویی بر توپ وارد می‌کند (عمل)، و توپ هم نیرویی هم‌اندازه و در خلاف جهت بر پا وارد می‌کند. هنگامی که دارید سعی می‌کنید اتومبیل وامانده‌ای را هل بدهید، می‌توانید حس کنید که اتومبیل هم شما را به عقب هل می‌دهد. در هر مورد، اگر هدف ما بررسی دینامیکِ یکی از دو جسم باشد ــ مثلاً فقط توپ بیسبال ــ تنها یکی از زوج نیروهای عمل‌ـعکس‌العمل را در نظر می‌گیریم؛ نیروی دیگر به جسم دیگری وارد می‌شود، و فقط وقتی به آن نیاز داریم که بخواهیم دینامیک آن جسم دیگر را بررسی کنیم.

در مثالهای زیر می‌بینیم که قانون سوم چگونه عمل می‌کند:

۱. ماهواره‌ای که در مدار زمین است. شکل ۷ ماهواره‌ای را نشان می‌دهد که به دور زمین می‌گردد. تنها نیروی وارد بر آن $\mathbf{F}_{SE}$ است، نیرویی که از (جاذبهٔ گرانشی) زمین بر ماهواره وارد می‌شود. عکس‌العمل متناظر با این نیرو کجاست؟ این نیرو $\mathbf{F}_{ES}$ است، نیروی ناشی از جاذبهٔ گرانشی ماهواره که بر زمین وارد می‌شود.

شاید فکر کنید که ماهوارهٔ به این کوچکی نمی‌تواند جاذبهٔ گرانشی قابل ملاحظه‌ای بر زمین وارد کند، اما این کار را می‌کند، درست همان‌طور که لازمهٔ قانون سوم نیوتون است. اگر فقط اندازهٔ دو نیرو را در نظر بگیریم، می‌دانیم که $\mathbf{F}_{ES} = \mathbf{F}_{SE}$. (به خاطر دارید که اندازهٔ هر برداری مثبت است.) نیروی $\mathbf{F}_{ES}$ باعث می‌شود که زمین شتاب بگیرد، اما چون جرم زمین خیلی زیاد است، این شتاب آنقدر کوچک است که آشکار نمی‌شود.




شکل۸. (الف) کتابی روی میز در حالت سکون است؛ خود میز هم نسبت به زمین ساکن است. (ب) کتاب و زمین نیروهای گرانشی برهم وارد می‌کنند، که یک زوج عمل‌ـعکس‌العمل‌اند. (ج) میز و کتاب نیروهای تماسی عمل‌ـعکس‌العمل بر هم وارد می‌کنند.

۲. کتابی که روی میز، ساکن است. شکل ۸الف کتابی را نشان می‌دهد که روی میزی، به حالت سکون، قرار دارد. زمین کتاب را با نیروی $\mathbf{F}_{BE}$ به طرف پایین می‌کشد، اما کتاب شتاب نمی‌گیرد چون این نیرو با نیروی تماسی $\mathbf{F}_{BT}$ خنثی می‌شود. این نیرو با نیروی اول هم‌اندازه و در جهت مخالف آن است، و میز آن‌را بر کتاب وارد می‌کند.

$\mathbf{F}_{BE}$ و $\mathbf{F}_{BT}$ هم‌اندازه و در جهت مخالف هم‌اند، اما زوج عمل‌ـعکس‌العمل نیستند. چرا؟ چون هر دو بر یک جسم ــ به کتاب ــ وارد می‌شوند. این دو نیرو هم دیگر را خنثی می‌کنند، و به همین علت است که شتابِ کتاب صفر است.

هر یک از این دو نیرو البته باید در جایی یک نیروی عکس‌العمل متناظر هم داشته باشد. این عکس‌العملها کجا هستند؟ عکس‌العمل $\mathbf{F}_{BE}$ نیروی $\mathbf{F}_{EB}$ است، نیروی (گرانشی) وارد بر زمین از طرف کتاب. شکل ۸ب این زوج عمل‌ـعکس‌العمل را نشان می‌دهد.

شکل ۸ج عکس‌العمل $\mathbf{F}_{BT}$ را نشان می‌دهد، که نیروی $\mathbf{F}_{TB}$ است، یعنی نیروی تماسی‌ای که کتاب بر میز وارد می‌کند. زوجهای عمل‌ـعکس‌العمل این مسئله، که کتاب هم در آنها دخیل است، و اجسامی که این نیروها بر آنها اثر می‌کنند، عبارت‌اند از

زوج اول: $\mathbf{F}_{BE} = -\mathbf{F}_{EB}$ (کتاب و زمین)

و

زوج دوم: $\mathbf{F}_{BT} = -\mathbf{F}_{TB}$ (کتاب و میز)

۳. هل دادن یک ردیف صندلی. شکل ۹ کارگری ($W$) را نشان می‌دهد که دو صندوق را هل می‌دهد. هر یک از این دو صندوق روی صفحهٔ چرخداری است که می‌تواند با اصطکاک ناچیزی روی زمین حرکت کند. کارگر نیروی $\mathbf{F}_{1W}$ را بر صندوق ۱ وارد می‌کند، و صندوق ۱ هم با نیروی عکس‌العمل $\mathbf{F}_{W1}$ کارگر را به عقب می‌راند. صندوقِ ۱ صندوق ۲ را با نیروی $\mathbf{F}_{21}$ هل می‌دهد. (توجه کنید که کارگر مستقیماً بر صندوق ۲ نیرویی وارد نمی‌کند.) کارگر برای اینکه به جلو حرکت کند باید یک نیروی $\mathbf{F}_{GW}$ بر زمین وارد کند. $\mathbf{F}_{WG}$ کارگر را به جلو می‌راند. شکل، سه زوجِ عمل‌ـعکس‌العمل را نشان می‌دهد:

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} \qquad \text{(صندوق ۱ و صندوق ۲)}$$

$$\mathbf{F}_{1W} = -\mathbf{F}_{W1} \qquad \text{(کارگر و صندوق ۱)}$$

$$\mathbf{F}_{WG} = -\mathbf{F}_{GW} \qquad \text{(کارگر و زمین)}$$

شتاب جسم ۲، طبق قانون دوم نیوتون، از نیروی خالص وارد برآن به‌دست می‌آید:

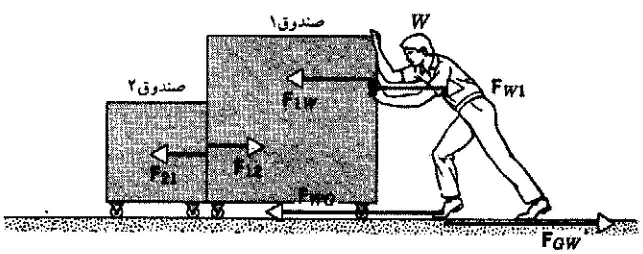
$$F_{21} = m_2 a_2$$

شتاب صندوق ۱ هم از نیروی خالص وارد بر این صندوق تعیین می‌شود:

$$F_{1W} - F_{12} = m_1 a_1$$

در رابطهٔ بالا جمع برداری دو نیرو را به‌صورت تفاضل اندازهٔ دو نیرو نوشته‌ایم، چون این دو در جهت مخالف هم بر صندوق ۱ اثر می‌کنند. اگر دو صندوق در تماس با هم بمانند، شتابشان باید یکی باشد. این شتاب را با $a$ نشان می‌دهیم و دو معادله را با هم جمع می‌کنیم. نتیجه می‌شود که

$$F_{1W} = (m_1 + m_2)a$$



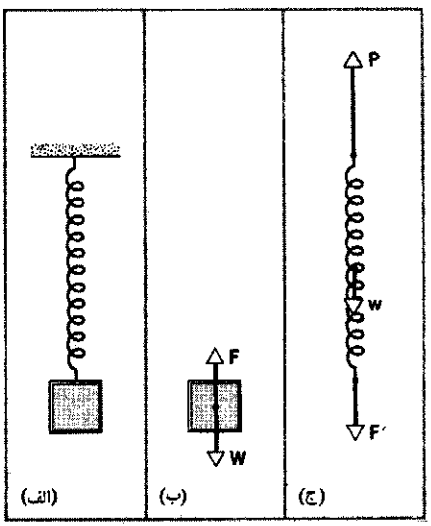

شکل۹. کارگری صندوق ۱ را هل می‌دهد، و صندوق ۱ هم صندوق ۲ را هل می‌دهد. صندوقها روی چرخ‌اند و می‌توانند آزادانه حرکت کنند؛ یعنی اصطکاک صندوقها با زمین ناچیز است.

اگر مجموعهٔ صندوقهای ۱ و ۲ را به‌صورت یک جسم واحد به جرم $m_1 + m_2$ در نظر می‌گرفتیم هم همین معادله به‌دست می‌آمد. نیروی خارجی خالص وارد بر این جسم مجموع، $F_{1W}$ است. در این صورت، دو نیروی تماسی در مرزِ میان صندوق ۱ و صندوق ۲ نیروهای داخلی‌اند و در معادلهٔ توصیف کنندهٔ جسم یکپارچه وارد نمی‌شوند. نیروهای اتمی‌ای که ذرات جسم را کنار هم نگه می‌دارند هم همین‌طور؛ هر نیروی داخلی‌ای در واقع یکی از اعضای زوجِ عمل-عکس‌العملی است که بر اجزای مختلف (مثلاً دو اتم) اثر می‌کنند. این نیروها، وقتی که معادلات مربوط به اجزای مختلف را با هم جمع می‌کنیم، در مجموع صفر می‌شوند.

توجه کنید که در این مثال، کارگر عامل فعالی است که صندوقها را حرکت می‌دهد، اما آنچه این کار را ممکن می‌کند نیروی عکس‌العمل زمین است. اگر بین زمین و کفشهای کارگر اصطکاکی وجود نمی‌داشت، کارگر نمی‌توانست سیستم را به‌جلو براند.

۴. جسمی که از فنر آویزان است. شکل ۱۰الف جسمی را نشان می‌دهد که، به حالت ساکن، از فنری آویزان است. سر دیگر فنر به سقف متصل است. نیروهای وارد بر جسم، یکی وزن آن $\mathbf{W}$ (به طرف پایین) و دیگری نیروی $\mathbf{F}$ (به طرف بالا) است که از فنر وارد می‌شود. جسم تحت تأثیر این نیروها در حالت سکون است، اما این دو نیرو زوجِ عمل-عکس‌العمل نیستند، چون‌که در این مورد هم بر یک جسم وارد می‌شوند. عکس‌العمل به نیروی $\mathbf{W}$ نیروی گرانشی‌ای است که جسم بر زمین وارد می‌کند، و در شکل نیامده است.

عکس‌العمل به $\mathbf{F}$ (نیرویی که از فنر بر جسم وارد می‌شود) نیرویی است که از جسم بر فنر وارد می‌شود. برای نشان دادن این نیرو، نیروهای وارد بر فنر را در شکل ۱۰ج نمایش داده‌ایم. این نیروها عبارت‌اند از




شکل ۱۰. (الف) جسمی که درحالت سکون از فنری آویزان است. (ب) نیروهای وارد بر جسم. (ج) نیروهای وارد بر فنر.

$\mathbf{F}'$ (که همان عکس‌العمل به $\mathbf{F}$ است)، $\mathbf{w}$ (وزن فنر که معمولاً قابل چشمپوشی است)، و $\mathbf{P}$ (که از سقف به فنر وارد می‌شود). وقتی فنر در حالت سکون است، نیروی خالص وارد بر آن باید صفر شود: $\mathbf{P} + \mathbf{w} + \mathbf{F}' = 0$.

عکس‌العمل به $\mathbf{P}$ نیرویی است که (مثلاً به اسم $\mathbf{P}'$) که بر سقف اثر می‌کند. چون در این نمودارها سقف را به عنوان جسم مستقلی بررسی نکرده‌ایم، $\mathbf{P}'$ را هم نشان نداده‌ایم.

## ۷ـ۵ یکاهای نیرو

قانون دوم نیوتون ($F \doteq ma$) هم، مثل همهٔ معادلات دیگر، باید از نظر ابعادی سازگار باشد. بعد طرف راست $[m][a] = \mathrm{ML/T^2}$ است (از فصل ۱ به‌خاطر دارید که [ ] نماد بعد است)، بنابراین، بعد نیرو هم باید همین باشد.

$$[F] = \mathrm{ML/T^2}$$

منشأ نیرو هرچه باشد ــگرانشی، الکتریکی، هسته‌ای، یا هر چیز دیگرــ و معادلهٔ توصیف‌کنندهٔ آن هر قدرپیچیده هم باشد، بُعد آن همین است.

در سیستم یکاهای SI، جرم را برحسب kg وشتاب را برحسب $\mathrm{m/s^2}$ می‌سنجند. برای اینکه به جرم $1\mathrm{kg}$ شتاب $1\mathrm{m/s^2}$ بدهیم، باید $1\mathrm{kg\ m/s^2}$ نیرو به آن وارد کنیم. این ترکیبِ نه چندان خوش دستِ یکاها را نیوتون (مخفف N) می‌نامند:

$$1\mathrm{N} = 1\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s^2}$$

اگر جرم را برحسب kg و شتاب را برحسب $\mathrm{m/s^2}$ بسنجیم، قانون دوم نیوتون نیرو را برحسب N به‌دست می‌دهد.

دو سیستم رایج دیگر، سیستم cgs (سانتی‌متر-گرم-ثانیه) و سیستم بریتانیایی‌اند. در سیستم cgs، جرم را برحسب گرم و شتاب را برحسب $\mathrm{cm/s^2}$ می‌سنجند. یکای نیرو در این سیستم دین (dyne) نامیده می‌شود که معادل است با $\mathrm{g\ cm/s^2}$. از آنجا که $1\mathrm{kg} = 10^3\mathrm{g}$ و $1\mathrm{m/s^2}$ یعنی $100\mathrm{cm/s^2}$ است، نتیجه می‌شود که $1\mathrm{N} = 10^5\mathrm{dyne}$. دین یکایی بسیار کوچک است؛ تقریباً برابر با وزن یک میلی‌مترمکعب آب. (یک نیوتون در حدود وزن نیم فنجان آب است.)

در سیستم بریتانیایی، نیرو را برحسب پاوند، و شتاب را برحسب $\mathrm{ft/s^2}$ می‌سنجند. در این سیستم، جرمی که دراثر نیروی $1\mathrm{lb}$ شتاب $1\mathrm{ft/s^2}$ می‌گیرد، یک اسلاگ است.

سیستمهای پایهٔ دیگری هم هستند که گاه به گاه به‌کار می‌روند، اما این سه سیستم فعلاً از همه رایج‌ترند. این یکاهای رایج در جدول ۲ فهرست شده‌اند؛ جدول مفصلتری در پیوست ز آمده است.

## ۸ـ۵ وزن و جرم

وزن هر جسم در روی زمین نیروی گرانشی‌ای است که زمین بر آن جسم وارد می‌کند. وزن هم، مثل همهٔ نیروهای دیگر، کمیتی برداری

جدول ۲. یکاهای کمیتهای دخیل در قانون دوم نیوتون.

| سیستم | نیرو | جرم | شتاب |
|---|---|---|---|
| SI | نیوتون (N) | کیلوگرم (kg) | m/s^۲ |
| cgs | دین | گرم (g) | cm/s^۲ |
| بریتانیایی | پاوند | اسلاگ | ft/s^۲ |

است. جهت این بردار جهت نیروی گرانشی است، یعنی به‌طرف مرکز زمین. اندازهٔ نیرو برحسب یکاهای وزن، مثلاً پاوند یا نیوتون، بیان می‌شود.

بیایید فعلاً فرض کنیم که سطح زمین نمایندهٔ چارچوب مرجعی است که به قدر کافی لخت است. جسمی به جرم $m$ را نزدیک سطح زمین رها می‌کنیم و می‌گذاریم که تحت اثر گرانش زمین آزادانه سقوط کند. تنها یک نیرو بر جسم اثر می‌کند، که وزن $W$ جسم است. شتاب جسم همان شتاب سقوط آزاد ($g$) است. قانون دوم نیوتون، $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$، را برای این جسم در حال سقوط آزاد به‌کار می‌بریم؛ $\mathbf{W}$ را به‌جای $\mathbf{F}$ و $\mathbf{g}$ را به‌جای $\mathbf{a}$ می‌گذاریم؛ نتیجه می‌شود که $\mathbf{W} = m\mathbf{g}$. وزن و شتاب سقوط، هر دو بردارهایی در جهت مرکز زمین‌اند. پس می‌شود نوشت

$$W = mg \qquad (۴)$$

که در آن $W$ اندازهٔ بردار وزن و $g$ اندازهٔ بردار شتاب است.

البته برای تعیین وزن اجسام، لازم نیست که آنها در حال سقوط آزاد باشند. اگر جسمی در نزدیکی سطح زمین در حالت سکون باشد، از قانون دوم نیوتون نتیجه می‌شود که نیروی خالص وارد بر آن صفر است؛ بنابراین، برای اینکه جسم در حالت سکون بماند باید نیرویی به اندازهٔ $mg$ اما در جهت مخالف وزن جسم بر آن اثر کند. در شکل ۱۰، فنر این نیرو را تأمین می‌کند. نیرویی که فنر بر جسم وارد می‌کند. باید، از نظر عددی، برابر با $mg$ باشد. در شکل ۸، میز نیروی رو به بالای $\mathbf{F}_{BT}$ بر کتاب وارد می‌کند و آن‌را در حالت تعادل نگه می‌دارد: اندازهٔ این نیرو با وزن کتاب ($mg$) برابر است.

چون $\mathbf{g}$ در نقاط مختلف یکی نیست، وزن یک جسم ($\mathbf{W}$) هم در نقاط مختلف زمین فرق می‌کند. مثلاً وزن جسمی به جرم ۱٫۰۰ kg در نقطه‌ای با $g = ۹٫۸۰\ \mathrm{m/s^2}$ برابر با ۹٫۸۰ N است، اما همین جسم در جایی با $g = ۹٫۷۸\ \mathrm{m/s^2}$ وزنی برابر با ۹٫۷۸N دارد. اگر این دو وزن را با سنجش مقدار کشیدگی فنر تعیین کنیم، خواهیم دید که کشیدگیهای لازم برای متعادل کردن جسم ۱ کیلوگرمی در دو محل مختلف، کمی با هم تفاوت دارند. بنابراین، برخلاف جرم، که یک خاصیت ذاتی هر جسم است، وزن اجسام به موقعیت آنها نسبت به مرکز زمین بستگی دارد. چنانکه در بخش بعد می‌بینیم، ترازوهای فنری در نقاط مختلف روی زمین ممکن است مقادیر مختلفی نشان بدهند، اما ترازوهای وزنه‌ای (یا تعادلی) در تمام این نقاط یک مقدار نشان می‌دهند.

چون زمین به دور خودش می‌چرخد، سطح آن نمی‌تواند یک چارچوب مرجع لخت باشد. همهٔ چارچوبهای مرجع واقع برسطح زمین، در اثر چرخش، شتاب مرکزگرا دارند. شتاب سقوط آزادی که در این چارچوبِ نالخت می‌سنجیم، دست‌کم دو مؤلفه دارد: یکی ناشی از جاذبهٔ گرانشی زمین و دیگری ناشی از چرخش آن. اثرکوچکی که این چرخش برجا می‌گذارد آن است که شتاب سقوط آزاد از استوا (جایی‌که شتاب مرکزگرا بیشینه است) تا قطبها (جایی‌که شتاب مرکزگرا صفر است) در حدود ۰٫۳٪ تغییر کند. فعلاً از این اثر کوچک نالختی در وزن اجسام صرفنظر می‌کنیم، اما در فصل ۱۶ دوباره به آن برمی‌گردیم. در بخش ۶ـ۸ آثار دیگر نالختی چارچوبها بر اجسام را بررسی می‌کنیم.

در آن نواحی‌ای از فضا که آثار گرانشی وجود نداشته باشد وزن اجسام صفر می‌شود، اما خواصی که به جرم بستگی دارد، مثلاً مقاومت در برابر شتاب گرفتن تغییر نمی‌کند و مثل همان خواص در روی زمین است، در سفینه‌ای که فارغ از میدان گرانشی در فضا حرکت می‌کند، بلند کردن قطعهٔ بزرگی از سرب کار ساده‌ای است. ($W = ۰$)، اما اینجا هم اگر فضانوردی به این قطعه لگد بزند، شست پایش درد می‌گیرد ($m \neq ۰$).

برای شتاب دادن به اجسام در فضای تهی از گرانش همانقدر نیرو لازم است که در سطح بدون اصطکاکی روی زمین، چون‌که جرم اجسام در نقاط مختلف فرق نمی‌کند. اما نیروی لازم برای بالاکشیدن اجسام در مقابل جاذبهٔ گرانشی، در سطح زمین بیشتر است تا در نقطه‌ای که در فاصلهٔ زیادی از زمین واقع شده است، چون وزن اجسام در نقاط مختلف متفاوت است.

در هر نقطهٔ معین (که $g$ مقدار مشخصی دارد)، جرم و وزن با هم متناسب‌اند. مثلاً گاهی می‌نویسند "۲٫۲lb" = "۱kg"، که در آن، " = " یعنی "معادل است با". این تنها یک تناظر عددی است نه یک معادلهٔ واقعی. (زیرا در معادلات، دو کمیت با ابعاد متفاوت نمی‌توانند با هم برابر باشند!) مسئله تا حدی شبیه به آن است که بگوییم ۱ پرتقال " = " $x$ سیب: اگر صحبت بر سر قیمت باشد، $x$ یک مقدار دارد، و اگر بر سر حجم آبی باشد که در هر کدام هست، مقدار دیگری که کاملاً با اولی متفاوت است.

رابطهٔ بین جرم و وزن، تنها به‌ازای یک مقدار معین $g$ معتبر است، بنابراین باید این رابطه را با احتیاط به‌کار برد. در غیر این‌صورت ممکن است دچار سردرگمی یا حتی سردرد شوید. مثلاً، اگر روزگاری فضاپیمای خودتان را در ماه متوقف کردید و در یکی از رستورانهای مشهور آن، طبق عادت، یک همبرگر ربع پاوندی سفارش دادید، ممکن است ساندویچی به قطر تقریباً ۱ فوت نصیبتان شود (گرانش ماه در حدود یک ششم گرانش زمین است. در سطح ماه "۰٫۳۸lb" = "۱kg" است.) اگر همین سفارش را در سطح خورشید بدهید، همبرگری به دستتان می‌رسد که قطر آن به زحمت به ۱in می‌رسد، اما البته کاملاً مغز پخت شده است! (در خورشید، "۶۲lb" = "۱kg" است.) واضح

است که ما در واقع برحسب مقدار ماده (جرم) سفارش می‌دهیم، نه برحسب وزن. یک همبرگر ۱۰۰ گرمی (در حدود ۱/۴ پاوند روی زمین) در همه جای عالم دقیقاً یک اندازه دارد.

### بی‌وزنی

عکسهای فضانوردان در فضاپیماهای مدارگرد (مثلاً در شکل ۱۱)، آنها را در حالتی نشان می‌دهد که آزادانه شناورند؛ این حالت را معمولاً "بی‌وزنی" می‌نامند. اما بنابه تعریف ما از وزن، این فضانوردان به هیچ‌وجه بی‌وزن نیستند؛ در واقع، شاید وزن آنها فقط کمتر از ۱۰٪ نسبت به حالت عادی در سطح زمین کم شده باشد. این کاهش وزن هم به خاطر آن است که گرانش زمین با افزایش ارتفاع ضعیف‌تر می‌شود.

به دو دلیل است که گفته می‌شود این فضانوردها "بی‌وزن"اند: ۱. از دید ناظرهای خارجی، فضانوردان در حال سقوط آزاد به طرف مرکز زمین‌اند. اینکه ارتفاع آنها کم نمی‌شود تنها به این علت است که سرعت مماسی فضاپیما چنان تنظیم شده است که گرانش شتاب مرکزگرای لازم برای حرکت دایره‌ای یکنواخت را تأمین کند. ۲. چون خود سفینه هم عیناً مثل سرنشینانش سقوط می‌کند، "کف"ای در کار نیست که با فضانوردها در تماس باشد و آنها را متعادل نگه دارد.

احساس یا ادراک روانی ما از وزن، مربوط است به نیرویی که کفِ زمین بر ما وارد می‌کند. اگر در آب شناور باشیم، احساس می‌کنیم سبکتریم یعنی احساسمان از وزن کمتر می‌شود (اما از جرم باز هم احساس کاملی داریم؛ مثلاً وقتی بخواهیم با شنا کردن در آب شتاب بگیریم). اگر سوار بر آسانسوری باشیم، وقتی آسانسور به طرف بالا شتاب می‌گیرد حس می‌کنیم وزنمان زیاد می‌شود، و وقتی به طرف پایین شتاب می‌گیرد حس می‌کنیم وزنمان کم می‌شود. این اثر، که آن‌را در مثال ۷ بررسی خواهیم کرد، نتیجهٔ افزایش یا کاهش نیروی رو به بالایی است که کفِ آسانسور اعمال می‌کند.

بی‌وزنی واقعی تنها در اعماق فضا، در نقاطی که خیلی دور از هر ستاره یا سیاره‌ای باشند، حاصل می‌شود. فضانوردان در این نواحی، در فضاپیمایی که با موتور خاموش در حرکت باشد، آزادانه شناور می‌شوند. اگر فضاپیما حول محوری بچرخد، فضانوردانی که عمود بر محور چرخش روی سطح چرخانی ایستاده باشند، احساس "وزنِ مصنوعی" می‌کنند، چون‌که این سطح بایدِ فضانوردان را به بالا براند تا نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دایره‌ای آنها را تأمین کند. این نیروی رو به "بالا" (که از سطح به پای فضانوردان وارد می‌آید)، مثل وزن احساس می‌شود.

اگر از روی تخته پرش شیرجه برویم، یا از روی ترامپولین به هوا بپریم، در هوا در حالت سقوط آزاد خواهیم بود؛ سطحی وجود ندارد که به ما نیرو وارد کند، و خودمان را "بی‌وزن" احساس می‌کنیم. همین‌طور اگر در اتاقکی در نزدیکی سطح زمین در حال سقوط آزاد باشیم، و خود اتاقک هم در حال سقوطِ آزاد باشد، باز هم سطحی وجود ندارد که به ما نیرو وارد کند و احساس "بی‌وزنی" خواهیم کرد. در چنین حالتی، آزادانه در اتاقک شناور خواهیم بود. سه نمونه از چنین وضعیتی عبارت‌اند از: ۱. فضاپیمایی در مدار زمین که در بالا بررسی‌اش کردیم، ۲. اتاقک آسانسوری که کابل آن بریده است و دارد سقوط می‌کند، و ۳. هواپیمایی که روی مسیر سهموی معینی حرکت می‌کند. فرض کنید هواپیمایی دارد اوج می‌گیرد و در لحظهٔ معینی در حال بالا رفتن با سرعت $v_0$ در جهتی است که با سطح افقی زاویهٔ $\phi_0$ می‌سازد. اگر شما یکی از مسافران هواپیما باشید، و اگر خود هواپیما در آن لحظه ناگهان ناپدید شود، مسیر شما به شکل مسیرِ سهمی سقوط آزاد (معادلهٔ ۲۳ در فصل ۴) خواهد بود. اگر به جای اینکه هواپیما ناپدید شود، خلبان آن‌را در همین مسیر هدایت کند، هواپیما عملاً در حال سقوطِ آزاد خواهد بود و اجسام داخل آن در حالت "بی‌وزنی" شناور خواهند شد. در واقع از چنین سیستمی برای آموزش فضانوردان استفاده شده است، تا به حالت "بی‌وزنی" در فضاپیماهای مدارگرد عادت کنند. در هر یک از سه وضعیت بالا، وزن شما فقط به مقدار خیلی کمی نسبت به حالتی که روی زمین ایستاده‌اید تغییر می‌کند، اما درکار نبودن سطحی که به شما نیرو وارد کند موجب احساسِ "بی‌وزنی" می‌شود.

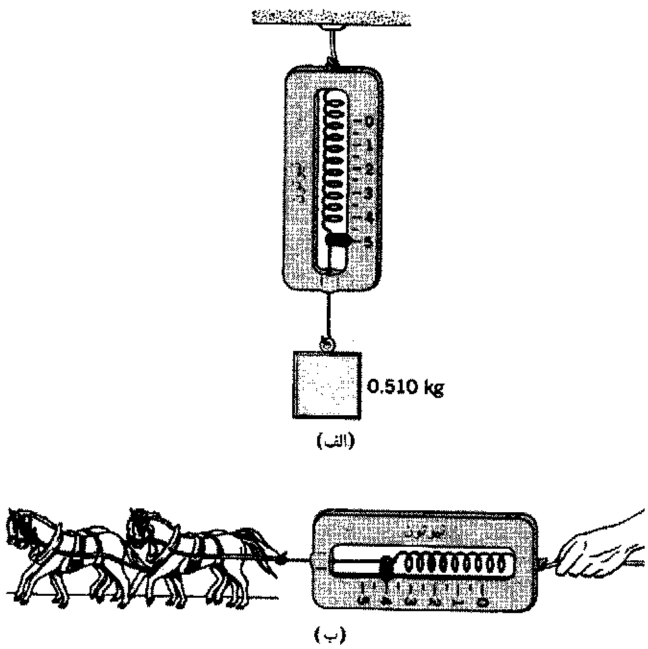
شکل ۱۱. فضانوردهای شاتل فضایی در یک حالتِ سقوط آزادند، و این شناوری آنها طوری به‌نظر می‌رسد که انگار بی‌وزن‌اند.

## ۵ـ۹ اندازه‌گیری نیرو

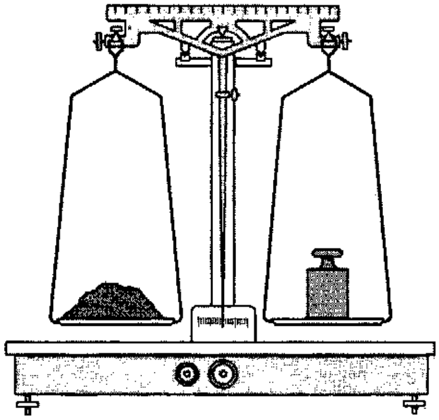
در بخش ۵ـ۳ نیرو را از طریق اندازه‌گیری شتابی که به یک جسمِ استاندارد در اثر کشیده شدن با فنر کسب می‌کند تعریف کردیم. این روش، که می‌توانیم آن‌را یک روشِ دینامیک برای سنجش نیرو بنامیم، اگرچه برای تعریف نیرو مناسب است، اما همیشه یک روش واقعاً عملی برای سنجش نیرو نیست. (سنجش مستقیم شتاب هم عموماً آسان نیست.) روش دیگر اندازه‌گیری نیرو مبتنی بر سنجش تغییر شکل یا تغییر اندازهٔ جسمی (مثلاً فنر) است که در حالتی که شتاب ندارد نیرو بر آن وارد می‌شود. این را می‌توانیم روشِ استاتیکِ سنجشِ نیروها بنامیم. اساس روش استاتیک این است که اگر جسمی تحت اثر چند نیرو

قرار بگیرد و شتاب آن صفر باشد، جمع برداری نیروهای وارد بر آن باید صفر باشد. و این البته همان قانون دوم نیوتون است. اگر فقط یک نیرو بر جسمی اثر کند به آن شتاب می‌دهد؛ برای اینکه این شتاب را صفر کنیم، می‌توانیم نیرویی به همان اندازه و در خلاف جهت نیروی اول به جسم وارد کنیم. در عمل کاری می‌کنیم که جسم در حالت سکون قرار بگیرد. اگر نیروی معینی را به عنوان نیروی یکه انتخاب کنیم، می‌توانیم نیرو را بسنجیم. مثلاً کشش زمین بر یک جسم استاندارد در یک نقطهٔ معین را می‌شود نیروی یکه اختیار کرد.

یکی از ابزارهای رایج سنجش نیرو ترازوی فنری است (شکل ۱۲). ترازوی فنری شامل یک فنر مارپیچی است که در یک سر آن شاخصی وجود دارد که روی مقیاس حرکت می‌کند. نیرویی که بر این ترازو وارد شود طول فنر را تغییر می‌دهد. اگر جسمی به وزن $۱٫۰۰\,\mathrm{N}$ ($m = ۰٫۱۰۲\,\mathrm{kg}$) در جایی که $g = ۹٫۸۰\,\mathrm{m/s^2}$ است) را از این ترازو بیاویزیم، فنر کشیده می‌شود تا نیرویی به اندازهٔ وزن جسم و در جهت مخالفِ وزن به آن وارد کند. در این نقطه نشانه‌ای می‌گذاریم و آن را با "نیروی $۱٫۰۰\,\mathrm{N}$ " برچسب می‌زنیم. حالا می‌توانیم همین کار را با وزنه‌های $۲٫۰۰\,\mathrm{N}$، $۳٫۰۰\,\mathrm{N}$ و غیره را تکرار کنیم و نشانه‌های متناظر با این نیروها را روی ترازو مشخص کنیم. به این ترتیب، فنر مدرج می‌شود. فرض بر این است که نیروهایی که فنر را تا نقطهٔ یکسانی بکشند، یکسان‌اند. حالا می‌شود این ترازوی مدرج را، به روش شکل ۱۲ب




شکل۱۲. (الف) برای مدرج کردن ترازوی فنری، در نقطه‌ای با $g$ معین، جرم معلومی به آن می‌آویزیم و نیروی متناظر با آن جرم را علامتگذاری می‌کنیم. در شکل، جرم $۰٫۵۱۰\,\mathrm{kg}$، به‌ازای $g = ۹٫۸\,\mathrm{m/s^2}$، متناظر با نیروی $۵٫۰۰\,\mathrm{N}$ است. (ب) ترازوی مدرج را می‌توانیم برای سنجش نیروهای مجهول به‌کار ببریم. اساس کار همهٔ ترازوهای فنری ـــ مثلاً ترازوهای ادارهٔ پست، ترازوهای یک کفه‌ای فروشگاهها، و ترازوهای حمام ـــ همین است.



شکل۱۳. ترازوی دوکفه‌ای با بازوهای هم‌طول، که جهتهای مختلف را از طریق توزین آنها با هم مقایسه می‌کند.

برای سنجش هر نیروی مجهولی (نه الزاماً کشش زمین بر اجسام) به کار برد.

استفاده از ترازوهای دوکفه‌ای با بازوهای هم‌طول (شکل ۱۳)، روش استاتیک دیگری برای سنجش نیروهاست. رایج‌ترین کاربرد عملی این روش، مقایسهٔ وزنهای معلوم و مجهول است؛ وقتی بازوها متعادل می‌شوند یعنی وزن اجسامِ دو طرف یکی است. به‌علاوه، چون $g$ برای هر دو بازوی ترازو یکی است، برابری وزنها به معنی برابری جرمهاست. بنابراین، ترازوی دوکفه‌ای با سنجش وزن اجسام در واقع برابری نسبی جرمهای آنها را تعیین می‌کند. (وزنه‌های معلوم این ترازوها را معمولاً با جرمشان برحسب گرم مشخص می‌کنند.) این سیستم در هر مقدار $g$، جز صفر، کار می‌کند؛ ترازوی دوکفه‌ای با بازوهای هم‌طول را می‌شود، به همان خوبی زمین، برای مقایسهٔ جرم اجسام در کرهٔ ماه هم به‌کار برد. اما در فضای بدون گرانش، یا در بی‌وزنی نسبی در مدارهای زمین، چنین ترازویی به‌درد نمی‌خورد.

## ۵ـ۱۰ کاربردهای قوانین نیوتون

هر مسئله‌ای که قرار است با استفاده از قوانین نیوتون حل شود رهیافت خاص خود را می‌طلبد، اما چند قاعدهٔ عمومی وجود دارد که برای راه‌اندازی حل همهٔ انواع این مسائل به‌کار می‌رود. در این بخش، این قواعد را معرفی می‌کنیم و کاربردشان را با چندین مثال نشان می‌دهیم. بهترین راه یادگیری این قواعد، مطالعهٔ مثالهاست.

مراحل اساسی در کاربرد قوانین نیوتون اینها هستند: ۱. جسمی را که می‌خواهید وضعیتش را تحلیل کنید خوب مشخص کنید. گاهی ممکن است دو یا چند جسم مورد نظر باشند؛ در این صورت معمولاً هر یک را باید جداگانه بررسی کرد. ۲. محیطی را که نیروها از آن به جسم وارد می‌شوند ـــ سطوح، اشیای دیگر، زمین، فنر، ریسمان، و مانند آن ـــ شناسایی کنید. ۳. یک چارچوب مرجع لخت (بدون شتاب) مناسب انتخاب کنید. ۴. یک دستگاه مختصات مناسب (در

چارچوب مرجعی که انتخاب کرده‌اید) مشخص کنید؛ مبدأ و جهت محورها را چنان انتخاب کنید که مسئله را تا حد ممکن ساده کند. اگر دقت کافی داشته باشید، می‌توانید برای هر جزئی از یک مسئلهٔ پیچیده دستگاه مختصات جداگانه‌ای به‌کار ببرید. ۵. نمودار جسم‌ـآزادی رسم کنید و در آن هر جسم را به شکل یک ذره، همراه با همهٔ نیروهای وارد بر آن، نمایش بدهید. ۶. حالا می‌توانید قانون دوم نیوتون را برای همهٔ مؤلفه‌های نیرو و شتاب به‌کار بگیرید.

در مثالهای زیر، فرضهایی می‌کنیم که مسئله را ساده می‌کنند، اما در مقابل بخشی از واقعیت فیزیکی را از دست می‌دهیم. اجسام را مثل ذره در نظر می‌گیریم، به این ترتیب همهٔ نیروهای وارد بر جسم مورد نظر در یک نقطه اثر می‌کنند. همهٔ حرکات را بدون اصطکاک فرض می‌کنیم. فرض می‌کنیم که همهٔ ریسمانها بدون جرم‌اند (برای شتاب دادن به آنها نیرویی لازم نیست) و تغییر طول نمی‌دهند (یعنی کشیده نمی‌شوند؛ بنابراین، اجسامی که حرکت خطی دارند و با ریسمان کشیده به هم متصل‌اند، سرعت و شتاب یکسان دارند). قرقره‌ها بدون جرم‌اند (نیرویی برای چرخاندنشان لازم نیست) و محورشان هم بدون اصطکاک است. همهٔ اجسام صلب‌اند (زیر بار تغییر شکل نمی‌دهند و نیرو آناً در آنها منتقل می‌شود). مثالهای زیر، با وجود این ساده‌سازیها، دید خوبی از روشهای اساسی تحلیل دینامیکی به‌دست می‌دهند. بعداً در همین کتاب عوامل روشهای جدیدی را مطرح می‌کنیم که به کمک آنها می‌توانیم وضعیتهای فیزیکی را به شکل واقعی‌تری تحلیل کنیم. مثلاً، در فصل ۶ نیروی اصطکاک را در تحلیل مسئله می‌گنجانیم، و در فصل ۱۲ نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان جرم قرقره و اصطکاک محور آن‌را وارد مسئله کرد. فعلاً از این آثار، که می‌دانیم مهم‌اند، چشم می‌پوشیم تا بهتر بتوانیم روی روشهای اساسی‌تر مورد استفاده در حل مسائل تأکید کنیم.

در مثال زیر، کشش $T$ را معرفی می‌کنیم، نیرویی که ریسمان با آن اجسام متصل به خود را می‌کشد. در ریسمانهایی که ضخامتشان ناچیز است، جهت کشش همواره باید با خود ریسمان موازی باشد. (این گفته، چنانکه در فصل ۱۴ خواهیم دید، در مورد تیرهای کلفت و سخت درست نیست.) در ریسمانهایی که جرمشان ناچیز است، کشش به‌طور یکنواخت در طول ریسمان منتقل می‌شود، یعنی در دو سر ریسمان یکسان است.

از دید میکروسکوپیکی، هر جزء از ریسمان جزء مجاور خود را می‌کشد (و خودش هم، طبق قانون سوم نیوتون، توسط آن کشیده می‌شود). به این ترتیب است که نیروی کشش از یک سر ریسمان به جسمی که به سر دیگر آن متصل است منتقل می‌شود. بر جزء $i$ ریسمان، یک کشش $T$ در یک جهت وارد می‌شود که ناشی از جزء $i-1$ است، و یک کشش $T$ برابر با قبلی و در خلاف جهت آن که ناشی از جزء $i+1$ است. اگر ریسمان را در نقطه‌ای دلبخواه ببریم و به محل برش یک نیروسنج فنری ببندیم (که به روش بخش ۵ـ۹ مدرج شده است)، نیروسنج مستقیماً کشش $T$ را نشان خواهد داد.

---

**مثال ۴.** شکل ۱۴الف قطعه‌ای به جرم $m = ۱۵٫۰\,\text{kg}$ را نشان می‌دهد که با سه ریسمان نگه داشته شده است. کشش هر سه ریسمان را پیدا کنید.

حل: گرهٔ محل تلاقی سه ریسمان را به عنوان "جسم" در نظر می‌گیریم. شکل ۱۴ب نمودار جسم‌ـآزاد گره را نشان می‌دهد، که تحت اثر سه نیروی $T_A$، $T_B$، و $T_C$ (کشش ریسمانها) در حالت سکون است. (فرض کرده‌ایم که گره هم، مثل خود ریسمانها، بی‌جرم است؛ بنابراین وزن آن وارد نمودار نمی‌شود.) محورهای $x$ و $y$ را مثل شکل ۱۴ب انتخاب می‌کنیم؛ به این ترتیب، می‌توانیم نیروها را به مؤلفه‌های $x$ و $y$ تجزیه کنیم. مؤلفه‌های شتاب صفرند، بنابراین،

مؤلفهٔ $x$: $$\sum F_x = T_{Ax} + T_{Bx} = ma_x = ۰$$

مؤلفهٔ $y$: $$\sum F_y = T_{Ay} + T_{By} + T_{Cy} = ma_y = ۰$$

از شکل ۱۴ب دیده می‌شود که

$$T_{Ax} = -T_A \cos ۳۰^\circ = -۰٫۸۶۶ T_A$$
$$T_{Ay} = T_A \sin ۳۰^\circ = ۰٫۵۰۰ T_A$$
$$T_{Bx} = T_B \cos ۴۵^\circ = ۰٫۷۰۷ T_B$$
$$T_{By} = T_B \sin ۴۵^\circ = ۰٫۷۰۷ T_B$$

و

$$T_{Cx} = ۰$$
$$T_{Cy} = -T_C$$

در ادامه، نمودار جسم‌ـآزاد خود جرم $m$ را بررسی می‌کنیم؛ شکل ۱۴ج. فقط مؤلفهٔ $y$ وارد می‌شود، و باز هم شتاب صفر است:

$$T_{Cy} - mg = ma_y = ۰$$

چون $T_C$ فقط مؤلفهٔ $y$ دارد، می‌شود نوشت

$$T_C = mg = (۱۵٫۰\,\text{kg})(۹٫۸۰\,\text{m/s}^۲) = ۱۴۷\text{N}$$

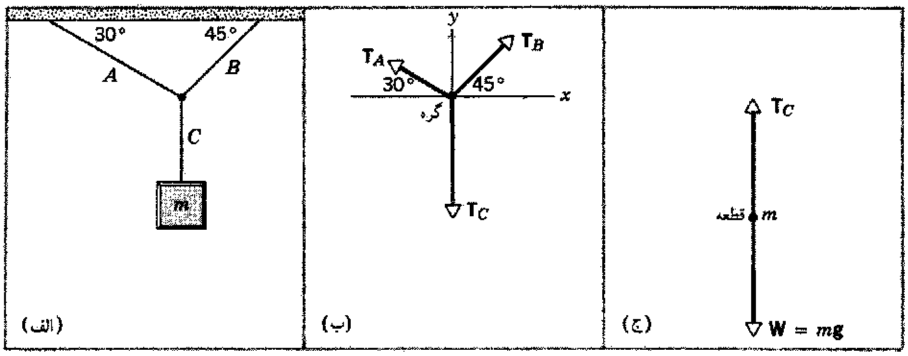
حالا می‌توانیم معادلات مربوط به مؤلفه‌های $x$ و $y$ نیروهای وارد بر گره را چنین بازنویسی کنیم:

مؤلفهٔ $x$: $$-۰٫۸۶۶ T_A + ۰٫۷۰۷ T_B = ۰$$

مؤلفهٔ $y$: $$۰٫۵۰۰ T_A + ۰٫۷۰۷ T_B - T_C = ۰$$

مقدار به‌دست آمده برای $T_C$ را در جای $T_C$ قرار می‌دهیم و دو معادله را حل می‌کنیم. نتیجه می‌شود که

$$T_A = ۱۰۸\text{N}$$
$$T_B = ۱۳۲\text{N}$$




شکل۱۴. مثال ۴. (الف) قطعه‌ای از سه ریسمان $A$، $B$، و $C$ آویزان است. (ب) نمودار جسم‌ـآزاد گره‌ای که سه ریسمان را به هم متصل می‌کند. (ج) نمودار جسم‌ـآزادِ قطعه.

این نتایج را امتحان کنید (درهمهٔ مسائل این کار را بکنید) تا ببینید که جمع برداری این سه نیرو واقعاً صفر است.

---

در مثال بعد، یک نیروی دیگر را معرفی می‌کنیم: نیروی عمود بر سطح $N$ که سطوح بر اجسام وارد می‌کنند. کتاب روی میز شکل ۸ را در نظر بگیرید. زمین نیرویی رو به پایین به کتاب وارد می‌کند (وزن کتاب)، اما کتاب در حالت تعادل است، پس براَیند نیروهای وارد بر آن باید صفر باشد. نیروی دیگری که بر کتاب وارد می‌شود نیروی رو به بالایی است که میز وارد می‌کند ($\mathbf{F}_{BT}$ در شکل ۸). در عمل، این نیرو است که کتاب را روی سطح میز نگه می‌دارد. اگر اصطکاک نباشد، سطوح فقط می‌توانند نیروی عمودی اعمال کنند، یعنی فقط نیروهایی که بر سطح عمود باشند. (توجه کنید که کتاب هم نیرویی رو به پایین بر میز وارد می‌کند.)

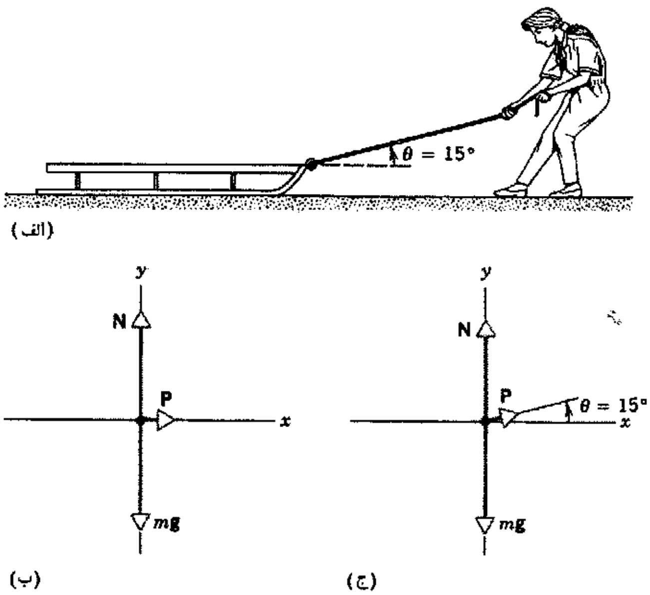
اگر دستمان را روی کتاب بگذاریم و آن‌را، با نیروی $P$، به پایین فشار بدهیم نیروی عمودی سطح میز بر کتاب هم باید افزایش پیدا کند تا در این حالت برابر با مجموع وزن کتاب و نیروی $P$ شود. اگر $P$ به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، به حالتی می‌رسیم که میز دیگر نمی‌تواند نیروی عمودی کافی به طرف بالا تأمین کند، و کتاب میز را می‌شکند.

کشش و نیروی عمود بر سطح نمونه‌هایی از نیروهای تماسی‌اند؛ نیرویی که جسمی که با جسم دیگر در تماس است، از طریق همین تماس، بر آن وارد می‌کند. منشأ این نیروها اتمهای اجسام‌اند، که هر یک نیرویی بر اتم مجاور وارد می‌کند. نیروهای تماسی تا وقتی تأمین می‌شوند که از نیروهای بین اتمی بزرگتر نشوند؛ در غیر این‌صورت پیوند بین اتمها می‌شکند، و ریسمان پاره می‌شود یا سطح چند تکه می‌شود.

---

**مثال ۵.** سورتمه‌ای به جرم $m = ۷٫۵\mathrm{kg}$ روی سطحی بدون اصطکاک به‌وسیلهٔ ریسمانی کشیده می‌شود (شکل ۱۵). نیروی ثابت $P = ۲۱٫۰\mathrm{N}$ به ریسمان اعمال می‌شود. حرکت را در حالتی که (الف) ریسمان افقی است و (ب) ریسمان با سطح افقی زاویهٔ $\theta = ۱۵°$ می‌سازد، تحلیل کنید.

حل: (الف) نمودار جسم‌ـآزاد با ریسمان افقی در شکل ۱۵ب




شکل۱۵. مثال ۵. (الف) سورتمه‌ای روی سطح افقی بدون اصطکاکی کشیده می‌شود. (ب) نمودار جسم‌ـآزاد سورتمه در حالت $\theta = ۰°$. (ج) نمودار جسم‌ـآزاد سورتمه در حالت $\theta = ۱۵°$.

آمده است. سطح یک نیروی نیروی عمودی $N$ بر سورتمه وارد می‌کند. نیروها را به مؤلفه‌هایشان تجزیه می‌کنیم و قانون دوم نیوتون را به‌کار می‌بریم:

$$\text{مؤلفهٔ } x: \quad \sum F_x = P = ma_x$$
$$\text{مؤلفهٔ } y: \quad \sum F_y = N - mg = ma_y$$

اگر قرار باشد حرکت عمودی‌ای نداشته باشیم، سورتمه روی سطح می‌ماند و $a_y = ۰$ است، بنابراین

$$N = mg = (۷٫۵\mathrm{kg})(۹٫۸۰\mathrm{m/s^۲}) = ۷۴\mathrm{N}$$

شتاب افقی برابر است با

$$a_x = \frac{P}{m} = \frac{۲۱٫۰\mathrm{N}}{۷٫۵\mathrm{kg}} = ۲٫۸۰\mathrm{m/s^۲}$$

توجه کنید که اگر سطح واقعاً بدون اصطکاک باشد (چنانکه ما فرض کرده‌ایم)، شخص نمی‌تواند به مدت زیادی این نیرو را به سورتمه اعمال کند. سورتمه، بعد از ۳۰s حرکت با این شتاب، سرعتی برابر با ۸۴m/s یا ۱۸۸mi/h پیدا می‌کند.

(ب) اگر نیروی کشش افقی نباشد، نمودار جسم‌ـآزاد به‌صورت شکل ۱۵ج است، و معادلات مربوط به این حالت، به شکل زیرند:

$$\sum F_x = P\ \cos\ \theta = ma_x \qquad :x \text{ مؤلفهٔ}$$
$$\sum F_y = N + P\ \sin\ \theta - mg = ma_y \qquad :y \text{ مؤلفهٔ}$$

فعلاً فرض می‌کنیم که سورتمه روی سطح می‌ماند؛ یعنی $a_y = ۰$ است. پس

$$N = mg - P\ \sin\ \theta = ۷۴\mathrm{N} - (۲۱٫۰\mathrm{N})(\sin\ ۱۵°)$$
$$= ۶۹\mathrm{N}$$
$$a_x = \frac{P\ \cos\ \theta}{m} = \frac{(۲۱٫۰\mathrm{N})(\cos\ ۱۵°)}{۷٫۵\mathrm{kg}} = ۲٫۷۰\,\mathrm{m/s^۲}$$

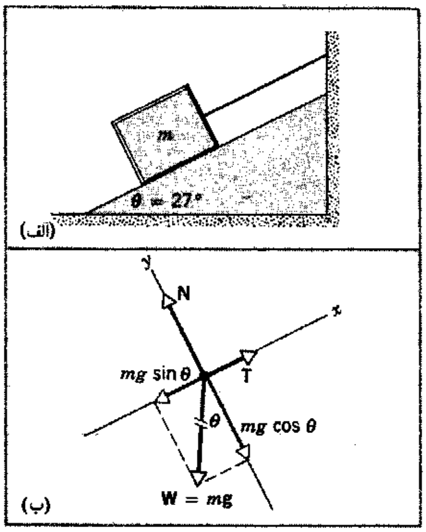
نیروی عمود بر سطح، همواره بر سطح تماس عمود است؛ با مختصاتی که در شکل ۱۵ب انتخاب کرده‌ایم، $N$ باید مثبت باشد. اگر $P\ \sin\ \theta$ را زیاد کنیم $N$ کم می‌شود و سرانجام، در نقطه‌ای، صفر می‌شود. در این نقطه سورتمه، تحت تأثیر مؤلفهٔ رو به بالای $P$، از سطح جدا می‌شود و باید حرکت عمودی آن‌را هم تحلیل کنیم. برای این مقادیر $P$ و $\theta$ که ما به کار بردیم، سورتمه روی سطح باقی می‌ماند و $a_y = ۰$ است.

مثال ۶. قطعه‌ای به جرم $m = ۱۸٫۰\mathrm{kg}$ به کمک ریسمانی روی سطح بدون اصطکاکی که شیب ۲۷° دارد نگه داشته شده است (شکل ۱۶الف). (الف) کشش ریسمان و نیروی عمود بر سطحی را که سطح بر قطعه وارد می‌کند پیدا کنید. (ب) فرض کنید ریسمان پاره می‌شود و حرکت بعدی را توصیف کنید.

حل: (الف) نمودار جسم‌ـآزاد قطعه در شکل ۱۶ب آمده است. نیروهای مؤثر بر قطعه عبارت‌اند از نیروی عمودی $N$، وزن $W = mg$ قطعه، و کشش $T$ ریسمان، دستگاه مختصاتی انتخاب می‌کنیم که محور $x$ آن موازی با سطح، و محور $y$ آن عمود بر سطح باشد. با این انتخاب، دو تا از نیروها ($T$ و $N$) خودبه‌خود به مؤلفه‌هایشان تجزیه شده‌اند، و حرکتی که روی سطح انجام می‌شود هم یک‌بعدی است.

در حالت استاتیک شتابی وجود ندارد و مجموع نیروها باید صفر باشد. وزن به مؤلفه‌های $x$ $(-mg\sin\ \theta)$ و $y$ $(-mg\cos\ \theta)$ تجزیه می‌شود و معادلات نیرو چنین‌اند

$$\sum F_x = T - mg\sin\ \theta = ma_x = ۰ \qquad :x \text{ مؤلفهٔ}$$
$$\sum F_y = N - mg\cos\ \theta = ma_y = ۰ \qquad :y \text{ مؤلفهٔ}$$




شکل ۱۶. مثال ۶. (الف) جرم $m$ به کمک ریسمانی روی سطح شیبداری، در حالت سکون نگه داشته شده است. (ب) نمودار جسم‌ـآزاد $m$، دقت کنید که دستگاه مختصات $xy$ را مایل گرفته‌ایم تا محور $x$ با سطح موازی باشد. وزن $mg$ را به مؤلفه‌ها تجزیه کرده‌ایم.

این معادلات را امتحان کنید. آیا معقول‌اند؟ در حد $\theta = ۰°$ چه می‌شود؟ به نظر می‌رسد که کشش صفر می‌شود. آیا انتظار دارید که کشش برای قطعه‌ای که روی یک سطح افقی ساکن است صفر باشد؟ در حالت $\theta = ۰°$، نیروی عمود بر سطح چه می‌شود؟ آیا معقول است؟ $T$ و $N$، در حد $\theta = ۹۰°$ چه می‌شوند؟ باید عادت کنید که، پیش از آغاز عملیات جبری برای حل مسئله، چنین پرسشهایی از خودتان بکنید. اگر اشتباهی شده باشد، حالا بهترین زمانِ یافتن و تصحیح آن است.

معادلات را حل می‌کنیم:

$$T = mg\sin\ \theta = (۱۸٫۰\mathrm{kg})(۹٫۸۰\,\mathrm{m/s^۲})(\sin\ ۲۷°)$$
$$= ۸۰\mathrm{N}$$
$$N = mg\cos\ \theta = (۱۸٫۰\mathrm{kg})(۹٫۸۰\,\mathrm{m/s^۲})(\cos\ ۲۷°)$$
$$= ۱۵۷\mathrm{N}$$

(ب) اگر ریسمان پاره شود، کشش از معادلات حذف می‌شود و قطعهٔ دیگر در حالت تعادل نخواهد بود. در این حالت قانون دوم نیوتون می‌گوید که:

$$\sum F_x = -mg\sin\ \theta = ma_x \qquad :x \text{ مؤلفهٔ}$$
$$\sum F_y = N - mg\cos\ \theta = ma_y \qquad :y \text{ مؤلفهٔ}$$

بریدن ریسمان حرکت در راستای $y$ را تغییر نمی‌دهد (قطعه از سطح به بالا نمی‌پرد!) پس اینجا هم $a_y = ۰$ است، و نیروی عمود بر سطح

هم برابر است با $mg\cos\,\theta$، یا ۱۵۷N. در جهت $x$ خواهیم داشت

$$a_x = -g\sin\,\theta = -(۹٫۸۰\,\mathrm{m/s^۲})(\sin ۲۷°)$$
$$= -۴٫۴۵\,\mathrm{m/s^۲}$$

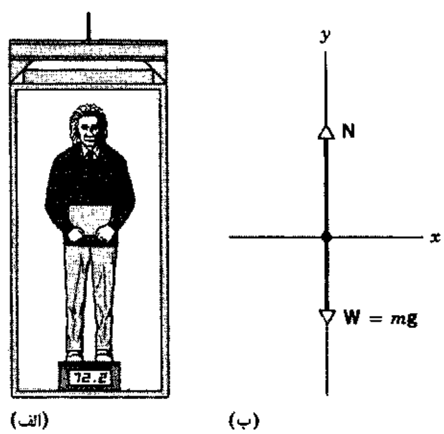
علامت منفی نشان می‌دهد که قطعه در جهت منفی $x$، یعنی به طرف پایین سطح، حرکت می‌کند. حالتهای حدی $\theta = ۰°$ و $\theta = ۹۰°$ را بررسی کنید. آیا اینها با انتظارات شما سازگارند؟

مثال ۷. شخصی به جرم ۷۲٫۲kg، در آسانسوری روی یک ترازوی یک‌کفه‌ای ایستاده است شکل (۱۷الف). در حالتی که اتاقک آسانسور (الف) با سرعت ثابت پایین می‌آید و (ب) با شتاب ۳٫۲۰m/s² بالا می‌رود، ترازو چه مقداری را نشان می‌دهد؟

حل: ابتدا نتیجه‌ای عام برای مقادیر دلبخواه شتاب عمودی $a$ به‌دست می‌آوریم. چارچوب مرجع لخت خود را خارج از آسانسور می‌گیریم (مثلاً چاه آسانسورِ ساختمان)، زیرا آسانسور شتابدار چارچوب مرجع لختی نیست. هم $g$ و هم $a$ را ناظر می‌سنجد که در این چارچوب خارجی است. شکل ۱۷ ب نمودار جسم‌ـآزاد شخص را نشان می‌دهد. نیروهای دخیل در مسئله عبارت‌اند از نیروی رو به پایین وزن و نیروی رو به بالای عمود بر سطح که ترازو اعمال می‌کند. نیروی عمود بر سطح از طرف ترازو بر شخص وارد می‌شود؛ ترازو نیروی رو به پایینی را نشان می‌دهد که از طرف شخص بر ترازو وارد می‌شود. طبق قانون سوم نیوتون، اندازهٔ این دو نیرو یکی است. بنابراین، اگر نیروی عمود بر سطح را تعیین کنیم، مقداری که ترازو نشان می‌دهد به‌دست می‌آید.

از نمودار جسم‌ـآزاد داریم

$$\sum F_y = N - mg = ma$$




شکل ۱۷. مثال ۱۷. (الف) شخصی در آسانسور روی ترازو ایستاده است. (ب) نمودار جسم‌ـآزاد شخص. اندازهٔ نیروی عمود بر سطح $N$، که ترازو آن‌را وارد می‌کند، همان مقداری است که ترازو نشان می‌دهد. (ترازوهای تجارتی از این نوع را برحسب کیلوگرم مدرج می‌کنند نه نیوتون.)

یا

$$N = m(g + a)$$

اگر $a = ۰$ باشد، یعنی آسانسور ساکن باشد یا، مثل قسمت (الف)، با سرعت ثابت حرکت کند، نتیجه می‌شود که

$$N = mg = (۷۲٫۲\mathrm{kg})(۹٫۸۰\,\mathrm{m/s^۲}) = ۷۰۸\mathrm{N}(= ۱۵۹\mathrm{lb})$$

اگر $a = ۳٫۲۰\,\mathrm{m/s^۲}$ باشد، قسمت (ب)، نتیجه می‌شود که

$$N = m(g + a) = (۷۲٫۲\mathrm{kg})(۹٫۸۰\,\mathrm{m/s^۲} + ۳٫۲۰\,\mathrm{m/s^۲})$$
$$= ۹۳۹\mathrm{N}(= ۲۱۱\ \mathrm{lb})$$

مقداری که ترازو نشان می‌دهد، یعنی نیروی عمودی کف بر شخص، هنگامی که آسانسور شتاب رو به بالا دارد ($a$ در دستگاه مختصاتی که تعریف کردیم مثبت است) بیشتر می‌شود، و هنگامی که آسانسور شتاب رو به پایین دارد کمتر می‌شود. در سقوط آزاد ($a = -g$) ترازو صفر را نشان می‌دهد (نیروی عمود بر سطح صفر است).

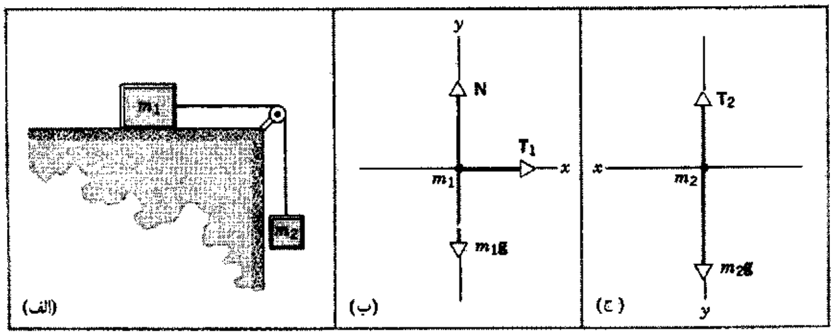
## ۵ـ۱۱ کاربردهای دیگری از قوانین نیوتون

در اینجا چند کاربرد دیگر قوانین نیوتون را بررسی می‌کنیم. در این مثالها چند جسم وجود دارند که باید آنها را تک‌تک تحلیل کرد، اما این اجسام کاملاً مستقل از هم نیستند زیرا حرکت یک جسم مقید به حرکت جسمی دیگر است، مثل حالتی که دو جسم با ریسمانی به طول ثابت به هم بسته شده‌اند. این مثالها را مطالعه کنید، و توجه کنید که برای هر جسم دستگاه مختصات جداگانه‌ای انتخاب شده است.

مثال ۸. شکل ۱۸الف قطعه‌ای به جرم $m_۱$ را نشان می‌دهد که روی سطح افقی بدون اصطکاکی واقع شده است. این قطعه توسط ریسمانی به جرم ناچیز که به قطعهٔ آویزانی به جرم $m_۲$ متصل است کشیده می‌شود. ریسمان از روی قرقره‌ای می‌گذرد که جرم آن قابل چشمپوشی است و محور آن هم با اصطکاکی ناچیز می‌چرخد. کشش ریسمان و شتاب قطعات را پیدا کنید.

حل: در این مسئله دو جسم دخیل است؛ بر خلاف مسائل قبلی‌ای که در آنها و تنها یک جسم مورد نظر بود. شکلهای ۱۸ب و ۱۸ج نمودار جسم‌ـآزاد این دو جسم مجزا را نشان می‌دهند. لزومی ندارد که برای هر دو جسم دستگاه مختصات یکسانی به‌کار بریم، تا جایی‌که در هر زیرسیستم به‌طور سازگار عمل کنیم، مهم نیست که محورهای مختصات هر بخش را چگونه تعریف می‌کنیم.

نیروهای وارد بر قطعهٔ ۱ عبارت‌اند از نیروی عمودی $N$، وزن، و کشش ریسمان. چون انتظار داریم که قطعهٔ ۱ به‌طرف راست شتاب بگیرد، این جهت را جهت مثبت $x$ می‌گیریم. همچنین انتظار داریم




شکل۱۸. مثال ۸. (الف) ریسمانی قطعهٔ $m_1$ را روی سطح افقی صافی می‌کشد. ریسمان از روی قرقره‌ای می‌گذرد و به قطعهٔ $m_2$ متصل است. (ب) نمودار جسم‌ـآزاد قطعهٔ $m_1$. (ج) نمودار جسم‌ـآزاد قطعهٔ $m_2$.

که قطعهٔ ۱ روی سطح افقی باقی بماند؛ بنابراین، مؤلفهٔ $y$ شتاب آن صفر است. به این ترتیب، معادلات مؤلفه‌ای قانون دوم نیوتون به این شکل در می‌آیند:

$$\sum F_x = T_1 = m_1 a_{1x} \qquad \text{:}x\ \text{مؤلفهٔ}$$
$$\sum F_y = N - m_1 g = m_1 a_{1y} = 0 \qquad \text{:}y\ \text{مؤلفهٔ}$$

برای قطعهٔ ۲، محور $y$ را عمودی و رو به پایین می‌گیریم، یعنی در همان جهتی که انتظار داریم جهت شتابِ قطعهٔ ۲ باشد. برای این قطعه لازم نیست که مؤلفهٔ $x$ را بررسی کنیم، و مؤلفهٔ $y$ قانون دوم نیوتون نتیجه می‌دهد که

$$\sum F_y = m_2 g - T_2 = m_2 a_{2y}$$

ریسمان را بی‌جرم فرض کردیم، پس نیروی خالص وارد بر آن باید صفر باشد. کششهای $T_1$ و $T_2$ که از ریسمان بر قطعات وارد می‌شوند عکس‌العملهای $T_1$ و $T_2$ را دارند، که اندازه‌شان با دو نیروی اول برابر است، و نیروهایی هستند که قطعات بر ریسمان وارد می‌کنند. اگر ریسمان راست می‌بود، صفر شدن نیروی خالص وارد بر آن نتیجه می‌داد که $T_1 = T_2$. وجود قرقره ایده‌آل (بدون جرم و بدون اصطکاک) که جهت کشش ریسمان را عوض می‌کند هم تغییری در این نتیجه نمی‌دهد: اندازهٔ کشش در تمام طول ریسمان ثابت است. این کشش مشترک را با متغیر $T$ نشان می‌دهیم.

اگر ریسمان تغییر طول هم نتواند بدهد (یعنی کشیده نشود)، هر حرکت قطعهٔ ۱ در جهت $x$ دقیقاً متناظر با همان حرکت قطعهٔ ۲ در جهت $y$ است. در نتیجه، شتاب دو قطعه یکی است. این شتاب مشترک را $a$ می‌نامیم. حالا سه معادله داریم:

$$T = m_1 a$$
$$N = m_1 g$$

و

$$m_2 g - T = m_2 a$$

از حل معادلات اول و سوم نتیجه می‌شود که

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g \qquad (۵)$$

و

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \qquad (۶)$$

بررسی حالات حدی این نتایج مفیداست. اگر $m_1$ صفر شود چه می‌شود؟ انتظار داریم که ریسمان شل شود ($T = 0$) و $m_2$ سقوطِ آزاد می‌کند ($a = g$). معادلات هم، به درستی، همین را پیش‌بینی می‌کنند. اگر $m_2$ صفر باشد، نیروی افقی‌ای بر قطعهٔ ۱ وارد نمی‌شود و این قطعه شتاب نمی‌گیرد؛ اینجا هم، معادلات ما نتیجهٔ درست می‌دهند.

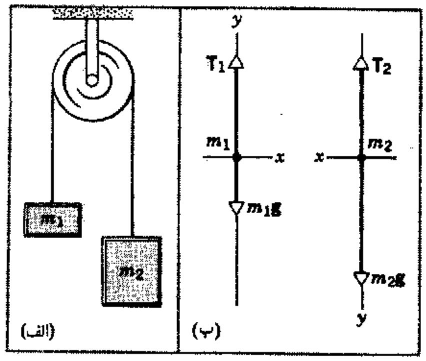
توجه کنید که، همان‌طور که انتظار می‌رود، $a < g$ است. همچنین دقت کنید که $T$ با $m_2 g$ برابر نیست. تنها اگر قطعهٔ ۲ در حالت تعادل آویزان باشد ($a = 0$) است که $T = m_2 g$ می‌شود. اگر قطعهٔ ۲ به‌طرف پایین شتاب داشته باشد، $T < m_2 g$ می‌شود؛ اگر قطعه به طرف بالا شتاب داشته باشد، $T > m_2 g$ می‌شود.

آیا معادلات ۵ و ۶ در حد $g = 0$ هم نتیجهٔ درست می‌دهند؟

**مثال ۹.** دو جرم نامساوی را در نظر بگیرید که با ریسمانی که از روی قرقره‌ای می‌گذرد به هم متصل‌اند (شکل ۱۹). قرقره ایده‌آل است (جرم آن ناچیز است و با اصطکاک ناچیزی حول محورش می‌چرخد). این دستگاه را ماشین آتوود[1] هم می‌نامند. فرض کنید که $m_2$ بزرگتر از $m_1$ باشد. کشش ریسمان و شتاب جرمها را پیدا کنید.

حل: چون پیش‌بینی می‌کنیم که جرمها فقط شتاب عمودی داشته باشند، جهت مثبت $y$ را، برای هر جرم، جهت حرکت آن

۱. جرج آتوود (۱۷۴۵ تا ۱۸۰۷) یک ریاضیدان انگلیسی بود که در سال ۱۷۸۴ این ابزار را برای نمایش قوانین حرکت شتابدار و سنجش $g$ اختراع کرد. او با کوچک کردن اختلاف میان $m_1$ و $m_2$ می‌توانست آثار سقوط آزاد را "کند کند" و زمان حرکت وزنهٔ افتان را با یک ساعت آونگ‌دار اندازه بگیرد؛ ساعت آونگ‌دار دقیقترین ابزاری بود که آتوود در آن زمان برای سنجش بازه‌های زمانی در اختیار داشت.




شکل۱۹. مثال ۹. (الف) نمودار ماشین آتوود، شامل دو جرم آویزان که با ریسمانی به هم متصل‌اند که از روی قرقره‌ای می‌گذرد. (ب) نمایش جسم‌ـآزاد $m_۱$ و $m_۲$.

می‌گیریم. کافی است که مؤلفه‌های $y$ را بررسی کنیم. شکل ۱۹ب نمودارهای جسم‌ـآزاد را نشان می‌دهد. معادلات حرکت عبارت‌اند از

$$\sum F_y = T_۱ - m_۱ g = m_۱ a_۱ \qquad \text{قطعهٔ ۱:}$$

$$\sum F_y = m_۲ g - T_۲ = m_۲ a_۲ \qquad \text{قطعهٔ ۲:}$$

که در آن $a_۱$، $a_۲$، به‌ترتیب، شتاب $m_۱$ و شتاب $m_۲$اند. در اینجا هم، مثل مثال قبلی، اگر ریسمان بی‌جرم باشد و کشیده نشود، و قرقره هم بی‌جرم و بدون اصطکاک باشد، $T_۱ = T_۲ = T$ و $a_۱ = a_۲ = a$ است. (فرض می‌کنیم که این قرقرهٔ ایده‌آل اندازهٔ کشش یا شتاب را در طول ریسمان تغییر نمی‌دهد؛ کارش فقط این است که جهت کشش و شتاب را عوض کند.) حالا اگر دو معادلهٔ بالا را، پس از جایگذاری مقادیر مشترک حل کنیم، نتیجه می‌شود که

$$a = \frac{m_۲ - m_۱}{m_۲ + m_۱} g \qquad (۷)$$

$$T = \frac{۲ m_۱ m_۲}{m_۱ + m_۲} g \qquad (۸)$$

حالتهای حدی $m_۱ = ۰$، $m_۲ = ۰$، $g = ۰$، و $m_۱ = m_۲$ را بررسی کنید. توجه کنید که $m_۱ g < T < m_۲ g$، و مطمئن شوید که علت آن‌را درک کرده‌اید.

**مثال ۱۰.** دستگاه مکانیکی شکل ۲۰الف را در نظر بگیرید؛ $m_۱ = ۹٫۵\text{kg}$، $m_۲ = ۲٫۶\text{kg}$، و $\theta = ۳۴°$ است. سیستم را از حالت سکون رها می‌کنیم، حرکت را توصیف کنید.

حل: شکلهای ۲۰ب و ۲۰ج نمودارجسم‌ـآزاد قطعات ۱ و ۲ را نشان می‌دهند. دستگاههای مختصات را طبق شکل گرفته‌ایم تا برای هر جسم، یک محور مختصات موازی با شتابی باشد که برای جسم پیش‌بینی می‌کنیم. در اینجا هم، مثل مثالهای قبلی، انتظار داریم که مقدار کشش در همه جا یکسان باشد، و اندازهٔ شتاب حرکت عمودی $m_۲$ با حرکت $m_۱$ روی صفحه یکی باشد. فرض می‌کنیم که $m_۱$ در جهت مثبت $x$ حرکت می‌کند (اگر فرضمان غلط باشد، $a$ منفی در می‌آید). معادلات مؤلفه‌ای قانون دوم نیوتون برای $m_۱$ عبارت است از

$$\sum F_x = T - m_۱ g \sin\theta = m_۱ a \qquad \text{مؤلفهٔ } x\text{:}$$

$$\sum F_y = N - m_۱ g \cos\theta = ۰ \qquad \text{مؤلفهٔ } y\text{:}$$

و برای $m_۲$ به‌صورت زیر است

$$\sum F_y = m_۲ g - T = m_۲ a$$

از حل همزمان این معادلات نتیجه می‌شود که

$$a = \frac{m_۲ - m_۱ \sin\theta}{m_۱ + m_۲} g \qquad (۹)$$

و

$$T = \frac{m_۱ m_۲}{m_۱ + m_۲} g (۱ + \sin\theta) \qquad (۱۰)$$

توجه کنید که این نتایج، به‌ازای $\theta = ۰$ (یعنی حرکت قطعهٔ ۱ افقی است) به همان نتایج مثال ۸ تبدیل می‌شوند و به‌ازای $\theta = ۹۰°$ (یعنی حرکت قطعهٔ ۲ عمودی است) به نتایج مثال ۹.

با جانشانی مقادیر عددی معلوم می‌شود که

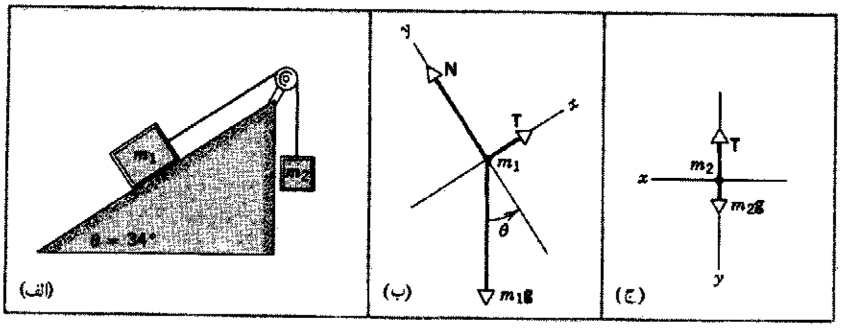
$$a = \frac{۲٫۶\text{kg} - (۹٫۵\text{kg})(\sin ۳۴°)}{۹٫۵\text{kg} + ۲٫۶\text{kg}} (۹٫۸۰\,\text{m/s}^۲) = -۲٫۲\,\text{m/s}^۲$$

شتاب منفی درآمده است، که نشان می‌دهد حدس اولیهٔ ما دربارهٔ جهت حرکت غلط بوده است. قطعهٔ ۱ به طرف پایین سطح شیبدار می‌لغزد، و قطعهٔ ۲ به‌بالا می‌رود. چون معادلات دینامیکی شامل نیروهایی نبودند که به جهت حرکت بستگی داشته باشند، این حدس اولیهٔ غلط اثری بر معادلات ندارد و می‌شود پذیرفت که مقدار حاصل برای $a$ درست است. در حالت کلی، اگر نیروهای اصطکاکی را هم، که در خلاف جهت حرکت‌اند، در نظر بگیریم، دیگر چنین نخواهد بود.

کشش ریسمان برابر است با

$$T = \frac{(۹٫۵\text{kg})(۲٫۶\text{kg})}{۹٫۵\text{kg} + ۲٫۶\text{kg}} (۹٫۸۰\,\text{m/s}^۲)(۱ + \sin ۳۴°) = ۳۱\text{N}$$

این مقدار بیشتر از وزن $m_۲$ $(m_۲ g = ۲۶\text{N})$ است، و این با روبه بالا بودن شتاب $m_۲$ سازگار است.

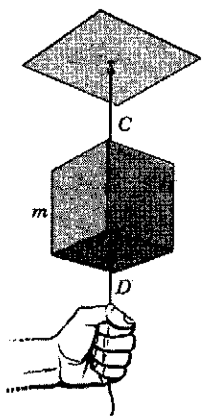



شکل ۲۰. مثال ۱۰. (الف) قطعهٔ $m_1$ روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی می‌لغزد. قطعهٔ $m_2$ از ریسمانی، که به $m_1$ متصل است، آویزان است. (ب) نمودار جسم–آزاد $m_1$. (ج) نمودار جسم–آزاد $m_2$.

## پرسشها

۱. چرا زمانی که اتوبوس ترمز کند تا بایستد به جلو می‌افتید، و زمانی که از حالت سکون شتاب می‌گیرد به عقب؟ مسافران سرپایی قطار زیرزمینی اغلب به‌این نتیجه می‌رسند که بهتر است موقع شروع حرکت یا شروع توقف، به طرف پنجره‌های جانبی بایستند، و موقع حرکت با سرعت ثابت، به طرف جلو یا عقب. چرا؟

۲. قطعه‌ای به جرم $m$ با ریسمان $C$ از سقف آویزان است، و ریسمان مشابه $D$ هم به ته آن متصل است (شکل ۲۱). اگر $D$ را به سرعت بکشید، خود آن پاره می‌شود، اما اگر $D$ را به آهستگی بکشید، $C$ پاره می‌شود. چرا؟




شکل ۲۱. پرسش ۲

۳. اغلب می‌گویند، جرم هر جسم "مقدار مادهٔ" موجود در آن است. این عبارت را نقد کنید.

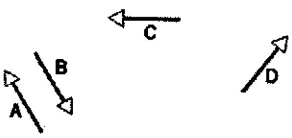
۴. اگر نیرو، طول، و زمان را کمیتهای بنیادی بگیریم، بعد جرم چه خواهد بود؟

۵. آیا می‌شود قانون اول نیوتون را فقط حالت خاص $g = 0$ قانون دوم دانست؟ اگر چنین باشد، آیا واقعاً نیازی به قانون اول هست؛ توضیح بدهید.

۶. آیا رابطه‌ای بین نیروی وارد بر یک جسم و جهت حرکت آن جسم وجود دارد؟ اگر دارد چه رابطه‌ای؟

۷. فرض کنید جسمی تحت تأثیر دو نیرو شتاب گرفته است. آیا می‌شود نتیجه گرفت که (الف) اندازهٔ سرعت جسم نمی‌تواند ثابت باشد؛ (ب) سرعت هیچ‌گاه نمی‌تواند صفر شود؛ (ج) مجموع دو نیرو نمی‌تواند صفر باشد؛ (د) دو نیرو باید همراستا باشند؟

۸. شکل ۲۲ چهار نیرو با اندازهٔ یکسان را نشان می‌دهد. چه ترکیبی از سه تا از این نیروها، اگر بر جسمی اثر کنند، آن‌را در حالت تعادل نگه می‌دارد؟




شکل ۲۲. پرسش ۸

۹. اسبی را وادار می‌کنند که ارابه‌ای را بکشد. اسب از این کار امتناع می‌کند و در دفاع از خودش قانون سوم نیوتون را دلیل می‌آورد: کشش اسب بر ارابه هم‌اندازه و در خلاف جهت کشش ارابه بر اسب است. "حالا اگر من هیچ‌گاه نتوانم نیرویی بیش از آنچه ارابه بر من وارد می‌کند بر آن وارد کنم، چطور می‌توانم ارابه را به حرکت در بیاورم؟" لطفاً پاسخ این اسب را بدهید.

۱۰. کدام‌یک از این زوجها زوج عمل–عکس‌العمل‌اند؟ (الف) زمین آجری را جذب می‌کند؛ آجر زمین را جذب می‌کند. (ب) یک هواپیمای ملخی هوا را به طرف دم خود می‌راند؛ هوا هواپیما را به جلو می‌راند. (ج) اسبی گاری‌ای را به جلو می‌کشد و آن‌را به حرکت در می‌آورد؛ گاری اسب را به عقب می‌کشد. (د) اسبی گاری‌ای را به جلو می‌کشد، اما آن‌را حرکت نمی‌دهد؛ گاری اسب را به عقب می‌کشد. (هـ) اسبی گاری‌ای را به جلو می‌کشد، اما آن‌را حرکت نمی‌دهد؛ زمین نیرویی به همان اندازه و در خلاف جهت بر گاری وارد می‌کند. (و) زمین گاری را به پایین می‌کشد؛ سطح زمین گاری را، با نیرویی به همان اندازه و در خلاف جهت، به بالا می‌راند.

۱۱. عبارت زیر درست است؛ آن‌را توضیح بدهید. در مسابقهٔ طناب‌کشی، تیمی برنده می‌شود که زمین را (در راستای افقی) بیشتر هل بدهد.

۱۲. دو نفر می‌خواهند طنابی را پاره کنند، ابتدا هرکدام یک سر طناب را می‌گیرند و به طرف خودشان می‌کشند، اما موفق نمی‌شوند. بعد یک

سر طناب را به دیوار می‌بندند و سر دیگر را با هم می‌کشند. آیا این روش بهتر از روش اول است؟ توضیح بدهید.

۱۳. جرم شما برحسب اسلاگ چقدر است؟ وزن شما برحسب نیوتون چقدر است؟

۱۴. شخصی موقع پرکردن فرم مشخصات خود، در جلوی کلمهٔ وزن می‌نویسد ۷۸kg، اما وزن نیرو است و کیلوگرم یکای جرم. وقتی یکاهای جرم را برای بیان وزن به‌کار می‌بریم، منظورمان چیست؟ چرا وزن را برحسب نیوتون بیان نمی‌کنیم؟ وزن این شخص چند نیوتون است؟ چند پاوند است؟

۱۵. عبارتهای زیر دربارهٔ جرم و وزن از ورقه‌های امتحانی گرفته شده‌اند. نظرتان دربارهٔ آنها چیست؟ (الف) جرم و وزن کمیت فیزیکی واحدی هستند که برحسب یکاهای متفاوتی بیان شده‌اند. (ب) جرم خاصیت یک جسم به تنهایی است، اما وزن ناشی از برهم‌کنش دو جسم است. (ج) وزن اجسام متناسب با جرمشان است. (د) با تغییر وزن اجسام در نقاط مختلف، جرم آنها هم تغییر می‌کند.

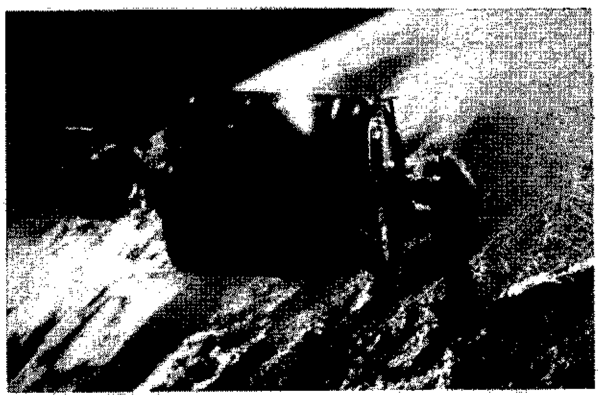
۱۶. یک نیروی افقی بر جسمی اثر می‌کند که می‌تواند آزادانه حرکت کند. آیا این نیرو، اگرکمتر از وزن جسم باشد، می‌تواند به جسم شتاب بدهد؟

۱۷. چرا شتاب اجسامی که سقوطِ آزاد می‌کنند مستقل از وزنشان است؟

۱۸. برای تجربه کردن بی‌وزنی، حتی اگر به مدت خیلی کوتاهی باشد، چه راههایی به نظرتان می‌رسد؟

۱۹. در چه اوضاع و احوالی وزن شما صفر می‌شود؟ آیا پاسخ به چارچوب مرجع بستگی دارد؟

۲۰. "بازوی مکانیکی" فضاپیمای شاتل، در حالتی که ۱۲m دراز شده باشد، می‌تواند ماهواره‌ای به جرم ۲۲۰۰kg را جابه‌جا کند (شکل ۲۳). اما روی زمین، همین سیستم "دستکاری از دور" وزن خودش را هم نمی‌تواند تحمل کند. در شرایط "بی‌وزنی" شاتل در مدار، اصولاً چرا لازم است که RMS بتواند نیرو وارد کند؟



**شکل ۲۳.** پرسشهای ۲۰ و ۲۶

۲۱. درکتابچهٔ راهنمای اتومبیلی آمده است که کمربند ایمنی را باید چنان تنظیم کرد که "کیپ بسته شود"، و تکیه‌گاه سر در صندلیهای جلو نباید درست پشت گردن قرار بگیرد بلکه باید آنها را چنان تنظیم کرد که سطح بالایشان با بالای گوشها هم‌تراز شود. قوانین نیوتون چگونه این توصیه‌های ایمنی را توجیه می‌کنند؟

۲۲. پیکانی را از کمان رها می‌کنید و مسیر سهموی آن‌را در هوا، تا نقطهٔ برخورد به‌زمین تعقیب می‌کنید. می‌بینید که پیکان در حین پرواز طوری می‌پیچد که همواره بر مسیر پروازش مماس باشد. چه چیزی باعثِ این می‌شود؟

۲۳. در یک مسابقهٔ طناب‌کشی، سه مرد در نقطهٔ $A$ طناب را به طرف چپ و سه مرد در نقطهٔ $B$ طناب را به طرف راست می‌کشند. اندازهٔ دو نیرو با هم برابر است. یک وزنهٔ 5lb از وسط طناب به‌طور عمودی آویزان است. (الف) آیا اینها می‌توانند طناب $AB$ را افقی نگه دارند؟ (ب) اگرنمی‌توانند توضیح بدهید چرا. اگر می‌توانند اندازهٔ نیروهای لازم در نقاط $A$ و $B$ را تعیین کنید.

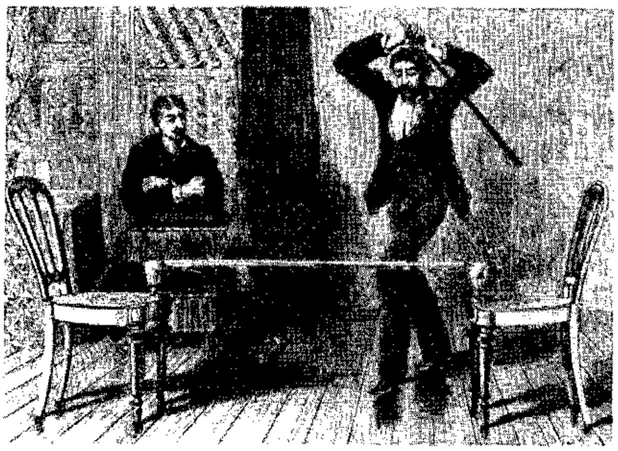
۲۴. پرنده‌ای از روی یک سیم تلگراف کشیده شده بلند می‌شود. آیا این کار کشش سیم را تغییر می‌دهد؟ اگر تغییر می‌دهد، آیا مقدار این تغییر کمتر از وزن پرنده است، با آن برابر است، یا از آن بیشتر است؟

۲۵. ریسمان بی‌جرمی از روی قرقرهٔ بدون اصطکاکی گذشته است. میمونی یک سر طناب را گرفته است، و آینه‌ای هم‌وزن میمون، به سر دیگر طناب، در همان ارتفاع میمون، بسته شده است. آیا میمون می‌تواند (الف) با بالارفتن از طناب، (ب) با پایین آمدن از طناب، یا (ج) با رها کردن طناب، از تماشای تصویر خودش معاف شود؟

۲۶. در نوامبر ۱۹۸۴ جوآلن و دیل گاردنر (فضانوردان امریکایی) یک ماهوارهٔ مخابراتی وستار-۶ را، که در مدار نادرستی افتاده بود، گرفتند و در محفظهٔ بار فضاپیمای (دیسکاوری) (شکل ۲۳) قرار دادند. جو آلن در توصیف این تجربه دربارهٔ ماهواره گفته بود "سنگین نیست؛ جرم زیادی دارد." منظورش چه بوده است؟

۲۷. فرض کنید مسافر سفینه‌ای هستید که در مدار قرار گرفته است. درپوش یک ظرف دراز و باریک را که تنها یک زیتون دارد برمی‌دارید. چند راه برای درآوردن زیتون از ظرف، چه راههایی، که در همهٔ آنها از اینرسی زیتون یا اینرسی ظرف استفاده شده باشد، پیشنهاد می‌کنید؟

۲۸. دسته جارویی را در نظر بگیرید که به هر سر آن یک میخ فرو کرده‌اند. این چوب را از میخهایش روی دو گیلاس پر گذاشته‌اند (شکل ۲۴). آزمایشگر با میلهٔ سفتی، ضربهٔ سریع و محکمی به دسته جارو می‌زند. دسته جارو می‌شکند و به زمین می‌افتد، اما گیلاسها سالم می‌مانند و مایع درون آنها هم نمی‌ریزد. این شیرین‌کاری جالب، در اواخر قرن گذشته خیلی رواج داشت. فیزیکِ این قضیه چیست؟ (اگر خواستید امتحان کنید، اول با قوطیهای خالی نوشابه تمرین کنید. می‌توانید از مدرستان خواهش کنید که با این شیرین‌کاری، یک نمایش درسی در کلاس ترتیب بدهد!)



شکل ۲۴. پرسش ۲۸

۲۹. آسانسوری متکی به یک تک کابل است و وزنهٔ مقابل هم ندارد. مسافران در طبقهٔ هم‌کف سوار می‌شوند، به طبقهٔ آخر می‌روند، و پیاده می‌شوند و آنجا مسافران جدیدی سوار می‌شوند و به طبقهٔ همکف می‌آیند. طی این رفت و برگشت، چه موقع کشش کابل برابر با وزن آسانسور به‌علاوهٔ وزن مسافران است؟ چه موقع از آن بیشتر است؟ چه موقع از آن کمتر است؟

۳۰. در عرشهٔ فضاپیمای دیسکاوری در مدار هستید و شخصی دو توپ چوبی به ظاهر کاملاً یکسان به‌شما می‌دهد. یکی از این توپها یک هستهٔ سربی دارد و دیگری ندارد چند راه برای تشخیص توپها از هم پیشنهاد می‌کنید.

۳۱. روی سکوی یک ترازوی فنری بایستید و وزن خودتان را بخوانید. بعد روی آن یک قدم بردارید. خواهید دید که در ابتدای گام، ترازو وزن کمتری نشان می‌دهد و در پایان گام وزن بیشتری، چرا؟

۳۲. آیا می‌توانید خودتان را با ترازویی وزن کنید که حداکثر وزنی که می‌تواند نشان بدهد کمتر از وزن شماست؟ اگر می‌توانید، چگونه؟

۳۳. وزنه‌ای با ریسمانی از سقف آسانسوری آویزان است. درکدام‌یک از حالات زیر، ریسمان بیشترین کشش را دارد؟ درکدام‌یک کمترین کشش را؟ (الف) آسانسور در حال سکون است؛ (ب) آسانسور با سرعت ثابت بالا می‌رود؛ (ج) آسانسوری با سرعت کم‌شونده پایین می‌آید؛ (د) آسانسور با سرعت زیادشونده پایین می‌آید.

۳۴. شخصی در آسانسوری روی یک ترازوی فنری ایستاده است. درکدام‌یک از حالات زیر، ترازو کمترین وزن را نشان می‌دهد؟ در کدام‌یک بیشترین وزن را؟ (الف) آسانسور ساکن است؛ (ب) آسانسور کابلش بریده است و دارد سقوط آزاد می‌کند؛ (ج) آسانسور به طرف بالا شتاب دارد؛ (د) آسانسور به طرف پایین شتاب دارد؛ (هـ) آسانسور با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

۳۵. دو جرم نامساوی که توسط نخی از دو طرف قرقره‌ای آویزان‌اند، در آسانسوری در حالت تعادل‌اند؛ یعنی، قرقره تمایلی به چرخیدن ندارد. کسی که فیزیک بلد باشد چه نتیجه‌ای از این مشاهده می‌گیرد؟

۳۶. شکل ۲۵ دنباله‌دار کوهوتک را نشان می‌دهد که در سال ۱۹۷۳ ظاهر شد. این دنباله‌دار هم، مثل همهٔ دنباله‌دارهای دیگر، در اثر جاذبهٔ گرانشی خورشید به دور خورشید می‌گردد. هستهٔ دنباله‌دار، تودهٔ نسبتاً پرجرمی است که در نقطهٔ $P$ شکل قرار دارد. دم دنباله‌دار در اثر بادهای خورشیدی تشکیل می‌شود. باد خورشیدی انبوهی از ذرات باردار است که از خورشید به بیرون فوران می‌کنند. آیا می‌توانید چیزی دربارهٔ جهت نیرویی که بر هستهٔ دنباله‌دار وارد می‌شود بگویید؟ اگر می‌توانید چه چیز؟ دربارهٔ جهت شتاب هسته چطور؟ دربارهٔ جهت حرکت آن چطور؟

شکل ۲۵. پرسشهای ۳۶ و ۳۷

۳۷. دنباله‌دارها عموماً یک دم غبار دارند (شکل ۲۵) که متشکل است از ذرات غباری که در اثر فشار نور خورشید، به طرف مخالف خورشید رانده می‌شوند. چرا این دم اغلب خمیده است.

۳۸. آیا می‌توانید یک پدیدهٔ فیزیکی مثال بزنید که زمین در آن دخیل باشد ولی نتوانیم در تحلیل این پدیده زمین را "ذره" در نظر بگیریم؟

## مسئله‌ها

### بخش ۵ـ۵ قانون دوم نیوتون

۱. فرض کنید نیروی گرانشی خورشید ناگهان قطع شود، چنانکه زمین دیگر در قید خورشید نباشد و از مدار آن رها شود. در این‌صورت چقدر طول می‌کشد تا زمین به فاصلهٔ مدار فعلی پلوتون از خورشید برسد؟ (راهنمایی: بعضی از داده‌های مورد نیازتان را می‌توانید از پیوست ج به‌دست بیاورید.)

۲. قطعه‌ای به جرم $5{,}5\,kg$ را که روی سطح افقی بدون اصطکاکی در حالت سکون است با نیروی افقی ثابت $3{,}8\,N$ می‌کشیم. (الف) شتاب آن چقدر می‌شود؟ (ب) چه مدتی باید آن‌را بکشید تا سرعت آن $5{,}2\,m/s$ شود؟ (ج) دراین مدت، قطعه چه مسافتی را می‌پیماید؟

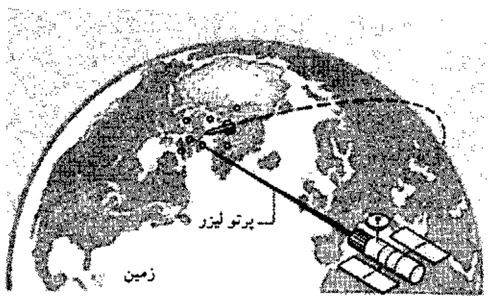
۳. الکترونی در خط مستقیم از کاتد یک لامپ خلأ به آند آن می‌رود.

فاصلهٔ آند از کاتد ۱٫۵cm است. الکترون با سرعت صفر شروع به حرکت می‌کند و با سرعت $۵٫۸ \times ۱۰^{۶}\,\mathrm{m/s}$ به آند می‌رسد. (الف) با این فرض که شتاب ثابت است، نیروی وارد بر الکترون را محاسبه کنید. جرم الکترون $۹٫۱۱ \times ۱۰^{-۳۱}\,\mathrm{kg}$ است. این نیرو منشأ الکتریکی دارد. (ب) نیروی گرانشی وارد بر الکترون را حساب کنید.

۴. نوترونی با سرعت $۱٫۴ \times ۱۰^{۷}\,\mathrm{m/s}$ حرکت می‌کند. برد نیروهای هسته‌ای بسیار کوتاه است؛ نیروی هسته‌ای در خارج هسته عملاً صفر است، اما در داخل هسته بسیار قوی است. اگر نوترون را هسته‌ای به قطر $۱٫۰ \times ۱۰^{-۱۴}\,\mathrm{m}$ به دام بیندازد و به حالت سکون در بیاورد، کمترین مقدار نیروی لازم برای این کار، چقدر است؟ این نیرو را ثابت فرض کنید. جرم نوترون $۱٫۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}\,\mathrm{kg}$ است.

۵. در نوع تغییر شکل یافته‌ای از بازی "طناب‌کشی" دو نفر، به‌جای طناب، سورتمه‌ای به جرم ۲۵kg را در دو جهت مخالف هم می‌کشند. اگر این دو، سورتمه را با نیروی ۹۰N و ۹۲N به‌طرف خود بکشند، شتاب سورتمه چقدر می‌شود؟

۶. باریکهٔ نور که از چشمهٔ لیزری ماهواره‌ای گسیل شده، به جسمی که از موشکی رها شده است برخورد می‌کند (شکل ۲۶). این باریکه نیروی $۲٫۷ \times ۱۰^{-۵}\,\mathrm{N}$ بر هدف وارد می‌کند. اگر مدت تابش باریکه ۲٫۴s باشد، جسم در این مدت چقدر جابه‌جا می‌شود؟ (الف) فرض کنید جسم سلاحی به جرم ۲۸۰kg است. (ب) فرض کنید جسم یک هدف کاذب به جرم ۲٫۱kg است؟ (این جابه‌جاییها را با مشاهدهٔ باریکهٔ بازتابیده هم می‌شود سنجید.)



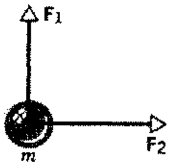
شکل ۲۶. مسئلهٔ ۶

۷. اتومبیلی با سرعت ۵۳km/h به پایهٔ پلی برخورد می‌کند. یکی از مسافران که بلافاصله پشت یک بالشتک هوا نشسته است، ۶۵cm (نسبت به جاده) حرکت می‌کند تا نهایتاً توسط بالشتک متوقف شود. ضمن این توقف چه نیرویی بر بالاتنهٔ این شخص، که جرم آن ۳۹kg است، وارد می‌شود؟ نیرو را ثابت فرض کنید.

۸. الکترونی به‌طور افقی با سرعت $۱٫۲ \times ۱۰^{۷}\,\mathrm{m/s}$ وارد میدان الکتریکی‌ای می‌شود که به آن نیروی عمودی ثابتی به اندازهٔ $۴٫۵ \times ۱۰^{-۱۶}\,\mathrm{N}$ وارد می‌کند. طی مدتی که الکترون مسافت افقی ۳۳mm را می‌پیماید، در راستای عمودی چقدر منحرف می‌شود؟

۹. "قایق" خورشیدی دیانا برای سفر در منظومهٔ شمسی با استفاده از فشار نور خورشید طراحی شده است. مساحت "بادبان" این قایق $۳٫۱\,\mathrm{km}^{۲}$ و جرم آن ۹۳۰kg است. در نزدیکی سطح زمین، خورشید می‌تواند نیروی ۲۹N بر بادبان وارد کند. (الف) چنین نیرویی چه شتابی به قایق می‌دهد؟ (ب) شتابهای کوچک هم، اگر به مدت کافی به‌طور پیوسته اعمال شوند، می‌توانند آثار بزرگی تولید کنند. اگر این قایق از حالت سکون شروع به حرکت کند، پس از ۱ روز چه مسافتی را می‌پیماید؟ (ج) سرعت آن چقدر می‌شود؟[۱]

۱۰. دو نیروی $\mathbf{F}_۱$ و $\mathbf{F}_۲$ بر جرم $m$ اثر می‌کنند (شکل ۲۷). اگر $m = ۵٫۲\,\mathrm{kg}$، $F_۱ = ۳٫۷\,\mathrm{N}$، و $F_۲ = ۴٫۳\,\mathrm{N}$ باشد، شتاب برداری جسم را به‌دست بیاورید.



شکل ۲۷. مسئلهٔ ۱۰

۱۱. جسمی به جرم ۸٫۵kg با سرعت ۴۲m/s در جهت محور $x$ از مبدأ می‌گذرد. به این جسم نیروی ۱۹N در جهت مثبت محور $y$ وارد می‌شود. حساب کنید که پس از گذشت ۱۵s (الف) سرعت جسم چقدر است و (ب) مکان آن کجاست؟

۱۲. نیروی معینی به جسم $m_۱$ شتاب $۱۲٫۰\,\mathrm{m/s^۲}$ می‌دهد. همین نیرو به جسم $m_۲$ شتاب $۳٫۳۰\,\mathrm{m/s^۲}$ می‌دهد. این نیرو به جسمی که جرمش برابر با (الف) تفاضل $m_۱$ و $m_۲$ و (ب) مجموع $m_۱$ و $m_۲$ باشد، چه شتابی می‌دهد؟

۱۳. (الف) با چشمپوشی از نیروهای گرانشی، حساب کنید چه نیرویی لازم است تا فضاپیمایی به جرم ۱۲۰۰ تن متریک را طی ۳ روز از حالت سکون به یک دهم سرعت نور برساند. چه نیرویی لازم است تا طی ۲ ماه چنین شود؟ (یک تن متریک برابر با ۱۰۰۰kg است.) (ب) فرض کنید که در این لحظهٔ موتورها خاموش شوند. درهر یک از این دو مورد، چقدر زمان دیگر لازم است تا فضاپیما کلاً مسافت ۵ ماه نوری را بپیماید؟ (۱ ماه را مساوی ۳۰ روز بگیرید.)

**بخش ۵ـ۶ قانون سوم نیوتون**

۱۴. دو قطعه به جرمهای $m_۱ = ۴٫۶\,\mathrm{kg}$ و $m_۲ = ۳٫۸\,\mathrm{kg}$، توسط ریسمان سبکی، روی میز افقی بدون اصطکاکی، به هم متصل‌اند. در لحظهٔ خاصی که شتاب جرم $m_۲$ برابر با $۲٫۶\,\mathrm{m/s^۲}$ است، (الف) نیروی وارد بر $m_۲$ و (ب) شتاب $m_۱$ چقدر است؟

۱۵. کودکی به جرم ۴۰kg و سورتمه‌ای به جرم ۸٫۴kg روی سطح دریاچهٔ یخزده‌ای به‌فاصلهٔ ۱۵m از هم قرار دارند. کودک با استفاده از طنابی، نیروی ۵٫۲N بر سورتمه وارد می‌کند و آن‌را به طرف خودش می‌کشد. (الف) شتاب سورتمه چقدر است؟ (ب) شتاب کودک چقدر

۱. نگاه کنید به "The Wind from the Sun"، که یک داستان علمی تخیلی جالب از آرتور سی کلارک است.

است؟ (ج) این دو در چه فاصله‌ای از مکان اولیهٔ کودک به هم می‌رسند؟ فرض کنید نیرو ثابت می‌ماند و هیچ اصطکاکی هم وجود ندارد.

**بخش ۵ـ۸ وزن و جرم**

۱۶. وزن هر یک از اجسام (الف) تا (ج) برحسب نیوتون و جرم آنها برحسب کیلوگرم چقدر است؟ (الف) یک بستهٔ ۵٫۰۰ lb شکر، (ب) یک ورزشکار ۲۴۰ lb، و (ج) یک اتومبیل ۱٫۸۰ ton. (۱ ton = ۲۰۰۰ lb).

۱۷. (الف) جرم یک اتومبیل سورتمه‌ای ۱۴۲۰ lb و (ب) وزن یک پمپ گرمایی ۴۱۲ kg چقدر است؟

۱۸. فضانوردی به جرم ۷۵٫۰ kg زمین را ترک می‌کند. حساب کنید که وزن او (الف) در روی زمین، (ب) در مریخ ($g = ۳٫۷۲ \mathrm{m/s^2}$)، و (ج) در فضای بین سیارات چقدر است. (د) در هر مورد جرم او چقدر است؟

۱۹. ذره‌ای در نقطه‌ای که شتاب گرانی $۹٫۸۰ \mathrm{m/s^2}$ است وزنی برابر با ۲۶٫۰ N دارد. (الف) وزن و جرم این ذره در نقطه‌ای که شتاب گرانی $۴٫۶۰ \mathrm{m/s^2}$ باشد چقدر است؟ (ب) وزن و جرم این ذره در نقطه‌ای که نیروی گرانشی صفر باشد چقدر است؟

۲۰. هواپیمایی به جرم ۱۲۰۰۰ kg با سرعت ۸۷۰ km/h در امتداد افق پرواز می‌کند. نیروی بالابرنده‌ای که از هوا بر هواپیما وارد می‌شود چقدر است؟

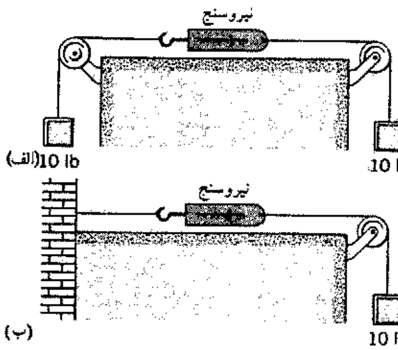
۲۱. نیروی خالص وارد بر اتومبیلی به وزن ۳۹۰۰ lb، که با شتاب $۱۳ \mathrm{ft/s^2}$ حرکت می‌کند. چقدر است؟

۲۲. یک سورتمهٔ موشکیِ آزمایشی به جرم ۵۲۳ kg، می‌تواند طی ۱۸٫۲ s از سکون به سرعت ۱۶۲۰ km/h برسد، نیروی خالص لازم برای این کار چقدر است؟

۲۳. هواپیمایی قبل از برخاستن از زمین با شتاب $۲٫۳ \mathrm{m/s^2}$ (یعنی $۷٫۵۵ \mathrm{ft/s^2}$) روی باند فرودگاه حرکت می‌کند. این هواپیما دو موتور جت دارد، که هر کدام نیروی $۱٫۴۰ \times ۱۰^۵ \mathrm{N}$ (یعنی ۱۵٫۷ ton) تولید می‌کند. وزن هواپیما چقدر است؟

**بخش ۵ـ۱۰ کاربردهای قوانین نیوتون**

۲۴. (الف) دو وزنهٔ ۱۰ lb، طبق شکل ۲۸الف، به یک نیروسنج متصل‌اند. نیروسنج چه مقداری نشان می‌دهد؟ (ب) یک وزنهٔ ۱۰ lb به نیروسنجی



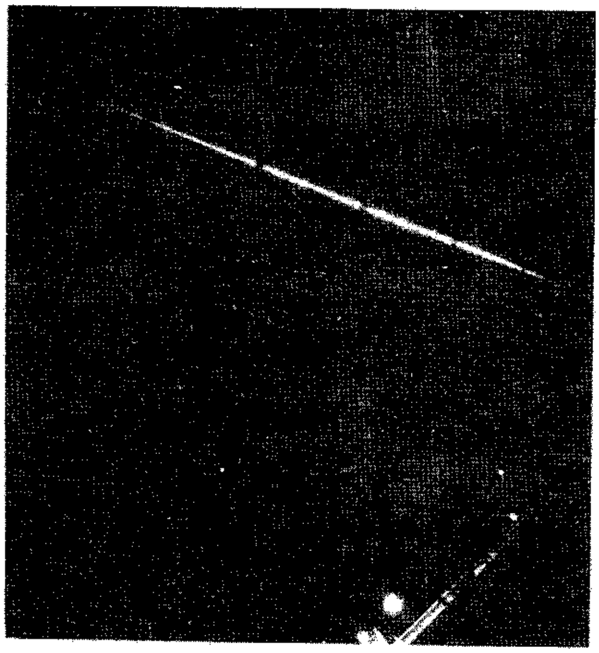

شکل ۲۸. مسئلهٔ ۲۴

متصل است، که سر دیگرش به دیوار وصل شده است؛ شکل ۲۸ب. نیروسنج چه مقداری را نشان می‌دهد؟ (وزن نیروسنج ناچیز است.)

۲۵. کرهٔ بارداری به جرم $۲٫۸ \times ۱۰^{-۴} \mathrm{kg}$ از ریسمانی آویزان است. یک نیروی الکتریکی در راستای افقی بر این کره وارد می‌شود، چنانکه ریسمان، در حالت سکون، با راستای قائم زاویهٔ $۳۳^\circ$ می‌سازد. (الف) اندازهٔ نیروی الکتریکی و (ب) کشش ریسمان را پیدا کنید.

۲۶. اتومبیلی به وزن ۳۰۰۰ lb ($\simeq$ ۱۳۰۰۰ N) که با سرعت ۵۰ mi/h ($\simeq$ ۸۰ km/h) در حرکت است، پس از طی مسافت ۲۰۰ ft ($\simeq$ ۶۱ m) متوقف می‌شود. (الف) نیروی ترمز و (ب) زمان لازم برای توقف را به‌دست بیاورید. با همان نیروی ترمز (ج) مسافت و (د) زمان لازم برای توقف از سرعت اولیه ۲۵ mi/h ($\simeq$ ۴۰ km/h) را حساب کنید.

۲۷. شهابی به جرم ۰٫۲۵ kg به‌طور عمودی با شتاب $۹٫۲ \mathrm{m/s^2}$ به درون جو زمین سقوط می‌کند. علاوه بر گرانش، نیروی بازدارنده‌ای (ناشی از کشش اصطکاکی جو) هم بر شهاب وارد می‌شود. اندازهٔ این نیروی بازدارنده چقدر است؟ (شکل ۲۹).



شکل ۲۹. مسئلهٔ ۲۷

۲۸. آسانسوری به وزن ۶۲۰۰ lb با کابلی بالا کشیده می‌شود. شتاب آسانسور $۳٫۸ \mathrm{ft/s^2}$ است. (الف) کشش کابل چقدر است؟ (ب) اگر شتاب آسانسور $۳٫۸ \mathrm{ft/s^2}$ به‌طرف پایین بود، اما همچنان به طرف بالا حرکت می‌کرد، کشش کابل چقدر می‌شد؟

۲۹. مردی به جرم ۸۳ kg (وزن $mg = ۱۸۰ \mathrm{lb}$) از لبهٔ پنجره‌ای به روی یک سکوی بتونی می‌پرد، لبهٔ پنجره ۰٫۴۸ m (یعنی ۱٫۶ ft)

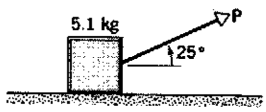
بالاتر از سکو است، مرد فراموش می‌کند زانوهایش را خم کند و پس از برخورد به سکو طی مسافت ۲٫۲cm (یعنی ۰٫۸۷in) متوقف می‌شود. (الف) شتاب متوسط مرد از زمانی که پاهایش به سکو می‌رسد تا زمان توقف کامل چقدر است؟ (ب) در این پرش چه نیروی متوسطی بر استخوانبندی او وارد می‌شود؟

۳۰. قطعه‌ای با سرعت اولیهٔ $v_\circ$ روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی به طرف بالای شیب پرتاب می‌شود. زاویهٔ سطح شیبدار $\theta$ است. (الف) این قطعه تا چه مسافتی روی این سطح بالا می‌رود؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا به آنجا برسد؟ (ج) سرعت قطعه هنگامی که در برگشت به نقطهٔ اولیه می‌رسد چقدر است؟ مقدار عددی جوابها را به‌ازای $\theta = ۳۵^\circ$ و $v_\circ = ۸٫۲\text{ft/s}^۲$ به‌دست بیاورید.

۳۱. لامپی در راستای قائم از ریسمانی آویزان است. ریسمان و لامپ در آسانسوری هستند که به پایین می‌آید. آسانسور، پیش از توقف شتاب کندکنندهٔ ۲٫۴m/s² (یعنی ۷٫۹ft/s²) دارد. (الف) اگر کشش ریسمان ۸۹N (یعنی ۲۰lb) باشد. جرم لامپ چقدر است؟ (ب) اگر آسانسور با شتاب رو به بالای ۲٫۴m/s² (یعنی ۷٫۹ft/s²) به‌طرف بالا حرکت کند، کشش ریسمان چقدر می‌شود؟

۳۲. نخ قلاب ماهیگیری باید چه کششی را تحمل کند تا بتواند یک ماهی ۱۹lb را که با سرعت ۹٫۲ft/s شنا می‌کند، طی مسافت ۴٫۵in متوقف کند؟

۳۳. جسمی به جرم ۵٫۱kg را با ریسمانی روی سطح بدون اصطکاکی می‌کشند. ریسمان نیروی $P = ۱۲\text{N}$ در زاویهٔ $\theta = ۲۵^\circ$ بالاتر از سطح افقی وارد می‌کند؛ (شکل ۳۰). (الف) شتاب جسم چقدر است؟ (ب) نیروی $P$ را به آهستگی زیاد می‌کنیم. مقدار $P$ درست پیش از بلند شدن جسم از سطح چقدر است؟ (ج) شتاب جسم درست پیش از بلند شدن آن از سطح، چقدر است؟

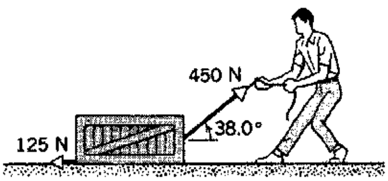


شکل ۳۰. مسئلهٔ ۳۳

۳۴. چگونه می‌توانیم جسمی به وزن ۱۰۰lb را با استفاده از طنابی که فقط تحمل ۸۷lb کشش را دارد از بالای بامی به پایین بفرستیم بی‌آنکه طناب پاره بشود؟

۳۵. قطعه‌ای از حالت سکون از بالای سطح شیبداری به طول ۱۶m رها می‌شود، و ۴٫۲s بعد به پایین می‌رسد. در همان لحظه‌ای که قطعهٔ اول رها می‌شود، قطعهٔ دیگری از پایین سطح شیبدار طوری به طرف بالای شیب پرتاب می‌شود که همزمان با قطعهٔ اول به پایین سطح برگردد. (الف) شتاب هر یک از این قطعات را پیدا کنید. (ب) سرعت اولیهٔ قطعهٔ دوم چقدر بوده است؟ (ج) این قطعه چقدر از سطح شیبدار بالا می‌رود؟ (د) زاویهٔ سطح شیبدار با سطح افقی چقدر است؟

۳۶. کارگری صندوقی را با طنابی روی کف کارگاه می‌کشد. کارگر نیروی ۴۵۰N به طناب وارد می‌کند، و سر طناب ۳۸° بالاتر از سطح افقی است. کف نیروی بازدارندهٔ افقی‌ای به اندازهٔ ۱۲۵N بر صندوق وارد می‌کند (شکل ۳۱). اگر(الف) جرم صندوق ۹۶٫۰kg باشد و (ب) وزن آن ۹۶٫۰N باشد، شتاب صندوق چقدر است؟



شکل ۳۱. مسئلهٔ ۳۶

۳۷. جرم آسانسوری با بارش ۱۶۰۰kg است. این آسانسور، که با سرعت ۱۲٫۰m/s به طرف پایین در حرکت است، طی مسافت ۴۲٫۰m متوقف می‌شود. کشش کابل نگهدارنده، طی مدتی که آسانسور متوقف می‌شود چقدر است؟

۳۸. جسمی از یک ترازوی فنری که به سقف آسانسوری متصل شده، آویزان است. وقتی آسانسور ساکن است، ترازو ۶۵N را نشان می‌دهد. (الف) اگر آسانسور با سرعت ثابت ۷٫۶m/s به طرف بالا حرکت کند، ترازو چه مقداری نشان می‌دهد؟ (ب) وقتی آسانسور با سرعت ۷٫۶m/s با شتاب کندشوندهٔ ۲٫۴m/s² به طرف بالا در حرکت باشد، ترازو چه مقداری نشان می‌دهد؟

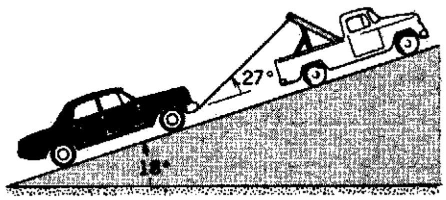
۳۹. وزنهٔ کوچکی توسط قطعه نخی به جرم ناچیز از سقف واگن قطاری آویزان است. چنین شاغولی می‌تواند مانند شتاب‌سنج عمل کند. (الف) نشان بدهید که رابطهٔ شتاب افقی واگن با زاویهٔ $\theta$، که ریسمان با راستای قائم می‌سازد، $a = g\tan\theta$ است. (ب) $a$ را به‌ازای $\theta = ۲۰^\circ$ حساب کنید. (ج) $\theta$ را به‌ازای $a = ۵٫۰\text{ ft/s}^۲$ حساب کنید.

۴۰. یک موتور جت به جرم ۱۴۰۰kg با سه بست به بدنهٔ یک هواپیمای مسافری متصل است (در عمل هم همین‌طور است، شکل ۳۲). فرض کنید که هر بست یک سوم بار را تحمل می‌کند. (الف) نیروی وارد بر هر بست را، در حالتی که هواپیما منتظر خالی شدن باند است تا شروع به حرکت کند، حساب کنید. (ب) طی پرواز، هواپیما ناگهان به جریان متلاطمی برمی‌خورد که به آن شتاب ۲٫۶۰m/s² به‌طرف بالا می‌دهد. نیروی وارد بر هر بست، در این شرایط چقدر است؟ چرا فقط از سه بست استفاده می‌شود؟

شکل ۳۲. مسئلهٔ ۴۰

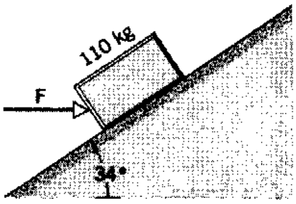
۴۱. چند کارگر در طبقهٔ بالای ساختمانی وسایل و دستگاههایی را در یک آسانسور باری می‌گذارند تا به طبقهٔ پایین بفرستند، اما کابل کهنهٔ آسانسور تحمل این همه بار را ندارد و پاره می‌شود. جرم آسانسور با بار، در لحظهٔ حادثه ۱۶۰۰kg است. هنگام سقوط آسانسور، ریلهای هدایت‌کنندهٔ آن نیروی بازدارندهٔ ثابتی به اندازهٔ ۳۷۰۰N بر اتاقک وارد می‌کنند. آسانسور با چه سرعتی به کف محفظه‌اش برخورد می‌کند؟ کف‌محفظه ۷۲m از طبقهٔ بالا پایین‌تر است.

۴۲. اتومبیلی به جرم ۱۲۰۰kg را با طنابی که به پشت کامیونی بسته شده است به بالای سطح شیبداری با زاویهٔ °۱۸ یدک می‌کشند. زاویهٔ طناب با سطح شیبدار °۲۷ است (شکل ۳۳). اگر طناب بتواند کشش ۴٫۶kN را تحمل کند، اتومبیل را طی مدت ۷٫۵s، از حالت سکون، حداکثر تا چه مسافتی می‌شود یدک کشید؟ نیروهای بازدارندهٔ وارد بر اتومبیل را در نظر نگیرید.



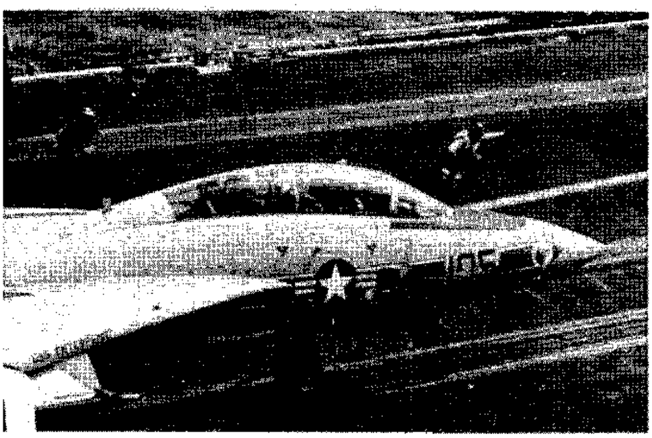

شکل ۳۳. مسئلهٔ ۴۲

۴۳. صندوقی به جرم ۱۱۰kg را با سرعت ثابت روی سطحی به شیب °۳۴ هل می‌دهیم؛ (شکل ۳۴).
(الف) نیروی افقی لازم برای این کار ($F$) چقدر است؟
(ب) نیرویی که سطح شیبدار بر صندوق وارد می‌کند چقدر است؟



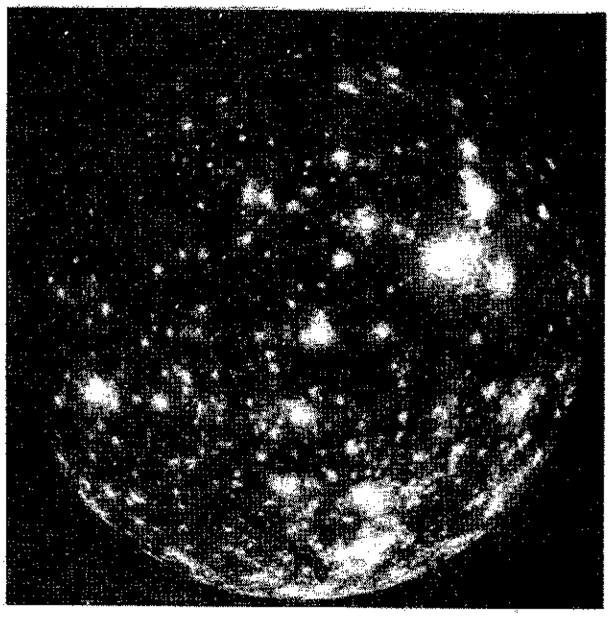

شکل ۳۴. مسئلهٔ ۴۳

۴۴. یک جت نظامی (شکل ۳۵) به جرم ۲۶ton، باید به سرعت ۲۸۰ft/s نسبت به هوا برسد تا بتواند شروع به پرواز کند. موتور خودِ جت نیروی ۲۴۰۰۰lb تولید می‌کند. این جت باید از ناو هواپیمابری که طول عرشهٔ پرواز آن ۳۰۰ft است به هوا بلند شود. پرتاب‌کنندهٔ ناو چه نیرویی باید بر هواپیما اعمال کند؟ فرض کنید که هم پرتاب‌کننده و هم موتور، در تمام مسافت ۳۰۰ft، نیروی ثابتی اعمال می‌کنند.



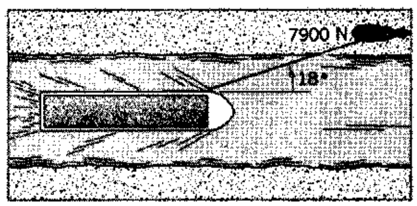
شکل ۳۵. مسئلهٔ ۴۴

۴۵. موشک سیاره‌نشینی به سطح کالیستو، یکی از اقمار سیارهٔ مشتری، نزدیک می‌شود (شکل ۳۶). اگر موتور موشک نیروی رو به بالای ۳۲۶۰N تولید کند، سیاره‌نشین با سرعت ثابت فرود می‌آید. کالیستو جوّ ندارد. اگر نیروی رو به بالا ۲۲۰۰N باشد، سیاره‌نشین با شتاب ۰٫۳۹۰$m/s^2$ به‌طرف پایین می‌آید. (الف) وزن سیاره‌نشین در نزدیکی سطح کالیستو چقدر است؟ (ب) جرم سیاره‌نشین چقدر است؟ (ج) شتاب گرانشی در نزدیکی سطح کالیستو چقدر است؟



شکل ۳۶. مسئلهٔ ۴۵

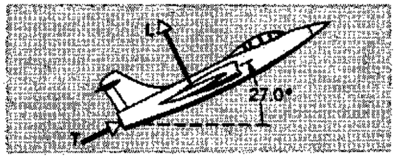
**۴۶.** روزگاری کرجیها را با اسب می‌کشیدند و در کانال جلو می‌بردند (شکل ۳۷). فرض کنید اسب نیروی ۷۹۰۰N، با زاویهٔ °۱۸ نسبت به جهت حرکت در کانال، بر کرجی وارد کند. جرم کرجی ۹۵۰۰kg و شتاب آن ۰٫۱۲$m/s^2$ است. آب چه نیرویی بر کرجی وارد می‌کند؟




شکل ۳۷. مسئلهٔ ۴۶

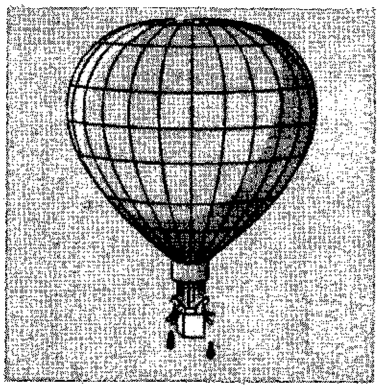
**۴۷.** موشکی با بارش ۵۱۰۰۰kg جرم دارد. نیروی پیشران موشک در حالتی که موشک (الف) بلافاصله پس از روشن شدن روی سکوی پرتاب به حالت "شناور" درآمده است و (ب) با شتاب ۱۸$m/s^2$ به طرف بالا، حرکت می‌کند چقدر است؟

**۴۸.** جت جنگنده‌ای با زاویهٔ °۲۷٫۰ نسبت به سطح افقی، و با شتاب ۲٫۶۲$m/s^2$ از زمین جدا می‌شود (شکل ۳۸). (الف) نیروی پیشران $T$ موتور هواپیما و (ب) نیروی بالابرندهٔ $L$ را که ناشی از هوا و عمود بر بالهای هواپیماست به‌دست بیاورید.




شکل ۳۸. مسئلهٔ ۴۸

**۴۹.** یک بالون پژوهشی به جرم $M$ با شتاب رو به پایین در راستای قائم پایین می‌آید (شکل ۳۹). چقدر بار باید از بالون بیرون ریخت تا بالون شتاب روبه بالای $a$ پیدا کند؟ فرض کنید نیروی بالابرندهٔ بالون تغییری نمی‌کند.



شکل ۳۹. مسئلهٔ ۴۹

**۵۰.** موشکی به جرم ۳۰۳۰kg از زمین با زاویهٔ فراز °۵۸٫۰ آتش می‌شود. موتور موشک به مدت ۴۸٫۰s یک نیروی پیشران به مقدار ۶۱٫۲kN در زاویهٔ ثابت °۵۸٫۰ با سطح افقی تولید می‌کند و بعد خاموش می‌شود. از جرم سوخت مصرف شده و از مقاومت هوا صرفنظر کنید. (الف) ارتفاع موشک در نقطهٔ خاموش شدن موتور و (ب) کل فاصلهٔ میان نقطهٔ پرتاب و نقطهٔ برخورد موشک به زمین را پیدا کنید.

**۵۱.** مکعبی به جرم $m$ روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی که در آسانسوری واقع شده است به پایین می‌لغزد. زاویهٔ سطح نسبت به کف آسانسور $\theta$ است. شتاب این مکعب نسبت به سطح شیبدار را در حالتهای زیر پیدا کنید. (الف) آسانسور با سرعت ثابت $v$ پایین می‌آید. (ب) آسانسور با سرعت ثابت $v$ بالا می‌رود. (ج) آسانسور با شتاب ثابت تندکنندهٔ $a$ پایین می‌آید. (د) آسانسور با شتاب ثابت کندکنندهٔ $a$ پایین می‌آید. (ه) کابل آسانسور پاره می‌شود. (و) در قسمت (ج) سطح شیبدار چه نیرویی بر مکعب وارد می‌کند؟

### بخش ۵ـ۱۱ کاربردهای دیگری از قوانین نیوتون

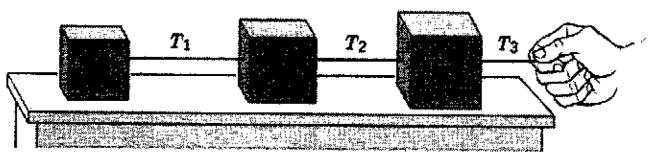
**۵۲.** در شکل ۱۸، فرض کنید که $m_1 = 4.30\,kg$ و $m_2 = 1.80\,kg$

است. (الف) شتاب دو قطعه و (ب) کشش ریسمان را پیدا کنید.

۵۳. مردی به جرم ۱۱۰kg با گرفتن طنابی خودش را از ارتفاع ۱۲m به سطح زمین می‌رساند. طناب از روی قرقرهٔ بدون اصطکاکی گذشته و سر دیگرش به کیسهٔ شنی به جرم ۷۴kg بسته شده است. (الف) مرد با چه سرعتی به زمین می‌خورد؟ (ب) آیا راهی هست که با سرعت کمتری به زمین بخورد؟

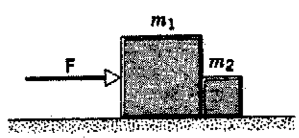
۵۴. میمونی به جرم ۱۱kg از طنابی بسیار سبک بالا می‌رود. طناب (بدون اصطکاک!) از روی شاخهٔ درختی گذشته است و به باری به جرم ۱۵kg متصل است. (الف) میمون حداقل با چه شتابی باید از طناب بالا برود تا بتواند بار را از زمین بلند کند؟ (ب) اگر پس از بلند شدن بار از زمین، میمون بالا رفتن خود را متوقف کند و از طناب آویزان بماند، (ب) شتاب میمون و (ج) کشش طناب چقدر می‌شود؟

۵۵. سه جسم روی میز افقی بدون اصطکاکی به هم بسته شده‌اند، و با نیروی $T_3 = ۶٫۵N$ به طرف راست کشیده می‌شوند (شکل ۴۰). اگر $m_1 = ۱٫۲kg$، $m_2 = ۲٫۴kg$ و $m_3 = ۳٫۱kg$ باشد، (الف) شتاب سیستم و (ب) کششهای $T_1$ و $T_2$ را به‌دست بیاورید. تبادل نیرو بین اجسامی که به دنبال هم کشیده می‌شوند، مثلاً واگنهای قطار که لکوموتیو آنها را می‌کشد، مثل همین سیستم است.



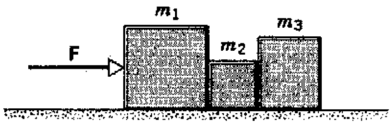

شکل ۴۰. مسئلهٔ ۵۵

۵۶. دو جسم روی میز بدون اصطکاکی با هم در تماس‌اند. نیرویی افقی $F$ به یکی از آنها اعمال می‌شود (شکل ۴۱). (الف) اگر $m_1 = ۲٫۳kg$، $m_2 = ۱٫۲kg$ و $F = ۳٫۲N$ باشد، نیروی تماسی بین دو جسم را پیدا کنید. (ب) نشان بدهید که اگر همین نیروی خارجی را، به‌جای $m_1$، به $m_2$ وارد کنیم، نیروی تماسی بین اجسام ۲٫۱N می‌شود، که با مقدار حاصل از قسمت (الف) فرق می‌کند. چرا چنین است؟




شکل ۴۱. مسئلهٔ ۵۶

۵۷. شکل ۴۲ سه صندوق به جرمهای $m_1 = ۴۵٫۲kg$، $m_2 = ۲۲٫۸kg$ و $m_3 = ۳۴٫۳kg$ را روی سطح افقی بدون اصطکاکی نشان می‌دهد. (الف) چه نیروی افقی‌ای ($F$) لازم است تا کل مجموعه را با شتاب $۱٫۳۲m/s^2$ به طرف راست براند؟ در این حالت (ب) $m_2$ بر $m_3$ و (ج) $m_1$ بر $m_2$ چه نیرویی وارد می‌کند؟

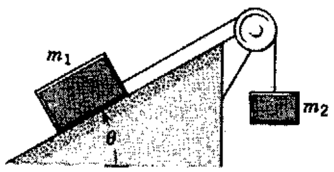



شکل ۴۲. مسئلهٔ ۵۷

۵۸. زنجیری شامل ۵ حلقه، هر یک به جرم ۱۰۰g، را با شتاب ثابت $۲٫۵۰m/s^2$ در راستای قائم بالا می‌بریم (شکل ۴۳). (الف) نیرویی که حلقه‌های مجاور بر هم وارد می‌کنند، (ب) نیروی $F$ که عامل خارجی بر حلقهٔ بالایی وارد می‌کند، و (ج) نیروی خالص وارد بر هر حلقه را حساب کنید.


شکل ۴۳. مسئلهٔ ۵۸

۵۹. جسمی به جرم $m_1 = ۳٫۷۰kg$ روی سطح شیبداری به زاویهٔ $\theta = ۲۸٫۰°$ واقع شده و با ریسمانی که از قرقرهٔ کوچک بی‌جرم و بدون اصطکاکی عبورکرده، به جسم دیگری به جرم $m_2 = ۱٫۸۶kg$ متصل شده است. $m_2$ به‌طور قائم از ریسمان آویزان است (شکل ۴۴). (الف) شتاب هر جسم چقدر است؟ (ب) کشش ریسمان چقدر است؟

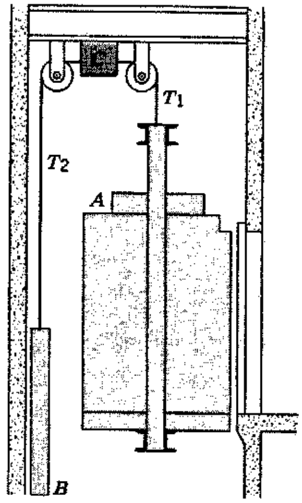



شکل ۴۴. مسئلهٔ ۵۹

۶۰. چتربازی به جرم ۷۷kg، کمی پس از باز شدن چترش با شتاب رو به پایین $۲٫۵m/s^2$ سقوط می‌کند. جرم چتر ۵٫۲kg است. (الف) نیروی رو به بالای هوا بر چتر چقدر است؟ (ب) نیروی رو به پایینی که شخص بر چتر وارد می‌کند چقدر است؟

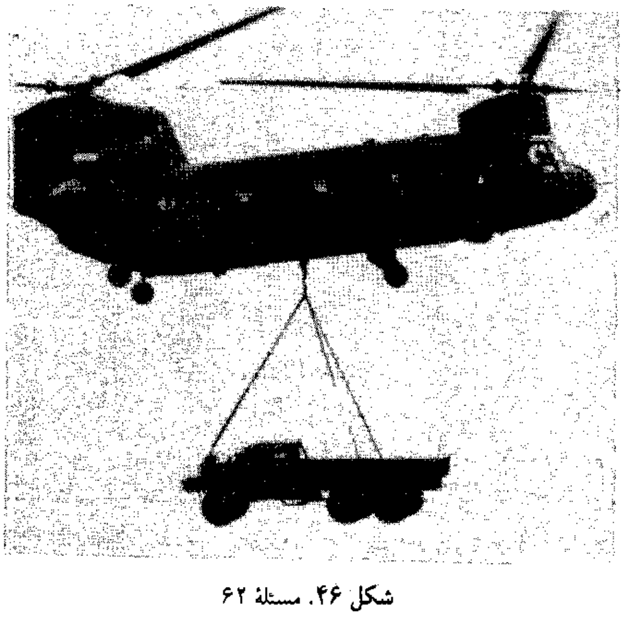
۶۱. آسانسوری شامل اتاقک ($A$)، وزنهٔ مقابل ($B$)، موتور ($C$)، وکابل و قرقره است (شکل ۴۵). جرم اتاقک ۱۰۰۰kg و جرم وزنهٔ مقابل ۱۴۰۰kg است. اصطکاک و جرم کابل و قرقره‌ها را به‌حساب نیاورید. آسانسور با شتاب تندکنندهٔ $۲٫۳۰m/s^2$ به بالا می‌رود و وزنهٔ مقابل هم با همین شتاب به پایین می‌آید. (الف) کشش $T_1$ و (ب) کشش

$T_2$ در کابل چقدر است؟ و (ج) موتور چه نیرویی به کابل وارد می‌کند؟



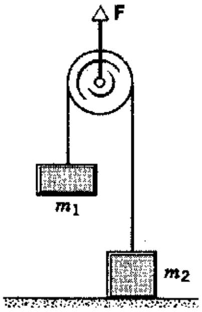

شکل ۴۵. مسئلهٔ ۶۱

۶۲. هلی‌کوپتری به جرم ۱۵۰۰۰kg اتومبیلی به جرم ۴۵۰۰kg را، با شتاب ۱٫۴$m/s^2$ از زمین بلند می‌کند. (الف) نیروی عمودی‌ای را که هوا بر پروانه‌های هلی‌کوپتر وارد می‌کند و (ب) کشش بخش بالایی کابل نگهدارنده را پیدا کنید (شکل ۴۶).



شکل ۴۶. مسئلهٔ ۶۲

۶۳. محور قرقرهٔ شکل ۴۷ با نیروی $F$ به بالا کشیده می‌شود. فرض کنید قرقره و ریسمان بی‌جرم‌اند و محور هم بدون اصطکاک است. دو جسم، $m_1$ به جرم ۱٫۲kg و $m_2$ به جرم ۱٫۹kg، به دو سر ریسمانی بسته شده‌اند که از روی قرقره می‌گذرد. جسم $m_2$ روی زمین است. (الف) نیروی $F$ از چه مقداری بیشتر نباشد تا $m_2$ روی زمین بماند؟ (ب) اگر $F$ برابر با ۱۱۰N باشد، کشش ریسمان چقدر است؟ (ج) با کشش حاصل از قسمت (ب)، شتاب $m_1$ چقدر است؟

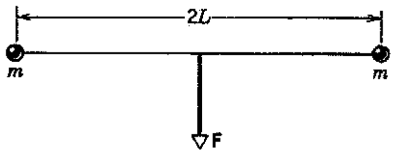



شکل ۴۷. مسئلهٔ ۶۳

۶۴. دو ذره، هر یک به جرم $m$، با ریسمان سبکی به طول $2L$ به‌هم متصل‌اند (شکل ۴۸). نیروی ثابت $\boldsymbol{F}$ در نقطهٔ میانی ریسمان ($x = 0$) در جهت عمود بر راستای اولیهٔ ریسمان بر آن وارد می‌شود. نشان بدهید که شتاب هر جرم در راستای عمود بر $\boldsymbol{F}$ برابر است با

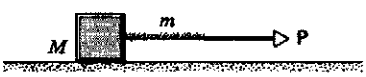
$$a_x = \frac{F}{2m}\,\frac{x}{(L^2 - x^2)^{1/2}}$$

که در آن، $x$ فاصلهٔ عمودی هر جرم از خط اثر $\boldsymbol{F}$ است. وضعیت را در حالت $x = L$ بررسی کنید.




شکل ۴۸. مسئلهٔ ۶۴

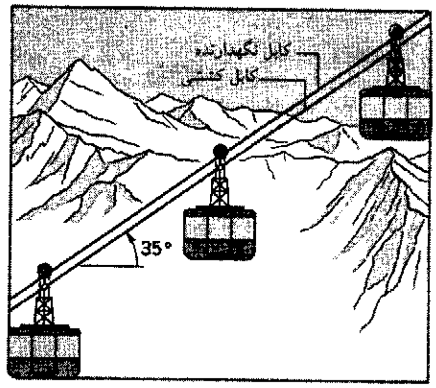
۶۵. جسمی به جرم $M$ روی سطح افقی بدون اصطکاکی با طنابی به جرم $m$ کشیده می‌شود (شکل ۴۹). نیروی افقی $\mathbf{P}$ بر انتهای طناب وارد می‌شود. (الف) نشان بدهید که طناب، هر چقدر ناچیز، به هر حال باید "شکم بدهد". حالا با فرض ناچیز بودن مقدار خمیدگی طناب، (ب) شتاب طناب و جسم، (ج) نیرویی که طناب بر جسم وارد می‌کند، و (د) کشش طناب در وسط آن را حساب کنید.




شکل ۴۹. مسئلهٔ ۶۵

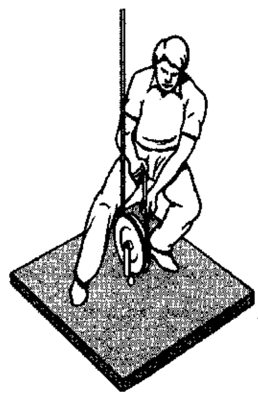
۶۶. شکل ۵۰ بخشی از یک دستگاه "تله‌کابین" را نشان می‌دهد. بیشترین جرم مجاز هر اتاقک با محتویاتش ۲۸۰۰kg است. اتاقکها به یک کابل نگهدارنده سوارند و با کابل دیگری که به دکلها متصل است کشیده می‌شوند. اگر اتاقکها با شتاب ۰٫۸۱$m/s^2$ در امتداد

شیب $35^\circ$ به بالا کشیده شوند، اختلاف کشش دو قسمت مجاور کابل کشش (در دو طرف اتاقک) چقدر است؟




شکل ۵۰. مسئلهٔ ۶۶

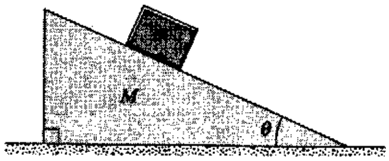
۶۷. در شکل ۵۱، وزن شخص ۱۸۰lb است؛ وزن سکو و قرقره



شکل ۵۱. مسئلهٔ ۶۷

قرقرهٔ متصل به آن هم کلاً ۴۳lb است. وزن طناب ناچیز است. شخص باید با چه نیرویی طناب را بکشد تا بتواند خودش سکو را با شتاب $1/2 \mathrm{ft/s^2}$ به‌بالا حرکت بدهد؟

۶۸. جسمی به جرم $m$ روی گوهٔ قائم‌الزاویه‌ای به جرم $M$ و زاویهٔ شیب $\theta$ واقع شده است. گوه روی یک میز افقی قرار دارد (شکل ۵۲). (الف) $M$ باید چه شتابی ($a$) نسبت به میز داشته باشد تا $m$ نسبت به گوه ساکن بماند؟ تماس گوه و جسم را بدون اصطکاک فرض کنید. (ب) چه نیروی افقی $\mathbf{F}$ باید به این سیستم وارد کرد تا نتیجهٔ (الف) حاصل شود؟ سطح میز را هم بدون اصطکاک فرض کنید. (ج) فرض کنید نیرویی به $M$ وارد نمی‌کنیم و همهٔ سطوح را هم بدون اصطکاک بگیرید. حالا حرکت حاصل را توصیف کنید.




شکل ۵۲. مسئلهٔ ۶۸

# ۶

# دینامیک ذرات

در فصل ۵ قوانین نیوتون را معرفی کردیم و مثالهایی از کاربردهایشان ارائه دادیم. این مثالها را مخصوصاً ساده کرده بودیم تا کاربرد قوانین را نشان بدهیم. اما در این روند ساده‌سازی بیش از حد، بخشی از دید فیزیکی از دست می‌رود. مثلاً یکی از مسائل مهم مکانیک، که به ویژه در طراحی سیستمهای مکانیکی وارد می‌شود، مسئلهٔ اصطکاک است. در تمام مثالهای فصل ۵ فرض شده بود اصطکاک حضور ندارد.

در این فصل بررسی کاربردهای قوانین نیوتون را ادامه می‌دهیم؛ نیروهای اصطکاک را معرفی، و آثارشان را مطالعه می‌کنیم. نیروهای متغیر را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان معادلات حرکت وابسته به چنین نیروهایی را حل کرد. سرانجام، نشان می‌دهیم که استفاده از چارچوبهای مرجع نالخت موجب بروز آثاری می‌شود که می‌توان آنها را با وارد کردن نیروهای لختی یا شبه نیروها تحلیل کرد. این نیروها، بر خلاف آنهایی که در فصل ۵ بررسی کردیم، ناشی از جسم خاصی در محیط ذره نیستند.

## ۶ـ۱ قوانین نیرو

پیش از اینکه به کاربرد قوانین نیوتون برگردیم، باید مختصری از ماهیت خود نیروها صحبت کنیم. تا اینجا معادلات حرکت را برای تحلیل و محاسبهٔ آثار نیروها به‌کار برده‌ایم، اما این معادلات چیزی دربارهٔ علت نیرو نمی‌گویند. برای اینکه بفهمیم که نیرو ناشی از چیست باید درک میکروسکوپی مفصلی از برهم‌کنش اجسام با محیطشان داشته باشیم. به‌نظر می‌رسد که طبیعت، در بنیادی‌ترین سطح خود، از طریق عدهٔ کمی نیروی بنیادی عمل می‌کند. فیزیکدانها به‌طور معمول از چهار نیرو به عنوان نیروهای بنیادی نام می‌برند: ۱. نیروی گرانشی، که ناشی از حضور ماده است (یا، اگر بخواهیم با نظریهٔ نسبیت عام سازگارتر باشیم، منشأ آن ماده و انرژی است)؛ ۲. نیروی الکترومغناطیسی، که شامل برهم‌کنشهای پایه‌ای الکتریکی و مغناطیسی است و پیوند میان اتمها، و ساختار جامدات از آثار آن است؛ ۳. نیروی هسته‌ای ضعیف، که موجب بعضی از فرایندهای واپاشی پرتوزا، و بعضی از واکنشهای میان ذرات بنیادی می‌شود؛ و ۴. نیروی قوی، که بین ذرات بنیادی عمل می‌کند و اجزای هسته را به هم پیوند می‌دهد.

در میکروسکوپیک‌ترین مقیاس، مثلاً برای دو پروتونی که درست در کنار هم واقع شده باشند، قدرت نسبی این نیروها به ترتیب عبارت است از: قوی (قدرت نسبی = ۱)؛ الکترومغناطیسی ($10^{-2}$)؛ ضعیف ($10^{-7}$)؛ گرانشی ($10^{-38}$). در مقیاسهای بنیادی، گرانشی فوق‌العاده ضعیف است و آثار آن قابل چشمپوشی است. با چند آزمایش ساده و معمولی می‌توانید متوجه ضعیف بودن گرانش بشوید ـــ مثلاً با بلند کردن چند تکه کاغذ به‌وسیلهٔ شانهٔ باردار، یا بلند کردن چند سوزن یا گیرهٔ کاغذ به‌وسیلهٔ یک آهنربای کوچک. نیروی مغناطیسی آهنربای کوچکی می‌تواند برنیروی گرانشی‌ای که کل زمین بر این اجسام وارد می‌کند غلبه کند!

برای هر چه ساده‌تر کردن این تصویر، فیزیکدانها کوشیده‌اند عدهٔ نیروها را از چهار هم کمتر کنند. در سال ۱۹۶۷، نظریه‌ای مطرح شد که طبق آن می‌شود نیروی الکترومغناطیسی و نیروی ضعیف را اجزای یک نیروی واحد، نیروی الکتروضعیف، در نظر گرفت. ترکیب یا وحدت این دو نیرو شبیه است به وحدت نیروهای مجزای الکتریکی و مغناطیسی در قرن نوزدهم، که به نیروی واحد الکترومغناطیسی منجر شد. نظریه‌های جدید دیگری موسوم به نظریه‌های وحدت بزرگ هم ارائه شده‌اند که نیروهای قوی و الکتروضعیف را در یک چارچوب واحد ترکیب می‌کنند، و حتی "نظریه‌های همه‌چیز"ی وجود دارند که می‌خواهند گرانش را هم در این وحدت بگنجانند.

یکی از پیش‌بینیهای چنین نظریه‌هایی آن است که پروتون (ذرهٔ هسته‌ای که بار مثبت دارد) پایدار نیست بلکه در مدتی بسیار زیاد، شاید $10^{32}$ سال، وامی‌پاشد. (این زمانِ خیلی خیلی زیادی است؛ مقایسه کنید با سن عالم که فقط $10^{10}$ سال است). یکی از راههای آزمودن این نظریه آن است که مجموعه‌ای از $10^{33}$ پروتون (معادل با مکعبی از آب به ضلع تقریباً ۱۷ متر) را به مدت یک سال مشاهده

کنیم و ببینیم که آیا یکی از پروتونهای آن وامی‌پاشد یا خیر. برای آزمودن چنین نظریه‌های غریبی، این آزمایشها ضروری‌اند، آزمایشهایی که بی‌شباهت به‌جستجوی یک سوزن در کاهدان نیست. در فصل ۵۶ نسخهٔ طولانی‌تر همین کتاب، در مورد چنین تأملاتی بیشتر صحبت خواهیم کرد.

خوشبختانه برای تحلیل سیستمهای مکانیکی نیازی به استفاده از چنین نظریه‌هایی نداریم. درواقع، هرآنچه دربارهٔ سیستمهای مکانیکی معمولی مطالعه می‌کنیم فقط به دو نیرو مربوط می‌شود: گرانش و الکترومغناطیس. نیروی گرانشی به‌طور عمده در جاذبهٔ زمین براجسام ظاهر می‌شود، جاذبه‌ای که موجب وزن اجسام می‌شود. جاذبهٔ گرانشی اجسام آزمایشگاهی بر یکدیگر، بسیار ضعیفتر است و تقریباً همیشه می‌توان از آن صرفنظر کرد.

همهٔ نیروهای دیگری که معمولاً بررسی‌شان می‌کنیم در نهایت منشأ الکترومغناطیسی دارند: نیروهای تماسی، مثلاً نیروی عمودی که از فشار آوردن جسمی به جسم دیگر ناشی می‌شود و نیروی اصطکاک ناشی از کشیده شدن سطوح اجسام روی یکدیگر است؛ نیروهای چسبندگی، مثلاً مقاومت هوا؛ نیروهای کششی، مثلاً کشش نخ یا طناب؛ نیروهای کشسانی، مثلاً نیروی فنر؛ بسیاری نمونه‌های دیگر، همه از این نوع‌اند. خوشبختانه، در بررسی سیستمهای مکانیکی معمولی می‌توانیم اساس میکروسکوپی را نادیده بگیریم و به جای این زیرساختارهای پیچیده، یک نیروی مؤثر با اندازه و جهت معین اختیار کنیم.

## ۶ـ۲ نیروی اصطکاک[1]

اگر جسمی به جرم $m$ را با سرعت اولیهٔ $\mathbf{v}_0$ روی میزی افقی رها کنیم، سرانجام خواهد ایستاد. این یعنی که جسم در طی حرکتش یک شتاب متوسط $\bar{\mathbf{a}}$ دارد که در خلاف جهت حرکت است. هر وقت (در چارچوبهای لخت) ببینیم که جسمی شتاب دارد، نیرویی به حرکت جسم وابسته می‌کنیم، که طبق قانون دوم نیوتون تعریف می‌شود. در مورد بالا می‌گوییم که میز، بر جسمی که بر آن می‌لغزد، یک نیروی اصطکاک وارد می‌کند که متوسط آن $m\bar{\mathbf{a}}$ است. عموماً منظورمان از اصطکاک، یک برهم‌کنش تماسی بین جامدات است. آثار شبیه به اصطکاکی را که در مایعات و گازها ایجاد می‌شوند با اصطلاحات دیگری توصیف می‌کنیم (بخش ۶ـ۷).

در واقع، هرگاه که سطح جسمی بر سطح جسم دیگری بلغزد، هر جسم یک نیروی اصطکاک به دیگری وارد می‌کند. نیروی اصطکاک وارد بر هر جسم در جهت خلاف حرکت آن نسبت به جسم دیگر است. نیروی اصطکاک، خود به خود با این حرکت نسبی مقابله می‌کند و هیچ‌گاه به آن کمک نمی‌کند. حتی اگر هیچ حرکت نسبی‌ای هم درکار نباشد، ممکن است بین سطوح نیروی اصطکاک وجود داشته باشد.

تا کنون از آثار نیروی اصطکاک چشم پوشیده‌ایم، اما اصطکاک در زندگی روزمره بسیار مهم است. اگر فقط نیروی اصطکاک درکار باشد، هر محور چرخنده‌ای سرانجام خواهد ایستاد. در اتومبیل، حدود ۲۰٪ توان موتور صرف مقابله با اصطکاک می‌شود. اصطکاک موجب خوردگی و گرفتگی قطعات متحرک می‌شود، و مهندسان تلاش زیادی برای کاهش آن می‌کنند. از طرف دیگر، بدون اصطکاک نمی‌شود راه رفت، نمی‌شود مدادی به‌دست گرفت، و تازه اگر بشود هم، اصلاً نمی‌شود نوشت؛ حمل و نقل با وسایل چرخدار هم، چنانکه می‌دانیم، غیرممکن می‌شود.

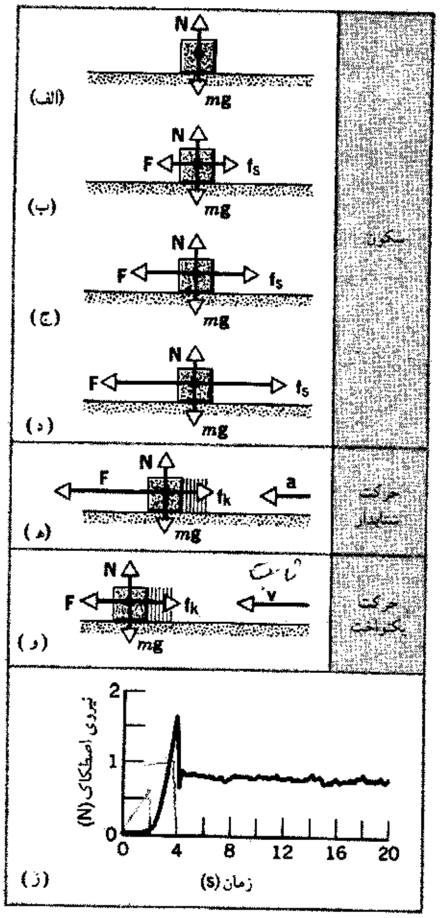
حالا می‌خواهیم که نیروی اصطکاک را برحسب خواص جسم و محیط توصیف کنیم؛ یعنی می‌خواهیم قانون نیروی اصطکاک را بدانیم. درآنچه می‌آید، لغزش (نه غلتش) یک سطح خشک (روغنکاری نشده) را بر سطحی دیگر بررسی می‌کنیم. چنانکه بعداً خواهیم دید، اصطکاک در سطح میکروسکوپیک پدیده‌ای بسیار پیچیده است. قوانین نیروی اصطکاک لغزشی خشک، ماهیت تجربی دارند و نتایجشان هم تقریبی است. در این قوانین سادگی، دقت، و زیبایی قانون نیروی گرانشی (فصل ۱۶) یا قانون نیروی الکتروستاتیک (فصل ۲۷) وجود ندارد. اما جالب است که از بررسی سطوح بیشماری معلوم می‌شود که بسیاری از ویژگیهای اصطکاک را به‌طور کیفی می‌توان براساس چند سازوکار ساده فهمید.[1]

جسمی را در نظر بگیرید که روی میزی افقی ساکن است (شکل ۱الف) فنری به این جسم می‌بندیم که نیروی افقی $\mathbf{F}$ لازم برای به حرکت درآوردن آن‌را بسنجد. اگر نیروی کوچکی به جسم وارد کنیم، خواهیم دید که جسم حرکت نمی‌کند (شکل ۱ب) در این‌صورت، می‌گوییم که میز هم نیروی اصطکاک مقاوم $\mathbf{f}$ را بر جسم وارد می‌کند؛ این نیرو در راستای سطح تماس است. با افزایش نیرویی که اعمال می‌کنیم (شکلهای ۱ج و ۱د) خواهیم دید که نیروی معینی وجود دارد که در آن، جسم از سطح "کنده می‌شود" و شتاب می‌گیرد (شکل ۱هـ). پس از شروع حرکت، با کاهش مقدار نیرو خواهیم دید که می‌توان جسم را در حالت حرکتِ یکنواخت نگه داشت (شکل ۱و). شکل ۱ز نتایج یکی از آزمایشهای سنجش نیروی اصطکاک را نشان می‌دهد. در حدود $t = 2\,\text{s}$، اعمال نیرو شروع می‌شود و این نیرو به‌تدریج افزایش می‌یابد. در این مدت، نیروی اصطکاک هم همراه با $F$ زیاد می‌شود و جسم هنوز ساکن است. در $t = 4\,\text{s}$، جسم یکباره شروع به حرکت می‌کند و از آن پس نیروی اصطکاک، مستقل از نیرویی که اعمال می‌شود، ثابت می‌ماند.

نیروی اصطکاک بین سطوحی که نسبت به هم ساکن‌اند، نیروی اصطکاک ایستایی نامیده می‌شود. بیشترین مقدار نیروی اصطکاک ایستایی (متناظر با قلهٔ $t = 4\,\text{s}$ در شکل ۱ز) برابر است با کمترین مقدار نیروی لازم برای اینکه جسم شروع به حرکت کند. با شروع حرکت، نیروی اصطکاک بین سطوح معمولاً کم می‌شود، یعنی نیروی کمتری لازم است تا حرکت یکنواخت را حفظ کند (متناظر با نیروی تقریباً

---

۱. یک مرجع عمومی خوب برای اصطکاک، مقاله‌ای است که در دایرة‌المعارف بریتانیکا، ویراست چهاردهم، در این باره آمده است.




شکل۱. (الف تا د) نیروی خارجی $\mathbf{F}$ که به جسم ساکنی اعمال می‌شود؛ با نیروی اصطکاک $\mathbf{f}$ خنثی می‌شود. $\mathbf{f}$ با $\mathbf{F}$ هم‌اندازه، و در خلاف جهت آن است. با افزایش $\mathbf{F}$، $\mathbf{f}$ هم زیاد می‌شود، تا وقتی که به حداکثر معینی برسد. (ه) در این حالت، جسم "کَنده می‌شود" و به طرف چپ شتاب می‌گیرد. (و) اگر بخواهیم که جسم با سرعت ثابت حرکت کند، باید نیروی $\mathbf{F}$ را از مقداری که درست پیش از به حرکت درآمدن جسم داشت کمتر کنیم. (ز) نتایج تجربی: نیروی $\mathbf{F}$ را، از حدود $t = 2\text{s}$، از مقدار صفر زیاد می‌کنیم، و حرکت تقریباً در زمان $t = 4\text{s}$ ناگهان شروع می‌شود[1].

ثابت در $t > 4\text{s}$ در شکل ۱(ز). نیروی اصطکاک بین سطوح متحرک نسبت به یکدیگر را نیروی اصطکاک جنبشی می‌نامند.

برای بیشینهٔ نیروی اصطکاک ایستایی بین هرزوج سطح خشک روغنکاری نشده، دو قانون تجربی داریم: ۱. این مقدار، در گستره‌ای وسیع تقریباً مستقل از مساحت ناحیهٔ تماس است و ۲. این مقدار، متناسب با نیروی عمود بر سطح است.[2] نیروی عمود برسطح (که گاهی آن‌را نیروی باز می‌نامند) از خواص کشسانی اجسام در حال تماس با هم ناشی می‌شود (فصل ۱۴). چنین اجسامی هرگز به‌طور کامل صلب نیستند؛ اگر نیرویی بر جسمی وارد شود و جسم نتواند در جهت نیرو حرکت کند، تغییر شکل می‌دهد (فشرده

و با نیروی وارد مقابله می‌کند. برای جسمی که روی یک میز افقی ساکن است یا می‌لغزد، اندازهٔ نیروی عمود بر سطح برابر با وزن جسم است. چون جسم شتاب عمودی ندارد، میز باید نیرویی بر آن وارد کرده باشد که به طرف بالاست و اندازهٔ آن با کشش رو به پایین زمین بر جسم، یعنی وزن جسم، برابر است.

نسبت بیشترین مقدار نیروی اصطکاک ایستایی به اندازهٔ نیروی عمودی میان دو سطح را ضریب اصطکاک ایستایی آن سطوح می‌نامند. اگر $f_s$ اندازهٔ نیروی اصطکاک ایستایی باشد، می‌شود نوشت

$$f_s \leq \mu_s N \qquad (۱)$$

که درآن، $\mu_s$ ضریب اصطکاک ایستایی و $N$ اندازهٔ نیروی عمودی است. تساوی فقط وقتی برقرار است که $f_s$ بیشترین مقدارش را داشته باشد.

در مورد نیروی اصطکاک جنبشی $f_k$ بین سطوح خشک و روغنکاری نشده هم، دو قانون مشابه برقرار است. ۱. نیروی اصطکاک جنبشی، در گسترهٔ وسیعی، تقریباً مستقل از مساحت ناحیهٔ تماس دو سطح است. ۲. نیروی اصطکاک جنبشی متناسب با نیروی عمودی است. نیروی اصطکاک جنبشی، تا حدود زیادی از سرعت نسبی سطوح هم مستقل است.

نسبت اندازهٔ نیروی اصطکاک جنبشی به اندازهٔ نیروی عمود بر سطح را ضریب اصطکاک جنبشی می‌نامند. اگر $f_k$ نمایندهٔ اندازهٔ نیروی اصطکاک جنبشی باشد، داریم

$$f_k = \mu_k N \qquad (۲)$$

که در آن، $\mu_k$ ضریب اصطکاک جنبشی است.

$\mu_s$ و $\mu_k$، هر دو ثابتِ بدون بعدند، زیرا نسبت (اندازهٔ) دو نیرو هستند. برای هر زوج سطح، معمولاً $\mu_s > \mu_k$ است. مقادیر واقعی $\mu_s$ و $\mu_k$ به چگونگی سطوح تماس بستگی دارد. در اغلب موارد می‌توان این دو مقدار را (برای یک زوج سطح معین) در گسترهٔ وسیعی از نیروها و سرعتهایی که با آنها سروکار داریم، ثابت فرض کرد. هم $\mu_s$ و هم $\mu_k$ می‌توانند بزرگتر از یک باشند، گرچه معمولاً کوچکتر از یک‌اند. در جدول ۱ مقادیر نوعی $\mu_s$ و $\mu_k$ برای بعضی مواد آمده است.

دقت کنید که روابط ۱ و ۲ فقط بین اندازه نیروی عمودی و نیروی اصطکاک برقرارند. نیروی اصطکاک و نیروی عمود بر سطح، همواره بر هم عمودند.

---

۱. برای آشنایی با جزئیات این آزمایش، رجوع کنید به "Undergraduate Computer-Interfacing Projects," Joseph Priest and John Snyder, *The Physics Teacher*, May 1987, p. 303.

۲. این دو قانون اصطکاک را ابتدا لئوناردو داوینچی (۱۴۵۲ تا ۱۵۱۹) به‌طور تجربی کشف کرد. بیان لئوناردو از این دو قانون، با توجه به اینکه دو قرن پیش از پرداخت مفهوم نیرو توسط نیوتون بود، کار بسیار مهمی بود. عبارتهای ریاضی قوانین اصطکاک و مفهوم ضریب اصطکاک را بعداً شارل اوگوستین کولن (۱۷۳۶ تا ۱۸۰۶) معرفی کرد. شهرت کولن بیشتر به خاطر مطالعاتش دربارهٔ الکتروستاتیک است (فصل ۲۲).

جدول ۱. ضرایب اصطکاک*.

| سطوح | $\mu_s$ | $\mu_k$ |
|---|---|---|
| چوب بر چوب | ۰ر۲۵ – ۰ر۵ | ۰ر۲ |
| شیشه برشیشه | ۱ر۰ – ۰ر۹ | ۰ر۴ |
| فولاد بر فولاد، برای سطوح تمیز | ۰ر۶ | ۰ر۶ |
| فولاد بر فولاد، برای سطوح روغنکاری شده | ۰ر۰۹ | ۰ر۰۵ |
| لاستیک بر بتون خشک | ۱ر۰ | ۰ر۸ |
| چوب اسکی موم‌زده بر برف خشک | ۰ر۰۴ | ۰ر۰۴ |
| تفلون بر تفلون | ۰ر۰۴ | ۰ر۰۴ |

* مقادیر این جدول تقریبی‌اند و فقط برای تخمین مناسب‌اند. مقدار واقعی ضریب اصطکاک هر زوج سطح بستگی به شرایطی از قبیل تمیز بودن سطوح، دما، و رطوبت دارد.

## اساس میکروسکوپی اصطکاک (اختیاری)

در مقیاس اتمی، صیقلی‌ترین سطوح هم خیلی با صفحه فرق دارند. مثلاً، شکل ۲ یک نمایهٔ واقعی از سطح فولاد فوق‌العاده صیقلی است، که البته، برای وضوح، خیلی‌خیلی درشت شده است. به‌راحتی می‌توان قبول کرد که وقتی دو جسم با هم در تماس باشند، مساحت میکروسکوپی واقعی ناحیهٔ تماس خیلی کمتر از مساحت واقعی سطوح است؛ در مواردی نسبت این دو مساحت می‌تواند حتی یک بر ده هزار باشد.

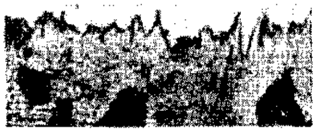
مساحت (میکروسکوپی) واقعی ناحیهٔ تماس با نیروی عمود بر سطح متناسب است، زیرا نقاط تماس، تحت تنشهای شدیدی که در این نقاط ایجاد می‌شود، مثل مواد پلاستیکی تغییر شکل می‌دهند. در واقع بسیاری از نقاط تماس با هم "جوشِ سرد" می‌خورند. علت این پدیده، چسبندگی سطحی است: در نقاطِ تماس مولکولهای دو طرف چنان به هم نزدیک می‌شوند که می‌توانند نیروهای قوی بین مولکولی بر هم وارد کنند.

وقتی جسمی (مثلاً فلزی) روی جسم دیگری کشیده می‌شود، دائماً هزاران جوش کوچک شکسته می‌شود و تماسهای جدیدی برقرار می‌شود (شکل ۳)، و همین پدیده است که موجب مقاومت اصطکاکی می‌شود. آزمایش با ردیابهای پرتوزایی نشان داده است که در این عمل شکستن جوشها، مقادیر کوچکی از یک سطح فلزی می‌توانند کنده شود و به سطح دیگر بچسبند. اگر سرعت نسبی سطوح به‌قدر کافی زیاد باشد، ممکن است فلز در محل بعضی از نقاطِ تماس ذوب شود، اگرچه خودِ سطح در کل فقط کمی گرم می‌شود. همین رویدادهای "چسبیدن و لغزیدن"اند که موقع مالش سطوح بر یکدیگر تولید صدا می‌کنند؛ مثل جیرجیر گچ روی تخته سیاه.[1]

ضریب اصطکاک به متغیرهای زیادی بستگی دارد، از جمله جنس مواد، پرداخت سطوح، لایه‌های سطحی، دما، و میزان ناخالصی. مثلاً، اگر دو سطح فلزی بسیار تمیز را در اتاقکی با خلأ شدید بگذاریم تا لایهٔ سطحی اکسید نتواند تشکیل شود، ضریب اصطکاک بسیار زیاد می‌شود و دو سطح در واقع محکم به هم "جوش می‌خورند". اگر کمی هوا وارد اتاقک کنیم، روی سطوح لایهٔ اکسید تشکیل می‌شود و ضریب اصطکاک کم می‌شود و به مقدار "عادی"اش می‌رسد.

نیروی اصطکاکی که مانع غلتیدن اجسام بر هم می‌شود، خیلی کمتر از اصطکاک لغزشی است؛ همین است که موجب مزیت چرخ بر سورتمه می‌شود. علت عمدهٔ کاهشِ اصطکاک این است که در غلتش، جوشهای سطحی میکروسکوپیک از هم کنده و برداشته می‌شوند، در حالی‌که در لغزش، جوشها کشیده و بریده می‌شوند. چنین است که نیروی اصطکاک غلتشی چندین بار کوچکتر است.

مقاومت اصطکاکی در اصطکاک لغزشی خشک را با روغنکاری می‌توان به مقدار قابل‌توجهی کم کرد. یک نقاشی بر دیوار غاری در مصر، که زمان آن در حدود ۱۹۰۰ پیش از میلاد است، مجسمهٔ سنگی بزرگی را نشان می‌دهد که روی سورتمه‌ای کشیده می‌شود، و مردی در جلوی آن، روی مسیر روغن می‌ریزد. روش مؤثرتری هم وجود دارد و آن اینکه لایه‌ای از گاز بین سطوح لغزنده قرار بدهند. ریل هوایی آزمایشگاه و یاتاقان سوار بر "بالشتک گاز" دو نمونه از موارد استفادهٔ این روش‌اند. با معلق نگهداشتن اجسام به کمک نیروهای مغناطیسی، اصطکاک را از این هم می‌شود کمتر کرد. قطارهایی که (اخیراً ساخته می‌شوند) با استفاده از میدان مغناطیسی به حالت تعلیق در می‌آیند، قابلیت حرکت بسیار سریع و تقریباً بدون اصطکاک را دارند.



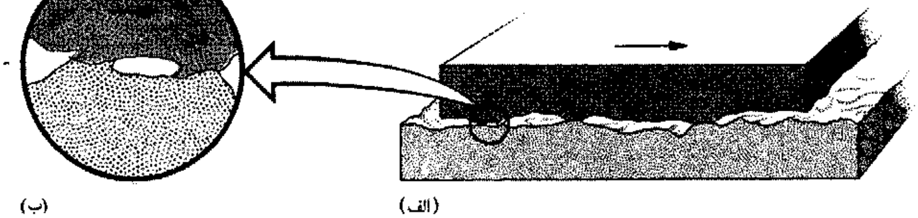
شکل ۲. نمایهٔ بزرگ‌شدهٔ یک سطح فولادی بسیار صیقلی. ابعاد قائم بی‌نظمیهای سطح، چند هزار برابر قطر اتم است. برش طوری مایل انجام گرفته که مقیاس عمودی ۱۰ برابر مقیاس افقی بزرگ شده است.

---

مثال ۱. جسمی روی سطح شیبداری که با سطح افقی زاویهٔ $\theta$ می‌سازد ساکن است (شکل ۴الف). با زیاد کردن زاویهٔ شیب، درمی‌یابیم که درست در $\theta_s = 15°$ لغزش شروع می‌شود. ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح شیبدار چقدر است؟

حل: نیروهای وارد بر جسم، که آن‌را ذره در نظر می‌گیریم، در شکل ۴ب نشان داده شده است. وزن جسم $mg$، نیروی عمودی وارد بر جسم از سطح شیبدار $\mathbf{N}$، و نیروی اصطکاک وارد بر جسم از سطح شیبدار $\mathbf{f}_s$ است. توجه کنید که نیروی برایند وارد بر جسم از سطح شیبدار، $\mathbf{N} + \mathbf{f}_s$، دیگر بر سطح تماس عمود نیست (برخلاف حالتی که سطح بدون اصطکاک بود). چون جسم ساکن است، از قانون دوم

[1] می‌توانید رجوع کنید به
"Stick and Slip," Ernest Rabinowicz in *Scientific American*, May 1956, p. 109.




شکل۳. سازوکار اصطکاک لغزشی. (الف) سطح رویی، در این نمای بزرگ، روی سطح زیری به طرف راست می‌لغزد. (ب) تصویر بزرگ شده‌ای که دو نقطهٔ جوش سرد را نشان می‌دهد. برای شکستن این جوشها و ادامهٔ حرکت، نیرو لازم است.

نیوتون نتیجه می‌شود که $\sum \mathbf{F} = ۰$. نیروها را به مؤلفه‌های $x$ و $y$ (به‌ترتیب، در راستای سطح شیبدار و عمود بر آن) تجزیه می‌کنیم. نتیجه می‌گیریم که

برای مؤلفهٔ $x$: $\sum F_x = f_s - mg\sin\ \theta = ۰$ یا

$$f_s = mg\sin\ \theta$$

برای مؤلفهٔ $y$: $\sum F_y = N - mg\cos\ \theta = ۰$ یا

$$N = mg\cos\ \theta$$

در زاویهٔ $\theta_s$، که لغزش شروع می‌شود، $f_s$ بیشترین مقدارش را دارد و برابر است با $\mu_s N$. مقادیر بالا را به‌ازای $\theta_s$ به‌دست می‌آوریم و بر هم تقسیم می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$\frac{f_s}{N} = \frac{mg\sin\ \theta_s}{mg\cos\theta_s} = \tan\theta_s$$

یا

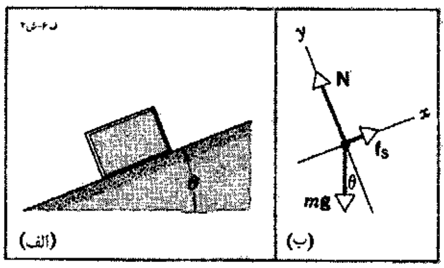
$$\mu_s = \tan\theta_s = \tan ۱۵° = ۰٫۲۷$$

بنابراین، سنجش زاویه‌ای که لغزش از آن آغاز می‌شود، روش تجربی ساده‌ای برای تعیین ضریب اصطکاک ایستایی بین سطوح است. توجه کنید که نتیجهٔ کار مستقل از وزن جسم است.

با استدلال مشابهی می‌توانید نشان بدهید که زاویهٔ سطح شیبدار $\theta_k$، که به‌ازای آن جسم (که قبلاً با ضربهٔ کوچکی به‌راه افتاده است) با سرعت ثابت به پایین می‌لغزد، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\mu_k = \tan\ \theta_k$$

که $\theta_k < \theta_s$ است. به کمک خط‌کش می‌شود تانژانت زاویهٔ شیب را اندازه گرفت؛ به این ترتیب، می‌توانید $\mu_s$ و $\mu_k$ را برای سکه‌ای که از روی کتابتان به پایین می‌لغزد تعیین کنید.




شکل۴. مثال ۱. (الف) جسمی که روی سطح شیبدار ناهمواری ساکن است. (ب) نمودار جسم‌ـآزاد این جسم.

مثال ۲. اتومبیلی با سرعت $v_۰$ روی جادهٔ افقی مستقیمی حرکت می‌کند. اگر ضریب اصطکاک ایستایی میان لاستیک و جاده $\mu_s$ باشد، کمترین مسافت لازم برای توقف اتومبیل چقدر است؟

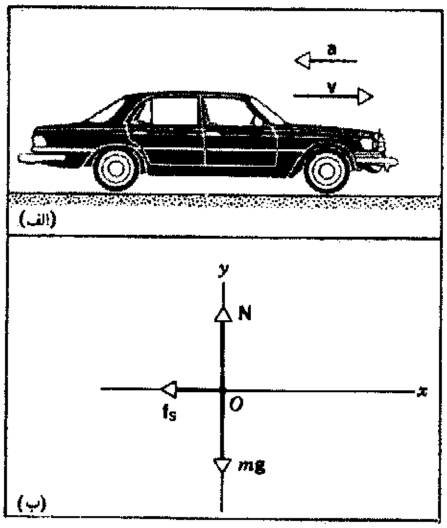
حل: شکل ۵ نیروهای وارد بر اتومبیل را نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم اتومبیل در جهت مثبت $x$ حرکت می‌کند. اگر $f_s$ را ثابت بگیریم، حرکت با شتاب ثابت کند می‌شود.

از رابطهٔ

$$v^۲ = v_۰^۲ + ۲a(x - x_۰)$$

با انتخاب مکان اولیهٔ $x_۰ = ۰$ و سرعت نهایی $v = ۰$، نتیجه می‌شود که

$$x = -\frac{v_۰^۲}{۲a}$$




شکل۵. مثال ۲. (الف) اتومبیلی با شتاب کندکننده. (ب) نمودار جسم‌ـآزاد اتومبیل با شتاب کندکننده، که به عنوان ذره در نظر گرفته می‌شود. برای سادگی، نقطهٔ اثر همهٔ نیروها را در یک جا می‌گیریم: در واقع، سه نیرویی که در شکل مشخص شده‌اند، مجموع نیروهایی هستند که بر هر یک از چهار چرخ اتومبیل وارد می‌شوند.

$x$ مسافت توقف است، که طی آن سرعت از $v_0$ به ۰ می‌رسد. چون $a$ منفی است، $x$، چنان که انتظار می‌رود، مثبت است.

برای تعیین $a$، قانون دوم نیوتون را برای مؤلفه‌های شکل ۵ب به‌کار می‌بریم:

مؤلفهٔ $x$: $\sum F_x = -f_s = ma$ یا $a = -f_s/m$

مؤلفهٔ $y$: $\sum F_y = N - mg = 0$ یا $N = mg$

بنابراین

$$f_s = \mu_s N = \mu_s mg$$

این مقادیر را در عبارت $a$ جایگذاری می‌کنیم، نتیجه می‌شود که

$$a = -\frac{f_s}{m} = -\mu_s g$$

به‌این ترتیب، مسافت توقف برابر است با

$$x = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2\mu_s g}$$

هر چه سرعت اولیه بیشتر باشد، مسافت بیشتری برای توقف لازم است؛ در واقع، این مسافت با مجذور سرعت اولیه متناسب است. همچنین، هرچه ضریب اصطکاک میان سطوح بیشتر باشد، مسافت کمتری برای توقف لازم است.

در این مثال ضریب اصطکاک ایستایی را به‌کار بردیم نه ضریب اصطکاک جنبشی را، زیرا فرض کرده‌ایم که لاستیکها روی جاده نمی‌لغزند. به‌علاوه، فرض کرده‌ایم که بیشترین مقدار نیروی اصطکاک ایستایی ($f_s = \mu_s N$) وارد می‌شود، زیرا می‌خواسته‌ایم کمترین مسافت توقف را پیدا کنیم. اگر نیروی اصطکاک ایستایی کوچکتر باشد، روشن است که مسافت توقف بیشتر می‌شود. روش صحیح ترمز کردن برای توقف در کمترین مسافت، آن است که حرکت اتومبیل را درست در آستانهٔ لغزش نگه داریم. (اتومبیلهای مجهز به سیستم ضد قفلِ ترمز، خود به‌خود چنین وضعیتی را فراهم می‌کنند.) اگر سطح جاده صاف باشد و پدال ترمز را تا ته فشار بدهیم، ممکن است لغزش رخ بدهد. در این حالت، $\mu_k$ جانشین $\mu_s$ می‌شود و مسافت لازم برای توقف بیشتر می‌شود، زیرا $\mu_k$ از $\mu_s$ کوچکتر است.

به عنوان مثالی مشخص، اگر $v_0 = 60\,\text{mi/h} = 27\,\text{m/s}$، و $\mu_s = 0.60$ باشد (که معمولاً هم در همین حدود است) نتیجه می‌شود

$$x = \frac{v_0^2}{2\mu_s g} = \frac{(27\,\text{m/s})^2}{2(0.60)(9.8\,\text{m/s}^2)} = 62\,\text{m}$$

توجه کنید که این نتیجه مستقل از جرم اتومبیل است. در اتومبیلهایی که موتورشان در جلوست ولی نیرو را به چرخ عقب منتقل می‌کنند، هنگام رانندگی در جاده‌های برفی اغلب سعی می‌کنند "چرخهای عقب را سنگین‌تر کنند"، یعنی مثلاً صندوق عقب را بار می‌کنند تا ایمنی رانندگی بیشتر شود. این تجربه را چگونه می‌توان با نتیجهٔ ما ـــ مبنی بر مستقل از جرم بودنِ مسافت توقف ـــ سازگار کرد؟ (راهنمایی: مسئلهٔ ۲ را ببینید.)

**مثال ۳.** مثال ۱۰ فصل ۵ را تکرار کنید، اما این بار نیروی اصطکاک میان جسم ۱ و سطح شیبدار را هم در نظر بگیرید. مقادیر $\mu_s = 0.24$ و $\mu_k = 0.15$ را به‌کار ببرید.

حل: اگر فرض کنیم، چنانکه در مثال ۱۰ فصل ۵ دیدیم، جسم ۱ از سطح شیبدار به پایین می‌لغزد، نیروی اصطکاک به طرف بالای سطح شیبدار است. شکل ۶ نمودار جسم‌ـآزاد $m_1$ را نشان می‌دهد. در این حالت، معادلات مؤلفه‌ای قانون دوم نیوتون برای $m_1$ عبارت‌اند از

مؤلفهٔ $x$: $\sum F_x = T + f - m_1 g \sin\theta = m_1 a_{1x} = -m_1 a$

مؤلفهٔ $y$: $\sum F_y = N - m_1 g \cos\theta = m_1 a_{1y} = 0$

در اینجا صریحاً این انتظار را که $a_1$ باید در جهت منفی $x$ باشد (یعنی $a_{1x} = -a$)، وارد کرده‌ایم. در معادلهٔ مربوط به $m_2$ هم تغییر مشابهی می‌دهیم:

$$\sum F_y = m_2 g - T = m_2 a_{2y} = -m_2 a$$

گذاشته‌ایم $a_{2y} = -a$، زیرا انتظار داریم جسم ۲ در جهت منفی $y$ حرکت کند.

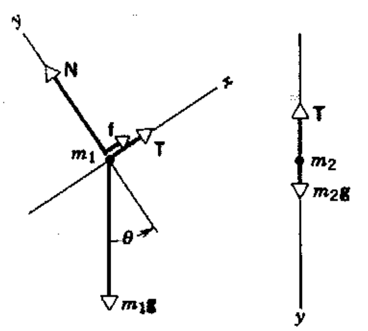
با استفاده از $f = \mu_k N = \mu_k m_1 g \cos\theta$، از مؤلفهٔ $x$ معادلهٔ $m_1$ نتیجه می‌شود که

$$T + \mu_k m_1 g \cos\theta - m_1 g \sin\theta = -m_1 a$$

دو معادلهٔ اخیر را با هم حل می‌کنیم، و مجهولهای $a$ و $T$ را به‌دست می‌آوریم:

$$a = -g\frac{m_2 - m_1(\sin\theta - \mu_k \cos\theta)}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}(1 + \sin\theta - \mu_k \cos\theta) \quad (4)$$




شکل۶. مثال ۳. نمودارهای جسم‌ـآزاد شکل ۲۰ فصل ۵، با در نظر گرفتن اصطکاک در راستای سطح شیبدار.

توجه کنید که در حد $\mu_k \to 0$، معادلات ۳ و ۴ به معادلات ۹ و ۱۰ مثال ۱۰ فصل ۵ تبدیل می‌شوند (تنها علامت $a$ فرق می‌کند زیرا در این مورد آن‌را در خلاف جهت قبلی گرفته‌ایم).

مقدار عددی $a$ و $T$ را به‌دست می‌آوریم:

$$a = (-9.80\,\mathrm{m/s^2}) \times \frac{2.6\mathrm{kg} - 9.5\mathrm{kg}(\sin 34^\circ - 0.15\cos 34^\circ)}{2.6\mathrm{kg} + 9.5\mathrm{kg}} = 1.2\,\mathrm{m/s^2}$$

$$T = \frac{(9.5\mathrm{kg})(2.6\mathrm{kg})(9.80\,\mathrm{m/s^2})}{9.5\mathrm{kg} + 2.6\mathrm{kg}} \times (1 + \sin 34^\circ - 0.15\cos 34^\circ) = 29\mathrm{N}$$

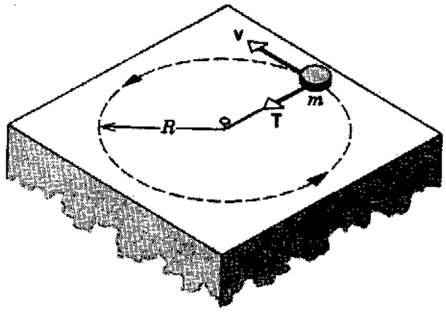
مثبت بودن $a$ با طرح اولیهٔ ما برای معادلات سازگار است؛ جسم به طرف پایین سطح شیبدار حرکت می‌کند، همان‌طور که در مثال ۱۰ فصل ۵ حرکت می‌کرد، اما شتاب آن از شتاب حالت بدون اصطکاک (که $2.2\,\mathrm{m/s^2}$ بود) کمتر است.

کشش ریسمان کمتر از حالت بدون اصطکاک (۳۱N) است. جسم ۱، در حضور اصطکاک با شتاب کمتری به پایین سطح شیبدار می‌رود؛ بنابراین، ریسمان متصل به جرم ۲ را با شدت کمتری می‌کشد.

پرسش دیگری که باید پاسخ بدهیم این است که اصولاً آیا سیستم حرکت می‌کند یا خیر. یعنی، آیا نیروی کافی برای غلبه بر اصطکاک ایستایی و شروع حرکت وجود دارد؟ اگر سیستم ابتدا در حالت سکون باشد، کشش ریسمان برابر با وزن $m_2$، یعنی $(2.6\mathrm{kg})(9.8\mathrm{m/s^2}) = 26\mathrm{N}$ است. بیشترین مقدار اصطکاک ایستایی، که با تمایل جسم ۱ برای حرکت به پایین سطح شیبدار مخالفت می‌کند، $\mu_s N = \mu_s m_1 g \cos\theta = 19\mathrm{N}$ است. مؤلفهٔ وزن $m_1$ در جهت پایین سطح شیبدار $m_1 g \sin\theta = 52\mathrm{N}$ است. بنابراین، مؤلفهٔ وزن درجهت پایین سطح شیبدار (۵۲N) بیش از مقدار لازم برای غلبه بر مجموع نیروهای کشش و اصطکاک ایستایی $(26\mathrm{N} + 19\mathrm{N} = 45\mathrm{N})$ است، و سیستم واقعاً حرکت می‌کند. خودتان باید بتوانید نشان بدهید که اگر ضریب اصطکاک ایستایی از ۰٫۳۴ بیشتر باشد، حرکتی در کار نخواهد بود.

## ۶ـ۳ دینامیک حرکت دایره‌ای یکنواخت

در بخش ۴ـ۴ دیدیم جسمی که با سرعت ثابت $v$ روی دایره یا کمانی به شعاع $r$ حرکت می‌کند، شتاب مرکزگرای $\mathbf{a}$ دارد که اندازهٔ آن $v^2/r$ است. $\mathbf{a}$ همواره در راستای شعاع و جهت آن به‌طرف مرکز دایره است. بنابراین، $\mathbf{a}$ یک بردار متغیر است، زیرا، اگرچه اندازهٔ آن ثابت است، جهتش مدام تغییر می‌کند. می‌توانید به شکل ۱۱ فصل ۴ برگردید؛ این شکل رابطهٔ برداری بین $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ در حرکت دایره‌ای با سرعت ثابت را نشان می‌دهد.




شکل۷. قرصی به جرم $m$ با سرعت ثابت در مسیری دایره‌ای بر سطح افقی بدون اصطکاکی حرکت می‌کند. تنها نیروی افقی وارد بر قرص کشش $\mathbf{T}$ است که ریسمان با آن قرص را می‌کشد؛ $\mathbf{T}$ همان نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دایره‌ای است. نیروهای عمودی ($mg$ و $\mathbf{N}$) را در شکل نشان نداده‌ایم.

طبق قانون دوم نیوتون $(\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a})$ بر هر جسم شتابداری باید نیروی خالصی اثر کند. بنابراین (با فرض اینکه در یک چارچوب لخت قرار داریم)، اگر مشاهده کنیم که جسمی حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد، می‌توانیم مطمئن باشیم که اندازهٔ نیروی خالص $\sum \mathbf{F}$ وارد بر آن از رابطهٔ زیر تبعیت می‌کند:

$$\left|\sum \mathbf{F}\right| = ma = \frac{mv^2}{r} \qquad (5)$$

این جسم در حالت تعادل نیست زیرا نیروی خالص وارد بر آن صفر نیست. جهت نیروی خالص $\sum \mathbf{F}$ در هر لحظه، باید با جهت $\mathbf{a}$ در همان لحظه یکی باشد؛ یعنی شعاعی و مرکزگرا. این نیرو را عامل (یا عوامل) خارجی، که در محیط جرم $m$ واقع شده است، بر آن وارد می‌کند.

اگر جسمی که حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد قرصی باشد که به سر ریسمانی بسته شده است و روی میزی افقی و بدون اصطکاک حرکت می‌کند (شکل ۷)، نیروی خالص وارد بر قرص را کشش $\mathbf{T}$ ریسمان تأمین می‌کند. این نیرو به قرص شتاب می‌دهد و جهت سرعت آن‌را به‌طور پیوسته تغییر می‌دهد. به‌این ترتیب است که قرص می‌تواند روی دایره حرکت کند. جهت $\mathbf{T}$ همواره به طرف میخی است که در مرکز دایره است، و اندازهٔ آن باید برابر با $mv^2/R$ باشد.

اگر ریسمان را قطع کنیم، دیگر نیروی خالصی وجود ندارد که بر قرص اثر کند. در این صورت، قرص با سرعت ثابت روی یک خط راست، در جهت مماس بر دایره در نقطه‌ای که از قید ریسمان رها شده است، حرکت خواهد کرد. این قرص در راستای شعاع از مرکز دور نمی‌شود، روی مسیر خمیده‌ای هم پیش نمی‌رود، بلکه دقیقاً روی خط راستی در جهت $\mathbf{v}$ در لحظهٔ بریدن ریسمان، حرکت می‌کند.

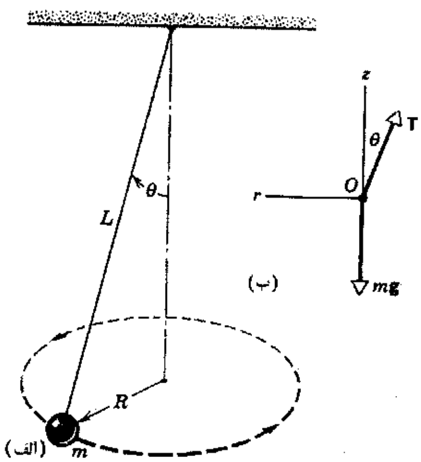
بنابراین، برای اینکه قرص روی دایره حرکت کند، باید نیرویی باشد تا آن‌را به طرف مرکز دایره، بکشد. نیرویی را که موجب حرکت دایره‌ای یکنواخت می‌شود نیروی مرکزگرا می‌نامند، زیرا جهت این نیرو "به‌طرف مرکز" دایرهٔ حرکت است؛ اما باید توجه داشت که نام "مرکزگرا" برای نیرو، تنها به این معنی است که جهت آن شعاعی و به طرف داخل است؛ این اسم، هیچ چیز دربارهٔ ماهیت نیرو یا جسمی که آن‌را وارد می‌کند نمی‌گوید: در مورد قرص گردان شکل ۷، نیروی مرکزگرا یک نیرویی کششی است که ریسمان آن‌را فراهم می‌کند؛ در مورد ماه که به دور زمین می‌گردد، نیروی مرکزگرا کشش گرانشی زمین بر ماه است؛ در مورد الکترونی که به دور هستهٔ اتم می‌گردد، نیروی مرکزگرا از نوع الکتروستاتیک است. نیروی مرکزگرا نوع جدیدی از نیرو نیست، بلکه عبارتی برای توصیف رفتار زمانی بعضی نیروهاست، که همهٔ آنها را می‌توان به اجسام معینی در محیط جسم منسوب کرد. نیرو می‌تواند مرکزگرا و اصطکاکی، مرکزگرا و گرانشی، مرکزگرا و الکتروستاتیک، یا مرکزگرا و هر نوع دیگری باشد.

حالا چند نمونه از نیروهایی را که مرکزگرا عمل می‌کنند بررسی می‌کنیم.

### آونگ مخروطی

شکل ۸ جسم کوچکی به جرم $m$ را نشان می‌دهد که به سر ریسمانی به طول $L$ بسته شده است و با سرعت ثابت $v$ روی دایره‌ای افقی می‌گردد. با حرکت جسم، ریسمان سطح جانبی یک مخروط فرضی را می‌روبد. این وسیله را آونگ مخروطی می‌نامند. می‌خواهیم زمان یک دورگردش کامل جسم را به‌دست بیاوریم.

اگر زاویهٔ ریسمان با راستای عمودی $\theta$ باشد، شعاع مسیر دایره‌ای $R = L\sin\,\theta$ است. نیروهای وارد بر جسم عبارت‌اند از وزن جسم $mg$ و کشش ریسمان $\mathbf{T}$ (شکل ۸ب). به این ترتیب، قانون دوم نیوتون




شکل۸. آونگ مخروطی (الف) جسمی به جرم $m$، که از ریسمانی به طول $L$ آویزان است، روی دایره حرکت می‌کند؛ ریسمان مخروط قائمی با نیم‌زاویهٔ $\theta$ می‌سازد. (ب) نمودار جسم‌ـآزاد جسم.

نتیجه می‌دهد که

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}$$

روشن است که نیروی خالص وارد بر جسم مخالف صفر است، و باید هم این‌طور باشد زیرا نیرویی لازم است تا جسم بتواند با سرعت ثابت روی دایره حرکت کند.

$\mathbf{T}$ را، در هر لحظه، به دو مؤلفهٔ شعاعی و عمودی تجزیه می‌کنیم:

$$T_z = T\cos\,\theta \quad \text{و} \quad T_r = -T\sin\,\theta$$

اگر جهت شعاعی مثبت را به طرف خارج محور تعریف کنیم، مؤلفهٔ شعاعی منفی می‌شود.

چون جسم شتاب عمودی ندارد، مؤلفهٔ $z$ قانون دوم نیوتون را می‌توان چنین نوشت

$$\sum F_z = T_z - mg = 0$$

یا

$$T\cos\,\theta = mg$$

شتاب شعاعی $a_r = -v^2/R$ است؛ علامت منفی به‌خاطر آن است که شتاب به‌طرف داخل است (یعنی در خلاف جهت $\mathbf{r}$، که به عنوان جهت شعاعی مثبت گرفته‌ایم). این شتاب را $T_r$ (مؤلفهٔ شعاعی $\mathbf{T}$) تأمین می‌کند، که همان نیروی مرکزگرای وارد بر $m$ است. بنابراین، از مؤلفهٔ شعاعی قانون دوم نیوتون نتیجه می‌شود که

$$\sum F_r = T_r = ma_r$$

یا

$$-T\sin\,\theta = -mv^2/R$$

از تقسیم معادلات مؤلفه‌های شعاعی و $z$ برهم، نتیجه می‌شود که

$$\frac{-T\sin\,\theta}{T\cos\,\theta} = \frac{-mv^2/R}{mg}$$

$v$ را از این معادله به‌دست می‌آوریم:

$$v = \sqrt{Rg\tan\theta}$$

از این رابطه، سرعت ثابت جسم به‌دست می‌آید. $t$ را زمان یک گردش کامل جسم می‌گیریم، نتیجه می‌شود که

$$v = \frac{2\pi R}{t}$$

یا

$$t = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{Rg \tan\theta}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g \tan\theta}}$$

اما $R = L \sin\theta$ است، پس

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{L \cos\theta}{g}} \qquad (6)$$

این معادله، رابطهٔ بین $t$، $L$، و $\theta$ را به‌دست می‌دهد. توجه کنید که $t$، که دورهٔ تناوب حرکت نامیده می‌شود، به $m$ بستگی ندارد.

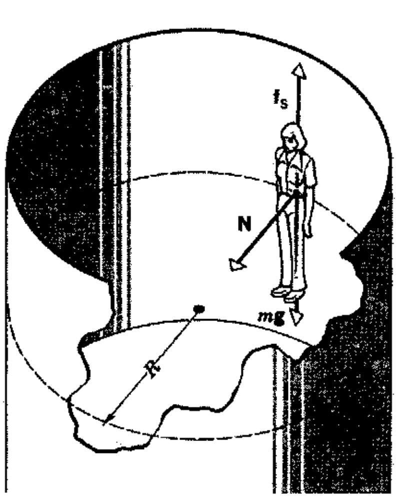
اگر $L = 1{,}2\text{m}$ و $\theta = 25°$ باشد، دوره یا زمان تناوب حرکت چقدر می‌شود؟ از رابطهٔ بالا داریم

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{(1{,}2\text{m})(\cos 25°)}{9{,}8\text{m/s}^2}} = 2{,}1\text{s}$$

### گردونه

در بسیاری از پارکهای تفریحی وسیله‌ای به نام گردونه وجود دارد. گردونه فضای استوانه‌ای توخالی‌ای است که می‌شود آن‌را حول محور قائم مرکزی استوانه به چرخش درآورد. شخص وارد گردونه می‌شود، در را می‌بندد، و کنار دیواره می‌ایستد. گردونه شروع به چرخیدن می‌کند، و به‌تدریج سرعتش زیاد می‌شود. در یک سرعت معین، "کف" زیرپای شخص به پایین می‌رود و حفرهٔ عمیقی زیرپای او ظاهر می‌شود. این شخص البته نمی‌افتد، بلکه "میخکوب" به دیوارهٔ گردونه باقی می‌ماند. کمترین سرعت گردونه که می‌تواند شخص را میخکوب نگه دارد چقدر است؟

شکل ۹ نیروهای وارد بر شخص را نشان می‌دهد. وزن شخص $mg$ است، نیروی اصطکاک ایستایی میان شخص و دیوارهٔ گردونه $\mathbf{f}_s$ است، و $\mathbf{N}$ نیروی عمود بر سطحی است که دیواره برشخص وارد می‌کند. (خواهیم دید که همین نیرو، نیروی مرکزگرای لازم است.) اینجا




شکل۹. گردونه. نیروهای وارد بر شخص مشخص شده‌اند.

هم، مانند محاسبهٔ قبل، نیروها را به مؤلفه‌های شعاعی و قائم تجزیه می‌کنیم. جهت مثبت محورz را رو به بالا می‌گیریم؛ اگر قرار باشد شخص نیفتد، در راستای $z$ نباید شتابی داشته باشیم. از مؤلفهٔ $z$ قانون دوم نیوتون نتیجه می‌شود که

$$\sum F_z = f_s - mg = ma_z = 0$$

شعاع گردونه را $R$ و سرعت مماسی شخص را $v$ می‌گیریم. شتاب شعاعی شخص $-v^2/R$ است؛ بنابراین، مؤلفهٔ شعاعی قانون دوم نیوتون را می‌توان چنین نوشت

$$\sum F_r = -N = ma_r = \frac{-mv^2}{R}$$

توجه کنید که، در این مورد، $N$ همان نیروی مرکزگراست. اگر $\mu_s$ ضریب اصطکاک ایستایی میان شخص و دیواره باشد، برای اینکه درست در آستانهٔ لغزش باشیم، باید $f_s = \mu_s N$ باشد. پس می‌توانیم بنویسیم

$$f_s = mg = \mu_s N = \frac{\mu_s mv^2}{R}$$

یا

$$v = \sqrt{\frac{gR}{\mu_s}} \qquad (7)$$

این معادله، ضریب اصطکاک لازم برای جلوگیری از لغزش را به سرعت مماسی جسمی که واقع بر دیواره است مربوط می‌کند. توجه کنید که این نتیجه بستگی به وزن شخص ندارد.

عملاً، ضریب اصطکاک بین پارچهٔ لباس شخص و دیوارهٔ گردونه (با روکشی از جنس کرباس) در حدود $0{,}40$ است. شعاع گردونه هم، نوعاً $2{,}0\text{m}$ است؛ بنابراین، $v$ باید حداقل در حدود $7{,}0\text{m/s}$ باشد. محیط مسیر دایره‌ای $2\pi R = 12{,}6\text{m}$ است؛ با سرعت $7{,}0\text{m/s}$، طی یک دورکامل $t = 12{,}6\text{m}/(7{,}0\text{m/s}) = 1{,}80\text{s}$ طول می‌کشد. بنابراین، آهنگ دوران گردونه باید $1/1{,}80\text{s} = 0{,}56$دور/s، یا در حدود $33\text{rpm}$، باشد، که همان سرعت چرخش گرامافونهای معمولی است.

### پیچ با شیب عرضی

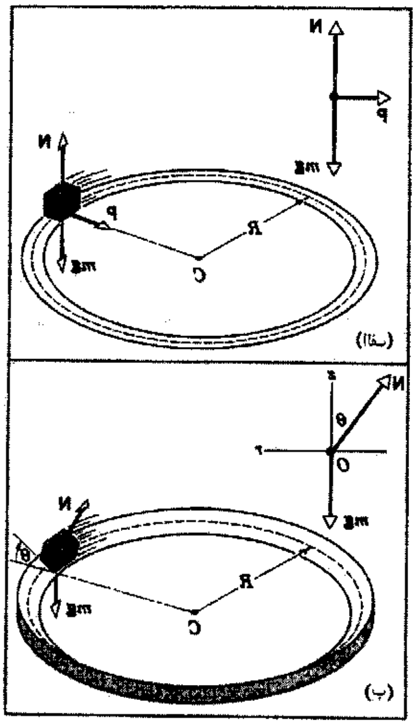
فرض کنید که جسم شکل ۱۰الف اتومبیل یا قطاری است که با سرعت ثابت $v$ در جاده‌ای افقی حرکت می‌کند و درپیچی به شعاع خمش $R$ می‌پیچد. علاوه بر دو نیروی قائم، یعنی وزن $mg$ و نیروی عمودی $\mathbf{N}$، یک نیروی افقی $\mathbf{P}$ هم باید بر اتومبیل وارد شود. نیروی $\mathbf{P}$ همان نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت بر دایره است. در مورد اتومبیل، این نیرو از اصطکاک جانبی‌ای که جاده بر چرخها اعمال می‌کند تأمین می‌شود؛ در مورد قطار، نیرو را ریل برلبه‌های درونی چرخها وارد می‌کند. در ... دو نیرو، نمی‌شود اطمینان داشت که همیشه

و از تقسیم این دو معادله بر هم نتیجه می‌شود

$$\tan\theta = v^2/Rg \tag{8}$$

توجه کنید که زاویهٔ مناسب شیب بستگی به سرعت اتومبیل و خمش جاده دارد و مستقل از جرم اتومبیل است؛ یعنی در یک شیب مناسب برای یک سرعت معین، انواع اتومبیلها می‌توانند با ایمنی حرکت کنند. شیب عرضی جاده را، برای یک خمش معین، براساس سرعت متوسطی که انتظار می‌رود طرح می‌کنند. معمولاً سر هر پیچ علامتی وجود دارد که سرعت مناسب، یعنی سرعتی را که شیب عرضی برای آن طرح شده است، مشخص می‌کند. اگر سرعت اتومبیل از این مقدار بیشتر شود، نیروی مرکزگرای اضافی را باید اصطکاک میان چرخها و جاده تأمین کند تا بتوان پیچ را به‌سلامت طی کرد.

فرمول شیب عرضی را در حالتهای حدی $v = 0$، $R \to \infty$، $v$ بزرگ، و $R$ کوچک بررسی کنید. به این هم توجه کنید که اگر معادلهٔ ۸ را برای $v$ حل کنیم، همان نتیجه‌ای حاصل می‌شود که برای سرعت وزنهٔ آونگ مخروطی به‌دست آمد. شکلهای ۸ و ۱۰ را با هم مقایسه کنید و به شباهتهایشان توجه کنید.




شکل ۱۰. (الف) جادهٔ افقی. نمودار جسم‌ـآزاد یک جسم متحرک در طرف چپ شکل آمده است. نیروی مرکزگرا باید از اصطکاک میان چرخها و جاده تأمین شود. (ب) جادهٔ با شیب عرضی. برای پیچیدن ایمن در پیچ، اصطکاک ضرورتی ندارد.

مقدارشان کافی است، و هر دو نیرو هم باعث فرسایش غیر ضروری لاستیکها یا چرخها می‌شوند. به همین دلیل، مسیر را در پیچها با شیب عرضی می‌سازند؛ (شکل ۱۰ب). در این صورت، نیروی عمودی $\mathbf{N}$، هم مثل حالت قبل یک مؤلفهٔ عمودی دارد، و هم یک مؤلفهٔ افقی که نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دایره‌ای یکنواخت را تأمین می‌کند. به این ترتیب، در مسیرهایی که به‌طور مناسب برای عبور وسایل نقلیه با سرعت معین طراحی شده باشند، نیروی جانبی دیگری لازم نیست.

برای محاسبهٔ زاویهٔ مناسب، $\theta$، در غیاب اصطکاک، می‌توانیم چنین عمل کنیم: طبق معمول، با قانون دوم نیوتون شروع می‌کنیم و به نمودار جسم‌ـآزاد شکل ۱۰ب برمی‌گردیم. شتاب قائم نداریم؛ بنابراین برای مؤلفهٔ قائم نتیجه می‌شود که

$$\sum F_z = N\cos\theta - mg = ma_z = 0$$

مؤلفهٔ شعاعی نیروی عمود بر سطح $-N\cos\theta$ است، و مؤلفهٔ شعاعی شتاب $-v^2/R$. بنابراین، از مؤلفهٔ شعاعی قانون دوم نیوتون خواهیم داشت

$$\sum F_r = -N\sin\theta = ma_r = -mv^2/R$$

## ۴ـ۶ معادلات حرکت: نیروهای ثابت و متغیر[1]

بیایید، به‌طور خلاصه، پیشرفتهایمان را در مطالعهٔ دینامیک و سینماتیک مرور کنیم. هدف نهایی آن است که حرکت ذره‌ای را که تحت تأثیر چند نیروست توصیف کنیم، طرح این تحلیل را (در یک‌بعد) می‌توان چنین نشان داد:

$$\sum F \to a \to x(t), v(t)$$

منظور این است که با استفاده از قوانین نیوتون (که در فصل ۵ بررسی شد)، شتاب هر ذره را از نیروی خالص وارد برآن به‌دست می‌آوریم. مرحلهٔ بعد، مرحله‌ای ریاضی است که در آن مکان و سرعت را (در هر زمان $t$) از مکان و سرعت اولیه و شتاب محاسبه می‌کنیم.

به‌استثنای حرکت دایره‌ای که در بخش قبلی مطالعه شد، تا به حال فقط نیروهای ثابت را بررسی کرده‌ایم (یعنی نیروهایی که مستقل از زمان، سرعت، یا مکان‌اند). اگر نیرو ثابت باشد، شتاب هم ثابت است، و در حالت شتاب ثابت در یک‌بعد، $x(t)$ و $v(t)$ به‌راحتی به‌دست می‌آیند؛ همان‌طور که در بخش ۲ـ۶ دیدیم. به این ترتیب، نیروهای ثابت را به‌طور کامل تحلیل کردیم.

اگر نیرو ثابت نباشد، باز هم می‌توانیم با استفاده از قوانین نیوتون شتاب را به‌دست بیاوریم اما دیگر نمی‌توانیم فرمولهای شتاب ثابت بخش ۲ـ۶ را برای محاسبهٔ $x(t)$ و $v(t)$ به‌کار ببریم. در این مورد باید از روشهایی شامل حساب انتگرال استفاده کنیم.

---

۱. بخشهای ۶ـ۴ تا ۶ـ۷ شامل مقدماتی از حساب انتگرال‌اند. مطالب این بخشها را می‌توان حذف کرد، یا، تا زمانی که دانشجو آشنایی بیشتری با روشهای انتگرال‌گیری پیدا کند، به تعویق انداخت.

پیش از تحلیل نیروهای متغیر، حساب انتگرال را برای نیروی ثابت به‌کار می‌بریم و همان نتایج بخش ۲ـ۶ را به‌دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم شتاب $a$ را (از قوانین نیوتون) داریم و می‌خواهیم $v(t)$ و $x(t)$ را پیدا کنیم. از اینجا شروع می‌کنیم که $a = dv/dt$. به‌این ترتیب،

$$dv = a\ dt \qquad (۹)$$

از طرفین انتگرال می‌گیریم. در طرف چپ، متغیر انتگرال‌گیری سرعت است، و حدود انتگرال‌گیری از $v_0$ در زمان ۰ تا $v$ در زمان $t$، در طرف راست، روی زمان و از ۰ تا $t$ انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\ dt \qquad (۱۰)$$

وقتی شتاب ثابت باشد، $a$ از انتگرال طرف راست بیرون می‌آید و نتیجه می‌شود که

$$v - v_0 = a \int_0^t dt \qquad (۱۱)$$

یا

$$v(t) = v_0 + at \qquad (۱۲)$$

که همان معادلهٔ ۱۵ فصل ۲ است.

در ادامه، با استفاده از $v = dx/dt$ و با یک انتگرال‌گیری دیگر، $x(t)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$dx = v\ dt = (v_0 + at)dt = v_0\,dt + at\ dt \qquad (۱۳)$$

حدود انتگرال از مکان $x_0$ در زمان ۰ تا مکان $x$ در زمان $t$ است:

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v_0\,dt + \int_0^t at\ dt \qquad (۱۴)$$

چون $a$ ثابت است باز هم آن‌را از انتگرال بیرون می‌آوریم:

$$x - x_0 = v_0 \int_0^t dt + a\int_0^t t\ dt$$
$$= v_0 t + a\left(\frac{1}{2}t^2\right)$$
$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (۱۵)$$

این معادله، همان معادلهٔ ۱۹ فصل ۲ است.

اگر شتاب ثابت نباشد، انتگرال‌گیریها مشکلتر می‌شود. گرفتن انتگرال ۱۰ و انتگرال ۱۴ و به‌دست آوردن توابع صریح $v(t)$ و $x(t)$، روش تحلیلی حل مسئله است. روش دیگر، روش عددی است، که در آن به کمک کامپیوتر انتگرالها را محاسبه می‌کنیم و [illegible] تحلیلی $v(t)$ و $x(t)$، مقادیر عددی $v$ و $x$ را در هر زمان $t$ به‌دست می‌آوریم. این کار را با هر میزان دقت که لازم باشد می‌شود انجام داد.

نیروی ثابت کاربرد قوانین نیوتون را نشان می‌دهد، و البته کارکردن با نیروهای ثابت ساده‌تر از کارکردن با نیروهای متغیر است. خوشبختانه در اغلب مسائل عملی نیروهایی وجود دارند که در شرایط بسیاری می‌توان به تقریب ثابت فرضشان کرد؛ مثلاً گرانش درنزدیکی سطح زمین، نیروی اصطکاک، نیروی کشش ریسمان، و مانند آن. اما خیلی از شرایط فیزیکی هم هستند که نمی‌توان با نیروی ثابت به خوبی توصیفشان کرد. در این موارد برای حل مسئله یا باید روشهای تحلیلی به‌کار برد یا روشهای عددی. چند مثال از این نیروها می‌آوریم:

۱. نیروهای وابسته به زمان. در فصل ۲، اتومبیل را پس از ترمز کردن، با فرض اینکه شتاب آن ثابت باشد، تحلیل کردیم. در عمل، به‌ندرت چنین اتفاقی می‌افتد. در بسیاری از موارد، به ویژه در سرعتهای زیاد، معمولاً راننده در ابتدا آرام ترمز می‌گیرد و سپس، با کند شدن حرکت، پدال را به‌تدریج شدیدتر فشار می‌دهد. بنابراین، نیروی ترمز، طی مدتی که حرکت اتومبیل کند می‌شود، بستگی به زمان دارد؛ تابع $a(t)$ بستگی به جزئیات ترمزکردن دارد.

مثال دیگر نیروهای وابسته زمان، نیروی مربوط به موجی است‌که از محیطی می‌گذرد. موج صوتی را در هوا در نظر بگیرید؛ در هر نقطه، موج به‌طور سینوسی با زمان تغییر می‌کند. بنابراین، نیروی وارد بر تک تک مولکولهای هوا هم در زمان به‌طور سینوسی، و با همان فرکانس موج، تغییر می‌کند. بستگی زمانی شتاب ذره نیز مثل بستگی زمانی نیروست.

۲. نیروهای وابسته به سرعت. نمونهٔ آشنای نیروهای وابسته به سرعت، نیروی مقاومتی است که بر اجسام متحرک در محیط شاره، مثل هوا یا آب، وارد می‌شود. این نیروی اصطکاکی، با افزایش سرعت زیاد می‌شود. شاید خود شما هم، هنگام راه‌رفتن در استخر، به این پدیده برخورده باشید. اگر آرام راه بروید، نیروی مقاوم کمی احساس خواهید کرد، اما وقتی به‌سرعت حرکت می‌کنید، نیروی مقاوم وارد بر پاهایتان می‌تواند بسیار بزرگ باشد. هر چه تندتر حرکت‌کنید، نیروی مقاوم بیشتر می‌شود.

حرکت پرتابی هم به‌شدت تحت تأثیر نیروی اصطکاک شاره‌هاست، هر چند، در تحلیل اجسام افتان و پرتابه‌ها در فصلهای ۲ و ۴ این نیروها را ندیده گرفتیم. برد پرتابه‌ای مثل توپ بیسبال، به‌ازای سرعت اولیهٔ معین، ممکن است حدود نصف مقداری باشد که از تحلیل بخش ۴ـ۳ به‌دست می‌آید. جسمی که مسافتی طولانی را سقوط کند، دیگر از معادلات سقوط آزاد بخش ۲ـ۷ پیروی نخواهد کرد؛ طبق این معادلات، سرعت جسم می‌تواند به‌طور نامحدود زیاد شود. برعکس، هر چه سرعت بزرگتر شود، نیروی اصطکاک هم بزرگتر می‌شود، و این نیرو می‌خواهد که جلوی افزایش بیشتر سرعت را بگیرد. در واقع، چنان‌که در بخش ۶ـ۷ خواهیم دید، سرعت به حدی (سرعت حد) می‌گراید که نمی‌تواند از آن بیشتر شود. (برای بیشتر اجسام، این پدیده در سرعتهای [illegible] که متناظر با مسافتهای سقوط از مرتبهٔ $100\,\mathrm{m}$ است.

برای ۱ یا ۲ متر سقوط در آزمایشگاه، این پدیده قابل چشمپوشی است و می‌توان معادلات بخش ۲ـ۷ را با اطمینان به‌کار برد.)

۳. نیروهای وابسته به مکان. مثال آشنای نیروهای وابسته به مکان، نیروی بازگرداننده فنری است که به اندازهٔ $x$ از حالت تعادلش کشیده شده است؛ این فنر نیروی $F = -kx$ وارد می‌کند. شتاب جسمی به جرم $m$ که به فنر بسته شده است، $a = F/m = -kx/m$ است. اگر جسم را به فاصلهٔ $x$ جابه‌جا کنیم، نیرویی بر آن وارد می‌شود که می‌خواهد آن‌را به‌طرف نقطهٔ تعادل بکشد. اگر جسم را رهاکنیم، به طرف نقطهٔ تعادل حرکت خواهد کرد؛ در بازگشت به طرف تعادل، جابه‌جایی $x$ کم می‌شود و شتاب هم همین‌طور. هنگامی که جسم از نقطهٔ تعادل می‌گذرد، شتاب آن به‌طور لحظه‌ای صفر می‌شود، اما پس از آن جسم از $x = ۰$ هم رد می‌شود و اندازهٔ شتاب دوباره بزرگ می‌شود.

ساده‌ترین راه تحلیل نیروهای وابسته به مکان، استفاده از روشهای کار و انرژی است، که در فصل ۷ و ۸ به آنها خواهیم پرداخت. در بخشهای بعدی این فصل چند روشِ تحلیل نیروهای وابسته به زمان یا سرعت را، با استفاده از قوانین نیوتون، بررسی می‌کنیم.

## ۵ـ۶ نیروهای وابسته به زمان: روشهای تحلیلی

با استفاده از قوانین نیوتون به شکل معمول، برای نیروهای وابسته به زمان، یک شتاب $a(t)$ به‌دست می‌آید که به زمان بستگی دارد. در این موارد می‌توانیم درست مثل بخش ۶ـ۴ عمل کنیم و سرعت را با انتگرال‌گیری مستقیم به‌دست بیاوریم. $a = dv/dt$ را به‌صورت $dv = a(t)dt$ می‌نویسیم و از $t = ۰$ (سرعت اولیهٔ $v_۰$) تا $t$ (سرعت اولیهٔ $v$) انتگرال می‌گیریم. برای سادگی فرض می‌کنیم که حرکت یک‌بعدی است، اما تعمیم نتایج به سه‌بعد هم سرراست است. داریم

$$\int_{v_۰}^{v} dv = \int_۰^t a(t)dt$$

$$v - v_۰ = \int_۰^t a(t)dt$$

$$v(t) = v_۰ + \int_۰^t a(t)dt \qquad (۱۶)$$

معادلات بالا را با معادلات ۱۰ تا ۱۲ مقایسه کنید؛ تنها تفاوتشان در این است که $a$ در داخل انتگرال باقی می‌ماند.

وقتی $v(t)$ به‌دست آمد، می‌شود این روش را تکرار کردو $x(t)$ را به‌دست آورد. از $v = dx/dt$ داریم $dx = v(t)dt$، و با انتگرال‌گیری مشابهی از $t = ۰$ (مکان اولیهٔ $x_۰$) تا $t$ (مکان $x$) نتیجه می‌شود که

$$\int_{x_۰}^{x} dx = \int_۰^t v(t)dt$$

$$x - x_۰ = \int_۰^t v(t)dt$$

$$x(t) = x_۰ + \int_۰^t v(t)dt \qquad (۱۷)$$

این را هم با معادلات ۱۴ و ۱۵ مقایسه کنید و ببینید که اگر $a$ ثابت باشد، معادلهٔ ۱۷ به معادلهٔ ۱۵ تبدیل می‌شود.

---

**مثال ۴.** اتومبیلی با سرعت $۱۰۵\,\mathrm{km/h}$ (در حدود $۶۵\,\mathrm{mi/h}$ یا $۲۹٫۲\,\mathrm{m/s}$) حرکت می‌کند. راننده ناگهان ترمز می‌کند، اما با نیروی افزایش‌یابنده، طوری که شتاب کندکننده متناسب با زمان به‌صورت $a(t) = ct$ زیاد می‌شود، که در آن $c = -۲٫۶۷\,\mathrm{m/s^۳}$ است. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا اتومبیل متوقف شود؟ (ب) در این مدت اتومبیل چه مسافتی را می‌پیماید؟

حل: (الف) باید عبارتی برای $v(t)$ پیدا کنیم تا بتوانیم زمانی را که $v = ۰$ می‌شود به‌دست بیاوریم. با استفاده از معادلهٔ ۱۶، با $a(t) = ct$، نتیجه می‌شود که

$$v(t) = v_۰ + \int_۰^t ct\,dt = v_۰ + \frac{۱}{۲}ct^۲$$

به‌جای $v(t)$ صفر می‌گذاریم و زمان $t_۱$ را، که در آن اتومبیل ساکن می‌شود، به‌دست می‌آوریم:

$$۰ = v_۰ + \frac{۱}{۲}ct_۱^۲$$

$$t_۱ = \sqrt{\frac{-۲v_۰}{c}} = \sqrt{\frac{-۲(۲۹٫۲\,\mathrm{m/s})}{-۲٫۶۷\,\mathrm{m/s^۳}}} = ۴٫۶۸\,\mathrm{s}$$

$۴٫۶۸\mathrm{s}$ طول می‌کشد تا اتومبیل بایستد.

(ب) برای اینکه ببینیم اتومبیل چه مسافتی را می‌پیماید، باید عبارتی برای $x(t)$ به‌دست بیاوریم. به‌این منظور، باید طبق معادلهٔ ۱۷ از $v(t)$ انتگرال بگیریم:

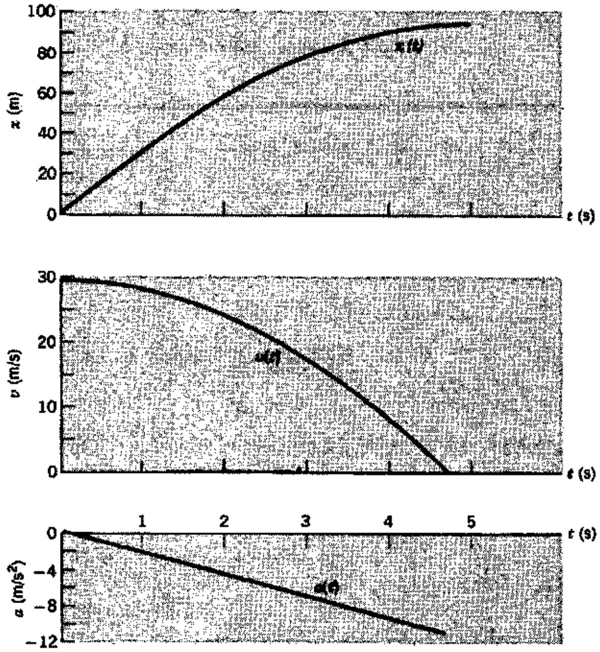
$$x(t) = x_۰ + \int_۰^t (v_۰ + \frac{۱}{۲}ct^۲)dt = x_۰ + v_۰ t + \frac{۱}{۶}ct^۳$$

به‌ازای $t = t_۱ = ۴٫۶۸\mathrm{s}$، مسافت پیموده شده (با $x_۰ = ۰$) برابراست با

$$x(t_۱) = ۰ + (۲۹٫۲\,\mathrm{m/s})(۴٫۶۸\,\mathrm{s}) + \frac{۱}{۶}(-۲٫۶۷\,\mathrm{m/s^۳})(۴٫۶۸\,\mathrm{s})^۳ = ۹۱٫۰\,\mathrm{m}$$

شکل ۱۱ بستگی زمانی $x$، $v$، و $a$ را نشان می‌دهد. برخلاف حالتِ شتاب ثابت، $v(t)$ خط راست نیست.

با این روشِ ترمز کردن، بیشترین تغییر سرعت در حوالی پایان حرکت انجام می‌شود. تغییر سرعت در نخستین ثانیهٔ پس از ترمز کردن،تنها $۱٫۳\,\mathrm{m/s}$ (در حدود $۳\,\mathrm{mi/h}$) است؛ اما در آخرین ثانیهٔ حرکت، سرعت $۱۱٫۲\,\mathrm{m/s}$ (در حدود $۲۵\,\mathrm{mi/h}$) تغییر می‌کند. (به یاد دارید که در حالت شتاب ثابت، تغییرسرعت در بازه‌های زمانی




شکل ۱۱. مثال ۴ $x(t)$ و $v(t)$ حاصل از $a(t)$، که به‌طور خطی با زمان تغییر می‌کند.

مساوی یکسان بود.) فکر می‌کنید که این روش ترمزکردن فایده‌ای هم دارد؟ ضرر چطور؟

## ۶ـ۶ نیروهای وابسته به زمان: روشهای عددی (اختیاری)

با روش تحلیلی بخش قبلی، علی‌الاصول با داشتن $a(t)$ می‌شود $x(t)$ و $v(t)$ را به‌دست آورد. اما خیلی وقتها این روش عملی یا مطلوب نیست. مثلاً ممکن است انتگرالها شکل تحلیلی نداشته باشند، یا شاید شکل آنها آنقدر پیچیده باشد که جوابهای حاصل کمکی به بصیرت فیزیکی ما از مسئله نکنند. استفاده از روشهای عددی راه مناسب دیگری درکنار روشهای تحلیلی است، و البته روشهای عددی بخصوص وقتی مفیدند که روشهای تحلیلی قابل استفاده نباشند.

در روش عددی مسئله را به این ترتیب تقریب می‌زنیم؛ بازهٔ زمان مورد نظر را به تعداد زیادی بازهٔ کوچک تقسیم می‌کنیم، و در هر بازه معادلات مربوط به شتاب ثابت را به‌کار می‌بریم. اما این مقدار "ثابت" از یک بازه به بازهٔ دیگر تغییر می‌کند. یک انتخاب مناسب برای شتاب ثابت هر بازه، شتاب متوسط آن بازه است.

هرچه بازه‌ها را کوچکترکنیم، روش بهترکار می‌کند و جواب دقیقتری به‌دست می‌آید؛ هر چه بازه‌ها کوچکتر باشد، شتاب متوسط (ثابت) بهتر شتاب واقعی را تقریب می‌کند. از طرف دیگر، هر چه بازه‌ها کوچکتر بشوند تعداد آنها زیادتر می‌شود، و به این ترتیب باید محاسبات تکرارشوندهٔ متعددی انجام بدهیم. این درست همان نوع کاری است

که کامپیوتر به‌خوبی انجام می‌دهد. بنابراین، روش حل عددی مسئله را، با کامپیوتر، می‌توان با دقت دلخواه به‌کار گرفت.

شکل ۱۲ طرح کلی این روش را، در حالت شتاب متغیر مثال ۴ نشان می‌دهد. ناحیهٔ بین $t = 0$ و $t = 5\,\mathrm{s}$ به ۱۰ بازهٔ کوچک، هر یک به‌اندازهٔ $\delta t = 0.5\,\mathrm{s}$، تقسیم شده است. تابع $a(t)$ را در هر بازه با یک مقدار ثابت (شتاب متوسط، که در این حالتِ خطی، برابر با $a$ در وسط بازه هم هست) تقریب زده‌ایم. در بازهٔ اول، شتاب متوسط از مقادیر $a$ در $t = 0$ و $t = 0.5\,\mathrm{s}$ به‌دست می‌آید:

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{2}[a(0) + a(0.5\,\mathrm{s})] = \frac{1}{2}[0 + (-2.67\,\mathrm{m/s^3})(0.5\,\mathrm{s})]$$
$$= -0.67\,\mathrm{m/s^2}$$

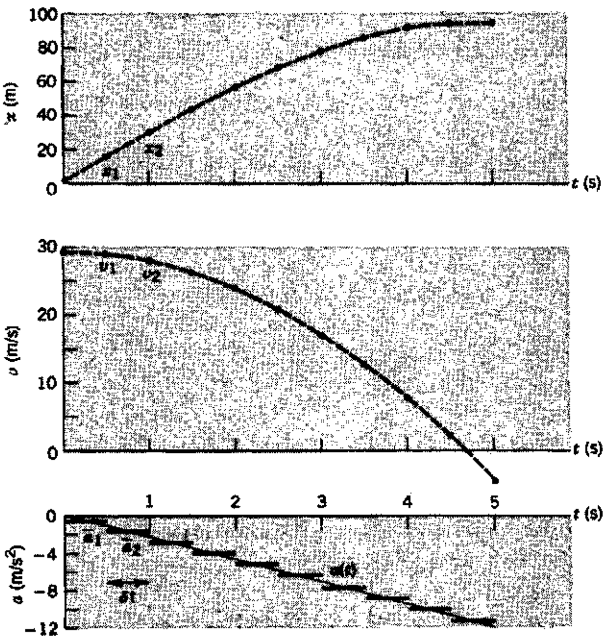
تغییر سرعت در بازهٔ اول، $\delta v_1$، تقریباً برابر است با

$$\delta v_1 = \bar{a}_1 \delta t = (-0.67\,\mathrm{m/s^2})(0.5\,\mathrm{s}) = -0.34\,\mathrm{m/s}$$

بنابراین، سرعت در $t = 0.5\,\mathrm{s}$ عبارت است از

$$v_1 = v_0 + \delta v_1 = 29.2\,\mathrm{m/s} - 0.34\,\mathrm{m/s} = 28.9\,\mathrm{m/s}$$

برای یافتن جابه‌جایی طی بازهٔ اول، ابتدا سرعت متوسط را در این بازه




شکل ۱۲. جواب عددی (نقاط نشان داده شده در شکل) مثال ۴؛ این جواب را با جواب تحلیلی مقایسه کنید (شکل ۱۱ و منحنیهای خط‌چین). در هر یک از بازه‌های $0.5\,\mathrm{s}$، شتاب را ثابت فرض می‌کنیم، و مکان و سرعت را در نقطهٔ پایانی بازه حساب می‌کنیم، که نقاط رسم شده در شکل را به‌دست می‌دهند. هر چه بازه‌های بیشتر (و کوچکتر)ی بگیریم. نقاط بیشتر روی منحنیهای واقعی $x(t)$ و $v(t)$ به‌دست می‌آید.

به‌دست می‌آوریم:

$$\overline{v}_۱ = \frac{۱}{۲}(v_۰ + v_۱) = \frac{۱}{۲}(۲۹٫۲\mathrm{m/s} + ۲۸٫۹\mathrm{m/s})$$
$$= ۲۹٫۱\mathrm{m/s}$$

جابه‌جایی $\delta x_۱$ در این بازه، تقریباً برابر است با

$$\delta x_۱ = \overline{v}_۱ \delta t = (۲۹٫۱\mathrm{m/s})(۰٫۵\mathrm{s}) = ۱۴٫۶\mathrm{m}$$

اگر نقطهٔ شروع را $x_۰ = ۰$ بگیریم، مکان در پایان بازهٔ اول چنین به‌دست می‌آید

$$x_۱ = x_۰ + \delta x_۱ = ۰ + ۱۴٫۶\mathrm{m} = ۱۴٫۶\mathrm{m}$$

مقادیر $v_۱$ و $x_۱$ در $t = ۰٫۵\mathrm{s}$، در شکل ۱۲ رسم شده‌اند.

اکنون به بازهٔ دوم می‌رویم و همین روش را تکرار می‌کنیم. در اینجا شتاب متوسط برابر است با

$$\overline{a}_۲ = \frac{۱}{۲}[a(۰٫۵\mathrm{s}) + a(۱٫۰\mathrm{s})]$$
$$= \frac{۱}{۲}[(-۲٫۶۷\mathrm{m/s^۲})(۰٫۵\mathrm{s}) + (-۲٫۶۷\mathrm{m/s^۳})(۱٫۰\mathrm{s})]$$
$$= -۲٫۰۰\mathrm{m/s^۲}$$

با ادامهٔ کار، به همان روش بازهٔ اول، نتیجه می‌شود که

$$\delta v_۲ = \overline{a}_۲ \delta t = (-۲٫۰۰\mathrm{m/s^۲})(۰٫۵\mathrm{s}) = -۱٫۰\mathrm{m/s}$$
$$v_۲ = v_۱ + \delta v_۲ = ۲۸٫۹\mathrm{m/s} - ۱٫۰\mathrm{m/s} = ۲۷٫۹\mathrm{m/s}$$

و

$$\overline{v}_۲ = \frac{۱}{۲}(v_۱ + v_۲) = \frac{۱}{۲}(۲۸٫۹\mathrm{m/s} + ۲۷٫۹\mathrm{m/s})$$
$$= ۲۸٫۴\mathrm{m/s}$$
$$\delta x_۲ = \overline{v}_۲ \delta t = (۲۸٫۴\mathrm{m/s})(۰٫۵\mathrm{s}) = ۱۴٫۲\mathrm{m}$$
$$x_۲ = x_۱ + \delta x_۲ = ۱۴٫۶\mathrm{m} + ۱۴٫۲\mathrm{m} = ۲۸٫۸\mathrm{m}$$

مقادیر $v_۲$ و $x_۲$ سرعت و مکان در پایان بازهٔ دوم‌اند، که در شکل ۱۲ در $t = ۱٫۰\mathrm{s}$ رسم شده‌اند.

با تکرار روش در هر ۱۰ بازه، نقاط باقی‌ماندهٔ شکل ۱۲ به‌دست می‌آید.

از مقایسهٔ شکلهای ۱۱ و ۱۲، می‌توان دید که توافق جواب عددی با جواب تحلیلی چقدر خوب است، حتی در اینجا که فقط ۱۰ بازه به کار برده‌ایم. کامپیوتر می‌تواند به سادگی ~~این محاسبات~~ را برای ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ بازه انجام بدهد، و در چنین حالتی نقاط رسم شده برای $x$ و $v$ بسیار نزدیک به یک منحنی هموار می‌شوند.

از درونیابی سرعت بین نقاط پایانی بازهٔ آخر، نتیجه می‌شود که اتومبیل در حدود زمان ۴٫۷s متوقف می‌شود؛ درست همان مقداری که در جواب تحلیلی به‌دست آمده بود. از شکل ۱۲ مسافت پیموده شده را تخمین می‌زنیم؛ این مسافت در حدود ۹۱m است، که باز هم با مقدار تحلیلی سازگار است.

البته مقدار منفی $v$ در پایان بازهٔ دهم، در این مسئله بی‌معنی است: شرایط دینامیکی مسئله چنان است که سرعت نمی‌تواند منفی شود، زیرا با ترمز کردن نمی‌توان اتومبیل را واداشت که به عقب حرکت کند. اما ادامهٔ محاسبهٔ عددی تا این نقطه از آن جهت مفید است که به تحلیل بازهٔ آخر کمک می‌کند.

در پیوست ب، یک برنامهٔ کامپیوتری (به‌زبان بیسیک) آمده است که می‌تواند این محاسبه را انجام بدهد. با تغییرات کوچکی در این برنامه، می‌شود همین محاسبات را برای هر شکلی از $a(t)$ انجام داد.

## ۶ـ۷ اصطکاک شاره‌ها و حرکت پرتابی

قطره‌های باران از ابرهایی سقوط می‌کنند که ارتفاع ($h$) آنها از سطح زمین در حدود ۲km است. با استفاده از معادلهٔ سقوط آزاد اجسام (معادلهٔ ۲۵ فصل ۲)، انتظار داریم که این قطره‌ها با سرعت $v = \sqrt{2gh} \approx ۲۰۰\mathrm{m/s}$، یا در حدود ۴۴۰mi/h به زمین برخورد کنند. برخورد پرتابه‌ای چنین سریع با آدمیزاد، حتی اگر این پرتابه قطرهٔ باران باشد، مرگ‌آور است؛ پس قطره‌های باران خیلی کندتر از اینها حرکت می‌کنند، و معلوم است که در جایی از محاسبات خطا کرده‌ایم.

اشکال کار اینجاست که اثر نیروی مقاومت هوا بر قطرهٔ افتان را نادیده گرفته‌ایم. این نیرو، نیروی اصطکاک شاره است که بر اجسامی که درآن حرکت می‌کنند وارد می‌شود. چنین نیروهایی، در موارد گوناگون، آثار مهمی دارند؛ مثلاً در اثر این نیرو توپ بیسبال به مقدار قابل‌ملاحظه‌ای از مسیر ایده‌آل بدون اصطکاک منحرف می‌شود؛ این نیرو سرعت اسکی‌باز را هم کم می‌کند و اسکی‌باز بدن خودش را در چنان حالتی قرارمی‌دهد که اثر آن‌را کم کند؛ در طراحی هواپیما و کشتی هم باید اثر این نیروها را در نظر گرفت. از دید اجسام افتان، از قطرهٔ باران گرفته تا چترباز، نیروی اصطکاک شاره‌ها نمی‌گذارد که سرعت به طور نامحدود زیاد شود، بلکه یک سرعت بیشینه، یا حد، تعیین می‌کند که جسم در حال سقوط نمی‌تواند از آن تندتر حرکت کند.

یکی از ویژگیهای خاص نیروی اصطکاک شاره‌ها آن است که این نیرو به سرعت بستگی دارد: هرچه جسم سریعتر حرکت کند، نیروی اصطکاک هم بیشتر می‌شود. بنابراین، برای تحلیل سینماتیک مسئله باید از روشهای انتگرال استفاده کرد.

اگر نیرو، و در نتیجه شتاب، تابع سرعت باشد، روشهای بخش ۶ـ۵ برای نیروهای وابسته به زمان را باید قدری تغییر داد. چنانکه در معادلهٔ ۱۶ دیدیم، از $a = dv/dt$ شروع می‌کنیم، اما در اینجا $a$ تابع سرعت،

یعنی $a(v)$ است:

$$a(v)=\frac{dv}{dt}$$
$$\frac{dv}{a(v)}=dt$$

از این رابطه می‌توان مستقیماً انتگرال گرفت:

$$\int_{v_\circ}^{v}\frac{dv}{a(v)}=\int_\circ^t dt=t \qquad (۱۸)$$

طرف چپ معادلهٔ ۱۸ تابعی از $v$ است؛ پس معادلهٔ ۱۸ عملاً $t$ را به‌صورت تابعی از $v$، $t(v)$، به‌دست می‌دهد. البته اغلب می‌توانیم نتیجه را "معکوس" کنیم و $v(t)$ را به‌دست بیاوریم که عموماً برای محاسبات مفیدتر است.

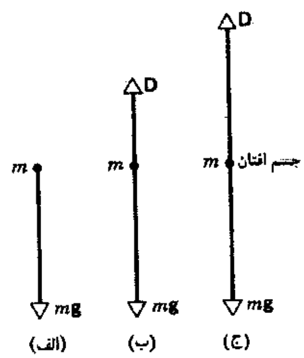
---

**مثال ۵.** فرض کنید جسمی به جرم $m$ در هوا سقوط می‌کند و نیروی مقاومت $D$ وارد بر آن به‌طور خطی با سرعت زیاد می‌شود

$$D=bv$$

و این نیرو همواره در خلاف جهت حرکت سرعت جسم است. ثابت $b$ به خواص جسم (مثلاً اندازه و شکل آن) و همچنین به خواص شاره (به‌ویژه چگالی آن) بستگی دارد. با این فرض که جرم $m$ از حالت سکون شروع به حرکت کرده باشد، سرعت آن برحسب زمان، یعنی $v(t)$ را پیدا کنید.

حل: شکل ۱۳ نمودار جسم‌ـآزاد را نشان می‌دهد؛ این نمودار با گذشت زمان عوض می‌شود زیرا $D$ همراه با $v$ تغییر می‌کند. هنگامی که جسم رها می‌شود $D$ صفر است (زیرا $v$ صفر است)؛ با افزایش $v$، $D$ هم زیاد می‌شود. در نقطهٔ خاصی از حرکت که $D=mg$ باشد، نیروی خالصی برجسم اثر نمی‌کند و شتاب جسم صفر می‌شود (شکل ۱۳ج). از این لحظه سرعت ثابت می‌ماند. جواب ریاضی ما هم باید همین خاصیت را نشان بدهد.




**شکل ۱۳.** نیروهای وارد بر جسمی که در هوا سقوط می‌کند. (الف) در لحظه‌ای که جسم رها می‌شود، $v=\circ$ است و نیروی اصطکاکی وجود ندارد. (ب) با سرعت گرفتن جسم نیروی اصطکاک هم زیاد می‌شود. (ج) سرانجام نیروی اصطکاک با وزن برابر می‌شود؛ از آن پس این نیرو ثابت می‌ماند و جسم با سرعت ثابت، برابر با سرعت حد، سقوط می‌کند.

قانون دوم نیوتون در مورد این مسئله چنین عبارت است از

$$\sum \mathbf{F}=\mathbf{D}+m\mathbf{g}=m\mathbf{a}$$

محور $y$ را رو به پایین می‌گیریم؛ به این ترتیب مؤلفهٔ قائم به‌صورت زیر است

$$\sum F_y=mg-bv=ma$$

یا

$$a=g-\frac{b}{m}v$$

از این عبارت دیده می‌شود که با افزایش $v$، سرانجام به جایی می‌رسیم که طرف راست صفر می‌شود، و این رویداد در زمانی است که $bv/m=g$ بشود. در این نقطه $a=\circ$ می‌شود و از آن پس هم صفر می‌ماند. پس، از اینجا به بعد سرعت ثابت می‌ماند. این همان سرعت حد، $v_{\mathrm{T}}=mg/b$ است.

برای محاسبهٔ $v(t)$، معادلهٔ ۱۸ را با $v_\circ=\circ$ به‌کار می‌بریم:

$$\int_\circ^v\frac{dv}{g-(b/m)v}=t$$

انتگرال را می‌توان چنین نوشت

$$-\frac{m}{b}\int_\circ^v\frac{-b\,dv}{mg-bv}$$

که به شکل $\int du/u=\ln u$ است (با $u=mg-bv$). پس

$$\begin{aligned}-\frac{m}{b}\int_\circ^v\frac{-b\,dv}{mg-bv}&=-\frac{m}{b}\ln(mg-bv)\Big|_\circ^v\\&=-\frac{m}{b}\ln(mg-bv)+\frac{m}{b}\ln(mg)\\&=-\frac{m}{b}\ln\left(\frac{mg-bv}{mg}\right)=t\end{aligned}$$

این عبارت، رابطه‌ای کاملاً قابل قبول بین $v$ و $t$ است، اما برای آسانتر شدن تعبیر و کاربرد آن، بهتر است رابطه را معکوس کنیم و $v(t)$ را به‌دست بیاوریم:

$$\ln\left(\frac{mg-bv}{mg}\right)=-\frac{bt}{m}$$
$$\frac{mg-bv}{mg}=e^{-bt/m}$$

سرانجام خواهیم داشت

$$v(t)=\frac{mg}{b}(۱-e^{-bt/m}) \qquad (۱۹)$$

اگر $t$ کوچک باشد (در زمانهای ابتدایی سقوط جسم)، می‌توان تابع نمایی را به شکل $e^x \approx ۱ + x$ برای $x$های کوچک ($x \ll ۱$) تقریب کرد. به این ترتیب،

$$v(t) \approx \frac{mg}{b}\left[1-\left(1-\frac{bt}{m}\right)\right] = gt \qquad \text{(برای } t \text{های کوچک)}$$

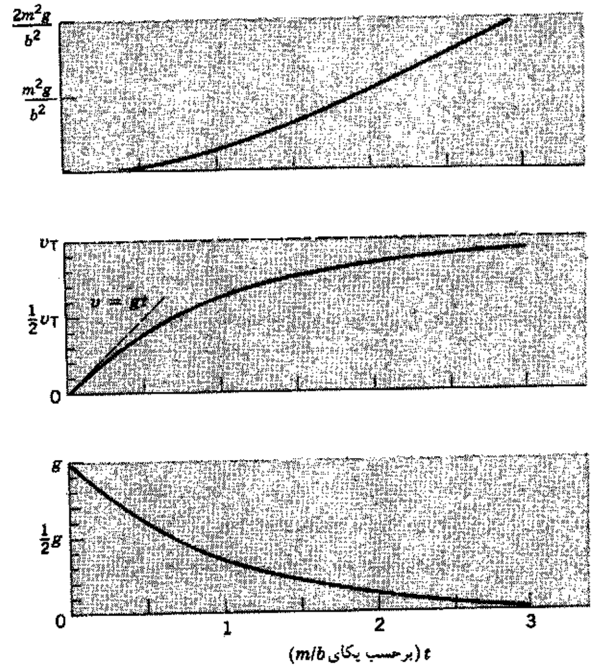
در ابتدای حرکت، پیش از آنکه نیروی اصطکاک قابل‌ملاحظه شده باشد، حرکت جسم کاملاً نزدیک به سقوط آزاد با شتاب $g$ است.

در $t$های بزرگ، تابع نمایی به‌صفر می‌گراید(در حد $x \to \infty$، $e^{-x} \to 0$). در این حالت سرعت به مقدار حدی‌اش، $v_T$، می‌گراید.

$$v_T = \frac{mg}{b} \qquad (۲۰)$$

با داشتن عبارت $v(t)$، می‌توان از آن مشتق گرفت و $a(t)$ را به‌دست آورد، یا از آن انتگرال گرفت و $y(t)$ را به‌دست آورد. انجام این محاسبات و بررسی نتایج در $t$های کوچک و $t$های بزرگ را به عنوان تمرین به عهدهٔ دانشجویان گذاشته‌ایم (مسئلهٔ ۶۶). شکل ۱۴ بستگی زمانی $a$، $v$، و $y$ را نشان می‌دهد.

این مثال، یک رهیافت برای تحلیل نیروی اصطکاک شاره‌ها را نشان می‌دهد. رهیافتی دیگر، $D$ را به‌جای $v$، متناسب با $v^2$ فرض می‌کنند. در این مورد هم از همان محاسباتی که به‌کار بردیم استفاده می‌شود، اما ریاضیات مسئله قدری پیچیده‌تر است. اینجا هم یک سرعت حد به‌دست می‌آید، اگرچه شکل ریاضی این سرعت با آنچه قبلاً به‌دست آوردیم متفاوت است.




شکل۱۴. مثال ۵. مکان، سرعت، و شتاب یک جسم افتان که تحت اثر نیروی مقاومت هواست. توجه کنید که شتاب از $g$ شروع می‌شود و به صفر می‌گراید، و سرعت از صفر شروع می‌شود و به $v_T$ می‌گراید.

**جدول ۲.** چند سرعت حد در هوا.

| جسم | سرعت حد (m/s) | مسافت ۹۵٪(m)[۱] |
|---|---|---|
| گلولهٔ ۱۶ پاوندی | ۱۴۵ | ۲۵۰۰ |
| چترباز در حال سقوط آزاد (نوعی) | ۶۰ | ۴۳۰ |
| توپ بیسبال | ۴۲ | ۲۱۰ |
| توپ تنیس | ۳۱ | ۱۱۵ |
| توپ بسکتبال | ۲۰ | ۴۷ |
| توپ پینگ‌پنگ | ۹ | ۱۰ |
| قطرهٔ باران (به شعاع ۱٫۵mm) | ۷ | ۶ |
| چترباز (نوعی) | ۵ | ۳ |

۱. مسافتی که جسم باید از حالت سکون سقوط کند تا به ۹۵٪ سرعت حد خود برسد.

مرجع:

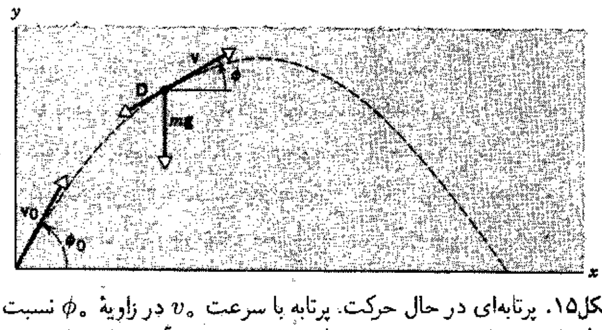
Peter J. Brancazio, *Sport Science*, Simon & Schuster Inc., New York, 1984.

جدول ۲ فهرستی از مقادیر نوعی است که برای سرعت حد اجسام متفاوت در هوا اندازه‌گیری شده است.

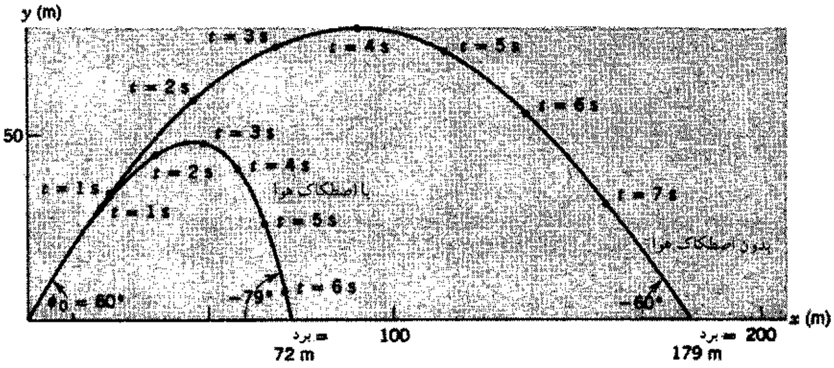
## حرکت پرتابی با مقاومت هوا (اختیاری)

محاسبات نیروی مقاومت اصطکاکی برای حرکت پرتابی دوبعدی هم مهم است. مثلاً، توپ بیسبال با سرعت حدوداً ۱۰۰mi/h یا ۴۵m/s از "چوب" جدا می‌شود. این مقدار از سرعت حدی توپ در هوا بیشتر است (جدول ۲). نیروی اصطکاک هوا، $D = bv$، را می‌توان از جواب مثال ۵ تخمین زد. از معادلهٔ ۲۰ نتیجه می‌شود که ثابت $b$ برابر است با وزن mg توپ بیسبال (در حدود ۱٫۴N، متناظر با جرم ۰٫۱۴kg) تقسیم بر سرعت حد توپ، ۴۲m/s. پس $b = ۰٫۰۳۳\mathrm{N/(m/s)}$ است، اگر توپ با سرعت ۴۵m/s حرکت کند، نیروی مقاومتی ($bv$) در حدود ۱٫۵N بر آن وارد می‌شود، که از وزن توپ بیشتر است و بنابراین اثر قابل‌ملاحظه‌ای بر حرکت آن می‌گذارد.

شکل ۱۵ نمودار جسم‌ـآزاد را در نقطهٔ معینی از حرکت نشان




شکل۱۵. پرتابه‌ای در حال حرکت. پرتابه با سرعت $v_0$ در زاویهٔ $\phi_0$ نسبت به سطح افقی پرتاب می‌شود. در نقطهٔ معینی، سرعت آن $v$ با زاویهٔ $\phi$ است. وزن و نیروی اصطکاک هوا (که همواره در خلاف جهت $v$ است) در نقطهٔ مورد نظر نشان داده شده است.




شکل ۱۶. حرکت پرتابی با نیروی اصطکاک هوا و بدون آن. محاسبه برای $v_0 = ۴۵\text{m/s}$ و $\phi_0 = ۶۰°$ انجام شده است.

می‌دهد. $\mathbf{D}$، مثل همهٔ نیروی اصطکاکی دیگر، در خلاف جهت $\mathbf{v}$ است، و فرض می‌کنیم که باد نمی‌وزد. اگر بگیریم $\mathbf{D} = -b\mathbf{v}$، می‌توانیم با استفاده از قوانین نیوتون یک جواب تحلیلی برای مسیر به‌دست بیاوریم، که نمونه‌ای از آن‌را در شکل ۱۶ نشان داده‌ایم. مقاومت هوا باعث می‌شود که برد پرتابه از ۱۷۹m به ۷۲m، و ارتفاع اوج از ۷۸m به ۴۸m کاهش بیابد. همچنین توجه کنید که مسیر دیگر نسبت به محور قائمی که از نقطهٔ اوج می‌گذرد متقارن نیست؛ شیب مسیر در هنگام سقوط خیلی تندتر است تا در مرحلهٔ صعود. اگر $\phi_0 = ۶۰°$ باشد، پرتابه با زاویهٔ $-۷۹°$ به‌زمین می‌خورد، در حالی که در غیاب اصطکاک با زاویهٔ $-\phi_0$ به‌زمین برخورد می‌کرد.

نیروی مقاومت هوا به سرعت پرتابه در هوای ساکن بستگی دارد. اگر باد بوزد، محاسبات را باید تغییر داد، و نتیجه هم تغییر می‌کند.

اگر بخواهیم عبارتهایی دیگر (و واقعی‌تری) برای نیروی مقاومت $\mathbf{D}$ به‌کار ببریم باید محاسبات را به شکل عددی انجام بدهیم.[1]

## ۶ـ۸ چارچوبهای نالخت و شبه نیرو (اختیاری)

در بررسی مکانیک کلاسیک تا اینجا فرض کردیم که اندازه‌گیری و مشاهده در یک چارچوب مرجع لخت انجام می‌شود؛ یعنی در یکی از چارچوبهای مرجعی که با قانون اول نیوتون تعریف می‌شوند، چارچوبهایی که در آنها اگر محیطی نباشد که به جسم مورد نظر نیرو وارد کند ($\sum \mathbf{F} = ۰$)، این جسم شتاب نمی‌گیرد ($\mathbf{a} = ۰$). انتخاب چارچوب مرجع همیشه با خودمان است؛ یعنی اگر فقط چارچوبهای لخت را هم به‌کار ببریم، هیچ محدودیتی روی پدیده‌های طبیعی‌ای که می‌شود با مکانیک کلاسیک بررسی کرد نمی‌گذاریم.

با وجود این، در مواردی که مناسب بدانیم، می‌توانیم مکانیک کلاسیک را از دید ناظرهای چارچوبهای نالخت هم به‌کار ببریم، یعنی از دید چارچوبهای متصل به جسمی که، از دید چارچوبهای لخت، شتابدار است. چارچوبهای متصل به یک اتومبیل شتابدار یا چرخ و فلک چرخان، نمونه‌هایی از چارچوب نالخت‌اند.

برای به‌کار بردن مکانیک کلاسیک در چارچوبهای نالخت باید نیروهای دیگری به نام شبه نیرو (یا نیروی لختی) وارد کنیم. شبه‌نیروها را، بر خلاف نیروهایی که تاکنون دیده‌ایم، نمی‌توان به اجسام خاصی در محیط جسم مورد نظر نسبت داد، و نمی‌توان در رده‌هایی که در بخش ۶ـ۱ گفته شد طبقه‌بندی کرد و به‌علاوه، اگر جسم را از دید چارچوبهای لخت بررسی کنیم، شبه‌نیروها ناپدید می‌شوند. شبه‌نیرو صرفاً ابزاری است که به کمک آن می‌شود مکانیک کلاسیک را، به روشهای معمول، برای بررسی رویدادها از دید چارچوبهای مرجع نالخت به‌کار برد.[1]

مثلاً، ناظر $S'$ را در نظر بگیرید که در کامیونی که با سرعت ثابت حرکت می‌کند نشسته است. در این کامیون یک ریل هوایی دراز هست که "لغزک"ای به جرم ۰٫۲۵kg، بی‌اصطکاک، روی آن قرار گرفته است (شکل ۱۷الف). راننده ترمز می‌کند، و سرعت کامیون به‌تدریج کم می‌شود. ناظر $S$ بر زمین، شتاب ثابت کامیون را $-۲٫۸\text{m/s}^۲$ می‌سنجد. بنابراین، ناظر $S'$ که در کامیون است، هنگام ترمز، در یک چارچوب مرجع نالخت است. $S'$ مشاهده می‌کند که لغزک با شتاب $+۲٫۸\text{m/s}^۲$ به طرف جلو حرکت می‌کند. هر یک از دو ناظر، چگونه با استفاده از قانون دوم نیوتون حرکت جسم لغزنده را توضیح می‌دهد؟

برای ناظر زمینی $S$، که در یک چارچوب مرجع لخت است، تحلیل مسئله سرراست است. لغزک، که پیش از ترمز با سرعت ثابت به جلو می‌رفته است، الآن هم دارد همین کار را می‌کند. از دید $S$، لغزک شتاب ندارد و هیچ نیروی افقی‌ای لازم نیست که بر آن اثر کند.

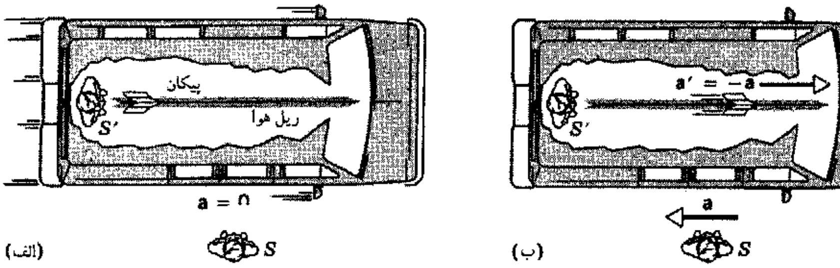
اما $S'$ مشاهده می‌کند که لغزک شتاب می‌گیرد و هیچ جسمی هم در محیط این جسم نمی‌یابد که نیروی مولد این شتاب را بر آن وارد کند. $S'$، برای اینکه بتواند قانون دوم نیوتون را به‌کار برد، باید فرض

۱. برای کسب اطلاعات بیشتر دربارهٔ این محاسبات رجوع کنید به
"Trajectory of a Fly Ball", Peter J. Brancazio, *The Physics Teacher*, January 1985, p. 20.

و نیز به کتاب همین مؤلف
*SportScience*. (Simon & Schuster Inc, 1984)

این کتاب شامل بسیاری مثالهای جالب از کاربرد اصول فیزیک در ورزش است. همچنین رجوع کنید به
"Physics and Sports: the Aerodynamics of Projectiles" Peter Brancazio.

در کتاب
*Fundamentals of Physucs*, 3rd ed., David Halliday and Robert Resnick, (Wiley, 1988).




**شکل ۱۷.** (الف) ناظر زمینی $S$ مشاهده می‌کند که ناظر $S'$ درکامیون با سرعت ثابت حرکت می‌کند. هر دو ناظر درچارچوبهای مرجع لخت‌اند. (ب) از دید ناظر $S$، کامیون با شتاب ثابت $a$ ترمز می‌کند. ناظر $S'$، که اکنون در یک چارچوب مرجع نالخت است، مشاهده می‌کند که لغزک با شتاب ثابت $\mathbf{a}' = -\mathbf{a}$ روی ریل هوا به‌جلو می‌رود. ناظر $S'$ این حرکت را با شبه‌نیرو توضیح می‌دهد.

کند که شبه‌نیرویی بر لغزک اثر می‌کند. از دید $S'$، نیروی $\mathbf{F}'$ باید برابر با $m\mathbf{a}'$ باشد، که در آن $\mathbf{a}' = (-\mathbf{a})$ شتاب لغزک از دید $S'$ است. اندازهٔ این شبه‌نیرو برابر است با

$$F' = ma' = (۰٫۲۵\mathrm{kg})(۲٫۸\mathrm{m/s^۲}) = ۰٫۷۰\mathrm{N}$$

و جهت آن همان جهت $\mathbf{a}'$ است، یعنی به طرف جلوی کامیون. این نیرو که از دید $S'$ خیلی واقعی است، از دید ناظر زمینی $S$ وجود ندارد؛ چون $S$ برای توضیح حرکت لغزک اصلاً نیازی به چنین نیرویی ندارد.

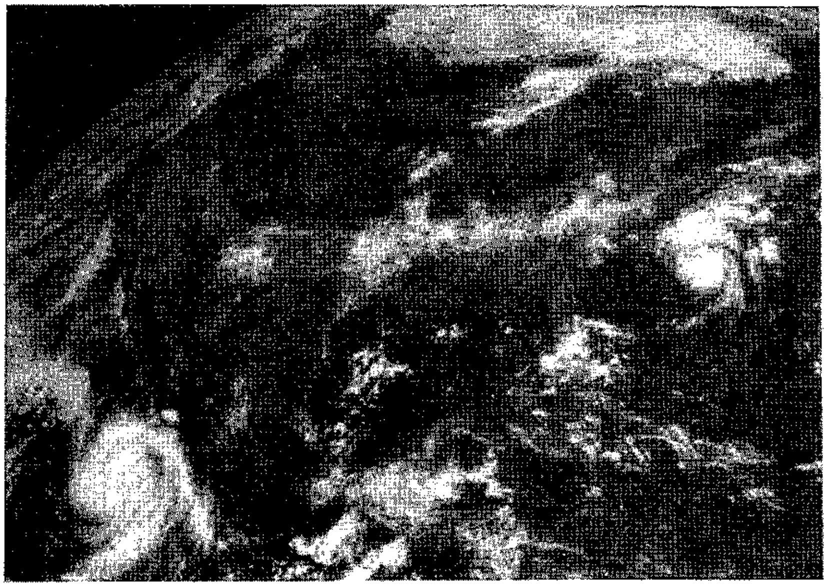
یکی از نمودهای اینکه شبه‌نیرو غیر نیوتونی است، این است که این نیرو قانون سوم نیوتون را نقض می‌کند. به مصداق قانون سوم نیوتون، $S'$ باید نیروی عکس‌العملی پیدا کند که از لغزک بر جسمی دیگر وارد می‌شود. چنین نیروی عکس‌العملی نمی‌توان یافت؛ بنابراین، قانون سوم نیوتون نقض می‌شود.

شبه‌نیروها برای کسانی که تحت تأثیر این نیروها قرار می‌گیرند، کاملاً واقعی‌اند. تصور کنید در اتومبیلی نشسته‌اید که سر یک پیچ به چپ می‌پیچد. از دید ناظر زمینی، اتومبیل شتاب مرکزگرا دارد و بنابراین، یک چارچوب نالخت است. اگر صندلیهای اتومبیل مثلاً از جنس وینیل و کم اصطکاک باشد، شما به‌طرف راست خواهید لغزید. از دید ناظر زمینی، که در یک چارچوب لخت است، این حرکت کاملاً طبیعی است: بدن شما فقط می‌خواهد از قانون اول نیوتون تبعیت کند و روی خط راست جلو برود؛ در واقع این اتومبیل است که زیر بدن شما به طرف چپ می‌لغزد. اما شما، در چارچوبِ نالخت اتومبیل، ناچارید حرکت لغزشی‌تان را ناشی از شبه‌نیرویی بدانید که شما را به طرف راست هل می‌دهد. این نوع شبه‌نیرو را نیروی مرکزگریز می‌نامند، یعنی نیرویی که در جهت دور شدن از مرکز عمل می‌کند.

اگر سوار چرخ‌وفلک باشید هم در یک چارچوب شتابدار، و در نتیجه نالخت، واقع شده‌اید. در این چارچوب (چرخ‌وفلک چرخان در صفحهٔ افقی)، به‌نظر می‌رسد که اجسام در اثر نیروی مرکزگریز، می‌خواهند به طرف خارج، یعنی در جهت دور شدن از محور دوران حرکت کنند. توپی که در دست شماست، از دید شما در حالت تعادل است؛ نیروی رو به "بیرون "(مرکزگریز) با نیروی رو به "درون" (مرکزگرا) که دست شما به توپ وارد می‌کند خنثی می‌شود. از دید ناظر زمینی، که در چارچوب مرجع لخت است، توپ روی دایره حرکت می‌کند، و در اثر نیروی مرکزگرایی که شما توسط دستتان بر آن وارد می‌کنید، شتابی به‌سوی مرکز دارد. برای ناظر زمینی، نیروی مرکزگریزی وجود ندارد، زیرا توپ در حالت تعادل نیست و در امتداد شعاع به طرف مرکز دایره شتاب دارد.

بعضی ابزارهای عملی براساس شبه‌نیروها کار می‌کنند. دستگاه سانتریفوژ را در نظر بگیرید، که یکی از مفیدترین وسایل آزمایشگاه است. اگر مخلوطی از مواد را روی دایره‌ای به سرعت بچرخانیم، نیروی مرکزگریز $mv^۲/r$ وارد بر مواد پرجرمتر بیشتر خواهد بود. پس این مواد از محور دوران بیشتر فاصله می‌گیرند. به این ترتیب، سانتریفوژ با استفاده از شبه‌نیرو، مواد را برحسب جرمشان از هم جدا می‌کند، درست همان‌طورکه طیف‌سنج جرمی (بخشهای ۱ـ۵ و ۵ـ۴) اتمها را به کمک نیروی الکترومغناطیسی، برحسب جرم، از هم جدا می‌کند.

یکی دیگر از انواع شبه‌نیرو، نیروی کوریولیس است. روی یک صفحه افقی چرخان، توپی را با سرعت ثابت در راستای شعاع به طرف مرکز صفحهٔ چرخان می‌غلتانید. در لحظه‌ای که توپ را در شعاع $r$ رها می‌کنید، سرعت مماسی آن همان سرعت نقاطی است که در فاصلهٔ $r$ از مرکز حرکت دایره‌ای دارند (درست به‌اندازهٔ سرعت مماسی خودتان). این توپ هر قدرکه به مرکز نزدیکتر می‌شود، سرعت مماسی کمتری برای حفظ حرکت دایره‌ای با همان آهنگ محیط اطرافش لازم دارد. اما چون راهی برای کاهش سرعت مماسی نیست (فرض کرده‌ایم که اصطکاک بین توپ و کف چرخ و فلک کم است)، توپ قدری از خط رنگی نشانهٔ حرکت دورانی یکنواخت (امتداد اولیهٔ غلتش) جلو می‌افتد. یعنی شما در چارچوب مرجع نالخت دوار خودتان باید فرض کنید که یک نیروی جانبی ــ نیروی کوریولیس ــ باعث می‌شود که توپ، با نزدیکتر شدن به مرکز دایره، از خط دورتر شود. اما از دید ناظر زمینی در چارچوب لخت، نیروی کوریولیسی وجود ندارد: توپ با سرعت




شکل۱۸. مرکز کم‌فشاری بر زمین چرخان. با جریان یافتن هوا به طرف مرکز، ناظر نالخت در نیمکرهٔ شمالی می‌بیند که هوا در جهت پادساعتگرد می‌چرخد. گردباد (عکس سمت راست) چنین مرکز کم‌فشاری است.

ثابت روی خطی راست حرکت می‌کند، و این سرعت ثابت را مؤلفه‌های سرعت توپ در لحظهٔ رها شدن (از دست شما) تعیین می‌کنند.

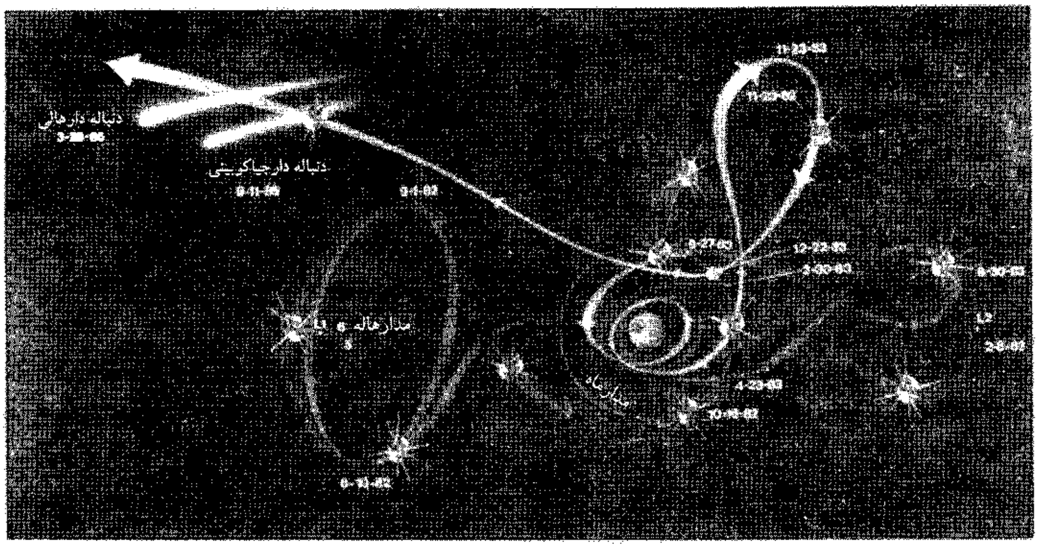
شاید آشناترین مثال از آثار نیروی کوریولیس، حرکت جو حول مراکز کم فشار یا پرفشار باشد. شکل ۱۸ نموداریک مرکزکم‌فشار را در نیمکرهٔ شمالی نشان می‌دهد. چون فشار هوا در این مرکز از اطراف کمتر است، هوا از همهٔ جهتها به طرف مرکز حرکت می‌کند. چون زمین می‌چرخد (و بنابراین، چارچوب نالخت است) پدیده‌ای شبیه به توپ و چرخ و فلک بالا به‌وجود می‌آید: هوایی که از جنوب به طرف مرکز می‌آید، کمی از خط فرضی ثابت، نسبت به زمین چرخان، جلو می‌افتد، و هوایی که از شمال می‌آید (مانند توپی که به طرف محیط چرخ و فلک در حرکت باشد) کمی از این خط عقب می‌ماند. نتیجهٔ کلی این است که هوا در جهت پادساعتگرد حول مرکزکم‌فشار می‌چرخد. به این ترتیب، اثر کوریولیس است که باد را در پدیده‌های گردبادی به چرخش در می‌آورد. در نیمکرهٔ جنوبی، جهت این اثر معکوس می‌شود. در حرکت گلولهٔ توپهای بلندبرد، لازم است که اثر کوریولیس ناشی از چرخش زمین به‌حساب آورده شود. برای گلوله‌ای نوعی به برد $10\,km$، پدیدهٔ کوریولیس می‌تواند انحرافی به‌اندازهٔ $20\,m$ به‌وجود بیاورد. تصحیحات لازم برای از بین بردن این انحرافات، در برنامه‌های کامپیوتری‌ای که برای کنترل نشانه‌روی سلاحهای بلندبرد به‌کار می‌رود گنجانده شده است. اما گاهی هم اشتباه پیش می‌آید. مثلاً در یکی از نبردهای جنگ جهانی اول در نزدیکی جزایر فالکلند، چنین اشتباهی برای ناوگان بریتانیا اتفاق افتاد. دستورالعملهای آتش برای نیمکرهٔ شمالی نوشته شده بود، اما جزایر فالکلند در نیمکرهٔ جنوبی است، و تصحیحات کوریولیس باید برعکس باشد. گلوله‌های بریتانیاییها به حدود $100\,m$ آن طرفتر از هدف اصابت می‌کردند، زیرا تصحیح کوریولیس در خلاف جهتی که باید انجام شده بود!

با توجه به آنچه گفته شد، در حل مسائل مکانیک دو راه پیش‌رو داریم: (۱) یک چارچوب لخت انتخاب کنیم و فقط نیروهای "حقیقی" را در نظر بگیریم، یعنی نیروهایی را که می‌شود به اجسام معینی در محیط نسبت داد، یا (۲) یک چارچوب نالخت انتخاب کنیم، و علاوه بر نیروهای "حقیقی" شبه‌نیروهایی مناسب را هم در نظر بگیریم. ما معمولاً روش اول را به‌کار می‌بریم، اما گاهی هم روش دوم را انتخاب می‌کنیم؛ دو روش کاملاً هم‌ارزند، و انتخاب بستگی به این دارد که در هر مورد کدام‌یک ساده‌تر یا مناسبتر است.

## ۶ـ۹ محدودیتهای قوانین نیوتون (اختیاری)

در شش فصل اول کتاب، نظامی برای تحلیل رفتار مکانیکی سیستمها توصیف کرده‌ایم که گسترهٔ کاربردهای آن بسیار وسیع است. برای طراحی آسمانخراشهایی عظیم و پلهای معلق، یا حتی برای محاسبهٔ مسیرهای متنوع فضاپیماها در سفرهای بین سیارات (شکل ۱۹)، جز معادلات نیوتون عملاً به چیزهای خیلی بیشتری نیاز نیست. مکانیک نیوتونی، که ابزار محاسباتی لازم برای این کار را فراهم کرد، نخستین تحول واقعاً انقلابی در فیزیک نظری بود.

مثالی که ذکر می‌کنیم گویای اطمینانی است که می‌توانیم به قوانین نیوتون داشته باشیم. اغلب کهکشانها و خوشه‌های کهکشانی در حال چرخش‌اند، و با رصد کردن می‌توان سرعت چرخششان را به‌دست آورد. از این اطلاعات می‌توانیم مقدار ماده‌ای را که باید در کهکشان یا خوشه موجود باشد تا گرانش حاصل از آن بتواند نیروی مرکزگرای لازم برای چرخش مشاهده شده را تأمین کنند محاسبه کنیم. اما مقدار ماده‌ای که واقعاً با تلسکوپ مشاهده می‌کنیم خیلی کمتر

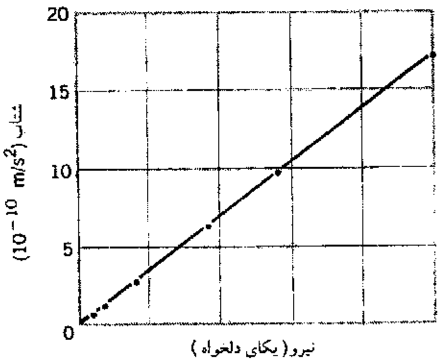



شکل۱۹. یک پیروزی برای مکانیک نیوتونی. فضاپیمای "کاشف بین‌المللی سیارات"[1] در سال ۱۹۷۸ به‌فضا پرتاب شد، ۴ سال در مداری حول نقطهٔ $L_1$ باقی ماند و بادهای خورشیدی را بررسی کرد. سپس دم مغناطیسی زمین را در مداری در طرف شب زمین کشف کرد. در سال ۱۹۸۵ از دم دنباله‌دار "جیا کوبینی-زینر"، و در سال ۱۹۸۶ از دم دنباله‌دار هالی گذشت. این فضاپیما فعلاً در سفری بین سیاره‌ای است و در سال ۲۰۱۲ به نزدیکی زمین باز خواهد گشت. این کاشف سیاره‌ای طی سفرش تاکنون ۳۷ موشک روشن کرده و ۵ بار از کنار ماه گذشته است.

از مقداری است که انتظار باید داشت. بنابراین، گفته شده است که مقداری "مادهٔ تاریک" هم هست که نمی‌توانیم آن‌را با تلسکوپ ببینیم اما باید باشد تا میدان گرانشی مورد نیاز را تأمین کند. تا کنون توضیح قانع‌کننده‌ای دربارهٔ نوع یا ماهیت این مادهٔ تاریک به‌دست نیامده، و بنابراین توجیهات دیگری برای رفع این ناسازگاری میان مقدار واقعاً مشاهده شدهٔ مادهٔ کهکشانها و مقدار لازم برای برقراری قوانین نیوتون، ارائه شده است. یک توضیح آن است که محاسبات ما نادرست‌اند زیرا قوانین نیوتون در اوضاع و احوالی که در مقیاس بسیار بزرگ وجود دارد، یعنی برای شتابهای بسیار کوچک (کمتر از چند $10^{-10}\,\mathrm{m/s^2}$) برقرار نیستند. به‌خصوص پیشنهاد شده است که شاید در این شتابهای بسیار کوچک، نیرو با $a^2$ متناسب باشد نه با $a$.

شکل ۲۰ نتایج آزمایشی را نشان می‌دهد که اخیراً گزارش شده و هدف آن آزمودن این فرضیه است. اگر بستگی نیرو به شتاب، به شکل توانی جز ۱ باشد، داده‌های نمودار روی خط راست نمی‌افتند. از این آزمایش بسیار دقیق نتیجه می‌شود که، تا حد شتابهایی در حدود $10^{-10}\,\mathrm{m/s^2}$، نیرو متناسب با شتاب است و قانون دوم نیوتون برقرار است.

در قرن بیستم، سه تحول انقلابی دیگر هم داشته‌ایم: نظریهٔ نسبیت خاص اینشتین (۱۹۰۵)، نظریهٔ نسبیت عام اینشتین (۱۹۱۵)، و مکانیک کوانتومی (در حدود ۱۹۲۵). از نسبیت خاص معلوم می‌شود که نمی‌توان قوانین نیوتون را برای اجسامی هم که با سرعتهای قابل




شکل۲۰. نتایج یکی از آزمایشهای جدید برای تعیین اینکه آیا قانون دوم نیوتون در شتابهای کوچک کمتر از $10^{-9}\,\mathrm{m/s^2}$ هم معتبر هست یا خیر. خط راست نشان می‌دهد که شتاب، تا حد $10^{-10}\,\mathrm{m/s^2}$، با نیروی اعمال شده متناسب است؛ یعنی قانون نیوتون حتی در این شتابهای کوچک هم برقرار است.

مقایسه با سرعت نور حرکت می‌کنند به کار برد. نسبیت عام نشان می‌دهد که قوانین نیوتون در حضور نیروهای گرانشی بسیار قوی معتبر نیست. مکانیک کوانتومی می‌گوید که قوانین نیوتون را نمی‌شود به‌قلمرو اجسامی به کوچکی اتم هم تعمیم داد.[1]

نسبیت خاص شامل دیدگاهی غیر نیوتونی از فضا و زمان است. این نظریه را در همهٔ موارد، چه سرعتهای زیاد و چه سرعتهای کم، می‌توان به کاربرد. می‌شود نشان داد که دینامیک نسبیت خاص در

1. International Planetary Explorer.

حد سرعتهای کم، به همان قوانین نیوتون می‌انجامد. نظریهٔ نسبیت عام را، هم برای نیروهای گرانشی قوی و هم برای نیروهای گرانشی ضعیف می‌توان به‌کار گرفت، اما معادلات آن در حد میدانهای ضعیف به همان قوانین نیوتون تحویل می‌شوند. از مکانیک کوانتومی می‌توانیم هم برای تک‌تک اتمها و هم برای اجسام معمولی که تعداد بسیار زیادی اتم دارند استفاده کنیم؛ در مورد اول کترگی معینی در رفتار سیستم پیش‌بینی می‌شود، و در مورد دوم، میانگین این رفتار کتره‌ای برای تعداد فوق‌العاده‌ای از ذرات، باز هم به همان قوانین نیوتون منجر می‌شود.

طی دههٔ گذشته، تحول ظاهراً انقلابی دیگری هم رخ داده است. این پیشرفت مربوط به سیستمهای مکانیکی‌ای است که رفتارشان را با واژهٔ آشوبناک توصیف می‌کنند. یکی از مهمترین ویژگیهای قوانین نیوتون قابلیت آنها در پیش‌بینی رفتار آیندهٔ سیستم است، البته اگر شرایط اولیه و نیروهای عامل حرکت معلوم باشند. مثلاً، اگر مکان و سرعت اولیهٔ فضاپیمایی را که تحت اثر نیروی گرانشی معین خورشید و سیارات دیگر است بدانیم، می‌توانیم مسیر دقیق آن‌را محاسبه کنیم. اما حالا ترکه‌ای را در نظر بگیرید که در یک نهر متلاطم شناور است. این ترکه هم همواره تحت تأثیر نیروهایی است که از قوانین نیوتون تبعیت می‌کنند، اما مسیر آن به طرف پایین نهر کاملاً غیر قابل پیش‌بینی است. اگر دو ترکه را کنار هم در این نهر بیندازیم، در پایین نهر ممکن است خیلی از هم جدا شده باشند. مشخصهٔ مهم دینامیک آشوبناک آن است که تغییرات بسیار کوچکی درشرایط اولیه می‌توانند به‌شدت تقویت شوند و به تفاوتهای بسیار بزرگی در نتایج پیش‌بینی شده بینجامند. دینامیک آشوبناک خیلی وقتها در پیش‌بینی هوا به‌کار می‌آید، و گفته شده است که بال زدن پروانه‌ای در ژاپن می‌تواند با تشکیل گردبادی در خلیج مکزیک مرتبط باشد.

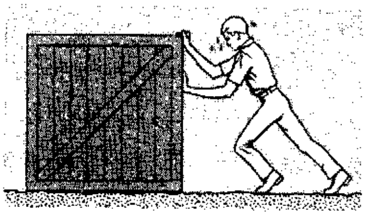
چنین رفتارهای آشوبناکی مختص سیستمهای پیچیده‌ای مثلاً نهر متلاطم نیست، بلکه در سیستمهای ساده‌ای مثل آونگ، شیر آبی که به آرامی چکه می‌کند، یا در مدارهای الکتریکی نوسانی هم مشاهده می‌شود. در دههٔ ۱۹۶۰ معلوم شد که رفتار به ظاهر آشوبناک این سیستمها نوعی نظم و قاعده‌مندیِ پنهان در بر دارد، و مطالعهٔ این نظم هستهٔ یک شاخهٔ جدید علم، آشوب، را تشکیل داده است.[۱] قوانین آشوب، نه تنها در سیستمهای فیزیکی بلکه در سیستمهای زیست‌شناختی هم به‌کار برده شده‌اند. رفتار آشوبناک حتی در بعضی شاخه‌های حیطهٔ علوم اجتماعی مثل اقتصاد و دینامیک جمعیت هم مشاهده می‌شود.

از محاسباتی که بر مبنای تلفیقی از قوانین نیوتون و نظریهٔ آشوب صورت گرفته معلوم شده است که مدار سیارهٔ پلوتون، در مقیاس زمانی چند ده میلیون سال، آشوبناک است (این زمان در مقایسه با سن منظومهٔ شمسی، در حدود ۴٫۵ میلیارد سال، کوتاه است اما در مقایسه با زمان تناوب مدار پلوتون به دور خورشید، در حدود ۲۵۰ سال، طولانی است). به کمک نظریهٔ آشوب همچنین توانسته‌اند دو ویژگی کمربند سیارکها را (که بین مدارهای مریخ و مشتری قرار دارد) توضیح بدهند. این ویژگیها را صرفاً در چارچوب مکانیک نیوتونی متعارف نمی‌شد توجیه کرد: (۱) بسیاری از سیارکها از مدارهایی که علی‌القاعده باید پایدار باشند خارج می‌شوند؛ برخی از این سیارکها همان شهابهایی می‌شوند که مدام بر زمین می‌بارند. (۲) در کمربند سیارکها چندین ناحیهٔ تهی وجود دارد که تعداد سیارکهای مدارگرد در آنجا کم یا صفر است. تازه در دههٔ گذشته (سالهای ۸۰)، به لطف کامپیوترهای بسیار سریع، امکان محاسبات مفصل چنین سیستمهایی تا زمانهای لازم برای مشاهدهٔ این رفتارهای غیرعادی، فراهم شده است. با انجام محاسبات بیشتر، به تدریج کاربردهای دیگری هم از این مقولهٔ هیجان‌انگیز کشف می‌شود.

## پرسشها

۱. حدی وجود دارد که اگر سطحی را از آن بیشتر صیقل بدهند، مقاومت اصطکاکی به‌جای کم شدن زیاد می‌شود. چرا؟

۲. صندوقی سنگین‌تر از شما روی زمین افقی ناهمواری قرار دارد (شکل ۲۱). ضریب اصطکاک میان صندوق و زمین همان ضریب اصطکاک میان کفش شما و زمین است. آیا می‌توانید صندوق را روی این زمین هل بدهید؟[۱]



شکل ۲۱. پرسش ۲

۳. در بازی بیسبال، دونده معمولاً با دویدن سریعتر حرکت می‌کند تا با سر خوردن. چرا؟ در این صورت دونده اصلاً چرا سر می‌خورد؟

۴. چگونه شخصی که روی آبگیر یخ بستهٔ کاملاً بدون اصطکاکی ایستاده است، می‌تواند خودش را به ساحل برساند؟ آیا این شخص می‌تواند با راه رفتن، غلتیدن، تاب دادن دستها، یا لگد پراندن موفق شود؟ اصولاً چگونه می‌توان شخصی را در چنین وضعیتی قرار داد؟

۵. چرا لاستیکهای اتومبیل موقع حرکت بر سطح افقی بهتر به زمین می‌چسبند تا موقع بالا رفتن یا پایین آمدن از شیب؟

۱. رجوع کنید به

*Chaos-Making a New Science*, James Gleick, (Penguin Books, 1987).

۶. پشت اتومبیلهای مسابقه سطوح خمیده‌ای (به نام "اسپویلر") نصب می‌کنند. طراحی این سطوح چنان است که هوایی که از آنها می‌گذرد نیرویی رو به پایین تولید می‌کند. این کار چه فایده‌ای دارد؟

۷. دو سطح با هم تماس دارند، اما نسبت به هم ساکن‌اند. با وجود این به هم نیروی اصطکاک وارد می‌کنند. چرا؟

۸. اتومبیل شما در جادهٔ یخزده‌ای سر می‌خورد و کمی وارد باند مخالف می‌شود. در هر یک از موارد زیر آیا بهتر است چرخهای جلو را در همان جهت لغزش بچرخانید یا در خلاف جهت آن؟ (الف) اگر بخواهید از تصادف با اتومبیلی که از روبه رو می‌آید اجتناب کنید و (ب) اگر اتومبیل دیگری در آن نزدیکی نباشد و بخواهید که دوباره کنترل اتومبیل را به‌دست بیاورید. اتومبیل را "با چرخهای محرک در عقب" و بعد "با چرخهای محرک در جلو" در نظر بگیرید.

۹. چرا اتومبیلهای مسابقه هنگام گذشتن از پیچ سرعتشان را زیاد می‌کنند؟

۱۰. در هواپیمایی در ارتفاع ثابت در پروازید و می‌خواهید یک دور ۹۰۰ برنید. چرا باید هواپیما را کج کنید تا بتوانید دور بزنید؟

۱۱. وقتی یک سگ خیس خودش را می‌تکاند، کسانی که نزدیک به او ایستاده‌اند ممکن است خیس بشوند. چرا آب از سگ این‌طور به اطراف می‌جهد؟

۱۲. شاید توجه کرده باشید (اینشتین توجه کرده بود) که وقتی چای را در فنجان به‌هم می‌زنید، تفاله‌های چای در وسط فنجان جمع می‌شوند نه در لبهٔ آن. آیا می‌توانید این پدیده را توضیح بدهید؟ (اینشتین توانسته بود.)

۱۳. می‌خواهید تعیین کنید که سطح میزی که در قطاری قرار دارد واقعاً افقی هست یا نه. آیا با استفاده از یک تراز (محتوی حباب در مایع) می‌توانید در حالتی که قطار از شیبی بالا یا پایین می‌رود این کار را انجام بدهید؟ اگر قطار در حال پیچیدن باشد چطور؟ (راهنمایی: دو مؤلفهٔ افقی وجود دارد.)

۱۴. در آونگ مخروطی، زمان تناوب و سرعت گلولهٔ آونگ به‌ازای $\theta = 90^\circ$ چه می‌شود؟ چرا این زاویه از نظر فیزیکی غیرممکن است؟ در مورد حالت $\theta = 0^\circ$ هم توضیح بدهید.

۱۵. سکه‌ای روی صفحهٔ گردان گرامافونی قرار دارد. موتور گرامافون را روشن می‌کنیم. پیش از آنکه گرامافون به‌سرعت نهایی خود برسد، سکه به خارج پرتاب می‌شود. چرا؟

۱۶. اتومبیلی در جاده‌ای که پستی و بلندی دارد حرکت می‌کند. فرض کنید سرعت اتومبیل ثابت باشد. نیرویی را که اتومبیل در بخش افقی به جاده وارد می‌کند، با نیروی وارد از اتومبیل به جاده در بخشهای "بلندی" و "پستی" مقایسه کنید و در این باره توضیح بدهید.

۱۷. اتومبیلی را با سرعت ثابت در بزرگراهی می‌رانید. توپی روی کف اتومبیل در حالت سکون است و بادکنکی پر از هلیم در بالای توپ شناور مانده و با سقف در تماس است. در هر یک از حالتهای زیر چه بر سر این دو جسم می‌آید؟ (الف) اگر با سرعت ثابت بپیچید و (ب) اگر ترمز کنید.

۱۸. اثر مقاومت هوا را بر زاویهٔ برد بیشینهٔ پرتابه بررسی کنید.

۱۹. قطره‌های درشت‌تر باران سریعتر سقوط می‌کنند یا قطره‌های ریزتر؟

۲۰. سرعت حد توپ بیسبال $95\,\text{mi/h}$ است. اما سرعتی که برای توپهای پرتاب شده اندازه‌گیری می‌شود اغلب بیش از این است و به حدود $100\,\text{mi/h}$ هم می‌رسد. چطور چنین چیزی ممکن است؟

۲۱. حرکت جسمی را توصیف کنید که با سرعتی بیش از سرعت حد خودش، در راستای قائم به طرف پایین پرتاب می‌شود.

۲۲. کنده‌ای روی نهری شناور است و به طرف پایین رود حرکت می‌کند. چگونه می‌توانید نیروی مقاومت اصطکاکی وارد بر آن‌را به‌دست بیاورید؟

۲۳. دو جسم به جرمهای متفاوت را همزمان از بالای برجی رها می‌کنیم. نشان بدهید که اگر مقاومت هوا برای هر دو جسم ثابت و یکسان فرض شود، جسمی که جرم بیشتری دارد زودتر به زمین می‌رسد. این فرض تا چه حدی موجه است؟

۲۴. چرا در جدول ۲ "مسافت ۹۵٪ " را آورده‌ایم نه "مسافت ۱۰۰٪ " را؟

۲۵. چرخش زمین چه اثری بر وزن ظاهری اجسام در استوا دارد؟

۲۶. توضیح بدهید که چرا شاقول در بیشتر عرضهای جغرافیایی دقیقاً در راستای جاذبهٔ گرانشی زمین قرار نمی‌گیرد؟

۲۷. فضانوردان در فضاپیمایی که در مدار است می‌خواهند وزن خود را روزانه ثبت کنند. با توجه‌به "بی‌وزنی" این فضانوردان، می‌توانید تصور کنید که این کار چگونه ممکن است؟

۲۸. چرا پرسش "سرعت خطی نقطه‌ای بر استوا چقدر است؟" به فرضی دربارهٔ چارچوب مرجع به‌کار رفته نیاز دارد؟ نشان بدهید که چگونه با تغییر چارچوب مرجع، جواب هم تغییر می‌کند؟

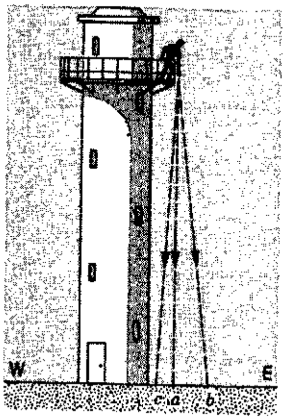
۲۹. چه تمایزی بین چارچوبهای مرجع لخت و چارچوبهای دیگری که فقط محورهایشان نسبت به چارچوبهای اولیه منتقل شده یا چرخیده است وجود دارد؟

۳۰. مسافری در صندلی جلوی اتومبیلی نشسته است. راننده ناگهان به چپ می‌پیچد و مسافر به طرف در می‌لغزد. نیروهای وارد برمسافر و اتومبیل در این لحظه را از دید چارچوب مرجع (الف) متصل به زمین و (ب) متصل به اتومبیل بررسی کنید.

۳۱. آیا در بازی تنیس یا گلف باید نیروی کوریولیس را هم در نظر گرفت؟ اگر نه، چرا؟

۳۲. در بالکن یک برج مرتفع، به طرف شرق ایستاده‌اید و جسمی را رها می‌کنید تادر پای برج به زمین بخورد (شکل ۲۲). (فرض کنید که می‌توانید محل برخورد را با دقت زیاد بسنجید.) آیا جسم به نقطهٔ $a$، درست در زیر نقطهٔ رها شدنش می‌خورد،

یا به نقطهٔ $b$ متمایل به شرق، یا به نقطهٔ $c$ متمایل به غرب؟ جسم را از حالت سکون رها کرده‌اید، و زمین از غرب به شرق می‌چرخد.




**شکل ۲۲.** پرسش ۳۲

**۳۳.** با استدلال کیفی نشان بدهید که، به علت چرخش زمین، بادی که در نیمکرهٔ شمالی از شمال به جنوب بوزد به طرف راست منحرف می‌شود. بادی که از جنوب به شمال بوزد چطور؟ اوضاع در نیمکرهٔ جنوبی چگونه خواهد بود؟

## مسئله‌ها

**بخش ۶ـ۲ نیروی اصطکاک**

**۱.** ضریب اصطکاک ایستایی بین تفلون و خاگینه در حدود ۰٫۰۴ است. کف (افقی) یک ماهیتابهٔ تفلون را حداقل باید چند درجه کج کرد تا خاگینه روی آن بلغزد؟

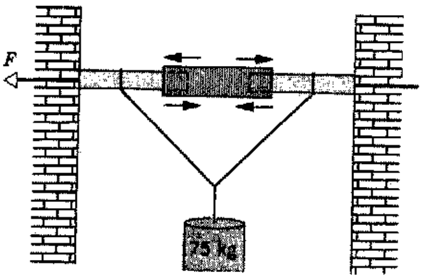
**۲.** فرض کنید فقط چرخهای عقب اتومبیل می‌توانند به آن شتاب بدهند، و این چرخها نیمی از وزن اتومبیل را تحمل می‌کنند. (الف) اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین لاستیکها و جاده $\mu_s$ باشد، بیشترین شتابی که اتومبیل می‌تواند بگیرد چقدر است؟ (ب) $\mu_s$ را برابر با ۰٫۵۶ بگیرید و یک مقدار برای این شتاب محاسبه کنید.

**۳.** ضریب اصطکاک ایستایی بین پیست و کفشهای دونده‌ای ۰٫۹۵ است. بیشترین شتابی که این دونده می‌تواند بگیرد چقدر است؟

**۴.** یک بازیکن بیسبال (شکل ۲۳) به جرم ۷۹kg در پایان یک حرکت روی زمین سر می‌خورد و حرکتش با نیروی اصطکاک ۴۷۰N کند می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی بین این بازیکن و زمین چقدر است؟

**شکل ۲۳.** مسئلهٔ ۴

**۵.** یک میلهٔ افقی برای نگه داشتن جسمی به جرم ۷۵kg بین دو دیوار کار گذاشته شده است. شکل ۲۴. نیروهای یکسان $F$ را، که میله بر دیوارها وارد می‌کند، می‌توان با کم و زیاد کردن طول میله تغییر داد. فقط اصطکاک بین دو سرمیله با دیوارهاست که سیستم را نگه می‌دارد. ضریب اصطکاک ایستایی میان میله و دیوار ۰٫۴۱ است. کمترین مقدار نیروی $F$ برای برقراری تعادل چقدر است؟



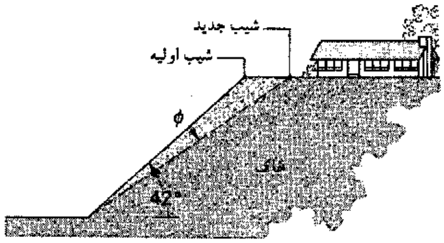

**شکل ۲۴.** مسئلهٔ ۵

**۶.** کنده‌ای به وزن ۵۳lb (یعنی ۲۴۰N) روی زمین ساکن است. ضریب اصطکاک ایستایی میان کنده و زمین ۰٫۴۱، و ضریب اصطکاک جنبشی میان این دو ۰٫۳۲ است. (الف) کمترین نیروی افقی‌ای که می‌تواند کنده را به حرکت در بیاورد چقدر است؟ (ب) پس از شروع حرکت، چه نیروی افقی‌ای باید اعمال کرد تا کنده با سرعت ثابت به حرکتش ادامه بدهد. (ج) اگر، به‌جای این نیرو، همان نیروی اولیه (لازم برای شروع حرکت) همچنان به کنده اثر کند چه شتابی به آن می‌دهد؟

**۷.** ضریب اصطکاک ایستایی میان لاستیکهای یک اتومبیل و جادهٔ خشک ۰٫۶۲ است. جرم اتومبیل ۱۵۰۰kg است. (الف) روی جادهٔ

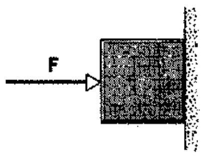
افقی و (ب) روی جاده‌ای با شیب °۸٫۶ به طرف پایین، حداکثر چه نیروی ترمزی می‌توان اعمال کرد؟

۸. خانه‌ای برفراز تپه‌ای ساخته شده است. شیب دامنهٔ تپه °۴۲ است. ریزش دامنه نشان می‌دهد که شیب را باید کم کرد. اگر ضریب اصطکاکِ خاک بر خاک ۰٫۵۵ باشد، شیب را به اندازهٔ چه زاویه‌ای ($\phi$) باید کمتر کرد (شکل ۲۵)؟




**شکل ۲۵.** مسئلهٔ ۸

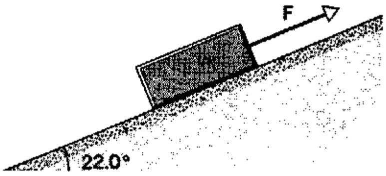
۹. نیروی افقی $F$ به مقدار ۱۲lb، جسمی به وزن ۵٫۰ lb را به یک دیوار قائم می‌فشارد (شکل ۲۶). ضریب اصطکاک ایستایی میان دیوار و جسم ۰٫۶۰، و ضریب اصطکاک جنبشی میان این دو ۰٫۴۰ است. فرض کنید جسم در ابتدا ساکن است. (الف) آیا جسم شروع به حرکت می‌کند؟ (ب) دیوار چه نیرویی به جسم وارد می‌کند؟




**شکل ۲۶.** مسئلهٔ ۹

۱۰. صندوقی به جرم ۱۳۶kg روی زمین ساکن است. مردی می‌خواهد با نیروی افقی ۴۱۲N آن‌را به حرکت در بیاورد. (الف) فرض کنید ضریب اصطکاک ایستایی میان صندوق و زمین ۰٫۳۷ است. نشان بدهید که صندوق حرکت نمی‌کند. (ب) مرد دیگری، برای کمک به اولی، صندوق را به طرف بالا می‌کشد. این دومی حداقل باید چه نیرویی به طرف بالا وارد کند تا صندوق روی زمین به راه بیفتد؟ (ج) اگر دومی، به‌جای نیروی قائم، یک نیروی افقی به صندوق وارد کند، حداقل چه نیرویی، علاوه بر نیروی شخص اول، باید وارد کند تا صندوق شروع به حرکت کند؟

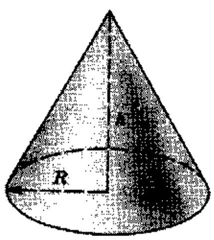
۱۱. جسمی به جرم ۷٫۹۶kg روی سطحی با شیب °۲۲٫۰ نسبت به افق قرار دارد (شکل ۲۷). ضریب اصطکاک ایستایی ۰٫۲۵، و ضریب اصطکاک جنبشی ۰٫۱۵ است. (الف) حداقل نیروی $F$، موازی با سطح شیبدار، برای جلوگیری از لغزیدن جسم روی سطح چقدر است؟ (ب) حداقل نیروی $F$ برای به حرکت درآوردن جسم به طرف بالای سطح شیبدار چقدر است؟ (ج) حداقل نیروی $F$ برای اینکه جسم با سرعت ثابت به‌طرف بالای سطح شیبدار حرکت کند چقدر است؟




**شکل ۲۷.** مسئلهٔ ۱۱

۱۲. دانشجویی می‌خواهد ضرایب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین یک جعبه و یک تخته را به‌دست بیاورد. جعبه را روی تخته می‌گذارد و یک سر تخته را کم‌کم بلند می‌کند. هنگامی که زاویهٔ شیب تخته با سطح افقی °۲۸٫۰ می‌شود، جعبه شروع به لغزیدن می‌کند و طی ۳٫۹۲s مسافت ۲٫۵۳m را روی سطح شیبدار طی می‌کند. ضرایب اصطکاک را پیدا کنید.

۱۳. کارگری می‌خواهد مقداری ماسه را در ناحیه‌ای دایره‌ای شکل روی هم انباشته کند؛ شعاع دایره $R$ است و هیچ ماسه‌ای نباید به ناحیهٔ خارج از دایره بریزد (شکل ۲۸). نشان بدهید که بیشترین حجم ماسه‌ای که به این ترتیب می‌توان انباشته کرد $\pi\mu_s R^3/3$ است، که در آن $\mu_s$ ضریب اصطکاک ایستایی ماسه با ماسه است. (حجم مخروطی به مساحت قاعدهٔ $A$ و ارتفاع $h$، $Ah/3$ است.)



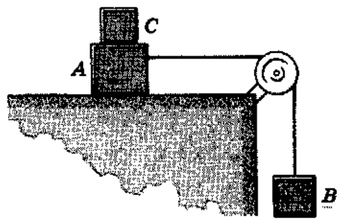

**شکل ۲۸.** مسئلهٔ ۱۳

۱۴. گرمای ناشی از اصطکاک، که در اثر حرکت اسکی ایجاد می‌شود، عامل اصلی لغزیدن اسکی روی برف است. اسکی در شروع کار به برف می‌چسبد، اما در اثر حرکت، برف زیر آن ذوب می‌شود. با موم زدن به اسکی، اصطکاک میان اسکی و لایهٔ آب کم می‌شود. مجله‌ای گزارش کرده است که نوع جدیدی اسکی پلاستیکی، از موم هم کم اصطکاکتر است و یک اسکی‌باز با این اسکی روی شیب ملایمی به طول ۲۳۰m در آلپ، توانسته است رکورد خودش را از ۶۱s به ۴۲s کاهش بدهد. با فرض اینکه زاویهٔ شیب °۳٫۰ باشد، ضریب اصطکاک جنبشی را برای دو نوع اسکی حساب کنید.

۱۵. جسمی با سرعت ثابت روی سطح شیبداری به‌زاویهٔ $\theta$ به پایین می‌لغزد. همین جسم را با سرعت اولیهٔ $v_0$ به طرف بالای سطح شیبدار پرتاب می‌کنیم. (الف) جسم تا چه مسافتی بالا می‌رود؟ (ب) آیا باز به پایین برمی‌گردد؟

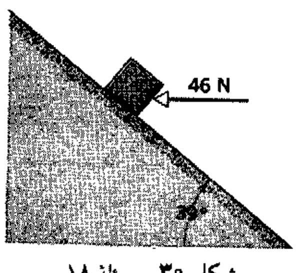
۱۶. قطعه‌ای یخ در حالت سکون روی سطح شیبداری به زاویهٔ ۳۳٫۰°، که با یخ اصطکاک دارد، شروع به لغزش می‌کند و مسافت معینی را می‌پیماید. زمان پیمودن این مسافت دو برابر زمانی است که برای پیمودن همان مسافت روی سطح شیبداری با همان شیب، اما بدون اصطکاک، لازم است. ضریب اصطکاک جنبشی بین یخ و سطح شیبدار ناهموار چقدر است؟

۱۷. در شکل ۲۹ جرم $A$ برابر با ۴٫۴kg و جرم $B$ برابر با ۲٫۶kg است. ضرایب اصطکاک ایستایی و جنبشی میان $A$ و میز، به‌ترتیب، ۰٫۱۸ و ۰٫۱۵ است. (الف) جسم $C$ را روی $A$ می‌گذاریم تا مانع لغزش آن شود. (الف) حداقل جرم $C$ چقدر باشد تا $A$ نلغزد؟ (ب) $C$ را به ناگهان از روی $A$ برمی‌داریم. شتاب $A$ چقدر می‌شود؟



شکل ۲۹. مسئلهٔ ۱۷

۱۸. جسمی به جرم ۴٫۸kg روی سطح شیبداری به‌زاویهٔ ۳۹° است و نیروی افقی ۴۶N بر آن وارد می‌شود (شکل ۳۰). ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح ۰٫۳۳ است. (الف) اگر جسم در حال حرکت به طرف بالای سطح شیبدار باشد، شتاب آن چقدر است؟ (ب) اگر سرعت اولیهٔ جسم ۴٫۳m/s باشد، و نیروی افقی هم دائماً بر آن اثر کند، جسم تا چه مسافتی روی سطح شیبدار بالا می‌رود؟ (ج) پس از اینکه جسم به بالاترین نقطهٔ مسیر خود رسید، چه بر سرش می‌آید؟



شکل ۳۰. مسئلهٔ ۱۸

۱۹. جسمی فولادی به جرم ۱۲kg روی میزی افقی ساکن است. ضریب اصطکاک ایستایی میان جسم و میز ۰٫۵۲ است. (الف) اندازهٔ نیروی افقی لازم برای اینکه جسم شروع به حرکت کند چقدر است؟ (ب) اندازهٔ نیرویی با زاویهٔ ۶۲° بالاتر از سطح افقی، که بتواند جسم را به حرکت دربیاورد چقدر است؟ (ج) اگر جهت نیرو ۶۲° پایین‌تر از سطح افقی باشد، اندازه آن حداکثر چقدر می‌تواند باشد بی‌آنکه جسم شروع به حرکت کند؟

۲۰. زاویهٔ دستهٔ زمین‌شویی با راستای قائم $\theta$ است (شکل ۳۱). $\mu_k$ ضریب اصطکاک جنبشی و $\mu_s$ ضریب اصطکاک ایستایی بین زمین‌شوی و کف اتاق است. (الف) به زمین‌شوی نیروی $F$ را در راستای دستهٔ آن وارد می‌کنیم. اندازهٔ این نیرو چقدر باشد تا زمین‌شوی با سرعت ثابت روی زمین حرکت کند؟ (ب) نشان بدهید که اگر $\theta$ از زاویه‌ای معین، $\theta_0$، کمتر باشد، نیروی $F$ هر چقدر بزرگ هم که باشد زمین‌شوی را به‌حرکت در نمی‌آورد. زاویهٔ $\theta_0$ چقدر است؟

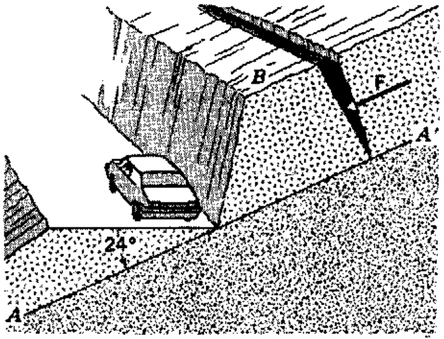
شکل ۳۱. مسئلهٔ ۲۰

۲۱. کارگری صندوقی به وزن ۱۵۰lb را به کمک طنابی روی زمین می‌کشد. طناب با سطح افقی زاویهٔ ۱۷° می‌سازد. ضریب اصطکاک ایستایی ۰٫۵۲ و ضریب اصطکاک جنبشی ۰٫۳۵ است. (الف) چه کششی در طناب لازم است تا صندوق شروع به حرکت کند. (ب) شتاب اولیهٔ صندوق چقدر است؟

۲۲. از سیمی که فقط تحمل ۱٫۲۲kN کشش را دارد برای کشیدن جعبه‌ای روی زمین استفاده می‌کنیم. حداکثر وزن جعبه‌ای که با این سیم می‌توانیم بکشیم چقدر می‌تواند باشد؟ ضریب اصطکاک ایستایی ۰٫۳۵ است، و سیم را الزاماً افقی به‌کار نمی‌بریم.

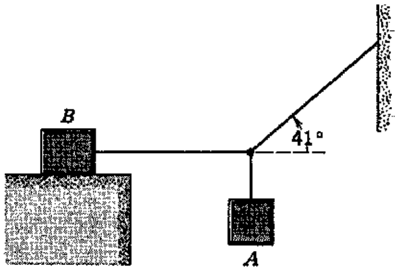
۲۳. شکل ۳۲ مقطع جاده‌ای را نشان می‌دهد که روی دامنهٔ کوهی ساخته شده است. خط $AA'$ نمایندهٔ صفحهٔ بستر سستی است که روی آن امکان لغزش وجود دارد (صفحهٔ شکست). قطعهٔ $B$ بلافاصله بالای جاده، توسط یک شکاف بزرگ (مفصل) از صخره‌های بالایی تپه جدا شده است، بنابراین فقط نیروی اصطکاک بین این قطعه و صفحهٔ احتمالی "شکست" است که مانع لغزش می‌شود. جرم قطعه

$1{,}8 \times 10^7$kg، زاویهٔ صفحهٔ شکست °۲۴ پایین‌تر از سطح جاده، و ضریب اصطکاک ایستایی میان قطعه و صفحه ۰٫۶۳ است. (الف) نشان بدهید که قطعه نمی‌لغزد. (ب) اگر آب در مفصل جمع شود و نیروی هیدروستاتیکی $F$ را در راستای موازی با شیب قطعه بر آن وارد کند، حداقل نیروی $F$ لازم برای لغزش قطعه چقدر است؟



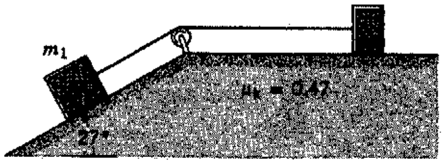
شکل ۳۲. مسئلهٔ ۲۳

۲۴. در شکل ۳۳، وزن جسم $B$ برابر با ۷۱۲N است. ضریب اصطکاک ایستایی میان جسم $B$ و میز ۰٫۲۵ است. حداکثر وزن $A$ چقدر باشد تا سیستم از حالت تعادل خارج نشود؟



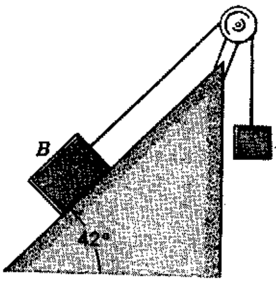
شکل ۳۳. مسئلهٔ ۲۴

۲۵. در شکل ۳۴، جرم $m_1$ برابر با ۴٫۲۰kg و جرم $m_2$ برابر با ۲٫۳۰kg است. ضریب اصطکاک جنبشی بین $m_2$ و سطح افقی ۰٫۴۷ است. سطح شیبدار اصطکاک ندارد. (الف) شتاب اجسام و (ب) کشش ریسمان را پیدا کنید.



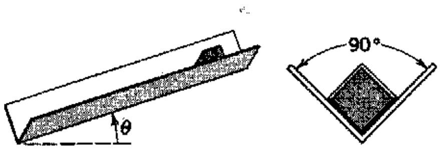
شکل ۳۴. مسئلهٔ ۲۵

۲۶. در شکل ۳۵، وزن $B$ برابر با ۹۴٫۰lb و وزن $A$ برابر با ۲۹٫۰lb است. ضریب اصطکاک ایستایی میان $B$ و سطح ۰٫۵۶، و ضریب اصطکاک جنبشی میان آنها ۰٫۲۵ است. (الف) شتاب $B$، در حال حرکت به طرف بالا، چقدر است؟ (ب) شتاب $B$، در حال حرکت به طرف پایین، چقدر است؟ زاویهٔ سطح شیبدار °۴۲٫۰ است.



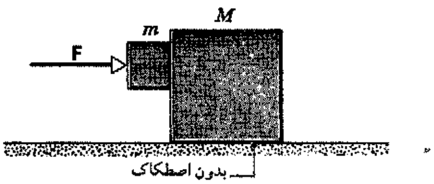
شکل ۳۵. مسئلهٔ ۲۶

۲۷. جعبه‌ای در ناودان شیبداری با مقطع قائم‌الزاویه، به طرف پایین می‌لغزد (شکل ۳۶). ضریب اصطکاک جنبشی میان جعبه و سطح داخلی ناودان $\mu_k$ است. شتاب جعبه چقدر است؟



شکل ۳۶. مسئلهٔ ۲۷

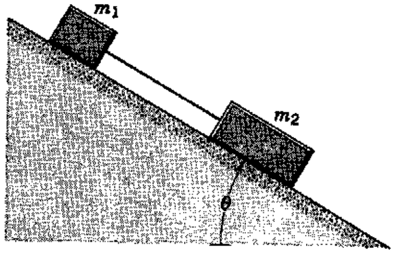
۲۸. در شکل ۳۷، $m = 16$kg و $M = 88$kg است. ضریب اصطکاک ایستایی بین دو جسم $\mu_s = 0{,}38$ است، اما $M$ با سطح زیرینش اصطکاک ندارد. نیروی افقی $F$ حداقل باید چقدر باشد تا $m$ نسبت به $M$ ساکن بماند؟



شکل ۳۷. مسئلهٔ ۲۸

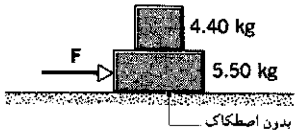
۲۹. روی یک سطح شیبدار، دو جسم به جرمهای $m_1 = 1{,}65$kg و $m_2 = 3{,}22$kg، با میله‌ای بی‌جرم به هم متصل‌اند. میله با سطح موازی است (شکل ۳۸). این مجموعه به طرف پایین سطح شیبدار می‌لغزد، چنان که $m_1$ به دنبال $m_2$ حرکت می‌کند. زاویهٔ سطح شیبدار °۲۹٫۵ است. ضریب اصطکاک جنبشی بین $m_1$ و سطح شیبدار $\mu_1 = 0{,}226$، و بین $m_2$ و سطح شیبدار $\mu_2 = 0{,}127$ است. (الف) شتاب مشترک دو جسم و (ب) کشش میله را به‌دست بیاورید. (ج) اگر جای $m_1$ و $m_2$ را عوض کنیم چه تغییری در

جوابهای (الف) و (ب) به‌وجود می‌آید؟



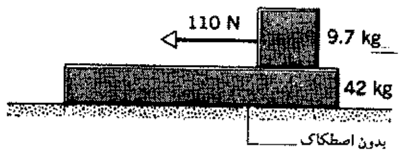
شکل ۳۸. مسئلهٔ ۲۹

۳۰. جسمی به جرم ۴٫۴۰kg روی جسم دیگری به جرم ۵٫۵۰kg قرار دارد. برای اینکه جسم رویی روی جسم زیری بلغزد (در حالی که جسم زیری ثابت نگه داشته شده است)، باید نیروی افقی به اندازهٔ ۱۲٫۰N بر جسم رویی وارد شود. مجموعهٔ دو جسم را روی میزی افقی و بدون اصطکاک می‌گذاریم (شکل ۳۹). (الف) حداکثر نیروی افقی $F$ که می‌توان بر جسم زیرین وارد کرد تا دو جسم با هم حرکت کنند چقدر است؟ (ب) شتاب دو جسم، به‌ازای این نیرو، چقدر است؟ (ج) ضریب اصطکاک ایستایی بین دو جسم را پیدا کنید.



شکل ۳۹. مسئلهٔ ۳۰

۳۱. تیغه‌ای به جرم ۴۲kg روی یک سطح بدون اصطکاک واقع شده است. جسمی به جرم ۹٫۷kg روی ورقه قرار دارد (شکل ۴۰). ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و تیغه ۰٫۵۳، و ضریب اصطکاک جنبشی میان آنها ۰٫۳۸ است. به جسم ۹٫۷ کیلوگرمی نیرویی افقی به‌اندازهٔ ۱۱۰N وارد می‌شود. (الف) شتاب جسم و (ب) شتاب تیغه چقدر است؟



شکل ۴۰. مسئلهٔ ۳۱

### بخش ۶-۳ دینامیک حرکت دایره‌ای یکنواخت

۳۲. در یک مسابقهٔ لوژسواری در المپیک، یک تیم اروپایی پیچی به شعاع ۲۵ft را با سرعت ۶۰mi/h می‌پیماید. شتاب مسابقه‌دهنده‌ها (الف) برحسب $ft/s^2$ و (ب) برحسب یکای $g$ چقدر است؟

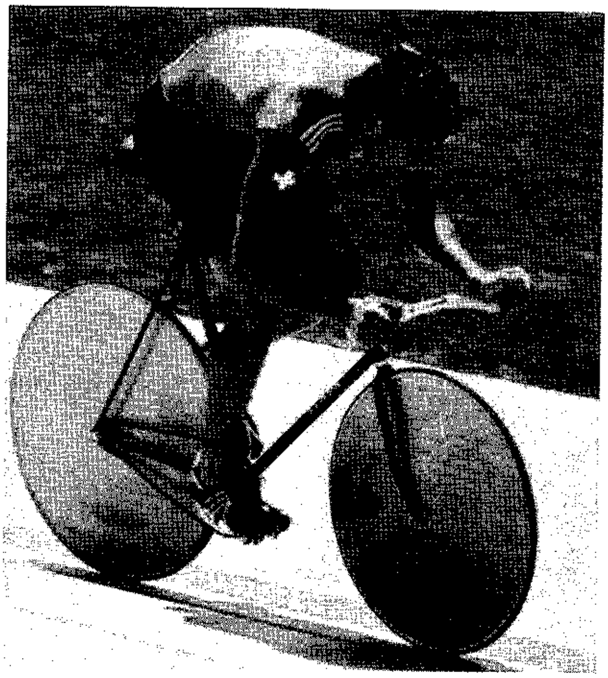
۳۳. اتومبیلی به وزن ۲۴۰۰lb (یعنی ۱۰٫۷kN)، که با سرعت ۳۰mi/h (یعنی ۱۳٫۴m/s) حرکت می‌کند، می‌خواهد از پیچی به شعاع ۲۰۰ft (یعنی ۶۱٫۰m) که شیب عرضی ندارد بگذرد. (الف) نیروی اصطکاک لازم برای اینکه اتومبیل بر دایره بماند چقدر است؟ (ب) حداقل ضریب اصطکاک لازم بین لاستیکها و جاده، برای تأمین این نیرو، چقدر است؟

۳۴. پیچ دایره‌ای شکل بزرگراهی برای سرعت ۶۰km/h (یعنی ۳۷mi/h) طراحی شده است. (الف) اگر شعاع پیچ ۱۵۰m (یعنی ۴۹۰ft) باشد، زاویهٔ صحیح شیب عرضی چقدر است؟ و (ب) اگر پیچ شیب عرضی نداشته باشد، حداقل ضریب اصطکاک بین لاستیکها و جاده چقدر باشد تا اتومبیلهایی که با این سرعت از پیچ می‌گذرند نلغزند؟

۳۵. دارید اتومبیلتان را با سرعت ۸۵km/h می‌رانید که متوجه مانعی در جاده می‌شوید که ۶۲m جلوتر از شماست. (الف) برای اینکه بتوانید پیش از مانع متوقف بشوید، ضریب اصطکاک ایستایی بین لاستیکها و جاده حداقل چقدر باید باشد؟ (ب) فرض کنید که دارید در پارکینگ خالی و وسیعی با سرعت ۸۵km/h می‌رانید. ضریب اصطکاک ایستایی حداقل چقدر باشد تا بتوانید با اتومبیل روی دایره‌ای به شعاع ۶۲m حرکت کنید (تا به دیواری که ۶۲m جلوی شماست برخورد نکنید)؟

۳۶. یک آونگ مخروطی وزنه‌ای به جرم ۵۳g دارد که به ریسمانی به طول ۱٫۴m متصل است. وزنهٔ آونگ روی دایره‌ای به شعاع ۲۵cm حرکت می‌کند. (الف) سرعت وزنه چقدر است؟ (ب) شتاب آن چقدر است؟ (ج) کشش ریسمان چقدر است؟

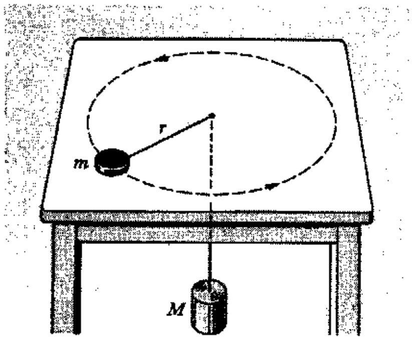
۳۷. دوچرخه‌سواری (شکل ۴۱) دایره‌ای به شعاع ۲۵m را با سرعت ثابت ۸٫۷m/s می‌پیماید. جرم مجموعهٔ دوچرخه و دوچرخه‌سوار ۸۵kg است. نیرویی را که جاده بر دوچرخه وارد می‌کند (مقدار و زاویه با راستای قائم را) محاسبه کنید.


شکل ۴۱. مسئلهٔ ۳۷

۳۸. در مدل بور برای اتم هیدروژن، الکترون در مداری دایره‌ای شکل به دور هسته می‌گردد. اگرشعاع مدار $۵٫۳ \times ۱۰^{-۱۱}$m و بسامد چرخش الکترون $۶٫۶ \times ۱۰^{۱۵}$rev/s باشد، (الف) سرعت الکترون، (ب) شتاب الکترون، و (ج) نیروی وارد بر الکترون را حساب کنید. (این نیرو ناشی از جاذبهٔ بین هستهٔ با بار مثبت و الکترون با بار منفی است.)

۳۹. کودکی یک زنبیل پیک‌نیک را روی لبهٔ بیرونی صفحهٔ چرخانی به شعاع ۴٫۶m می‌گذارد. صفحه هر ۲۴s یک دور می‌چرخد. ضریب اصطکاک ایستایی حداقل چقدر باشد تا زنبیل روی صفحه باقی بماند؟

۴۰. قرصی به جرم $m$ روی میزی بدون اصطکاک است و با ریسمانی که از سوراخی در میز می‌گذرد، به استوانه‌ای به جرم $M$ متصل است (شکل ۴۲). قرص با چه سرعتی باید در دایره‌ای به شعاع $r$ حرکت کند تا استوانه ساکن بماند؟



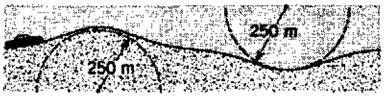
شکل ۴۲. مسئلهٔ ۴۰

۴۱. در دفترچهٔ راهنمای اتومبیلی آمده است که اگر با سرعت ۴۸km/h در حرکت باشید و بخواهید در کوتاهترین مسافت ممکن متوقف بشوید، از لحظه‌ای که تصمیم می‌گیرید تا لحظه‌ای که پای شما به پدال ترمز برسد، اتومبیل ۱۰m جلو رفته است و بعد از ترمز هم ۲۱m دیگر می‌پیماید تا متوقف شود. (الف) در این محاسبات، ضریب اصطکاک چقدر فرض شده است؟ (ب) حداقل شعاع مسیری که با سرعت ۴۸km/h می‌توان در آن پیچید، بی‌آنکه اتومبیل بلغزد، چقدر است؟

۴۲. پیچ دایره‌ای بزرگراهی با شیب عرضی مناسب برای سرعت ۹۵km/h طراحی شده است. شعاع پیچ ۲۱۰m است. در یک روز بارانی، ترافیک با سرعت ۵۲km/h در این بزرگراه حرکت می‌کند. (الف) ضریب اصطکاک بین لاستیکها و جاده حداقل چقدر باشد تا اتومبیلها (با وجود این اختلاف سرعت) سر پیچ نلغزند؟ (ب) به‌ازای این ضریب اصطکاک، اتومبیلها حداکثر با چه سرعتی می‌توانند پیچ را بدون لغزش طی کنند؟

۴۳. دانشجویی ۱۵۰lb وزن دارد. وزن ظاهری این دانشجو، در بالاترین نقطهٔ چرخ و فلکی که با سرعت ثابت می‌چرخد، ۱۲۵lb است. (الف) وزن ظاهری او در پایین‌ترین نقطهٔ چرخ و فلک چقدر است؟ (ب) اگر سرعت چرخ و فلک دو برابر شود، وزن ظاهری دانشجو در بالاترین نقطهٔ آن چقدر می‌شود؟

۴۴. اتومبیلی با سرعت ثابت روی جاده‌ای مستقیم که به چپ و راست نمی‌پیچد اما پستی و بلندی دارد، حرکت می‌کند. بخشی از این جاده یک ناحیهٔ برآمدگی و یک ناحیهٔ فرورفتگی دارد که شعاع هر دو ناحیه ۲۵۰m است (شکل ۴۳). (الف) هنگامی که اتومبیل از برآمدگی می‌گذرد، نیروی عمودی وارد بر آن از جاده نصف وزن اتومبیل است. وزن اتومبیل ۱۶kN است. نیروی عمودی وارد بر اتومبیل هنگام گذشتن از فرورفتگی چقدر است؟ (ب) حداکثر سرعت اتومبیل، برای اینکه هنگام گذشتن از برآمدگی از جاده جدا نشود، چقدر می‌تواند باشد؟ (ج) اگر اتومبیل با سرعت قسمت (ب) حرکت کند، نیروی عمودی وارد بر آن، هنگام گذشتن از فرورفتگی چقدر است؟

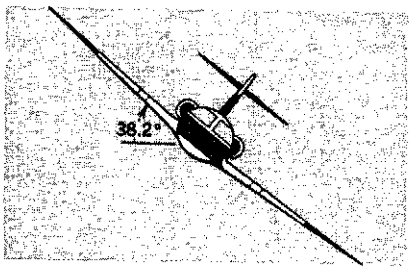


شکل ۴۳. مسئلهٔ ۴۴

۴۵. سکه‌ای کوچک روی صفحهٔ تخت و افقی گرامافونی قرار دارد. مشاهده می‌شود که گرامافون هر ۳٫۳s دقیقاً ۳ دور می‌زند. (الف) سکه به‌فاصلهٔ ۵٫۲cm از مرکز صفحه است و بدون لغزش همراه با آن می‌گردد. سرعت سکه چقدر است؟ (ب) (اندازه و جهت) شتاب سکه را به‌دست بیاورید. (ج) اگر جرم سکه ۱٫۷g باشد، نیروی اصطکاک وارد بر آن چقدر است؟ (د) مشاهده می‌شود که اگر سکه درفاصله‌ای بیش از ۱۲cm از مرکز صفحه قرار بگیرد می‌لغزد. ضریب اصطکاک ایستایی بین سکه و صفحه چقدر است؟

۴۶. جسم کوچکی به فاصلهٔ ۱۳٫۰cm از مرکز صفحهٔ گرامافونی قرار دارد. مشاهده می‌شود که صفحه اگر با سرعت $۳۳\frac{۱}{۳}$rev/min بچرخد جسم نمی‌لغزد، اما اگر با سرعت ۴۵٫۰rev/min بچرخد جسم می‌لغزد. ضریب اصطکاک ایستایی میان جسم و صفحه درچه گستره‌ای می‌تواند باشد؟

۴۷. هواپیمایی با سرعت ۴۸۲km/h روی دایره‌ای افقی پرواز می‌کند. بالهای هواپیما با سطح افقی زاویهٔ °۳۸٫۲ می‌سازند (شکل ۴۴). شعاع دایره‌ای که هواپیما روی آن پرواز می‌کند چقدر است؟ فرض کنید نیروی مرکزگرا تماماً از نیروی بالابرنده‌ای تأمین می‌شود که بر بالها عمود است.



شکل ۴۴. مسئلهٔ ۴۷

۴۸. یک مرغ دریایی در یک مسیر دایره‌ای افقی، بدون بال زدن،

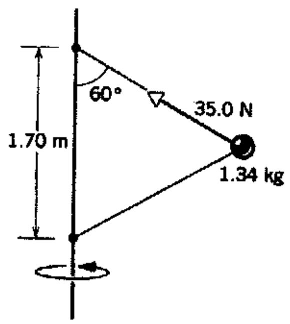
پرواز می‌کند. زاویهٔ بالهای او با سطح افقی حدود °۲۵ است. ۱۳s طول می‌کشد تا این پرنده یک دورکامل بزند. (الف) سرعت این پرواز چقدر است؟ (ب) شعاع دایرهٔ مسیر چقدر است؟[1]

۴۹. ریسمانی می‌تواند کششی تا حد ۹٫۲lb را تحمل کند و پاره نشود. کودکی سنگی به وزن ۰٫۸۲lb را به یک سر آن می‌بندد، سر دیگر آن را در دست می‌گیرد، و سنگ را در صفحهٔ قائم در دایره‌ای به شعاع ۲٫۹ft می‌گرداند. کودک سرعت سنگ را به‌تدریج زیاد می‌کند تا اینکه ریسمان پاره شود. (الف) هنگام پاره‌شدن ریسمان، سنگ درکجای مسیرش بوده است؟ (ب) سرعت سنگ هنگام پاره‌شدن ریسمان، چقدر بوده است؟

۵۰. یک هواپیمای مدل به جرم ۰٫۷۵kg به یک سر ریسمانی به طول ۳۳m بسته شده است و در دایره‌ای افقی در ارتفاع ۱۸m پرواز می‌کند. سر دیگر ریسمان به زمین متصل است. هواپیما در دقیقه ۴٫۴ دور می‌زند. نیروی بالابرنده بر بالها، که افقی‌اند، عمود است. (الف) شتاب هواپیما چقدر است؟ (ب) کشش ریسمان چقدر است؟ (ج) نیروی بالابرنده‌ای که بر بالهای هواپیما وارد می‌شود چقدر است؟

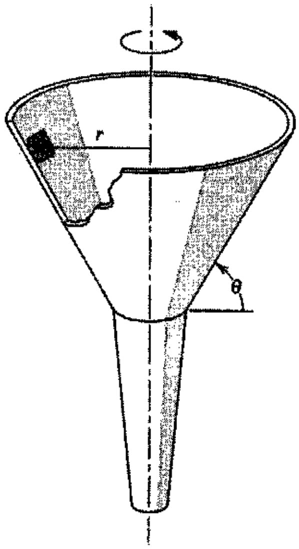
۵۱. فرض کنید در صورتی که زمین نمی‌چرخید، کیلوگرم استاندارد در سطح دریا در خط استوا دقیقاً ۹٫۸۰N وزن می‌داشت. حالا اگر چرخش زمین را در نظر بگیرید، این جسم طی یک شبانه‌روز محیط دایره‌ای به شعاع ۶۳۷۰km (شعاع زمین) را طی می‌کند. (الف) نیروی مرکزگرای لازم برای اینکه کیلوگرم استاندارد در این مسیر دایره‌ای حرکت کند چقدر است؟ (ب) نیرویی که کیلوگرم استاندارد، در استوا، بر نیروسنج فنری وارد می‌کند (وزن ظاهری جسم) چقدر است؟

۵۲. توپی به جرم ۱٫۳۴kg با دو ریسمان "بی‌جرم"، هر یک به طول ۱٫۷۰m، به میله‌ای صلب و قائم بسته شده است. ریسمانها به دو نقطهٔ میله، به فاصلهٔ ۱٫۷۰m از یکدیگر بسته شده‌اند و سیستم حول میله می‌چرخد؛ هر دو ریسمان کاملاً کشیده‌اند و با میلهٔ مثلثی متساوی‌الاضلاع می‌سازند (شکل ۴۵). کشش ریسمان بالایی ۳۵٫۰N است. (الف) کشش ریسمان پایینی را پیدا کنید. (ب) نیروی خالص وارد بر توپ را، در وضعیتی که در شکل ۴۵ نشان داده شده است، پیدا کنید. (ج) سرعت گلوله چقدر است؟



شکل ۴۵. مسئلهٔ ۵۲

۵۳. مکعب بسیار کوچکی به جرم $m$ در قیفی قرار دارد که با آهنگ ثابت $v$ دور بر ثانیه حول یک محور قائم می‌چرخد (شکل ۴۶). زاویهٔ دیوارهٔ قیف با سطح افقی $\theta$ است. ضریب اصطکاک ایستایی بین مکعب و قیف $\mu_s$، و فاصلهٔ مرکز مکعب از محور دوران $r$ است. (الف) بیشترین و (ب) کمترین مقدار $v$ برای اینکه مکعب نسبت به قیف حرکت نکند چقدر است؟



شکل ۴۶. مسئلهٔ ۵۳

۵۴. چون زمین می‌چرخد، نخ شاقول دقیقاً در راستای نیروی گرانش زمین قرار نمی‌گیرد و ممکن است کمی از این راستا منحرف شود. (الف) نشان بدهید که زاویهٔ انحراف $\theta$ برحسب رادیان، در عرض جغرافیایی $L$ برابر است با

$$\theta = \left(\frac{۲\pi^۲ R}{gT^۲}\right) \sin ۲L$$

که در آن $R$ شعاع زمین و $T$ دورهٔ تناوب چرخش زمین است. (ب) زاویهٔ انحراف در کدام عرض جغرافیایی بیشینه است؟ (ج) زاویهٔ انحراف در قطبها چقدر است؟ در استوا چقدر است؟

**بخش ۶ـ۵ نیروهای وابسته به زمان: روش تحلیلی**

۵۵. مکان ذره‌ای به جرم ۲٫۱۷kg، که بر خط راست حرکت می‌کند، از رابطهٔ

$$x = ۰٫۱۷۹t^۴ - ۲٫۰۸t^۲ + ۱۷٫۱$$

به‌دست می‌آید که در آن $x$ برحسب متر و $t$ برحسب ثانیه است. (الف) سرعت، (ب) شتاب، و (ج) نیروی وارد بر ذره در زمان $t = ۷٫۱۸\text{s}$ را پیدا کنید.

---

۱. نگاه کنید به
"The Amateur Scientist," Jearl Walker, *Scientific American*, March 1985, p. 122.

۵۶. ذره‌ای به جرم $m$ تحت اثر نیروی خالصی به شکل

$$\mathbf{F}(t) = F_۰ \left(۱ - \frac{t}{T}\right)\mathbf{i}$$

است؛ یعنی، $F(t)$ در $t = ۰$ برابر با $F_۰$ است و به‌طور خطی با زمان کم می‌شود تا در زمان $T$ به صفر می‌رسد. ذره در زمان $t = ۰$، با سرعت $v_۰\mathbf{i}$ از مبدأ $x = ۰$ می‌گذرد. نشان بدهید که در زمان $t = T$، که درآن $F(t)$ صفر می‌شود، سرعت و مسافت پیموده شده عبارت‌اند از

$$v(T) = v_۰ + \frac{۱}{۲}a_۰ T$$

$$x(T) = v_۰ T + \frac{۱}{۳}a_۰ T^۲$$

که در آن، $a_۰ = F_۰/m$ شتاب اولیه است. این نتایج را با معادلات ۱۵ و ۱۹ فصل ۲ مقایسه کنید.

۵۷. ذره‌ای به جرم $m$ در $x = ۰$ ساکن است. از زمان $t = ۰$، نیرویی به شکل $F = F_۰ e^{-t/T}$ در جهت مثبت $x$ بر آن وارد می‌شود؛ $F_۰$ و $T$ ثابت‌اند. در $t = T$ نیرو حذف می‌شود. در لحظه‌ای که نیرو حذف می‌شود (الف) سرعت ذره چقدر است و (ب) مکان آن کجاست؟

### بخش ۶ـ۷ نیروی مقاومت شاره‌ها و حرکت پرتابی

۵۸. وزنهٔ کوچکی به جرم ۱۵۰g در عمق ۳٫۴km در اقیانوس است و با سرعت حد ثابت ۲۵m/s سقوط می‌کند. نیرویی که آب بر این وزنه وارد می‌کند چقدر است؟

۵۹. جسمی را از حالت سکون رها می‌کنیم. با فرض اینکه اصطکاک شاره به صورت $D = bv^۲$ باشد، سرعت حد جسم را به‌دست بیاورید.

۶۰. چه مدت طول می‌کشد تا جسم مثال ۵ به نصف سرعت حدِ خودش برسد؟

۶۱. با استفاده از جدول ۲، مقدار $b$ را برای قطرهٔ باران حساب کنید؛ فرض کنید که اصطکاک هوا $D = bv$ است. چگالی آب $۱٫۰ \mathrm{g/cm^۳}$ است.

۶۲. لوکوموتیوی به قطاری (روی ریلهای افقی) که ۲۳ واگن دارد شتاب می‌دهد. جرم هر واگن ۴۸٫۶ تن متریک، و نیروی مقاومت هوا وارد بر هر واگن $f = ۲۴۳v$ است که در آن $v$ (سرعت) برحسب m/s و $f$ برحسب N است. در لحظه‌ای که قطار ۳۴٫۵km/h سرعت دارد، شتاب آن $۰٫۱۸۲\mathrm{m/s^۲}$ است. (الف) کشش در اتصال بین واگن اول و لوکوموتیو چقدر است؟ (ب) فرض کنید که این کشش بیشترین نیرویی است که لوکوموتیو می‌تواند به قطار وارد کند. در این صورت، تندترین شیبی که در آن لوکوموتیو می‌تواند قطار را با سرعت ۳۴٫۵km/h بکشد کدام است؟ (۱ تن متریک = ۱۰۰۰kg)

۶۳. بالونی با سرعت ثابت ۱٫۸۸m/s در هوای آرام پایین می‌آید. وزن کل بالون با محتویاتش ۱۰٫۸kN است. نیروی ارشمیدس ثابتی به‌اندازهٔ ۱۰٫۳kN بر بالون وارد می‌شود. علاوه براین هوا یک نیروی مقاومت اصطکاکی به‌شکل $D = bv^۲$ هم بر بالون وارد می‌کند؛ $v$ سرعت بالون و $b$ یک کمیت ثابت است. سرنشینان بالون ۲۶٫۵kg بار اضافی از بالون بیرون می‌ریزند. پس از این کار، بالون نهایتاً با چه سرعت ثابتی پایین می‌آید؟

۶۴. مسئلهٔ ۶۳ را تکرار کنید، اما نیروی اصطکاک هوا را $D = bv$ بگیرید. توجه کنید که $b$ را باید دوباره برای این مورد محاسبه کرد.

۶۵. لنجی به جرم $m$ با سرعت $v_i$ در حرکت است که موتورهایش خاموش می‌شوند. نیروی اصطکاک آب به شکل $D = bv$ است. (الف) عبارتی برای زمانی که طول می‌کشد تا سرعت لنج به $v_f$ کاهش پیدا کند به‌دست بیاورید. (ب) مقدار عددی این زمان را برای لنجی به جرم ۹۷۰kg که از سرعت اولیهٔ ۳۲km/h به سرعت ۸٫۳km/h می‌رسد حساب کنید. مقدار $b$ برابر با ۶۸N.s/m است.

۶۶. جسم افتان مثال ۵ را در نظر بگیرید. (الف) شتاب جسم را به‌صورت تابعی از زمان به‌دست بیاورید. این شتاب در $t$های کوچک، و در $t$های بزرگ چگونه است؟ (ب) مسافت سقوط جسم را به‌صورت تابعی از زمان پیدا کنید.

۶۷. با فرض اینکه نیروی اصطکاک هوا به شکل $D = bv$ است، (الف) نشان بدهید که مسافت $y_{۹۵}$، یعنی مسافتی که جسم از حالت سکون تا رسیدن به ۹۵٪ سرعت حدش می‌پیماید،

$$y_{۹۵} = (v_T^۲/g)\left(\ln ۲۰ - \frac{۱۹}{۲۰}\right)$$

است، که در آن $v_T$ سرعت حد است .(راهنمایی: نتیجه‌ای را که در مسئلهٔ ۶۶ برای $y(t)$ به‌دست آوردید به‌کار ببرید). (ب) با استفاده از سرعت حد ۴۲m/s برای توپ بیسبال، از جدول ۲، مسافت ۹۵٪ را به‌دست بیاورید. چرا نتیجه شما با مقداری که در جدول ۲ آمده است نمی‌خواند؟

### پروژه‌های کامپیوتری

۶۸. در بخش ۶ـ۶ روشی عددی برای انتگرال‌گیری از قانون دوم نیوتون و به‌دست آوردن جدولی از مکان و سرعت جسم در زمانهای متوالی ارائه شد. بازهٔ شامل زمان اولیهٔ $t_۰$ تا زمان پایانی $t_f$ را به $N$ بازهٔ کوچک $\Delta t$ تقسیم کنید. اگر $x_b$، $v_b$، و $F_b$، به‌ترتیب، مختصه، سرعت، و نیرو در ابتدای بازه باشند، $x_e = x_b + v_b\Delta t$ و $v_e = v_b + (F_b/m)\Delta t$، به‌ترتیب، براوردی از مختصه و سرعت در انتهای بازه‌اند. این مقادیر، به عنوان مختصه و سرعت در ابتدای بازهٔ بعدی به‌کار می‌روند. هرچه $\Delta t$ کوچکتر باشد، براورد بهتر است، اما $\Delta t$ را خیلی هم نمی‌شود کوچک گرفت؛ زیرا اگر $\Delta t$ خیلی کوچک باشد، طی محاسبه رقمهای با معنی از دست می‌روند. نیرو می‌تواند تابع مکان، سرعت و زمان باشد. شکل صریح این تابع را شرایط فیزیکی تعیین می‌کند؛ با داشتن این شکل می‌توان $F_b$ را، با استفاده از مقادیر $x_b$، $v_b$، و $t_b$ به‌دست آورد. یک برنامهٔ کامپیوتری بنویسید، یا الگوریتمی طرح کنید، که این انتگرال‌گیری را انجام بدهد. ورودی برنامه $x_۰$، $v_۰$، $t_۰$، $\Delta t$، و $N$ است. به عنوان مثال، حالت زیر را در نظر بگیرید.

شخصی صندوقی به جرم ۹۵kg را روی سطح ناهمواری هل می‌دهد. صندوق از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و نیرویی که شخص بر آن وارد می‌کند $F = ۲۰۰e^{-۰٫۱۵t}$ است، که در آن $F$ برحسب نیوتون و $t$ برحسب ثانیه است. نیرو به شکل نمایی کم می‌شود زیرا شخص خسته می‌شود. طی حرکت، یک نیروی اصطکاک ثابت ۸۰N با حرکت صندوقی مخالفت می‌کند. (الف) صندوق چه مدت پس از شروع حرکت متوقف می‌شود؟ (ب) در این مدت چه مسافتی را می‌پیماید؟ جوابها را با دقت دو رقم بامعنی به‌دست بیاورید.

برای انتگرال‌گیری، زمان بین $t = ۰s$ و $t = ۱۵s$ را به ۱۵۰۰ بازه، هر یک به‌اندازهٔ ۰٫۰۱s تقسیم کنید. هدف این نیست که مکان و سرعت را در پایان هر بازه نمایش بدهید. در اجرای اول، نتایج را در پایان هر ۱۰۰ بازه نمایش بدهید. در اجرای بعدی، قاعدتاً می‌خواهید که نتایج را، در گستره‌ای کوچکتر، در پایان بازه‌های کوچکتری نمایش بدهید. پس از به‌دست آوردن جدول نتایج، به دنبال دو نقطهٔ مجاور بگردید که $v_e = ۰$ بین آنهاست. اگر مقدار $x$ این دو نقطه تا دو رقم با معنی یکسان باشد، محاسبه تمام است. در غیر این‌صورت باید بازه‌هایی را که نتایج را در انتهای آنها نشان می‌دهید کوچکتر کنید، یا احتمالاً بازه‌های انتگرال‌گیری را کوچکتر بگیرید، و محاسبه را تکرار کنید.

**۶۹.** توپی به جرم ۱۵۰g با سرعت اولیهٔ ۲۵m/s، از لبهٔ صخره‌ای مستقیماً به بالا پرتاب می‌شود. در بازگشت، توپ از کنار صخره می‌گذرد و ۳۰۰m پایین‌تر به‌زمین برمی‌خورد. علاوه بر نیروی گرانش، نیروی مقاومت هوای $F_D = -۰٫۰۰۱۵۰v$ هم بر توپ وارد می‌شود؛ $F_D$ برحسب نیوتون و $v$ برحسب m/s است. (الف) مدت حرکت این توپ چقدر است؟ (ب) سرعت توپ درست پیش از برخورد به زمین، چقدر است؟ (ج) نسبت این سرعت به سرعت حد چقدر است؟

یک برنامهٔ کامپیوتری یا الگوریتم برای انتگرال‌گیری از قانون دوم نیوتون به‌کار ببرید. (راهنماییهای لازم را از بخش ۶ـ۶ و مسئلهٔ قبل بگیرید.) طول بازهٔ انتگرال‌گیری را ۰٫۰۰۱s بگیرید. مختصه و سرعت را، در فاصلهٔ $t = ۰s$ تا $t = ۱۲s$، هر ۰٫۱s نمایش بدهید. با این مقادیر باید جوابهایی با دقت دو رقم با معنی به‌دست بیاورید.

**۷۰.** پرتابه‌ای به جرم ۲٫۵kg از روی زمینی‌افقی‌پرتاب می‌شود. سرعت اولیهٔ پرتابه ۱۵۰m/s و زاویهٔ پرتاب ۴۰° بالای سطح افقی است. علاوه بر نیروی گرانشی، نیروی مقاومت هوای $\mathbf{F}_D = -۰٫۳۰\mathbf{v}$ نیز بر پرتابه وارد می‌شود؛ $\mathbf{F}_D$ برحسب نیوتون و $\mathbf{v}$ برحسب m/s است. به‌طور عددی، بین $t = ۰$ (زمان پرتاب) و $t = ۲۰s$ از قانون دوم نیوتون انتگرال بگیرید. اندازهٔ بازه‌های انتگرال‌گیری را ۰٫۰۰۱s انتخاب کنید، اما نتایج را هر ۰٫۵s نمایش بدهید. هم مختصات $x$ و $y$ و هم دو مؤلفهٔ سرعت را باید در نظر بگیرید. معادلات $a_x = -(b/m)v_x$ و $a_y = -g - (b/m)v_y$ را به‌کار ببرید؛ $b$ ثابت نیروی اصطکاک هواست. به پروژه‌های کامپیوتری قبلی رجوع کنید. (الف) مسیر $y$ برحسب $x$ را از نقطهٔ پرتاب تا نقطهٔ برخورد به زمین رسم کنید. توجه کنید که مسیر نسبت به محور قائمی که از نقطهٔ اوج می‌گذرد متقارن نیست. اگر مقاومت هوا نبود، مسیر متقارن می‌شد. با استفاده از نمودار، یا جدول مقادیر، این کمیتها را تخمین بزنید: (ب) زمانی که پرتابه به نقطهٔ اوج مسیر خود می‌رسد و مختصات نقطهٔ اوج؛ (ج) زمانی که پرتابه به زمین می‌خورد، برد پرتابه، و سرعت آن درست پیش از برخورد. (د) این کمیتها را با مقادیری که در غیاب مقاومت هوا به‌دست می‌آمد مقایسه کنید. مقاومت هوا چه تغییری در ارتفاع اوج می‌دهد؟ در برد چطور؟ در سرعت پیش از برخورد چطور؟

**۷۱.** مقاومت هوا می‌تواند تأثیر چشمگیری در زاویهٔ پرتابی که به برد بیشینه می‌انجامد داشته باشد. برای دیدن این تأثیر، پرتابه‌ای به جرم ۲٫۵kg را در نظر بگیرید که با سرعت ۱۵۰m/s بر فراز سطحی افقی پرتاب می‌شود، و فرض کنید که نیروی اصطکاک هوا $\mathbf{F}_D = -۰٫۳۰\mathbf{v}$ است، که در آن $\mathbf{F}_D$ برحسب نیوتون و $\mathbf{v}$ برحسب m/s است. برای هر یک از زوایای پرتاب ۲۵°، ۳۰°، ۳۵°، و ۴۰°، به‌طور عددی از قانون دوم نیوتون انتگرال بگیرید: اندازهٔ بازه‌های انتگرال‌گیری را ۰٫۰۰۱s بگیرید و نتایج را هر ۰٫۵s، از $t = ۰s$ (زمان پرتاب) تا $t = ۲۵s$ نمایش بدهید. به پروژه‌های کامپیوتری قبلی رجوع کنید. با استفاده از این نتایج برد را تخمین بزنید. برد در کدام‌یک از این زوایا بیشینه است؟

**۷۲.** پرتابه‌ای که تحت اثر مقاومت هوا قرار دارد به سرعت حدی‌اش می‌رسد. فرض کنید که نیروی خالص وارد بر پرتابه $-mg\mathbf{j} - b\mathbf{v}$ باشد، که در آن $b$ ثابت مقاومت شاره است و جهت مثبت محور $y$ به طرف بالاست. درسرعت حد $\mathbf{v}_T$، نیروی خالص صفر می‌شود. بنابراین، $\mathbf{v}_T = -(mg/b)\mathbf{j}$. توجه کنید که این سرعت مؤلفهٔ افقی ندارد. پرتابه در نهایت مستقیماً به طرف پایین سقوط می‌کند.

می‌توانید با استفاده از یک برنامهٔ کامپیوتری یا الگوریتم، "ببینید" که یک پرتابه چگونه به سرعت حد می‌گراید. پرتابه‌ای به جرم ۲٫۵kg را در نظر بگیرید که، با سرعت اولیهٔ ۱۵۰m/s با زاویهٔ ۴۰° بالای سطح افقی، پرتاب می‌شود. ضریب اصطکاک شاره را ۰٫۵۰kg/s بگیرید. به‌طور عددی از قانون دوم نیوتون انتگرال بگیرید و نتایج را هر ۰٫۵s، از $t = ۰s$ (زمان پرتاب) تا زمانی که مؤلفهٔ $y$ سرعت به ۹۰ درصد $v_T$ می‌رسد، نمایش بدهید. $v_x(t)$ و $v_y(t)$ را در یک نمودار نمایش بدهید. توجه کنید که با نزدیک شدن $v_y$ به $v_T$، $v_x$ به ۰ می‌گراید.

**۷۳.** اگر اثر مقاومت هوا را بر پرتابه در نظر بگیریم، مختصات آن با روابط زیر بیان می‌شوند:

$$x(t) = (v_{۰x}/b)(۱ - e^{-bt})$$
$$y(t) = (۱/b^۲)(g + bv_{۰y})(۱ - e^{-bt}) - (g/b)t$$

جهت مثبت $y$ را به‌طرف بالا و مبدأ مختصات را در نقطهٔ پرتاب گرفته‌ایم. ضریب مقاومت $b$ گرمای شدت برهم‌کنش هوا و پرتابه است. از

عبارتهای بالا مشتق بگیرید و نشان بدهید که مؤلفه‌های سرعت به شکل $v_x = v_{\circ x}e^{-bt}$ و $v_y = (\text{۱}/b)(g + bv_{\circ y})e^{-bt} - g/b$اند، و مؤلفه‌های شتاب به شکل $a_x = -bv_{\circ x}e^{-bt}$ و $a_y = -(g+bv_{\circ y})e^{-bt}$. یک برنامهٔ کامپیوتری بنویسید، یا الگوریتمی طرح کنید، که مختصات مؤلفه‌های سرعت، و مؤلفه‌های شتاب را در پایان هر بازهٔ زمانی به اندازهٔ $\Delta t$، از زمان $t_۱$ تا زمان $t_۲$، محاسبه کند.

اکنون این برنامه را برای بررسی اثرهوا بر پرتابه‌ای که با سرعت اولیهٔ ۵۰m/s با زاویهٔ پرتاب °۲۵ بالای سطح افقی، بر فراز زمین افقی پرتاب می‌شود به‌کار ببرید. (الف) فرض کنید $b = \text{۰٫۱۰}\,\mathrm{s^{-1}}$ است و با استفاده از برنامه، مختصات نقطهٔ اوج، و سرعت و شتاب پرتابه در آن نقطه را پیدا کنید. برای شروع، با استفاده از برنامه، مختصات، سرعت، و شتاب را هر ۰٫۱s، از $t = \text{۰}\,\mathrm{s}$ تا $t = \text{۴٫۵}\,\mathrm{s}$، به‌دست بیاورید. برای محاسبهٔ جوابهایی با دقت دو رقم بامعنی ممکن است لازم باشد بازه‌ها را کوچکتر کنید و برنامه را دوباره اجرا کنید. جواب را که به دست آوردید توجه کنید که زمان رسیدن پرتابه به نقطهٔ اوج، کمتر از زمان مشابه در حالت بدون مقاومت هواست، نقطهٔ اوج کوتاهتر و، به نقطهٔ پرتاب، نزدیکتر است، و سرعت پرتابه هم (از حالتی که اصطکاک هوا نباشد) کمتر است. (ب) برای تعیین اینکه آیا این روند ادامه می‌یابد یا نه، محاسبه را با $b = \text{۰٫۲۰}\,\mathrm{s^{-1}}$ تکرار کنید. (ج) مقاومت هوا چگونه بر برد پرتابه اثر می‌گذارد؟ فرض کنید که $b = \text{۰٫۱۰}\,\mathrm{s^{-1}}$ و، با استفاده از برنامه، برد را پیدا کنید (مقدار $x$ را به‌ازای $y = \text{۰}$ به‌دست بیاورید). این کار را برای $b = \text{۰٫۲۰}\,\mathrm{s^{-1}}$ هم تکرار کنید. (د) سرعت پرتابه، درست پیش از برخورد به زمین، در اثر مقاومت هوا چه تغییری می‌کند؟ برنامه را با $b = \text{۰٫۱۰}\,\mathrm{s^{-1}}$، و سپس با $b = \text{۰٫۲۰}\,\mathrm{s^{-1}}$ اجرا کنید و سرعت در لحظهٔ پیش از برخورد را به‌دست بیاورید. به یاد داشته باشید که در غیاب اصطکاک هوا، اندازهٔ هر یک از مؤلفه‌های سرعت، در لحظهٔ درست پیش از برخورد پرتابه به زمین و لحظهٔ پرتاب، یکسان است. توجه کنید که از معادلات بالا چنین نتیجه می‌شود که $a_x = -bv_x$ و $a_y = -g - bv_y$ است. با استفاده از این روابط، توضیح بدهید که چرا در نقطهٔ اوج $a_y = -g$ است، چرا $a_x$ هیچگاه صفر نمی‌شود، و چرا اندازهٔ $a_y$، درست پیش از برخورد به زمین با افزایش $b$ کم می‌شود؟

# ۷

# کار و انرژی

یکی از مسائل اساسی دینامیک، پیدا کردن چگونگی حرکت ذره‌ای است که نیروهای وارد بر آن‌را می‌شناسیم. منظور از "ذره چگونه حرکت می‌کند" این است که مکان آن طی زمان چگونه تغییر می‌کند. در دو فصل گذشته، مسئله را در مورد خاص نیروی ثابت حل کردیم؛ در مورد نیروی ثابت می‌توان از فرمولهای حرکت با شتاب ثابت استفاده کرد و $\mathbf{r}(t)$ را به‌دست آورد، و به این ترتیب مسئله به طور کامل حل می‌شود.

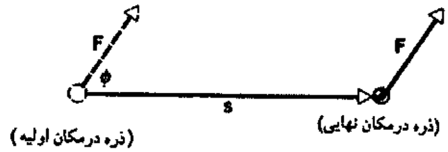
اما اگر نیروی وارد بر ذره و در نتیجه شتاب ذره ثابت نباشد، مسئله دشوارتر است. برای نیروهای وابسته به زمان و سرعت، می‌شود این مسئله را با روشهای انتگرال‌گیری بخشهای ۶ـ۵ و ۶ـ۷ حل کرد. در این فصل، نیروهای وابسته به مکانِ ذره را ــ مثلاً نیروی جاذبه‌ای که زمین بر اجسام نزدیک به خود وارد می‌کند، یا نیرویی که فنر کشیده شده به جسم متصل به خود وارد می‌کند ــ تحلیل می‌کنیم. از این تحلیل می‌رسیم به مفهوم **کار** و مفهوم **انرژی جنبشی**، و به طرح قضیهٔ کار‌ـانرژی، که موضوع اصلی این فصل است. در فصل ۸ انرژی را از دیدگاه وسیعتری بررسی می‌کنیم، و به قانون پایستگی انرژی می‌رسیم که نقش عمده‌ای در پیشرفت فیزیک داشته است.

## ۷ـ۱ کاری که نیروی ثابت انجام می‌دهد

ذره‌ای را در نظر بگیرید که نیروی ثابت $\mathbf{F}$ بر آن وارد می‌شود، و در ساده‌ترین حالت، فرض کنید که حرکت در خط راستی در جهت نیرو انجام می‌شود. در چنین حالتی، کار $W$ که نیرو روی ذره انجام می‌دهد طبق تعریف عبارت است از حاصل‌ضرب اندازهٔ نیرو و مسافت $s$ که نیرو در طی آن اثر می‌کند. این تعریف را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$W = Fs \qquad (۱)$$

یک مورد کلی‌تر، نیروی ثابت وارد بر ذره ممکن است در جهت حرکت ذره نباشد. در این‌صورت، کاری را که نیرو روی ذره انجام می‌دهد به شکل حاصل‌ضرب مؤلفهٔ نیرو در جهت حرکت، و اندازهٔ جابه‌جایی ذره تعریف می‌کنیم (در شکل ۱). نیروی ثابت $\mathbf{F}$ که با



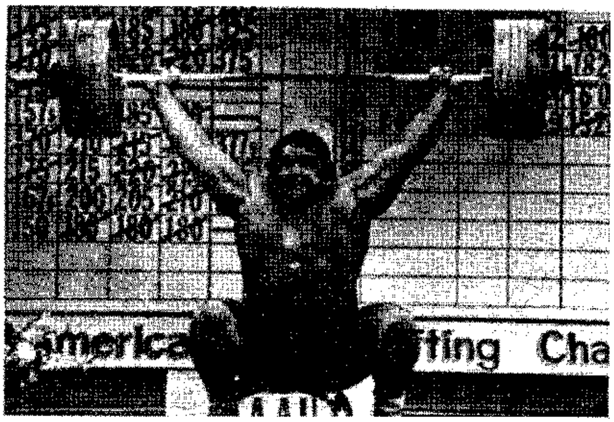

شکل۱. نیروی $\mathbf{F}$ بر ذره‌ای وارد می‌شود که جابه‌جایی آن $\mathbf{s}$ است. مؤلفه‌ای از $\mathbf{F}$ که کارانجام می‌دهد، $F \cos \phi$ است. کاری که $\mathbf{F}$ انجام می‌دهد $Fs \cos \phi$ است، که می‌توان آن‌را به‌صورت $\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ نوشت.

جهتِ جابه‌جایی $\mathbf{s}$ زاویهٔ $\phi$ می‌سازد، بر ذره وارد می‌شود. کار $W$ که نیروی $\mathbf{F}$ در این جابه‌جایی انجام می‌دهد، طبق تعریف ما، برابر است با

$$W = (F \cos \phi)s \qquad (۲)$$

البته ممکن است نیروهای دیگری هم بر ذره اثر کنند. معادلهٔ ۲ فقط کاری را تعیین می‌کند که نیروی مشخص $\mathbf{F}$ انجام می‌دهد. کاری را که نیروهای دیگر بر ذره انجام می‌دهند باید جداگانه حساب کرد. کل کاری که انجام می‌شود برابر است با مجموع کارهایی که همهٔ نیروها انجام می‌دهند. (به طریق دیگر، چنان که در بخش ۷ـ۴ خواهیم دید، می‌شود اول نیروی خالص وارد بر ذره را پیدا کرد و سپس کاری را که این تک نیروی خالص انجام می‌دهد حساب کرد. این روش با روش جمع کردن کارهای تک‌تک نیروها هم‌ارز است و هر دو روش به یک نتیجه منجر می‌شوند.)

اگر $\phi$ صفر باشد، کاری که $\mathbf{F}$ انجام می‌دهد همان $Fs$ است، که در معادلهٔ ۱ هم آمده است. بنابراین، اگر نیرویی افقی جسمی را در راستای افقی (در جهت نیرو) جابه‌جا کند، یا اگر نیرویی قائم جسمی را در راستای قائم (در جهت نیرو) جابه‌جا کند، کاری که نیرو انجام می‌دهد برابر است با اندازهٔ نیرو ضربدر مسافت پیموده شده. اگر $\phi$ برابر با $۹۰^\circ$ باشد، نیرو مؤلفه‌ای در جهت حرکت ندارد، و کاری هم



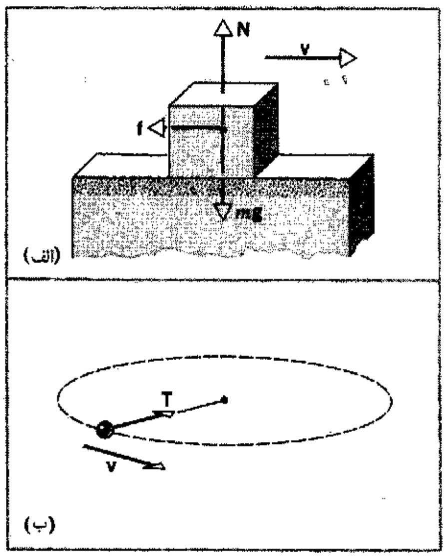
**شکل۲.** وزنه‌بردار نیروی بزرگی بر وزنه وارد می‌کند. اما در لحظه‌هایی که وزنه را بالای سرش نگه داشته است کاری انجام نمی‌دهد، زیرا وزنه ساکن است؛ نیرو هست اما جابه‌جایی نیست. البته این وزنه‌بردار قبلاً برای رساندن وزنه‌ها از زمین به این ارتفاع، کار انجام داده است.

روی ذره انجام نمی‌دهد. مثلاً، وزنه‌بردار (شکل ۲) وقتی که وزنه را از زمین بلند می‌کند کار انجام می‌دهد، ولی در حالتی که وزنه را نگه داشته است کاری انجام نمی‌دهد (چون جابه‌جایی صفر است). اگر در حالتی که وزنه بالای سرش است راه هم برود باز (بنابه تعریفی که برای کار کردیم) کاری روی وزنه انجام نمی‌دهد زیرا (با فرض آنکه جابه‌جایی در راستای قائم وجود نداشته باشد) نیروی قائمی که او وارد می‌کند بر جابه‌جایی افقی عمود است. شکل ۳ نمونه‌های دیگری از نیروهایی را نشان می‌دهد که کاری انجام نمی‌دهند.

توجه کنید که معادلهٔ ۲ را، هم به شکل $(F\ \cos\ \phi)s$ و هم به شکل $F(s \cos \phi)$ می‌شود نوشت. به عبارت دیگر کار را به دو طریق می‌توان حساب کرد، که هردو طریق به یک نتیجه می‌رسند: یا اندازهٔ جابه‌جایی را درمؤلفهٔ نیرو در جهت جابه‌جایی ضرب می‌کنیم، یا اندازهٔ نیرو را در مؤلفهٔ جابه‌جایی در جهت نیرو ضرب می‌کنیم. هر دو روش یادآور یکی از اجزای مهم در تعریف کارند: باید $\mathbf{s}$ مؤلفه‌ای در جهت $\mathbf{F}$ داشته باشد، و باید $\mathbf{F}$ مؤلفه‌ای در جهت $\mathbf{s}$ داشته باشد (تا کار مخالف صفر شود) (شکل ۴).

کار یک کمیت اسکالر است، اگرچه دو کمیتی که در تعریف آن وارد می‌شوند، نیرو و جابه‌جایی، بردارند. در بخش ۳ـ۵ گفتیم که حاصل‌ضرب اسکالر دو بردار، بنابه تعریف، کمیتی است اسکالر که برابر است با حاصل‌ضرب اندازهٔ یکی از بردارها در مؤلفهٔ بردار دیگر روی اولی. معادلهٔ ۲ نشان می‌دهد که کار هم دقیقاً به همین ترتیب محاسبه می‌شود، پس باید آن‌را به شکل حاصل‌ضرب اسکالر تعریف کرد. از مقایسهٔ معادلهٔ ۲ با معادلهٔ ۱۳ فصل ۳، می‌بینیم که کار را می‌شود چنین بیان کرد

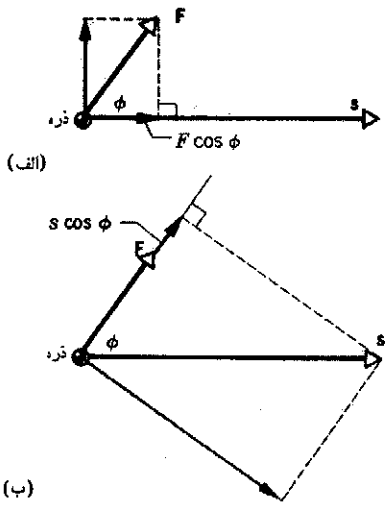
$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} \qquad (۳)$$




**شکل۳.** هر نیرویی که بر جسمی اثر کند الزاماً روی آن کار انجام نمی‌دهد، حتی اگر جسم در حال حرکت باشد. در (الف)، وزن و نیروی عمودی کاری انجام نمی‌دهند، زیرا بر جابه‌جایی عمودند، ولی نیروی اصطکاک کار انجام می‌دهد. در (ب) جسمی داریم که به ریسمانی بسته شده است و بر دایره‌ای افقی می‌گردد. کشش $\mathbf{T}$ ریسمان کاری روی جسم انجام نمی‌دهد، زیرا مؤلفه‌ای در جهت جابه‌جایی ندارد.

که در آن نقطه علامت حاصل‌ضرب اسکالر (یا نقطه‌ای) است.

کار می‌تواند مثبت یا منفی باشد. نیرو اگر مؤلفه‌ای در خلاف جهت حرکت داشته باشد، کاری که انجام می‌دهد منفی است. این حالت متناظر است با زاویهٔ منفرجه بین بردار نیرو و بردار جابه‌جایی. مثلاً، اگر جسمی را در دست بگیرید و تا زمین پایین بیاورید، کاری که نیروی رو به بالای دست شما روی جسم انجام می‌دهد منفی است. در این مورد $\phi$ برابر با $۱۸۰^\circ$ است، زیرا $\mathbf{F}$ به طرف بالا و $\mathbf{s}$ به طرف




**شکل۴.** (الف) کار $W$ به شکل $W = (s)(F\ \cos\ \phi)$. (ب) کار $W$ به شکل $W = (F)(s\ \cos\ \phi)$.

پایین است. (همزمان، نیروی گرانشی روی جسم، که به طرف پایین حرکت می‌کند، کار مثبت انجام می‌دهد.)

نیروی $\mathbf{F}$ "ناوردا" است، یعنی هم جهت و هم اندازهٔ آن مستقل از چارچوب لختی است که انتخاب می‌شود، اما $\mathbf{s}$ ناوردا نیست. ناظرهای گوناگون، بسته به چارچوب مرجعی که انتخاب می‌کنند، می‌توانند عملاً هر اندازه و جهتی برای $\mathbf{s}$ به‌دست بیاورند. بنابراین، ناظرهای چارچوبهای لخت متفاوت، که همگی نیروی وارد بر جسم را یکسان می‌سنجند، مقادیر متفاوتی برای کاری که آن نیرو بر جسم انجام می‌دهد تعیین می‌کنند. کار یک نیروی معین ممکن است برای ناظری مثبت، برای ناظری منفی، و برای ناظری دیگر حتی صفر باشد. به این نکته در بخش ۷ـ۶ خواهیم پرداخت.

معلوم شده است که کار ما به شکلی که ما آن‌را تعریف کردیم (معادلهٔ ۳)، مفهوم بسیار مفیدی در فیزیک است. تعریف خاص ما از "کار" ربطی به کاربرد رایج این واژه ندارد. کار فیزیکی را نباید با کار در مفهوم روزمره‌اش اشتباه کرد. شخصی که وزنهٔ سنگینی را در هوا به حالت سکون نگه داشته است شاید از لحاظ فیزیولوژیکی مشغول انجام کار سختی باشد، اما از لحاظ فیزیکی هیچ کاری انجام نمی‌دهد. دلیلش این است که وزنه، که نیرو به آن وارد می‌شود، جابه‌جایی ندارد.

از طرف دیگر، اگر وزنه‌بردار را به شکل سیستمی از ذرات در نظر بگیریم (که در فصل ۹ به آن خواهیم پرداخت)، خواهیم دید که از دیدگاه میکروسکوپیک واقعاً کار انجام می‌شود. ماهیچه یک تکیه‌گاه صلب نیست و نمی‌تواند بار را به شکل ایستا تحمل کند. تک‌تک تارهای ماهیچه مرتباً منقبض و بعد آسوده می‌شوند، و اگر وضعیت را به این شکل بررسی کنیم، می‌بینیم که در هر انقباضی کار انجام می‌شود. به همین علت است که وزنه‌بردار در اثر نگه‌داشتن وزنه، خسته می‌شود. در این فصل، این "کار داخلی" را در نظر نمی‌گیریم. واژهٔ کار را تنها به معنی دقیق معادلهٔ ۳ به‌کار می‌بریم؛ و در این معنی، اگر ذره‌ای که نیرو بر آن وارد می‌شود جابه‌جا نشود، کار واقعاً صفر است.

یکای کار از کاری که نیروی واحد بر جسمی انجام می‌دهد و آن‌را به اندازهٔ فاصلهٔ واحد (در جهت نیرو) جابه‌جا می‌کند، به‌دست می‌آید. یکای SI کار، نیوتون‌ـمتر است، که آن‌را ژول (با علامت اختصاری J) می‌نامند. در سیستم بریتانیایی، یکای کار فوت‌ـپاوند است. در سیستمهای cgs، یکای کار دین‌ـسانتیمتر است، که آن‌را ارگ (erg) می‌نامند. با استفاده از روابط بین نیوتون، دین، و پاوند، و بین متر، سانتیمتر، و فوت، نتیجه می‌شود که $1\,\mathrm{J} = ۱۰^{۷}\,\mathrm{erg} = ۰٫۷۳۷۶\,\mathrm{ft\text{–}lb}$ است.

یکای دیگری برای کار، که در مورد ذرات اتمی و زیراتمی مناسب است، الکترون‌ـولت (با علامت اختصاری eV) است؛ $1\,\mathrm{eV} = ۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹}\,\mathrm{J}$. کار لازم برای کندن یکی از الکترونهای خارجی اتم از آن، نوعاً در حدود چند eV است. کار لازم برای کندن یک پروتون یا نوترون از هسته، نوعاً در حدود چند MeV $(۱۰^{۶}\,\mathrm{eV})$ است.

---

**مثال ۱.** می‌خواهیم جسمی به جرم $m = ۱۱٫۷\,\mathrm{kg}$ را به مسافت $s = ۴٫۶۵\,\mathrm{m}$ روی سطح شیبداری بالا ببریم، چنان که ارتفاع آن به اندازهٔ $h = ۲٫۸۶\,\mathrm{m}$ زیاد شود (شکل ۵الف). فرض کنید سطح بدون اصطکاک است. فرض اگر نیرویی موازی با سطح شیبدار بر جسم اعمال کنید و آن‌را با سرعت ثابت بالا ببرید چقدر کار انجام می‌دهید؟

حل: شکل ۵ب نمودار جسم‌ـآزاد جسم را نشان می‌دهد. ابتدا باید $P$ را به‌دست بیاوریم، یعنی اندازهٔ نیرویی که جسم را به طرف بالای سطح شیبدار هل می‌دهد. چون حرکت شتابدار نیست (فرض بر این بود که سرعت ثابت است)، نیروی خالص موازی با سطح شیبدار باید صفر باشد. محور $x$ را موازی با سطح شیبدار، و جهت مثبت آن‌را به‌طرف بالای سطح می‌گیریم. از قانون دوم نیوتون نتیجه می‌شود که

$$\text{مؤلفهٔ } x: \qquad P - mg\ \sin\ \theta = ۰$$

یا

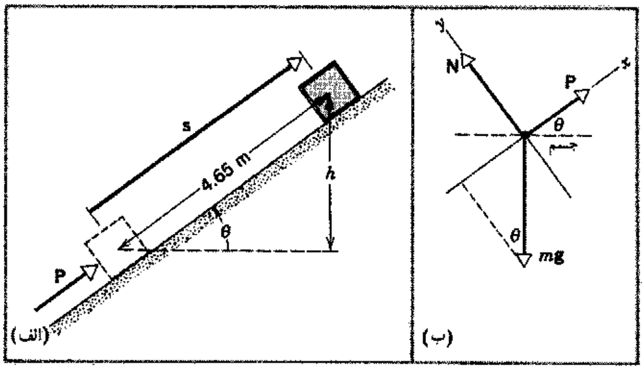
$$P = mg\ \sin\ \theta = (۱۱٫۷\,\mathrm{kg})(۹٫۸۰\,\mathrm{m/s^2})\left(\frac{۲٫۸۶\,\mathrm{m}}{۴٫۶۵\,\mathrm{m}}\right) = ۷۰٫۵\,\mathrm{N}$$

به‌این ترتیب، کاری که $\mathbf{P}$ انجام می‌دهد، از معادلهٔ ۳ به‌ازای $\phi = ۰°$، برابر است با

$$W = \mathbf{P} \cdot \mathbf{s} = Ps\ \cos ۰° = Ps = (۷۰٫۵\,\mathrm{N})(۴٫۶۵\,\mathrm{m}) = ۳۲۸\,\mathrm{J}$$

توجه کنید که زاویهٔ $\phi (= ۰°)$ که در این عبارت به‌کار رفته، زاویهٔ بین نیروی اعمال شده و جابه‌جایی جسم است، که هر دو با سطح شیبدار موازی‌اند. زاویهٔ $\phi$ را نباید با زاویهٔ $\theta$ سطح شیبدار اشتباه کرد.

اگر می‌خواستیم همین جسم را بدون استفاده از سطح شیبدار، با سرعت ثابت، تا همین ارتفاع بالا ببریم، کاری که انجام می‌دادیم برابر




شکل ۵. مثال ۱. (الف) نیروی $\mathbf{P}$ جسم را به اندازهٔ $\mathbf{s}$ روی سطح شیبدار جابه‌جا می‌کند. (ب) نمودار جسم‌ـآزاد جسم.

بود با نیروی قائم $mg$، ضربدر فاصلهٔ قائم $h$، یعنی

$$W = mgh = (۱۱٫۷\text{kg})(۹٫۸۰\text{m/s}^۲)(۲٫۸۶\text{m}) = ۳۲۸\text{J}$$

که همان مقدار قبلی است. تفاوت فقط در این است که با استفاده از سطح شیبدار می‌توان با نیروی کمتری ($P = ۷۰٫۵\text{N}$) نسبت به حالت بدون سطح شیبدار ($mg = ۱۱۵\text{N}$) جسم را بالا برد. در عوض، اگر از سطح شیبدار استفاده شود، جسم را باید به مسافت بیشتری ($۴٫۶۵\text{m}$) نسبت به حالت مستقیم ($۲٫۸۶\text{m}$) حرکت داد.

مثال ۲. کودکی سورتمه‌ای به جرم $۵٫۶\text{kg}$ را تا مسافت $s = ۱۲\text{m}$ روی سطحی افقی، با سرعت ثابت جلو می‌کشد. اگر ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k$ برابر با ۰٫۲۰، و زاویهٔ طناب با سطح افقی $\phi = ۴۵^\circ$ باشد، کودک چقدر کار انجام می‌دهد؟

حل: شکل ۶الف وضعیت مسئله، و شکل ۶ب نمودار جسم‌ـآزاد سورتمه را نشان می‌دهد. $\mathbf{P}$ کششی که کودک اعمال می‌کند، $mg$ وزن سورتمه، $\mathbf{f}$ نیروی اصطکاک، و $\mathbf{N}$ نیروی عمودی‌ای است که زمین بر سورتمه وارد می‌کند. کاری که کودک روی سورتمه انجام می‌دهد برابر است با

$$W = \mathbf{P} \cdot \mathbf{s} = Ps \cos \phi$$

برای محاسبهٔ این کار، اول باید $P$ را، که مجهول است، معلوم کرد. برای به‌دست آوردن $P$ به نمودار جسم‌ـآزاد شکل ۶ب رجوع می‌کنیم.

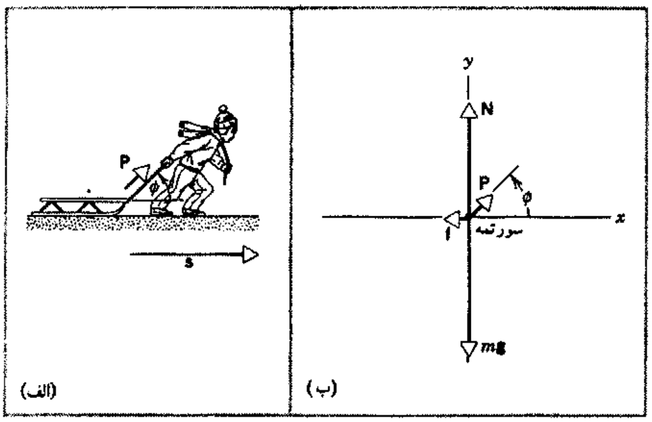
سورتمه شتاب ندارد؛ پس، از قانون دوم نیوتون نتیجه می‌شود که

مؤلفهٔ $x$: $\quad P \cos \phi - f = ۰$

مؤلفهٔ $y$: $\quad P \sin \phi + N - mg = ۰$

می‌دانیم که رابطهٔ $f$ و $N$ به‌صورت زیر است

$$f = \mu_k N$$




شکل۶. مثال ۲. (الف) کودکی با وارد کردن نیروی $\mathbf{P}$ به ریسمانی که با سطح افقی زاویهٔ $\phi$ می‌سازد، سورتمه‌ای را به‌اندازهٔ مسافت $\mathbf{s}$ می‌کشد. (ب) نمودار جسم‌ـآزاد سورتمه.

این سه معادله سه کمیت مجهول دارند: $P$، $f$، و $N$. برای تعیین $P$، $f$ و $N$ را از این معادلات حذف می‌کنیم و از معادلهٔ باقی‌مانده $P$ را به‌دست می‌آوریم. نتیجه می‌شود (باید خودتان تحقیق کنید)

$$P = \frac{\mu_k mg}{\cos \phi + \mu_k \sin \phi}$$

به‌ازای $\mu_k = ۰٫۲۰$، $mg = (۵٫۶\text{kg})(۹٫۸\text{m/s}^۲) = ۵۵\text{N}$، و $\phi = ۴۵^\circ$، خواهیم داشت

$$P = \frac{(۰٫۲۰)(۵۵\text{N})}{\cos ۴۵^\circ + (۰٫۲۰)(\sin ۴۵^\circ)} = ۱۳\text{N}$$

پس کاری که کودک روی سورتمه انجام می‌دهد عبارت است از

$$W = Ps \cos \phi = (۱۳\text{N})(۱۲\text{m})(\cos ۴۵^\circ) = ۱۱۰\text{J}$$

مؤلفهٔ عمودی $\mathbf{P}$ کاری روی سورتمه انجام نمی‌دهد. اما توجه کنید که این مؤلفه نیروی عمودی بین سورتمه و زمین را کم می‌کند ($N = mg - P \sin \phi$) و به‌این ترتیب، اندازهٔ نیروی اصطکاک ($f = \mu_k N$) را کاهش می‌دهد.

اگر کودک نیروی $P$ را به‌طور افقی اعمال کند (نه با زاویهٔ ۴۵°)، کاری که روی سورتمه انجام می‌شود بیشتر می‌شود، کمتر می‌شود، یا تغییری نمی‌کند؟ آیا نیروهای دیگر وارد بر سورتمه، روی آن کاری انجام می‌دهند؟

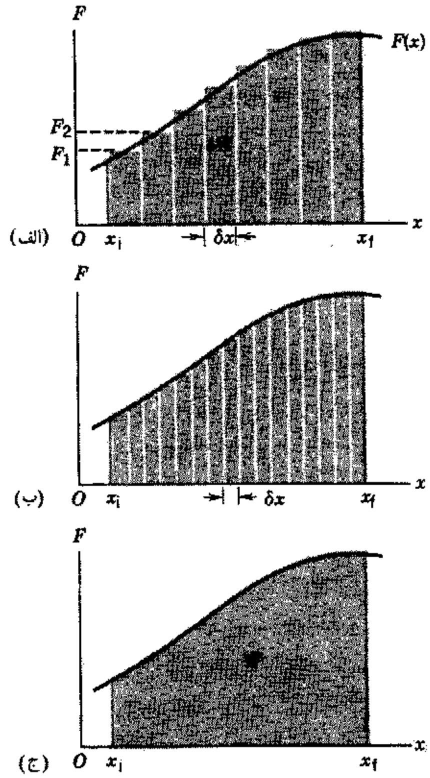
## ۷ـ۲ کاری که نیروی متغیر انجام می‌دهد: مورد یک بعدی

اکنون کار نیرویی را که ثابت نیست بررسی می‌کنیم. فرض کنید نیرو فقط در یک جهت است که آن‌را جهت $x$ می‌گیریم، و اندازهٔ آن برحسب $x$ با تابع $F(x)$ بیان می‌شود. فرض کنید این نیرو بر جسمی وارد شود که در جهت $x$ حرکت می‌کند. کاری که این نیروی متغیر انجام می‌دهد تا جسم از مکان اولیهٔ $x_i$ به مکان نهایی $x_f$ برسد چقدر است؟

در شکل ۷، نمودار $F$ برحسب $x$ رسم شده است. جابه‌جایی کل را به $N$ بازهٔ کوچک، هر یک به اندازهٔ $\delta x$، تقسیم می‌کنیم؛ شکل ۷الف. بازهٔ اول را در نظر بگیرید؛ این بازه جابه‌جایی $\delta x$، از $x_i$ تا $x_i + \delta x$ است. طی این جابه‌جایی کوچک، $F(x)$ تقریباً ثابت، و برابر با $F_۱$ است؛ کارکوچکی که نیرو در این بازه انجام می‌دهد، $\delta W_۱$، تقریباً برابر است با

$$\delta W_۱ = F_۱\, \delta x \qquad (۴)$$

به‌همین ترتیب، بازهٔ بعدی مربوط به جابه‌جایی کوچک از $x_i + \delta x$ به $x_i + ۲\delta x$ است، و در این بازه نیرو تقریباً برابر است با مقدار ثابت $F_۲$. کاری که نیرو دراین بازه انجام می‌دهد تقریباً $\delta W_۲ = F_۲ \delta x$ است. کل کار $W$ که نیروی $F(x)$ در جابه‌جایی ذره از $x_i$ تا $x_f$ انجام




شکل۷. (الف) مساحت زیرمنحنی نیروی متغیر یک‌بعدی $F(x)$، با ناحیهٔ بین دو حد $x_i$ و $x_f$، که به بازه‌هایی به اندازهٔ $\delta x$ تقسیم شده است تقریب زده می‌شود. مجموع مساحت نوارهای مستطیلی تقریباً با مساحت زیرمنحنی برابر است. (ب) با استفاده از تعداد بیشتری نوار باریکتر، تقریب بهتری حاصل می‌شود. (ج) در حد $\delta x \to 0$، مساحت واقعی به‌دست می‌آید.

می‌دهد، تقریباً برابر است با مجموع جملات زیادی به شکل معادلهٔ ۴، که مقدار $F$ در هر یک از آنها فرق می‌کند. پس

$$W = \delta W_1 + \delta W_2 + \delta W_3 + \cdots$$
$$= F_1\delta x + F_2\delta x + F_3\delta x + \cdots$$

یا

$$W = \sum_{n=1}^{N} F_n \delta x \qquad (5)$$

که در آن، حرف یونانی سیگما $(\Sigma)$ نماد جمع روی $N$ بازه از $x_i$ تا $x_f$ است.

برای اینکه تقریب بهتر شود می‌توانیم جابه‌جایی کل از $x_i$ به $x_f$ را به تعداد بیشتری بازه تقسیم کنیم؛ شکل ۷ب. در این حالت $\delta x$ کوچکتر می‌شود و مقدار $F_n$ در هر بازه نمایندهٔ بهتری برای نیرو در آن بازه خواهد بود. روشن است که با کوچکتر کردن $\delta x$، و در نتیجه زیادتر کردن تعداد بازه‌ها، تقریب بهتری به‌دست می‌آید. کار انجام شده توسط $F$ را می‌توان با میل دادن $\delta x$ به صفر یا میل دادن تعداد بازه‌ها $(N)$ به بینهایت، به‌طور دقیق به‌دست آورد. بنابراین، نتیجهٔ دقیق برابر است با

$$W = \lim_{\delta x \to 0} \sum_{n=1}^{N} F_n \delta x \qquad (6)$$

رابطهٔ

$$\lim_{\delta x \to 0} \sum F_n \delta x = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx$$

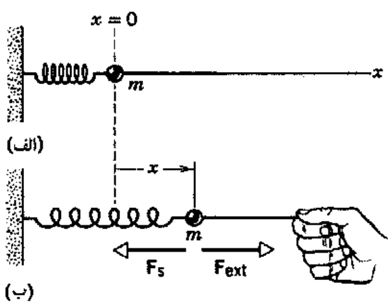
که شاید آن‌را در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال دیده باشید، انتگرال $F$ نسبت به $x$ از $x_i$ تا $x_f$ را تعریف می‌کند. مقدار عددی این کمیت دقیقاً برابر است با مساحت ناحیهٔ بین منحنی نیرو و محورx، از $x_i$ تا $x_f$ (شکل ۷ج). بنابراین، انتگرال را به‌صورت نموداری می‌توان به مساحت تعبیر کرد. نماد $\int$ در واقع یک S تغییر شکل‌یافته است و فرایند انتگرال‌گیری را نشان می‌دهد [S حرف اول واژهٔ "جمع" در زبان انگلیسی است]. کل کاری را که نیروی $F$ روی جسم، در جابه‌جایی از $x_i$ به $x_f$، انجام می‌دهد می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx \qquad (7)$$

چون نمایش برداری را از این معادلهٔ یک‌بعدی حذف کرده‌ایم، باید مراقب علامت $F$ باشیم؛ علامت $F$ مثبت است اگر $F$ در جهت افزایش $x$ باشد، و منفی است اگر $F$ در جهت کاهش $x$ باشد.

به عنوان مثالی برای نیروی متغیر، فنری را در نظر بگیرید که بر ذره‌ای به جرم $m$ نیرو وارد می‌کند (شکل ۸). ذره به طور افقی حرکت می‌کند، و جهت حرکت آن‌را جهت $x$ می‌گیریم؛ مبدأ $(x = 0)$ نقطه‌ای است که وقتی ذره در آن باشد فنر در حالت "آسوده" است (شکل ۸الف). نیرویی خارجی، $F_{ext}$، در خلاف جهت نیروی فنر بر جسم اثر می‌کند. فرض می‌کنیم که این نیروی خارجی همواره تقریباً با نیروی فنر برابر است؛ به این ترتیب، ذره همیشه تقریباً در حالت تعادل است $(a = 0)$.

ذره را تا مسافت $x$، از مکان اولیه‌اش در $x = 0$، جابه‌جا می‌کنیم (شکل ۸ب). همراه با عامل خارجی‌ که نیروی $F_{ext}$ را بر ذره وارد




شکل۸. (الف) ذره‌ای به جرم $m$ به فنری متصل است، و فنر در حالت آسوده است (یعنی طول طبیعی‌اش را دارد). (ب) ذره به اندازهٔ $x$ جابه‌جا می‌شود، و در این حالت دو نیرو بر آن وارد می‌شود: نیروی بازگردانندهٔ فنر و نیروی عامل خارجی.

می‌کند، فنر هم نیروی مقاوم $F_s$ را بر ذره وارد می‌کند. این نیرو، با تقریب خوبی، برابر است با

$$F_s = -kx \qquad (۸)$$

$k$ یک ثابت مثبت است، که آن‌را ثابت نیروی فنر می‌نامند. ثابت $k$ معیاری از مقدار نیروی لازم برای کشیدن فنر به اندازهٔ معین است: هر چه فنر سخت‌تر باشد، مقدار $k$ آن بزرگتر است. معادلهٔ ۸ قانون نیروی فنر است، و آن‌را قانون هوک می‌نامند. علامت منفی در معادلهٔ ۸ یادآوری می‌کند که نیرویی که فنر اعمال می‌کند، همواره در خلاف جهت جابه‌جایی ذره است. اگر فنر کشیده شود، $x > 0$ و $F_s$ منفی است، اگر فنر فشرده شود، $x < 0$ و $F_s$ مثبت است. نیروی فنر یک نیروی بازگرداننده است: این نیرو همواره می‌خواهد که ذره را به محل $x = 0$ برگرداند. بیشتر فنرهای واقعی به‌خوبی از معادلهٔ ۸ پیروی می‌کنند، البته به شرط اینکه بیش از حد معینی کشیده نشوند.

ابتدا می‌خواهیم کاری را که فنر روی ذره انجام می‌دهد، در جابه‌جایی ذره از مکان اولیهٔ $x_i$ به مکان نهایی $x_f$، محاسبه کنیم. معادلهٔ ۷ را با $F_s$ به‌کار می‌بریم

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F_s(x)dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 \qquad (۹)$$

کاری که فنر روی ذره انجام می‌دهد مثبت است اگر $x_i^2 > x_f^2$ باشد (یعنی اگر اندازهٔ جابه‌جایی اولیه از اندازهٔ جابه‌جایی نهایی بیشتر باشد). توجه کنید که فنر، در برگرداندن ذره به $x = 0$، کار مثبت انجام می‌دهد. اگر اندازهٔ جابه‌جایی اولیه از اندازهٔ جابه‌جایی نهایی کوچکتر باشد، فنر روی ذره کار منفی انجام می‌دهد.

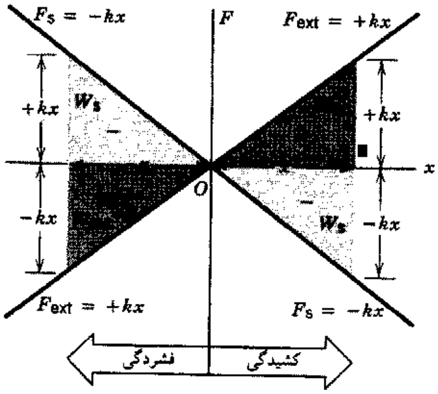
برای محاسبهٔ کاری که فنر، در حرکت ذره از $x = 0$ به نقطهٔ $x$، روی آن انجام می‌دهد، می‌گذاریم $x_i = 0$ و $x_f = x$؛ نتیجه می‌شود که

$$W_s = \int_0^x (-kx)dx = -\frac{1}{2}kx^2 \qquad (۱۰)$$

توجه کنید که کاری که فنر هنگام فشرده شدن به اندازهٔ $x$ انجام می‌دهد، با کاری که هنگام کشیده شدن به اندازهٔ $x$ انجام می‌دهد یکسان است، زیرا در معادلهٔ ۱۰ مجذور جابه‌جایی ظاهر می‌شود؛ $x$ هر علامتی که داشته باشد، علامت $x^2$ مثبت، و علامت $W_s$ منفی است.

حالا ببینیم عامل خارجی، در حرکت ذره از $x_i = 0$ به $x_f = x$، چقدر کار انجام می‌دهد؟ برای اینکه ذره در حالت تعادل بماند، نیروی خارجی $F_{ext}$ باید با نیروی فنر هم‌اندازه، اما در خلاف جهت آن باشد؛ پس، $F_{ext} = +kx$. با تکرار محاسبه، مانند معادلهٔ ۱۰، کار عامل خارجی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$W_{ext} = +\frac{1}{2}kx^2 \qquad (۱۱)$$




شکل۹. کار $W_s$ نیروی فنر با نواحی منفی (سایهٔ خاکستری در شکل)،و کار $W_{ext}$ نیروی خارجی در حالت تعادل با نیروی فنر با نواحی مثبت (سایهٔ رنگی در شکل) مشخص شده است. فنر چه کشیده شود ($x > 0$) و چه فشرده شود ($x < 0$)، $W_s$ منفی و $W_{ext}$ مثبت است.

توجه کنید که این مقدار، دقیقاً منفی مقداری است که در معادلهٔ ۱۰ داشتیم.

$W_s$ و $W_{ext}$ را، با محاسبهٔ مساحت بین منحنی نیرو-جابه‌جایی مورد نظر و محور $x$ (از $x = 0$ تا مقدار دلبخواه $x$) هم نیز می‌توان به‌دست آورد. در شکل ۹، دو خط راست شیبداری که از مبدأ می‌گذرند، نمودار نیروی خارجی برحسب جابه‌جایی $(F_{ext} = +kx)$ و نیروی فنر برحسب جابه‌جایی $(F_s = -kx)$ اند. نیمهٔ راست نمودار $(x > 0)$ متناظر با کشیدگی فنر و نیمهٔ چپ آن $(x < 0)$ متناظر با فشردگی فنر است.

در کشیدن فنر، کاری که نیروی خارجی انجام می‌دهد مثبت است؛ در شکل ۹، این کار با مثلث سمت راست بالا، با علامت $W_{ext}$، مشخص شده است. قاعدهٔ این مثلث $+x$، و ارتفاع آن $+kx$ است؛ پس مساحت آن می‌شود

$$\frac{1}{2}(+x)(+kx) = +\frac{1}{2}kx^2$$

که با معادلهٔ ۱۱ سازگار است. هنگامی که فنر کشیده می‌شود، کاری که نیروی فنر انجام می‌دهد منفی است؛ در شکل ۹، این کار با مثلث سمت راست پایین، با علامت $W_s$، مشخص شده است. با استدلال هندسی مشابهی می‌شود نشان داد که مساحت این مثلث $-1/2kx^2$ است، که با معادلهٔ ۱۰ سازگار است.

در فشردن فنر، چنان که از نیمهٔ چپ شکل ۹ پیداست، کار $W_{ext}$ عامل خارجی همچنان مثبت، وکار $W_s$ فنر همچنان منفی است؛ این همان چیزی است که از علامت نیروها و جابه‌جایی به‌دست می‌آید.

---

مثال ۳. فنری به‌طور قائم آویزان، و در حالت تعادل است. جسمی به جرم ۶٫۴۰kg به فنر می‌بندیم، اما ابتدا آن‌را همانجا نگه می‌داریم تا فنر کشیده نشود. سپس دستی را که جسم روی آن است به آرامی پایین می‌آوریم تا جسم با سرعت ثابت پایین بیاید و به نقطهٔ تعادل برسد؛

اندازه‌گیری نشان می‌دهد که فنر به‌اندازهٔ $s = ۰٫۱۲۴\text{m}$ نسبت به طول طبیعی‌اش، کشیده شده است. کاری را که (الف) گرانش، (ب) فنر، و (ج) دست ما روی جسم انجام داده است حساب کنید.

حل: ثابت نیروی فنر را نداریم، اما می‌توانیم آن‌را به‌دست بیاوریم؛ می‌دانیم که در حالت کشیده شده، بین نیروی رو به بالای فنر و نیروی رو به پایین گرانش تعادل برقرار است:

$$\Sigma F = mg - ks = ۰$$

در اینجا جهت رو به پایین را مثبت گرفته‌ایم. از این معادله $k$ را به‌دست می‌آوریم. نتیجه می‌شود که

$$k = mg/s = (۶٫۴۰\text{kg})(۹٫۸۰\text{m/s}^۲)/(۰٫۱۲۴\text{m})$$
$$= ۵۰۶\text{N/m}$$

برای پیدا کردن کار نیروی گرانش، $W_g$ ، توجه کنید که این نیرو ثابت است، و با جابه‌جایی موازی است. پس می‌توانیم معادلهٔ ۱ را به‌کار ببریم:

$$W_g = Fs = mgs = (۶٫۴۰\text{kg})(۹٫۸۰\text{m/s}^۲)(۰٫۱۲۴\text{m})$$
$$= +۷٫۷۸\text{J}$$

این کار مثبت است، زیرا نیرو و جابه‌جایی هم‌جهت‌اند. برای محاسبهٔ کار فنر، معادلهٔ ۱۰ را با $x = s$ به‌کار می‌بریم

$$W_s = -\frac{۱}{۲}ks^۲ = -\frac{۱}{۲}(۵۰۶\text{N/m})(۰٫۱۲۴\text{m})^۲ = -۳٫۸۹\text{J}$$

این کار منفی است، زیرا نیرو در خلاف جهت جابه‌جایی است.

یک راهِ پیدا کردن کاری که دست انجام می‌دهد، $W_h$، آن است که نیروی دست بر جسم (هنگام پایین آوردن جسم) را حساب کنیم. اگر جسم در این مدت در حالت تعادل باشد، نیروی رو به بالای $F_h$ را که دست وارد می‌کند می‌توانیم از قانون دوم نیوتون، به‌ازای $a = ۰$، حساب کنیم:

$$\Sigma F = -kx - F_h + mg = ۰$$

یا

$$F_h = mg - kx$$

حالا کار را می‌توان با انتگرالی به شکل معادلهٔ ۷، با یک علامت منفی، به‌خاطر اینکه نیرو در خلاف جهت جابه‌جایی است، محاسبه کرد.

$$W_h = -\int_۰^s F_h dx = -\int_۰^s (mg - kx)dx$$
$$= -mgs + \frac{۱}{۲}ks^۲$$
$$= -mgs + \frac{۱}{۲}\left(\frac{mg}{s}\right)s^۲ = -\frac{۱}{۲}mgs = -۳٫۸۹\text{J}$$

راه ساده‌تر برای به‌دست آوردن همین نتیجه این است که توجه کنیم که اگر جسم (که آن‌را ذره در نظر می‌گیریم) به آهستگی و با سرعت ثابت پایین بیاید، نیروی خالص وارد بر آن صفر است؛ بنابراین، کل کاری که همهٔ نیروهای وارد بر ذره انجام می‌دهند باید صفر باشد

$$W_{\text{net}} = W_s + W_g + W_h = ۰$$
$$W_h = -W_s - W_g = -(-۳٫۸۹\text{J}) - ۷٫۷۸\text{J} = -۳٫۸۹\text{J}$$

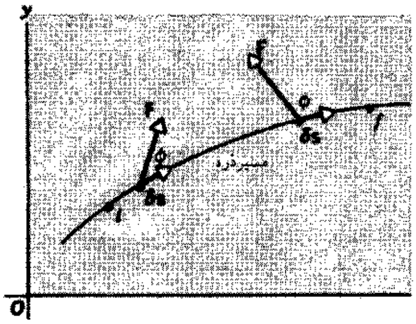
توجه کنید که کارِ دست برابر است با کار فنر.

## ۷ـ۳ کاری که نیروی متغیر انجام می‌دهد: مورد دوبعدی (اختیاری)

هم‌جهت، و هم اندازهٔ نیروی $\mathbf{F}$ که بر یک ذره اثر می‌کند می‌تواند تغییر کند، و مسیر ذره هم می‌تواند منحنی باشد. برای محاسبهٔ کار در این حالت کلی، مسیر را به تعداد زیادی جابه‌جایی کوچک $\delta\mathbf{s}$ تقسیم می‌کنیم، که هر یک در راستای مماس بر مسیر و در جهت حرکت است. شکل ۱۰ دو تا از این جابه‌جاییها را برای مسیری خاص نشان می‌دهد؛ این شکل، همچنین نیروی $\mathbf{F}$ و زاویهٔ $\phi$ بین $\mathbf{F}$ و $\delta\mathbf{s}$ را در هر نقطه نشان می‌دهد. کار $\delta W$ را که طی جابه‌جایی $\delta\mathbf{s}$ روی ذره انجام می‌شود می‌توانیم از رابطهٔ زیر پیدا کنیم

$$\delta W = \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{s} = F\cos\phi\,\delta s \qquad (۱۲)$$

در این معادله، $\mathbf{F}$ نیروی وارد بر ذره در نقطه‌ای است که جابه‌جایی $\delta\mathbf{s}$ را از آنجا گرفته‌ایم. کار نیروی متغیر $\mathbf{F}$ روی ذره، طی حرکت ذره از نقطهٔ $i$ به نقطهٔ $f$ در شکل ۱۰، به‌طور تقریبی با جمع کردن عنصرهای کار در اجزاء طولی کوچکی که مسیر $i$ تا $f$ را می‌سازند به‌دست می‌آید. اگر جزء طول $\delta\mathbf{s}$ بینهایت کوچک شود، می‌شود به جای آن دیفرانسیل $d\mathbf{s}$ گذاشت؛ در این صورت، جمع روی اجزاء مسیر به انتگرال تبدیل




شکل ۱۰. ذره‌ای، روی مسیر شکل، از نقطهٔ $i$ به نقطهٔ $f$ می‌رود. طی حرکت، نیروی $\mathbf{F}$ بر آن وارد می‌شود، که اندازه و جهت آن هر دو متغیر است. در حد $\delta\mathbf{s} \to ۰$، به‌جای جزء طول $d\mathbf{s}$ می‌گذاریم، که در جهت سرعت لحظه‌ای است، و در نتیجه مماس بر مسیر است.

می‌شود، درست مثل معادلهٔ ۷. پس کار انجام شده عبارت است از

$$W = \int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_i^f F \cos \phi \, ds \qquad (۱۳)$$

برای محاسبهٔ این انتگرال، باید شکل $F$ و $\phi$ در معادلهٔ ۱۳ را در همهٔ نقاط مسیر بدانیم؛ هر دو اینها تابعی از مختصات $x$ و $y$ ذره در شکل ۱۰اند.

با نوشتن $\mathbf{F}$ و $d\mathbf{s}$ برحسب مؤلفه‌ها، می‌توانیم عبارت دیگری، هم‌ارز با معادلهٔ ۱۳، به‌دست بیاوریم. $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i}+F_y\mathbf{j}$ و $d\mathbf{s} = dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}$، پس $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = F_x dx+F_y dy$ است. (به‌یاد دارید که $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = ۱$ و $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = ۰$؛ (معادلهٔ ۱۴ فصل ۳). با قرار دادن این نتیجه در معادلهٔ ۱۳، خواهیم داشت

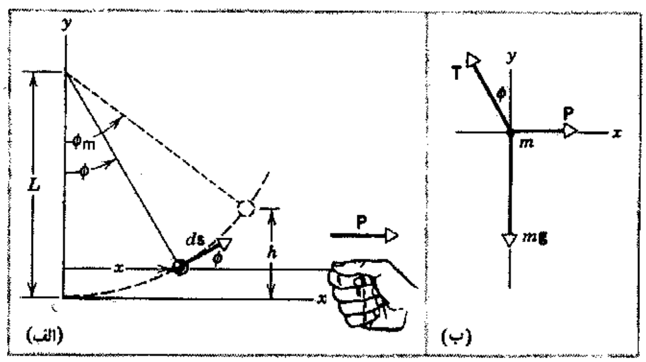
$$W = \int_i^f (F_x dx + F_y dy) \qquad (۱۴)$$

انتگرالهایی به شکل انتگرالهای معادلات ۱۳ و ۱۴ را انتگرال خط می‌نامند؛ برای محاسبهٔ این انتگرالها باید $F \cos\phi$ یا $F_x$ و $F_y$ را در همهٔ نقاط مسیر ذره، که می‌تواند خط راست یا منحنی باشد، بدانیم. تعمیم معادلهٔ ۱۴ به مورد سه‌بعدی هم کاملاً سرراست است.

---

**مثال ۴.** جسم کوچکی به جرم $m$ از ریسمانی به طول $L$ آویزان است. جسم را با نیروی افقی $P$ به یک طرف می‌کشیم تا زاویهٔ ریسمان، با راستای قائم $\phi_m$ شود (شکل ۱۱الف). جابه‌جایی چنان آهسته انجام می‌شود که می‌توانیم سیستم را در هر لحظه در حالت تعادل فرض کنیم. کار هر یک از نیروهای وارد بر جسم را پیدا کنید.

حل: حرکت در راستای کمانی به شعاع $L$ است، و جابه‌جایی $ds$ همواره بر کمان مماس است. در یک نقطهٔ میانی حرکت، که ریسمان با راستای قائم زاویهٔ $\phi$ می‌سازد. نمودار جسم‌ـآزاد ذره به‌صورت




شکل ۱۱. مثال ۴. (الف) ذره‌ای از ریسمانی به طول $L$ آویزان است و با نیروی افقی $P$ کشیده می‌شود. بیشترین زاویهٔ ریسمان با راستای قائم $\phi_m$ است. (ب) نمودار جسم‌ـآزاد ذره.

شکل ۱۱ب است، و از قانون دوم نیوتون نتیجه می‌شود

$$P - T\sin\phi = ۰ \qquad \text{مؤلفهٔ } x:$$

$$T\cos\phi - mg = ۰ \qquad \text{مؤلفهٔ } y:$$

$T$ را بین این دو معادله حذف می‌کنیم. خواهیم داشت

$$P = mg \tan\phi$$

چون $P$ همیشه در جهت $x$ است، می‌شود معادلهٔ ۱۴ را، با $F_x = P$ و $F_y = ۰$، به‌کار برد و کار انجام شده توسط $P$ را به‌دست آورد. به‌این ترتیب

$$W_P = \int P\,dx = \int_۰^{\phi_m} mg\tan\phi\,dx$$

برای محاسبهٔ انتگرال، باید متغیرها را به یکی تبدیل کنیم؛ و ما اینجا $x$ را برحسب $\phi$ تعریف می‌کنیم. در یک نقطهٔ میانی حرکت، که مختصهٔ افقی $x$ است، داریم $x = L\sin\phi$ و از آنجا $dx = L\cos\phi\,d\phi$. این را به‌جای $dx$ می‌گذاریم و انتگرال می‌گیریم

$$W_P = \int_۰^{\phi_m} mg\tan\phi(L\cos\phi\,d\phi)$$

$$= mgL\int_۰^{\phi_m}\sin\phi\,d\phi = mgL(-\cos\phi)\,|_۰^{\phi_m}$$

$$= mgL(۱-\cos\phi_m)$$

از شکل ۱۱الف دیده می‌شود که $h = L(۱-\cos\phi_m)$، پس

$$W_P = mgh$$

کار نیروی (ثابت) گرانشی $mg$ را هم می‌شود به روش مشابهی، براساس معادلهٔ ۱۴ (با $F_x = ۰$ و $F_y = -mg$) پیدا کرد. نتیجه می‌شود که $W_g = -mgh$ (مسئلهٔ ۱۶). علامت منفی از اینجا می‌آید که جابه‌جایی قائم در خلاف جهت نیروی گرانشی است. کار کشش ریسمان، $W_T$، صفر است. چون $\mathbf{T}$ در سراسر حرکت بر جابه‌جایی $ds$ عمود است. حالا می‌توانیم ببینیم که کل کار صفر است: $W_{net} = W_P + W_g + W_T = mgh - mgh + ۰ = ۰$؛ که با صفر بودن نیروی خالص وارد بر ذره، در تمام لحظات حرکت هم جور در می‌آید.

توجه کنید که در این مسئله، کارِ (مثبت) نیروی افقی $\mathbf{P}$، کار (منفی) نیروی قائم $m\mathbf{g}$ را خنثی می‌کند. علتش این است که کار اسکالر است؛ یعنی جهت یا مؤلفه ندارد. حرکت ذره بستگی به کل کاری دارد که روی آن انجام می‌شود، که برابر است با حاصل جمع اسکالرِ کار تک‌تک نیروها.

---

## ۴ـ۷ انرژی جنبشی و قضیهٔ کارـانرژی

در این بخش، اثر کار را برحرکت ذره بررسی می‌کنیم. اگر نیرویی بر ذره‌ای وارد شود، و با نیروهای دیگر خنثی نشود، البته وضعیت حرکت جسم تغییرمی‌کند. قانون دوم نیوتون، یک روش برای تحلیل این تغییر حرکت است. اکنون روش دیگری را بررسی می‌کنیم که درنهایت به همان نتایج حاصل از قانون دوم نیوتون می‌انجامد، اما به‌کاربردن آن خیلی وقتها آسانتر است. این روش به یکی از قوانین پایستگی هم منجر می‌شود؛ قوانین پایستگی نقش مهمی در تعبیر فرایندهای فیزیکی دارند.

در اینجا فقط کار یک نیرو بر ذره را در نظر نمی‌گیریم، بلکه کل کار $W_{\rm net}$ حاصل از همهٔ نیروهای وارد بر ذره را در نظر می‌گیریم. برای یافتن این کار خالص دو راه وجود دارد. اول اینکه نیروی خالص، یعنی حاصل‌جمع برداری نیروهای وارد بر ذره را پیدا کنیم

$$\mathbf{F}_{\rm net} = \mathbf{F}_۱ + \mathbf{F}_۲ + \mathbf{F}_۳ + \cdots \qquad (۱۵)$$

و بعد این نیرو را به عنوان یک تک نیرو در نظر بگیریم و کار را، طبق معادلهٔ ۷ در حالت یک‌بعدی یا طبق معادلهٔ ۱۳ در حالت چندبعدی، محاسبه کنیم. در روش دوم، کارحاصل از هر یک از نیروهای وارد بر ذره را پیدا می‌کنیم

$$W_۱ = \int \mathbf{F}_۱ \cdot d\mathbf{s}, \qquad W_۲ = \int \mathbf{F}_۲ \cdot d\mathbf{s}$$
$$W_۳ = \int \mathbf{F}_۳ \cdot d\mathbf{s}, \cdots$$

و چون کار اسکالر است، کارهای حاصل از تک‌تک نیروها را با هم جمع می‌کنیم و کل کار را به‌دست می‌آوریم

$$W_{\rm net} = W_۱ + W_۲ + W_۳ + \cdots \qquad (۱۶)$$

نتیجهٔ حاصل از این دو روش یکسان است، و انتخاب یکی از آنها فقط بستگی به این دارد که کدام‌یک ساده‌تر یا راحت‌تر است.

می‌دانیم که اگر نیروی خالص غیرصفری به ذره‌ای وارد شود، ذره شتاب می‌گیرد و به این ترتیب وضعیت حرکتش عوض می‌شود؛ مثلاً، از سرعت اولیهٔ $v_{\rm i}$ به سرعت نهایی $v_{\rm f}$ می‌رسد. اثر کار حاصل از این نیروی خالص غیرصفر که بر ذره وارد می‌شود چیست؟

ابتدا در مورد نیروی ثابت یک‌بعدی به‌این پرسش جواب می‌دهیم. ذره از $x_{\rm i}$ به $x_{\rm f}$ می‌رود، در اثر چنین نیرویی، به‌طور یکنواخت از $v_{\rm i}$ تا $v_{\rm f}$ شتاب می‌گیرد. کار این نیرو برابر است با

$$W_{\rm net} = F_{\rm net}(x_{\rm f} - x_{\rm i}) = ma(x_{\rm f} - x_{\rm i})$$

چون شتاب $a$ ثابت است، می‌توانیم معادلهٔ ۲۰ فصل ۲ را، به شکل $v_{\rm f}^۲ = v_{\rm i}^۲ + ۲a(x_{\rm f} - x_{\rm i})$، به‌کار ببریم، نتیجه می‌شود که

$$W_{\rm net} = \frac{۱}{۲}mv_{\rm f}^۲ - \frac{۱}{۲}mv_{\rm i}^۲ \qquad (۱۷)$$

یعنی، نتیجه کار خالص انجام شده روی ذره آن است که مقدار کمیت $۱/۲mv^۲$، از نقطهٔ i تا f تغییر کند. این کمیت را انرژی جنبشی ($K$) ذره می‌نامند و چنین تعریف می‌کنند

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ \qquad (۱۸)$$

برحسب انرژی جنبشی $K$، معادلهٔ ۱۷ را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$W_{\rm net} = K_{\rm f} - K_{\rm i} = \Delta K \qquad (۱۹)$$

معادلهٔ ۱۹ نمایش ریاضی نتیجهٔ مهمی است به نام قضیهٔ کارـانرژی، که می‌شود آن‌را چنین بیان کرد:

> کار خالص نیروهای وارد بر هر ذره برابر است با تغییر انرژی جنبشی آن ذره.

ما این نتیجه را برای حالتی به‌دست آورده‌ایم که نیرو ثابت باشد، اما قضیهٔ کارـانرژی در حالت کلی برای نیروهای متغیر هم درست است. کمی بعد، در همین بخش، اثبات کلی قضیه در مورد نیروی متغیر را هم ارائه خواهیم کرد.

انرژی جنبشی هم، مانند کار، کمیتی اسکالر است؛ بر خلاف کار، انرژی جنبشی هیچگاه منفی نمی‌شود، قبلاً دیده بودیم که کار به چارچوب مرجعی که انتخاب می‌کنیم بستگی دارد. پس تعجبی ندارد که انرژی جنبشی هم چنین باشد. می‌دانیم که ناظرهای چارچوبهای لخت متفاوت، سرعت یک ذره را متفاوت می‌سنجند؛ بنابراین، مقادیری که به انرژی جنبشی ذره نسبت می‌دهند هم متفاوت است. اگر چه مقدارهایی که ناظرهای مختلف برای کار و انرژی جنبشی به‌دست می‌آورند متفاوت است، اما رابطهٔ میان این کمیتها، یعنی رابطهٔ $W_{\rm net} = \Delta K$ در تمام چارچوبهای لخت برقرار است.

برای اینکه معادلهٔ ۱۹ از نظر ابعادی درست باشد، یکای انرژی جنبشی هم باید همان یکای کار باشد؛ یعنی انرژی جنبشی هم برحسب یکاهایی مثل ژول، ارگ، فوت، پاوند، و الکترون ولت بیان می‌شود.

اگر اندازهٔ سرعت ذره‌ای ثابت باشد انرژی جنبشی آن هم ثابت است؛ پس کار نیروی برایند باید صفر باشد. مثلاً در حرکت دایره‌ای یکنواخت، نیروی برایند به طرف مرکز دایره است، و همواره بر راستای حرکت عمود است. چنین نیرویی روی ذره کار انجام نمی‌دهد: این نیرو جهت سرعت را تغییر می‌دهد اما اندازهٔ آن‌را تغییر نمی‌دهد. نیروی برایند، تنها اگر در جهت حرکت مؤلفه داشته باشد کار انجام می‌دهد و انرژی جنبشی ذره را عوض می‌کند.

قضیهٔ کارـانرژی یک قانون جدید و مستقل در مکانیک کلاسیک نیست. ما کار را (مثلاً با معادلهٔ ۷) و انرژی جنبشی را (با معادلهٔ ۱۸) صرفاً تعریف کرده‌ایم و رابطهٔ بین این دو را از قانون دوم نیوتون به‌دست آورده‌ایم. به هر حال، قضیهٔ کارـانرژی در حل مسائلی که در آنها کار خالص از نیروهای خارجی روی ذره به سادگی قابل محاسبه باشد، و

بخواهیم سرعت ذره را در نقطه‌ای معین پیدا کنیم، قضیهٔ مفیدی است. هم اینکه قضیهٔ کار-انرژی نقطهٔ آغازی برای تعمیم کلی، مفهوم انرژی و بررسی چگونگی ذخیره شدن و تقسیم آن در اجزای سیستمهای پیچیده است. اصل پایستگی انرژی، موضوع فصل بعدی است.

### اثبات کلی قضیهٔ کار-انرژی

آنچه می‌آید اثبات معادلهٔ ۱۹ در مورد نیروهای متغیر در یک‌بعد است، محاسبات مربوط به موارد دوبعدی و سه‌بعدی را به عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده گذاشته‌ایم (مسئلهٔ ۳۴). فرض کنید $F_{\rm net}$ نیروی خالص وارد بر ذره باشد. کار خالص نیروهای خارجی وارد برذره $W_{\rm net}=\int F_{\rm net}dx$ است. با کمی عملیات ریاضی می‌توانیم این انتگرال را تغییرمتغیر بدهیم و آن‌را به‌شکل مفیدتری در بیاوریم

$$F_{\rm net}=ma=m\frac{dv}{dt}=m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=m\frac{dv}{dx}v=mv\frac{dv}{dx}$$

به این ترتیب

$$W_{\rm net}=\int F_{\rm net}dx=\int mv\frac{dv}{dx}dx=\int mv\ dv$$

حالا متغیر انتگرال‌گیری سرعت است. از سرعت اولیهٔ $v_{\rm i}$ تا سرعت نهایی $v_{\rm f}$ انتگرال می‌گیریم

$$\begin{aligned}W_{\rm net}&=\int_{v_{\rm i}}^{v_{\rm f}}mv\ dv=m\int_{v_{\rm i}}^{v_{\rm f}}v\ dv=\frac{۱}{۲}m(v_{\rm f}^۲-v_{\rm i}^۲)\\&=\frac{۱}{۲}mv_{\rm f}^۲-\frac{۱}{۲}mv_{\rm i}^۲=\Delta k\end{aligned}$$

این نتیجه همان معادلهٔ ۱۹ است و نشان می‌دهد که قضیهٔ کار-انرژی در مورد نیروهای متغیر هم صدق می‌کند.

---

**مثال ۵.** یکی از روشهای سنجش انرژی جنبشی نوترونهای یک باریکه، که مثلاً از یک رآکتور هسته‌ای می‌آید، اندازه‌گیری مدتی است که طول می‌کشد تا یکی از ذرات باریکه مسافت بین دو نقطهٔ ثابت به فاصلهٔ معین از هم را بپیماید. این روش را روش زمان پرواز می‌نامند. فرض کنید که نوترونی مسافت $d=۶{,}۲\text{m}$ را در زمان $t=۱۶۰\,\mu\text{s}$ می‌پیماید. انرژی جنبشی این نوترون چقدر است؟ جرم نوترون را $۱{,}۶۷\times۱۰^{-۲۷}\text{kg}$ بگیرید.

حل: سرعت نوترون برابر است با

$$v=\frac{d}{t}=\frac{۶{,}۲\text{m}}{۱۶۰\times۱۰^{-۶}\text{s}}=۳{,}۸۸\times۱۰^۴\text{m/s}$$

و انرژی جنبشی آن از معادلهٔ ۱۸، برابر است با

$$\begin{aligned}K=\frac{۱}{۲}mv^۲&=\frac{۱}{۲}(۱{,}۶۷\times۱۰^{-۲۷}\text{kg})(۳{,}۸۸\times۱۰^۴\text{m/s})^۲\\&=۱{,}۲۶\times۱۰^{-۱۸}\text{J}=۷{,}۹\text{eV}\end{aligned}$$

در رآکتورهای هسته‌ای، نوترون در اثر شکافت هسته‌ای تولید می‌شود و انرژی جنبشی چنین نوترونهایی، نوعاً در حدود چند MeV است. روی نوترونهای این مثال، توسط یک عامل خارجی (به نام کُندکننده) کار منفی انجام شده و در نتیجه انرژی جنبشی این نوترونها با ضریب قابل‌توجهی، از چند MeV به چند eV، کاهش یافته است.

**مثال ۶.** جسمی به جرم $m=۴{,}۵\text{g}$ از ارتفاع $h=۱۰{,}۵\text{m}$ بالاتر از سطح زمین، از حالت سکون، سقوط می‌کند. سرعت این جسم، درست پیش از برخورد به زمین، چقدر است؟

حل: فرض می‌کنیم بتوانیم جسم را مثل ذره در نظر بگیریم. این مسئله را البته مستقیماً با قوانین نیوتون هم می‌شود حل کرد (فصل ۵)، اما این بار می‌خواهیم از قضیهٔ کار-انرژی استفاده کنیم. نیرو ثابت، و در جهت حرکت است. پس کار نیروی گرانش برابر است با

$$W=\mathbf{F}\cdot\mathbf{s}=mgh$$

سرعت جسم، در ابتدا $v_\circ=۰$، و در پایان $v$ است. تغییر انرژی جنبشی جسم برابر است با

$$\Delta K=\frac{۱}{۲}mv^۲-\frac{۱}{۲}mv_\circ^۲=\frac{۱}{۲}mv^۲-۰$$

طبق قضیهٔ کار-انرژی، $W=\Delta K$ است، پس

$$mgh=\frac{۱}{۲}mv^۲$$

بنابراین، سرعت جسم، درست پیش از برخورد، برابر است با

$$v=\sqrt{۲gh}=\sqrt{۲(۹{,}۸۰\text{m/s}^۲)(۱۰{,}۵\text{m})}=۱۴{,}۳\text{m/s}$$

توجه کنید که این نتیجه مستقل از جرم جسم است، همان‌طور که قبلاً با استفاده از قوانین نیوتون هم دیده بودیم.

**مثال ۷.** جسمی به جرم $m=۳{,}۶۳\text{kg}$، با سرعت $v=۱{,}۲۲\text{m/s}$، روی میز افقی بدون اصطکاکی می‌لغزد. این جسم به فنری برخورد می‌کند و آن‌را می‌فشارد تا به حالت سکون برسد. فنر، در این حالت چقدر فشرده شده است؟ ثابت نیروی فنر $k=۱۳۵\text{N/m}$ است.

حل: تغییر انرژی جنبشی جسم برابر است با

$$\Delta K=K_{\rm f}-K_{\rm i}=۰-\frac{۱}{۲}mv^۲$$

کار فنرروی جسم، طی فشرده شدن فنر از حالت تعادل به اندازهٔ $d$، طبق معادلهٔ ۱۰، برابر است با

$$W=-\frac{۱}{۲}kd^۲$$

از قضیهٔ کار ـ انرژی نتیجه می‌شود که

$$-\frac{۱}{۲}kd^{۲} = -\frac{۱}{۲}mv^{۲}$$

یا

$$d = v\sqrt{\frac{m}{k}} = (۱٫۲۲\mathrm{m/s})\sqrt{\frac{۳٫۶۳\mathrm{kg}}{۱۳۵\mathrm{N/m}}} = ۰٫۲۰۰\mathrm{m}$$

### محدودیتهای قضیهٔ کار ـ انرژی

قضیهٔ کار ـ انرژی (معادلهٔ ۱۹) را مستقیماً از قانون دوم نیوتون به‌دست آوردیم، و این قانون، در شکلی که ما بیانش کردیم، تنها در مورد ذرات صادق است. پس قضیهٔ کار ـ انرژی هم، به‌صورتی که ما گفتیم، فقط برای ذرات معتبر است. این قضیهٔ مهم را در مورد اجسام واقعی فقط وقتی می‌شود به‌کار برد که این اجسام مثل ذره رفتار کنند، یعنی همان‌طور که قبلاً دیدیم همهٔ نقاطشان دقیقاً مثل هم حرکت کنند. در استفاده از قضیهٔ کار ـ انرژی هم، فقط زمانی می‌توان اجسام گسترده را ذره در نظر گرفت که انرژی آنها صرفاً از نوع جنبشیِ انتقالی باشد.

مثلاً یک اتومبیل آزمایشی را در نظر بگیرید که مستقیماً از جلو به یک مانع سخت بتونی برخورد می‌کند و متلاشی می‌شود. روشن است که انرژی جنبشی انتقالی اتومبیل، در اثر برخورد به مانع، مچاله شدن و توقف آن، کم می‌شود. اما در این مسئله انواع دیگری از انرژی، جز انرژی جنبشی انتقالی هم دخیل‌اند، مثلاً انرژی داخلی مربوط به خم شدن و مچاله شدن اتومبیل؛ بخشی از این انرژی داخلی ممکن است به شکل افزایش دمای اتومبیل بروز کند، و بخشی از آن می‌تواند، به شکل گرما به محیط اطراف منتقل شود. توجه کنید که اگرچه ممکن است مانع طی برخورد، نیروی بزرگی بر اتومبیل وارد کند، اما این نیرو کاری انجام نمی‌دهد زیرا نقطهٔ اثر نیرو براتومبیل حرکت نمی‌کند. (تعریف اولیهٔ کار ــ معادلهٔ ۱ و شکل ۱ــ را به‌خاطر بیاورید. نقطهٔ اثر نیرو باید حرکت کند تا کار انجام شود.) بنابراین، در این مورد $\Delta K \neq ۰$، اما $W = ۰$ است؛ روشن است که معادلهٔ ۱۹ برقرار نیست. اتومبیل مثل ذره رفتار نمی‌کند: همهٔ نقاط آن دقیقاً یک نوع حرکت ندارند.

به دلایل مشابه، نمی‌شود جسمی را که روی سطحی می‌لغزد و تحت تأثیر نیروی اصطکاک قرار می‌گیرد، از لحاظ کار ـ انرژی، ذره فرض کرد (اگرچه در تحلیل حرکت جسم با استفاده از قوانین نیوتون باز هم می‌توانیم، مثل فصل ۶، آن‌را ذره در نظر بگیریم). نیروی اصطکاک، که آن‌را یک نیروی ثابت معرفی کردیم، در واقع بسیار پیچیده است؛ در فرایند اصطکاک دائماً جوشهای میکروسکوپیک تشکیل می‌شوند و می‌شکنند (بخش ۶ـ۲). این امر موجب تغییر شکل سطح می‌شود و انرژی داخلی آن‌را تغییر می‌دهد که بخشی از این انرژی می‌تواند به شکل افزایش دمای سطح ظاهر شود. چون در نظر گرفتن این انواع دیگر انرژی دشوار است و چون این اجسام مثل ذره رفتار نمی‌کنند، در حالت کلی درست نیست که قضیهٔ کار ـ انرژی را برای اجسامی که نیروی اصطکاک به آنها وارد می‌شود به‌کار ببریم.

در این‌گونه موارد، نباید اتومبیل برخوردکننده یا جسم لغزان را ذره تلقی کنیم، بلکه باید آنها را مثل سیستمهای بزرگی که تعداد زیادی ذره دارند در نظر بگیریم. به‌کار بردن قضیهٔ کار ـ انرژی برای تک‌تک ذرات این سیستم البته کار درستی است، اما فوق‌العاده دشوار است. در فصل ۹، روش ساده‌تری برای بررسی این سیستمهای پیچیدهٔ ذرات ارائه می‌کنیم، و نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان قضیهٔ کار ـ انرژی را تعمیم داد تا در این موارد هم قابل استفاده باشد.

## ۷ـ۵ توان

در طراحی سیستمهای مکانیکی، اغلب نه تنها باید مقدار کاری را که انجام می‌شود در نظر بگیریم، بلکه لازم است به آهنگ انجام این کار هم توجه کنیم. برای اینکه جسمی را تا ارتفاع معینی بالا ببریم مقدار معینی کار لازم است و این کار، چه انجام آن ۱ ثانیه طول بکشد چه ۱ سال، یکسان است. اما آهنگ انجام کار در این دو مورد متفاوت است.

توان را آهنگ انجام کار تعریف می‌کنیم. (در اینجا فقط توان مکانیکی را بررسی می‌کنیم. که مربوط به کار مکانیکی است. با تعریف کلی‌تر به عنوان انرژی منتقل شده در واحد زمان، می‌شود مفهوم توان را به توان الکتریکی، توان خورشیدی، و مانند آن تعمیم داد.) توان متوسط $\overline{P}$ حاصل از عاملی که نیروی معینی بر جسم وارد می‌کند، عبارت است از کار آن نیرو تقسیم بر کل مدتی که انجام کار طول می‌کشد، یعنی

$$\overline{P} = \frac{W}{t} \qquad (۲۰)$$

توان لحظه‌ای یک عامل در انجام کار، عبارت است از

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad (۲۱)$$

که در آن $dW$ جزء کارکوچکی است که در بازهٔ زمانی بینهایت کوچک $dt$ انجام شده است. اگر توان در طی زمان ثابت باشد، $P$ با $\overline{P}$ برابر است و خواهیم داشت

$$W = Pt \qquad (۲۲)$$

یکای SI توان ژول بر ثانیه است، که آن‌را وات می‌نامند (با علامت اختصاری W ). این نامگذاری به افتخار جیمز وات (۱۷۳۶ تا ۱۸۱۹) است، که نقش مهمی در توسعهٔ ماشینهای بخار زمان خود داشت، و راه پیشرفت به سوی ماشینهای کاراتر امروزی را هموار کرد. در سیستم بریتانیایی، یکای توان $۱\mathrm{ft \cdot lb/s}$ است، اما اغلب از یکای رایجتری برای توان استفاده می‌شود که اسب بخار (hp) نام دارد. این یکا را

عموماً برای بیان توان موتورهای الکتریکی، موتور اتومبیلها، و مانند آن به‌کار می‌برند. یک اسب بخار، بنابر تعریف، $550\,\text{ft}\cdot\text{lb/s}$ است که تقریباً معادل است با ۷۴۶W.

کار را برحسب یکای توان × زمان هم می‌توان بیان کرد. نمونه‌اش یکای کیلووات‌ـساعت است، که شرکت برق برای سنجش مقدار کاری که (به شکل انرژی الکتریکی) به خانهٔ شما تحویل داده است به‌کار می‌برد. یک کیلووات ساعت، کاری است که عاملی با توانِ ثابت 1kW در طی ۱ ساعت تحویل می‌دهد.

توانی را که به جسم داده می‌شود، برحسب سرعت جسم و نیروی وارد بر آن هم می‌توانیم بیان کنیم. به‌طور کلی، معادلهٔ ۲۱ را می‌شود چنین نوشت

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt}$$

با گذاشتن $\mathbf{v}$ به جای $d\mathbf{s}/dt$، نتیجه می‌شود که

$$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \qquad (۲۳)$$

اگر $\mathbf{F}$ و $\mathbf{v}$ با هم موازی باشند، رابطهٔ بالا به‌صورت زیر در می‌آید

$$P = Fv \qquad (۲۴)$$

توجه کنید که اگر $\mathbf{F}$ و $\mathbf{v}$ موازی و در خلاف جهت هم باشند، توان منفی می‌شود. تحویل توان منفی به جسم، به معنی انجام کار منفی روی آن است، در این حالت، نیرویی که عامل خارجی به جسم وارد می‌کند در خلاف جهت جابه‌جایی $d\mathbf{s}$، و در نتیجه در خلاف جهت $\mathbf{v}$ است.

---

مثال ۸. وزن یک آسانسور خالی 5160N (1160lb) است. این آسانسور چنان طراحی شده است که می‌تواند حداکثر ۲۰ مسافر را طی ۱۸ ثانیه از طبقهٔ هم‌کف به طبقهٔ بیست‌وپنجم ساختمان ببرد. اگر فرض کنیم وزن هر مسافر به‌طور متوسط 710N (160lb)، و فاصلهٔ بین دو طبقهٔ مجاور 3,5m (11ft) است، توان ثابت موتور آسانسور حداقل چقدر باید باشد؟ (فرض بر آن است که همهٔ کاری که آسانسور را حرکت می‌دهد از موتور می‌آید، و آسانسور وزنهٔ مقابله ندارد.)

حل: حداقل نیروی لازم برابر با مجموع وزن آسانسور خالی و وزن مسافران است، $F = 5160\text{N} + 20(710)\text{N} = 19400\text{N}$. کاری که باید انجام شود برابر است با

$$W = Fs = (19400\text{N})(25\times 3{,}5\text{m}) = 1{,}7\times 10^{6}\text{J}$$

بنابراین، حداقل توان لازم برابر خواهد بود با

$$P = \frac{W}{t} = \frac{1{,}7\times10^{6}\text{J}}{18\text{s}} = 94\text{kW}$$

که معادل 126hp است، در حدود توان موتور بعضی اتومبیلهای سواری. البته به علت اتلاف ناشی از اصطکاک و اتلافهای دیگر، حداقل توانی که موتور برای بالا بردن آسانسور تأمین می‌کند باید از این بیشتر باشد.

در عمل آسانسور معمولاً یک وزنهٔ مقابله هم دارد که با بالا رفتن اتاقک آسانسور پایین می‌آید. موتور باید به اتاقک توان مثبت و به وزنه پایین‌رونده توان منفی تحویل بدهد. به این ترتیب، توان خالصی که موتور باید تأمین کند، به مقدار زیادی کمتر از آن است که محاسبه شد.

---

## ۷ـ۶ چارچوبهای مرجع (اختیاری)

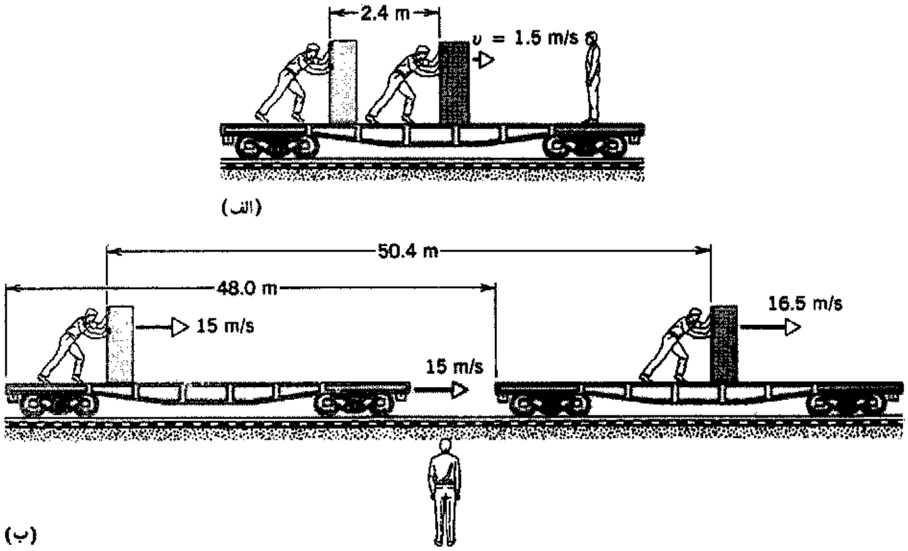
قوانین نیوتون فقط در چارچوبهای مرجع لخت برقرارند (بخش ۶ـ۸)، و اگر در چارچوب خاصی برقرار باشند، در هر چارچوب دیگری که با سرعت ثابت نسبت به آن حرکت کند هم برقرارند، کمیتهای فیزیکی خاصی هستند که نتیجهٔ اندازه‌گیری آنها در چارچوبهای لخت متفاوت همواره یکسان است. در مکانیک نیوتونی، این کمیتهای ناوردا عبارت‌اند از نیرو، جرم، شتاب، و زمان. کمیتهای دیگر، مثلاً جابه‌جایی یا سرعت، ناوردا نیستند و از سنجش آنها در چارچوبهای لخت متفاوت، نتایج متفاوتی به‌دست می‌آید. مثلاً، در بخش ۴ـ۶ دیدیم که مقادیری که ناظرهای دو چارچوب لخت مختلف برای یک سرعت اندازه می‌گیرند، چه ارتباطی با هم دارند.

ناظرهای دو چارچوب لخت متفاوت، از سنجش شتاب یک ذره نتیجهٔ یکسانی به‌دست می‌آورند، بنابراین، باید تغییر سرعت $\Delta v$ ذره هم برای آنها یکسان باشد. اما این دو ناظر، در حالت کلی برای انرژی جنبشی ذره مقدار یکسانی به‌دست نمی‌آورند. ناظرهای در حال حرکت نسبت به هم، مقادیر متفاوتی برای جابه‌جایی یک ذره می‌سنجند؛ بنابراین (اگرچه نیروی وارد بر ذره را یکسان می‌سنجند، چون نیرو ناورداست) مقادیر متفاوتی برای کار انجام شده روی ذره به‌دست می‌آورند. در این بخش، به کمک یک مثال عددی خاص، این مسائل را روشن می‌کنیم و نشان می‌دهیم که قضیهٔ کارـانرژی برای ناظرهای همهٔ چارچوبهای لخت معتبر است.

مثال زیر را در نظر بگیرید. کارگری صندوقی را در قسمت بار قطاری که روی ریلهای افقی است هل می‌دهد. قطار با سرعت ثابت 15,0m/s در حرکت است صندوق 12kg جرم دارد و کارگر آن‌را به‌اندازهٔ 2,4m (نسبت به قطار) به‌جلو می‌برد، و در این مدت سرعت صندوق با شتاب ثابت زیاد می‌شود و (نسبت به قطار) از صفر به 1,5m/s می‌رسد. شکل ۱۲الف وضعیت شروع و پایان را از دید ناظری که سوار قطار است نشان می‌دهد. از دید این ناظر، تغییر انرژی جنبشی برابر است با

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}(12\text{kg})(1{,}5\text{m/s})^2 - 0 = 13{,}5\text{J}$$

شتاب صندوق را (که ثابت فرض شده است) می‌توانیم از معادلهٔ ۲۰




**شکل ۱۲.** کارگری صندوقی را در قطاری به جلو هل می‌دهد، (الف) وضعیت از دید ناظر قطار و (ب) وضعیت از دید ناظرِ ساکن بر زمین.

فصل ۲ پیدا کنیم

$$a = \frac{v_{\mathrm{f}}^{۲} - v_{\mathrm{i}}^{۲}}{۲(x_{\mathrm{f}} - x_{\mathrm{i}})} = \frac{(۱٫۵\,\mathrm{m/s})^{۲} - ۰}{۲(۲٫۴\,\mathrm{m})} = ۰٫۴۶۹\,\mathrm{m/s^{۲}}$$

این شتاب ناشی از نیروی خالصی است که آن هم ثابت و برابر است با $F = ma = (۱۲\,\mathrm{kg})(۰٫۴۶۹\,\mathrm{m/s^{۲}}) = ۵٫۶۳\,\mathrm{N}$. کاری که این نیرو در حین جابه‌جایی $\Delta x = ۲٫۴\,\mathrm{m}$ روی صندوق انجام می‌دهد برابر است با

$$W = F\Delta x = (۵٫۶۳\,\mathrm{N})(۲٫۴\,\mathrm{m}) = ۱۳٫۵\,\mathrm{J}$$

بنابراین، ناظر قطار نتیجه می‌گیرد که $W = \Delta K$ است، یعنی قضیهٔ کار-انرژی صدق می‌کند.

حالا ببینیم ناظری که نسبت به زمین ساکن است از همین نوع اندازه‌گیریها، چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آورد؟ (مقادیری را که این ناظر می‌سنجد با پریم نشان می‌دهیم.) وقتی صندوق نسبت به قطار ساکن است، از دید ناظر زمینی دارد با سرعت $v_{\mathrm{i}}' = ۱۵٫۰\,\mathrm{m/s}$ به‌جلو حرکت می‌کند. پس از هل دادن صندوق، ناظر زمینی مشاهده می‌کند که سرعت آن به $v_{\mathrm{f}}' = ۱۵٫۰\,\mathrm{m/s} + ۱٫۵\,\mathrm{m/s} = ۱۶٫۵\,\mathrm{m/s}$ می‌رسد، و نتیجه می‌گیرد که تغییر انرژی جنبشی آن برابر است با

$$\begin{aligned}\Delta K' &= K_{\mathrm{f}}' - K_{\mathrm{i}}' = \frac{۱}{۲}mv_{\mathrm{f}}'^{۲} - \frac{۱}{۲}mv_{\mathrm{i}}'^{۲}\\ &= \frac{۱}{۲}(۱۲\,\mathrm{kg})(۱۶٫۵\,\mathrm{m/s})^{۲} - \frac{۱}{۲}(۱۲\,\mathrm{kg})(۱۵٫۰\,\mathrm{m/s})^{۲}\\ &= ۲۸۴\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

این مقدار، با آنچه ناظر سوار بر قطار سنجیده بود ($\Delta K = ۱۳٫۵\,\mathrm{J}$) تفاوت زیادی دارد.

اما پیش از آنکه به صحت قضیهٔ کار-انرژی شک کنیم، کار انجام شده بر صندوق را از دید ناظر زمینی حساب می‌کنیم. چنانکه شکل ۱۲ب نشان می‌دهد، مقدار جابه‌جایی صندوق هم به چارچوب مرجع ناظر بستگی دارد. از دید ناظر زمینی، نیرو تنها در طی مسافت ۲٫۴m وارد نشده بلکه در طی مسافت بزرگتر ۵۰٫۴m عمل کرده است؛ قطار با سرعت ۱۵٫۰m/s در مدت ۳٫۲s (= $\Delta v/a$ یا $\Delta v'/a'$؛ شتاب و زمان هر دو در مکانیک نیوتونی ناوردا هستند) که صندوق در حرکت است، ۴۸٫۰m می‌پیماید. بنابراین، جابه‌جایی $\Delta x'$ صندوق در این مدت برابر است با $۴۸٫۰\,\mathrm{m} + ۲٫۴\,\mathrm{m} = ۵۰٫۴\,\mathrm{m}$. اما نیرو ناورداست؛ از دید ناظر زمینی، $F' = F = ۵٫۶۳\,\mathrm{N}$. بنابراین، ناظر زمینی نتیجه می‌گیرد که

$$W' = F'\Delta x' = (۵٫۶۳\,\mathrm{N})(۵۰٫۴\,\mathrm{m}) = ۲۸۴\,\mathrm{J}$$

پس قضیهٔ کار-انرژی برای ناظر زمینی هم درست است! اگرچه این دو ناظر، مقادیر جابه‌جایی و سرعت را متفاوت مشاهده می‌کنند، و مقادیر کار و انرژی جنبشی را هم متفاوت به‌دست می‌آورند، اما هر دو نتیجه می‌گیرند که مقدار کار با تغییر انرژی جنبشی مساوی است.

قانون ناوردا در فیزیک قانونی است که شکل آن در همهٔ چارچوبهای مرجع لخت یکسان باشد. یک مثال خوب، همین قضیهٔ کار-انرژی است، که ناوردا بودنش را دیدیم. درچارچوب لخت ناظر $S$، که در فرایند خاصی کار را $W$ و تغییر انرژی جنبشی را $\Delta K$ می‌سنجد، قضیهٔ کار و انرژی به شکل $W = \Delta K$ است. ناظر $S'$ که با سرعت ثابت نسبت به $S$ حرکت می‌کند، در همان فرایند کار را $W'$ و تغییر انرژی جنبشی را $\Delta K'$ می‌سنجد. در حالت کلی $W \neq W'$ و $\Delta K \neq \Delta K'$ است، اما ناظر $S'$ هم نتیجه می‌گیرد که $W' = \Delta K'$ است. یک ناظر لخت دیگر، $S''$، هم می‌تواند نتیجه بگیرد که $W'' = \Delta K''$ است. شکل قضیهٔ کار-انرژی از دید ناظرهای همهٔ چارچوبهای لخت یکسان است. اصول ناوردایی، خیلی وقتها سرنخی از کارکرد جهان طبیعی به‌دست می‌دهند؛ این اصول حاکی از آن هستند که فلان رابطهٔ خاص، تصادفی و ناشی از موقعیت

مرجع فلان ناظر خاص نیست، بلکه اثر یک تقارن بنیادی طبیعت است.

---

**مثال ۹.** دو هواپیمای یکسان، هر یک به جرم $m$، با سرعت ثابت $v$ نسبت به آب، بر فراز آب ساکن پرواز می‌کنند. هواپیمای ۱ بر یک ناو هواپیمابر، که نسبت به آب ساکن است، فرود می‌آید. قلابی که در بدنهٔ این هواپیماست به کابلی در عرشه وصل می‌شود، و کابل نیرویی از نوع نیروی فنر به هواپیما وارد می‌کند تا هواپیما متوقف شود. ناظری که در ناو ایستاده است، مسافت بین نقطهٔ آغاز اتصال هواپیما به کابل تا سکون کامل هواپیما را برابر با $d$ می‌سنجد. با چشمپوشی از نیروهای دیگر وارد بر هواپیما (مثلاً اصطکاک)، درستی قضیهٔ کار-انرژی را از دید (الف) ناظر همراه‌با ناو و (ب) خلبان هواپیمای ۲، که همچنان با همان سرعت اولیه در همان جهت اولیه پرواز می‌کند بررسی کنید.

حل: (الف) تغییر انرژی جنبشی برای ناظر سوار بر ناو برابر است با

$$\Delta K = K_f - K_i = ۰ - \frac{۱}{۲}mv^۲ = -\frac{۱}{۲}mv^۲$$

این ناظر مشاهده می‌کند که هواپیما متوقف می‌شود، پس طبیعی است که تغییر انرژی جنبشی آن‌را منفی بسنجد.

کابل یک نیروی فنروار برهواپیما وارد می‌کند؛ اگر ثابت نیروی مؤثر را $k$ بگیریم، این نیرو روی هواپیما کاری به مقدار

$$W_s = -\frac{۱}{۲}kd^۲$$

انجام می‌دهد. طبیعی است که این کار، از دید این ناظر، منفی است، زیرا هنگام فرود هواپیما، نیروی فنروار و جابه‌جایی هواپیما روی عرشه در خلاف جهت یکدیگرند. اگر از نیروهای دیگر (از جمله اصطکاک) صرفنظر کنیم، مطمئناً می‌توانیم هواپیما را مثل ذره در نظر بگیریم، و برای این ناظر قضیهٔ کار-انرژی درست است. و دیگر اینکه در این چارچوب مرجع، $W$ و $\Delta K$ هر دو منفی‌اند.

(ب) از دید خلبان هواپیمای ۲، انرژی جنبشی اولیهٔ هواپیمای ۱ صفر است: دو هواپیما کنار هم پرواز می‌کنند و نسبت به هم حرکتی ندارند. هنگامی که هواپیمای ۱ روی ناو هواپیمابر متوقف می‌شود، سرعت آن نسبت به هواپیمای ۲ برابر با $-v$ است؛ پس تغییر انرژی جنبشی آن به‌صورت زیر است

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{۱}{۲}mv^۲ - ۰ = +\frac{۱}{۲}mv^۲$$

ممکن است عجیب به‌نظر برسد که از دیدگاه خلبان هواپیمای ۲، انرژی جنبشی هواپیمای ۱ زیاد می‌شود، اما در چارچوب مرجع هواپیمای ۲، هواپیمای ۱ در ابتدا ساکن بود و نهایتاً با سرعت $v$ حرکت می‌کرده است.

در چارچوب هواپیمای ۲، کابل کار مثبت انجام می‌دهد. از دید خلبان این هواپیما، نیروی فنروار در خلاف جهت هواپیمای خودش است، و جابه‌جایی هواپیمای ۱ هم در همان جهت نیروست. پس درچارچوب مرجع هواپیمای ۲ هم قضیهٔ کار-انرژی درست است، و این بار $W$ و $\Delta K$ هر دو مثبت‌اند.

از این مثال نتیجه می‌گیریم که هم علامت کاری که نیرو انجام می‌دهد و هم علامت تغییر انرژی جنبشی یک ذرهٔ معین، می‌تواند به چارچوب مرجع ناظر بستگی داشته باشد. اما با وجود این اختلاف در تعبیر، هر دو ناظر در اعتبار قضیهٔ کار-انرژی توافق دارند (پرسش ۲۲ را هم ببینید، که در آن این فرایند از دیدگاه خلبان هواپیمای ۱ هم بررسی می‌شود.)

---

## ۷-۷ انرژی جنبشی در سرعتهای زیاد[1] (اختیاری)

در بخش قبل، برای تبدیل سرعت از یک چارچوب مرجع به چارچوب مرجع دیگر، فرمول گالیله‌ای نیوتونی را به‌کار بردیم: $v = v' + u$. این فرمول را در بخش ۴-۶ به‌دست آوردیم و گفتیم که در سرعتهای زیاد معتبر نیست؛ در چنین سرعتهایی، باید رابطهٔ صحیح را، که از نسبیت خاص حاصل می‌شود (معادلهٔ ۴۶ فصل ۴) به‌کاربرد. اگر به این فکر افتاده باشید که فرمول $\frac{۱}{۲}mv^۲$ انرژی جنبشی هم در سرعتهای زیاد نادرست از آب در می‌آید، درست فکر کرده‌اید.

فرمول کلی انرژی جنبشی، که می‌شود آن‌را در هر سرعتی به‌کار برد، چنین است

$$K = mc^۲\left[\frac{۱}{\sqrt{۱ - v^۲/c^۲}} - ۱\right] \qquad (۲۵)$$

(این نتیجه را در فصل ۲۱ به‌دست خواهیم آورد.) فرمول ۲۵ آیا معنی‌اش این است که $\frac{۱}{۲}mv^۲$ غلط است؟ در سرعتهای زیاد حتماً چنین است، اما می‌توان نشان داد که معادلهٔ ۲۵، در سرعتهای کم واقعاً به $\frac{۱}{۲}mv^۲$ تبدیل می‌شود. برای این کار، به عبارت بسط دوجمله‌ای $(۱ + x)^p$ نیاز داریم

$$(۱+x)^p = ۱ + px + \frac{p(p-۱)}{۲!}x^۲ + \frac{p(p-۱)(p-۲)}{۳!}x^۳ + \cdots$$

در این رابطه $n!$ (بخوانید "$n$ فاکتوریل") به معنی حاصلضرب همهٔ اعداد صحیح از ۱ تا $n$ است. پس، $۳! = ۱ \times ۲ \times ۳ = ۶$ است.

بسط دوجمله‌ای رابطهٔ مفیدی است، به‌خصوص وقتی که $x$ در مقایسه با ۱ کوچک باشد. مثلاً فرض کنید $x$ در حدود ۰٫۱ باشد.

۱. این بخش را می‌شود حذف کرد، یا تا بحث نسبیت در فصل ۲۱ به تعویق انداخت.

در این‌صورت، جملهٔ دوم بسط، $px$، (اگر $p$ خیلی بزرگ نباشد) خیلی کوچکتر از جملهٔ اول است. جملهٔ سوم از جملهٔ دوم هم کوچکتر است، و به همین ترتیب. اگر جملات به همین ترتیب کوچک و کوچکتر شوند، ممکن است برای محاسبه‌ای خاص کافی باشد که فقط چند جمله را نگه داریم و از بقیه صرفنظر کنیم.

در معادلهٔ ۲۵ برای انرژی جنبشی، عبارت داخل کروشه شامل جملهٔ $(1-v^2/c^2)^{-1/2}$ است. این عامل را می‌شود طبق فرمول دوجمله‌ای؛ با $x=-v^2/c^2$ و $p=-1/2$ بسط داد. فرض می‌کنیم کافی است که مثلاً سه‌جملهٔ بسط را نگه داریم

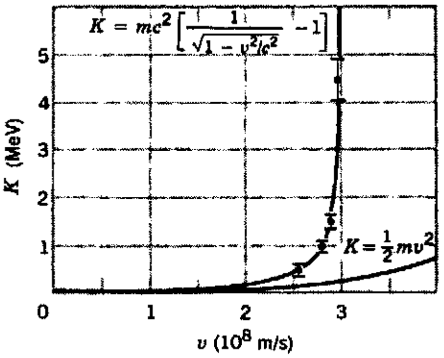
$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\approx 1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^2 \qquad (26)$$
$$=1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}$$

حالا معادلهٔ ۲۶ را در معادلهٔ ۲۵ می‌گذاریم

$$K\approx mc^2\left[1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}-1\right]$$
$$=\frac{1}{2}mv^2\left[1+\frac{3}{4}\frac{v^2}{c^2}\right] \qquad (27)$$

می‌توانید ببینید که خطای نسبی انرژی جنبشی، اگر از $\frac{1}{2}mv^2$ استفاده کنیم، در حدود $\frac{3}{4}(v^2/c^2)$ است. حتی اگر سرعت ذره به ۱٪ سرعت نور هم برسد، این خطا کمتر از ۱ قسمت در $10^4$ است. سرعتهای معمولی آزمایشگاهی، به‌ندرت از $10^{-6}$ برابر سرعت نور بیشترند؛ بنابراین، خطای استفاده از $\frac{1}{2}mv^2$ به‌مراتب کمتر از دقت ما در اندازه‌گیری انرژی است، و $\frac{1}{2}mv^2$ تقریب بسیار خوبی است.

معادلهٔ ۲۵ همیشه درست است، چه در سرعتهای زیاد و چه در سرعتهای کم. پس چرا همیشه آن‌را بکار نبریم و $\frac{1}{2}mv^2$ را به‌کلی کنار نگذاریم؟ اگر این کار را بکنیم در عمل با مشکل روبرو می‌شویم. معادلهٔ ۲۵ را به‌ازای $v=300\,\mathrm{m/s}$ امتحان کنید؛ این سرعت، با بیشتر معیارها سرعت معقولی است (تقریباً برابر با سرعت صوت در هوا)، اما در مقایسه با سرعت نور بسیار کوچک است ($v/c=10^{-6}$ و $v^2/c^2=10^{-12}$). اگر عبارت داخل کروشهٔ معادلهٔ ۲۵ را با ماشین حسابتان محاسبه کنید، احتمالاً صفر به‌دست خواهید آورد. علتش این است که ماشین حساب شما فقط ۸ یا ۹ رقم به‌کار می‌برد. عبارت $1-10^{-12}$ را "دقیقاً" برابر با ۱ براورد خواهد کرد. در عمل، اگر $v$ کمتر از ۱٪ سرعت نور باشد، عبارت $\frac{1}{2}mv^2$ را به‌کار می‌بریم که دقت کافی دارد و محاسبهٔ آن هم ساده‌تر است؛ و معادلهٔ ۲۵ را برای سرعتهای زیادتر نگه می‌داریم.




**شکل۱۳.** مقایسهٔ فرمولهای کلاسیک و نسبیتی انرژی جنبشی الکترون. در سرعتهای کم، دو فرمول یک نتیجه می‌دهند، اما داده‌ها به روشنی نشان می‌دهند که در سرعتهای نزدیک به سرعت نور، فرمول نسبیتی درست است.

شکل ۱۳ نتایج آزمون تجربی معادلهٔ ۲۵ را نشان می‌دهد. در این آزمایش، الکترونها را تا انرژی جنبشی معینی شتاب می‌دهند و سپس سرعتشان را، از طریق سنجش زمان لازم برای طی یک مسافت معین، به‌دست می‌آورند. روشن است که در سرعتهای زیاد، داده‌ها به نفع نتایج حاصل از نظریهٔ نسبیت‌اند. به این هم توجه کنید که در سرعتهای کم، دو منحنی از هم قابل تشخیص نیستند.

---

**مثال ۱۰.** شتابدهندهٔ تواترون آزمایشگاه شتابدهندهٔ فرمی، پروتون را تا انرژی جنبشی‌ای در حدود $1\,\mathrm{TeV}$ (یعنی $10^{12}\,\mathrm{eV}$، که هر $\mathrm{eV}$ برابر با $1{,}6\times10^{-19}\,\mathrm{J}$ است) شتاب می‌دهد. سرعت یک پروتون $1\,\mathrm{TeV}$ چقدر است؟ جرم پروتون $1{,}67\times10^{-27}\,\mathrm{kg}$ است.

حل: انرژی جنبشی پروتون $1\,\mathrm{TeV}$، برحسب یکای SI برابر است با

$$K=1\,\mathrm{TeV}=1{,}6\times10^{-7}\,\mathrm{J}$$

بنابراین، با استفاده از معادلهٔ ۲۵

$$1{,}6\times10^{-7}\,\mathrm{J}=(1{,}67\times10^{-27}\,\mathrm{kg})\times(3{,}00\times10^{8}\,\mathrm{m/s})^2\times\left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right]$$

از حل این معادله معلوم می‌شود که

$$v/c=0{,}999999956$$

یعنی $v$ البته از $c$ کوچکترهست ولی بسیار به آن نزدیک است؛ تنها $132\,\mathrm{m/s}$ با $c$ اختلاف دارد.

---

## پرسشها

۱. آیا می‌توانید کلمات دیگری، مثل کار، نام ببریدکه معنی آنها در زبان روزمره عموماً با معنی علمی‌شان متفاوت باشد؟

۲. توضیح بدهید که چرا هنگامی که دیواری را فشار می‌دهید، و البته نمی‌توانید آن‌را حرکت بدهید، بدن شما خسته می‌شود، مگر نه اینکه کاری روی دیوار انجام نمی‌شود؟

۳. سه نیروی ثابت بر ذره‌ای وارد می‌شوند و ذره از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر می‌رود ثابت کنیدکه کار حاصل از برایند این سه نیرو برابر است با مجموع کارهای حاصل از تک‌تک نیروهاکه جداگانه حساب شده باشد.

۴. سطح شیبدار (مثال ۱) یک "ماشین" ساده است که به کمک آن می‌توانیم با نیروی کوچکتر (از آنچه بدون استفاده از ماشین لازم است) کار انجام بدهیم. در مورد گوه، اهرم، پیچ، چرخ‌دنده، و ترکیباتی از قرقره‌ها (مسئلهٔ ۹) هم همین‌طور است. اما این ماشینها نه تنها کار را کم نمی‌کنند بلکه عملاً قدری هم زیاد می‌کنند. چرا؟ چرا این ماشینها را به‌کار می‌بریم؟

۵. در یک مسابقهٔ طناب‌کشی، یک تیم به آهستگی‌وامی‌دهد و به طرف تیم حریف کشیده می‌شود. چه کاری انجام می‌شود و توسط چه تیمی؟

۶. چرا یک کیلومتر دوچرخه‌سواری در یک مسیر افقی، خیلی آسانتر از دویدن در همین مسافت است؟ در هر مورد باید وزن خودتان را یک کیلومتر منتقل کنید، و در مورد اول باید دوچرخه را هم با خودتان ببرید و تازه طی زمان کوتاهتری هم این مسافت را طی کنید؟[1]

۷. فرض کنید مدارگردش زمین به دور خورشید دقیقاً دایره باشد. در این صورت آیا خورشید روی زمین کاری انجام می‌دهد؟

۸. توپ بولینگی را به‌آرامی از زمین بلند می‌کنید و روی میز می‌گذارید. دو نیرو به توپ وارد می‌شود: وزن توپ، $mg$، و نیروی رو به بالای شما، $-mg$. این دو نیرو یکدیگر را خنثی می‌کنند، چنانکه کلاً کاری انجام نمی‌شود. از طرف دیگر، می‌دانید که دست شما کار انجام می‌دهد. اشکال در کجاست؟

۹. فنری را نصف می‌کنیم. ثابت نیروی فنر اولیه، $k$، با ثابت نیروی هر یک از دو نیمهٔ حاصل چه رابطه‌ای دارد؟

۱۰. فنرهای $A$ و $B$ یکسان‌اند جز آنکه $A$ سخت‌تر از $B$ است؛ یعنی، $k_A > k_B$. اگر دو فنر را (الف) به یک اندازه و (ب) با یک نیرو بکشیم، روی کدام‌یک کار بیشتری انجام می‌شود؟

۱۱. آیا انرژی جنبشی به جهت حرکت جسم مورد نظر بستگی دارد؟ آیا می‌تواند منفی باشد؟ آیا مقدار آن به چارچوب مرجع ناظر بستگی دارد؟

۱۲. کتابی را از زمین برمی‌دارید و روی میز می‌گذارید؛ در این حالت کار انجام می‌دهید، اما انرژی جنبشی کتاب تغییر نمی‌کند. آیا قضیهٔ کار_انرژی در این مورد نقض شده است؟ اگر جوابتان مثبت است چرا، و اگر نه باز هم چرا؟

۱۳. آیا در مورد جسمی که تحت اثر نیروی اصطکاک باشد هم قضیهٔ کار_انرژی درست است؟ توضیح بدهید.

۱۴. کار نیروی خالص وارد بر یک ذره برابر است با تغییر انرژی جنبشی آن. آیا ممکن است که کار یکی از مؤلفه‌های نیرو بزرگتر از تغییر انرژی جنبشی باشد؟ اگر چنین است، مثال بیاورید.

۱۵. چرا یک اتومبیل سواری در سربالایی به‌راحتی می‌تواند از یک کامیون پر از بار جلو بزند؟ البته کامیون سنگین‌تر هست اما موتورش هم به همان نسبت قویتر است. (آیا واقعاً چنین است؟) چه ملاحظاتی در طراحی توان موتورکامیون و موتور اتومبیل سواری دخالت دارد؟

۱۶. آیا توان لازم برای بالا بردن یک جعبه و گذاشتن آن روی سکو، به سرعت انجام این کار بستگی دارد؟

۱۷. چند تا از کتابهای کتابخانه را، طی زمان $\Delta t$، از یک قفسه به قفسهٔ بالاتر می‌برید. آیا کاری که انجام می‌دهید (الف) به جرم کتابها، (ب) به وزن کتابها، (ج) به ارتفاع قفسهٔ بالایی نسبت به زمین، (د) به زمان $\Delta t$ و (ه) به این که کتابها را زیگزاگ بالا ببرید یا مستقیم، بستگی دارد؟

۱۸. رکورد جهانی پرش با نیزه در حدود $5{,}5\mathrm{m}$ است. آیا می‌شود با استفاده از نیزه‌ای بلندتر، این رکورد را، مثلاً به $8\mathrm{m}$ رساند؟ اگر نه چرا؟ یک قهرمان پرش اصولاً تا حدود چه ارتفاعی امکان دارد بالا بپرد؟

۱۹. امروزه از "بحران انرژی" زیاد صحبت می‌شود. به نظر شما صحبت از "بحران توان "درست‌تر نیست؟

۲۰. آیا کار حاصل از نیروی خالص وارد بر یک ذره به چارچوب مرجع (لخت) ناظر بستگی دارد؟ تغییر انرژی جنبشی چطور؟ اگر چنین است، چند مثال بزنید.

۲۱. مردی سوار بر قایق، برخلاف جهت جریان آب پارو می‌زندو نسبت به ساحل ساکن است. (الف) آیا این مرد کاری انجام می‌دهد؟ (ب) اگر پارو زدن را متوقف کند و همراه با جریان آب جلو برود، آیا کاری روی او انجام می‌شود؟

۲۲. قضیهٔ کار_انرژی را از دیدگاه چارچوب مرجع خلبان هواپیمای ۱ در مثال ۹ بررسی کنید. آیا قضیه در این حالت نقض می‌شود؟ توضیح بدهید.

۲۳. می‌گوییم که الکترون $1\mathrm{keV}$ ذره‌ای " کلاسیک" است، الکترون $1\mathrm{MeV}$ ذره‌ای "نسبیتی" است، و الکترون $1\mathrm{GeV}$ ذره‌ای "فوق‌نسبیتی" است. منظور از این اصطلاحات چیست؟ [1]

## مسئله‌ها

**بخش ۷_۱ کاری که نیروی ثابت انجام می‌دهد**

۱. کارگری برای هل دادن صندوقی به جرم $52\mathrm{kg}$، نیرویی برابر با $190\mathrm{N}$ در جهت $22^\circ$ زیر سطح افقی بر آن وارد می‌کند. صندوق

---

۱. نگاه کنید به

*The Physics Teacher*, March 1981, p. 194.

به‌اندازهٔ ۳٫۳m جابه‌جا می‌شود. (الف) کارگر، (ب) نیروی گرانش، و (ج) نیروی عمودی وارد بر صندوق از سطح زمین، هر یک چقدر کار روی صندوق انجام می‌دهند؟

۲. جسمی به جرم ۱۰۶kg با سرعت ۵۱٫۳m/s روی خطی راست حرکت می‌کند. (الف) این جسم را با شتاب کندکنندهٔ ۱٫۹۷m/s² متوقف می‌کنیم. چه نیرویی لازم است، جسم طی چه مسافتی متوقف می‌شود، و این نیرو چقدر کار انجام می‌دهد؟ (ب) اگر شتاب کندکننده ۴٫۸۲m/s² باشد، جواب این پرسشها چه می‌شود؟

۳. کارگری صندوقی به جرم ۲۵kg را روی سطح شیبداری با زاویهٔ شیب ۲۷° به بالا هل می‌دهد؛ این کارگر نیرویی برابر با ۱۲۰N، موازی با سطح شیبدار، به صندوق وارد می‌کند. صندوق ۳٫۶m جابه‌جا می‌شود. (الف) کارگر، (ب) نیروی گرانش، و (ج) نیروی عمود بر سطح شیبدار، هر یک چقدر کار انجام می‌دهند؟

۴. با استفاده از میدان الکتریکی می‌شود از فلزات الکترون خارج کرد. برای اینکه یک الکترون از تنگستن جدا کنیم، میدان الکتریکی باید ۴٫۵eV کار انجام بدهد. فرض کنید که میدان الکتریکی در طی مسافت ۳٫۴nm اثر می‌کند. حداقل نیرویی که میدان باید بر الکترون وارد کند تا الکترون از فلز کنده شود، چقدر است؟

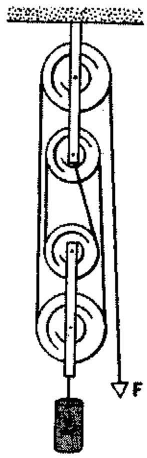
۵. با استفاده از یک طناب، جسمی به جرم $M$ را با شتاب ثابت رو به پایین $g/4$، به اندازهٔ مسافت $d$ در امتداد قائم پایین می‌آوریم. (الف) طناب چقدر کار روی جسم انجام می‌دهد؟ (ب) نیروی گرانش چقدر کار انجام می‌دهد؟

۶. کارگری جسمی به وزن ۵۸٫۷lb ($m =$ ۲۶٫۶kg) را روی سطح افقی تا مسافت ۳۱٫۳ft (یعنی ۹٫۵۴m) منتقل می‌کند. جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند و نیروی کارگر در جهت ۳۲٫۰° زیر سطح افقی به جسم وارد می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی ۰٫۲۱ است. کارگر چقدر کار روی جسم انجام می‌دهد؟

۷. الواری به جرم ۵۲٫۳kg را به‌اندازهٔ ۵٫۹۵m، با سرعت ثابت، روی سطح شیبداری با زاویهٔ ۲۸٫۰° به طرف بالا هل می‌دهیم. برای این کار، یک نیروی ثابت افقی به الوار وارد می‌کنیم. ضریب اصطکاک جنبشی بین الوار و سطح شیبدار ۰٫۱۹ است. (الف) کار نیروی اعمال شده و (ب) کار نیروی گرانشی را حساب کنید.

۸. قطعه یخی به جرم ۴۷٫۲kg روی سطح شیبداری به طول ۱٫۶۲m و ارتفاع ۰٫۹۰۲m به طرف پایین می‌لغزد. کارگری به این قطعه یخ در راستای موازی سطح شیبدار طوری به طرف بالا نیرو وارد می‌کند که یخ با سرعت ثابت پایین بیاید. ضریب اصطکاک جنبشی میان یخ و سطح شیبدار ۰٫۱۱۰ است. (الف) نیرویی را که کارگر وارد می‌کند و (ب) کاری را که کارگر روی قطعه یخ انجام می‌دهد، و (ج) کاری را که گرانش روی قطعهٔ یخ انجام می‌دهد پیدا کنید.

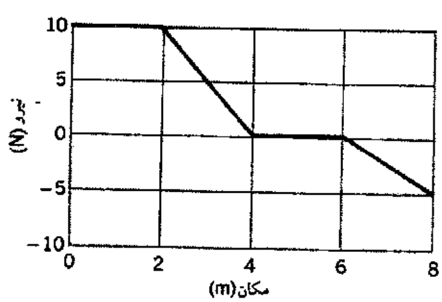
۹. شکل ۱۴ آرایه‌ای از قرقره‌ها را نشان می‌دهد که به کمک آن کشیدن بار سنگین $L$ به طرف بالا آسانتر می‌شود. فرض کنید اصطکاک در همه‌جای سیستم ناچیز است، و وزن کل دو قرقره‌ای را که بار به آنها وصل است ۲۰٫۰lb بگیرید. می‌خواهیم باری به وزن ۸۴۰lb را ۱۲٫۰ft بالا ببریم. (الف) حداقل نیروی $F$ لازم برای این کار چقدر است؟ (ب) چقدر کار باید در برابر گرانش انجام داد تا بار تا این ارتفاع بالا برود؟ (ج) نقطهٔ اثر نیروی اعمال شده را به چه مسافتی باید حرکت داد تا بار ۱۲٫۰ft بالا برود؟ (د) نیروی $F$ چقدر کار باید انجام بدهد تا بار به اندازهٔ مورد نظر بالا برود؟




**شکل ۱۴.** مسئلهٔ ۹

**بخش ۷ـ۲ کاری که نیروی متغیر انجام می‌دهد: مورد یک‌بعدی**

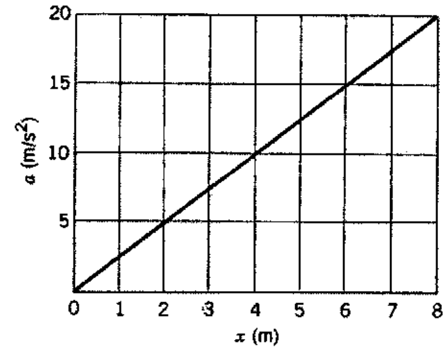
۱۰. جسمی به جرم ۵٫۰kg روی خط راستی بر سطح افقی بدون اصطکاکی حرکت می‌کند. طی حرکت نیرویی وابسته به مکان بر آن وارد می‌شود، که به صورت شکل ۱۵ است. این نیرو، طی تغییر مکان ذره از مبدأ تا $x =$ ۸٫۰m چقدر کار انجام می‌دهد؟




**شکل ۱۵.** مسئلهٔ ۱۰

۱۱. جسمی به جرم ۱۰kg در راستای محور $x$ حرکت می‌کند. تابع شتاب جسم برحسب مکان، به‌صورت شکل ۱۶ است. کارخالص انجام شده روی ذره، طی حرکت آن از $x =$ ۰ تا $x =$ ۸٫۰m چقدر

است؟

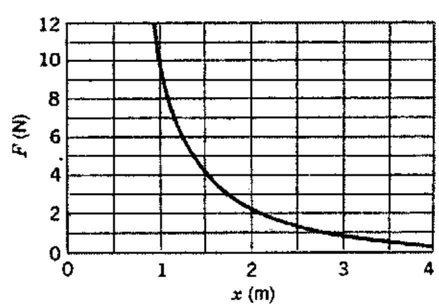



**شکل ۱۶.** مسئلهٔ ۱۱

۱۲. ثابت نیروی فنری ۱۵٫۰ N/cm است. (الف) چقدر کار لازم است تا فنر، از حالت آزاد، به اندازهٔ ۷٫۶۰ mm کشیده شود؟ (ب) چقدر کار لازم است تا فنر را، از این حالت، ۷٫۶۰ mm دیگر بکشیم؟

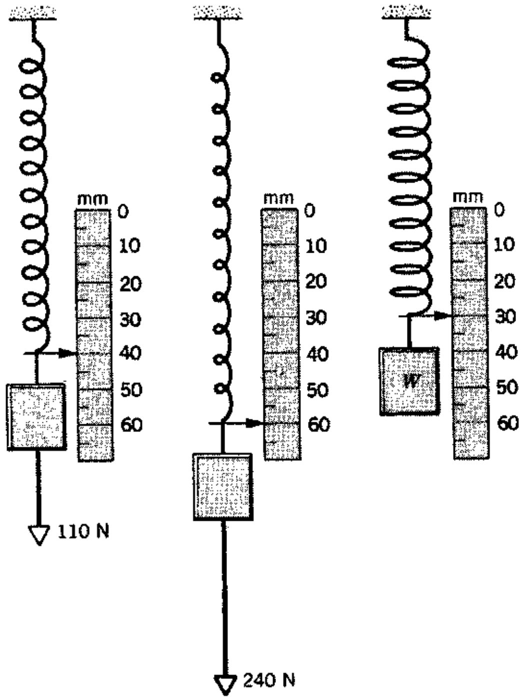
۱۳. نیروی وارد بر جسمی، $F = F_0(x/x_0 - 1)$ است. کار انجام شده طی حرکت جسم از $x = 0$ تا $x = 3x_0$ را (الف) با رسم منحنی $F(x)$ و حساب کردن مساحت زیرمنحنی و (ب) با محاسبهٔ تحلیلی انتگرال به‌دست بیاورید.

۱۴. (الف) کار انجام شده توسط نیروی شکل ۱۷ را، طی تغییر مکان ذره از $x = 1\text{m}$ تا $x = 3\text{m}$، تخمین بزنید. بازه‌ها را کوچکتر کنید و ببینید که تا چه حد می‌توانید به جواب دقیق ۶J نزدیک شوید. (ب) معادلهٔ تحلیلی این منحنی، $F = A/x^2$ است که در آن $A = 9\text{Nm}^2$. کار را با انتگرال‌گیری به‌دست بیاورید.




**شکل ۱۷.** مسئلهٔ ۱۴

۱۵. شکل ۱۸ فنری را نشان می‌دهد که یک شاخص به انتهای آن متصل است، مجاور فنر، خط‌کشی که برحسب میلی‌متر مدرج شده، آویزان است. مطابق شکل. سه وزنهٔ متفاوت را به نوبت از فنر می‌آویزیم. (الف) اگر هیچ وزنه‌ای به فنر آویزان نباشد، شاخص چه عددی را نشان می‌دهد؟ (ب) وزن $W$ چقدر است؟




**شکل ۱۸.** مسئلهٔ ۱۵

**بخش ۷ـ۳ کاری که نیروی متغیر انجام می‌دهد: مورد دوبعدی**

۱۶. با انتگرال‌گیری در امتداد قوس، نشان بدهید که کار گرانش، در مثال ۴ برابر با $-mgh$ است.

۱۷. جسمی به جرم ۰٫۶۷۵kg روی میز بدون اصطکاکی قرار دارد و به ریسمانی متصل است که از سوراخی در میز می‌گذرد؛ جسم با سرعت ثابت روی دایره‌ای افقی به مرکز این سوراخ حرکت می‌کند. (الف) اگر شعاع دایره ۰٫۵۰۰ m و سرعت جسم ۱۰٫۰ m/s باشد، کشش ریسمان چقدر است؟ (ب) مشاهده می‌شود که اگر ۰٫۲۰۰ m دیگر از ریسمان را به درون سوراخ بکشیم، و در نتیجه شعاع دایره را به ۰٫۳۰۰ m برسانیم، کشش ریسمان ۴٫۶۳ برابر می‌شود. کل کاری که ریسمان، طی این کاهش شعاع، روی جسمِ گردان انجام می‌دهد چقدر است؟

**بخش ۷ـ۴ انرژی جنبشی و قضیهٔ کار-انرژی**

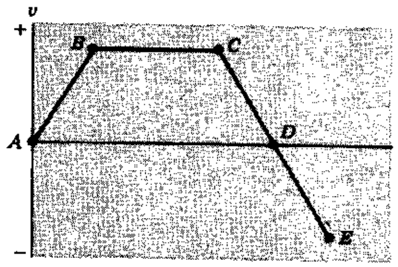
۱۸. انرژی جنبشی هر یک از این اجسام را در سرعتهای مشخص شده حساب کنید. (الف) یک بازیکن فوتبال به جرم ۱۱۰kg و با سرعت ۸٫۱m/s؛ (ب) گلوله‌ای به جرم ۴٫۲g و با سرعت ۹۵۰ m/s؛ ناو هواپیمابر نیمیتس به جرم ۹۱۴۰۰ تن و با سرعت ۳۲٫۰ گره.

۱۹. یک الکترون رسانش در مس، در دمای نزدیک به صفر مطلق، ۴٫۲eV انرژی جنبشی دارد. سرعت آن چقدر است؟

۲۰. پروتونی در یک شتابدهندهٔ خطی شتاب می‌گیرد، در هر مرحلهٔ دستگاه، پروتون در جهت حرکتش شتاب $3.60 \times 10^{15}\text{m/s}^2$

می‌گیرد. اگر پروتون با سرعت اولیهٔ $۲٫۴۰ \times ۱۰^{۷}$m/s به یکی از این مراحل، که طول آن ۳٫۵۰cm است وارد شود (الف) سرعت پروتون در پایان این مرحله و (ب) مقدار انرژی جنبشی‌ای که در اثر این شتاب به انرژی قبلی‌اش افزوده می‌شود. چقدر است؟ جرم پروتون $۱٫۶۷ \times ۱۰^{-۲۷}$kg است. انرژی را برحسب الکترون ولت بیان کنید.

**۲۱.** نیرویی بر ذره‌ای، که روی خط راست حرکت می‌کند، وارد می‌شود. نمودار سرعت‌ـزمان ذره در شکل ۱۹ نشان داده شده است. علامت (مثبت یا منفی) کاری را که نیرو، در هر یک از بازه‌های $AB$، $BC$، $CD$، و $DE$، روی ذره انجام می‌دهد پیدا کنید.




**شکل ۱۹.** مسئلهٔ ۲۱

**۲۲.** برای سفر به ماه، یک موشک ساترن V به جرم $۲٫۹ \times ۱۰^{۵}$kg که حامل یک فضاپیمای آپولو است، باید به سرعت گریز ۱۱٫۲km/s (یعنی ۲۵۰۰۰mi/h) در نزدیکی سطح زمین برسد. سوخت موشک باید حاوی چقدر انرژی باشد؟ آیا عملاً سیستم به همین مقدار انرژی نیاز دارد یا کمتر یا بیشتر؟ چرا؟

**۲۳.** اتومبیلی به وزن ۲۸۰۰lb را در نظر بگیرید. این اتومبیل از چه ارتفاعی باید سقوط کند تا انرژی جنبشی آن برابر با همین انرژی در زمانی باشد که با سرعت ۵۵mi/h حرکت می‌کند؟ آیا جواب به وزن اتومبیل بستگی دارد؟

**۲۴.** اتومبیلی به جرم ۱۱۰۰kg، با سرعت ۴۶km/h در جاده‌ای افقی حرکت می‌کند. راننده طوری ترمز می‌کند که اتومبیل ۵۱kJ انرژی جنبشی از دست می‌دهد. (الف) سرعت اتومبیل در این حالت چقدر است؟ (ب) ترمز باید چقدر دیگر از انرژی جنبشی اتومبیل را بگیرد تا اتومبیل کاملاً متوقف شود؟

**۲۵.** بازیکنی توپ بیسبال را با سرعت ۱۲۰ft/s (یعنی ۳۶٫۶m/s) پرتاب می‌کند. درست پیش از آنکه بازیکن دیگری توپ را، در همان ارتفاع بگیرد، سرعت توپ به ۱۱۰ft/s (یعنی ۳۳٫۵m/s) کاهش یافته است. چقدر انرژی در اثر مقاومت هوا از دست رفته است؟ وزن توپ بیسبال ۹٫۰oz است ($m =$ ۲۵۵g).

**۲۶.** زمین سالی یک بار به دور خورشید می‌گردد. چقدر کار باید بر زمین انجام داد تا نسبت به خورشید ساکن شود؟ برای به‌دست آوردن داده‌های عددی به پیوست ج رجوع کنید، و چرخش زمین به دور محور خودش را در نظر نگیرید.

**۲۷.** پدر و پسری در حال دویدن‌اند. جرم پسر نصف جرم پدر اما انرژی جنبشی‌اش دو برابر انرژی جنبشی پدر است. پدر به اندازهٔ ۱٫۰۰m/s به سرعت خودش اضافه می‌کند و انرژی جنبشی‌اش با انرژی جنبشی پسر برابر می‌شود. سرعت پسر و سرعت اولیهٔ پدر چقدر بوده است؟

**۲۸.** پرتابه‌ای به جرم ۰٫۵۵۰kg با انرژی جنبشی اولیهٔ ۱۵۵۰J از لبهٔ صخره‌ای پرتاب می‌شود؟ نقطهٔ اوج پرتابه ۱۴۰m بالاتر از نقطهٔ پرتاب است. (الف) مؤلفهٔ افقی سرعت پرتابه چقدر است؟ (ب) مؤلفهٔ عمودی سرعت پرتابه، درست پس از پرتاب، چقدر بوده است؟ (ج) در لحظه‌ای در حین پرواز، مؤلفهٔ عمودی سرعت پرتابه ۶۵٫۰m/s می‌شود. در این لحظه، پرتابه چقدر بالاتر، یا پایین‌تر، از نقطهٔ پرتاب است؟

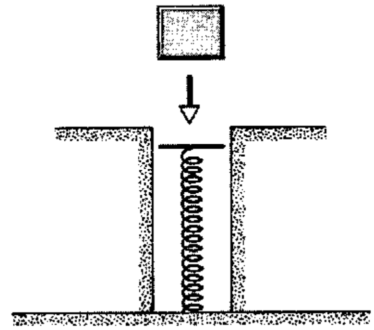
**۲۹.** دنباله‌داری به جرم $۸٫۳۸ \times ۱۰^{۱۱}$kg، با سرعت نسبی ۳۰km/s، به زمین برخورد می‌کند. (الف) انرژی جنبشی دنباله‌دار را برحسب "مگاتن TNT" حساب کنید؛ انفجار ۱ میلیون تن TNT انرژی‌ای برابر با $۴٫۲ \times ۱۰^{۱۵}$J آزاد می‌کند. (ب) قطر حفره‌ای که در اثر یک انفجار بزرگ ایجاد می‌شود، با توان یک سوم انرژی آزاد شده متناسب است، و قطر حفرهٔ حاصل از انفجار ۱ مگاتن TNT برابر با ۱km است. قطر حفرهٔ حاصل از برخورد این دنباله‌دار چقدر است؟ (ممکن است که درگذشته، آثار جوی حاصل از برخورد دنباله‌دارها به زمین، موجب انقراض بسیاری از گونه‌های جانوران و گیاهان شده باشد؛ گمان می‌رود که داینوسورها هم دراثر پیامدهای چنین برخوردی منقرض شده باشند.)

**۳۰.** یک "بشقاب" پلاستیکی چرخان [فریزبی] به جرم ۱۲۵g، با سرعت ۱۲٫۳m/s، از ارتفاع ۱٫۰۶m بالای سطح زمین پرتاب می‌شود. هنگامی که بشقاب به ارتفاع ۲٫۳۲m می‌رسد، سرعت آن ۹٫۵۷m/s می‌شود. (الف) گرانش چقدر کار روی بشقاب انجام داده است؟ (ب) چقدر انرژی جنبشی در اثر مقاومت هوا از دست رفته است؟ چرخش بشقاب را در نظر نگیرید.

**۳۱.** توپی موقع واجهیدن از یک پیاده‌روی بتونی، ۱۵٫۰٪ از انرژی جنبشی‌اش را از دست می‌دهد. این توپ را باید با چه سرعت اولیه‌ای در امتداد قائم از ارتفاع ۱۲٫۴m به طرف پایین پرتاب کرد تا، پس از واجهیدن، دوباره به همان ارتفاع برگردد؟ فرض کنید مقاومت هوا ناچیز است.

**۳۲.** یک توپ لاستیکی که از ارتفاع ۶ft رها شده است چندین بار به زمین می‌خورد و از آن وامی‌جهد؛ در هر برخورد، ۱۰٪ انرژی توپ از دست می‌رود. چند برخورد باید انجام شود تا توپ دیگر نتواند به ارتفاع بالاتر از ۳ft برسد؟

**۳۳.** جسمی به جرم ۲۶۳g روی فنری قائم که ثابت آن $k =$ ۲٫۵۲N/cm است می‌افتد (شکل ۲۰). جسم به فنر می‌چسبد و آن‌را ۱۱٫۸cm فشرده می‌کند تا خودش به حالت سکون لحظه‌ای برسد. در طی فشرده شدن فنر (الف) نیروی گرانش و (ب) فنر چقدر کار انجام می‌دهند؟ (ج) سرعت جسم، درست پیش از برخورد به فنر، چقدر بوده است؟ (د) اگر سرعت اولیهٔ جسم دو برابر شود، بیشترین مقدار فشردگی فنر چقدر می‌شود؟



**شکل ۲۰.** مسئلهٔ ۳۳

**۳۴.** با تعمیم اثبات حالت یک‌بعدی معادلهٔ ۱۹، نشان بدهید که این معادله در حالتهای دو و سه‌بعدی هم درست است.

**بخش ۷ـ۵ توان**

**۳۵.** زنی به جرم 57kg از پلکانی به ارتفاع 4٫5m در مدت 3٫5s بالا می‌رود. توان متوسطی که باید مصرف کند چقدر است؟

**۳۶.** یک دستگاه بالابر، ۱۰۰ نفر اسکی‌باز به وزن متوسط 667N را طی 55٫0s، با سرعت ثابت تا ارتفاع 152m بالا می‌برد. توان خروجی موتور بالابر، به فرض اینکه هیچ اتلاف ناشی از اصطکاکی در کار نباشد، چقدر است؟

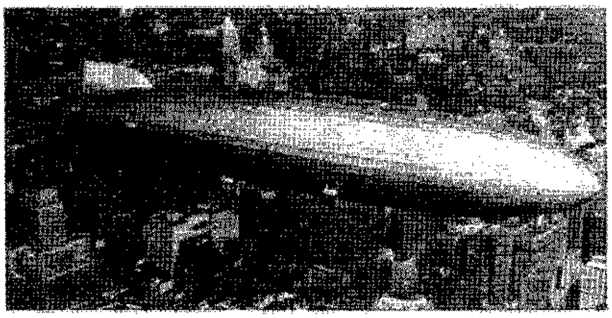
**۳۷.** شناگری با سرعت 0٫22m/s در آب شنا می‌کند. نیروی مقاومت آب، که با حرکت او مخالفت می‌کند، 110N است. شناگر با چه توانی شنا می‌کند؟

**۳۸.** دونده‌ای به جرم 68٫2kg مسافت 7٫04m ابتدای مسابقه را در مدت 1٫60s می‌دود. دونده از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و شتاب او در این مدت ثابت است. سرعت او در پایان 1٫60s چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی‌اش چقدر است؟ (ج) توان متوسط او، طی این 1٫60s، چقدر است؟

**۳۹.** اسبی گاری‌ای را با نیروی 42٫0lb که با زاویهٔ 27٫0° بالای سطح افقی اعمال می‌شود می‌کشد و با سرعت 6٫20mi/h حرکت می‌کند. (الف) اسب در مدت 12٫0min چقدر کار انجام می‌دهد؟ (ب) توان خروجی اسب را، برحسب hp حساب کنید.

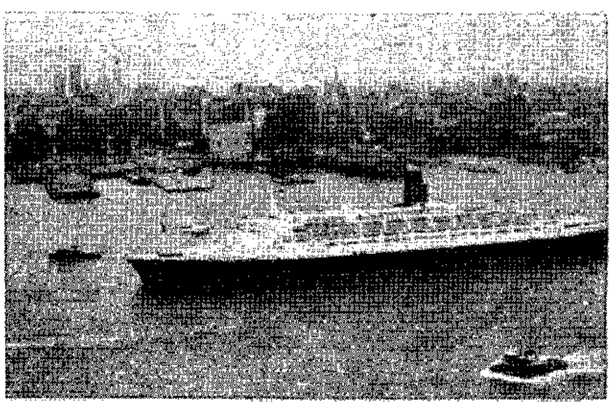
**۴۰.** یک شرکت سازندهٔ اتومبیل می‌گوید که حداکثر توانی که موتوراتومبیلی به جرم 1230kg می‌تواند تحویل بدهد، 92٫4kW است. حداقل زمان لازم برای اینکه این اتومبیل از حالت سکون به سرعت 29٫1m/s (یعنی 65mi/h) برسد چقدر است؟ در یک آزمون، این زمان برابر با 12٫3s اندازه‌گیری شده است. علت اختلاف بین این دو زمان چه می‌تواند باشد؟

**۴۱.** کشتی هوایی هیدنبورگ، شکل ۲۱ بالونی بود محتوی گاز هیدروژن که می‌توانست با استفاده از 4800hp توان موتورهایش، با سرعت ۷۷ گره حرکت کند. نیروی مقاومت هوا (برحسب نیوتون) برای این بالون در این سرعت چقدر است؟



**شکل ۲۱.** مسئلهٔ ۴۱

**۴۲.** توان کشتی مجلل "ملکه الیزابت دوم" (شکل ۲۲) از یک نیروگاه الکتریکی دیزلی جدید تأمین می‌شود، که جایگزین ماشینهای بخار اولیهٔ آن شده است. بیشینهٔ توان خروجی 92MW است که در این توان، کشتی با سرعت 32٫5 گره حرکت می‌کند. در این بیشترین سرعت کشتی، پروانه‌های کشتی چه نیرویی بر آب وارد می‌کنند؟



**شکل ۲۲.** مسئلهٔ ۴۲

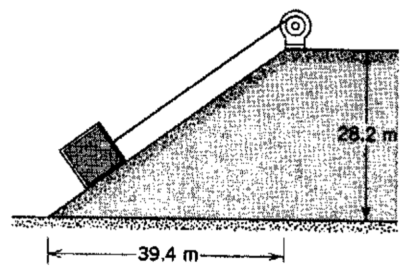
**۴۳.** اتومبیلی به جرم 1600kg، با سرعت 26m/s (یعنی 94km/h) در جاده‌ای افقی حرکت می‌کند. اگر کل نیروهای مقاوم 720N باشد، توان خروجی موتور چند اسب بخار است؟

**۴۴.** در هر دقیقه، $73800 m^3$ آب از آبشاری به ارتفاع 96٫3m به پایین می‌ریزد. فرض کنید ٪58٫0 انرژی جنبشی‌ای که آب در طی سقوط کسب می‌کند، به کمک یک مولد هیدروالکتریکی، به انرژی الکتریکی تبدیل شود. توان خروجی مولد را حساب کنید. (چگالی آب $1000 kg/m^3$ است.)

**۴۵.** فرض کنید میزان مصرف بنزین اتومبیل شما 30mi/gal است. (الف) با 1kWh انرژی، اتومبیل شما چه مسافتی را می‌پیماید؟ (ب) اگر سرعت اتومبیل 55mi/h باشد، آهنگ مصرف انرژی چقدر است؟ گرمای سوختن بنزین 140MJ/gal است.

۴۶. توان موتور تلمبهٔ آبی ۶٫۶hp است. با این تلمبه از چه عمقی می‌توان آب را با آهنگ ۲۲۰gal/min بیرون کشید؟

۴۷. یک جرثقیل قطعهٔ بزرگی ازگرانیت به جرم ۱۳۸۰kg را با سرعت ثابت ۱٫۳۴m/s، از سطح شیبداری بالا می‌کشد (شکل ۲۳). ضریب اصطکاک جنبشی بین گرانیت و سطح شیبدار ۰٫۴۱ است. توان جرثقیل چقدر است؟




شکل ۲۳. مسئلهٔ ۴۷

۴۸. اتومبیلی به وزن ۳۷۰۰lb ($m = ۱۶۸۰$kg) از حالت سکون شروع به حرکت درجاده‌ای افقی می‌کند و، طی ۳۳s، به سرعت ۴۵mi/h (یعنی ۷۲km/h) می‌رسد. (الف) انرژی جنبشی اتومبیل در پایان این ۳۳s چقدر است؟ (ب) توان خالص متوسطی که اتومبیل، طی این ۳۳s، دریافت کرده است چقدر است؟ (ج) با فرض اینکه شتاب اتومبیل ثابت بوده باشد، توان لحظه‌ای آن در پایان این ۳۳s چقدر است؟

۴۹. جسمی به جرم $m$ از حالت سکون به‌طور یکنواخت شتاب می‌گیرد و طی زمان $t_f$ به سرعت $v_f$ می‌رسد. (الف) نشان بدهید که کار انجام شده روی جسم، به‌صورت تابعی از زمان، برحسب $v_f$ و $t_f$ برابر است با

$$W = \frac{1}{2} m \frac{v_f^2}{t_f^2} t^2$$

(ب) توان مصرفی جسم را به‌صورت تابعی از زمان پیدا کنید.

۵۰. نیرویی بر ذره‌ای به جرم ۲٫۸۰kg اثر می‌کند؛ مکان ذره، برحسب زمان، $x = 3t - 4t^2 + t^3$ است، که درآن $x$ برحسب متر و $t$ برحسب ثانیه است. (الف) کار این نیرو، طی ۴٫۰s اول چقدر است؟ (ب) این نیرو در لحظهٔ $t = ۳٫۰$s با چه آهنگی روی ذره کار انجام می‌دهد؟

۵۱. جرم یک آسانسور باری، وقتی کاملاً بار شده باشد، ۱۲۲۰kg است. این آسانسور باید طی ۴۳٫۰s، به‌اندازهٔ ۵۴٫۵m به‌طرف پایین برود. جرم وزنهٔ مقابله ۱۳۸۰kg است. توان خروجی موتور آسانسور، برحسب hp، چقدر است؟ ازکار لازم برای راه انداختن و متوقف کردن آسانسور صرفنظر کنید، یعنی فرض کنید سرعت آسانسور ثابت است.

۵۲. اتومبیلی به جرم $m$، که توان موتور آن مقدار ثابت $P$ است، می‌تواند پس از پیمودن مسافت $x$ از حالت سکون، به سرعت $v$ برسد. نشان بدهید که $v$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$v = \left(\frac{3xP}{m}\right)^{1/3}$$

۵۳. (الف) نشان بدهید که توان خروجی هواپیمایی که با سرعت ثابت $v$ به‌طورافقی پرواز می‌کند متناسب با $v^3$ است. نیروی اصطکاک آئرودینامیکی را $D = bv^2$ بگیرید. (ب) توان موتورها را به چه نسبتی زیاد کنیم تا سرعت هواپیما نسبت به هوا ۲۵٫۰٪ زیاد شود؟

۵۴. یک ماشین تیزکن، چرخی به شعاع ۲۰٫۷cm دارد و در هر ثانیه ۲٫۵۳ دور می‌زند. ابزاری را که باید تیز شود با نیروی ۱۸۰N بر لبهٔ چرخ می‌فشاریم. این ماشین چه توانی دارد؟ ضریب اصطکاک بین ابزار و چرخ ۰٫۳۲ است.

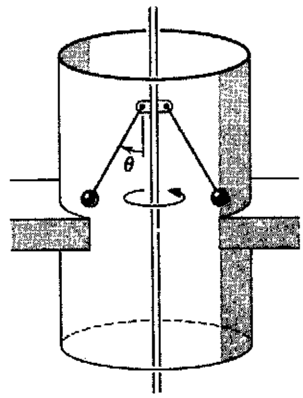
۵۵. یک پله برقی، دو طبقه راکه فاصله‌شان از هم ۸٫۲۰m است به هم مرتبط می‌کند. طول پله برقی ۱۳٫۳m و سرعت حرکت آن در راستای خودش ۶۲٫۰cm/s است. (الف) فرض کنید پله باید هر دقیقه ۱۰۰ نفر، به جرم متوسط ۷۵٫۰kg، را جابه‌جا کند. در این صورت، موتور آن چقدرتوان باید تحویل بدهد؟ (ب) مردی به جرم ۸۳٫۵kg از پله برقی متحرک بالا می‌رود و طی ۹٫۵۰s به طبقهٔ بالا می‌رسد. موتور پله برقی چقدر کار روی او انجام می‌دهد؟ (ج) اگر همین مرد، وسط راه برگردد و به طرف پایین حرکت کند، چنان‌که در ارتفاع ثابتی باقی بماند، آیا موتور روی اوکار انجام می‌دهد؟ اگر می‌دهد، چقدر توان برای این کار مصرف می‌شود؟ (د) آیا راهی (دیگر) به نظرتان می‌رسد که مرد بتواند روی پله برقی راه برود، بی‌آنکه توانی از موتور را مصرف کند؟

۵۶. یک لوکوموتیو ۱٫۵MW، هنگامی که با توان کامل کارمی‌کند، قطار را طی ۶٫۰min از سرعت ۱۰m/s به سرعت ۲۵m/s می‌رساند. (الف) با چشمپوشی از اصطکاک، جرم قطار را محاسبه کنید. (ب) سرعت قطار را در این بازه به‌صورت تابعی از زمان (برحسب ثانیه) به‌دست بیاورید. (ج) نیروی شتابدهنده به قطار را به‌صورت تابعی از زمان، در این بازه، به‌دست بیاورید (د) مسافتی را که قطار در این مدت می‌پیماید حساب کنید.

۵۷. نیروی مقاوم در برابر حرکت اتومبیل ناشی از دو عامل است: اصطکاک جاده، که تقریباً مستقل از سرعت $v$ است، و مقاومت آئرودینامیک، که متناسب با $v^2$ است. برای اتومبیل خاصی به وزن ۱۲۰۰۰N، کل نیروی مقاوم $F$ برابر است با $F = 300 + 1.8v^2$، که در آن $F$ برحسب نیوتون و $v$ برحسب متر بر ثانیه است. موتور چه توانی باید داشته باشد تا بتواند، در سرعت ۸۰km/h، به اتومبیل ۰٫۹۲$m/s^2$ شتاب بدهد؟

۵۸. یک تنظیم‌کنندهٔ سرعت شامل دو گلوله، هر یک به جرم ۲۰۰g، است که با میله‌های صلب و سبک به طول ۱۰٫۰cm به محور قائم چرخانی متصل‌اند (شکل ۲۴). میله‌ها به محور لولا شده‌اند، چنان‌که با چرخش محور، گلوله‌ها هم با آن می‌چرخند و از محور فاصله می‌گیرند. اما اگر زاویهٔ $\theta$ به ۴۵٫۰۰ برسد، کره‌ها به دیوارهٔ استوانه‌ای که سیستم

درون آن می‌چرخد می‌رسند (الف) حداقل آهنگ دوران، برحسب دور بر دقیقه، برای اینکه گلوله‌ها به دیواره برسند چقدر است؟ (ب) اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین کره‌ها و دیواره ۳۵ر۰ باشد، هنگامی که سیستم با سرعت $300\,\text{rev/min}$ می‌چرخد، چقدر توان در اثر مالش گلوله‌ها بر دیواره اتلاف می‌شود؟




شکل ۲۴. مسئلهٔ ۵۸

**بخش ۷ـ۶ چارچوبهای مرجع**

**۵۹.** دو ناظر را در نظر بگیرید که چارچوب یکی به زمین متصل است و چارچوب دیگری، مثلاً به قطاری که با سرعت ثابت $\mathbf{u}$ نسبت به زمین حرکت می‌کند. هر دو ناظر مشاهده می‌کنند که ذره‌ای، که در ابتدا نسبت به قطار ساکن است، با نیروی ثابتی که در مدت زمان $t$ برآن وارد می‌شود، به طرف جلو شتاب می‌گیرد. (الف) نشان بدهید که از دید هر دو ناظر، کاری که نیرو انجام می‌دهد برابر است با تغییر انرژی جنبشی ذره، اما یکی از ناظرها این کمیت را $\frac{1}{2}ma^2t^2$ می‌سنجد و دیگری $\frac{1}{2}ma^2t^2 + maut$. در اینجا $m$ جرم، و $a$ شتاب ذره است، که از دید هر دو ناظر یکی است. (ب) اختلاف کار انجام شده توسط نیروی یکسان از دید دو ناظر را، برحسب اختلاف مسافتِ اثر این نیرو از دید این دو ناظر توضیح بدهید. اختلاف انرژی جنبشی پایانی ذره از دید دو ناظر را برحسب کاری که ذره می‌تواند انجام بدهد تا، نسبت به چارچوب هر ناظر، به حالت سکون برسد توضیح بدهید.

**بخش ۷ـ۷ انرژی جنبشی در سرعتهای زیاد**

**۶۰.** انرژی جنبشی پروتونی را حساب کنید که سرعت آن $2{,}94 \times 10^8\,\text{m/s}$ است. جواب خود را هم برحسب ژول و هم برحسب MeV بیان کنید.

**۶۱.** الکترونی با چنان سرعتی حرکت می‌کند که با آن می‌شود کمربند استوای زمین را طی $1\,\text{s}$ر۰ دور زد. (الف) سرعت این الکترون را، برحسب سرعت نور، بیان کنید. (ب) انرژی جنبشی آن‌را برحسب الکترون‌ولت حساب کنید. (ج) اگر از فرمول کلاسیک برای محاسبهٔ انرژی جنبشی استفاده کنیم، چند درصد خطا خواهیم داشت؟

**۶۲.** سرعت الکترونی $999c$ر۰ است. (الف) انرژی جنبشی آن چقدر است؟ (ب) اگر سرعت آن ۵۰ر۰٪ زیاد شود، انرژی جنبشی آن چند درصد زیاد می‌شود؟

**۶۳.** قضیهٔ کارـانرژی در هر سرعتی درست است. چقدر کار باید انجام داد تا سرعت الکترونی از صفر به (الف) $50c$ر۰، (ب) $99c$ر۰، و (ج) $999c$ر۰ برسد؟

# ۸

# پایستگی انرژی

در فصل ۷ قضیهٔ کار ـ انرژی را بررسی کردیم؛ طبق این قضیه، کار نیروهای وارد برهر ذره برابر است با تغییر انرژی جنبشی ذره. دراین فصل خواهیم دید که کار ردهٔ خاصی از نیروها بر یک سیستم (که می‌تواند پیچیده‌تر از یک ذرهٔ ساده باشد) تنها به حالت اولیه و نهایی سیستم بستگی دارد، نه به مسیر میان حالت اولیه و نهایی. چنین نیروهایی، که **نیروهای پایستار** نامیده می‌شوند، این خاصیت را دارند که می‌توانند در پیکربندی سیستم انرژی ذخیره کنند. انرژی ذخیره شده را **انرژی پتانسیل** می‌نامند. نیروهای دیگر، یعنی **نیروهای ناپایستار**، نمی‌توانند به این طریق انرژی ذخیره کنند.

موضوع اصلی این فصل **پایستگی انرژی** است، که یکی از اصول مهم راهنما در فیزیک است. نشان می‌دهیم که در ذخیره‌سازی، تبدیل، یا انتقال انرژی سیستمهای مکانیکی، کل انرژی ثابت می‌ماند. مطالعه را از سیستمهای مکانیکی بی‌اصطکاک ساده، که در آنها فقط انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نقش دارند، شروع می‌کنیم. بعد سیستمهای شامل اصطکاک و دیگرنیروهای اتلافی را هم وارد می‌کنیم. با تعمیم بیشتر، می‌شود شکلهای دیگر انرژی مثل گرما و انرژی الکترومغناطیسی را هم وارد همین چارچوب کرد و به اصل پایستگی انرژی رسید، که یکی از فراگیرترین و کلی‌ترین قوانین فیزیک است.

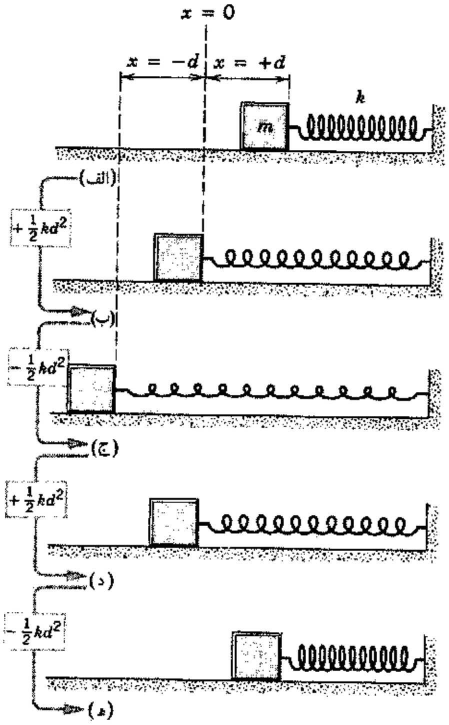
## ۸ـ۱ نیروهای پایستار

برای نشان دادن رفتار سیستمهای پایستار، حرکت جسمی را، تحت تأثیر سه نیروی مجزا، بررسی می‌کنیم: نیروی فنر، $F = -kx$؛ نیروی گرانشی، $F = mg$؛ و نیروی اصطکاک، $F = \mu N$.

۱. نیروی فنر. شکل ۱ جسمی به جرم $m$ را نشان می‌دهد که به فنری با ثابت نیروی $k$ متصل است؛ جسم، بدون اصطکاک، روی سطحی افقی می‌لغزد. در ابتدا، شکل ۱الف، عاملی خارجی فنر را فشرده است، چنان‌که جسم از نقطهٔ $x = 0$ در حالت فنر آزاد، به نقطهٔ $x = +d$ جابه‌جا شده است. عامل خارجی در $t = 0$ یکباره برداشته می‌شود و از آن پس فنر بر جسم کار انجام می‌دهد. با حرکت جسم از $x = +d$ به $x = 0$، فنر، طبق معادلهٔ ۹ فصل ۷، به اندازهٔ $+\frac{1}{2}kd^2$ کار انجام می‌دهد. طبق قضیهٔ کار ـ انرژی، این کار به شکل انرژی جنبشی جسم ظاهر می‌شود.

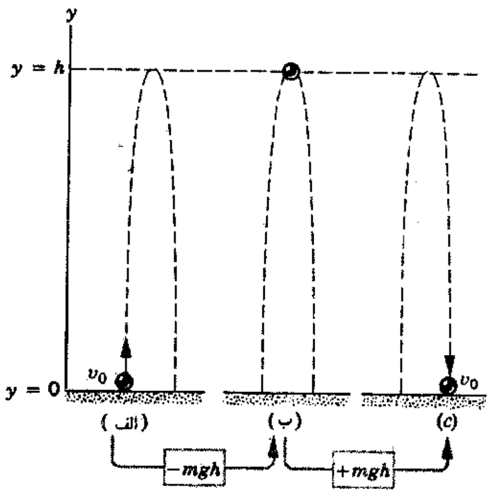
با گذشتن جسم از نقطهٔ $x = 0$، شکل ۱ب، علامت نیروی فنر عوض می‌شود؛ از این پس فنر سرعت جسم را کم می‌کند، و بر آن کار منفی انجام می‌دهد. هنگامی که جسم به سکون لحظه‌ای می‌رسد، شکل ۱ج، مقدار کار منفی‌ای که نیروی فنر بین $x = 0$ و $x = -d$ انجام داده برابر با $-\frac{1}{2}kd^2$ است. به همین ترتیب، از $x = -d$ تا $x = 0$ نیروی فنر $+\frac{1}{2}kd^2$ کار انجام می‌دهد، و از $x = 0$ تا $x = +d$ به اندازهٔ $-\frac{1}{2}kd^2$. در این لحظه جسم در وضعیت اولیه است (شکلهای ۱الف و ۱هـ را با هم مقایسه کنید)، و اگرکارهای انجام شده در چهار بخش جداگانه را با هم جمع کنیم، می‌بینیم که کل کاری که فنر، در یک چرخهٔ کامل روی جسم انجام می‌دهد صفر است.

۲. نیروی گرانش. شکل ۲ سیستمی متشکل از یک توپ را نشان می‌دهد که تحت اثر گرانش زمین قرار دارد. جسم توسط عاملی خارجی به بالا پرتاب می‌شود. این عامل به آن سرعت $v_0$ و در نتیجه انرژی جنبشی $\frac{1}{2}mv_0^2$ می‌دهد. با بالا رفتن توپ، زمین روی آن کار انجام می‌دهد و سرانجام توپ را، در $y = h$، به حالت سکون لحظه‌ای در می‌آورد. کار زمین بر این توپ، هنگام صعود از $y = 0$ تا $y = h$ برابر با $-mgh$ است (نیروی ثابت $mg$ ضربدر مسافت $h$ علامت منفی به خاطر آن است که هنگام صعود توپ، نیرو و جابه‌جایی در خلاف جهت یکدیگرند). قضیهٔ کار ـ انرژی، تغییر انرژی جنبشی، $-\frac{1}{2}mv_0^2$، را به کارِ خالص تنها نیروی موجود (گرانش)، $-mgh$، مربوط می‌کند. با سقوط توپ از $y = h$ به $y = 0$، نیروی گرانش به اندازهٔ $+mgh$ کار انجام می‌دهد؛ بنابراین، مشابه با بخش بالاروندهٔ مسیر، انرژی باید




شکل۱. جسمی در اثر نیروی فنر به طرف چپ حرکت می‌کند و از (الف) $x=+d$ به (ب) $x=0$، و سپس (ج) $x=-d$ می‌رود. بعد به طرف راست حرکت می‌کند و به (د) $x=0$، و سپس (ه) $x=+d$ می‌رود. کار نیروی فنر بین هر دو موقعیت متوالی، در طرف چپ نشان داده شده است. توجه کنید که کل کار نیروی فنر، در یک رفت و برگشت صفر است.

از ۰ افزایش پیدا کند و به $\frac{1}{2}mv_0^2$ برسد. کل کار نیروی گرانش، در این رفت و برگشت، صفر است.




شکل۲. توپی در خلاف جهت گرانش زمین، به بالا پرتاب می‌شود. در (الف) توپ در لحظهٔ پرتاب است؛ در (ب) به نقطهٔ اوج مسیرش رسیده است؛ و در (ج) به ارتفاع اولیه بازگشته است. کار نیروی گرانشی زمین، بین هر دو موقعیت متوالی، در پایین شکل مشخص شده است. توجه کنید که کل کار نیروی گرانش روی توپ، در یک رفت و برگشت صفر است.

۳. نیروی اصطکاک. به عنوان سومین مثال، قرصی به جرم $m$ را در نظر بگیرید که به سر ریسمانی به طول $R$ متصل است. به قرص سرعت اولیهٔ $v_0$ داده می‌شود، و ریسمان قرص را مقید می‌کند که بر دایره‌ای به شعاع $R$ روی سطحی افقی حرکت کند (شکل ۳). این سطح بر قرص نیروی اصطکاک وارد می‌کند. تنها نیرویی که روی قرص کار انجام می‌دهد همین نیروی اصطکاک است، که از سطح وارد می‌شود. این نیرو همواره در خلاف جهت سرعت قرص است؛ بنابراین، کار نیروی اصطکاک روی قرص همواره منفی است. هنگامی که قرص به نقطهٔ شروع حرکتش برمی‌گردد، کار نیروی اصطکاک در این مسیر بسته مطمئناً غیرصفر است؛ کل کار در این مسیر بسته، یک مقدار منفی است. در پایان مسیر بسته، قرص با انرژی جنبشی کمتری به نقطهٔ شروع برمی‌گردد.

به تفاوت میان این سه مثال توجه کنید. در دو مثال اول (نیروی فنر و نیروی گرانش) هنگامی که جسم، پس از یک رفت و برگشت به نقطهٔ شروع بازمی‌گردد، کل کار انجام شده بر آن صفر است (و بنابراین انرژی جنبشی آن تغییر نمی‌کند). در مثال سوم، کل کار نیروی اصطکاک در مسیر بسته مخالف صفر است، و انرژی جنبشی کم می‌شود. این تفاوت اساسی در رفتار این دو نوع نیرو، اولین راه برای تشخیص نیروهای پایستار را به ما نشان می‌دهد:

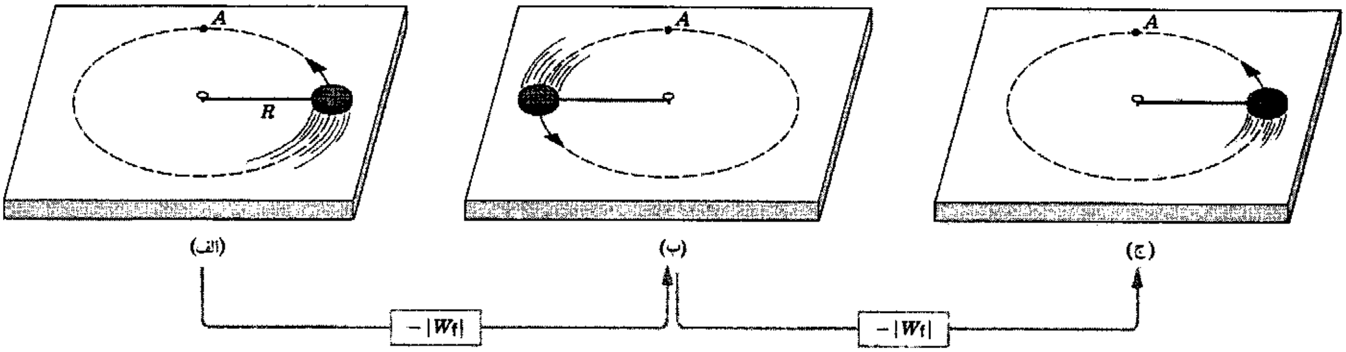
اگر نیرویی که جسمی را حرکت می‌دهد در یک مسیر بسته (رفت و برگشت) هیچ کار خالصی روی جسم انجام ندهد، آن نیرو پایستار است؛ در غیر این‌صورت ناپایستار است.

نیروی بازگردانندهٔ کشسان (نیروی فنر) و نیروی گرانش، دو نمونه از نیروهای پایستارند، و اصطکاک نمونه‌ای از نیروهای ناپایستار است.[1]

راه دیگر تشخیص نیروهای پایستار از نیروهای ناپایستار، بررسی کاری است که نیرو در مسیرهای مختلف، با نقاط شروع و پایان یکسان، روی ذره انجام می‌دهد. مثلاً، کار نیروی فنر بر جسم شکل ۱ را، هنگامی که جسم از $x=+d$ به $x=-d/2$ می‌رود، در راستای دو مسیر (شکل ۴)، به‌دست می‌آوریم: مسیر ۱ به‌طور مستقیم، مسیر ۲ از $x=+d$ تا $x=-d$، و سپس از $x=-d$ تا $x=-d/2$. کار فنر در راستای مسیرهای ۱ و ۲ را، به‌ترتیب، $W_1$ و $W_2$ می‌نامیم.

---

۱. هنگامی که جسمی تحت اثر نیروی اصطکاک حرکت می‌کند، دائماً جوشهای میکروسکوپیک تشکیل و شکسته می‌شوند (بخش ۶ـ۲). وقتی جسم مسیری را که آمده است برمی‌گردد، تغییرات سطح معکوس نمی‌شود؛ بنابراین، نیروی اصطکاک از دیدگاه ماکروسکوپیک مسلماً ناپایستار است. اما نیروهای بین اتمی سطح، که عامل اصطکاک‌اند، نیروهای الکترواستاتیک‌اند، که پایستار هستند (فصل ۳۰). اگر هنگام بازگشت، همهٔ اتمهای جابه‌جا شده را به جای اولشان برمی‌گرداندیم، درمی‌یافتیم که نیروی اصطکاک از دیدگاه ماکروسکوپیک هم پایستار است. چنین فرایندی فوق‌العاده نامحتمل است (در واقع، در برگشت، جوشهای جدیدی تشکیل می‌شود و تعداد دیگری از اتمها هم جابه‌جا می‌شوند)؛ بنابراین، نیروی اصطکاک از لحاظ ماکروسکوپیک ناپایستار است.




**شکل۳.** قرصی روی دایره‌ای درسطح افقی حرکت می‌کند، و سطح اصطکاک دارد. موقعیتهای نشان داده شده در شکل: (الف) یک نقطهٔ شروع دلبخواه، (ب) نیم دور بعد، و (ج) نیم دورِ دیگر. کار نیروی اصطکاک بین هر دو موقعیت متوالی در پایین شکل مشخص است. توجه کنید که کل کار نیروی اصطکاک روی قرص در یک دورِ کامل صفر نیست، بلکه برابر با مقدار منفی $-2|W_f|$ است.

داریم

$$W_1 = \int_{+d}^{-d/2}(-kx)dx = -\frac{1}{2}kx^2\Big|_{+d}^{-d/2}$$
$$= -\frac{1}{2}k[(-d/2)^2 - d^2] = \frac{3}{8}kd^2$$

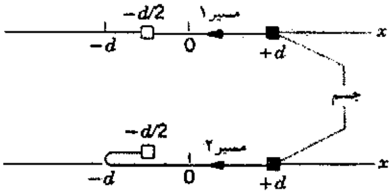
و

$$W_2 = \int_{+d}^{-d}(-kx)dx + \int_{-d}^{-d/2}(-kx)dx$$
$$= -\frac{1}{2}kx^2\Big|_{+d}^{-d} - \frac{1}{2}kx^2\Big|_{-d}^{-d/2}$$
$$= 0 - \frac{1}{2}k[(-d/2)^2 - (-d)^2] = \frac{3}{8}kd^2$$

بنابراین، $W_1 = W_2$، و کار انجام شده در دو مسیر یکسان است.

اما حالا رفتار نیروی اصطکاک ناپایستار سیستم شکل ۳ را در نظر بگیرید. فرض کنید که سیستم از نقطهٔ $A$ شروع به حرکت کند، یک‌بار یک‌چهارم دور بزند، و یک‌بار ۵/۴ دور (و هر دو بار دقیقاً به یک نقطه برسد). اندازهٔ کار (منفی) نیروی اصطکاک، در مسیر دوم پنج برابر مسیر اول است. بنابراین، در مورد نیروی اصطکاک، کار به مسیر بین نقطهٔ شروع و نقطهٔ پایان بستگی دارد.

به‌این ترتیب، به دومین روش تشخیص نیروهای پایستار می‌رسیم:




**شکل۴.** جسمی که درسیستم شکل ۱ داشتیم (و اینجا با مربع مشخص شده است). از طریق دو مسیر متفاوت، از $x = +d$ به $x = -d/2$ می‌رود.

اگر کار نیرویی بر جسمی، از نقطهٔ شروع حرکت تا نقطهٔ پایان، مستقل از مسیر طی شده بین دو نقطه باشد، آن نیرو پایستار است؛ در غیر این‌صورت، نیرو ناپایستار است.

به کمک شکل ۵ می‌شود نشان داد که دو شرط پایستار بودن نیرو با یکدیگر هم‌ارزند. در شکل ۵الف، ذره یک مسیر بسته را می‌پیماید؛ از $a$ به $b$ می‌رود و برمی‌گردد. اگر فقط نیروی پایستار $\mathbf{F}$ بر ذره اثر کند، کل کار انجام شده بر ذره طی این چرخه باید صفر باشد. یعنی

$$W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0$$

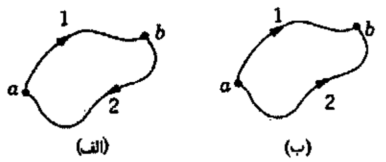
یا

$$\int_{a\ \text{مسیر ۱}}^{b} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \int_{b\ \text{مسیر ۲}}^{a} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0 \qquad (1)$$

که در آن، $W_{ab,1}$ "کار نیرو طی حرکت ذره از $a$ به $b$ در امتداد مسیر ۱" و $W_{ab,2}$ "کار نیرو طی حرکت ذره از $b$ به $a$ در امتداد مسیر ۲" است. معادلهٔ ۱ بیان راضی اولین شرط پایستاری نیروست.

با تغییر جهت حرکت ذره در هر مسیر، جای حدود بالا و پایین انتگرال‌گیری (برای تعیین کار) عوض می‌شود، و جابه‌جایی تغییر علامت می‌دهد؛ بنابراین، کار انجام شده بر ذره از $a$ تا $b$، با کاری که از $b$ تا $a$ انجام می‌شودِ رابطه‌ای دارد به‌صورت

$$\int_{a}^{b} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -\int_{b}^{a} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \qquad \text{(برای هر مسیری)}$$




**شکل۵.** (الف) ذره‌ای، تحت اثر یک نیروی پایستار، مسیر بسته‌ای را می‌پیماید؛ از نقطهٔ $a$ شروع می‌کند، به نقطهٔ $b$ می‌رود، و دوباره به نقطهٔ $a$ برمی‌گردد. (ب) ذره از طریق دو مسیر مختلف، از نقطهٔ $a$ به نقطهٔ $b$ می‌رود.

یا، در مورد مسیر ۲، به‌صورت

$$W_{ab,۲} = -W_{ba,۲} \qquad (۲)$$

از مقایسهٔ معادلات ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که

$$W_{ab,۱} = W_{ab,۲}$$

یا

$$\int_{a \atop \text{مسیر ۱}}^{b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{a \atop \text{مسیر ۲}}^{b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \qquad (۳)$$

و این بیان ریاضی دومین تعریف نیروی پایستار است: کار نیرو برای همهٔ مسیرهای بین $a$ و $b$ یکسان است. بنابراین، تعریف اول مستقیماً به تعریف دوم منجر می‌شود و (با استدلالی مشابه) تعریف دوم هم به تعریف اول می‌انجامد؛ یعنی این دو تعریف با یکدیگر هم‌ارزند.

## ۸ـ۲ انرژی پتانسیل

با معرفی یک مفهوم جدید، انرژی پتانسیل، درک تازه‌ای از تحلیل سیستمهای شامل نیروهای پایستار حاصل می‌شود. چنان‌که خواهیم دید، انرژی پتانسیل را تنها برای نیروهای پایستار، مثلاً نیروی فنر یا نیروی گرانش، می‌توان تعریف کرد؛ انرژی پتانسیل برای نیروهای ناپایستار، مثل نیروی اصطکاک، وجود ندارد.

انرژی پتانسیل که آن‌را با $U$ نشان می‌دهیم، انرژی پیکربندی سیستم است. این انرژی، انرژی ذخیره شده در سیستم به‌خاطر وضعیت یا جهت‌گیری خاص اجزای سیستم است (مثلاً، انرژی ناشی از فشردن سیستم جسم‌ـفنر یا جداکردن اجزای سیستم توپ‌ـزمین از هم).

سیستمی را در نظر بگیرید که در آن فقط یک نیرو وجود دارد، و فرض کنید آن نیرو پایستار باشد. هنگامی که پیکربندی سیستم عوض می‌شود، مثلاً با حرکت اجزای آن، نیروی پایستار کار $W$ انجام می‌دهد. تغییر انرژی پتانسیل، $\Delta U$، متناظر با این تغییر پیکربندی را

$$\Delta U = -W \qquad (۴)$$

تعریف می‌کنیم: تغییر انرژی پتانسیل در این فرایند برابر است با منفی کاری که نیروی پایستار انجام می‌دهد.

هنگامی که پیکربندی سیستم جسم‌ـفنر در شکل ۱، از شکل ۱ د (که در آن فنر در حالت آزاد است) به شکل ۱ هـ (که در آن جسم در حالت سکون لحظه‌ای است) تبدیل می‌شود، نیروی فنر به اندازهٔ $W = -\frac{۱}{۲}kd^۲$ روی جسم کار انجام می‌دهد. بنابراین، تغییر انرژی پتانسیل سیستم $\Delta U = -W = +\frac{۱}{۲}kd^۲$ است. اما از قضیهٔ کارـانرژی می‌دانیم که تغییر انرژی جنبشی جسم $\Delta K = W = -\frac{۱}{۲}kd^۲$ است. پس برای سیستم جسم‌ـفنر نتیجه می‌شود که

$$\Delta U + \Delta K = ۰ \qquad (۵)$$

معادلهٔ ۵ را برای سیستم جسم‌ـفنر به‌دست آوردیم؛ اما این معادله، در واقع، نتیجه‌ای کلی است که مستقیماً از معادلهٔ ۴ و قضیهٔ کارـانرژی، $W = \Delta K$، به‌دست می‌آید. این نتیجه می‌گوید که در سیستمی که همهٔ نیروهای آن پایستار باشند، هر تغییری در انرژی پتانسیل باید با تغییر مخالفی در انرژی جنبشی خنثی شود.

مثلاً، فرض کنید جسم را از $x = +d$، که فنر فشرده شده است، رها می‌کنیم (شکل ۱الف) فنر جسم را می‌راند و به آن شتاب می‌دهد. جابه‌جایی از حالت تعادل کم می‌شود. فنر روی جسم کار مثبت انجام می‌دهد و بنابراین، طبق معادلهٔ ۴، تغییر انرژی پتانسیل منفی می‌شود. با کاهش انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی زیاد می‌شود.

معادلهٔ ۵ را این‌طور هم می‌توان نوشت

$$\Delta(U + K) = ۰ \qquad (۶)$$

تغییر $U + K$، در مجموع، طی این فرایندها صفر است. اگرتغییر حاصل‌جمع $U + K$ صفر باشد، مقدار این حاصل‌جمع باید طی حرکت ثابت بماند. این ثابت را انرژی مکانیکی سیستم پایستار می‌نامیم و آن‌را با $E$ نشان می‌دهیم

$$U + K = E \qquad (۷)$$

معادلهٔ ۷ نمایش ریاضی قانون پایستگی انرژی مکانیکی است. در هر سیستم بسته‌ای که اجزای آن تنها از طریق نیروهای پایستار برهم‌کنش داشته باشند (مثل سیستم جسم‌ـفنر) انرژی می‌تواند از شکل جنبشی به پتانسیل و برعکس تبدیل شود، اما تغییر کل انرژی صفر است: حاصل‌جمع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل ثابت می‌ماند. شکل ۶ نمایشی از تقسیم انرژی بین انرژیهای جنبشی و پتانسیل را برای سیستم جسم و فنر، طی نوسان آزاد آن، نشان می‌دهد.

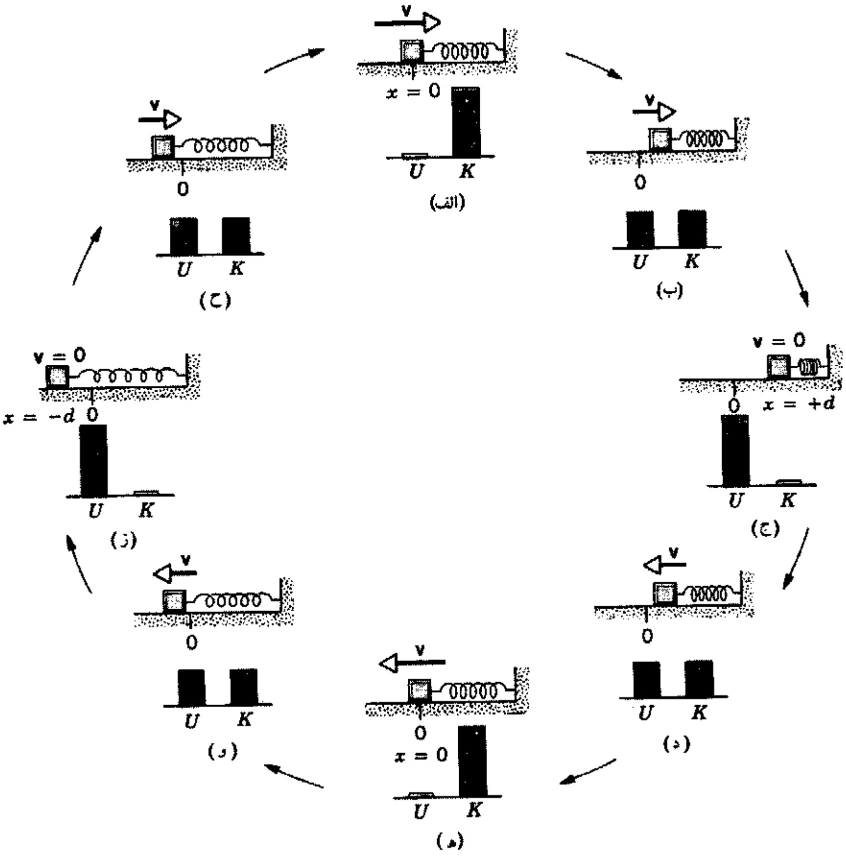
فرض کنید که بیش از یک نیروی پایستار برجسمی اثر کند. مثلاً در شکل ۷، جسم تحت تأثیر دو نیرو، $\mathbf{F}_{\text{نیرو}}$ و $\mathbf{F}_{\text{گرانش}}$، قرار دارد، که هر یک از آنها روی جسم کار انجام می‌دهد. قضیهٔ کارـانرژی، که در استنتاج معادلهٔ ۵ به‌کار رفت، همیشه مربوط به کل کاری است که همهٔ نیروهای وارد بر جسم، در این مورد $W_{\text{گرانش}} + W_{\text{فنر}}$، انجام می‌دهند. با استفاده از معادلهٔ ۴ ($\Delta U = -W$)، به‌کار هر نیرو می‌توانیم یک انرژی پتانسیل وابسته کنیم. بنابراین، معادلهٔ ۵ به این شکل در می‌آید

$$\Delta U_{\text{فنر}} + \Delta U_{\text{گرانش}} + \Delta K = ۰$$

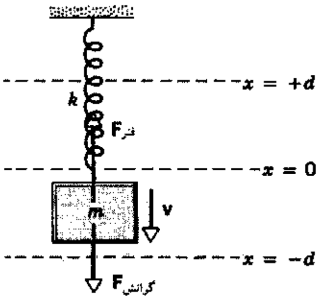
و معادلهٔ ۷ به این شکل

$$U_{\text{فنر}} + U_{\text{گرانش}} + K = E \qquad (۸)$$

انرژی پتانسیل، خاصیتی مربوط به کل سیستم است نه مربوط‌به بخش خاصی از سیستم. مثلاً، این توپ شکل ۲ نیست که انرژی پتانسیل دارد، بلکه سیستم متشکل از زمین+توپ است که چنین




شکل۶. جسمی که به فنری متصل است. روی سطح افقی بدون اصطکاکی نوسان می‌کند. انرژی مکانیکی $E$ سیستم ثابت می‌ماند. اما، طی حرکت سیستم، نحوهٔ تقسیم آن بین انرژیهای جنبشی و پتانسیل تغییر می‌کند. در زمانهای معینی (الف، ه) تمام انرژی به شکل جنبشی است؛ در زمانهای دیگری (ج، ز) تمام انرژی به شکل پتانسیل است؛ و در زمانهایی دیگر (ب، د، و، ح) انرژی به تساوی میان این دو تقسیم شده است.




شکل۷. جسمی به جرم $m$، که از فنری آویزان است، در راستای قائم بین $x = +d$ و $x = -d$ نوسان می‌کند. جسم تحت تأثیر دو نیروی پایستار حرکت می‌کند، نیروی فنر $\mathbf{F}_{\text{فنر}}$ و نیروی گرانش زمین $\mathbf{F}_{\text{گرانش}}$.

خاصیتی دارد. هنگامی که توپ تا ارتفاع $h$ بالا می‌رود، انرژی پتانسیل سیستم به‌اندازهٔ $mgh$ زیاد می‌شود، و انرژی جنبشی سیستم به همین اندازه کم می‌شود. هنگامی که توپ سقوط آزاد می‌کند و به اندازهٔ همین $h$ پایین می‌آید، انرژی پتانسیل سیستم به اندازهٔ $mgh$ کم می‌شود، و انرژی جنبشی سیستم به همین اندازه زیاد می‌شود.

چون جرم توپ خیلی کمتر از زمین است. تقریباً همهٔ افزایش انرژی جنبشی سیستم توپ+زمین به توپ می‌رسد. به همین علت است که گاهی می‌گوییم انرژی پتانسیل توپ، در حالی‌که "انرژی پتانسیل سیستم توپ+زمین" دقیقتر است. در سیستمهای دیگری که جرم ذرات تقریباً

با هم برابر باشد، هر دو ذره می‌توانند، در اثر تغییر انرژی پتانسیل، مقدار قابل‌ملاحظه‌ای انرژی جنبشی به‌دست بیاورند. روش محاسبهٔ چگونگی تقسیم انرژی جنبشی بین دو جسم را در فصل ۹ بررسی خواهیم کرد.

## ۸ـ۳ سیستمهای پایستار یک‌بعدی

با استفاده از معادلهٔ ۴، می‌توانیم تغییر انرژی پتانسیل ذره‌ای را که حرکت آن یک‌بعدی است و فقط یک نیروی پایستار $F(x)$ بر آن وارد می‌شود به‌دست بیاوریم

$$\Delta U = -W = -\int_{x_\circ}^{x} F(x)dx \qquad (۹)$$

ذره از مختصهٔ اولیهٔ $x_\circ$ به مختصهٔ نهایی $x$ می‌رود. چون انرژی پتانسیل فقط به مکان بستگی دارد، تغییر انرژی پتانسیل بین $x_\circ$ و $x$ برابر با $\Delta U = U(x) - U(x_\circ)$ است. نتیجه می‌شود که

$$U(x) - U(x_\circ) = -\int_{x_\circ}^{x} F(x)dx \qquad (۱۰)$$

اگر $x_\circ$ را یک نقطهٔ مرجع دلبخواه بگیریم، می‌توانیم تابع انرژی پتانسیل را پیدا کنیم. انرژی پتانسیل نقطهٔ مرجع را هر مقداری می‌شود گرفت، چون فقط تغییرات انرژی پتانسیل است که معنی دارد. با انتخاب مقدار $U(x_\circ)$ تابع $U(x)$ به‌دست می‌آید که می‌توانیم با استفاده

از آن، مقدار انرژی پتانسیل را در هر نقطه، مثلاً $x_1$ یا $x_2$، حساب کنیم. با تغییر $U(x_0)$، مقادیر $U(x_1)$ و $U(x_2)$ هم به یک اندازه تغییر می‌کنند، اما اختلاف انرژی پتانسیل، $U(x_2) - U(x_1)$، تغییر نمی‌کند. بنابراین، تحلیل رفتار دینامیکی سیستم مستقل از مقداری است که برای $U(x_0)$ انتخاب می‌کنیم.

انتخاب نقطهٔ مرجع برای $U(x)$، از یک نظر شبیه به انتخاب چارچوب مرجع برای انرژی جنبشی است. چنان‌که در بخش ۷ـ۶ دیدیم، ناظرهایی که نسبت به هم حرکت می‌کنند ممکن است مقادیر متفاوتی برای انرژی جنبشی یک جسم به‌دست بیاورند. مقادیری هم که ناظرهای مختلف برای $U$ و $K$، و انرژی مکانیکی $E$ اندازه می‌گیرند ممکن است متفاوت باشند، اما از دیدگاه همهٔ آنها $E$ ثابت، یعنی انرژی مکانیکی پایسته است.

سرعت ذره، طی حرکت آن از $x_0$ به $x$، از $v_0$ به $v$ تغییر می‌کند و طبق قضیهٔ کار‌ـانرژی، کار نیروی $F$ برابر است با

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad (۱۱)$$

از ترکیب معادلات ۹، ۱۰، و ۱۱ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 + U(x) &= \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0) \\ &= E\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

کمیت طرف راست معادلهٔ ۱۲ تنها به مکان اولیهٔ $x_0$ و سرعت اولیهٔ $v_0$ بستگی دارد، که مقادیری معین‌اند؛ پس این مقدار طی حرکت ثابت است. این ثابت، همان انرژی مکانیکی $E$ است. توجه کنید که در این معادله نیرو و شتاب ظاهر نمی‌شوند، و معادله فقط شامل مکان و سرعت است. معادلهٔ ۱۲ شکل دیگری از قانون پایستگی انرژی برای نیروهای پایستار است.

در حل مسائلی که در آنها تنها با نیروهای پایستار سروکار داریم می‌توانیم با استفاده از معادلهٔ ۱۲ به‌جای قوانین نیوتون، کار را ساده‌تر کنیم. البته این معادله هم از قوانین نیوتون به‌دست آمده است، اما یک قدم به جواب نزدیکتر است (به اصطلاح، یک انتگرالِ اول حرکت است). در خیلی از موارد در حل مسائل، بی‌آنکه نیروها را تحلیل کنیم یا قوانین نیوتون را بنویسیم، به دنبال کمیتی می‌گردیم که طی حرکت ثابت بماند؛ در این مورد، آنچه ثابت می‌ماند انرژی مکانیکی است و می‌توانیم از معادلهٔ ۱۲ استفاده کنیم.

در مورد حرکت یک‌بعدی، رابطهٔ بین نیرو و انرژی پتانسیل، معادلهٔ ۹، را می‌شود چنین نوشت

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \qquad (۱۳)$$

برای نشان دادن صحت این رابطه، کافی است $F(x)$ را به همین شکل بالا در معادلهٔ ۹ بگذارید تا ببینید که به یک اتحاد می‌رسید. رابطهٔ ۱۳ دیدگاه دیگری برای توصیف انرژی پتانسیل به‌دست می‌دهد: انرژی پتانسیل تابعی است از مکان که نیرو منفی مشتق آن است. در اینجا نیروی $F$ توسط سیستمی اعمال می‌شود که انرژی پتانسیل آن $U$ است.

حالا طرز محاسبهٔ انرژی پتانسیل را با دو مثال از نیروهای پایستار که در بخش ۸ـ۱ بررسی کردیم، یعنی سیستم جسم‌ـفنر و سیستم توپ‌ـزمین، نشان می‌دهیم.

**نیروی فنر**

نقطهٔ مرجع $x_0$ جسم در سیستم جسم‌ـفنر شکل ۱ را جایی می‌گیریم که در آن فنر به حالت آزاد است ($x_0 = 0$)؛ انرژی پتانسیل سیستم را هم در این وضعیت برابر با صفر انتخاب می‌کنیم [$U(x_0) = 0$]. انرژی پتانسیل سیستم جسم‌ـفنر را می‌توانیم با جایگذاری این مقادیر در معادلهٔ ۱۰، و محاسبهٔ انتگرال به‌ازای نیروی فنر، $F(x) = -kx$، به‌دست بیاوریم

$$U(x) - 0 = -\int_0^x (-kx)dx$$

یا

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (۱۴)$$

اگر جسم به اندازهٔ $x$ از مکان مرجع جابه‌جا شده باشد، انرژی پتانسیل سیستم $\frac{1}{2}kx^2$ می‌شود. $x$ چه مثبت باشد چه منفی، یعنی فنر چه به اندازهٔ $x$ کشیده شود و چه به همین اندازه فشرده، انرژی ذخیره شده یکسان است.

اگر از معادلهٔ ۱۴ مشتق بگیریم، می‌بینیم که معادلهٔ ۱۳ صادق است

$$-\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx = F$$

فرض کنید سیستم جسم‌ـفنر را تا فاصلهٔ $x_m$ از نقطهٔ مرجع می‌کشیم؛ در این حالت، انرژی پتانسیل $\frac{1}{2}kx_m^2$ است. اگر فنر را از این وضعیت، و از حالت سکون، رها کنیم، انرژی مکانیکی سیستم هم $\frac{1}{2}kx_m^2$ می‌شود، زیرا در لحظهٔ رها شدن فنر انرژی جنبشی صفر است. در این مورد، معادلهٔ ۱۲ به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 &= E \\ &= \frac{1}{2}kx_m^2\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

با این رابطه می‌شود سرعت را به‌ازای هر مقدار جابه‌جایی محاسبه کرد

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(x_m^2 - x^2)} \qquad (۱۶)$$

چنان‌که انتظار می‌رود، از معادلهٔ ۱۶ نتیجه می‌شود که سرعت، به‌ازای $x = \pm x_m$، صفر است. در لحظه‌ای که جسم از نقطهٔ مرجع

($x = x_0 = ۰$) می‌گذرد، سرعت $v_0$ برابر است با

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,x_m \qquad (۱۷)$$

انرژی مکانیکی را، هم برحسب سرعت $v_0$ در نقطهٔ مرجع ($E = ۱/۲mv_0^۲$) و هم برحسب حداکثر جابه‌جایی از نقطهٔ مرجع ($E = ۱/۲kx_m^۲$) می‌توان بیان کرد.

## نیروی گرانش

برای سیستم توپ–زمین، مختصهٔ قائم را به‌جای $x$ با $y$ نشان می‌دهیم. نقطهٔ مرجع $y_0 = ۰$ را سطح زمین می‌گیریم، و تعریف می‌کنیم $U(y_0) = ۰$. حالا می‌توانیم انرژی پتانسیل $U(y)$ سیستم را از معادلهٔ ۱۰، با $F(y) = -mg$، محاسبه کنیم

$$U(y) - ۰ = -\int_۰^y -mg\,dy$$

$$U(y) = mgy \qquad (۱۸)$$

توجه کنید که این انرژی پتانسیل، در معادلهٔ ۱۳ صدق می‌کند: $-dU/dy = -mg = F$.

سرعت اولیهٔ توپ در نقطهٔ مرجع $v_0$ است، و از معادلهٔ ۱۲ نتیجه می‌شود که

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ + mgy = \frac{۱}{۲}mv_0^۲ \qquad (۱۹)$$

به کمک این معادله، که با معادلهٔ ۲۵ فصل ۲ هم‌ارز است، می‌توانیم سرعت را به‌ازای هر ارتفاع $y$ به‌دست بیاوریم.

این مثال نشان می‌دهد که تحلیل سیستمهای دینامیکی با رهیافت انرژی و رهیافت نیرو، یعنی به دو زبان کمی متفاوت، چگونه است. رهیافت نیرو برای تحلیل سیستم چنین است: "توپ با سرعت اولیهٔ $v_0$ شروع به حرکت می‌کند. زمین نیروی $-mg$ بر آن وارد می‌کند و به آن شتاب $-g$ می‌دهد. شتاب رو به پایین موجب می‌شود که سرعت کم شود، و سرانجام در ارتفاع $h$ به صفر برسد. از اینجا به‌بعد، توپ درگرانش رو به پایین زمین شروع به حرکت به طرف پایین می‌کند، و با سرعت $-v_0$ به زمین می‌رسد."

رهیافت انرژی چنین است: "توپ با انرژی جنبشی $۱/۲mv_0^۲$ شروع به حرکت می‌کند. با بالا رفتن توپ، انرژی پتانسیل سیستم توپ–زمین زیاد می‌شود، پس انرژی جنبشی باید کم شود تا انرژی مکانیکی $E$ ثابت بماند. در نقطهٔ اوج حرکت، همهٔ انرژی جنبشی به انرژی پتانسیل گرانشی تبدیل شده است. در سقوط توپ، این فرایند معکوس می‌شود، یعنی انرژی پتانسیل دوباره به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود، و هنگامی که توپ به زمین می‌خورد همهٔ انرژی پتانسیل به انرژی جنبشی تبدیل شده است." البته نتیجهٔ هر دو رهیافت یکی است، در اغلب موارد، رهیافت انرژی مفیدتر است و بصیرت بیشتری فراهم می‌کند. همچنین، مواردی وجود دارد که کار کردن با انرژی، که اسکالر است، از کار کردن با نیرو، که بردار است، ساده‌تر است.

---

**مثال ۱.** اتاقک آسانسوری به جرم $m = ۹۲۰\mathrm{kg}$ از سطح خیابان به‌بالاترین طبقهٔ مرکز تجارت جهانی در نیویورک، به ارتفاع $h = ۴۱۲\mathrm{m}$ بالاتر از سطح زمین، حرکت می‌کند. تغییر انرژی پتانسیل اتاقک چقدر است؟

حل: دقیقترگفته باشیم، البته منظورمان تغییر انرژی پتانسیل سیستم اتاقک–زمین است. از معادلهٔ ۱۸ داریم

$$\Delta U = mg\,\Delta y = mgh = (۹۲۰\mathrm{kg})(۹{,}۸\mathrm{m/s^۲})(۴۱۲\mathrm{m})$$
$$= ۳{,}۷ \times ۱۰^۶\mathrm{J} = ۳{,}۷\mathrm{MJ}$$

این مقدار تقریباً $۱\mathrm{kWh}$ است؛ شرکت برق بهای انرژی الکتریکی را برحسب همین "واحد" با مشتریانش حساب می‌کند.

**مثال ۲.** فنر یک تفنگ فنری به اندازهٔ $d = ۳{,}۲\mathrm{cm}$ از حالت آزاد خود فشرده شده است؛ گویی به جرم ($m = ۱۲\mathrm{g}$) در لوله قرار دارد. اگر تفنگ شلیک شود، گوی با چه سرعتی از لوله خارج می‌شود؟ ثابت نیروی فنر، $k$، برابر با $۷{,}۵\mathrm{N/cm}$ است. اصطکاک ناچیز است و لولهٔ تفنگ افقی است.

حل: می‌توانیم مستقیماً معادلهٔ ۱۲ را به‌کار ببریم؛ مکان اولیهٔ فنر $x_0 = d$، و سرعت اولیهٔ گوی $v_0 = ۰$ است. در حالت نهایی فنر در حالت آزاد است ($x = ۰$) و گوی با سرعت $v$ حرکت می‌کند. پس

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ + ۰ = ۰ + \frac{۱}{۲}kd^۲$$

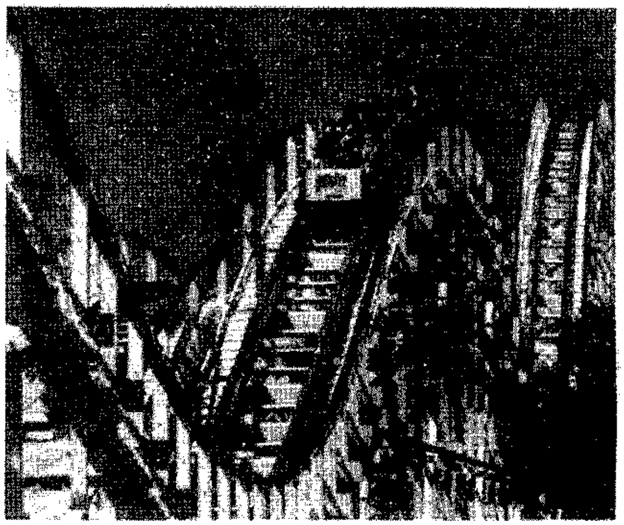
از این معادله $v$ را به‌دست می‌آوریم

$$v = d\sqrt{\frac{k}{m}} = (۰{,}۰۳۲\mathrm{m})\sqrt{\frac{۷۵۰\,\mathrm{N/m}}{۱۲ \times ۱۰^{-۳}\mathrm{kg}}} = ۸{,}۰\,\mathrm{m/s}$$

**مثال ۳.** یک واگن تفریحی (شکل ۸) پر از مسافر، به آرامی به ارتفاع $y = ۲۵\mathrm{m}$ می‌رود، و از آنجا به طرف پایین شتاب می‌گیرد. با چشمپوشی از اصطکاک سیستم، حساب کنید که این واگن با چه سرعتی به پایین مسیر می‌رسد؟

حل: در نگاه اول، به نظر می‌رسد حل مسئله غیرممکن باشد، زیرا هیچ چیزی دربارهٔ شکل مسیر واگن نمی‌دانیم. اما در غیاب اصطکاک، ریل کاری روی واگن انجام نمی‌دهد؛ تنها نیرویی که روی واگن کار انجام می‌دهد گرانش است. انرژی مکانیکی در بالاترین نقطهٔ مسیر، که آن‌را با $E_t$ نشان می‌دهیم

$$E_t = U_t + K_t = mgy + ۰$$



شکل۸. وسیله‌ای برای تبدیل انرژی پتانسیل گرانشی به انرژی جنبشی.

که در آن $y = ۰$ را پایین‌ترین نقطهٔ مسیر گرفته‌ایم. هنگامی که واگن به پایین‌ترین نقطهٔ مسیر می‌رسد، انرژی مکانیکی، $E_{\rm b}$، برابر است با

$$E_{\rm b} = U_{\rm b} + K_{\rm b} = ۰ + \frac{۱}{۲}mv^{۲}$$

مرجع $U$ را چنان گرفته‌ایم که در $y = ۰$ داشته باشیم $U = ۰$ پایستگی انرژی ایجاب می‌کند که $E_{\rm t} = E_{\rm b}$ باشد. پس

$$mgy = \frac{۱}{۲}mv^{۲}$$

از این معادله $v$ را به‌دست می‌آوریم:

$$v = \sqrt{۲gy} = \sqrt{(۲)(۹{,}۸{\rm m/s^{۲}})(۲۵{\rm m})} = ۲۲{\rm m/s}$$

اگر جسمی از ارتفاع ۲۵m رها شود و در راستای قائم سقوط کند هم با همین سرعت به زمین می‌رسد. ریل اندازهٔ سرعت واگن "افتادن" را تغییر نمی‌دهد؛ فقط جهت حرکت را تغییر می‌دهد. توجه کنید که این نتیجه مستقل از جرم واگن و محتویات آن است.

با گذشتن واگن از نقاط پست و بلند مسیر، سرعت آن زیاد و کم می‌شود. تا آنجا که هیچ نقطه‌ای از مسیر از نقطهٔ اولیه بلندتر نباشد، سیستم انرژی مکانیکی کافی دارد که از تپه‌های بین راه بگذرد و به نقطهٔ پایان برسد.

مزیت روش انرژی بر روش نیرو در این مسئله، کاملاً روشن است. برای استفاده از قوانین نیوتون باید شکل دقیق مسیر را بدانیم و تازه باید مؤلفه‌های نیرو و شتاب را در هر نقطه‌ای حساب کنیم. این کار می‌تواند کار بسیار مشکلی باشد. در عوض، با استفاده از قوانین نیوتون، اطلاعات بیشتری نسبت به روش انرژی به‌دست می‌آید، از جمله مدتی که طول می‌کشد تا واگن به پایین مسیر برسد.

## ۸ـ۴ سیستمهای پایستار یک‌بعدی: حلِ کامل

هدف از تحلیل سیستمهای مکانیکی، معمولاً این است که حرکت ذرات را برحسب زمان توصیف کنیم. در فصلهای ۵ و ۶ نحوهٔ حل این مسئله، با استفاده از قوانین نیوتون، را نشان دادیم؛ این روش را روش دینامیکی می‌نامیم. روش دیگری وجود دارد، که گاه مفیدتر هم هست. این روش، روش انرژی است که دراین بخش دربارہ‌اش صحبت می‌کنیم.

معادلهٔ ۱۲ رابطهٔ میان مختصه و سرعت یک حرکت یک‌بعدی است در حالتی که نیرو فقط به مکان بستگی داشته باشد. (در یک‌بعد، هر نیرویی که فقط به مکان بستگی داشته باشد حتماً پایستار است؛ در دو یا سه‌بعد، چنانکه در بخش ۸ـ۵ خواهیم دید، الزاماً چنین نیست.) در طی وصول به معادلهٔ ۱۲، نیرو و شتاب حذف شده‌اند. برای اینکه این تحلیل کامل شود، باید سرعت را هم حذف کنیم تا مکان به‌صورت تابعی از زمان به‌دست بیاید.

برای انجام این کار، از معادلهٔ ۱۲ شروع می‌کنیم

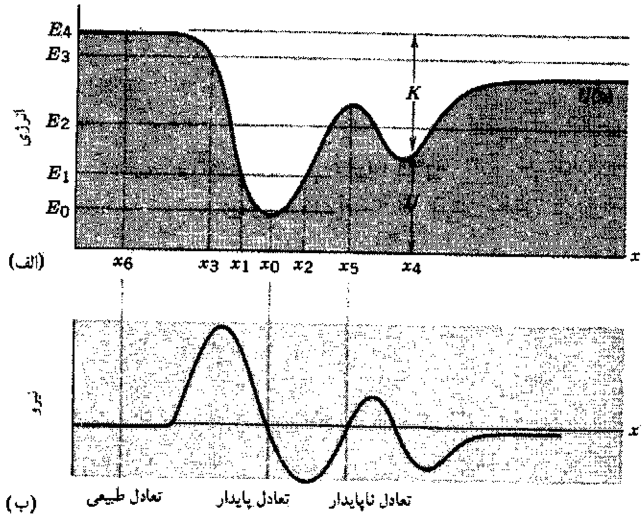
$$U(x) + \frac{۱}{۲}mv^{۲} = E$$

از این رابطه $v$ را به‌دست می‌آوریم

$$v = \pm\sqrt{\frac{۲}{m}[E - U(x)]} \qquad (۲۰)$$

در این رابطه، $U(x)$ انرژی پتانسیل متناظر با نیرویی است که در سیستم عمل می‌کند، و $E$ انرژی مکانیکی (ثابت)ای است که به سیستم داده می‌شود. از معادلهٔ ۲۰ معلوم می‌شود که، به‌ازای یک مقدار معین $E$، حرکت به ناحیه‌هایی از محور $x$ محدود می‌شود که در آنها $E \geq U(x)$ باشد. یعنی، سرعت نمی‌تواند موهومی باشد و انرژی جنبشی نمی‌تواند منفی باشد، پس $[E - U(x)]$ باید بزرگتر از یا مساوی با صفر باشد. به‌علاوه، با رسم منحنی $U(x)$ برحسب $x$ می‌توانیم توصیف کیفی خوبی از انواع ممکن حرکت به‌دست بیاوریم. این توصیف مبتنی است بر اینکه سرعت متناسب با جذر تفاضل $E$ و $U$ است.

به عنوان مثال، تابع انرژی پتانسیل شکل ۹الف را در نظر بگیرید. (اگرچه این تابع شبیه به مقطع مسیر واگن تفریحی است، اما به‌یاد داشته باشید که نمایندهٔ انرژی پتانسیل سیستم پایستاری است که حرکت در آن منحصر به یک‌بعد است. واگن تفریحی‌ای که روی ریل حرکت می‌کند، حرکتی دوبعدی یا سه‌بعدی دارد.) لازمهٔ واقعی بودن حرکت این است که $E \geq U(x)$ باشد؛ پس کمترین انرژی مکانیکی ممکن $E_۰$ است. به‌ازای این مقدار انرژی $E = E_۰ = U$ است، و انرژی جنبشی باید صفر باشد. یعنی ذره باید در نقطهٔ $x_۰$ ساکن باشد. اگر انرژی سیستم را کمی بیشترکنیم، و به $E_۱$ برسانیم، ذره فقط می‌تواند بین $x_۱$ و $x_۲$ حرکت کند. با حرکت ذره از $x_۰$، به‌سوی $x_۱$ یا $x_۲$، سرعت آن کم می‌شود. در $x_۱$ یا $x_۲$، ذره می‌ایستد و جهت حرکت آن




شکل۹. (الف) یک تابع انرژی پتانسیل $U(x)$. (ب) نیروی متناظر با این انرژی پتانسیل.

معکوس می‌شود. به همین دلیل، دو نقطهٔ $x_1$ و $x_2$ را نقاط بازگشت حرکت می‌نامند. در انرژی $E_2$، چهار نقطهٔ بازگشت وجود دارد و ذره در یکی از دو درهٔ پتانسیل نوسان می‌کند. در انرژی $E_3$، فقط یک نقطهٔ بازگشت وجود دارد، که $x_3$ است. اگر ذره در ابتدا در حال حرکت در جهت منفی $x$ باشد، در نقطهٔ $x_3$ می‌ایستد و از آن پس در جهت مثبت $x$ حرکت خواهد کرد. به‌ازای انرژیهای بیش از $E_4$، نقطهٔ بازگشتی وجود ندارد، جهت حرکت ذره همواره ثابت می‌ماند. اندازهٔ سرعت ذره، با توجه به مقدار انرژی پتانسیل در هر نقطه، تغییرمی‌کند؛ چنانکه در شکل برای نقطهٔ $x_4$ نشان داده شده است، انرژی جنبشی در هر نقطه عبارت است از اختلاف انرژی مکانیکی (مثلاً $E_4$ در شکل ۹الف) با انرژی پتانسیل $U(x)$ درآن نقطه.

در نقطه‌ای که $U(x)$ کمینه باشد، مثلاً در $x = x_0$، شیب منحنی صفر است، بنابراین نیرو هم صفر می‌شود؛ یعنی $F(x_0) = -(dU/dx)_{x=x_0} = 0$. ذره‌ای که در ابتدا در این نقطه ساکن باشد، ساکن باقی خواهد ماند. علاوه بر این، اگر ذره را کمی، به هر طرف، جابه‌جا کنیم، نیرو، $F(x) = -dU/dx$، می‌خواهد که آن‌را برگرداند؛ بنابراین، ذره حول نقطهٔ تعادل نوسان خواهد کرد. به همین دلیل، این نقطهٔ تعادل را نقطهٔ تعادل پایدار می‌نامند. شکل ۹ب نیروی $F(x)$ متناظر با انرژی پتانسیل $U(x)$ را نشان می‌دهد. اگر ذره کمی به طرف چپ $x_0$ برود (یعنی به $x$های کوچکتر)، نیرو مثبت می‌شود و ذره را به‌سوی $x$های بزرگتر می‌راند (یعنی دوباره به طرف $x_0$ برمی‌گرداند). اگر ذره به طرف راست $x_0$ برود، نیروی وارد بر ذره منفی می‌شود و باز هم آن‌را به طرف $x_0$ می‌راند.

در نقطه‌ای که $U(x)$ بیشینه باشد هم، مثلاً در $x = x_5$، شیب منحنی صفر است و نیرو صفر می‌شود؛ یعنی $F(x_5) = -(dU/dx)_{x=x_5} = 0$ است. ذره‌ای که در ابتدا در این نقطه ساکن باشد، ساکن می‌ماند. اما اگر ذره، حتی خیلی کم، از این نقطه جابه‌جا شود، نیروی $F(x)$ آن‌را از نقطهٔ تعادل دورتر می‌کند به همین دلیل، چنین نقطهٔ تعادلی را نقطهٔ تعادل ناپایدار می‌نامند. اگر ذره، در شکل ۹ب، از نقطهٔ متناظر با $x_5$ به طرف راست برود (به طرف $x$های بزرگتر) نیروی مثبتی ایجاد می‌شود که آن‌را به طرف $x$های باز هم بزرگتر می‌راند.

در بازه‌ای که $U(x)$ درآن ثابت باشد، مثلاً در اطراف $x = x_6$، شیب منحنی صفر است، پس نیرو هم صفر می‌شود؛ یعنی، $F(x_6) = -(dU/dx)_{x=x_6} = 0$. چنین بازه‌ای را بازهٔ تعادل خنثی می‌نامند، زیرا اگر ذره را کمی جابه‌جا کنیم، هیچ نیروی دافعه یا بازگرداننده‌ای برآن وارد نمی‌شود.

از این بحث روشن می‌شود که با دانستن تابع انرژی پتانسیل در ناحیه‌ای از محور $x$ که ذره در آن حرکت می‌کند، می‌توانیم اطلاعات زیادی دربارهٔ حرکت جسم به‌دست بیاوریم.

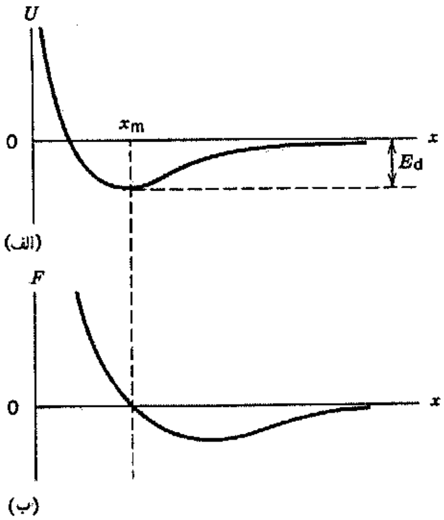
---

**مثال ۴.** تابع انرژی پتانسیل نیروی بین اتمهای یک مولکول دو اتمی را (تقریباً) می‌توان چنین نوشت

$$U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^{6}}$$

در این رابطه، $a$ و $b$ دو ثابت مثبت‌اند و $x$ فاصلهٔ بین دو اتم است. (الف) فاصلهٔ دو اتم در حالت تعادل، (ب) نیروی بین دو اتم، و (ج) حداقل انرژی لازم برای شکستن مولکول (یعنی برای اینکه اتمها از حالت تعادل به موقعیت $x = \infty$ بروند) چقدر است؟

حل: (الف) شکل ۱۰الف $U(x)$ را به‌صورت تابعی از $x$ نشان




شکل۱۰. مثال ۴. (الف) انرژی پتانسیل و (ب) نیروی بین اتمهای یک مولکول دواتمی به‌صورت تابعی از فاصلهٔ $x$ بین دو اتم. توجه کنید که انرژی پتانسیل را به‌ازای فاصلهٔ بی‌نهایت اتمها از هم صفر گرفته‌ایم.

می‌دهد. تعادل در نقطهٔ $x_m$ حاصل می‌شود، که در آن $U(x)$ کمینه می‌شود. این نقطه از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=x_m} = 0$$

یعنی

$$\frac{-12a}{x_m^{13}} + \frac{6b}{x_m^{7}} = 0$$

یا

$$x_m = \left(\frac{2a}{b}\right)^{1/6}$$

(ب) با استفاده از معادلهٔ ۱۳، نیروی متناظر با این انرژی پتانسیل به‌دست می‌آید

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^{6}}\right) = \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^{7}}$$

شکل ۱۰ب نمودار نیرو را برحسب فاصلهٔ بین اتمها نشان می‌دهد. در جایی‌که نیرو مثبت باشد (از $x = 0$ تا $x = x_m$)، اتمها یکدیگر را دفع می‌کنند (نیرو درجهت افزایش $x$ است). در جایی‌که نیرو منفی باشد (از $x = x_m$ تا $x = \infty$)، اتمها یکدیگر را جذب می‌کنند (نیرو در جهت کاهش $x$ است). در $x = x_m$، نیرو صفر است؛ این یک نقطهٔ تعادل است، این تعادل پایدار است.

(ج) حداقل انرژی لازم برای شکستن مولکول به اتمهایش را انرژی تفکیک، $E_d$، می‌نامند. از منحنی انرژی پتانسیل در شکل ۱۰الف، نتیجه می‌شود که اگر $E \geq 0$ باشد، اتمها را می‌توان تا $x = \infty$، متناظر با $U = 0$، از هم جدا کرد. حداقل انرژی لازم $E = 0$ است، یعنی حالتی که اتمها در حالت نهایی‌شان بینهایت از هم دور $(U = 0)$ و ساکن هستند $(K = 0)$. در حالت تعادل مولکول، همهٔ انرژی به شکل پتانسیل است، پس (شکل ۱۰الف) خواهیم داشت $E = U(x_m)$ که کمیتی منفی است. مقدار انرژی‌ای که باید به مولکول، در حالت تعادلش، بدهیم تا انرژی آن از این مقدار منفی به صفر برسد، همان است که آن‌را انرژی تفکیک $E_d$ نامیدیم. پس،

$$U(x_m) + E_d = 0$$

یا

$$E_d = -U(x_m) = -\frac{a}{x_m^{12}} + \frac{b}{x_m^{6}}$$

و با جایگذاری مقدار $x_m$ خواهیم داشت

$$E_d = \frac{b^2}{4a}$$

$E_d$ کمیتی مثبت است، و باید هم باشد. این انرژی را می‌توانیم با انجام کار خارجی به مولکول بدهیم، مثلاً با استفاده از نیروهای الکتریکی، یا با زیاد کردن انرژی جنبشی یکی از اتمهای مولکول نسبت به دیگری.

## جواب تحلیلی برای $x(t)$ (اختیاری)

تابع $x(t)$ می‌تواند توصیف کاملی از حرکت یک‌بعدی ذره به‌دست بدهد. این تابع، مکان $x$ ذره را در همهٔ زمانهای $t$ تعیین می‌کند. برای پیدا کردن $x(t)$، کار را از معادلهٔ ۲۰ شروع می‌کنیم. این معادله را چنین می‌نویسیم

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}$$

یا

$$\frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} = dt \qquad (21)$$

از دو طرف این معادله، بین مکان اولیه ($x = x_0$ در $t = t_0$) تا مکان دلبخواه $x$ در زمان $t$، انتگرال می‌گیریم. نتیجه می‌شود که

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} = \int_{t_0}^{t} dt = t - t_0 \qquad (22)$$

با محاسبهٔ انتگرال طرف چپ معادلهٔ ۲۲، علی‌الاصول می‌توانیم معادلهٔ حاصل را حل کنیم و $x(t)$ را به‌دست بیاوریم.

در معادلهٔ ۲۲، علامت جلوی رادیکال بستگی به این دارد که v در جهت مثبت $x$ است یا در جهت منفی $x$. با تغییر v در طی حرکت، ممکن است لازم شود که انتگرال‌گیری را برای بخشهای مختلف حرکت جداگانه انجام بدهیم.

در بعضی موارد، می‌شود انتگرال معادلهٔ ۲۲ را محاسبه کرد و یک جواب تحلیلی برای $x(t)$ به‌دست آورد. در موارد دیگر، ممکن است راحت‌تر باشد که با استفاده از کامپیوتر مسئله را به‌صورت عددی حل کنیم؛ این را در بخش بعد نشان می‌دهیم. در اینجا جواب تحلیلی را برای ذره‌ای به جرم $m$ که در یک بعد حرکت می‌کند، و فنری با ثابت نیروی $k$ برآن نیرو وارد می‌کند، به‌دست می‌آوریم. در چنین مواردی، $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ است. فرض کنید که در $t = 0$، ذره در $x = x_0$ است، و سرعت آن $v = 0$ است. پس انرژی مکانیکی، $E$، طبق معادلهٔ ۱۲ برابر با $\frac{1}{2}kx_0^2$ است. در این مورد، معادلهٔ ۲۲ به‌صورت زیر در می‌آید

$$\sqrt{\frac{m}{k}}\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\pm\sqrt{x_0^2 - x^2}} = t$$

این انتگرال، به شکل استانداردی است که جواب آن در جدولهای انتگرال یافت می‌شود

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

در مورد مسئلهٔ ما معلوم می‌شود که

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{x_0^2-x^2}} = -\cos^{-1}\left(\frac{x}{x_0}\right)\Big|_{x_0}^{x} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

این نتیجه را، پس از کمی عملیات، می‌شود چنین نوشت

$$x(t)=x_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

حرکت یک‌بعدی ذره‌ای که تحت تأثیر نیروی فنر حرکت می‌کند، سینوسی است. به تجربه می‌دانیم که این حرکت نوسانی است (یعنی، ذره روی یک مسیر می‌رود و برمی‌گردد)؛ این نتیجه نشان می‌دهد که نوسان سینوسی است. حرکت نوسانی را، به‌صورت کلی‌تر، در فصل ۱۵ بررسی خواهیم کرد؛ در آنجا همین نتیجه را برای $x(t)$ با استفاده از قوانین نیوتون هم به‌دست خواهیم آورد.

## حل عددی

قبلاً در مورد نیروی وابسته به زمان (بخش ۶-۶) یا وابسته به سرعت (بخش ۶-۷) روشی عددی برای حل معادلهٔ حرکت ارائه کردیم. در مورد نیروهای وابسته به زمان هم می‌توانیم چنین روشی را به کار بگیریم. عملیاتی که در اینجا به آن می‌پردازیم مبتنی بر قوانین نیوتون است نه روشهای انرژی.

فرض کنید نیروی $F(x)$ بر ذره‌ای به جرم $m$ وارد شود. در $t=0$، ذره در $x_0$ واقع شده و سرعت آن $v_0$ است. می‌خواهیم بدانیم که حرکت حاصل چگونه است، یعنی می‌خواهیم $x(t)$ و $v(t)$ را در همه زمانها داشته باشیم.

حرکت را به رشته‌ای از بازه‌های زمانی کوچک $\delta t$ تقسیم می‌کنیم. هر بازه آنقدر کوچک است که شتاب را در سراسر آن می‌شود ثابت گرفت. (در بازه‌ای که به قدر کافی کوچک باشد، $x$ چندان تغییری نمی‌کند؛ پس $F(x)$ تقریباً ثابت می‌ماند، و $a=F/m$ هم همین‌طور.)

در بازهٔ اول، که از $t=0$ تا $t=\delta t$ است، شتاب برابر با مقدار اولیهٔ $a_1=F(x_0)/m$ است. (در اینجا شاخصهای زیر حروف نشاندهندهٔ شمارهٔ بازهٔ زمانی‌اند و کمیت مربوط را در پایان آن بازه مشخص می‌کنند. بنابراین، $v_2$ یعنی سرعت در پایان بازهٔ دوم.) حالا به‌راحتی می‌توانیم معادلات سینماتیکی حرکت با شتاب ثابت را برای هر بازه به‌کار ببریم. معادلهٔ ۱۵ فصل ۲ سرعت در پایان بازهٔ اول را می‌دهد

$$v_1=v_0+a_1\,\delta t$$

معادلهٔ ۱۹ فصل ۲ هم مکان در پایان بازهٔ اول را می‌دهد

$$x_1=x_0+v_0\,\delta t+\frac{1}{2}a_1(\delta t)^2$$

با استفاده از این مکان جدید ($x_1$)، شتاب (تقریباً ثابت) ذره در بازهٔ دوم، $a_2=F(x_1)/m$، را به‌دست می‌آوریم؛ و بعد معادلات شتاب ثابت را برای بازهٔ دوم می‌نویسیم

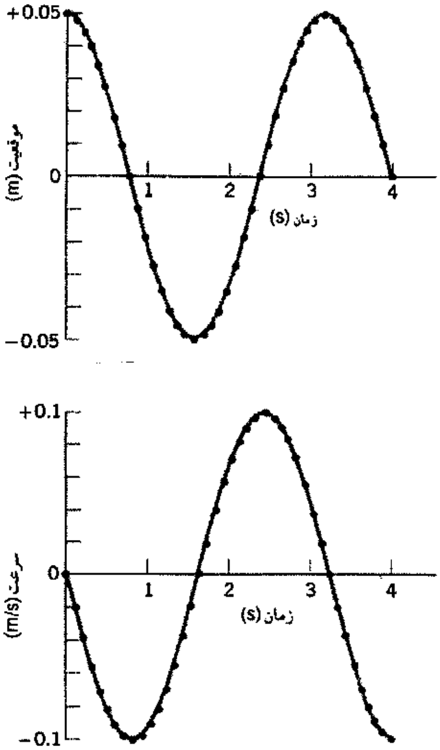
$$v_2=v_1+a_2\delta t$$

و

$$x_2=x_1+v_1\delta t+\frac{1}{2}a_2(\delta t)^2$$

این عملیات را می‌توانیم، برای هر چند بازه که بخواهیم، دنبال کنیم. هر چه بازهٔ $\delta t$ را کوچکتر بگیریم، نتیجهٔ محاسبات دقیقتر می‌شود.

مثلاً، نیروی فنر $F(x)=-kx$ با $k=9.6\,\mathrm{N/m}$ را در نظر بگیرید که بر ذره‌ای به جرم $m=2.5\,\mathrm{kg}$ وارد می‌شود. فرض کنید که ذره در $t=0$، از نقطهٔ $x_0=0.5\,\mathrm{m}$ و با سرعت $v_0=0$، شروع به حرکت کند. شکل ۱۱ نتایج محاسبهٔ عددی $x(t)$ و $v(t)$ را، با استفاده از ۴۰۰ بازه، هر یک به اندازهٔ ۰٫۰۱s، نشان می‌دهد. یک برنامهٔ کامپیوتری برای انجام این محاسبهٔ عددی در پیوست ط آمده است. با استفاده از این برنامه می‌توانیم هر حرکت یک‌بعدی حاصل از نیروی وابسته به مکان را تحلیل کنیم، حتی اگر از انتگرال




شکل ۱۱. حل عددی برای حرکت ذره‌ای که تحت اثر نیروی فنر $F=-kx$ است. نقاط شکل مقادیری را نشان می‌دهد که مستقیماً از کامپیوتر گرفته شده‌اند. برای اینکه شکل واضح باشد، از هر ۱۰ نقطهٔ کامپیوتری فقط یکی نشان داده شده است. منحنیها از این نقاط گذرانده شده‌اند، و کاملاً شبیه همان منحنیهای سینوس وکسینوس‌اند که از جواب تحلیلی حاصل می‌شوند.

معادلهٔ ۱۰ شکل تحلیلی‌ای برای انرژی پتانسیل به‌دست نیاید یا نتوانیم انتگرال معادلهٔ ۲۲ را به شکل تحلیلی محاسبه کنیم.

نتایج شکل ۱۱ خیلی آشنا به‌نظر می‌رسند: این منحنیها شبیه منحنیهای سینوس وکسینوس‌اند. در واقع، معادلهٔ ۲۲ را قبلاً حل کرده و جواب تحلیلی این سیستم را به‌دست آورده‌ایم، و دیده‌ایم که معادلهٔ حرکت یک تابع کسینوس است. رهیافت عددی هم مؤید همین نتیجه است.

## ۸ـ۵ سیستمهای پایستار دو و سه‌بعدی (اختیاری)

تا اینجا مفاهیم انرژی پتانسیل و پایستگی انرژی را برای سیستمهای یک‌بعدی، که در آنها نیرو در راستای حرکت است، بررسی کردیم. نتایج این بررسی را می‌توانیم به‌راحتی به حرکت سه‌بعدی تعمیم بدهیم و در این مورد هم عبارتی برای پایستگی انرژی به‌دست بیاوریم.

سیستمی را در نظر بگیرید که در آن ذره‌ای روی مسیری حرکت می‌کند و نیروی وارد بر ذره ناشی از اجزای دیگر سیستم است. اگر کارِ نیروی $\mathbf{F}$ فقط وابسته به نقاط ابتدا و انتهای حرکت و مستقل از مسیر باشد، این نیرو پایستار است. انرژی پتانسیل $U$ را مشابه با سیستمهای یک‌بعدی تعریف می‌کنیم، و می‌بینیم که تابعی از سه مختصهٔ فضایی است؛ یعنی، $U = U(x, y, z)$. تعمیم معادلهٔ ۹ به حرکت سه‌بعدی چنین است

$$\Delta U = -\int_{x_0}^{x} F_x dx - \int_{y_0}^{y} F_y dy - \int_{z_0}^{z} F_z dz \qquad (۲۳)$$

یا، به شکل جمع و جورتر و با نماد برداری

$$\Delta U = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \qquad (۲۴)$$

در این رابطه، $\Delta U$ تغییرانرژی پتانسیل سیستم در طی مسیراست؛ مسیر حرکت ذره از نقطهٔ $(x_0, y_0, z_0)$، که بردار مکان $\mathbf{r}_0$ تعریف می‌شود، شروع می‌شود و به نقطهٔ $(x, y, z)$، که با بردار مکان $\mathbf{r}$ تعریف می‌شود، ختم می‌شود. $F_x$، $F_y$، و $F_z$ مؤلفه‌های نیروی پایستار $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z)$اند.

تعمیم معادلهٔ ۱۲ به حرکت سه‌بعدی چنین است

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0, y_0, z_0) \qquad (۲۵)$$

یا، با نماد برداری

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + U(\mathbf{r}_0) \qquad (۲۶)$$

که در آن $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$ و $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2 = v_0^2$ است. معادلهٔ ۲۵ را، برحسب انرژی مکانیکی $E$، می‌شود به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) = E$$

سرانجام، تعمیم سه‌بعدی معادلهٔ ۱۳ چنین است[1]

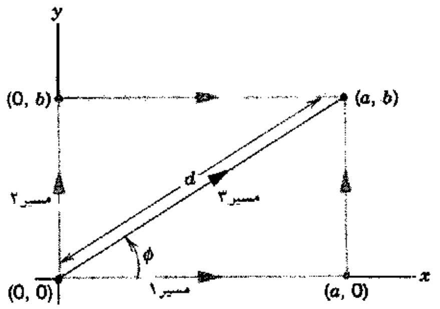
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathbf{i}\frac{\partial U}{\partial x} - \mathbf{j}\frac{\partial U}{\partial y} - \mathbf{k}\frac{\partial U}{\partial z} \qquad (۲۷)$$

اگر این عبارت $\mathbf{F}$ را در معادلهٔ ۲۴ بگذاریم، یک اتحاد به‌دست می‌آید که نشان می‌دهد دو معادلهٔ ۲۴ و ۲۷ هم‌ارزند. به زبان برداری، می‌گوییم که نیروی پایستار $\mathbf{F}$، منفیِ گرادیان انرژی پتانسیل $U(x, y, z)$ است. می‌توانید نشان بدهید که برای حرکت در راستای محور $x$، همهٔ این عبارات تبدیل می‌شوند به معادلات یک‌بعدی متناظرشان، که قبلاً به‌دست آورده بودیم، در معادلات ۲۴ و ۲۷، $\mathbf{F}$ نشان‌دهندهٔ نیرویی است که توسط سیستمی با انرژی پتانسیل $U$ اعمال می‌شود.

---

**مثال ۵.** در سیستمی از ذرات، که حرکتشان مقید به صفحهٔ $xy$ است، نیرو به شکل $\mathbf{F}(x, y) = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} = -ky\mathbf{i} - kx\mathbf{j}$ است که درآن $k$ یک مقدار ثابت مثبت است. (این نیرو ذره‌ای را که در نقطهٔ دلبخواه $(x, y)$ واقع شده است به طرف خط قطری $y = -x$ می‌راند. برای تحقیق این موضوع می‌توانید خط $y = -x$ را بکشید و مؤلفه‌های نیروی $F_x$ و $F_y$ را در نقاط مختلف صفحهٔ $xy$ رسم کنید.) (الف) نشان بدهید که کار این نیرو، طی حرکت ذره از مبدأ $(0, 0)$ به نقطهٔ $(a, b)$، در راستای هر سه مسیر شکل ۱۲ یکسان است. (ب) با فرض اینکه این نیرو پایستار است، انرژی پتانسیل متناظر با آن، یعنی $U(x, y)$ را به‌دست بیاورید. نقطهٔ مرجع را $x_0 = 0$ و $y_0 = 0$ بگیرید و فرض کنید $U(0, 0) = 0$.

حل: (الف) کار در مسیر ۱ را می‌شود با تقسیم مسیر به دو بخش به‌دست آورد: مسیر $a$۱ از $x = 0$ تا $x = a$ در راستای محور $x$، و مسیر $b$۱ از نقطهٔ $(a, 0)$ به نقطهٔ $(a, b)$ در راستای قائم، کار در مسیر




**شکل ۱۲.** مثال ۵. سه مسیر مختلف برای محاسبهٔ کارذره، در حرکت از مبدأ $(0, 0)$ به نقطهٔ $(a, b)$.

---

۱. مشتق پاره‌ای، $\partial/\partial x$، یعنی مشتق $U(x, y, z)$ نسبت به $x$، در حالی‌که $y$ و $z$ ثابت‌اند. به همین ترتیب، $\partial/\partial y$ و $\partial/\partial z$ هم به معنی مشتق‌گیری نسبت به متغیرهای مربوط‌اند وقتی که متغیرهای دیگر ثابت باشند.

$1a$ برابر است با

$$W_{1a}=\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=\int F_x dx+\int F_y dy$$
$$=\int (-ky)dx+\int(-kx)dy$$

در مسیر $1a$، $y=0$ و $dy=0$ است. پس هر دو انتگرال بالا صفرند و $W_{1a}=0$ می‌شود. در مسیر $1b$، $d\mathbf{s}=dy\mathbf{j}$ و $x=a$ است، پس

$$W_{1b}=\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=\int_{y=0}^{y=b}(-kx)dy$$
$$=(-ka)\int_0^b dy=-kab$$

بنابراین، کل کار در مسیر ۱ برابر است با

$$W_1=W_{1a}+W_{1b}=-kab$$

در مسیر ۲ هم به همین ترتیب عمل می‌کنیم

$$W_{2a}=\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=\int_{y=0}^{y=b}(-kx)dy=0$$
$$W_{2b}=\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=\int_{x=0}^{x=a}(-ky)dx$$
$$=(-kb)\int_0^a dx=-kab$$

در مسیر ۳، $d\mathbf{s}=dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}$ است، و خواهیم داشت

$$W_3=\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=\int(-ky\ dx-kx\ dy)$$

اگر متغیر $r$ را روی پاره‌خطی بگیریم که از $(0,0)$ شروع می‌شود و به $(a,b)$ ختم می‌شود، $y=r\ \sin\ \phi$ و $dy=dr\ \sin\ \phi$ است ($\phi$ در راستای این خط ثابت است). همچنین $x=r\ \cos\ \phi$ و $dx=dr\ \cos\ \phi$ است. $r$ را متغیر انتگرال‌گیری انتخاب می‌کنیم. مقدار $r$ از $0$ در مبدأ، تا $d=(a^2+b^2)^{1/2}$ در نقطهٔ $(a,b)$، تغییر می‌کند. به این ترتیب، انتگرال مربوط به $W_3$ به‌صورت زیر در می‌آید

$$W_3=\int_0^d[-k(r\ \sin\ \phi)(dr\ \cos\ \phi)$$
$$-k(r\ \cos\ \phi)(dr\ \sin\ \phi)]$$
$$=-2k\ \sin\ \phi\ \cos\ \phi\int_0^d r\ dr=-kd^2\ \sin\ \phi\ \cos\ \phi$$

با توجه به اینکه $\sin\ \phi=b/d$ و $\cos\ \phi=a/d$ است، در رابطهٔ بالا $W_3=-kab$ می‌شود. بنابراین، $W_1=W_2=W_3$ است. این نتیجه ثابت نمی‌کند که $\mathbf{F}$ حتماً پایستار است (برای اثبات این موضوع باید کار را برای همهٔ مسیرهای بین این دو نقطه حساب کرد)، اما تا حدود زیادی اطمینان می‌دهد که $\mathbf{F}$ ممکن است پایستار باشد.

(ب) انرژی پتانسیل را می‌شود از معادلهٔ ۲۴ به‌دست آورد، و در واقع قبلاً آن‌را، با محاسبهٔ کار در مسیر ۳، عملاً به‌دست آورده‌ایم. تنها تفاوت در این است که، به‌جای $(a,b)$، باید تا نقطهٔ دلبخواه $(x,y)$ انتگرال بگیریم. کافی است اسم نقطهٔ $(a,b)$ را $(x,y)$ بگذاریم، نتیجه می‌شود

$$\Delta U=U(x,y)-U(0,0)=-W=kxy$$

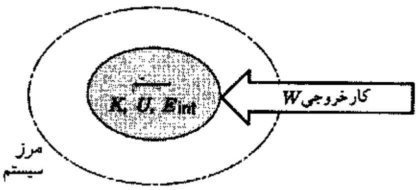
که در آن فرض کرده‌ایم $U(0,0)=0$. باید بتوانید نشان بدهید که می‌توانیم معادلهٔ ۲۷ را برای این تابع انرژی پتانسیل به‌کار ببریم و نیروی $\mathbf{F}(x,y)$ را پیدا کنیم.

اگر این نیرو را کمی تغییر بدهیم، چنان‌که $\mathbf{F}=-k_1y\mathbf{i}-k_2x\mathbf{j}$ شود، از روش قسمت (الف) معلوم می‌شود که این نیرو در مورد $k_1\neq k_2$ پایستار نیست (مسئلهٔ ۴۶). حتی اگر $k_1=-k_2$ باشد هم، این نیرو همچنان ناپایستار است. چنین نیرویی کاربرد مهمی در کانونی کردن مغناطیسی ذرات باردار دارد، اما نمی‌شود آن‌را با یک تابع انرژی پتانسیل نشان داد، چون پایستار نیست.

## ۶ـ۸ پایستگی انرژی در دستگاه ذرات

اگر جسمی با یک یا چند جسم در محیط خودش برهم‌کنش کند، می‌توانیم سیستم را متشکل از هر چند تا جسم که بخواهیم تعریف کنیم. سیستم را هر طور که تعریف کنیم، پایستگی انرژی برقرار خواهد بود، به شرط آنکه در این سیستم همهٔ انرژیها و انتقالهای انرژی میان سیستم و محیط را کاملاً در نظر بگیریم.

شکل ۱۳ سیستم دلبخواهی را نشان می‌دهد که دور آن یک منحنی بستهٔ فرضی به‌نام مرز سیستم رسم شده است. سیستم محصور در منحنی انرژی‌ای دارد که می‌تواند شامل اشکال مختلف انرژی باشد؛ بعضی از این اشکال را روی شکل مشخص کرده‌ایم، انرژی جنبشی $K$، انرژی پتانسیل $U$، و انرژی داخلی $E_{\text{int}}$. در اینجا $U$ به‌معنی انرژی پتانسیل ناشی از برهم‌کنش اجزای مختلف سیستم با هم است؛ برهم‌کنشهای اجزای سیستم با محیط، نه برحسب تغییر انرژیهای




شکل ۱۳. یک سیستم محصور در مرز، با انرژی جنبشی $K$، انرژی پتانسیل $U$ (تنها مربوط به برهم‌کنش اجزای سیستم با یکدیگر)، و انرژی داخلی $E_{\text{int}}$. محیط می‌تواند با انجام کار خارجی $W$، با سیستم انرژی مبادله کند.

پتانسیل، بلکه برحسب کار (خارجی) $W$ نشان داده شده‌اند. بعداً، در همین بخش، تعریف دقیقی از انرژی داخلی، برحسب انرژیهای جنبشی و پتانسیل میکروسکوپیک مولکولهای سازندهٔ اجزای سیستم، ارائه می‌کنیم. مثالهایی از تغییرات انرژی داخلی عبارت‌اند از تغییر آرایش مولکولهای سیستم (مثلاً جوشهای میکروسکوپیک ناشی از اصطکاک لغزشی) و تغییر سرعت مولکولهای سیستم که به صورت تغییر دما ظاهر می‌شود. (دما را در فصل ۲۲ بررسی می‌کنیم و در فصل ۲۳ آن‌را به انرژی درونی مربوط می‌کنیم.)

انرژی سیستم، با کاری که محیط روی آن انجام می‌دهد، می‌تواند تغییر کند؛ شکل ۱۳ نمایش این موضوع است. (کار داخلی‌ای که بخشی از سیستم بر بخشی دیگر، درون مرزهای سیستم، انجام می‌دهد انرژی کل را تغییر نمی‌دهد، فقط می‌تواند انرژی را از شکلی به شکلی دیگر تبدیل کند؛ مثلاً از انرژی پتانسیل به انرژی جنبشی.) بنابراین، رابطهٔ پایستگی انرژی سیستم را می‌شود چنین نوشت

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{\text{int}} = W \qquad (۲۸)$$

که در آن، $W$ کار خارجی همهٔ نیروهایی است که محیط از طریق آنها روی سیستم عمل می‌کند.

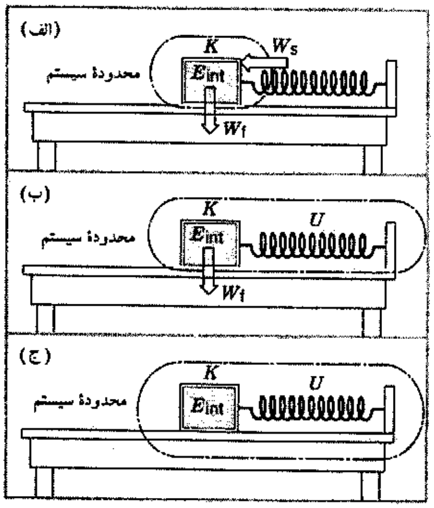
شکل ۱۳، همچنین قرارداد مهم علامت کار خارجی را نشان می‌دهد. کار مثبتِ محیط روی سیستم، انرژی سیستم را زیاد می‌کند. کار منفی محیط روی سیستم (که با کار مثبتِ سیستم بر محیط هم‌ارز است) انرژی سیستم را کم می‌کند.

این اصول را با بررسی سیستم جسم‌ـفنر شکل ۱ نشان می‌دهیم؛ در اینجا فرض می‌کنیم که بین جسم و میزی که جسم بر آن می‌لغزد اصطکاک وجود دارد. ابتدا سیستم را خود جسم تعریف می‌کنیم (شکل ۱۴الف). شکل دو انتقالِ انرژی به داخل مرزهای سیستم را نشان می‌دهد: کار پایستار مثبت $W_s$ که فنر روی جسم انجام می‌دهد و کار ناپایستار منفیِ $W_f$ که نیروی اصطکاک روی جسم انجام می‌دهد. برای این سیستم، پایستگی انرژی را می‌شود چنین نوشت

$$\Delta K + \Delta E_{\text{int}} = W_s + W_f \qquad (۲۹)$$

در این مورد $\Delta U$ صفر است، زیرا انرژی پتانسیل سیستم داخل مرز تغییری نمی‌کند. فنر جزء سیستم نیست، پس انرژی پتانسیل فنر به‌حساب نمی‌آید؛ در مقابل، فنر بخشی از محیط است و روی سیستم کار پایستار $W_s$ را انجام می‌دهد. به جهت پیکانهای شکل ۱۴الف، که انتقال انرژی را نشان می‌دهند توجه کنید؛ معادلهٔ ۲۹ نشان می‌دهد که کار مثبت فنر (که فرض کرده‌ایم نسبت به طول طبیعی‌اش فشرده شده است) انرژی جسم را زیاد می‌کند، و کار منفی سطح افقی، انرژی جسم را کم می‌کند.

حالا سیستم را متشکل از جسم و فنر در نظر بگیرید (شکل ۱۴ب) این سیستم جدید انرژی پتانسیل دارد، که مربوط به نیروی فنر است. نیروی اصطکاک تنها نیروی خارجی‌ای است که روی سیستم کار انجام می‌دهد. با این تعریف جدیدِ سیستم، پایستگی انرژی به‌صورت زیر




**شکل۱۴.** جسمی، تحت تأثیر فنری، روی میزی حرکت می‌کند؛ میز به آن نیروی اصطکاک وارد می‌کند. (الف) سیستم فقط شامل جسم است؛ نیروی فنر و نیروی اصطکاک روی سیستم کار انجام می‌دهند، و انرژی آن‌را تغییر می‌دهند. (ب) در این مورد، سیستم شامل جسم و فنر است، و هم انرژی جنبشی دارد هم انرژی پتانسیل. (ج) در این مورد، سیستم شامل میز هم هست. نیروی اصطکاک، در اینجا، یک نیروی داخلی است و در انرژی داخلی سیستم مؤثر است.

نوشته می‌شود

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{\text{int}} = W_f \qquad (۳۰)$$

انرژی سیستم، در این حالت $U + K + E_{\text{int}}$ است؛ در این مورد، انتقال انرژی بین فنر و جسم، تغییری در انرژی سیستم ایجاد نمی‌کند. نیروی فنر یک نیروی داخلی است که می‌تواند انرژی را ، در داخلِ سیستم، از یک شکل به شکلی دیگر تبدیل کند ($U \leftrightarrow K$)، اما نمی‌تواند کل انرژی سیستم را تغییر بدهد. کار منفی اصطکاک سطح افقی می‌تواند انرژی سیستم را تغییر بدهد.

سرانجام، این بار سیستم را چنان تعریف می‌کنیم که میز را هم در بر بگیرد (شکل ۱۴ج). در این مورد هیچ نیروی خارجی‌ای، چه پایستار چه ناپایستار، وجود ندارد که بتواند به داخل مرزهای سیستم انرژی منتقل کند. با این تعریف برای سیستم، کار خارجی صفر است؛ پس

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{\text{int}} = ۰ \qquad (۳۱)$$

در این مورد، نیروی اصطکاک هم، مثل نیروی فنر، یک نیروی داخلی است. انرژی، در داخل سیستم؛ می‌تواند از شکل انرژی مکانیکی $U+K$ متعلق به مجموعهٔ فنرـجسم، به انرژی داخلی مجموعهٔ میزـجسم تبدیل شود، اما انرژی کل (مکانیکی+درونی) ثابت می‌ماند. مثلاً فرض کنید جسم‌را، در حالتی که فنر فشرده شده است، از حالت سکون رها کنیم.

جسم روی میز می‌لغزد و سرانجام متوقف می‌شود. در این حالت، $\Delta K = ۰$ است (زیرا $K_f = K_i = ۰$)؛ پس، $\Delta E_{\text{int}} = -\Delta U$. اتلاف انرژی پتانسیل اولیهٔ سیستم، موجب افزایش انرژی داخلی آن می‌شود. از این تحلیل نمی‌توانیم تغییرات انرژی داخلی جسم و میز را، به‌طور جداگانه به‌دست بیاوریم؛ فقط می‌توانیم کل تغییرانرژی داخلی سیستم را محاسبه کنیم.

نیروی اصطکاک نمونه‌ای از نیروهای ناپایستارِ اتلافی است. در یک سیستم مکانیکی بسته، از نوعی که در اینجا توصیف شد، نیروی اصطکاک باعث می‌شود که انرژی مکانیکی به انرژی داخلی تبدیل شود. در اینجا انرژی مکانیکی پایسته نیست، و اتلاف انرژی مکانیکی با همان مقدار افزایش انرژی داخلی جبران می‌شود. (همهٔ نیروهای ناپایستار هم تلف‌کننده نیستند، بعضی از نیروهای ناپایستار، مثلاً نیروی مغناطیسی، می‌توانند انرژی مکانیکی سیستم را افزایش بدهند. حتی نیروی اصطکاک هم، تحت شرایطی، می‌تواند باعث افزایش انرژی مکانیکی سیستم شود. آیا می‌توانید برای این مورد اخیر مثالی بزنید؟)

توجه کنید که در مثالهای بالا انرژی پتانسیل ماکروسکوپیک فنر را به شکل یک جملهٔ مجزا نوشته‌ایم. می‌توانستیم انرژی ذخیره شده در فنر را هم جزء انرژی داخلی سیستم به‌حساب بیاوریم، اما برای سادگی ترجیح داده‌ایم که جملات ماکروسکوپیک را که به‌راحتی می‌شود منشأ آنها را پیدا کرد، جداکنیم؛ به این ترتیب، $E_{\text{int}}$ شامل بقیهٔ جملات میکروسکوپیک است، که در $U$ گنجانده نشده‌اند؛ یعنی بازآرایی مولکولهای فنر در $U$ گنجانده شده است، ولی بازآرایی مولکولهای جسم و میز در $E_{\text{int}}$ گنجانده شده است. این تقسیم‌بندی کم‌وبیش دلبخواه، تنها برای ساده کردن توصیف این سیستم خاص است.

معادلهٔ ۲۸، نخستین گام درگذار از قانون پایستگی انرژی مکانیکی به قانون کلی پایستگی انرژی است. این قانون، به زبان غیر ریاضی می‌گوید که

> در یک سیستم بسته، انرژی می‌تواند از شکلی به شکلی دیگر تبدیل شود، اما نمی‌تواند خلق شود یا از بین برود؛ کل انرژی سیستم ثابت می‌ماند.

منظور از "بسته بودن" سیستم آن است که هیچ کار خارجی‌ای، چه پایستار چه ناپایستار، روی سیستم انجام نمی‌شود. این بیانِ پایستگی انرژی، تعمیمی از تجربه است، و تا کنون هیچ آزمایش یا مشاهده‌ای آن را نقض نکرده است.

در تاریخ فیزیک، گاهگاهی به‌نظر آمده است که این قانون نقض می‌شود، اما این نقض ظاهری موجب شده است به دنبال شکل جدیدی از انرژی بگردیم تا با گنجاندن آن در قانون کلی‌تری از پایستگی انرژی بتوانیم مشاهده را توضیح بدهیم. مثلاً در دههٔ ۱۹۲۰ بررسیهای تجربی زیادی دربارهٔ واپاشی بتایی هسته‌ها انجام شد؛ دراین نوع واپاشی پرتوزا، هستهٔ اتم الکترون می‌گسیلد، براساس انرژی‌هسته، پیش از واپاشی و پس از آن، انتظار می‌رود که الکترون گسیل شده  باشد. تجربه نشان می‌دهد که انرژی الکترون کمتر از این مقدار است. پیشنهادهای زیادی برای توجیه این انرژی "گمشده" مطرح شد. یکی از پیشنهادها این بود که الکترون، پس از خروج از هسته به الکترونهای عادی اتم برمی‌خورد وبخشی از انرژی‌اش را، در این برخوردها از دست می‌دهد. اگر چنین چیزی درست می‌بود، می‌بایست طی این فرایند انرژی داخلی سیستم شامل الکترونهای گسیلیده و اتمهای واپاشیده زیاد می‌شد، و این افزایش انرژی داخلی می‌بایست به شکل افزایش دمای نمونهٔ پرتوزا ظاهر می‌شد. اما آزمایشهای دقیقی که در این مورد انجام شد، چنین افزایشی را نشان نداد، و این فرضیه رد شد. در سال ۱۹۳۰ ولفگانگ پاؤلی، فیزیکدان سوئیسی، فرضیهٔ درست را ارائه کرد. پاؤلی اظهار کرد که درواپاشی بتایی، علاوه بر الکترون، ذرهٔ دیگری هم گسیل می‌شود که حامل انرژی "گمشده" است. معلوم شد که این ذره، که آن‌را نوترینو نامیده‌اند، بسیار غریب است. فرضیهٔ پاؤلی به سرعت، با روشهای غیرمستقیم، تأیید شد. اما ۲۵ سال طول کشید تا نوترینو مستقیماً مشاهده شود. این پیش‌بینی وجود نوترینو، که براساس اطمینان به پایستگی انرژی بود، نقش مهمی در پیشرفت فیزیک ذرات بنیادی در دهه‌های بعدی داشت. نوترینو یکی از اساسی‌ترین ذرات بنیادی است که با بررسی خواص و برهم‌کنشهای آن با ذرات دیگر، درک بیشتر و بهتری از ساختار درونی ماده فراهم آمده است.

---

**مثال ۶.** توپ بیسبالی به جرم $m = ۰{,}۱۴۳\text{kg}$ از بالای برج سیرز به ارتفاع $h$ برابر با $۴۴۳\text{m}$ (یعنی $۱۴۵۰\text{ft}$) رها می‌شود، و به سرعت حدی $v = ۴۲\text{m/s}$ می‌رسد (بخش ۶ـ۷). تغییر انرژی داخلی توپ و هوای اطراف آن، هنگامی که توپ به زمین رسیده است، چقدر است؟

حل: سیستم را شامل توپ بیسبال، هوای اطراف آن، و زمین می‌گیریم. هیچ نیروی خارجی به سیستم وارد نمی‌شود؛ جاذبهٔ گرانش زمین بر توپ و نیروی اصطکاک هوا برتوپ، هر دو نیروهای داخلی این سیستم‌اند. تغییر انرژی پتانسیل سیستم برابر است با

$$\begin{aligned}\Delta U &= U_f - U_i = ۰ - mgh \\ &= -(۰{,}۱۴۳\text{kg})(۹{,}۸۰\,\text{m/s}^۲)(۴۴۳\text{m}) = -۶۲۱\text{J}\end{aligned}$$

تغییر انرژی جنبشی، طی سقوط توپ، برابر است با

$$\begin{aligned}\Delta K &= K_f - K_i = \frac{۱}{۲}mv^۲ - ۰ \\ &= \frac{۱}{۲}(۰{,}۱۴۳\text{kg})(۴۲\text{m/s})^۲ = ۱۲۶\text{J}\end{aligned}$$

(از حرکت زمین در اثر جاذبهٔ گرانشی توپ چشم پوشیده‌ایم.) طبق معادلهٔ ۲۸، پایستگی انرژی را می‌توان چنین نوشت، $\Delta U + \Delta K + \Delta E_{\text{int}} = ۰$، زیرا کار خارجی بر سیستم وارد نمی‌شود. از این رابطه معلوم می‌شود که

$$\Delta E_{\text{int}} = -\Delta U - \Delta K = -(-۶۲۱\text{J}) - ۱۲۶\text{J} = ۴۹۵\text{J}$$

این افزایش انرژی داخلی، می‌تواند به‌صورت افزایش دمای توپ و هوای اطراف آن، یا شاید به‌صورت انرژی جنبشی هوای واقع‌شده در مسیر توپ افتان، ظاهر شود. تنها با معادلهٔ ۲۸ نمی‌شود گفت که انرژی به کدام‌یک از این شکلها در می‌آید. برای این کار، باید توپ یا هوا را جدا کنیم و به عنوان سیستم در نظر بگیریم و کاری را که نیروهای خارجی روی این سیستم انجام می‌دهد حساب کنیم. به‌علاوه باید نیروی اصطکاک بین توپ و هوا، و همچنین جزئیات حرکت توپ را بدانیم؛ خلاصه، اوضاع پیچیده‌تر از آن می‌شود که اینجا به آن بپردازیم.

در این مسئله فرض کردیم که افزایش انرژی داخلی، در سیستمی که تعریف کردیم باقی می‌ماند. در عمل، اختلاف دمای توپ یا هوا با محیط اطرافشان منجر به نوع دیگری از انتقال انرژی می‌شود که آن‌را گرما می‌نامند (گرما را در فصل ۲۵ مطالعه خواهیم کرد.)

**مثال ۷.** جسمی به جرم ۴٫۵kg، با سرعت اولیهٔ $v = ۵٫۰\,\mathrm{m/s}$ روی سطح شیبداری با زاویهٔ °۳۰ به طرف بالای سطح پرتاب می‌شود. مشاهده می‌شود که جسم سرعتش به‌تدریج کم می‌شود و پس از پیمودن مسافت $d = ۱٫۵\mathrm{m}$ روی سطح شیبدار به حالت سکون (لحظه‌ای) می‌رسد. (الف) این جسم، در اثر اصطکاک، چقدر انرژی مکانیکی از دست می‌دهد؟ (ب) جسم، از حالت سکون، دوباره شروع به حرکت می‌کند و به پایین سطح شیبدار برمی‌گردد. با فرض اینکه اتلاف انرژی مکانیکی در اثر اصطکاک در این مرحله هم به اندازهٔ مرحلهٔ قبلی باشد، جسم با چه سرعتی به نقطهٔ آغاز حرکت برمی‌گردد؟

حل: (الف) اینجا هم، مثل مثال ۶، از تغییرات انرژی زمین چشم می‌پوشیم و فقط تغییر انرژی جنبشی جسم را در نظر می‌گیریم. تغییر انرژی پتانسیل برابر است با

$$\Delta U = U_\mathrm{f} - U_\mathrm{i} = mgh - ۰$$
$$= (۴٫۵\mathrm{kg})(۹٫۸\mathrm{m/s^۲})(۱٫۵\mathrm{m})(\sin ۳۰°) = ۳۳\mathrm{J}$$

تغییر انرژی جنبشی، از پایین سطح شیبدار تا بالای آن، برابر است با

$$\Delta K = K_\mathrm{f} - K_\mathrm{i} = ۰ - \frac{۱}{۲}mv^۲$$
$$= -\frac{۱}{۲}(۴٫۵\mathrm{kg})(۵٫۰\mathrm{m/s})^۲ = -۵۶\mathrm{J}$$

تغییر انرژی مکانیکی برابراست با

$$\Delta E = \Delta U + \Delta K = ۳۳\mathrm{J} - ۵۶\mathrm{J} = -۲۳\mathrm{J}$$

توجه کنید که، طبق معادلهٔ ۲۸، این اتلاف انرژی مکانیکی را می‌شود به‌صورت $-\Delta E_\mathrm{int} + W_\mathrm{f}$ نوشت. در اینجا $\Delta E_\mathrm{int}$ کمیتی مثبت است که افزایش انرژی داخلی جسم را (نه جسم + سطح شیبدار) را نشان می‌دهد؛ $W_\mathrm{f}$ کار خارجی (منفی)ای است که نیروی اصطکاکِ سطح شیبدار روی جسم انجام می‌دهد. بدون داشتن اطلاعات اضافی نمی‌شود این دو کمیت را جداگانه حساب کرد.

(ب) $\Delta K'$ را تغییر انرژی جنبشی، از شروع حرکت جسم از پایین سطح شیبدار تا بازگشت جسم به همان نقطه، می‌گیریم، تغییر انرژی پتانسیل در این مسیر، یعنی $\Delta U'$، صفر است. از معادلهٔ ۲۸ نتیجه می‌شود

$$\Delta K' = -\Delta U' + (-\Delta E'_\mathrm{int} + W'_\mathrm{f})$$

مقدار کمیت درون پرانتز برابر با $-۴۶\mathrm{J} = ۲(-۲۳\mathrm{J})$ است، زیرا فرض بر این است که اتلاف انرژی مکانیکی در برگشت، برابر با اتلاف انرژی مکانیکی در رفت است. پس، $\Delta K' = K_\mathrm{f} - K_\mathrm{i} = -۴۶\mathrm{J}$، و انرژی جنبشی در پایین سطح شیبدار برابر است با

$$K_\mathrm{f} = ۵۶\mathrm{J} - ۴۶\mathrm{J} = ۱۰\mathrm{J}$$

سرعت جسم به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$v_\mathrm{f} = \sqrt{\frac{۲K_\mathrm{f}}{m}} = \sqrt{\frac{۲(۱۰\mathrm{J})}{۴٫۵\mathrm{kg}}} = ۲٫۱\mathrm{m/s}$$

---

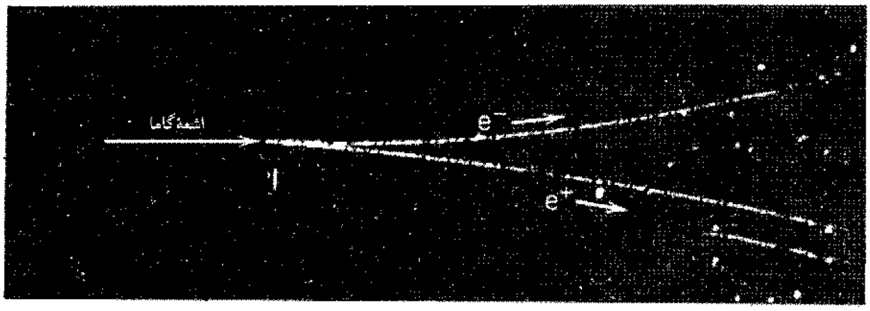
## اساس میکروسکوپیک انرژی داخلی (اختیاری)

جسمی را، که می‌تواند جسم مثال قبل در حرکت بر سطح شیبدار یا توپ مثال ۶ باشد، در نظر بگیرید. قضیهٔ کار-انرژی را برای یک ذرهٔ خاص (مثلاً یک اتم) در این سیستم مرکب می‌توانیم به شکل $\Delta K_i = W_i$ بنویسیم؛ که شاخص $i$ یکی از $N$ ذرهٔ تشکیل‌دهندهٔ جسم را مشخص می‌کند. $W_i$ به‌معنی کل کار حاصل از همهٔ نیروهای وارد بر این ذره است. می‌شود قضیهٔ کار-انرژی را جداگانه برای هر ذره نوشت و $N$ معادلهٔ حاصل را با هم جمع کرد. نتیجه خواهد شد

$$\Sigma \Delta K_i = \Sigma W_i \qquad (۳۲)$$

که در آن، شاخص $i$ از ۱ تا $N$ تغییر می‌کند. در طرف راست معادلهٔ ۳۲، کل کار انجام شده بر جسم را به دو بخش تقسیم می‌کنیم: $\Sigma W_i = W_\mathrm{int} + W_\mathrm{ext}$. جملهٔ $W_\mathrm{int}$ شامل کار نیروهایی است که اتمها یا مولکولهای جسم بر یکدیگر وارد می‌کنند، و جملهٔ $W_\mathrm{ext}$ شامل کار همهٔ نیروهای خارجی است. در طرف چپ معادلهٔ ۳۲ هم، کل انرژی جنبشی را به دو بخش تقسیم می‌کنیم: یکی $K$، که نشاندهندهٔ حرکت انتقالی کل جسم است، دیگری $K_\mathrm{int}$ که نمایندهٔ مجموع حرکتهای کتره‌ای داخلی اتمها و مولکولهای جسم است. (چگونگی این تقسیم را در فصل ۹، در بررسی حرکت مرکز جرم، توضیح می‌دهیم؛ فعلاً فقط فرض می‌کنیم که چنین تقسیمی ممکن است.) پس می‌توانیم معادلهٔ ۳۲ را چنین بنویسیم

$$\Delta K + \Delta K_\mathrm{int} = W_\mathrm{int} + W_\mathrm{ext} \qquad (۳۳)$$




شکل۱۵. انرژی تابش گاما به یک پوزیترون و یک الکترون تبدیل شده است. این دو ذره در اتاقک حبابی که در آن تولید شده‌اند ردهای مرئی از خودشان به‌جا می‌گذارند. ردها خمیده‌اند زیرا یک میدان مغناطیسی قوی در اتاقک نیرویی تولید می‌کند که همواره بر سرعت ذرات عمود است، اما جهت آن درمورد الکترون و پوزیترون (که بار مخالف دارند) در دو جهت مخالف یکدیگر است.

فرض برآن است که در سطح میکروسکوپیک همهٔ نیروها پایستارند؛ بنابراین، به‌جای کل کار داخلی می‌توانیم انرژی پتانسیل کل بین اتمی یا بین مولکولی را بگذاریم: $W_{int} = -\Delta U - \Delta U_{int}$. این را می‌شد $-\Delta U_{int}$ نوشت، اما راحت‌تر است که بعضی از انرژیهای پتانسیل میکروسکوپیک را که محاسبه‌شان ساده است، مثلاً انرژی پتانسیل فنر را، در جملهٔ $U$ بگنجانیم. با این جایگذاری، و با جابه‌جا کردن جملات، نتیجه می‌شود که

$$\Delta U + \Delta K + (\Delta U_{int} + \Delta K_{int}) = W_{ext} \qquad (۳۴)$$

با جایگذاری $\Delta E_{int} = \Delta U_{int} + \Delta K_{int}$، معادلهٔ ۲۸ به‌دست می‌آید. بنابراین، جملهٔ انرژی مستقیماً از اعمال قضیهٔ کار_انرژی، در شکل میکروسکوپیک، بر اجسام، به‌دست می‌آید.

## ۸_۷ جرم و انرژی[۱] (اختیاری)

یکی از انواع معمولی پرتوزایی، که در آزمایشگاه به آسانی مشاهده می‌شود، گسیل پوزیترون است؛ در این فرایند، هستهٔ اتم یک پوزیترون گسیل می‌کند؛ پوزیترون ذره‌ای با همان جرم الکترون است ولی بار الکتریکی مخالف (مثبت) دارد. هنگامی که پوزیترون به الکترونهای مادهٔ معمولی برخورد می‌کند، فرایندی به نام نابودی الکترون_پوزیترون مشاهده می‌شود. در این فرایند، الکترون و پوزیترون هر دو ناپدید می‌شوند و به جایشان فقط تابش الکترومغناطیسی ظاهر می‌شود. این فرایند را می‌توانیم چنین نمایش بدهیم

$$e^+ + e^- \rightarrow \text{تابش الکترومغناطیسی}$$

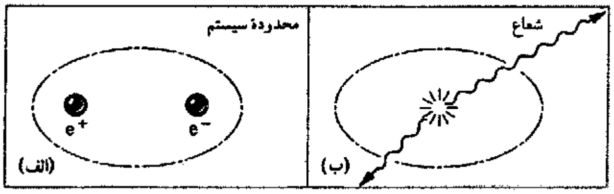
که در آن $e^+$ و $e^-$، به‌ترتیب، نشانهٔ پوزیترون و الکترون‌اند. شکل ۱۵ فرایند معکوس این فرایند را نشان می‌دهد، که در آن تابش گاما به یک الکترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود؛ این فرایند را تولید زوج می‌نامند.

سیستمی (مانند شکل ۱۶الف)، را که شامل یک پوزیترون و یک الکترون است در نظر بگیرید؛ فرض کنید انرژیهای جنبشی این دو ذره بسیار کوچک و فاصلهٔ دو ذره آنقدر زیاد است که انرژی پتانسیل سیستم هم (که ناشی از نیروی الکترواستاتیکی میان ذرات است) قابل چشم‌پوشی است. سرانجام، پوزیترون و الکترون به‌هم می‌رسند و نابود می‌شوند و تابش حاصل، از مرزهای سیستم خارج می‌شود (شکل ۱۶ب). با اندازه‌گیریهای مناسب در محیط، می‌توانیم انرژی تابش خارج شده از سیستم را تعیین کنیم؛ نتیجه می‌شود که در هر رویداد نابودی، تابش به اندازهٔ ۱٫۰۲۲MeV انرژی از سیستم خارج می‌کند. هنگامی که اتمهای محیط این تابش را جذب می‌کنند، نیروهای الکترومغناطیسی وابسته به تابش ۱٫۰۲۲MeV کار روی محیط انجام می‌دهند. معادلهٔ ۲۸ نشاندهندهٔ کاری است که محیط روی سیستم انجام می‌دهد، پس در این مورد محیط کار منفی، به مقدار ۱٫۰۲۲MeV−، روی سیستم انجام داده است.

اگر معادلهٔ ۲۸ را برای این سیستم به‌کار ببریم، می‌بینیم که پایستگی انرژی ظاهراً نقض می‌شود؛ طرف راست معادله برابر است با مقداری منفی، $W$، اما تغییر انرژی در طرف چپ، که برای برقرار بودن تساوی لازم است، مشهود نیست. می‌شود مثلاً فرض کرد که انرژی داخلی سیستم به اندازهٔ $W$ کاهش پیدا کرده است، اما به هیچ‌وجه معلوم نیست که چه نوع انرژی داخلی‌ای در سیستم اولیه بوده که حالا در سیستم نهایی نیست.

حل این معما را می‌شود در معادلهٔ معروف آلبرت اینشتین، که جرم و انرژی را به هم مربوط می‌کند، پیدا کرد. اینشتین این معادله را در سال ۱۹۰۵، یعنی مدتها پیش از انجام آزمایشهایی از نوع نابودی الکترون_پوزیترون، پیشنهاد کرد

$$E_0 = mc^2 \qquad (۳۵)$$




شکل۱۶. (الف) سیستمی شامل یک پوزیترون $e^+$ و یک الکترون $e^-$. (ب) پس از نابودی پوزیترون و الکترون، تابش حاصل، از مرز سیستم خارج می‌شود.

۱. این بخش را می‌شود حذف کرد، یا تا بحث نسبیت در فصل ۲۱، به‌تعویق انداخت.

که در آن $c$ سرعت نور است.[1] این معادله می‌گوید که جرم شکلی از انرژی است، و ذره‌ای به جرم $m$، انرژی سکون $E_0$ دارد که مقدار آن $mc^2$ است. این انرژی سکون را می‌توانیم انرژی داخلی اجسام ساکن تلقی کنیم. پس الکترون و پوزیترون، صرفاً به‌خاطر جرمشان، انرژی داخلی دارند. انرژی داخلی هر یک از این دو ذره را می‌توانیم به‌صورت زیر حساب کنیم:

$$E_0 = mc^2 = \frac{(9{,}11 \times 10^{-31}\mathrm{kg})(3{,}00 \times 10^8\mathrm{m/s})^2}{1{,}60 \times 10^{-13}\mathrm{J/MeV}}$$

$$= 0{,}511\mathrm{MeV}$$

بنابراین، کل انرژی داخلی (انرژی سکون) این دو ذره $2(0{,}511\mathrm{MeV}) = 1{,}022\mathrm{MeV}$، و تغییر انرژی سکون این سیستم برابر با $-1{,}022\mathrm{MeV}$ است. کار منفی انجام شده روی سیستم شکل ۱۶، معادل است با مقدار کاهشی که در انرژی سکون سیستم پدید می‌آید. اگر انرژی سکون ذرات را هم به درستی در نظر بگیریم، درمی‌یابیم که انرژی پایسته است.

از معادلهٔ ۳۵، ضمناً نتیجه می‌شود که هرگاه به جسم مادی ساکنی، به اندازهٔ $\Delta E$ انرژی بیفزاییم، جرم آن‌را به اندازهٔ $\Delta m = \Delta E/c^2$ زیاد کرده‌ایم. اگر فنری را فشرده کنیم و انرژی پتانسیل آن‌را به اندازهٔ $\Delta U$ زیاد کنیم، جرم آن به اندازهٔ $\Delta U/c^2$ زیاد می‌شود. اگر دمای جسمی را زیاد کنیم، تا انرژی داخلی آن به اندازهٔ $\Delta E_{\mathrm{int}}$ زیاد شود، جرم جسم را به اندازهٔ $\Delta E_{\mathrm{int}}/c^2$ زیاد کرده‌ایم. این تغییر جرمها، بسیار کوچک‌اند، و در مورد اجسام عادی، معمولاً خارج از توانایی ما برای سنجش جرم‌اند (زیرا $c^2$ عددی بسیار بزرگ است)؛ اما در واپاشیها و واکنشهای ذرات هسته‌ای و زیرهسته‌ای، تغییر نسبی جرم ممکن است به قدر کافی بزرگ و قابل سنجش باشد.

به‌این ترتیب، تغییر انرژی پتانسیل $U$ و انرژی داخلی $E_{\mathrm{int}}$ سیستم در داخل مرزهای شکل ۱۳ را می‌شود به تغییر انرژی سکون $E_0$ سیستم مربوط کرد. در این صورت، معادلهٔ ۲۸ را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$\Delta E_0 + \Delta K = W \qquad (36)$$

در اینجا $W$ انرژی‌ای است (که به شکل کار) بین سیستم و محیط مبادله می‌شود. توجه کنید که طرف چپ معادلهٔ ۳۶ فقط دو جمله دارد: انرژی سکون (شامل همهٔ انواع انرژی سیستمهای ساکن) و انرژی حرکتی (جنبشی). در مورد نابودی الکترون-پوزیترون (با $\Delta K = 0$)، معادلهٔ ۳۶ مستقیماً نشان می‌دهد که کار خارجی (منفی) مربوط به تابش، ناشی از کاهش انرژی سکون سیستم اولیه است.

حالا سیستم را در زمانی در نظر بگیرید که تابش گسیل شده است، اما هنوز محیط آن‌را جذب نکرده است؛ در این حالت، از معادلهٔ ۳۵ نتیجهٔ دیگری هم به‌دست می‌آید. برای اینکه انرژی در این زمان میانی هم پایسته بماند، باید به تابش جرمی برابر با $\Delta m = \Delta E_0/c^2$ نسبت داد. پس معادلهٔ ۳۵ می‌گوید که انرژی جرم دارد.

پس نتیجه می‌شود که پایستگی انرژی با پایستگی جرم هم‌ارز است. چنانکه اینشتین نوشت: "در فیزیک پیش نسبیتی دو قانون پایستگی داریم که اهمیت بنیادی دارند؛ یکی قانون پایستگی انرژی و دیگری قانون پایستگی جرم، که در آنجا کاملاً مستقل از هم ظاهر شوند. نظریهٔ نسبیت این دو را درهم می‌برد و به یک اصل تبدیل می‌کند."

معادلهٔ ۳۶ را می‌توانیم برای سیستمهای بستهٔ دیگری هم که شامل ذرات و تابش باشند به‌کار ببریم. مثلاً خورشید را، به عنوان سیستم در نظر بگیرید. خورشید هر ثانیه $4 \times 10^{26}\mathrm{J}$ انرژی تابش می‌کند. در اینجا هم، مثل مورد نابودی الکترون-پوزیترون، این انرژی تابشی را به کاهش انرژی سکون سیستم نسبت می‌دهیم؛ تغییر جرم متناظر با این تغییر انرژی سکون در هر ثانیه برابر است با [1]

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{-4 \times 10^{26}\mathrm{J}}{(3 \times 10^8\mathrm{m/s})^2} = -4 \times 10^9\mathrm{kg}$$

این کاهش جرم، با استانداردهای معمولی، کاملاً قابل ملاحظه است اما در مقایسه با کل جرم خورشید ($2 \times 10^{30}\mathrm{kg}$) بسیار کوچک است. در هر سال، جرم خورشید فقط به اندازهٔ $6 \times 10^{-14}$ برابر جرم کل آن کم می‌شود.

سیستم را ابرنواختر ۱۹۸۷ (شکل ۱۷) می‌گیریم و مرز را دور آن می‌کشیم. در ۴۰۰ سال گذشته، این اولین ابرنواختری است که با چشم غیرمسلح مشاهده شده است.[2] ابرنواختر ستاره‌ای است که ذخیرهٔ سوخت گرماهسته‌ای‌اش را تمام کرده است و دارد به طرز چشمگیری منفجر می‌شود. گفته می‌شود که ابرنواختر ۱۹۸۷، طی زمانی در حدود ۱۰ ثانیه، در حدود ۱۰٪ انرژی سکون خودش را، که تقریباً معادل دو برابر جرم خورشید است، به تابش و دیگرانواع انرژی تبدیل کرده است. تغییر انرژی سکون متناظر با دو برابر جرم خورشید، می‌شود

$$\Delta E_0 = \Delta mc^2 = -2(2 \times 10^{30}\mathrm{kg})(3 \times 10^8\mathrm{m/s})^2$$

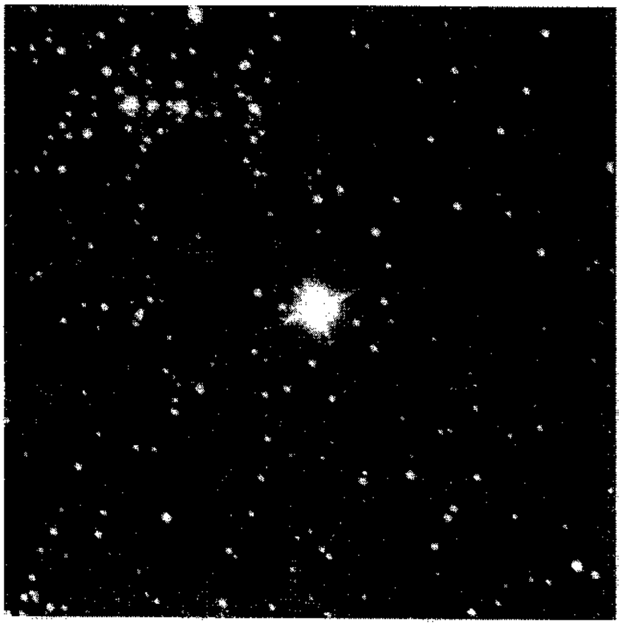
$$= -4 \times 10^{47}\mathrm{J}$$

انرژی تابش شده در این ۱۰ ثانیه، متناظر با توان $4 \times 10^{46}\mathrm{W}$ تقریباً برابر است با انرژی تابشی حاصل از کل ستاره‌های دیگر و کهکشانهایی که در جهان مرئی می‌بینیم!

---

۱. اگرچه فیزیکدانها نتایج محاسبات نسبیتی را می‌پذیرند، اما تعبیری از معادلهٔ ۳۵ که مورد قبول همه باشد وجود ندارد. رجوع کنید به
"The Concept of Mass," Lev B. Okun, *Physics Today*, June 1989, p. 31.

۲. نگاه کنید به
"The Great Supernova of 1987", Stan Woosley and Tom Weaver, *Scientific American*, August 1989, p. 32.



شکل۱۷. ابرنواختر ۱۹۸۷. نور این ستاره (در مرکز عکس) کاملاً نور ستاره‌های دیگر را تحت‌الشعاع قرار داده است.

---

مثال ۸. دو گلولهٔ گلی، هر یک به جرم ۳۵g را به طرف هم پرتاب می‌کنیم. سرعت هرگلوله ۱٫۷m/s است. گلوله‌ها رودررو با هم برخورد می‌کنند و به هم می‌چسبند. جرم گلولهٔ حاصل چقدر با مجموع جرم دو گلولهٔ اولیه فرق دارد؟

حل: دو گلوله را به عنوان سیستم در نظر می‌گیریم و معادلهٔ ۳۶ را به‌کار می‌بریم. انرژی جنبشی این سیستم تغییر کرده است (و مقدار این تغییر منفی است): انرژی جنبشی پس از برخورد صفر است و پیش از برخورد $K_i$، که برابر با مجموع انرژی جنبشی گلوله‌هاست. کار خارجی هم وجود ندارد، پس

$$\Delta K + \Delta E_\circ = (\circ - K_i) + \Delta E_\circ = \circ$$

یا

$$\Delta E_\circ = K_i = ۲\left(\frac{۱}{۲}mv^۲\right) = (\circ{,}\circ۳۵\mathrm{kg})(۱{,}۷\mathrm{m/s})^۲$$
$$= \circ{,}۱\circ۱\mathrm{J}$$

این افزایش انرژی سکون می‌تواند به شکل انرژی داخلی باشد، و مثلاً موجب افزایش دمای سیستم مرکب شود. افزایش جرم متناظر با این افزایش انرژی برابر است با

$$\Delta m = \frac{\Delta E_\circ}{c^۲} = \frac{\circ{,}۱\circ۱\mathrm{J}}{(۳{,}\circ\circ \times ۱\circ^۸\mathrm{m/s})^۲} = ۱{,}۱ \times ۱\circ^{-۱۸}\mathrm{kg}$$

چنین افزایش ناچیزی در جرم، کاملاً خارج از محدودهٔ توانایی ما در اندازه‌گیری است.

مثال ۹. در آزمایشی که در سال ۱۹۸۹ در شتابدهندهٔ خطی استانفورد انجام شد، ذرات $Z^\circ$ از برخورد سربه‌سر (باریکه‌ای از) الکترون (و باریکه‌ای از) پوزیترون که انرژی جنبشی یکسان داشتند، تولید شد. انرژی جنبشی این دو پرتو حداقل باید چقدر باشد تا ذرهٔ $Z^\circ$، که انرژی سکون آن ۹۱٫۲GeV است، تولید شود (۱GeV = ۱۰⁹eV)؟

حل: در اینجا هم، مثل مورد مثال ۸، فرض کنید که هیچ کار خارجی (یعنی تابشی) در فرایند قبل از برخورد یا پس از برخورد در میان نیست. تغییر انرژی سکون از حالت اولیه (یک الکترون و یک پوزیترون، هر یک با انرژی سکون ۰٫۵۱۱MeV) تا حالت نهایی ($Z^\circ$) برابر است با

$$\Delta E_\circ = ۹۱{,}۲\mathrm{GeV} - ۲(\circ{,}۵۱۱\mathrm{MeV}) = ۹۱{,}۲\mathrm{GeV}$$

می‌بینیم که در اینجا کل انرژی سکون الکترون و پوزیترون (۱٫۰۲۲MeV = ۰٫۰۰۱۰۲۲GeV) کاملاً قابل چشم‌پوشی است. از معادلهٔ ۳۶ نتیجه می‌شود که

$$\Delta K = -\Delta E_\circ = -۹۱{,}۲\mathrm{GeV} = K_f - K_i$$

اگر فرض کنیم $Z^\circ$ در حالت سکون تولید می‌شود، $K_f = \circ$ است و بنابراین انرژی الکترون و پوزیترون باید هر یک ۴۵٫۶GeV = (۹۱٫۲GeV)۰٫۵ باشد. در این مثال، برخلاف مثال قبل، تغییر نسبی انرژی سکون (یا جرم) سیستم کاملاً چشمگیر است: جرم نهایی در حدود ۱۰۰۰۰۰ برابر جرم اولیه است.[۱]

---

## ۸ـ۸ کوانتش انرژی (اختیاری)

در بخش قبل دیدیم که چگونه پایستگی انرژی با نسبیت سازگار است: براساس نسبیت باید مفهوم انرژی را گسترش داد و انرژی سکون سیستم را هم وارد آن کرد تا پایستگی انرژی پا بر جا بماند. در اینجا پایستگی انرژی را در حالت حدی دیگری بررسی می‌کنیم: در حد کوانتومی سیستمهایی که در مقیاس اتمی یا هسته‌ای‌اند.

اگر به سیستم جسم‌ـفنر مقداری انرژی اولیه بدهیم و آن‌را رها کنیم، سیستم به جلو و عقب نوسان خواهد کرد. اگر اصطکاک هم در کار باشد، حرکت به‌تدریج میرا می‌شود. افت انرژی سیستم در اثر کار خارجی نیروی اصطکاک، هموار و پیوسته به‌نظر می‌رسد.

اما حالا نوسانگری متشکل از یک مولکول دو اتمی را در نظر بگیرید: دو اتم که با یک نیروی فنروار به هم جفت شده‌اند. اگر به این

---

۱. نگاه کنید به

"The Stanford Linear Collider," John R. Rees, *Scientific American*, October 1989, p. 58.

سیستم انرژی بدهیم و بگذاریم که نوسان کند، خواهیم دید که تابش گسیل خواهد کرد و سرانجام، تا آنجا که بتواند، انرژی تلف خواهد کرد.
اما این نوسانگر اتمی فرق مهمی با سیستم جسم‌ـفنر دارد: در مقیاس اتمی، تغییرات حرکت پیوسته نیست، بلکه به شکل پرشهای گسسته است. پایستگی انرژی، در این مقیاس میکروسکوپیک هم وجود دارد. اختلاف انرژی حالت اولیه و حالت نهایی برابر است با انرژی $\Delta E$ که تابش با خود می‌برد، یعنی

$$|\Delta E| = E_\mathrm{i} - E_\mathrm{f} \qquad (۳۷)$$

توجه کنید که اگر سیستم انرژی از دست بدهد، $E_\mathrm{i} > E_\mathrm{f}$ است.
گسیل تابش در مقیاس اتمی گسسته است: فقط تغییر انرژیهای معینی هستند که مجازند، برخلاف موارد کلاسیک که در آنها می‌توانیم تغییرانرژی را متغیری پیوسته در نظر بگیریم. چنانکه در فصل ۴۹ خواهیم دید، تغییر انرژیهای مجاز یک نوسانگر، با فرکانس $\nu$ آن چنین رابطه‌ای دارند

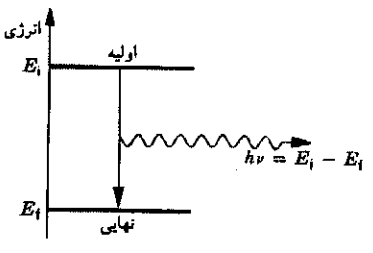
$$E_\mathrm{i} - E_\mathrm{f} = h\nu \qquad (۳۸)$$

که در آن، $h$ ثابتی به نام ثابت پلانک است، به مقدار

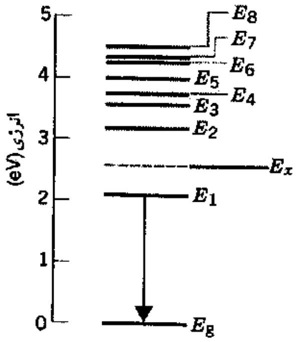
$$h = ۶٫۶۳ \times ۱۰^{-۳۴}\mathrm{J\cdot s}$$
$$= ۴٫۱۴ \times ۱۰^{-۱۵}\mathrm{eV\cdot s}$$

شکل ۱۸ نمایشی است از فرایندی که در آن سیستمی (مثلاً یک اتم یا هسته) از انرژی اولیهٔ $E_\mathrm{i}$ به انرژی نهایی $E_\mathrm{f}$ می‌برد، و تابشی با انرژی $h\nu$ می‌گسیلد. این بستهٔ گسستهٔ انرژی را کوانتوم انرژی می‌نامند. و می‌گویند که حالتهای انرژی کوانتیده‌اند، یعنی مقادیر گسستهٔ معینی دارند.

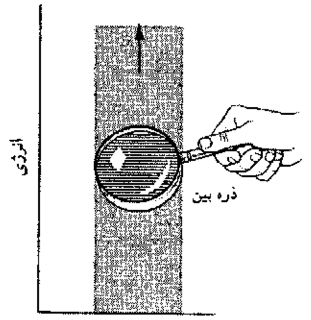
شکل ۱۹ مثالی از چند حالت کوانتیدهٔ انرژی اتم سدیم را نشان می‌دهد. اتم می‌تواند در هر یک از این حالتهای انرژی باشد، اما نمی‌تواند در حالتی میان این مقادیر باشد. چنین ساختاری موجب می‌شود که گسیل تابش از اتمها گسسته باشد؛ مثلاً، هنگامی که اتم سدیم از حالت انرژی $E_۱$ (نخستین حالت برانگیخته) به حالت $E_\mathrm{g}$ (حالت پایه) می‌جهد، نور زردی گسیل می‌کند که




شکل۱۸. سیستمی از حالت اولیه‌اش تابشی با انرژی $h\nu$ می‌گسیلد و به حالت نهایی می‌رود.




شکل۱۹. چند تراز انرژی اتم سدیم، متناظر با حالتهای کوانتومی مختلفی که اتم می‌تواند در آنها باشد. پایین‌ترین حالت، $E_\mathrm{g}$، را حالت پایه می‌نامند. هنگامی که اتم از حالت انرژی $E_۱$ به حالت پایه می‌رود (پیکان در شکل) نور زرد مشخصهٔ سدیم را گسیل می‌کند. اتم فقط می‌تواند در حالتهایی که مشخص شده است باشد؛ یعنی انرژی آن مثلاً نمی‌تواند $E_x$، بین $E_۱$ و $E_۲$ باشد.




شکل۲۰. ترازهای انرژی یک آونگ هم کوانتیده‌اند، اما آنقدر به هم نزدیک‌اند که با هیچ دقتی نمی‌شود از هم متمایزشان کرد. هیچ "ذره‌بینی" نمی‌تواند ساختار کوانتیدهٔ یک آونگ را آشکارکند.

مشخصهٔ سدیم است (همان نوری که در لامپهای بخار سدیم دیده می‌شود).
شکل ۲۰ ساختار "کوانتیدهٔ" یک نوسانگر کلاسیک، مثلاً یک آونگ، را نشان می‌دهد، حالتها ممکن است گسسته باشند، اما آنقدر به هم نزدیک‌اند که پرش بین آنها را می‌توان فرایندی پیوسته در نظر گرفت. فرض کنید فرکانس آونگ یک دور بر ثانیه باشد ($\nu = ۱/\mathrm{s}$). طبق معادلهٔ ۳۸، مقدار "کوانتوم انرژی" برابر است با

$$h\nu = (۶٫۶۳ \times ۱۰^{-۳۴}\mathrm{J\cdot s})(۱\mathrm{s}^{-۱}) = ۶٫۶۳ \times ۱۰^{-۳۴}\mathrm{J}$$

این کمیتِ ناچیز فوق‌العاده کوچکتر از قدرت تفکیک ما در سنجش انرژی اجسام ماکروسکوپیک، مثل آونگ، است؛ بنابراین، ساختارِ گسسته مشاهده‌پذیر نیست. مثلاً درآونگ، این تغییرانرژی متناظر است با تغییر دامنهٔ نوسان به مقداری از مرتبهٔ $۱۰^{-۳۲}\mathrm{m}$، یا در حدود $۱/۱۰^{۲۲}$ برابر قطر اتم! پس می‌توانیم از رفتار کوانتومی اجسام عادی چشم بپوشیم، بی‌آنکه خطایی کرده باشیم.
پایستگی انرژی در مقیاس میکروسکوپیک را می‌توانیم با

مشاهدهٔ تابشی که از اتمها یا هسته‌ها، هنگام پرش از ترازی به تراز دیگر، گسیل می‌شود بیازماییم؛ چه در فرایند گسیل تابش (مثل شکل ۱۸) و چه در فرایند معکوس، که در آن اتمی که در حالت پایه (پایین‌ترین تراز انرژی) است یک کوانتوم تابش جذب می‌کند و به تراز بالاتری می‌جهد. آزمایشهایی از این نوع را، که شامل گسیل و جذب‌اند، می‌شود با دقتی فوق‌العاده انجام داد، دقتی از مرتبهٔ ۱ قسمت در $10^{15}$ از اختلاف انرژی بین حالتها. هر آزمایشی از این نوع با پایستگی انرژی در این مقیاس میکروسکوپیک سازگار بوده است.

## پرسشها

۱. آسانسوری از طبقه بالای ساختمانی پایین می‌آید و متوقف می‌شود. انرژی پتانسیل آن چه می‌شود؟

۲. جاده‌های کوهستانی به‌ندرت مستقیماً بالا می‌روند، بلکه می‌پیچند و به تدریج بالا می‌روند. چرا؟

۳. بالشتکهای هوا احتمال صدمات ناشی از تصادف اتومبیل را به مقدار زیادی کم می‌کنند. برحسب انتقال انرژی توضیح بدهید که چرا.

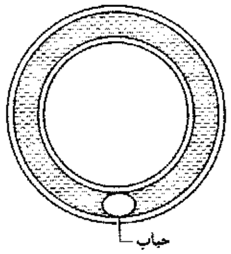
۴. زمانی که در پرش با نیزه، نیزهٔ فایبرگلاس جای نیزهٔ چوبی را گرفت، تحولی در این رشته ایجاد شد. چرا؟

۵. جسمی را از دست رها می‌کنید و می‌بینید که به اندازهٔ یک و نیم برابرارتفاع اولیه‌اش از کف زمین وامی‌جهد. از این مشاهده چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۶. توپی که به زمین می‌افتد نمی‌تواند به بالاتر از ارتفاع اولیه‌اش برگردد. اما قطره‌های آبی که از پایین آبشار به بالا می‌جهند، گاهی از بالاترین نقطهٔ آبشار هم بالاتر می‌روند. چرا؟

۷. زمین لرزه‌های شدید می‌توانند چنان انرژی‌ای آزاد کنند که برای تخریب یک شهر کافی است. درست پیش از زمین لرزه، این انرژی کجا بوده است؟

۸. شکل ۲۱ یک لولهٔ شیشه‌ای حلقوی را نشان می‌دهد که به دیواری نصب شده است. لوله پر از آب است و تنها یک حباب هوا دارد که در ته لوله در حالت سکونِ لحظه‌ای است. حرکت بعدی این حباب را برحسبِ انتقال انرژی توضیح بدهید. یک بار از نیروهای گرانروی و اصطکاک چشم بپوشید و یا بار آنها را کاملاً در نظر بگیرید.




**شکل ۲۱.** پرسش ۸

۹. در مثال ۳ (شکل ۸) دیدیم که سرعت واگن تفریحی در پایین مسیر، به شکل مسیربستگی ندارد. آیا اگر اصطکاک هم وجود داشت، این حرف می‌توانست درست باشد؟

۱۰. با در نظرگرفتن اینکه انرژی پتانسیل دو مولکول یکسان به فاصلهٔ بین مراکز آنها بستگی دارد، توضیح بدهید که چرا مایعی که به شکل لایه‌ای نازک است، انرژی پتانسیل بیشتری دارد تا مایعی با همان جرم که به شکل کره باشد.

۱۱. اینکه یک آونگ نوسان‌کننده سرانجام می‌ایستد، آیا قانون پایستگی انرژی مکانیکی را نقض می‌کند؟

۱۲. در یک مقالهٔ علمی[1] آمده است که حرکت در شکل راه رفتن و دویدن بازده خیلی کمی دارد، و بازده حرکت پرندگان، ماهیها، و دوچرخه‌سواران خیلی بیشتر است. آیا توضیحی برای این ادعا دارید؟

۱۳. اتومبیلی در بزرگراهی حرکت می‌کند. راننده ترمز می‌کند و اتومبیل روی جاده می‌لغزد تا بایستد. انرژی جنبشی اتلاف‌شدهٔ اتومبیل به چه شکلی ظاهر می‌شود؟

۱۴. در پرسش بالا، فرض کنید راننده چنان ترمز کند که اتومبیل نلغزد، در این مورد، انرژی جنبشی از دست رفتهٔ اتومبیل به چه شکلی ظاهر می‌شود؟

۱۵. اتومبیلی از حالت سکون شتاب می‌گیرد و به سرعت $v$ می‌رسد، و طی این مدت چرخهای محرک آن نمی‌لغزند. انرژی مکانیکی اتومبیل از کجا می‌آید؟ مثلاً آیا می‌شود گفت که این انرژی از نیروی اصطکاک (ایستایی) جاده بر اتومبیل تأمین می‌شود؟

۱۶. در مورد کاری که در مقابل نیروی اصطکاک انجام می‌شود، تغییر انرژی داخلی مستقل از سرعت (یا چارچوب مرجع لخت) ناظر است. یعنی، مقدار انرژی مکانیکی تبدیل شده به انرژی داخلی در اثراصطکاک، از دید ناظرهای مختلف یکسان است. این امر، با توجه به اینکه دو ناظر مختلف، در حالت کلی مقادیر مختلفی برای کار خالص و تغییر انرژی جنبشی به‌دست می‌آورند، چه توضیحی دارد؟

۱۷. چند مثال فیزیکی برای تعادل ناپایدار، تعادل خنثی، و تعادل پایدار بزنید.

۱۸. در مقاله‌ای[2] آمده است: "جالب است بدانیم که همهٔ انرژی ورودی سوخت، سرانجام به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود و در اطراف مسیر اتومبیل پخش می‌شود." سازوکارهای متحمل این تبدیل را بررسی کنید؛ از جمله اصطکاک جاده، مقاومت هوا، ترمز، رادیوی اتومبیل، چراغهای اتومبیل، باتری، اتلاف درون موتور و اتلاف در سیستم حرکت‌دهنده، بوق، و غیره. فرض کنید که جاده مستقیم و افقی است.

---

۱. نگاه کنید به
"The Energetic Cost of Moving About," V. A. Tucker, *American Scientist*, July-August 1975, p. 413.

2. "Energy and the Automobile," Gene Waring, *The Physics Teacher*, p. 494.

۱۹. منشأ هر چند تا از منابع انرژی فعلی را که می‌توانید به‌خورشید مربوط کنید. فکر می‌کنید منبعی وجود دارد که نشود آن‌را به‌خورشید مربوط کرد؟

۲۰. با استفاده از مفاهیم کار و انرژی، توضیح بدهید که چگونه کودکان می‌توانند تاب را از حالت سکون به حالت حرکت با دامنه‌ای بزرگ برسانند.[1]

۲۱. دو قرص با فنری سخت به هم متصل‌اند. آیا می‌توان قرص بالایی را آنقدر به پایین فشرد که پس از رها شدن، به بالا بجهد و قرص پایینی را هم با خودش از روی میز بلند کند (شکل ۲۲)؟ آیا در این مورد انرژی مکانیکی می‌تواند پایسته بماند؟

**شکل ۲۲.** پرسش ۲۱

۲۲. دربارهٔ "پایستگی انرژی" که (الف) در این فصل به‌کار رفته است و (ب) در ارتباط با "بحران انرژی" (مثلاً خاموش کردن چراغها) بحث کنید. این دو مورد چه تفاوتی دارند.

۲۳. توان الکتریکی یک شهر کوچک از یک نیروگاه هیدروالکتریکی تأمین می‌شود، که بر رودخانه‌ای نزدیک شهر قرار دارد. اگر یک چراغ روشنایی را در این سیستم انرژی ــ بسته خاموش کنید، از پایستگی انرژی نتیجه می‌شود که همین مقدار انرژی، البته شاید به شکلی دیگر، باید در نقطه‌ای دیگر از سیستم ظاهر شود. این انرژی کجا و به چه شکلی ظاهر می‌شود؟

۲۴. فنری را تا آنجا که می‌شود فشرده می‌کنیم و در همین حال آن‌را محکم می‌بندیم بعد آن‌را در اسید می‌گذاریم تا حل شود. انرژی پتانسیل ذخیره شده در فنر چه می‌شود؟

۲۵. عبارت $E_\circ = mc^2$ نشان می‌دهد که اجسام کاملاً معمولی، مثل سکه یا سنگریزه مقادیر عظیمی انرژی دارند. چرا تا به حال به این منابع عظیم انرژی توجه نشده است؟

۲۶. "در انفجارهای هسته‌ای ــ به‌ازای جرم یکسان ــ در حدود یک میلیون بار بیش از انفجار شیمیایی انرژی آزاد می‌شود، زیرا انفجارهای هسته‌ای براساس رابطهٔ $E_\circ = mc^2$ عمل می‌کنند." دربارهٔ این گفته چه فکر می‌کنید؟

۲۷. چگونه جرم و انرژی می‌توانند "هم‌ارز" باشند، با وجودی که دو کمیت فیزیکی کاملاً متفاوت‌اند که به دو شکل متفاوت تعریف می‌شوند، و با دو یکای متفاوت سنجیده می‌شوند؟

۲۸. یک کرهٔ فلزی داغ را روی صفحهٔ یک ترازو می‌گذاریم، کره سرد می‌شود. آیا اگر ترازو به‌اندازهٔ کافی حساس می‌بود، تغییر جرمی نشان می‌داد؟

۲۹. آیا در فیزیک کلاسیک (یعنی غیرکوانتومی) هم کمیتهای کوانتیا موجود دارد؟ اگر دارد، مثالهایی بیاورید.

## مسئله‌ها

**بخش ۸ـ۳ سیستمهای پایستار یک‌بعدی**

۱. برای از کار انداختن موشکهای بالیستیک در مراحل اولیهٔ پرواز، یک "تفنگ الکترومغناطیسی" طراحی شده است که در ماهواره‌های زمینی مدار پایین سوار می‌شود. این تفنگ باید بتواند پرتابه‌ای به جرم ۲٫۳۸kg را با سرعت ۱۰٫۰km/s پرتاب کند. انرژی جنبشی این پرتابه، حتی اگر مادهٔ منفجره هم نداشته باشد. برای اینکه موشک را در اثر برخورد از کار بیندازد کافی است. (چنین سلاحی را سلاح "انرژی جنبشی" می‌نامند.) پرتابه به‌وسیلهٔ نیروهای الکترومغناطیسی شتاب می‌گیرد و به‌سرعت پرتاب می‌رسد. حالا فرض کنید می‌خواستیم این پرتابه را با استفاده از یک فنر پرتاب کنیم (سلاح "فنری"). در این‌صورت، ثابت نیروی فنری که ۱٫۴۷m فشرده شده است چقدر باید باشد تا بتواند پرتابه را به سرعت مورد نظر برساند.

۲. گفته می‌شود که از درختان خیلی بزرگ در هر روز ممکن است تا حدود ۹۰۰ کیلوگرم آب تبخیر شود. این تبخیر در برگها صورت می‌گیرد. آب باید از ریشهٔ درخت به برگها برسد. (الف) با فرض اینکه آب به‌طور متوسط ۹٫۲۰m از سطح زمین صعود کند. هر روز چقدر انرژی صرف این کار می‌شود؟ (ب) اگر فرض کنیم که تبخیر طی ۱۲h روز انجام می‌شود، توان متوسط چقدر است؟

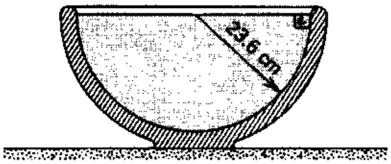
۳. ارتفاع قلهٔ اورست از سطح دریا ۸۸۵۰m است. (الف) کوهنوردی به جرم ۹۰kg، چقدر انرژی در مقابل گرانش مصرف می‌کند تا از سطح دریا به قله برسد؟ (ب) چند شکلات، هر یک با انرژی ۳۰۰kcal، برای تأمین این انرژی لازم است؟ نتیجهٔ شما باید نشان بدهد که کار لازم برای غلبه بر گرانش بخش بسیار کوچکی از انرژی‌ای است که در بالا رفتن از کوه مصرف می‌شود.

۴. مردی به وزن ۲۲۰lb از پنجره‌ای روی یک توری نجات می‌پرد که ۳۶ft پایین‌تر از او است. تور ۴٫۴ft کشیده می‌شود و به حالت سکون لحظه‌ای می‌رسد و بعد مرد را دوباره به هوا پرتاب می‌کند. با فرض اینکه هیچ انرژی‌ای در اثر نیروهای ناپایستار اتلاف نشود، انرژی پتانسیل تور کشیده شده چقدر است؟

۵. قطعه یخ بسیارکوچکی از لبهٔ داخلی یک ظرف بدون اصطکاک به شکل نیمکره‌ای به شعاع ۲۳٫۶cm رها می‌شود (شکل ۲۳). سرعت

۱. نگاه کنید به
"How to Make a Swing Go," R. V. Hesheth, *Physics Education*, July 1975, p. 367.

این قطعه یخ در پایین ظرف چقدر است؟

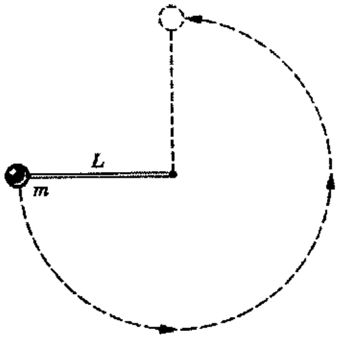



**شکل ۲۳.** مسئلهٔ ۵

۶. جریانی از گدازهٔ آتشفشانی روی یک سطح افقی در حال حرکت است که به یک سربالایی با شیب °۱۰ می‌رسد. مشاهده می‌شود که گدازه ۹۲۰m روی شیب به‌طرف بالا حرکت می‌کند و سپس متوقف می‌شود. گدازه شامل گازِ به‌دام افتاده است؛ بنابراین، اصطکاک آن با زمین آنقدر کم است که می‌شود از آن چشم پوشید. سرعت گدازه درست پیش از رسیدن به شیب، چقدر بوده است؟

۷. پرتابه‌ای به جرم ۲٫۴۰kg از بالای صخره‌ای به ارتفاع ۱۲۵m پرتاب می‌شود. سرعت اولیهٔ آن ۱۵۰m/s در جهت °۴۱٫۰ بالاتر از سطح افق است. (الف) انرژی جنبشی پرتابه در اولین لحظهٔ پس از پرتاب و (ب) انرژی پتانسیل آن در این لحظه چقدر است؟ (ج) سرعت پرتابه، درست پیش از برخورد آن به زمین، چقدر است؟ کدام یک از جوابها به جرم پرتابه بستگی دارد؟ اصطکاک هوا را ناچیز بگیرید.

۸. گلوله‌ای به جرم $m$ به یک سرِ میلهٔ بسیار سبکی به طول $L$ متصل است. سر دیگر میله لولا شده است، چنانکه گلوله می‌تواند در صفحه‌ای قائم حرکت کند. میله را به حالت افقی درمی‌آوریم و به گلوله ضربه‌ای به طرف پایین می‌زنیم. میله تاب می‌خورد و درست تا حالت قائم خودش را بالا می‌کشد (شکل ۲۴). سرعت اولیهٔ گلوله چقدر بوده است؟

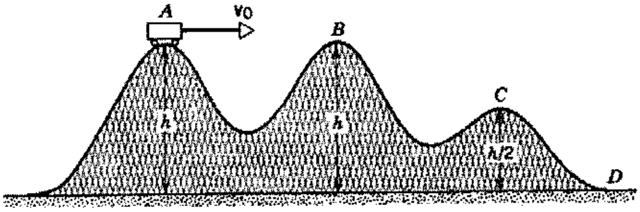



**شکل ۲۴.** مسئله‌های ۸ و ۳۸

۹. توپی به جرم ۱۱۲g، با سرعت اولیهٔ ۸٫۱۶m/s با زاویهٔ °۳۴٫۰ بالاتر از سطح افقی، از پنجره‌ای پرتاب می‌شود. با استفاده از پایستگی انرژی، (الف) انرژی جنبشی توپ در نقطهٔ اوج مسیر و (ب) سرعت آن در ارتفاع ۲٫۸۷m پایین‌تر از پنجره را پیدا کنید. مقاومت هوا ناچیز است.

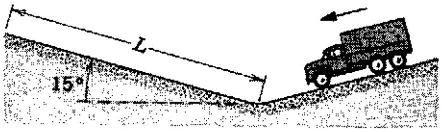
۱۰. یک ارابهٔ تفریحی که روی ریلهای بدون اصطکاک است، با سرعت $v_0$ از نقطهٔ $A$ در شکل ۲۵ به‌راه می‌افتد. سرعت ارابه (الف) در نقطهٔ $B$، (ب) در نقطهٔ $C$، و (ج) در نقطهٔ $D$ چقدر است؟

مثل ذره در نظر بگیرید.



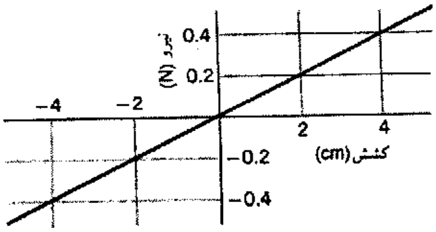

**شکل ۲۵.** مسئلهٔ ۱۰

۱۱. کامیونی که ترمزش بریده است، با سرعت ۸۰mi/h از تپه‌ای پایین می‌آید. خوشبختانه در پایین تپه یک شیب فرار اضطراری وجود دارد. زاویهٔ این شیب °۱۵ است (شکل ۲۶). حداقل طول شیب، $L$، برای اینکه کامیون (لااقل به‌طور آنی) متوقف شود چقدر است؟



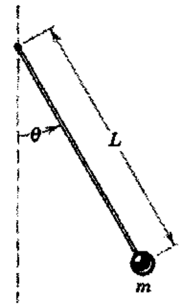

**شکل ۲۶.** مسئلهٔ ۱۱

۱۲. شکل ۲۷ نیرو (برحسب نیوتون) را به‌صورت تابعی از مقدار کشیدگی یا فشردگی (برحسب سانتی‌متر) فنر یک تفنگ چوب پنبه‌ای نشان می‌دهد. فنر به‌اندازهٔ ۵٫۵۰cm فشرده می‌شود و چوب‌پنبه‌ای به جرم ۳٫۸۰g را از تفنگ پرتاب می‌کند. (الف) با فرض اینکه چوب‌پنبه در لحظه‌ای که فنر از حالت آزاد خودش می‌گذرد رها شود، سرعت آن چقدر خواهد بود؟ (ب) حالا فرض کنید که چوب‌پنبه به فنر گیر می‌کند و پس از آنکه فنر ۱٫۵۰cm از حالت آزاد خودش گذشت از آن جدا می‌شود. در این حالت سرعت چوب‌پنبه، هنگام رها شدن چقدر است؟



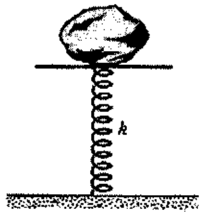

**شکل ۲۷.** مسئلهٔ ۱۲

۱۳. میلهٔ نازکی به طول $L = ۲٫۱۳\text{m}$ و جرم قابل اغماض، از یک سرلولا شده است؛ چنانکه می‌تواند در صفحهٔ قائم دوران کند. میله را به‌اندازهٔ زاویهٔ $\theta = ۳۵٫۰°$ از حالت قائم منحرف، و سپس رها می‌کنیم (شکل ۲۸). سرعت گلولهٔ سربی سرآزاد میله، هنگام عبور از پایین‌ترین نقطهٔ مسیر چقدر است؟




شکل ۲۸. مسئلهٔ ۱۳

۱۴. شکل ۲۹ سنگی به جرم ۷٫۹۴kg را نشان می‌دهد که روی فنری قرار دارد. فنر در اثر وزن سنگ به‌اندازهٔ ۱۰٫۲cm فشرده می‌شود. (الف) ثابت نیروی فنر را پیدا کنید. (ب) سنگ را ۲۸٫۶cm دیگر هم به پایین فشار می‌دهیم و بعد رها می‌کنیم. انرژی پتانسیل ذخیره شده در فنر، درست پیش از برداشتن دست از روی سنگ، چقدر است؟ (ج) سنگ تا چه ارتفاعی، نسبت به این مکان جدید، بالا می‌رود؟



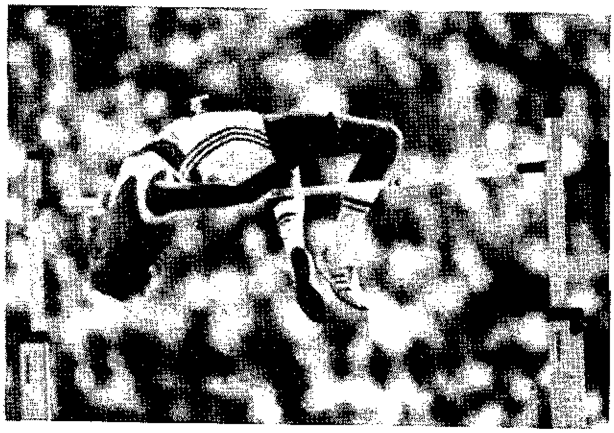

شکل ۲۹. مسئلهٔ ۱۴

۱۵. در آبشار نیاگارا، هر دقیقه تقریباً $۳٫۳ \times ۱۰^۵ \text{m}^۳$ آب از ارتفاع ۵۰m سقوط می‌کند. (الف) توان خروجی یک نیروگاه مولد برق، که بتواند ۴۸٪ انرژی پتانسیل این آب را به انرژی الکتریکی تبدیل کند، چقدر است؟ (ب) اگر انرژی تولید شده، به‌قیمت صنعتی ۱٫۲cent/kWh فروخته شود، درآمد سالانهٔ حاصل چقدر است؟ جرم یک مترمکعب ($۱\text{m}^۳$) آب ۱۰۰۰kg است.

۱۶. مساحت ایالات متحده امریکا در حدود $۸ \times ۱۰^۶ \text{km}^۲$، و ارتفاع متوسط آن از سطح دریا در حدود ۵۰۰m است. میزان بارش متوسط سالانه، ۷۵cm است. دوسوم این آب باران، در اثر تبخیر، به جو بازمی‌گردد، اما باقی‌ماندهٔ آن سرانجام به اقیانوسها می‌ریزد. اگر همهٔ این آب را می‌شد برای تولید برق در نیروگاههای هیدروالکتریکی به‌کار برد، چه توان متوسطی به‌دست می‌آمد؟

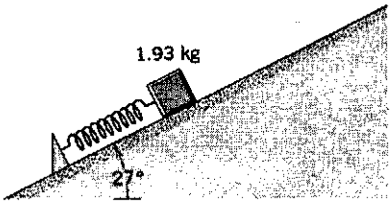
۱۷. جسمی از حالت سکون، از ارتفاع $h$، سقوط می‌کند. انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل را به‌صورت توابعی از (الف) زمان و (ب) ارتفاع تعیین کنید. این توابع را رسم کنید و نشان بدهید که مجموع آنها ــ انرژی کل ــ در هر دو مورد ثابت است.

۱۸. در بازیهای المپیک ۱۹۸۴، پرندهٔ آلمانی، اولریکه مایفارت، با پرش ۲٫۰۲m، یک رکورد المپیک برای پرش ارتفاع زنان برجای گذاشت (شکل ۳۰). با فرض یکسان بودن شرایط دیگر، این پرنده در کرهٔ ماه چقدر می‌توانست بپرد؟ شتاب گرانش در سطح ماه فقط $۱٫۶۷\text{m/s}^۲$ است. (راهنمایی: ارتفاعی که "به‌حساب می‌آید"، مسافت قائمی است که مرکز ثقل پرنده، پس از جدا شدن پاهایش از زمین، بالا می‌رود. فرض کنید که در لحظهٔ جدا شدن پرنده از زمین، مرکز ثقل او ۱۱۰cm بالاتر از سطح زمین باشد. همچنین فرض کنید که هنگام گذشتن پرنده از میله، مرکز ثقلش در همان ارتفاع میله باشد.)



شکل ۳۰. مسئلهٔ ۱۸

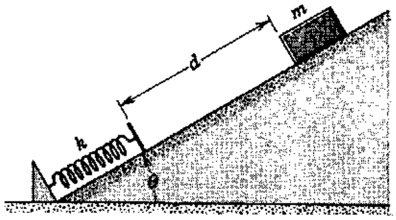
۱۹. جسمی به جرم ۱٫۹۳kg روی سطح شیبدار بی‌اصطکاکی به زاویهٔ شیب ۲۷٫۰°، به فنری تکیه دارد (شکل ۳۱). فنر را، که ثابت نیروی آن ۲۰٫۸N/cm است، به‌اندازهٔ ۱۸٫۷cm می‌فشاریم، و جسم را رها می‌کنیم. جسم حداکثر به اندازهٔ چه مسافتی روی سطح شیبدار بالا می‌رود؟ مکان نهایی را نسبت به مکان جسم، درست پیش از رها شدن، حساب کنید.




شکل ۳۱. مسئلهٔ ۱۹

۲۰. فنر ایده‌آل بدون جرمی در اثر نیروی ۲۶۸N به‌اندازهٔ ۲٫۳۳cm فشرده می‌شود. جسمی به جرم $m = ۳٫۱۸\text{kg}$ از بالای سطح شیبدار، از حالت سکون، رها می‌شود (شکل ۳۲). زاویهٔ شیب سطح

۳۲٫۰° است. جسم، در لحظه‌ای که فنر را به‌اندازهٔ ۵٫۴۸cm فشرده است، به حالت سکون لحظه‌ای می‌رسد. (الف) در این لحظه جسم چه مسافتی روی سطح شیبدار حرکت کرده است؟ (ب) سرعت جسم، در لحظه‌ای که به فنر می‌رسد، چقدر است؟

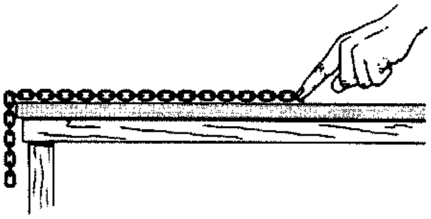


شکل ۳۲. مسئله‌های ۲۰ و ۳۵

۲۱. ثابت نیروی فنر یک تفنگ فنری ۴٫۱۵lb/in است. تفنگ با زاویهٔ ۳۶٫۰° بالاتر از سطح افقی واقع شده است. گلوله‌ای به وزن ۲٫۸۰oz از آن شلیک می‌شود و به ارتفاع ۶٫۳۳ft بالاتر از دهانهٔ لوله می‌رسد. (الف) سرعت گلوله موقع خروج از لوله چقدر است؟ (ب) فنر در ابتدا چقدر فشرده شده بوده است؟

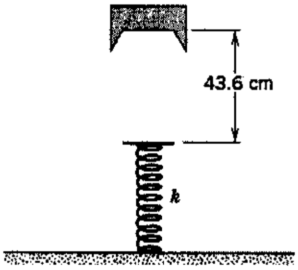
۲۲. آونگی متشکل است از سنگی به جرم ۱٫۳۳kg که به ریسمانی به طول ۳٫۸۲m متصل است. در حالتی که زاویهٔ ریسمان با راستای قائم ۵۸٫۰° است، به سنگ ضربه‌ای در جهت عمود بر ریسمان به طرف بالا می‌زنیم. مشاهده می‌شود که سرعت سنگ، هنگام عبور از پایین‌ترین نقطهٔ مسیرش، ۸٫۱۲m/s است. (الف) سرعت سنگ، درست پس از ضربه خوردن، چقدر بوده است؟ (ب) طی حرکت آونگ، بزرگترین زاویه‌ای که ریسمان با راستای قائم می‌سازد چقدر است؟ (ج) پایین‌ترین نقطهٔ مسیر سنگ را صفر انرژی پتانسیل گرانشی بگیرید و انرژی مکانیکی کل سیستم را حساب کنید.

۲۳. زنجیری روی میز بدون اصطکاکی نگه داشته شده است، چنانکه یک چهارم طول آن از لبهٔ میز آویزان است (شکل ۳۳). اگر طول زنجیر $L$ و جرم آن $m$ باشد، چقدر کار لازم است تا بخش آویزان زنجیر روی میز کشیده شود؟


شکل ۳۳. مسئلهٔ ۲۳

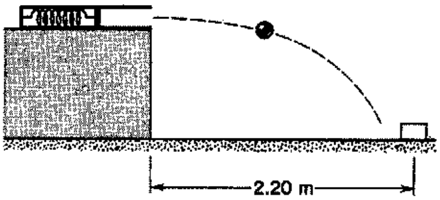
۲۴. یک سر فنر قائمی به سقف متصل است. وزنه‌ای به سر دیگر آن می‌بندیم و آن‌را آرام پایین می‌آوریم تا به وضعیت تعادل برسد. نشان بدهید که مقدار کاهش انرژی پتانسیل وزنه، دو برابر مقدار افزایش انرژی پتانسیل فنر است. (چرا این دو کمیت با هم برابر نیستند؟)

۲۵. جسمی به جرم ۲٫۱۴kg از ارتفاع ۴۳٫۶cm روی فنری، با ثابت نیروی $k =$ ۱۸٫۶N/cm، سقوط می‌کند (شکل ۳۴). این فنر حداکثر چقدر فشرده می‌شود؟



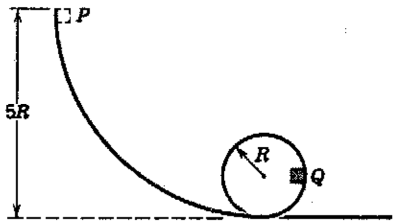
شکل ۳۴. مسئلهٔ ۲۵

۲۶. دو کودک با هم بازی می‌کنند و می‌خواهند جعبهٔ کوچکی را که روی زمین است با تیله‌ای که از یک تفنگ فنری شلیک می‌شود بزنند؛ تفنگ روی میز قرار دارد. فاصلهٔ افقی جعبهٔ هدف با لبهٔ میز ۲٫۲۰m است (شکل ۳۵). اولی فنر را ۱٫۱۰cm می‌فشارد، اما جسم به هدف نمی‌رسد و ۲۷٫۰cm جلوتر از آن به زمین می‌افتد. دومی چقدر فنر را بفشارد تا جسم به هدف بخورد؟



شکل ۳۵. مسئلهٔ ۲۶

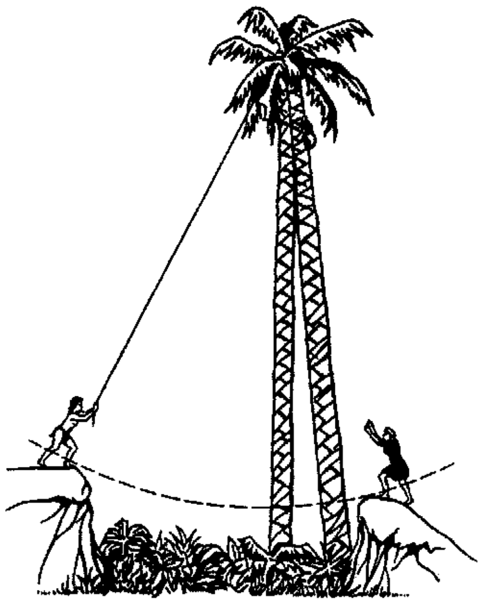
۲۷. جسمی به جرم $m$ روی مسیر حلقوی بدون اصطکاکی می‌لغزد (شکل ۳۶). (الف) جسم از نقطهٔ $P$، از حالت سکون، رها می‌شود. نیروی خالص وارد بر آن، در نقطهٔ $Q$ چقدر است؟ (ب) جسم باید از چه ارتفاعی نسبت به پایین حلقه رها شود تا در بالای دایره در آستانهٔ جدا شدن از مسیر باشد؟



شکل ۳۶. مسئلهٔ ۲۷

۲۸. تارزان، به وزن ۱۸۰lb، به کمک پیچکی به طول ۵۰ft، از بالای صخره‌ای تاب می‌خورد و پایین می‌آید (شکل ۳۷). مقدار سقوط او، از بالای صخره تا پایین مسیر تاب، ۸٫۵ft است. پیچک تحمل کشش

بیشتر از ۲۵۰lb را ندارد. آیا پیچک پاره می‌شود؟



شکل ۳۷. مسئلهٔ ۲۸

۲۹. اندازهٔ نیروی جاذبهٔ گرانشی میان ذره‌ای به جرم $m_۱$ و ذره‌ای به جرم $m_۲$

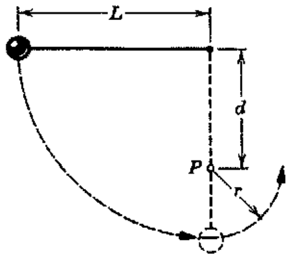
$$F(x) = G\frac{m_۱ m_۲}{x^۲}$$

است؛ که در آن $G$ ثابت و $x$ فاصلهٔ بین دو ذره است. (الف) تابع انرژی پتانسیل، $U(x)$، را پیدا کنید؟ فرض کنید در $x \to \infty$، $U(x) \to ۰$. (ب) چقدر کار لازم است تا فاصلهٔ دو ذره را از $x = x_۱$ به $x = x_۱ + d$ افزایش بدهیم؟

۳۰. جسمی به جرم ۱٫۱۸kg تحت اثر نیروی خالص پایستاری است که دقیقاً از رابطهٔ $F = -۳x - ۵x^۲$ به‌دست می‌آید؛ $F$ برحسب نیوتون و $x$ برحسب $m$ است. (الف) انرژی پتانسیل جسم در $x = ۲٫۲۶\text{m}$ چقدر است؟ فرض کنید $U(۰) = ۰$ است. (ب) سرعت جسم، در $x = ۴٫۹۱\text{m}$ برابر با ۴٫۱۳m/s و در جهت منفی $x$ است. سرعت آن، هنگامی که از $x = ۱٫۷۷\text{m}$ می‌گذرد، چقدر است؟

۳۱. فنری داریم که از قانون هوک پیروی نمی‌کند. نیرویی که این فنر وارد می‌کند (برحسب نیوتون) $۵۲٫۸x + ۳۸٫۴x^۲$ در جهت مخالف کشش است؛ $x$ مقدار کشیدگی فنر برحسب متر است. (الف) کار لازم برای کشیدن فنر از $x = ۰٫۵۲۲\text{m}$ به $x = ۱٫۳۴\text{m}$ چقدر است؟ (ب) یک سر فنر را به‌جایی می‌بندیم و ذره‌ای به جرم ۲٫۱۷kg به سر دیگر آن وصل می‌کنیم. فنر را ۱٫۳۴m می‌کشیم و بعد ذره را از حالت سکون رها می‌کنیم. این ذره، هنگامی که مقدار کشیدگی فنر $x = ۰٫۵۲۲\text{m}$ است، چه سرعتی دارد؟ (ج) آیا نیروی این فنر پایستار است یا ناپایستار؟ توضیح بدهید.

۳۲. در شکل ۳۸ طول ریسمان برابر با $L = ۱۲۰\text{cm}$، و فاصلهٔ نقطهٔ آویز ریسمان تا میخ برابر با ۷۵٫۰cm است. گلوله را از حالت سکون، از وضعیتی که در شکل مشخص است، رها می‌کنیم. گلوله روی مسیرخط‌چین حرکت می‌کند. سرعت گلوله (الف) در پایین‌ترین نقطهٔ مسیر و (ب) در بالاترین نقطهٔ مسیر، پس از اینکه ریسمان دور میخ می‌پیچد، چقدر است؟




شکل ۳۸. مسئله‌های ۳۲ و ۳۳

۳۳. در شکل ۳۸، نشان بدهید که شرط اینکه وزنهٔ آونگ یک دور کامل حول میخ بزند، و ریسمان شل نشود، آن است که $d > ۳L/۵$ باشد. (راهنمایی: وزنه در نقطهٔ اوج مسیر باید در حال حرکت باشد، در غیر این‌صورت ریسمان شل می‌شود.)

۳۴. جسمی به جرم $m$، که به یک سرریسمانی بسته شده است، روی دایره‌ای به شعاع $R$ در صفحهٔ قائم حرکت می‌کند. حداقل سرعت جسم در بالاترین نقطهٔ مسیر چقدر باشد تا ریسمان همچنان کشیده بماند؟

۳۵. جسمی به جرم ۳٫۲۲kg، از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند، به‌اندازهٔ مسافت $d$ روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی پایین می‌آید، و در آنجا به فنری با جرم ناچیز می‌رسد (شکل ۳۲). زاویهٔ شیب سطح ۲۸٫۰° است. جسم ۲۱٫۴cm دیگر هم پایین می‌آید و درآنجا، در اثر فشرده شدن فنر، به حالت سکون لحظه‌ای می‌رسد. ثابت نیروی فنر ۴۲۷N/m است. (الف) $d$ چقدر است؟ (ب) سرعت جسم پس از رسیدن به فنر همچنان، تا مدتی، افزایش می‌یابد. جسم چه مسافتی، از لحظهٔ رسیدن به فنر، می‌پیماید تا به بیشینهٔ سرعتش برسد؟

۳۶. کودکی در بالای قطعهٔ یخی به شکل نیمکره نشسته است (شکل ۳۹). در اثر ضربهٔ بسیار کوچکی که به او زده می‌شود شروع به لغزیدن می‌کند. نشان بدهید که، اگر یخ بدون اصطکاک باشد، کودک در ارتفاع $۲R/۳$ از یخ جدا می‌شود. (راهنمایی: هنگام جدا شدن کودک از یخ، نیروی عمودی سطح صفر می‌شود.)


شکل ۳۹. مسئلهٔ ۳۶

۳۷. ذرهٔ $m$ در شکل ۴۰ روی ریلی در داخل دایره‌ای به شعاع $R$ حرکت می‌کند. اصطکاکی درکار نیست. سرعت جسم، در پایین‌ترین